POVESTE (Numărarea subspațiilor, combinări cuantice și lumi invizibile)

Episod 1: Coeficienții binomiali ai lui Gauss.

Problemă. Fie K un corp finit cu q elemente și V un K-sp. vect. de dimensiune n. Fie $1 \leq k \leq n$. Câte subspații vectoriale de dim k are V?

Indicație:

a) Arătați că numărul k-uplurilor $(v_1, \dots, v_k)$ de elemente liniar indep. din V este

$$N(n,k) = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1}).$$

b) Dacă W este un subsp. de dimensiune k al lui V, arătați că nr. k-uplurilor $(v_1, \dots, v_k)$ de el. lin. indep din W este $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})$.

c) Dacă $S(n,k)$ e nr. subsp de dim k din V, arătați că

$$N(n,k) = S(n,k)\cdot(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1}).$$

Consecință: Nr. căutat e $S(n,k) = \dfrac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$.

SY (10)

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$$

s.n. (pt. $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le k \le n$) coeficienții binomiali ai lui Gauss și joacă un rol important în combinatorică și teoria reprezentării.

Acești coeficienți apar și în geometrie necomutativă și fizica cuantică.

~~Episod~~ Episodul 2: Combinări cuantice.

~~Episod~~ Se pot defini coeficienții binomiali cu aceeași formulă când $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le k \le n$, dar q e un nr. complex ~~[illegible]~~ arbitrar?

Evident nu, pt. că numitorul se poate anula.

Totuși această piedică poate fi ocolită.

Idee: se consideră mai întâi q ca o nedeterminată (tehnică folosită deja la secțiunea despre rezultante).

Privim $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(X)$ = fracții raționale

Definim familia de polinoame $(P_{n,i})_{n \ge 1,\ 0 \le i \le n} \subset \mathbb{Z}[X]$

recurent, astfel:

- $P_{1,0} = P_{1,1} = 1$
- Dacă am definit $(P_{n,i})_{0 \le i \le n}$ pt. un $n \ge 1$, definim

$P_{n+1,0} = P_{n,0}$, $P_{n+1,n+1} = P_{n,n}$ și pt. $1 \le i \le n$

$$P_{n+1,i}(X) = P_{n,i-1}(X) + X^i P_{n,i}(X).$$

De asemenea, pt. $i \in \mathbb{N}^*$ definesc polinomul

$[i] = X^{i-1} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$; avem $[i] = \frac{X^i - 1}{X - 1}$ privit în $\mathbb{Q}(X)$.

În plus $[0] = 1$ (convenție).

SV

Apoi definim pt. orice $n \in \mathbb{N}^*$ polinomul

$$[n]! = [1] \cdot \ldots \cdot [n] \in \mathbb{Z}[X]$$

și prin convenție $[0]! = 1$.

Atunci:

<u>Prop.</u> $P_{n,i} = \dfrac{[n]!}{[i]!\,[n-i]!}$ $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \forall\, 0 \le i \le n$.

<u>Dem.</u> ușor prin inducție după n că egalitatea are loc pt orice i (detalii = exercițiu).

Dacă $q \in \mathbb{C}$, cum $P_{n,i} \in \mathbb{Z}[X]$, are sens $P_{n,i}(q)$. Definim q-coeficienții binomiali prin $\binom{n}{i}_q = P_{n,i}(q)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le i \le n$.

De asemenea definim $(n)_q! = [n]!\,(q) = \begin{cases} \frac{q-1}{q-1} \cdot \frac{q^2-1}{q-1} \cdot \ldots \cdot \frac{q^n-1}{q-1}, & \text{dacă } q \ne 1 \\ 1 \cdot 2 \cdots n = n!, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$

Așadar $\binom{n}{i}_1 = P_{n,i}(1) = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}$, combinările obișnuite.

~~iar pt q≠1~~ $\cancel{\binom{n}{i}_q =}$ pt. $q \ne 1$, dacă $(i)_q! \ne 0$ și $(n-i)_q! \ne 0$, adică dacă ~~$q^j \ne 1$~~ $q^j \ne 1$ pt. $j \le \max\{i, n-i\}$, atunci

$$\binom{n}{i}_q = P_{n,i}(q) = \frac{(n)_q!}{(i)_q! \cdot (n-i)_q!}.$$

Dacă însă $q^j = 1$ pt. un $j \le \max\{i, n-i\}$, nu mai are sens membrul drept, numitorul fiind 0.

Obs. că pt. $q \in \mathbb{N}, q > 1$ avem

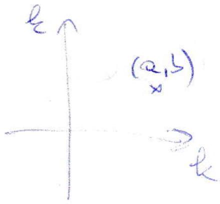
$$|S(n,k)| = \frac{\frac{q^n-1}{q-1} \cdot \frac{\cancel{q}(q^{n-1}-1)}{q-1} \cdots \frac{\cancel{q^{k-1}}(q^{n-k+1}-1)}{q-1}}{\frac{q^k-1}{q-1} \cdot \frac{\cancel{q}(q^{k-1}-1)}{q-1} \cdots \frac{\cancel{q^{k-1}}(q-1)}{q-1}} = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!} = \binom{n}{k}_q.$$

Mai observăm că dată relația de recurență pt $P_{n,i}$, calculată în $q \in \mathbb{C}$, rezultă $\binom{n+1}{i}_q = \binom{n}{i-1}_q + q^i \binom{n}{i}_q$.

Episod 3.

Figuri geometrice și morfisme de inele

Fie k un corp comutativ, $k[X,Y]$ inelul de polinoame. Atunci există o coresp. bijectivă între



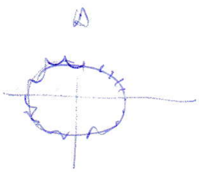
punctele planului afin k^2 și morfismele de inele $f: k[X,Y] \to k$ care fixează elementele lui k. (morfisme de k-algebre) $Alg(k[X,Y], k)$.

$(a,b) \longrightarrow$ unicul morfism cu $f(X)=a$, $f(Y)=b$ (propr. univ. a inelelor de polinoame)

Așadar un obiect geometric e descris printr-un inel (și niște morfisme).

Acesta este un ~~~~ punct de vedere care stă la baza Geometriei Algebrice.

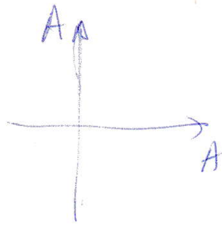
Alt exemplu:



cercul unitate din planul afin k^2 $\longleftrightarrow$ morf de inele $f: \dfrac{k[X,Y]}{(X^2+Y^2-1)} \to k$ care fixează el. lui k. $\left(Alg\left(\dfrac{k[X,Y]}{(X^2+Y^2-1)}, k\right)\right)$.

Idee: să înțelegem proprietăți ale obiectului geometric respectiv studiind proprietăți algebrice ale inelului (algebrei) asociate.

Putem considera un context mai general, în care considerăm "planul afin peste A", unde A e o k-algebră comutativă.

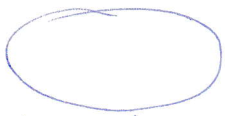


punctele lui A^2 $\overset{\text{bijecție}}{\leftrightsquigarrow}$ $\mathrm{Alg}(k[X,Y],A)$.

Episod 4. Spații cuantice

Încercăm să construim o teorie similară pt. a studia lumi care nu sunt (ușor) vizibile.

idee:



un spațiu cuantic

punctele sunt în bijecție cu $\mathrm{Alg}($o anumită algebră$, A)$

A → o alg, în general necomutativă; pt diferite A obținem ~~diferite~~ "realizări" ale spațiului cuantic în "listă de coordonate" diferite.

Exemplu, provenit din fizica cuantică:

planul cuantic: în loc de $k[X,Y]$ considerăm $k_q[X,Y]$, care ca și k-sp vectorial coincide cu $k[X,Y]$, dar are înmulțirea modificată astfel: $YX = qXY$.

$k_q[X,Y]$ = o deformare a lui $k[X,Y]$.

Punctele A-planului cuantic $\overset{\text{bijecție}}{\leftrightsquigarrow}$ $\mathrm{Alg}(k_q[X,Y],A)$ pt. orice algebră A

$\cong \{(a,b) \in A \times A \mid ba = qab\}$.

Dacă $A = k$, și $q \neq 1$, ~~...~~ A-realizarea sp. cuantic e reuniunea axelor de coordonate.

Pt. o descriere bună a sp. cuantic am nevoie de algebre necomutative!

SV

Epilog.

Ce legătură este între combinările cuantice și spațiile cuantice?

Dacă A alg. ~~comutativă~~ și $ab=ba$ (în particular mereu când A comutativă) $\to (a+b)^n = \sum_{i=\overline{0,n}} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$. $\cancel{\forall a,b\in A}$.

Dacă A alg. ~~necomutativă~~ $a,b\in A$ și $ab\neq ba$ nu mai avem o astfel de dezvoltare.

Totuși, dacă $ba = q\,ab$ (adică dacă (a,b) corespunde unui punct din A-planul cuantic)

atunci $$(a+b)^n = \sum_{i=\overline{0,n}} \binom{n}{i}_q a^{n-i} b^i .$$

Demonstrație: exercițiu.