FMI, Mate, Anul I
Logică matematică

Examen

Nume: ______________________

Prenume: __________________

Grupa: _____________________

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	Oficiu	TOTAL
___/1	___/2	___/1	___/1	___/1	___/1,5	___/1,5	___/3	___/2	1	_____/15

1 Teoria mulţimilor

(P1) [1 punct] Fie α un cardinal infinit şi β un cardinal nenul astfel încât $\beta \leq \alpha$. Demonstraţi că $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

(P2) [2 puncte] Fie α un cardinal infinit şi β un cardinal astfel încât $\mathbf{2} \leq \beta \leq \mathbf{2}^\alpha$. Demonstraţi că $\beta^\alpha = \mathbf{2}^\alpha$.

(P3) [1 punct] Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Demonstraţi că

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = \mathfrak{c}.$$

2 Logica propoziţională

(P4) [1 punct] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulţimea variabilelor din logica propoziţională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se demonstreze că W este numărabilă.

(P5) [1 punct] Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:

$$\varphi \to (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi).$$

(P6) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate sintactic:

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi).$$

(P7) [1,5 puncte] Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule. Demonstraţi următoarele:

(i) Pentru orice formulă ψ,

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \psi \quad & \text{dacă şi numai dacă} \quad \vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi \\ & \text{dacă şi numai dacă} \quad \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi. \end{aligned}$$

(ii) Γ este consistentă dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

(P8) [3 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := (v_3 \wedge v_1) \to ((\neg v_1 \to v_2) \wedge (v_3 \to \neg v_4))$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := v_3 \to (\neg v_1 \leftrightarrow v_2)$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

3 Logica de ordinul întâi

(P9) [2 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(i) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \varphi \wedge \exists x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.