

Lista ex

① a) Calculati $\det A = \Delta$ pt $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow a+b+c=0$ sau $a=b=c$

② Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

Calculati $\det(A)$

③ Fie $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ba & ca \\ ba & 1+b^2 & ab \\ ca & bc & 1+c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

Calculati $\det(A^*)$

④ Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3m+4 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$

a) Determinati m ai $A^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$

b) Pt $m=0$, calculati A^{-1} . Precizati mai multe metode

⑤ Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$

Daca $\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ai $A^k = O_2$, at $A^2 = O_2$.

⑥ Fie $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f(X) = \det X$
Precizati daca f este inj, resp. surjectiva

⑦ Fie $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(X) = X^n$
 Să se arate că f nu e inj, și nu e surj, $\forall n \geq 2$

⑧ Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$

a) Dacă $A^2 = O_n$, at $I_n - A, I_n + A$ sunt inversabile

b) Dacă $A^3 = O_n$, at $I_n - A, I_n + A$ —

⑨ Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \min \{i, j\}$, $1 \leq i, j \leq n$
 Să se arate că $\Delta_n = \det A = 1$

⑩ Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$\text{rg } A = ?$ Discuție

⑪ Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$a, b = ?$ at $\text{rg } A = 2$

⑫ Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$, $A^{2023} - 2023A - I_3 = O_3$

a) $\text{rg } A = ?$

b) $\text{rg } (2023A + I_3) = ?$

⑬
$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$$