Seminar 8

① Să se arate că $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2+X)} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ și că $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2+1)}$ este un inel cu 4 elemente care nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

② Fie idealul $I = (2, X)$ în inelul $\mathbb{Z}[X]$. Să se arate că:

(i) I nu este ideal principal.

(ii) $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(2, X)} \simeq \mathbb{Z}_2$

(iii) I este ideal maximal în $\mathbb{Z}[X]$.

③ Fie $f = (X_1 - X_2)^2 (X_1 - X_3)^2 (X_2 - X_3)^2 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$. Să se arate că f este polinom simetric și să se scrie f ca polinom de polinoame simetrice fundamentale.

④ Fie $f = (X_1 + X_2 - X_3)(X_1 - X_2 + X_3)(-X_1 + X_2 + X_3)$ din $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$. Să se arate că f este polinom simetric și să se scrie f ca polinom de polinoame simetrice fundamentale.

(5) Să se scrie polinomul simetric

$$f=(X_1+X_2+X_3-X_4)(X_1+X_2-X_3+X_4)(X_1-X_2+X_3+X_4)(-X_1+X_2+X_3+X_4)\in\mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3,X_4]$$

ca polinom de polinoame simetrice fundamentale.

(6) Să se scrie polinomul simetric $f=(Y_1^2+Y_2^2)(Y_1^2+Y_3^2)(Y_2^2+Y_3^2)$ din $\mathbb{Z}[Y_1,Y_2,Y_3]$ ca polinom de polinoame simetrice fundamentale.

(7) Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale ecuației $x^3+x+1=0$. Să se calculeze $x_1^7+x_2^7+x_3^7$.

(8) Fie x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile complexe ale ecuației $x^4-2x^3+x+1=0$. Să se calculeze $x_1^9+x_2^9+x_3^9+x_4^9$.

(9) Să se calculeze $(\sin 20°)^7+(\sin 40°)^7-(\sin 80°)^7$.

(10) Fie $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}$ pentru care $x_1^k+\dots+x_n^k\in\mathbb{Q}$ pentru orice $1\le k\le n$. Să se arate că $x_1^k+\dots+x_n^k\in\mathbb{Q}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

(11) Fie K un corp comutativ de caracteristică 0, $n\geq 2$ un număr natural și $x_1,\dots,x_n\in K$ astfel încât $x_1^k+\dots+x_n^k=0$ pentru orice $1\le k\le n$. Să se arate că $x_1=\dots=x_n=0$. Rămâne adevărat pentru $\mathrm{char}(K)\neq 0$?