# Exerciții

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 9^{ax} - 4 \cdot 3^{ax+1} + 12 & ; x < 1 \\ -15x^2 - ax + a & ; x \geq 1. \end{cases}$

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f$ să fie continuă.

2. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții continue în $x_0$ și $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că $h$ este continuă în $x_0$ dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ $(= h(x_0))$.

3. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în $x_0$ și $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că $h$ este derivabilă în $x_0$ dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x_0) = g'(x_0)$.

4. Studiați uniform continuitatea funcțiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$

b) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

c) $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

5. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții uniform continue.

a) Arătați că $f+g$ este funcție uniform continuă, unde $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

b) Dați exemplu de două funcții $f$ și $g$ ca în enunț astfel încât $f\cdot g$ nu este funcție uniform continuă, unde $f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

c) Presupunem, în plus, că funcțiile $f$ și $g$ sunt mărginite. Arătați că funcția $f\cdot g$ este uniform continuă.

6. Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulțime mărginită și $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât, $\forall\,(x_n)_n\subset A$, $(x_n)_n$ șir Cauchy, avem că $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy. Arătați că $f$ este funcție uniform continuă.

7. Studiați convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

a) $f_n:(0,1)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

b) $f_n:[1,2]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

c) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=e^{-nx^2}\sin nx\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

d) $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x+n}{x+n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

e) $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

f) $f_n:(0,1)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^n}{e^x+x^n}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

g) $f_n:(0,1)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{e^x\cdot x^n}{1+x^n}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

h) $f_n:[3,5]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{(x+n)^3}{n^4}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

i) $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n(1-x^n)\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

j) $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n(1-x)^n\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

k) $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^3}{n^3+x^3}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

e) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

8. Arătați că următoarele serii de funcții converg uniform:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^8x^2}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n(n+1)}$.

9. Determinați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,x^n$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}\,x^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)\cdot 2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2\sqrt{3^n}}\,(x+2)^n$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)\sqrt{n}}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[5]{n+1}} \cdot x^n$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\sqrt[4]{n+2}} \cdot (x-2)^n$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} \cdot x^n$.

10. Dați exemplu de o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu raza de convergență $R=5$. Justificați alegerea făcută.

11. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $x$ următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

b) $f:(-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$.

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$.