

Exerciții

1. a) Studiați continuitatea funcției f ;
- b) Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$;
- c) Studiați diferențiabilitatea funcției f ,

unde:

$$\text{i) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{ii) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 y^5}{x^{10} + y^{10}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{iii) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^4} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{iv) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$v) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 y^2}{\sqrt{x^{16} + y^8}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$vi) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$vii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$viii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^4 + y^6}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Fie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă și

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \varphi(x e^{\frac{y}{z}} \sin z, x y z).$$

Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

3. Fie $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă și

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \varphi(e^{x^2 y}, \sin(xy), x^2 e^{y^2}).$$

Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y + x^2y^3 + 2xy$.

a) Determinați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f .

b) Determinați $df(1,2)$ și $d^2f(1,2)$.

c) Determinați polinomul Taylor de ordinul doi asociat funcției f în punctul $(1,2)$ (i.e. $T_2(x, y)$).

d) Determinați polinomul Taylor de ordinul trei asociat funcției f în punctul $(1,2)$ (i.e. $T_3(x, y)$).