SEMINAR 4:

## SPAȚII TOPOLOGICE. SPAȚII METRICE

$n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$

$(\mathbb{R}, d_2)$

$d_2 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$d_2 ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots (x_n - y_n)^2}$

$(\mathbb{R}^n, d_1)$

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$d_1 ((x_1, x_2 \dots x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$

$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$

$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$d_\infty ((x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) = \sup \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \dots |x_n - y_n| \}$

$p \geq 3,\ p \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{R}^n, d_p)$

$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$d_p ((x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \dots + |x_n - y_n|^p}$

$n = 2$

$(\mathbb{R}^2, d_2)$

$C((x_0, y_0), r),\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0$

$B((x_0, y_0), r) = \text{Int}\, C((x_0, y_0), r)$

$B[(x_0, y_0), r] = C((x_0, y_0), r) \cup \text{Int}\, C((x_0, y_0), r)$

Ex 1: Fie $a<b \in \mathbb{R}$

a) Să se arate $(a,b)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise

b) Să se arate $[a,b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ sunt mulțimi închise în $\mathbb{R}$

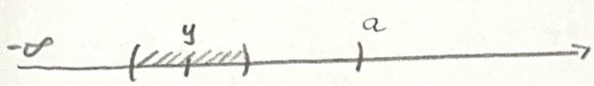
$(\mathbb{R}, d) \Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_d)$

$\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}}$ - topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

a) $(a, +\infty)$ - NU e bilă deschisă

$\forall x \in (a, +\infty)$, $\exists\ 0 \le r \le x-a$ a.î. $B(x, r) \subseteq (a, +\infty)$

$\Rightarrow (a, +\infty)$ mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

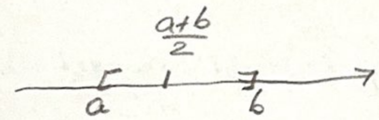



$(-\infty, a)$ - NU e bilă deschisă

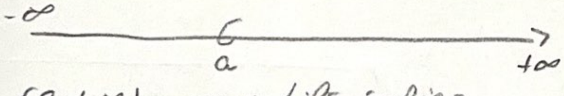
$\forall y \in (-\infty, a)$, $\exists\ 0 \le r \le a-x$ a.î. $B(y, r) \subseteq (-\infty, a)$

$\Rightarrow (-\infty, a)$ mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

b)

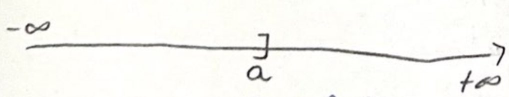



$[a,b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \Rightarrow [a,b]$ - mulțime închisă în $\mathbb{R}$




$[a, +\infty)$ - nu e bilă închisă

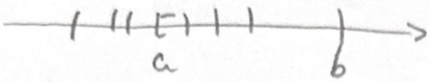
$C_{\mathbb{R}}[a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a)$ mulțime deschisă $\overset{def}{\Rightarrow} [a, +\infty)$ mul. închisă




$(-\infty, a]$ - nu e bilă închisă

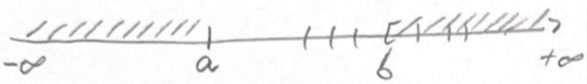
$C_{\mathbb{R}}[-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty)$ mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ $\overset{def}{\Rightarrow}$ $(-\infty, a]$ mulț. închisă în $\mathbb{R}$

c)



$\exists\, r>0$ a.î. $B(a,r) \subseteq [a,b) \Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

$C_{\mathbb{R}}[a,b) = \mathbb{R} \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$



$\nexists\, r>0$ a.î. $B(b,r) \subseteq C_{\mathbb{R}}[a,b) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a,b)$ nu este mulțime deschisă

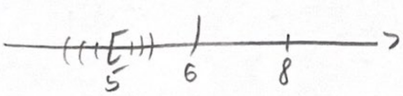
$\Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$

Ex2. Fie $A=[5,6) \cup \{8\} \subseteq \mathbb{R}$

a) $A \in \mathcal{V}_5$?
b) $6 \in A'$?
c) $\frac{11}{2} \in \mathring{A}$?

a) $V \in \mathcal{V}_{x_0} \xrightarrow{X,\tau} \exists\, G \in \tau$ a.î. $x_0 \in G \subseteq V$

$\phantom{a) V \in \mathcal{V}_{x_0}} \xrightarrow{(X,d)} \exists\, r>0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq V$



$\nexists\, r>0$ a.î. $B(5,r) \subseteq A \Rightarrow A \notin \mathcal{V}_5$