SEMINAR 2:

Cele 3 axiome!

A_1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ $\qquad a \to (b \to a)$

A_2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ $\qquad (a \to (b \to c)) \to (a \to b) \to (a \to c)$

A_3 $(\neg \psi \to \neg \varphi) \to (\varphi \to \psi)$ $\qquad (\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$

1) $v \in V$, $v \in Form$

2) $\varphi \in Form$, $\varphi \in Form$

3) $\varphi, \psi \in Form \Rightarrow \varphi \to \psi \in Form$

Exerciții:

Se.1.

i) pt. $\forall\ \varphi, \psi \in Form$, $\underbrace{\models \varphi \wedge \psi}_{\text{tautologie}}$ ddacă $\underbrace{\models \varphi \text{ și } \models \psi}_{\text{ambele sunt tautologie}}$

$\overset{\text{tautologie}}{\models \varphi \wedge \psi} \Leftrightarrow$ pt. $\forall\ e: V \to \{0,1\}$, $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow$

pt. $\forall\ e: V \to \{0,1\}$ $\quad \underset{1}{e^+(\varphi)} \wedge \underset{1}{e^+(\psi)} = 1$ (și)

pt. $\forall\ e_1: V \to \{0,1\}$, $e_1^+(\varphi) = 1$ și pt. $\forall\ e_2: V \to \{0,1\}$, $e_2^+(\psi) = 1$

$\Rightarrow \models \varphi$ și $\models \psi$ (confirmăm)

ii) pt. $\forall\ \varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ ddacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$

găsim un caz în care nu

$\varphi := v$, $\psi := \neg v$

$\models v \vee \neg v \Leftrightarrow$ pt. orice $v \to \{0,1\}$, $e^+(v \wedge \neg v) = 1$

Fie $e_1: V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = 0$

$e_1(x) = 1$, $\forall x \in V \setminus \{v\}$

$e_1(v) = 0 \Rightarrow e_1^+(v) = 0 \Rightarrow \not\models v$ nu este tautologie

Fie $e_2: V \to \{0,1\}$ a.î. $e_2(v) = 1$ $\forall v \in V$

$e_2^+(\neg v) = \neg e_2^+(v) = \neg e_2(v) = \neg 1 = 0 \Rightarrow \not\models \neg v$

Formele normale

FND $= (\_ \wedge \_) \vee (\_ \wedge \_) \vee \dots$ „și sau"

FNC $= (\_ \vee \_) \wedge (\_ \vee \_) \wedge \dots$ „sau și"

$a \to b \sim \neg a \vee b$

S2.2

i) $\sim ((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$ (înlocuirea implicațiilor)

$\sim \neg((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \vee v_0$ (-"-)

$\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0$ De Morgan

$\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0$ De Morgan

$\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee (\neg v_1 \vee v_0)$ reducerea dublei neg. $=$ FND

$\cancel{\sim (v_0 \wedge \neg v_1}$

$\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0)$

$\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0)$ FNC

$\neg v_1 \vee v_0 =$ FNC & FND (ambele)

ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$ (înlocuirea implicațiilor)

$\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg v_2 \to v_3)$ (-"-)

$\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4 \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3)$ reducerea dublei neg.

$(\neg v_1 \wedge v_4) \vee (v_2 \vee v_3) =$ FND

$(\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3) =$ FNC (Distributivitatea)

$\neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee v_2 \quad v_0 \wedge \neg v_1 \vee v_2$

S2.3

$\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ aducere la cele 2 forme normale, folosindu-ne de funcția booleană asociată:

	ε_0	ε_1	ε_2	$\varepsilon_0 \to \varepsilon_1$	$(\varepsilon_0 \to \varepsilon_1) \to \varepsilon_2$
1.	1	1	1	1	1
2.	1	1	0	1	0
3.	1	0	1	0	1
4.	1	0	0	0	1
5.	0	1	1	1	1
6.	0	1	0	1	0
7.	0	0	1	1	1
8.	0	0	0	1	0

1 : și $\wedge$

0 : sau $\vee$

! formele: dacă rez. e 1 ⇒ „1 și 1 și 1"; dacă e 0 ⇒ 0 sau 0 sau 0

$C_1 = v_0 \wedge v_1 \wedge v_2$

$D_1 = \neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2$

$C_2 = v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2$

$C_3 = v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2$

$C_4 = \neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2$

$D_2 = v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2$

$C_5 = \neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2$

$D_3 = v_0 \vee v_1 \vee v_2$

S2.4

i) $S = \{ \underbrace{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}}_{C_1}, \underbrace{\{\neg v_2, \neg v_1\}}_{C_2}, \underbrace{\{v_0, v_2\}}_{C_3}, \underbrace{\{v_0\}}_{C_4}, \underbrace{\{v_2\}}_{C_5}, \underbrace{\{v_3\}}_{C_6} \}$

↳ mulțime de clauze

este satisfiabilă? | trebuie să găsim măcar un model,

$v_0 = 1$
$v_2 = 1$
$v_3 = 1$

PP. că $\exists$ $e: V \to \{0,1\}$, $e \models S$ pt. orice $i \in \overline{1,6}$, $e \models C_i$
↳ satisface

$e \models C_4 \Rightarrow e(v_0) = 1$ $e \models C_1 \Rightarrow e(v_1) = 1$
$e \models C_5 \Rightarrow e(v_2) = 1$
$e \models C_6 \Rightarrow e(v_3) = 1$

dar acestea două $e \not\models C_2$

$\Rightarrow$ S nu este satisfiabilă

ii) $S = \{ \underbrace{\{v_0, v_1\}}_{C_1}, \underbrace{\{\neg v_1, v_2\}}_{C_2}, \underbrace{\{\neg v_0, v_2, v_3\}}_{C_3} \}$

Căutăm $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e \models S$

$e(v_0) = 1$
$e(v_1) = 0$ = un exemplu de model
$e(v_2) = 1$
$e(v_3) = 1$

S2.5 $Res(C_1, C_2) = ?$

i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$, $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$

$Res(C_1, C_2) = \{ \{v_1, v_5, v_6\} \}$

↳ trebuie să găsim literal (ceva, ¬ceva) și să-l eliminăm

ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$, $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$

$Res(C_1, C_2) = \{ \underbrace{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}}_{L = v_3}, \underbrace{\{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}}_{L = v_4} \}$

iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$ $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$

$Res(C_1, C_2) = \emptyset$

S2.6 Derivarea clauzei prin rezoluție

$C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ (trebuie să ajungem la forma asta)

$S := \{ \underbrace{\{v_0, v_4\}}_{C_1}, \underbrace{\{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}}_{C_2}, \underbrace{\{\neg v_4, v_0, v_1\}}_{C_3}, \underbrace{\{\neg v_0, v_3\}}_{C_4} \}$

$C_5 = \{v_4, v_3\} = Res(C_1, C_4)$
Literal v_0

$C_6 = \{\neg v_2, v_0, \neg v_4\}$ $Res(C_3, C_2)$
Literal v_1

$C_7 = \{v_3, \neg v_2, v_0\}$ $Res(C_5, C_6)$
Literal v_4