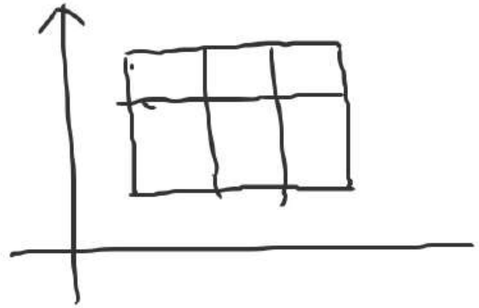
$$I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n], \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ mărginită}$$

$\Delta = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ o diviziune a lui I



$$m_i = \inf_{x\in A_i} f(x) \; ; \quad M_i = \sup_{x \in A_i} f(x)$$

$$m = \inf_{x\in I} f(x) \; ; \quad M = \sup_{x \in A} f(x)$$

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \operatorname{vol}(A_i), \quad S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \operatorname{vol}(A_i)$$

Daca Δ și Δ^* sunt două diviz. ale lui I,

$$m \cdot \operatorname{vol}(I) \le s_\Delta(f) \le S_{\Delta^*}(f) \le M \operatorname{vol}(I)$$

Atunci

$$\sup_{\Delta} s_{\Delta}(f) \leq \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

$$\underline{\int_I} f = \underline{\int_I} f(x)\,dx = \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f)$$ - integrala inferioară a lui f

$$\overline{\int_I} f = \overline{\int_I} f(x)\,dx = \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$ - integrala superioară a lui f

Avem $$\underline{\int_I} f(x)\,dx \leq \overline{\int_I} f(x)\,dx.$$

Definiție. Cu notațiile de mai sus, spunem că f este integrabilă Riemann dacă $\underline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$.

În acest caz numărul

$$\int_I f(x)\,dx := \underline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$$

se numește integrala Riemann a fct. f pe I.

Se mai notează și cu

$$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n \text{ sau } \int_I f$$

$n=2$. $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$, $I=[a,b]\times[c,d]$, $n=3$. $\int_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Remarcă. Integrala multiplă poate fi definită cu ajutorul sumelor Riemann:

$I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$, $\Delta = \{A_1, \dots, A_p\}$ div a lui I.

$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$, $\xi_i \in A_i$, ξ sist de puncte asociat div Δ.

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\, vol(A_i)$$ - suma Riemann asociată div Δ și sist de puncte ξ.

$\|\Delta\| = \max_i d(A_i)$, $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$,

$$d(J) = \max_{1 \le i \le n} |b_i - a_i|$$

Atunci f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă există $A \in \mathbb{R}$, a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pt orice div. Δ a lui I cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și pt orice sistem de puncte ξ asociat div. Δ avem.

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi) - A \right| < \varepsilon.$$

<u>Propoziție</u>- $I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f, g : I \to \mathbb{R}$ int. Riemann, $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f+g$ și αf sunt int. Riemann și

$$\int_I (f+g)(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx; \quad \int_I (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_I f(x)dx$$

Propoziție. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este int. Riemann atunci $|f|$ este integrabilă Riemann și $\left|\int_I f(x)dx\right| \leq \int_I |f(x)|dx$.

Teoremă (Crit. Darboux).

Fie $I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ mărginită. Funcția f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta$ o diviziune a lui I a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

"$\Longrightarrow$": $\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$. Fie $\varepsilon > 0$.

$\exists \Delta'$ și Δ^* div a.i. $\int_I f - s_{\Delta'}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_{\Delta^*}(f) - \int_I f < \frac{\varepsilon}{2}$

Fie $\Delta = \Delta' \cup \Delta^*$

$$s_{\Delta'}(f) \le s_{\Delta}(f) \le S_{\Delta}(f) \le S_{\Delta^*}(f).$$

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \le S_{\Delta^*}(f) - s_{\Delta'}(f) = S_{\Delta^*}(f) - \int_I f + \int_I f - s_{\Delta'}(f)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Longleftarrow$" Fie $\varepsilon > 0$. Există Δ div. a lui I a.î.

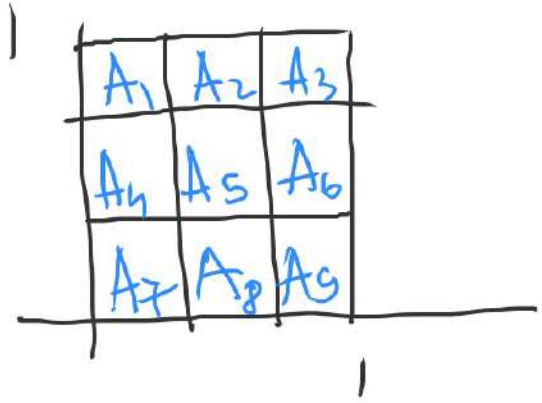
$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

$$s_{\Delta}(f) \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le S_{\Delta}(f)$$

$0 \le \overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f < \varepsilon$. Cum ε a fost ales arb. $\Longrightarrow \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$

Exemplu. Arătați că $f : I = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 1 & \text{altfel.} \end{cases}$$



nu este integrabilă Riemann.

Fie $\Delta = \{A_1, \dots, A_p\}$ o diviziune a lui $[0,1] \times [0,1]$.

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) = 0 \quad , \quad M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) = 1.$$

$$s_\Delta(f) = \sum_i 0 \cdot \mathrm{vol}(A_i) = 0 \; ; \; S_\Delta(f) = \sum_i 1 \cdot \mathrm{vol}(A_i) = 1$$

$$\underset{\underline{I}}{\int} f(x)\,dx \neq \overline{\int_I} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow f \text{ nu este int. Riemann.}$$

$$\underset{\underline{I}}{\int} f(x)\,dx = 0$$

Criteriul de integrabilitate Riemann al lui Lebesgue.

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A este neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_n)_{n \geq 1}$ un şir de intervale deschise din $\mathbb{R}^n$ astfel încât

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} vol(I_n) < \varepsilon$$

Obs 1) intervalele pot fi şi vide, $I = \emptyset$, $vol(I) = 0$.

2) intervale pot fi deschise, închise sau oarecare.

<u>Exemple</u>. 1) orice mulțime finită sau numărabilă este neglijabilă Lebesgue.

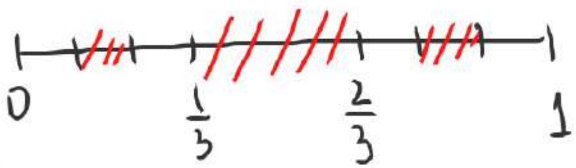
$A = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ numărabilă. $a_k = (x_k, y_k)$.

Fie $\varepsilon > 0$. $\quad I_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right) \times \left(y_k - \frac{1}{2}, y_k + \frac{1}{2}\right)$

$vol(I_k) = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, $\quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $\quad \sum_{k\geq 1} vol(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon$.

2) dacă $(A_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ este un șir de mulțimi neglij Lebesgue atunci $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ este neglijabilă Lebesgue.

3) mulțimea Cantor $C \subset \mathbb{R}$ este nenumărabilă și neglijabilă Lebesgue.



$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ nenumărabilă și neglij Lebesgue.

<u>Exercițiu</u>: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

Arătați că B este neglij Lebesgue. (puteți part. a și b).

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

C neglij Lebesgue.

<u>Teoremă</u> (crit. lui Lebesgue)

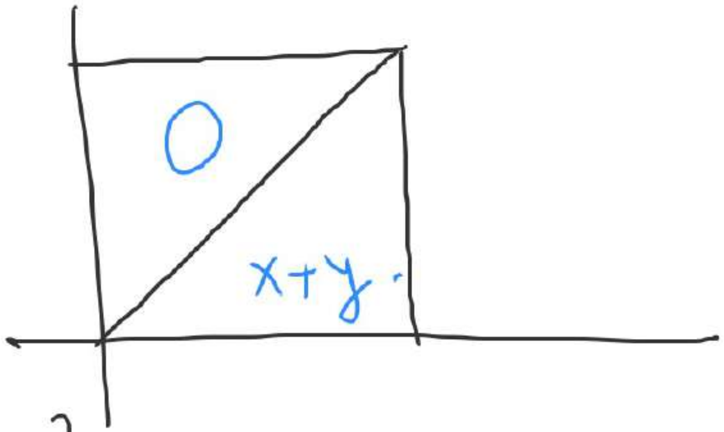
Fie $I \subset \mathbb{R}^n$ interval și $f : I \to \mathbb{R}$ mărginită. Fie $D_f = \{x \in I \mid f \text{ nu este continuă în } x\}$ Atunci f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă D_f este neglijabilă Lebesgue.

1) $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 1 & \text{altfel}. \end{cases}$

$D_f = [0,1] \times [0,1] \Rightarrow f$ nu este int. R.

2) $g : [0,2] \times [0,2] \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le y \le x \le 2 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



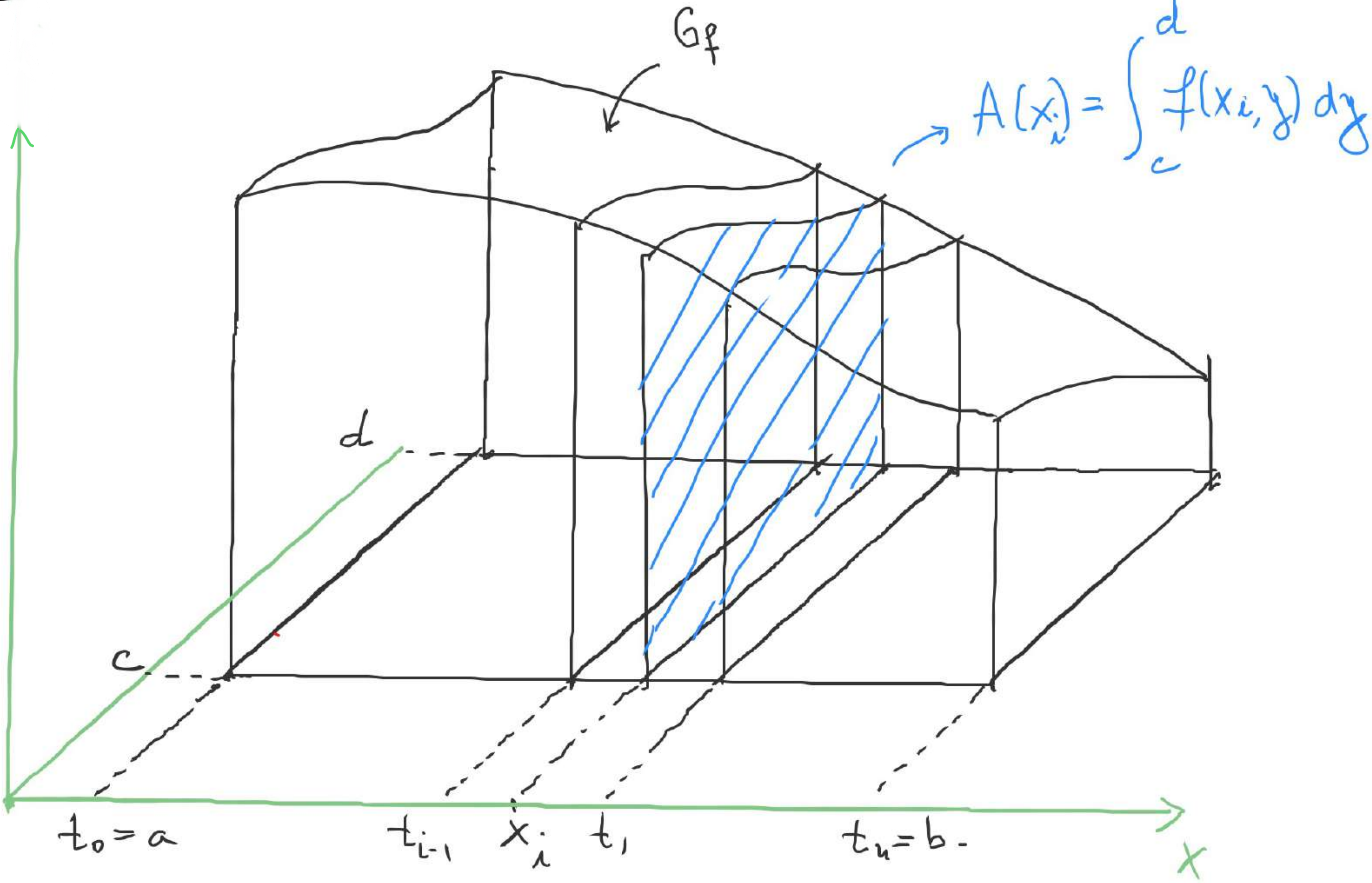
g mărginită, $D_f = \{ (x,x) \mid 0 < x \le 2 \}$

D_f - neglijabilă Lebesgue.

Deci g este int. Riemann.

<u>Exercițiu</u>: Folosind definiția arătați că g este int. Riemann și calculați integrala.

Teorema lui Fubini



$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\} \qquad t_{i-1} \leq x_i \leq t_i$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\| $$

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

$$\| $$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$x \in [a,b]$$

$A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ intervale închise, $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mărg.

$x \in A$, $f_x : B \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x,y)$

$$L(x) = \underline{\int_B} f_x(y)\,dy = \underline{\int_B} f(x,y)\,dy$$

$$U(x) = \overline{\int_B} f_x(y)\,dy = \overline{\int_B} f(x,y)\,dy$$

Teoremă (Fubini).

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ intervale închise $f : A \times B \to \mathbb{R}$ int. R.

Atunci funcțiile L și U sunt int. Riemann și

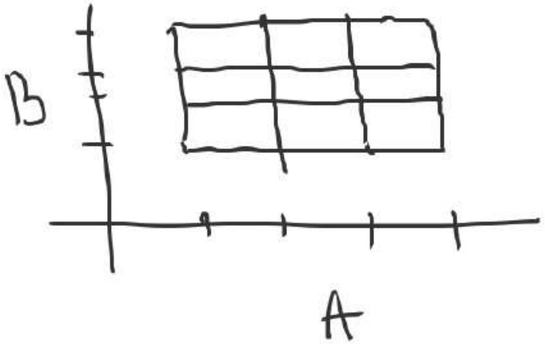
$$\iint_{A\times B} f = \int_A L(x)\,dx = \int_A U(x)\,dx.$$

$$\int_A L(x)\,dx = \int_A \left(\underline{\int_B} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_A U(x)\,dx = \int_A \left(\overline{\int_B} f(x,y)\,dy \right) dx$$

De asemenea

$$\iint\limits_{A\times B} f = \int\limits_B \left(\underline{\int\limits_A} f(x,y)\,dx \right) dy = \int\limits_B \left(\overline{\int\limits_A} f(x,y)\,dx \right) dy .$$



Dem. Fie $\Delta_A = \{R_1, R_2, \dots, R_p\}$ div a lui A

$\Delta_B = \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ div a lui B.

$\Delta_A \times \Delta_B = \{ R_i \times T_j \mid 1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q \}$ div a lui $A\times B$ și

orice div. a lui $A\times B$ este de acest tip.

$m_{R_i\times T_j}(f) = \inf\{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_i \times T_j \}$.

$$M_{R_i \times T_j} = \sup \{ f(x,y) \mid x \in R_i \times T_j \}.$$

$$x \in A, \quad m_{T_j}(f_x) = \inf_{T_j} f_x = \inf \{ f(x,y) \mid y \in T_j \}$$

$$m_{R_i \times T_j}(f) \leq m_{T_j}(f_x), \quad \forall x \in R_i$$

$$\sum_j m_{R_i \times T_j}(f) \cdot \mathrm{vol}(T_j) \leq \sum_j m_{T_j}(f_x) \cdot \mathrm{vol}(T_j), \quad \forall x \in R_i.$$

$$\| $$

$$s_{\Delta_B}(f_x) \leq \underline{\int_B} f_x = L(x).$$

$$\Rightarrow \sum_j m_{R_i \times T_j}(f) \, \mathrm{vol}(T_j) \leq \inf_{x \in R_i} L(x) \qquad \Big| \cdot \mathrm{vol}(R_i).$$

$$\sum_{i,j} m_{R_i\times T_j}(f)\,vol(T_j)\,vol(R_i) \le \sum_{i} \inf_{x\in R_i} L(x)\,vol(R_i)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$s_{\Delta_A\times\Delta_B}(f) \qquad\qquad\qquad\qquad s_{\Delta_A}(L).$$

Deci $s_{\Delta_A\times\Delta_B}(f) \le s_{\Delta_A}(L)$, pt $\forall \Delta_A, \forall \Delta_B$.

La fel, $S_{\Delta_A\times\Delta_B}(f) \ge S_{\Delta_A}(U)$.

$$s_{\Delta_A\times\Delta_B}(f) \le s_{\Delta_A}(L) \le S_{\Delta_A}(L) \le S_{\Delta_A}(U) \le S_{\Delta_A\times\Delta_B}(f).$$

$L \le U$

Deci L este int. Riemann și

$$\iint_{A\times B} f = \int_A L(x)\,dx.$$

Similar

$$\iint_{A\times B} f = \int_A U(x)\,dx.$$

---

f int. Riemann,

$$\iint_{A\times B} f = \int_A\left(\underline{\int_B} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_A\left(\overline{\int_B} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

dacă pt orice $x\in A$, $y \longrightarrow f(x,y)$ este int. Riemann at

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A\left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Daca $f: A\times B \to \mathbb{R}$ este <u>continua</u> atunci

$\forall x \in A$, $y \longrightarrow f(x,y)$ cont si deci int. Riemann

$\forall y \in B$, $x \longrightarrow f(x,y)$ cont si deci int. Riemann

$$\underline{\int_B} f(x,y)\,dy = \int_B f(x,y)\,dy, \quad \underline{\int_A} f(x,y)\,dx = \int_A f(x,y)\,dx$$

~~Atunci~~

$$\iint_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy$$

Calculați $\iint\limits_D (x+2xy)\,dx\,dy \qquad D=[0,2]\times[0,1]$.

$f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+2xy$ este cont. și deci int. R. În plus.

$$\iint\limits_D (x+2xy)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+2xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+2xy)\,dx \right) dy$$

$$\int_0^1 (x+2xy)\,dy = x\int_0^1 dy + 2x\int_0^1 y\,dy = x\cdot y\Big|_{y=0}^{y=1} + 2x\cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= x + x = 2x.$$

$$\Rightarrow \iint_D (x+2xy)\,dx\,dy = \int_0^2 2x\,dx = 4$$

$V = [a,b]\times[c,d]\times[s,t]$, $f: V \to \mathbb{R}$ cont (deci int R)

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[s,t]} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_s^t f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$