SEMINAR 5:

FUNCȚII CONTINUE

Def: Fie $A \subseteq (X, \mathcal{T})$. Elementul $x_0 \in X$ se numește punct izolat al mulțimii
↳ spațiu topologic

A dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $V \cap A = \{x_0\}$.

Obs: Fie $A \subseteq (X, d)$. x_0 este punct izolat al mulțimii A dacă $\exists\, r>0$
↳ spațiu metric

a.î. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$
↳ bila deschisă (are centru și rază)

Notație: $Izo\,A$ = mulțimea punctelor izolate ale mulțimii A

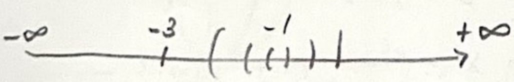
Ex1: Fie $D = (-1, +\infty) \cup \{-3\}$

a) $-1 \in D'$? (dacă -1 este sau nu punct de acumulare)

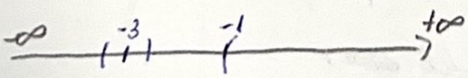
b) $-3 \in Izo\,D$ (pct. izolate)

$x_0 \in D' \xrightarrow{(X,\mathcal{T})} V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \quad \forall\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$

$\xrightarrow[(X,d)]{} B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \quad \forall\, r > 0$ = def. unui pct. de acumulare

a) 

$\forall\, r>0,\ B(-1, r) \cap (D \setminus \{-1\}) \neq \emptyset \Rightarrow -1 \in D'$ este pct. de acumulare

b) 

$B(-3, 1) = (-4, -2) \cap D = \{-3\} \Rightarrow -3 \in Izo\,D$

Teoremă: Fie $A \subseteq (X,d)$ și $x_0 \in \text{Izo} A$. Orice funcție $f: A \subseteq (X,d_1) \to (Y,d_2)$ este cont în x_0.

Ex 2: Fie $f: D = (-1,+\infty) \cup \{-3\} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{2x}, & x \in (-1,+\infty) \setminus \{0\} \\ a, & x = 0 \\ b, & x = -3 \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f.

f continuă pe $(-1,+\infty) \setminus \{0\}$ (comp. de f. elem.)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot \frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}$$

$f(0) = a$

Dacă $a = \frac{3}{2} \Rightarrow f$ cont în $x_0 = \frac{3}{2}$

$a \neq \frac{3}{2} \Rightarrow f$ discont în $x_0 = \frac{3}{2}$

$x = -3 \in \text{Izo} A \Rightarrow f$ cont în -3

Dacă $a = \frac{3}{2} \Rightarrow f$ cont pe $(-1,+\infty) \cup \{-3\}$

$a \neq \frac{3}{2} \Rightarrow f$ cont pe $(-1,+\infty) \cup \{-3\} \setminus \{0\}$

Ex 3: Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

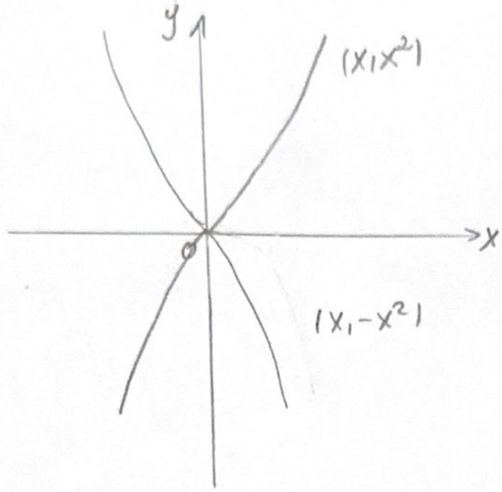
b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+y^6}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ (comb. de fct elem.)

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

! Nu avem voie L'Hopital când avem mai multe variabile la fct.

Luăm funcții la care știm ecuația și graficul



$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

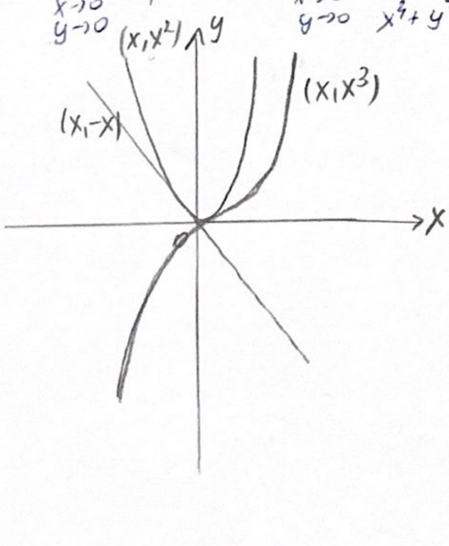
$$\lim_{x\to 0} f(x,-x^2) = \frac{x^2\cdot(-x^2)}{x^4+x^4} = \frac{-1}{2} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ f nu este cont în (0,0)

Met. cu șiruri: alegem minim 2 șiruri care tind la 0 și la calc. la $+\infty$

b) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$



$$\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6+x^6}{x^4+x^4} = \frac{2x^6}{2x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{x^6+x^{12}}{x^4+x^8} = \frac{x^2+x^8}{1+x^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \frac{x^6+x^{18}}{x^4+x^{12}} = 0$$

SCHEMĂ: $\underbrace{0}_{\to 0} \le \underbrace{|f((x,y))-l|}_{\to 0} \le \underbrace{g(x,y)}_{\to 0}$

$$|f(x,y)-l| = \left|\frac{x^6+y^6}{x^4+x^4} - 0\right| = \frac{x^6+y^6}{x^4+x^4} \le x^2+y^2$$

Cum construim $g(x,y)$

$$\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4} = \frac{x^6}{x^4+y^4} + \frac{y^6}{x^4+y^4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^6}{x^4+y^4} + \frac{y^6}{x^4+y^4} \le \frac{x^6}{x^4} + \frac{y^6}{y^4} = \underbrace{x^2+y^2}_{\to 0}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f((x,y))-l| = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f((x,y)) = l = 0$$

EX 4: Studiați cont funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^6+y^6)}{x^4+y^4}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^6+y^6)}{x^4+y^4} = \underbrace{\frac{\sin(x^6+y^6)}{x^6+y^6}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4}}_{\to 0} = 0$$

$\Rightarrow$ f nu este cont pe $(0,0)$