Seminarul 8 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Rezultate folositoare din cursurile și seminariile trecute

Definiția 1.1: Fie R un inel și $n \geq 1$. Pentru un $\sigma \in S_n$, notăm cu

$$\sigma^* : R[X_1, ..., X_n] \to R[X_1, ..., X_n],\ \sigma^*(X_i) = X_{\sigma(i)}$$

(morfism de inele definit cu ajutorul proprietății de universalitate a inelului de polinoame).

i) Un polinom $P \in R[X_1, ..., X_n]$ se numește *simetric* dacă $\sigma^*(P) = P$ pentru orice $\sigma \in S_n$.

ii) Pentru orice $1 \leq k \leq n$, notăm cu

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}$$

i.e.

$$\begin{aligned} s_1 &= X_1 + ... + X_n \\ s_2 &= X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_{n-1}X_n \\ &... \\ s_n &= X_1X_2...X_n. \end{aligned}$$

Atunci s_k sunt polinoame simetrice și se numesc *polinoamele simetrice fundamentale.*

Definiția 1.2: Fie R un inel și $n \geq 1$.

a) Pe mulțimea monoamelor din $R[X_1, ..., X_n]$ introducem *ordinea lexicografică*:

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} ... X_n^{a_n} \geq_{lex} X_1^{b_1} X_2^{b_2} ... X_n^{b_n} \iff \begin{array}{c} a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...a_n = b_n \\ \text{sau} \\ \text{primul termen nenul din} \\ (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n) \text{ este pozitiv.} \end{array}$$

Este imediat că $\geq_{lex}$ este ordine totală.

b) Fie $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Notăm cu $LT_{lex}(f) = LT(f)$ termenul din f al cărui monom este cel mai mare în sensul ordinii lexicografice și îl numim *termenul principal al lui* f.

Teorema 1.3: *(fundamentală a polinoamelor simetrice)*

Fie R un inel, $n \geq 1$ și $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Atunci există un unic polinom $g \in R[X_1, ..., X_n]$ astfel încât

$$f = g(s_1, ..., s_n).$$

Propoziția 1.4: *(Formulele lui Newton) Fie R un inel și $n \geq 2$. Pentru orice $k \geq 0$, notăm cu*

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Atunci p_k sunt polinoame simetrice și, cu notațiile de la Definiția 1.1, avem relațiile:

$$p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - ... + (-1)^k k s_k = 0, \ \text{dacă } k < n,$$
$$p_k - s_1 p_{k-1} + s_2 p_{k-2} - ... + (-1)^n p_{k-n} s_n = 0, \ \text{dacă } k \geq n.$$

2 Polinoame simetrice. Formulele lui Newton

Exercițiul 2.1: Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

Exercițiul 2.2: Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5.$$

Exercițiul 2.3:

a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{C}$ sunt astfel încât $x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ şi $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, determinaţi valoarea lui $x^4 + y^4 + z^4$.

b) Demonstraţi că numerele x, y, z care satisface condiţiile anterioare nu sunt raţionale dar că $x^n + y^n + z^n \in \mathbb{Q}$ pentru orice număr natural n.

Exercițiul 2.4: Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 + x + 1 = 0$. Calculaţi $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7$.

Exercițiul 2.5: Fie polinomul $P = X^3 - 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Scrieți polinomul monic care are rădăcinile:

a) $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, 3x_3 - 2$;

b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$;

c) x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Exercițiul 2.6: Calculaţi $(\sin 20°)^7 + (\sin 40°)^7 - (\sin 80°)^7$.

Exercițiul 2.7: Calculați sumele $p_k = x_1^k + ... + x_n^k,\ 1 \leq k \leq n$, unde $x_1, ..., x_n$ sunt rădăcinile ecuației

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + ... + \frac{x}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = 0.$$

Exercițiul 2.8: Fie $n \geq 1$ și $t_k = \epsilon_1^k + ... + \epsilon_n^k$, unde ϵ_1, ..., ϵ_n sunt rădăcinile de ordin n ale unității. Arătați că $t_k = 0$ dacă $n \not| k$ și $t_k = n$ dacă $n \mid k$.

Exercițiul 2.9: Fie $n \geq 2$. Cu notaţiile uzuale pentru polinoamele simetrice din $R[X_1, ..., X_n]$, arătaţi că, pentru orice $k \leq n$,

$$p_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 2s_2 & s_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 3s_3 & s_2 & s_1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & ... & s_1 \end{vmatrix}.$$

Exercițiul 2.10: Fie K un corp, $\operatorname{char} K = 0$ și $x_1, ..., x_n \in K$ cu $x_1^k + ... + x_n^k = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n$. Demonstrați că $x_1 = ... = x_n = 0$.

Rămâne același lucru adevărat pentru corpuri de caracteristică pozitivă? Dacă nu, dați un contraexemplu.

Exercițiul 2.11:

a) Fie K un corp cu $\operatorname{char} K \neq 2$ și $A \subset K[X, Y]$ subinelul polinoamelor simetrice din $K[X, Y]$. Demonstrați că
$$A/(X^2 + Y^2) \simeq K[X].$$

b) Demonstrați că
$$\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X].$$

c) Demonstrați că
$$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2) \not\simeq \mathbb{R}[X].$$

Exercițiul 2.12:

a) Câte monoame de grad d în n variabile există?

b) Precizaţi numărul de monoame de grad 8 din $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_5]$ strict mai mici lexicografic ca $X_1^3X_3X_4$.

Exercițiul 2.13: Fie R un inel.

a) Arătaţi că polinomul $f = (X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$ este simetric şi scrieţi-l ca polinom în polinoamele simetrice fundamentale.

b) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$. Calculați discriminantul ecuației $X^3 + pX + q = 0$ *i.e.* $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

Exercițiul 2.14: Scrieţi următoarele polinoame simetrice ca polinoame în polinoamele simetrice fundamentale:

a) $f = (X_1 + X_2 - X_3)(X_1 - X_2 + X_3)(-X_1 + X_2 + X_3) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$.

b) $g = (X_1+X_2+X_3-X_4)(X_1+X_2-X_3+X_4)(X_1-X_2+X_3+X_4)(-X_1+X_2+X_3+X_4) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

c) $h = (Y_1^2 + Y_2^2)(Y_1^2 + Y_3^2)(Y_2^2 + Y_3^2) \in \mathbb{Z}[Y_1, Y_2, Y_3]$.

Exercițiul 2.15: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că dacă

$$tr(A) = tr(A^2) = ... = tr(A^n) = 0,$$

atunci A este nilpotentă.