# Cursul 3

- Soluție pentru sistemele unde este imposibilă sau problematică aplicarea metodei de eliminare Gauss:
  La fiecare pas $k = \overline{0, n-2}$ al metodei, identificăm cel mai mare număr în modul de pe coloana $k$ (denumit <u>pivot</u>) și îl mutăm pe diagonala principală printr-o permutare de ecuații.
- Exemplu:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 0 < \varepsilon << 1$$

Cum $1 > \varepsilon$, alegem 1 pivot și permutăm

$E_0 \longleftrightarrow E_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 \leftarrow E_1 - \varepsilon \cdot E_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1, \quad x_0 = 2-1=1$$

- Observație

Alegerea unui astfel de pivot, la fiecare pas al metodei Gauss, ne permite să aplicăm metoda Gauss nu numai pe matrici cu toți minorii principali nenuli ci pe orice matrice inversabilă!

• MEGPP: Metoda de eliminare Gauss cu pivotare parțială

Input: $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ <u>inversabilă</u>

$b = (b_i)_{0 \le i \le n-1}$

Pentru $k$ de la $0$ la $n-2$:

$$l = \underset{j=\overline{k,n-1}}{\arg\max} |a_{jk}|$$

Dacă $l \neq k$,

Permutăm linia $l$ cu $k$ în $A$ și în $b$

Pentru $i$ de la $k+1$ la $n-1$:

$m = a_{ik} / a_{kk}$

$b_i = b_i - m\, b_k$

Pentru $j$ de la $k$ la $n-1$:

$a_{ij} = a_{ij} - m\, a_{kj}$

Output: $A$ superior triunghiulară și $b$ modificat

- Considerăm acum cazul când avem de rezolvat mai multe sisteme cu aceeași matrice a coeficienților, dar vectori coloană a termenilor liberi diferiți

$$A \cdot x^{(i)} = b^{(i)} \quad , \; i = \overline{1, m}$$

Complexitatea rezolvării cu Gauss: $O(m \cdot n^3)$

| |
|---|
| Q: Cum putem rezolva mai rapid aceste $m$ sisteme de ecuații liniare pătratice? |

- Idee: Factorizarea LU.

Dacă am putea factoriza o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel:

$A = L \cdot U$, cu $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară

$U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară

putem rescrie sistemul de ecuații liniare pătratice $A \cdot x^{(i)} = b^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$, astfel

$$\underbrace{L \cdot U \cdot x^{(i)}}_{y^{(i)}} = b^{(i)}, \quad i = \overline{1, m}$$

ce poate fi rezolvat în doi pași:

1) $L \cdot y^{(i)} = b^{(i)}$ prin metoda substituției ascendente pentru a afla $y^{(i)}$

2) $U \cdot x^{(i)} = y^{(i)}$ prin metoda substituției descendente pentru a afla $x^{(i)}$.

Complexitatea rezolvării celor $m$ sisteme ar fi astfel $O(m \cdot n^2)$!

- În cele ce urmează, vom vedea când și cum putem obține o astfel de factorizare a unei matrici.

- Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ poate fi scrisă în felul următor

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ A = \left[\begin{array}{c|ccc}
a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0\,n-1} \\
\hline
a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1\,0} & a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-1}
\end{array}\right] = \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{cc}
\mathbb{R} & \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{c|c} a_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right]} \\
\rotatebox{-90}{$\in$} & \rotatebox{-90}{$\in$} \\
\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})
\end{array}
$$

- Definiție (complementul Schur)

Pentru $a_{00} \neq 0$, denumim complementul Schur asociat matricei $A$:

$$S := A_{11} - \frac{1}{a_{00}} A_{10} \cdot A_{01} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

- Factorizarea $A = L \cdot U$ poate fi rescrisă astfel:

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right]}_{A}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} l_{00} & 0 \\ \hline L_{10} & L_{11} \end{array}\right]}_{L}
\cdot
\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} u_{00} & U_{01} \\ \hline 0 & U_{11} \end{array}\right]}_{U}
$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} a_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} l_{00} u_{00} & l_{00} U_{01} \\ \hline u_{00} L_{10} & L_{10} \cdot U_{01} + L_{11} \cdot U_{11} \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_{00} \cdot u_{00} = a_{00} \\ l_{00} \cdot U_{01} = A_{01} \\ u_{00} \cdot L_{10} = A_{10} \\ L_{10} \cdot U_{01} + L_{11} \cdot U_{11} = A_{11} \end{cases}$$

- Pentru unicitatea factorizării, fixez $l_{00} = 1$ și obținem astfel:

$$u_{00} = a_{00}, \quad U_{01} = A_{01}, \quad L_{10} = \frac{1}{u_{00}} A_{10} = \frac{1}{a_{00}} A_{10}$$

$$L_{11} \cdot U_{11} = A_{11} - L_{10} \cdot U_{01} = \underbrace{A_{11} - \frac{1}{a_{00}} A_{10} \cdot A_{01}}_{S,\ \text{Schur}}$$

- Prin urmare, am redus factorizarea LU a unei matrici de dimensiune $n$ la factorizarea complementului ei Schur, de dimensiune $n-1$.

Repetând astfel acest procedeu de $n$ ori, obținem o unică factorizare LU.

- Teoremă (Factorizarea LU fără pivotare)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu toți minorii principali nenuli. Atunci:

$\exists!\ L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară cu $l_{ii} = 1\ \forall i = \overline{0, n-1}$

$\exists!\ U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară cu $u_{ii} \neq 0\ \forall i = \overline{0, n-1}$

astfel încât $A = L \cdot U$.

- Observație:

Complexitatea factorizării unei matrici este $O(n^3)$.

- Algoritmul de factorizare LU

Input: $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ cu minorii principali nenuli

$L = I_n$, $U = O_n$

Pentru $k$ de la $0$ la $n-1$:

$u_{kk} = a_{kk}$

Pentru $i$ de la $k+1$ la $n-1$:

$l_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{kk}}$

$u_{ki} = a_{ki}$

Pentru $i$ de la $k+1$ la $n-1$:

Pentru $j$ de la $k+1$ la $n-1$:

$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} \cdot u_{kj}$

Output: $L$ inferior triunghiulară

$U$ superior triunghiulară