Oscilaţii cuplate pe perna de aer liniară

https://www.youtube.com/watch?v=cu4TvUwk17g

Considerăm un sistem de 2 oscilatori liniar armonici cuplaţi, schematizaţi în Fig. 1. Oscilaţiile sistemului, cu *două* grade de libertate, sunt numite *paralele* deoarece fortele elastice sunt orientate pe o singura directie, iar oscilatiile se fac pe aceasta directie. Resorturile cu constante elastice k_1, k_2, k_3 sunt considerate ideale (fără masă), iar deformările lor sunt în regim liniar (forţa elastică este proporţională cu deformarea resortului). Masele celor două corpuri sunt m_1, m_2, iar mişcarea se face fără frecare, de-a lungul axei orizontale Ox.

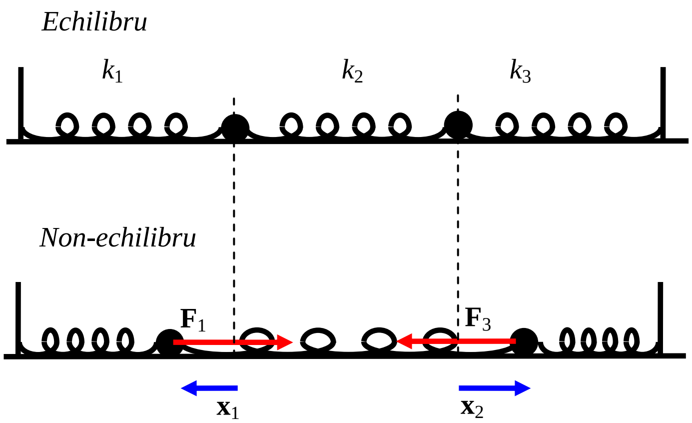

Fig. 1 Sistem de 2 oscilatori liniar armonici paraleli cuplaţi.

În consecinţă, legile de mişcare pentru cele două mase, conform principiului al doilea al mecanicii, se scriu:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 &= -k_1\mathbf{x}_1 - k_2\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right) \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 &= -k_3\mathbf{x}_2 + k_2\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right) \end{aligned}, \qquad (1)$$

unde $-k_1\mathbf{x}_1$, $-k_2\left(-\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_1\right)$ $-k_3\mathbf{x}_2$ sunt forţele elastice create în cele 3 resorturi, iar acceleraţia, de exemplu $\mathbf{a}_1$ este dubla derivată în raport cu timpul a coordonatei, $\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{x}}_1 = \dfrac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2}$.

Proiectăm ec. (1) pe axa orizontală şi obţinem:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}x_2 = 0 \\ &\ddot{x}_2 + \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 = 0 \end{aligned}, \qquad (2)$$

Considerăm $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = k$, $k_2 = k_c$, notăm

$$\begin{aligned}&\frac{k_1+k_2}{m_1}=\frac{k+k_c}{m}=\omega_0^2\\&\frac{k_2}{m_2}=\frac{k_c}{m}=\omega_c^2\end{aligned}\tag{3}$$

şi sistemul de ecuaţii diferenţiale (2) se scrie:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1-\omega_c^2x_2=0\\&\ddot{x}_2-\omega_c^2x_1+\omega_0^2x_2=0\end{aligned}\tag{4}$$

Fără a face apel la teoria sistemelor de ecuaţii diferenţiale, putem rezolva sistemul de ecuaţii diferenţiale (4) uşor, observănd că ecuaţiile diferenţiale cuplate ale sistemului se pot decupla adunând şi scăzând cele două ecuaţii:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+\left(\omega_0^2-\omega_c^2\right)(x_1+x_2)=0\\&\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2}+\left(\omega_0^2+\omega_c^2\right)(x_1-x_2)=0\end{aligned}\;.\tag{5}$$

Introducem noile variabile,

$$x_1+x_2=q_1,\qquad x_1-x_2=q_2\tag{6}$$

şi sistemul de ecuaţii diferenţiale (5) se scrie:

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_1+\underbrace{\left(\omega_0^2-\omega_c^2\right)}_{\omega_1^2}q_1=0\\&\ddot{q}_2+\underbrace{\left(\omega_0^2+\omega_c^2\right)}_{\omega_2^2}q_2=0\end{aligned}\;.\tag{7}$$

Soluţiile fiecarei ecuaţii ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (7) sunt de forma:

$$q_1=A_1\cos(\omega_1t+\alpha_1),\quad q_2=A_2\cos(\omega_2t+\alpha_2)\tag{8}$$

şi conform notaţiilor introduse în ec. (6), obţinem:

$$\begin{aligned}&x_1(t)=\frac{q_1+q_2}{2}=\frac{1}{2}\left[A_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)+A_2\cos(\omega_2t+\alpha_2)\right]\\&x_2(t)=\frac{q_1-q_2}{2}=\frac{1}{2}\left[A_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)-A_2\cos(\omega_2t+\alpha_2)\right]\end{aligned},\tag{9}$$

unde $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\omega_c^2}=\sqrt{k/m}$, $\omega_2=\sqrt{\omega_0^2+\omega_c^2}=\sqrt{(k+2k_c)/m}$. Deci, in general, elogatiile sunt combinatii liniare ale doua moduri cu frecvente unghiulare ω_1 si ω_2 numite moduri *normale*. Numarul de moduri normale este identic cu numarul gradelor de libertate (vezi a doua propozitie a primului paragraf).

Cele doua moduri normale se obtin cu urmatoarele conditii initiale:

a) Pentru frecventa unghiulara ω_1 se genereaza modul *simetric*, cand cele doua corpuri oscileaza in *faza*; sistemul oscilează fără ca resortul de cuplaj să fie deformat. Conditiile initiale sunt $x_1(0)=A;\ x_2(0)=A; \dot{x}_1(0)=0; \dot{x}_1(0)=0$. Se introduc condiţiile iniţiale în sistemul (9) şi obţinem (se derivează la timp soluţiile (9) pentru a se obţine vitezele):

$$\begin{aligned} 2A &= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \\ 2A &= A_1\cos\alpha_1 - A_2\cos\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 + \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 - \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \end{aligned}. \tag{10}$$

Soluţia sistemului (10) este

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0 \\ &A_1 = 2A; A_2 = 0 \end{aligned}, \tag{11}$$

pentru că $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ (argumentati), din primele doua ec. (10) obtinem $A_2 = 0$ (daca $A_2 \neq 0$ din ultimele doua ec. 10 se obtine $\alpha_2 = 0$ si primele doua ec. 10 nu pot fi satisfacute); dar $A_1 \neq 0$ (nu am avea miscare daca si $A_2 = 0$ si $A_1 = 0$), din ultimele doua ec. (10) obtinem $\omega_1 A_1 \sin\alpha_1 = \omega_2 A_2 \sin\alpha_2 = 0$ si din $\omega_1 A_1 \sin\alpha_1 = 0$ obtinem $\alpha_1 = 0$ si din $2A = A_1\cos\underbrace{\alpha_1}_{0} + \underbrace{A_2}_{0}\cos\alpha_2$ obtinem $A_1 = 2A$, iar soluţia finală este:

$$x_1(t) = x_2(t) = A\cos\omega_1 t = A\cos\left(t\sqrt{k/m}\right). \tag{12}$$

Perioada modului simetric este

$$T_s = T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \boxed{T_s = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}}. \tag{13}$$

b) Pentru frecventa unghiulara ω_2 se genereaza modul *antisimetric*, cand cele doua corpuri oscileaza in *antifaza*. Conditiile initiale sunt $x_1(0) = A;\ x_2(0) = -A; \dot{x}_1(0) = 0; \dot{x}_1(0) = 0$. Se introduc condiţiile iniţiale în sistemul (9) şi obţinem (se derivează la timp soluţiile (9) pentru a se obţine vitezele):

$$\begin{aligned} 2A &= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \\ -2A &= A_1\cos\alpha_1 - A_2\cos\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 + \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 - \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \end{aligned}. \tag{14}$$

Soluţia sistemului (13) este (argumentati)

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = 0 \\ &A_2 = 2A; A_1 = 0 \end{aligned}, \tag{15}$$

iar soluţia finală este:

$$x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega_2 t = A\cos\left(t\sqrt{(k+2k_c)/m}\right). \tag{16}$$

Perioada modului antisimetric este

$$T_a = T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \boxed{T_a = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k+2k_c}} < T_s}.$$

Fenomenul de *bătăi* se obţine respectând următoarele condiţii iniţiale $x_1(0)=A;\ x_2(0)=0; \dot{x}_1(0)=0; \dot{x}_1(0)=0$, adică unul dintre corpuri este ţinut pe loc, în poziţia de echilibru, iar celălalt este deplasat la distanţa *A* faţă de poziţia de echilibru. Se introduc condiţiile iniţiale în sistemul (9) şi obţinem (se derivează la timp soluţiile (9) pentru a se obţine vitezele):

$$\begin{aligned} 2A &= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \\ 0 &= A_1\cos\alpha_1 - A_2\cos\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 + \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \\ 0 &= \omega_1 A_1\sin\alpha_1 - \omega_2 A_2\sin\alpha_2 \end{aligned}. \tag{17}$$

Soluţia sistemului (11) este

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\ A_1 &= A_2 = A \end{aligned}, \tag{18}$$

pentru că: $\omega_1,\omega_2 \neq 0$ (argumentati), din ultimele doua ec. (17) obtinem $\omega_2 A_2\sin\alpha_2 = 0$; daca $A_2 = 0$ primele doua ec. (17) nu pot fi satisfacute simultan, deci $A_2 \neq 0$ si $\alpha_2 = 0$; din $\omega_1 A_1\sin\alpha_1 = 0$ obtinem $A_1 \neq 0$ pentru a fi satisfacute simultan primele doua ec. (17) si $\alpha_1 = 0$, iar soluţia finală este (se transforma suma de functii trigonometrice in produs):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} = A\cos(\omega'_b\, t)\cos(\omega_p t) \\ x_2(t) &= -A\sin\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\sin\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} = -A\sin(\omega'_b\, t)\sin(\omega_p t) \end{aligned}, \tag{19}$$

unde,

$$\begin{aligned} \omega'_b &= (\omega_2-\omega_1)/2 = \left(\sqrt{k+2k_c}-\sqrt{k}\right)\Big/\left(2\sqrt{m}\right), \\ \omega_p &= (\omega_1+\omega_2)/2 = \left(\sqrt{k+2k_c}+\sqrt{k}\right)\Big/\left(2\sqrt{m}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

În Fig. 2 sunt reprezentate grafic aceste soluţii în funcţie de timp, pentru $A=1,\ \omega_1 = 1s^{-1},\ \omega_2 = 1.1s^{-1}$.

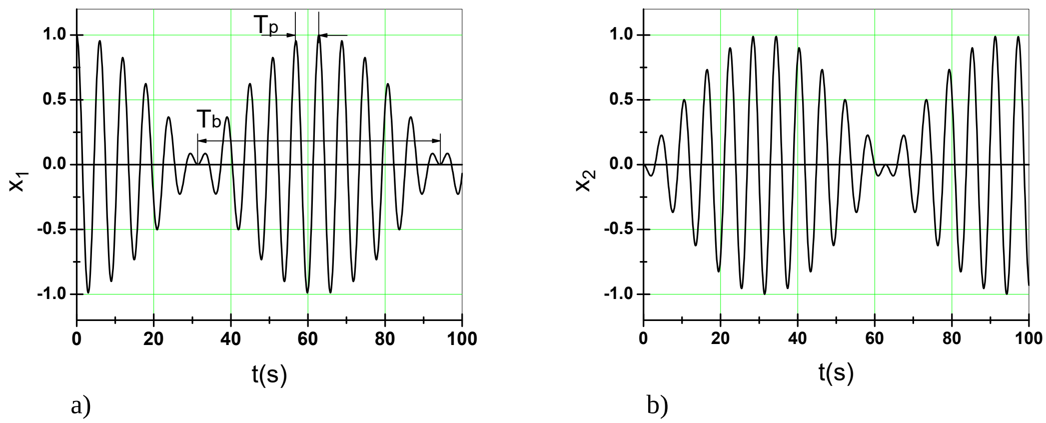

Fig. 2 Oscilaţiile celor două corpuri descrise de ec. (13) pentru $A = 1,\ \omega_1 = 1s^{-1},\ \omega_2 = 1.1s^{-1}$.

Se observă că oscilaţiile celor două corpuri se fac astfel încât atunci când unul oscilează cu amplitudine maximă celălalt oscilează cu amplitudine minimă: cei doi oscilatori îşi transferă unul altuia energie prin intermediul resortului de cuplaj de constantă $k_2 = k_c$. Intervalul de timp dintre două momente în care unul dintre corpuri oscilează cu minimă amplitudine defineşte *perioada bătăii*, T_b. Conform ec. (20) (vezi si Fig. 2a, b):

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega'_b} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \Rightarrow \boxed{T_b = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k+2k_c} - \sqrt{k}}} \tag{21}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} \Rightarrow \boxed{T_p = \frac{4\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k+2k_c} + \sqrt{k}}}. \tag{22}$$

Fenomenul de bătăi constă în obţinerea unei oscilaţii de frecvenţă unghiulară ω_p (semnal *purtător*) a cărei amplitudine este *modulată* cu frecvenţa unghiulară ω'_b (vezi ec. (19)).

În funcţie de perioada modurilor normale, cu ec. (21) perioada bătăilor se scrie:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \Rightarrow \boxed{T_b = \frac{T_s T_a}{T_s - T_a}}, \tag{23}$$

iar perioada semnalului purtător, cu ec. (22) se scrie:

$$T_p = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} \Rightarrow \boxed{T_p = \frac{2T_s T_a}{T_s + T_a}}. \tag{24}$$

Numărul de oscilaţii efectuate în perioada bătăilor este:

$$N = \frac{T_b}{T_p} \Rightarrow \boxed{N = \frac{T_s + T_a}{2(T_s - T_a)}}. \tag{25}$$