SEMINAR 9

FUNCȚII DIFERENȚIALE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_0 \in D \cap D'$

↳ mulțimea pct. de acumulare

Cazul 1:

$n = 1$

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ → derivabilitatea funcției ⇕ diferențiabilitatea funcției

$f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$

$df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

↳ dif. este o aplicație liniară / funcție liniară

$df(x_0)(x) = x \cdot f'(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

↳ funcția identică

$1_{\mathbb{R}} \overset{not}{=} dx$

$df(x_0) = dx \cdot f'(x_0)$

Cazul 2: $n \geq 2$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ → derivabilitatea parțială a funcției ⇑ diferențiabilitatea funcției

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \in \mathbb{R}^m$ → derivatele parțiale într-un pct. x_0

↳ derivata parțială a lui f în rap. cu x_1

$df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$df(x_0)(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1 \cdot \frac{\partial f}{x_1}(x_0) + x_2 \cdot \frac{\partial f}{x_2}(x_0) + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{x_m}(x_0)$

$dx_1 = pr_1 : R^n \to R$, $pr_1(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = x_1$

$dx_2 = pr_2 : R^n \to R$, $pr_2(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = x_2$

...

$dx_n = pr_n : R^n \to R$, $pr_n(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = x_n$

$$df(x_0) = dx_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + dx_2 \cdot \frac{\partial f(x_0)}{x_2} + \dots dx_n \cdot \frac{\partial f(x_0)}{x_n}$$

Ex 1 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : [0, +\infty) \to R^2$, $f(x) = (x \sin x, x^2 + \sqrt{x})$ $\forall x \in [0, +\infty)$

↳ Cazul 1 unde deriv = dif.

Notăm cele 2 componente ale lui $f(x)$

$f_1(x) = x \cdot \sin x$

$f_2(x) = x^2 + \sqrt{x}$

! când derivăm trebuie să punem cond. de există, dacă există, verif. deriv. în acele puncte

$f_{1,2} : [0, +\infty) \to R$

f_1 - derivabilă pe $[0, +\infty)$ (comb. de funcții derivabile)

$f_2'(x) = 2x + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{! condiția de la fracție}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$

Verif. deriv. în 0:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 0}{x - 0} = x + \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} \to +\infty} = 0 + \infty = +\infty$$

$\Rightarrow f_2$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$

f_1 deriv. pe $[0, +\infty)$
f_2 deriv. pe $(0, +\infty)$ $\Big| \Rightarrow f$ deriv. pe $[0, +\infty) \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ - diferențiabilă pe $(0, +\infty)$

$df(1): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

↳ nu e tot una cu dom funcției

$df(1)(x) = x \cdot f'(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \left(\sin x + x\cos x,\ 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \quad \forall x \in (0,+\infty)$

$f'(1) = \left(\sin 1 + \cos 1,\ \frac{5}{2}\right)$

$df(1)(x) = x \cdot \left(\sin 1 + \cos 1,\ \frac{5}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$df(1) = dx \cdot \left(\sin 1 + \cos 1,\ \frac{5}{2}\right)$

↳ funcția identică

Ex2: Să se studieze diferențiabilitatea funcției:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pas 1: Studiem continuitatea funcției

f cont pe $\mathbb{R}^2$ (seminar 5)

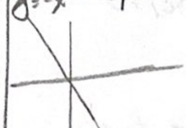
(dem. ca în sem. 5 →)

f cont. pe $\mathbb{R} \setminus (0,0)$ - op. cu fct. cont.

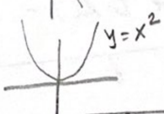
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \overset{0}{\underset{0}{=}}$

nu putem aplica L'Hopital!

$y = -x$



$f(x,-x) = \frac{x^2 \cdot (-x)}{x^2+x^2} = \frac{-x^3}{2x^2} = -\frac{x}{2} = 0$



$f(x,x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2+x^4} = \frac{x^4}{x^2+x^4} = \frac{x^2}{1+x^2} = 0$

$0 \le |f(x,y)| - l| \le g(x,y)$

$0 \le \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \le x^2(y+1)$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0$

$\Rightarrow f$ cont. pe $\mathbb{R}^2$

Teoreme:

Dacă f este dif. în $x_0 \Rightarrow f$ cont. în x_0

Dacă f nu este cont. în $x_0 \Rightarrow f$ nu este dif.

f este dif. în $x_0 \Rightarrow f$ are toate deriv. parțiale în x_0

Pas 2: Să se ~~dem.~~ studieze deriv. parțială a funcției

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(x^2 y)' \cdot (x^2+y^2) - x^2 y (x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx \cdot (x^2+y^2) - x^2 y (2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

↳ în funcție de x deci y este privit ca o constantă

$$= \frac{\cancel{2yx^3} + 2y^3 x - \cancel{2x^3 y}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3 x}{(x^2+y^2)^2}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(x^2\cdot y)'\cdot(x^2+y^2) - x^2 y\,(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\cdot(x^2+y^2) - x^2\cdot y\,(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + x^2\cdot y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

! $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1,0) \to x$
$e_2 = (0,1) \to y$
↳ ale 2 versori

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot t}{0^2+t^2} - 0}{t} = \frac{0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Pas 3: Se studiază dif. funcției

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

↙ aleatoriu

$df(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(1,1)(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2x}{2^2} + 0$

$= \frac{1}{2}x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$df(1,1) = \frac{dx}{2}$ ← prima proiecție