Curs 3

19.10.2021

Continuare fct. speciale (C2)

5) Fct. parte întreagă, fct. parte fracționară

$(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$ $[x]$ $\{x\}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = [x]$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to [0,1)$ $g(x) = \{x\}$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$

$\boxed{x = [x] + \{x\} \quad (\forall) x \in \mathbb{R}}$

6) Dacă $A = \{1, 2, \dots, n\}$ atunci $S_n = \{f \mid \underbrace{f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}}, f$ bijectivă$\}$.

f s.n. permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$

$(|S_n| = n!)$
Exc! (Ind. mat)

Obs $(S_n, \circ) \to$ grup (neabelian pt $n \geq 3$) $(\forall) n \geq 1$. (În particular,

operația de compunere a fct.

orice grup finit $(G, *)$ poate fi "scufundat" într-un $(S_n, \circ)$)

(există un morfism injectiv de la $(G, *)$ în $(S_n, \circ)$)

$\boxed{\text{Thm. Cayley}}$

Propr Fie fct. $f, f' : A \to B$ și $g, g' : B \to C$. Atunci:

1. f, g injective $\Rightarrow g \circ f$ e injectivă
2. f, g surjective $\Rightarrow g \circ f$ e surjectivă
3. f, g bijective $\Rightarrow g \circ f$ e bijectivă
4. $g \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ e injectivă
5. $g \circ f$ surjectivă $\Rightarrow g$ e surjectivă
6. $g \circ f$ bijectivă $\Rightarrow g$ e surj, f e inj.

(Dați ex. de g, f a.î. ~~$g \circ f$ e inj și g nu e inj~~
$g \circ f$ e surj și f nu e surj.)

Dem 1 + 2 $\Rightarrow$ 3 ; 4 + 5 $\Rightarrow$ 6

5 Avem că $g \circ f$ e surjectivă. Vreau să arăt că g e surj ($\Leftrightarrow \mathrm{Im}(g) = C$)

Fie $c \in C$. Deoarece $g \circ f : A \to C$ e surj $\Rightarrow (\exists) a \in A$ a.î.

$(g \circ f)(a) = c \Rightarrow g(f(a)) = c$ $\quad f(a) = b \in B$ ($f : A \to B$ fct.)

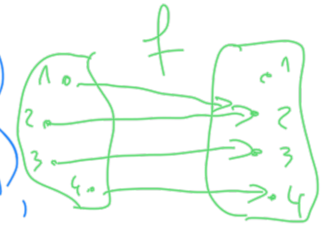
$g(b) = c \Rightarrow g$ e surj. ∎

Prop Fie $f : A \to B$ o funcție. Atunci f este bijectivă $\iff$ $(\exists)$ o funcție $g : B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$ (Pt. o mulțime C, $1_C : C \to C$ fct. identitate, $1_C(x) = x$ $(\forall)\, x \in C$).

Obs Dacă f este bijectivă atunci fct. g (de mai sus) este unică; g s.m. <u>inversa lui f</u> și se notează cu f^{-1}.

Prop2 Fie $f : A \to B$ funcție, $X, W \subseteq A$ și $Y, Z \subseteq B$. Atunci:

1. $X \subseteq W \Rightarrow f(X) \subseteq f(W)$
2. $Y \subseteq Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$
3. $f(X \cup W) = f(X) \cup f(W)$
4. $f(X \cap W) \subseteq f(X) \cap f(W)$ (cu egalitate dc. f e injectivă)
5. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$
6. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$
7. $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ (cu egalitate dacă f e inj)
8. $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (cu egalitate dacă f e surj)



unde $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$ $(\mathrm{Im} f = f(A))$ și $f^{-1}(Y) \stackrel{def}{=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ s.m. preimaginea lui Y prin f.

Ex $Y = \{1,2,3\}$ $\quad X = \{2,3\}$

$f^{-1}(Y) = \{1,2,3\}$ $\quad f(X) = \{2,3\}$

$f(f^{-1}(Y)) = f(\{1,2,3\}) = \{2,3\} \subsetneq Y$

$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{2,3\}) = \{1,2,3\} \supsetneq \{2,3\}$

Comentariu Preimaginea unei submulțimi a codomeniului prin funcția f <u>există ÎNTOTDEAUNA</u> (a nu se confunda $f^{-1}(Y)$ cu "obligativitatea" ca f^{-1} să fie inversa lui f (adică f să fie bijectivă)).

Obs Fie $f : A \to B$ fct. bijectivă și $f^{-1} : B \to A$ inversa

↓

$A \supseteq f^{-1}(Y) = \{a \mid f(a) \in Y\} = f^{-1}(Y) = \{f^{-1}(b) \mid b \in Y\}$

$f^{-1}(Y)$ – preimaginea lui Y prin f

$f^{-1}(Y)$ – imaginea lui Y prin f^{-1} $\cap A$

$a \in A \quad \underbrace{f(a)}_{b} \in Y \overset{f}{\underset{bij}{\Longrightarrow}} a = f^{-1}(b)$

$Y \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{f}} f(Y)$

Exc! (vezi Seminar) Fie M și N mulțimi finite. Calculați nr. fct. inj (surj) (bij) (s. cresc. / s. descresc.) definite pe M cu valori în N

Def 1) Spunem că 2 mulțimi A și B s.n. echipotente (sau au același cardinal) dacă $(\exists)$ $f: A \to B$ bijecție. Scriem $|A| = |B|$ dacă A, B au același cardinal.

Obs 1) 2 mulțimi finite A, B sunt echipotente $\Leftrightarrow$ A, B au același nr. de elem.

(Dc. $|A| = |B| = n \Rightarrow |\{f \mid f: A \to B, f \text{ bijecție}\}| = n!$)

2) O mulțime echipotentă cu $\mathbb{N}$ s.n. mulțime numărabilă.

Prin construcție axiomatică $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; noi vom nota $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ce putem spune despre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

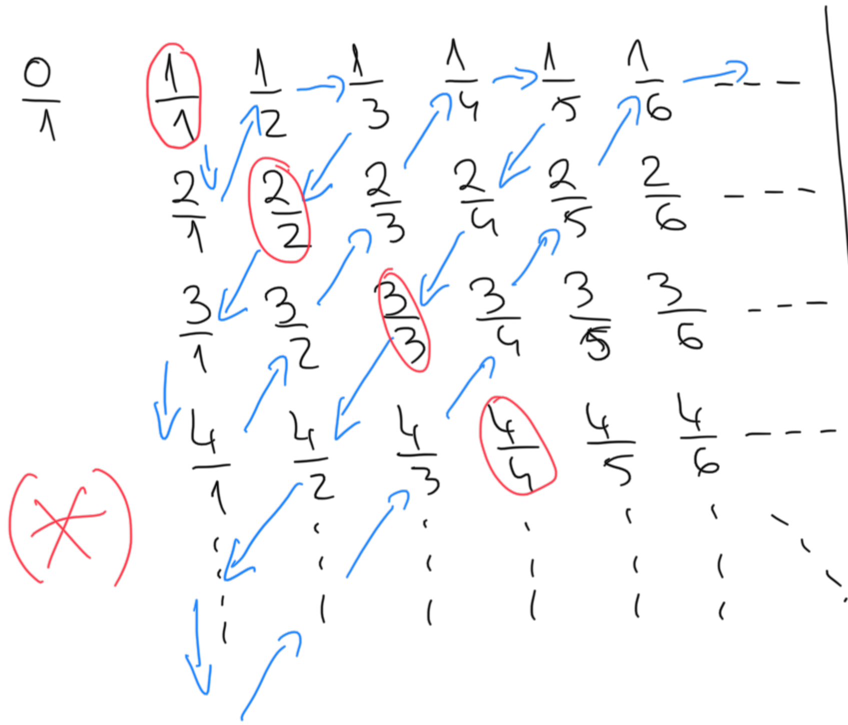
Exemple ① $\mathbb{Z}$ e numărabilă

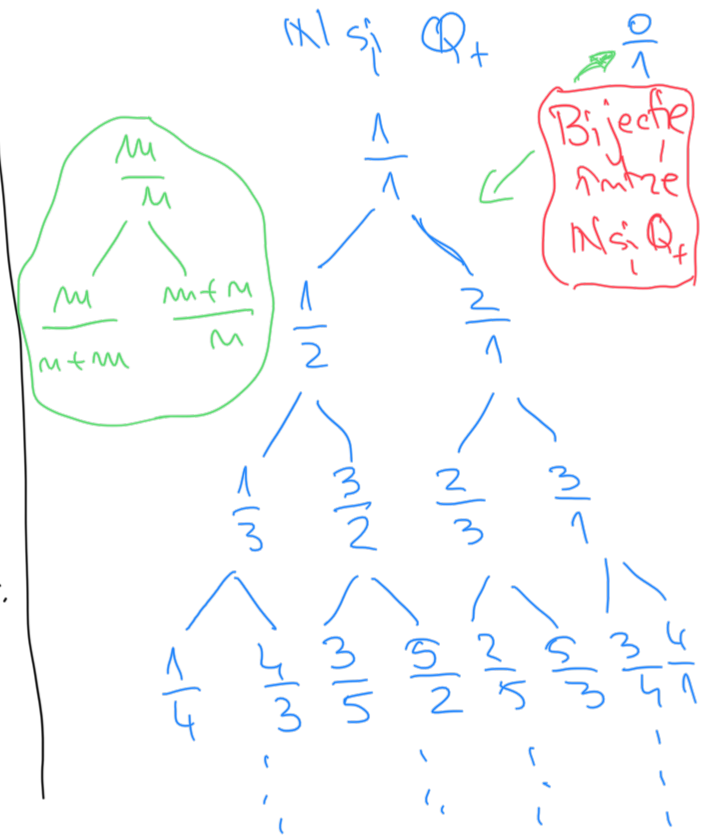
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 2|x| - 1, & x < 0 \end{cases}$

f bijecție

② $\mathbb{Q}$ e numărabilă (voi arăta doar că $\mathbb{Q}_+$ e numărabilă)

2000 (Calkin – Wilf) au dat bijecția dintre





$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$

f surj

$f(0) = \frac{0}{1}$ $f(1) = \frac{1}{1}$ $f(2) = \frac{2}{1}$ $f(3) = \frac{1}{2}$

$f(4) = \frac{1}{3}$ $f(5) = \frac{2}{2}$ - - - -

(vezi de ce e numărabilă ~~ma~~ seminar)

$\boxed{\text{Exc}}$ $f : A \to B$ surj $\Leftrightarrow (\exists)\ g : B \to A$ $g \circ f = 1_B$ $\to$ $\exists\ g : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ inj

$(f : A \to B$ inj $\Leftrightarrow (\exists)\ h : B \to A$ $h \circ f = 1_A)$

Def Fie A, B 2 mulțimi. Spunem că $|A| \leq |B|$ dacă $(\exists)\ f : A \to B$ injectivă. Dacă $|A| \leq |B|$ și A și B nu sunt echipotente atunci scriem $|A| < |B|$.

Obs (Exc!) 1) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($\mathbb{R}$ nu e numărabilă)

2) $|\mathbb{N}| \underset{\text{dem}}{=} |\mathbb{Z}| \underset{\text{dem}}{=} |\mathbb{Q}| \underset{\substack{\text{vezi}\\ C4(S4)}}{<} |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

3) Orice mulțime infinită conține o "copie" a lui $\mathbb{N}$, i.e. $(\exists)\ f : \mathbb{N} \to A$ inj ($\Leftrightarrow |\mathbb{N}| \leq |A|$ $(\forall)\ A$ infinită)

4) $(\forall)$ A mulțime $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ $\left(\mathbb{R} \simeq 2^{\mathbb{N}} \right)$
bijecție (vezi S4)

<u>Thm</u> <u>(Cantor-Bernstein)</u> Fie A, B 2 mulțimi. Avem

$|A| = |B| \Longleftrightarrow |A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$

(adică 2 mulțimi sunt echipotente $\Longleftrightarrow$ găsesc <u>fct. inj</u>
$((\exists)$ bij $f: A \to B)$ $g: A \to B$ și
$h: B \to A$)

<u>Obs</u> (*) fct. f construită $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ surj $\Rightarrow (\exists) g: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ inj (vezi <u>Exc</u> mai sus, S4). Cum $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ este inj
$i(n) = n$

$\xRightarrow[\text{Cantor-Bernstein}]{\text{Thm}} (\exists) h: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ bijecție $\Rightarrow \mathbb{Q}_+$ e numărabilă.