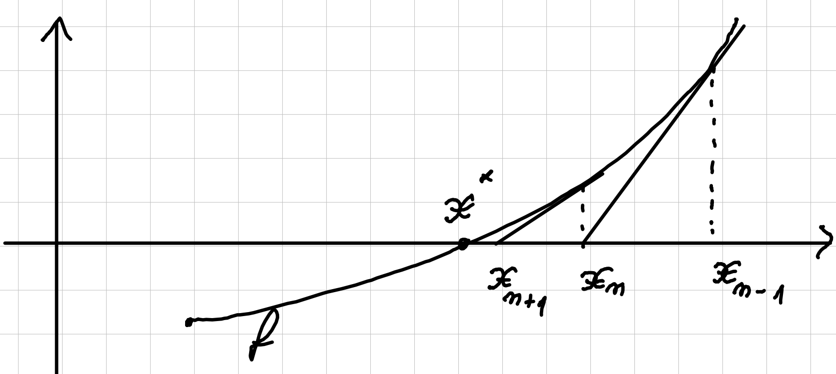
Cursul 13

3) Metoda Newton-Raphson:

La fiecare pas $n \geq 1$, aproximarea x_n se obține prin intersecția cu axa Ox a tangentei la graficul funcției f în $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$:



$$x_n = \{y = 0\} \cap \{y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})\}$$

$$\Rightarrow 0 = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \quad \forall n \geq 1$$

• Teoremă (Convergența metodei Newton-Raphson)

Fie $f \in C^2([a,b])$ cu $f(a) \cdot f(b) < 0$

Dacă $x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$ și $f'(x^*) \neq 0$, $\exists\, \delta > 0$ a.î. șirul definit de metoda Newton-Raphson:

$$\begin{cases} x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$$

converge către x^* cu viteză pătratică.

Demonstrație:

Definim funcția de punct fix

$\Phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Obs. că $f(x^*) = 0 \iff \Phi(x^*) = x^*$.

Cum $f'(x^*) \neq 0$ și $f' \in C^1([a,b])$,

$\exists\, \delta_1 > 0$ a.î. $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [x^* - \delta_1, x^* + \delta_1]$

Restricționez domeniul lui Φ la

$$\Phi : [x^* - \delta_1, x^* + \delta_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

$\Rightarrow \Phi'(x^*) = 0$. Cum $\Phi' \in \mathcal{C}^1([x^* - \delta_1, x^* + \delta_1])$

$\exists\ 0 < \delta \leq \delta_1$ a.î.

$$|\Phi'(x)| = |\Phi'(x) - \Phi'(x^*)| \leq k < 1,$$

$$\forall x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$$

Restricționând domeniul lui Φ la

$$\Phi : [x^* - \delta, x^* + \delta] \longrightarrow \mathbb{R},$$

arăt că $\Phi([x^* - \delta, x^* + \delta]) \subseteq [x^* - \delta, x^* + \delta]$

Fie $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.

$$|\Phi(x) - x^*| = |\Phi(x) - \Phi(x^*)| = |\Phi'(\xi_x)| \cdot |x - x^*|$$

$$\leq k \cdot |x - x^*| < |x - x^*| < \delta.$$

Prin urmare, Φ satisface ipotezele teoremei de punct fix pentru o viteză de convergență pătratică $\square$

Q: Ce ne facem când avem $f'(x^*)=0$?

• Definiție

O rădăcină $x^* \in \mathbb{R}$ a ecuației $f(x)=0$ s.n. rădăcină cu multiplicitate $m \in \mathbb{N}^*$ dacă

$$\begin{cases} i) \ f(x) = (x-x^*)^m g(x). \\ ii) \ g(x^*) \neq 0 \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} i) \ f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0. \\ ii) \ f^{(m)}(x^*) \neq 0 \end{cases}$$

• Problemă: Ce viteză de convergență are metoda Newton-Raphson pentru rădăcini de multiplicitate $m > 1$?

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{(x-x^*)^m g(x)}{m(x-x^*)^{m-1} g(x) + (x-x^*)^m g'(x)}$$

$$\Phi(x) = x - (x - x^*) \cdot \frac{q(x)}{m\,q(x) + (x - x^*)\,q'(x)}$$

$$\Phi'(x^*) = 1 - \frac{q(x^*)}{m\,q(x^*)} = 1 - \frac{1}{m} > 0 \quad \forall\, m > 1$$

$\Rightarrow$ Viteza de convergență este doar liniară!

- Tehnică de accelerare a convergenței pentru $m > 1$ cunoscut:

$$\Phi_m(x) := x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Phi_m(x) = x - m(x - x^*)\,\frac{q(x)}{m\,q(x) + (x - x^*)\,q'(x)}$$

$$\Phi_m'(x^*) = 1 - \frac{m\,q(x^*)}{m\,q(x^*)} = 0$$

$\Rightarrow$ Viteza de convergență este pătratică!

- Tehnică de accelerare a convergenței pentru $m > 1$ necunoscut:

$$\tilde{\Phi}(x) := x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}, \text{ unde } \mu(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Temă bonus: Arătați $\tilde{\Phi}'(x^*) = 0$.

4) Metoda secantei

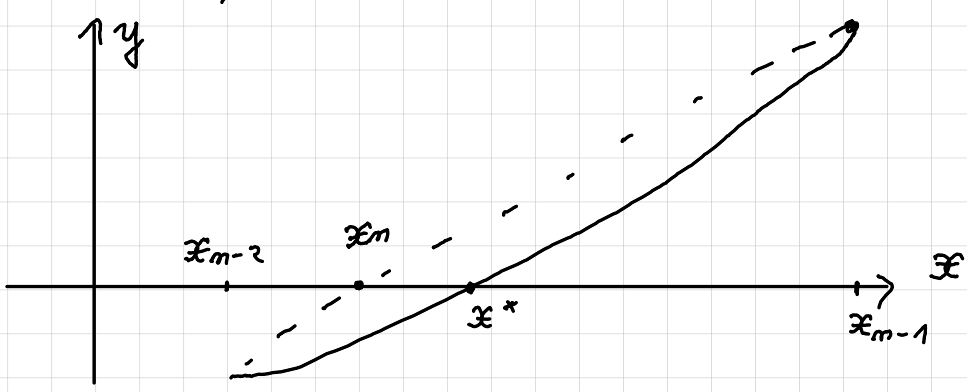
• Atunci când nu cunoaștem derivata funcției, putem să o aproximăm cu diferențe finite:

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \forall n \geq 2$$

și, înlocuind aproximarea în metoda Newton, obținem metoda secantei:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}$$

• Interpretare grafică: Înlocuim tangenta în $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ cu dreapta secantă care unește $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ cu $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$:



• Observație

Metoda secantei converge cu un ordin de convergență de $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Demonstrație:

Notăm $e_n := |x^* - x_n|$, $n \geq 1$

Se arată că $\exists M > 0$ a.î.

$$e_n \leq M \cdot e_{n-1} \cdot e_{n-2}, \ \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow e_2 \leq M e_1 e_0 \Rightarrow (M e_2) \leq (M e_1) \cdot (M e_0)$

Fie $\delta := \max\{M e_0, M e_1\}$

$\Rightarrow M e_2 \leq \delta^2$

Analog, $M e_3 \leq (M e_2) \cdot (M e_1) \leq \delta^3$

$$\dots$$

$$M e_n \leq \delta^{q_n}, \text{ unde}$$

$$\begin{cases} q_0 = q_1 = 1 \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad \text{(șirul Fibonacci)}$$

$\frac{q_n}{q_{n-1}} = 1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$. Notăm $r := \lim_n \frac{q_n}{q_{n-1}}$

$$\Rightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_n \frac{M e_n}{(M e_{n-1})^r} = \lim_n \delta^{q_n - r q_{n-1}} = c \in \mathbb{R}_+ \quad \square$$