Examen[1] la Geometrie I, seria 10, 09.06.2023

Nume și prenume: ____________________________________

Grupa: ______

I. Pentru fiecare din obiectele cerute mai jos, daţi un exemplu justificat sau explicaţi de ce nu există.

1. Un punct $C \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $\triangle ABC$ e dreptunghic, unde $A = (1,2)$ şi $B = (2,1)$. **(0,5p)**

2. O infinitate de drepte distincte perpendiculare pe dreapta $d : 4x - y = 2$ în planul $\mathbb{R}^2$. **(0,5p)**

3. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $d_\alpha = \{(t+1, \alpha t - 2, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ să fie perpendiculară pe planul $\pi : x + 2y + 3 = 0$ în spaţiul $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

4. O conică nedegenerată $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ cu centrul în punctul $(1,2)$ şi tangentă la axele de coordonate. **(0,5p)**

5. O izometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât cercul $x^2 + y^2 - 4 = 0$ este mulţimea punctelor fixe ale lui f. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie dreapta $d : 4x + 3y - 2 = 0$ şi punctul $P = (0,4)$.

a) Demonstraţi că $P \notin d$. **(0,25p)**

b) Scrieţi ecuaţia dreptei perpendiculare din P pe d şi determinaţi distanţa de la P la d. **(0,75p)**

c) Determinaţi $s_P(d)$, unde $s_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este simetria centrală faţă de punctul P. **(0,5p)**

d) Există o izometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pentru care $f(d) = \{P\}$? Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie conicele $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ şi $\mathcal{C}_\alpha : x^2 + y^2 - 4y - \alpha^2 + 4 = 0$, pentru orice $\alpha > 0$. Considerăm mulţimea

$$M_\alpha = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ izometrie}, f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_\alpha\}.$$

a) Demonstraţi că $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_\alpha$ sunt cercuri, pentru orice $\alpha > 0$. Determinaţi centrele şi razele lor. **(0,5p)**

b) Determinaţi axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_\alpha$. **(0,5p)**

c) Determinaţi toate $\alpha > 0$ pentru care $M_\alpha \neq \emptyset$. **(0,5p)**

d) Pentru un α determinat anterior, daţi exemplu de $f \in M_\alpha$, scriind expresia lui f în coordonate. **(0,5p)**

e) Pentru orice α determinat anterior, decideţi dacă M_α este un grup împreună cu compunerea funcţiilor. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

f) Pentru orice α determinat anterior, decideţi dacă M_α este infinit. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

3. Considerăm planul euclidian $\mathbb{R}^2$.

a) Fie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ o conică nedegenerată. Demonstraţi că dacă $A, B, C, D \in \Gamma$ sunt vârfurile unui paralelogram cu centru O, atunci O este şi centru al conicei Γ. **(1p)**

b) Demonstraţi că singura conică nedegenerată în care nu poate fi înscris un paralelogram este parabola. **(0,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!