Inversare locală

Definiție. Fie G și D două mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$ și $f : D \longrightarrow G$. Spunem că f este un difeomorfism de clasă C^1 dacă 1) f este de clasă C^1 2) f bijectivă 3) inversa lui f este de clasă C^1.

Teorema (de inversare locală). Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $x_0 \in D$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o aplicație cu proprietatea că $df(x_0)$ este o aplicație liniară inversabilă (adică $\det J_f(x_0) \neq 0$). Atunci există $U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}(x_0)$, există $V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}(y_0)$ unde $y_0 = f(x_0)$, astfel încât

$f|_U : U \to V$ este difeomorfism de clasă C^1 de la U la V.

Dem. $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x,y) = f(x) - y$, $F_i(x,y) = f_i(x) - y_i$ $\qquad \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x,y) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

1) $F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$ $\qquad \dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y) = \delta_{ij}$

2) F de clasă C^1

3) $$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x_0, y_0) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x_0) = \det J_f(x_0) \neq 0.$$

Din Th. Funcțiilor Implicite, rezultă că există

$V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}(y_0)$, există $U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât

$\forall y \in V$, $\exists!\ x = \varphi(y) \in U$ a.î. $F(x,y) = 0 = f(x) - y$

Deci $f\big|_U : U \to V$ este bijectivă. În plus

$\varphi : V \to U$ este de clasă C^1, $\varphi(y_0) = x_0$ și

$$F(\varphi(y), y) = 0, \ \forall y \in V$$

$$\Updownarrow$$

$$f(\varphi(y)) = y$$

$\Longrightarrow \varphi$ este inversa lui f

În concluzie f este difeomorfism de clasă C^1

<u>Corolar</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă și $f : D \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 a.î. $df(a)$ să fie bijectivă pt orice $a \in D$. Atunci f este o aplicație deschisă (adică $\forall\, G \subset D$ deschisă, $f(G)$ este deschisă)

<u>Dem.</u> Fie $G \subset D$ deschisă și $y_0 = f(x_0) \in f(G)$ cu $x_0 \in G$.
Din Teorema de inversare locală, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $U = \overset{\circ}{U} \subset G$; există $V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}(y_0)$ a.î. $f\big|_U : U = V = f(U)$ este difeomorfism de clasă C^1.

Deci $y_0 \in f(U) = V \subset f(G)$. Cum y_0 a fost ales arbitrar rezultă că $f(G)$ este deschisă.

Teoremă Fie D și G mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$ și $f: D \to G$ bijectivă și de clasă C^1. UASE:

1) f difeomorfism de clasă C^1

2) $\det J_f(a) \neq 0, \ \forall a \in D$

3) $df(a)$ inversabilă $\forall a \in D$.

Obs: Difeomorfismele de clasă C^1 se numesc și schimbări de coordonate.

Integrale multiple

Fie $I = [a,b]$ sau (a,b) sau $(a,b]$ sau $[a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$

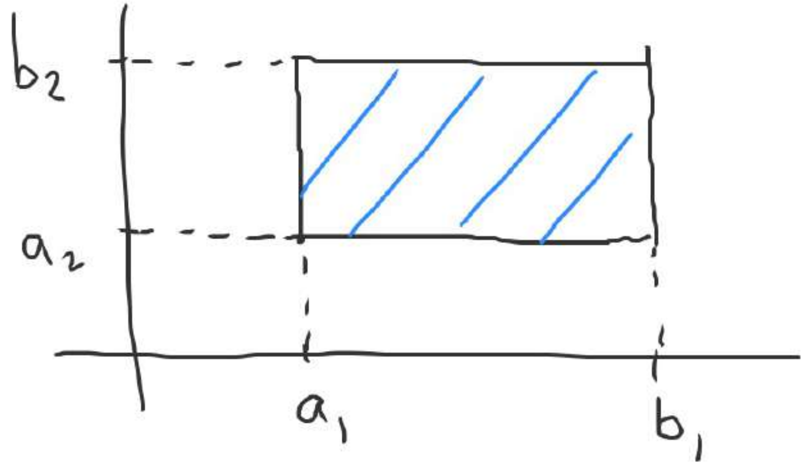
$|I| = b-a$ - lungimea intervalului

O mulțime de forma

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n,$$

unde $I_1, I_2, \dots, I_n$ sunt intervale din $\mathbb{R}$ se numește interval n-dimensional. Dacă toate intervalele $I_1, \dots, I_n$ sunt deschise (resp. închise) atunci I se numește deschis (resp. închis).

$n=2$



$$I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$$

$$vol(I)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)$$

$$I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$$

Numărul

$$vol(I)=|I_1|\cdot|I_2|\cdots|I_n|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

se numește volumul intervalului n-dimensional I.

$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{D}([a,b])$ (Δ div. a lui $[a,b]$.

Putem identifica Δ cu mulțimea de intervale

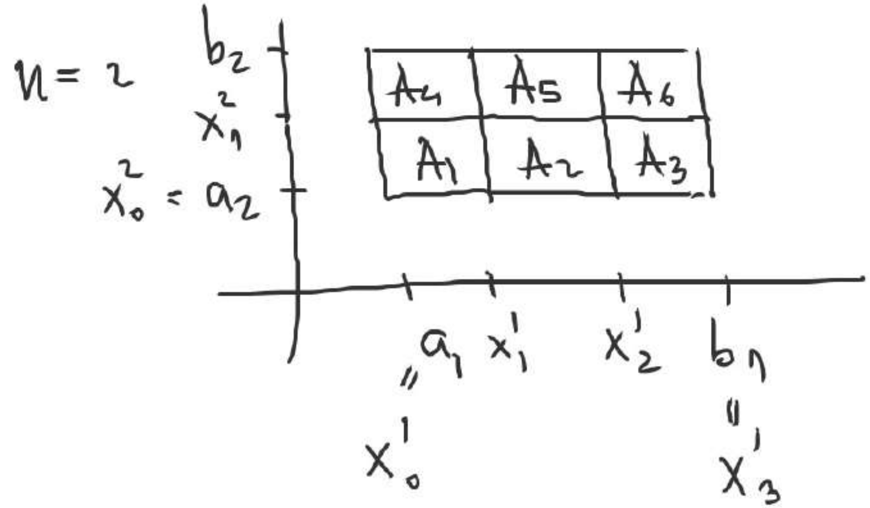
$$\Delta = \{[a,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},b]\}$$

Fie $I = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta_i = \{a_i = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{k_i}^i = b_i\} \in \mathcal{D}([a_i,b_i]),\ 1 \le i \le n$$

$$\Delta = \left\{ [x^1_{s_1-1}, x^1_{s_1}] \times [x^2_{s_2-1}, x^2_{s_2}] \times \dots \times [x^n_{s_n-1}, x^n_{s_n}] \;\middle|\; 1 \le s_i \le k_i,\ 1 \le i \le n \right\}$$

O familie de subintervale ale lui I, ca mai sus se numește <u>diviziune</u> a intervalului $I \subset \mathbb{R}^n$



Dacă Δ este o diviziune a interv. $I \subset \mathbb{R}^n$ şi dacă $A_1, A_2, \dots, A_p$ este o enumerare a subintervalelor $I_{s_1, s_2, \dots, s_n} = [x^1_{s_1-1}, x^1_{s_1}] \times [x^2_{s_2-1}, x^2_{s_2}] \times \dots \times [x^n_{s_n-1}, x^n_{s_n}]$ care formează diviziunea Δ vom scrie

$$\Delta = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$$

Observație :

Fie $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ diviziune a interv. $I \subset \mathbb{R}^n$

1) $I = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$; 2) $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$, $i \neq j$ 3) $vol(I) = \sum_{i=1}^{p} vol(A_i)$.

<u>Definiție</u> Fie $I \subset \mathbb{R}^n$ un interval; δ și Δ diviz ale lui I

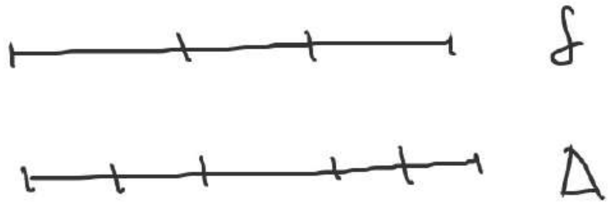
$\delta = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, $\Delta = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$

Spunem că Δ este mai fină decât δ (scriem $\delta < \Delta$)

dacă orice subinterval al lui δ se scrie ca o reuniune de subintervale din Δ, adică

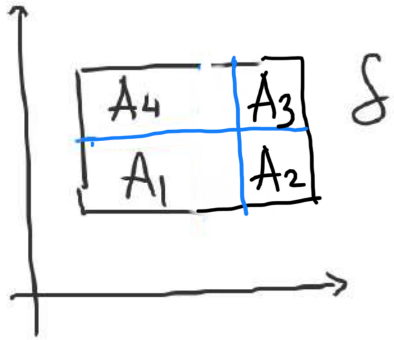
$$A_i = \bigcup_{B_j \subset A_i} B_j$$

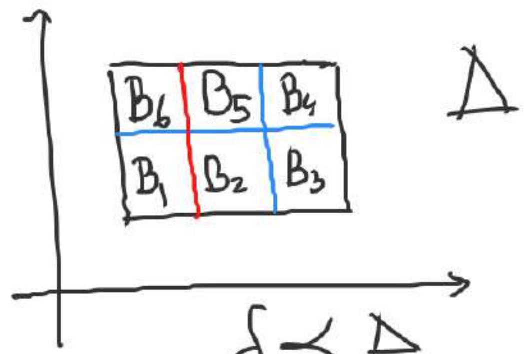
$n=1$



$\delta \prec \Delta$

$n=2$





$\delta \prec \Delta$

$A_1 = B_1 \cup B_2$;

$A_4 = B_5 \cup B_6$; $A_3 = B_4$; $A_2 = B_3$.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. mărginită

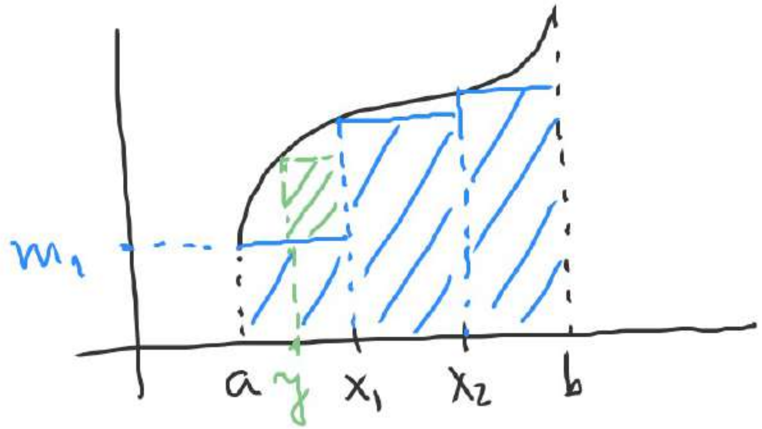
$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

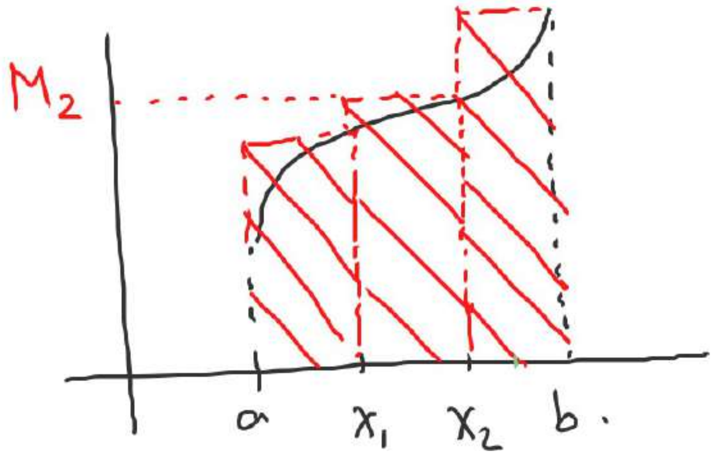
$m_i = \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i \}$

$M_i = \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i \}$

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$





$I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$ mărginită

$\Delta = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ o div. a lui I

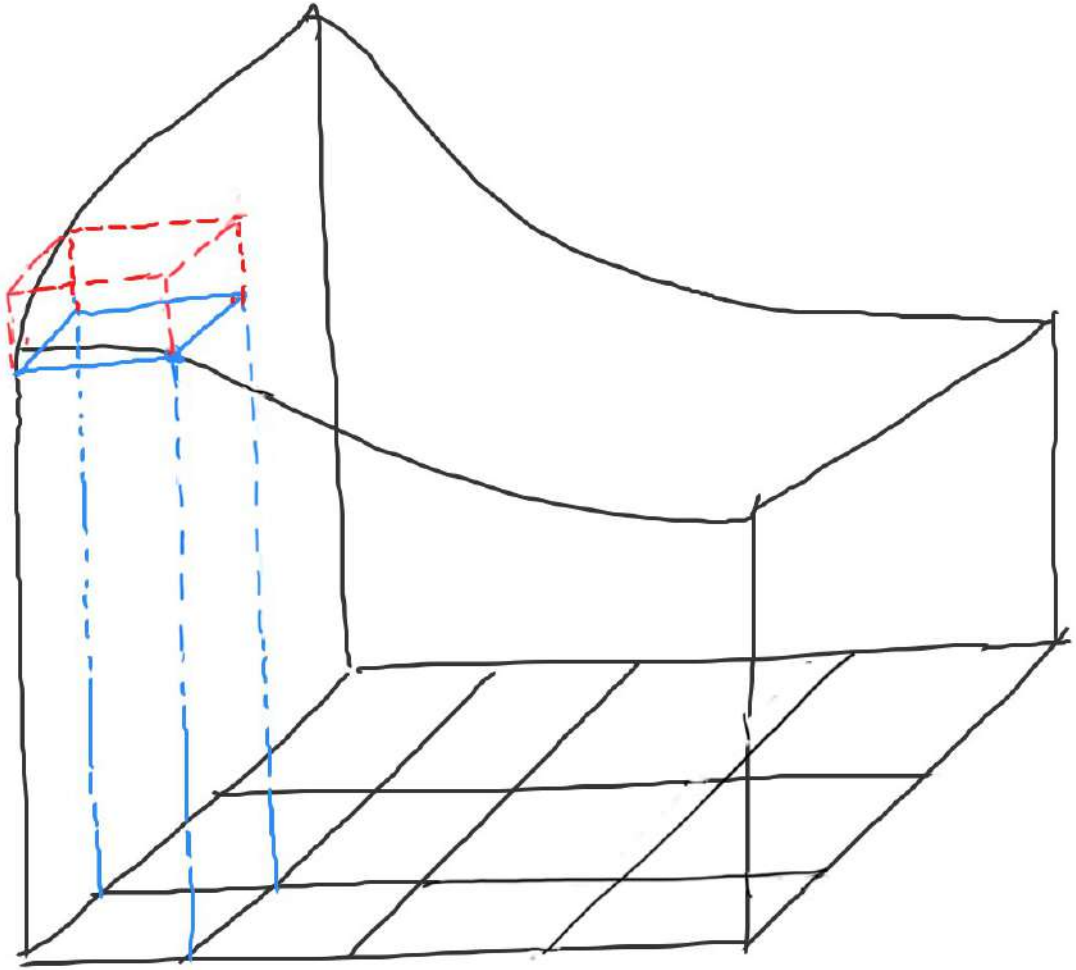
$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\quad$ $m = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$

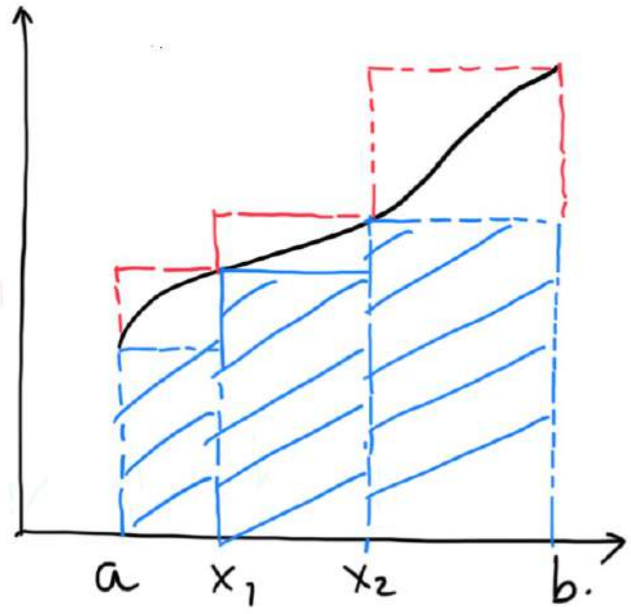
$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\quad$ $M = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$

$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \operatorname{vol}(A_i)$ – suma Darboux inferioară asociată funcției f și diviz. Δ

$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \operatorname{vol}(A_i)$ – suma Darboux superioară asociată funcției f și diviz. Δ.

$$m \operatorname{vol}(I) \leq s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) \leq M \operatorname{vol}(I).$$





$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Propoziție 1. Fie $I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ mărginită și Δ, Δ^* două diviziuni ale lui I cu Δ^* mai fină decât Δ

Atunci

$$s_\Delta(f) \leq s_{\Delta^*}(f) \leq S_{\Delta^*}(f) \leq S_\Delta(f).$$

Dem. $\Delta = \{B_1, B_2, \dots, B_q\}$, $\Delta^* = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ $\Delta < \Delta^*$

$k \in \{1, 2, \dots, q\}$ $\quad B_k = \bigcup\limits_{i \in I_k} A_i$, $\quad I_k = \{i \mid A_i \subset B_k\}$

$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in B_k\}$, $\quad m_i' = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$

$\text{vol}(B_k) = \sum\limits_{i \in I_k} \text{vol}(A_i)$, $\quad i \in I_k \Rightarrow m_i' \geq m_k$

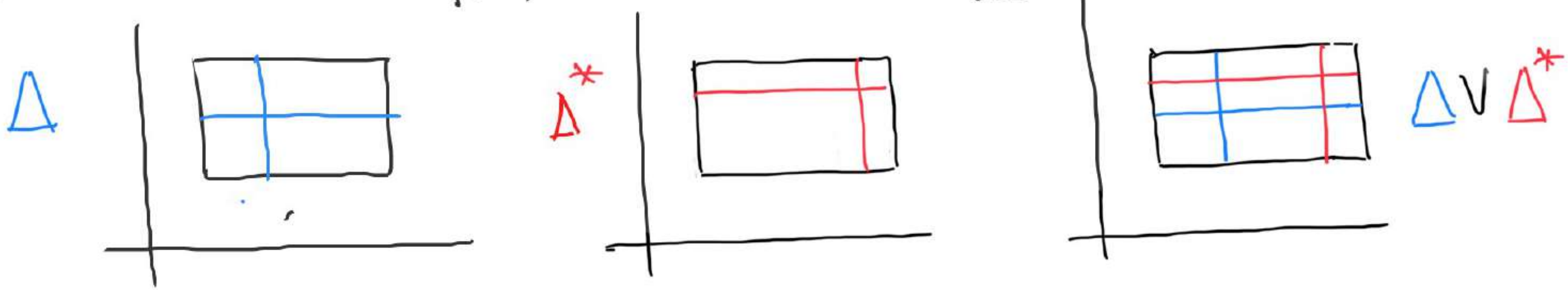
$$s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{q} m_k \operatorname{vol}(B_k) = \sum_{k=1}^{q} \left(m_k \cdot \sum_{i\in I_k} \operatorname{vol}(A_i)\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i\in I_k} m'_i \operatorname{vol}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} m'_i \operatorname{vol}(A_i) = s_{\Delta^*}(f).$$

<u>Propoziție 2</u>. Fie $I \subset \mathbb{R}^n$ interval, $f: I \to \mathbb{R}$ mărginită și Δ și Δ^* două diviziuni ale lui I. Atunci

$$s_\Delta(f) \le S_{\Delta^*}(f)$$

Dem.: $\Delta = \{A_1, \dots, A_p\}$, $\Delta^* = \{B_1, B_2, \dots, B_q\}$



$$K = \{(i,j) \mid \mathring{A}_i \cap \mathring{B}_j \neq \emptyset\}$$

$$\Delta \vee \Delta^* = \{A_i \cap B_j \mid (i,j) \in K\}$$

$\Delta < \Delta \vee \Delta^*$ și $\Delta^* < \Delta \vee \Delta^*$. Din Prop. 1, rezultă:

$$s_\Delta(f) \leq s_{\Delta \vee \Delta^*}(f) \leq S_{\Delta \vee \Delta^*}(f) \leq S_{\Delta^*}(f).$$

Exerciții

1*) Dintr-o bară subțire de fier de lungime 20 m trebuie confecționat scheletul unui acvariu. Știind că dispunem de 16 m^2 de sticlă pentru fețele acvariului, determinați cum trebuie secționată bara de fier astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă.

2*) Să se afle dimensiunile unei cutii paralelipipedice de volum dat $V = a^3$ astfel încât aria acesteia fără capac să fie minimă.

3) Fie $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1;\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f|_K$.

4) Să se determine extremele globale ale funcției

$$f(x,y,z) = 2x^2+2y^2-xy+z^4-2z^2$$

pe mulțimea $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2z^2 \leq 8\}$

5) Să se determine extremele globale ale funcțiilor următoare pe mulțimile K indicate

a) $f(x,y) = x^2+y^2-4x-6y$; $K = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$

b) $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$; $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$