Seminarul 4 de Algebră II
Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Corpuri (cont.)

Exercițiul 1.1: Fie p prim și K un corp cu $\operatorname{char} K = p$. Considerăm aplicația

$$\varphi : K \to K,\ \varphi(x) = x^p.$$

Atunci:

i) φ este morfism de corpuri.

ii) Dacă K este finit, φ este izomorfism de corpuri.

Exercițiul 1.2: Arătați că $K = \mathbb{Z}[i]/(3)$ este un corp cu 9 elemente și $\operatorname{char} K = 3$.

Exercițiul 1.3: Fie $\mathbb{H}$ corpul cuaternionilor şi aplicaţiile

$$T : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ T(x) = x + \overline{x}$$
$$N : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ N(x) = x\overline{x}.$$

a) Calculaţi produsul $(1 + 2i - j + k)(2 - i + 3j + 2k)$.

b) Arătaţi că $T(x), N(x) \in \mathbb{R}$ şi $x^2 - T(x)x + N(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{H}$.

c) Calculaţi inversul lui $1 + 2i - j + k$ în $\mathbb{H}$.

d) Determinaţi centrul lui $\mathbb{H}$.

e) Rezolvaţi ecuaţia $x^2 = -1$ în $\mathbb{H}$.

2 Inele de polinoame

Exercițiul 2.1: Fie x un element nilpotent în inelul comutativ R.

a) Demonstraţi că rx este nilpotent, pentru orice $r \in R$.

b) Demonstraţi că $1 + x$ este inversabil.

c) Demonstraţi că $u + x$ este inversabil, pentru orice u inversabil în R.

Exercițiul 2.2: Fie R un inel comutativ şi $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in R[X]$.

a) Demonstraţi că f este inversabil $\in R[X]$ dacă şi numai dacă a_0 este inversabil şi $a_1, ..., a_n$ sunt nilpotente în R.

b) Demonstraţi că f este nilpotent în $R[X]$ dacă şi numai dacă $a_0, a_1, ..., a_n$ sunt nilpotente în R.

c) Demonstraţi că f este divizor al lui zero în $R[X]$ dacă şi numai dacă există $a \in R$ nenul astfel încât $af = 0$.

d) Demonstraţi că f este idempotent în $R[X]$ dacă şi numai dacă a_0 este idempotent în R şi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Exercițiul 2.3: Determinaţi numărul polinoamelor de grad 2 din $\mathbb{Z}_{36}[X]$ care sunt:

a) inversabile;

b) nilpotente.

3 Temă

Exercițiul 3.1: Fie R un inel comutativ şi $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[[X]]$ (inelul de serii formale).

a) Demonstraţi că f este inversabil $\in R[[X]]$ dacă şi numai dacă a_0 este inversabil în R.

b) Demonstraţi că dacă f este nilpotent în $R[[X]]$, atunci a_i este nilpotent în R, $\forall i \geq 0$. Este adevărată şi reciproca?

c) Demonstraţi că f este idempotent în $R[[X]]$ dacă şi numai dacă a_0 este idempotent în R şi $a_i = 0,\ \forall i \geq 1$.