Lista 1 de probleme[1]

Grupele 103 & 104 - 2020-2021

Toate inelele se consideră unitare și comutative în cele ce urmează.

Exercițiul 1.1:

a) Demonstraţi că $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2+X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2+\hat{1})$ este un inel cu 4 elemente care nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exercițiul 1.2: Fie un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât există $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $f(a), f(b)$ şi $a+b$ impare. Demonstraţi că f nu are rădăcini întregi.

Exercițiul 1.3: Fie R un inel. Pentru $I \trianglelefteq R$, notăm

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, r^n \in I\}.$$

a) Demonstrați că $\sqrt{I}$ este un ideal al lui R ce îl conține pe I (se numește *idealul radical* al lui I).

Un ideal $I \trianglelefteq R$ se numește *ideal radical* dacă $\sqrt{I} = I$.

b) Notăm cu

$$\mathfrak{N}(R) = \{r \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, r^n = 0\}$$

mulțimea elementelor nilpotente ale lui R. Demonstrați că $\mathfrak{N}(R)$ este ideal al lui R (numit *nilradicalul* lui R).

c) Demonstrați că, folosind notațiile de la curs și seminar pentru ideale ale inelului factor,

$$\sqrt{I}/I = \mathfrak{N}\left(R/I\right)$$

(unde $\mathfrak{N}\left(R/I\right)$ este nilradicalul inelului R/I, definit în exercițiul precedent).

d) Determinați idealele radicale ale lui $\mathbb{Z}$.

Exercițiul 1.4: Fie $A = \{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f \text{ nu are termen de grad } 1\}$. Demonstrați că A este subinel unitar al lui $\mathbb{Q}[X]$ și

$$\mathbb{Q}[X,Y]/(X^3-Y^2) \simeq A.$$

[1] **Termen de predare: 12 aprilie 2020.**
Trimiteţi rezolvările în format pdf la miron.stanciu@fmi.unibuc.ro.
Exercițiul cu * valorează 0.2 puncte, iar celelalte 0.1 puncte. Nota maximă pe această listă este de 1p. **Puteți colabora, dar redactarea trebuie să fie individuală.** Îmi rezerv dreptul de a avea discuții individuale cu voi pentru a verifica înțelegerea problemelor redactate.

Exercițiul 1.5: Fie R un domeniu de integritate infinit și $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Presupunem că există o submulțime $A = A_1 \times ... \times A_n \subset R^n$ cu A_i infinite pentru orice $1 \leq i \leq n$ astfel încât $f(x) = 0$ pentru orice $x \in A$. Demonstrați că $f = 0$.

Mai rămâne adevărată afirmația dacă știm doar că $f(x) = 0$ pentru orice x dintr-o submulțime infinită a lui R^n?

Exercițiul 1.6: Fie $R = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$. Pentru orice $c \in [0,1]$, fie

$$\mathfrak{m}_c = \{f \in R \mid f(c) = 0\}.$$

Demonstrați că $\mathfrak{m}_c$ este ideal maximal al lui R.

Exercițiul 1.7*: Fie $R = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$.

a) Demonstrați că, folosind notațiile din exercițiul precedent, *orice* ideal maximal al lui R este de tipul $\mathfrak{m}_c$, pentru un $c \in [0,1]$.

b) Demonstrați că, dacă $b \neq c$, $\mathfrak{m}_b \neq \mathfrak{m}_c$.

c) Demonstrați că $\mathfrak{m}_c \neq (X - c)$, idealul generat de funcția polinomială $X - c$.

d) Demonstrați că $\mathfrak{m}_c$ nu este ideal finit generat.

Exercițiul 1.8: Fie $R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$. La fel ca mai devreme, pentru orice $c \in \mathbb{R}$, fie $\mathfrak{m}_c = \{f \in R \mid f(c) = 0\}$.

Pentru orice $f \in R$, notăm cu

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}},$$

numit *suportul funcției* f. Fie

$$I_0 = \{f \in R \mid \operatorname{supp}(f) \text{ compact}\}.$$

a) Demonstrați că I_0 este ideal al lui R.

b) Demonstrați că ${}^{R}\!/_{I_0}$ nu este domeniu de integritate.

c) Fie $\mathfrak{m}$ un ideal maximal astfel încât $I_0 \subset \mathfrak{m}$ (conform Lemei lui Krull). Arătați că nu există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_c$.

Exercițiul 1.9: Fie K un corp şi $n \geq 1$.

- Pentru orice ideal $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$, introducem notaţia

  $$\mathcal{Z}(I) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in K^n \mid f(x) = 0,\ \forall f \in I\}$$

  (mulţimea zerourilor comune ale tuturor polinoamelor din I).

- Pentru orice submulţime $A \subset K^n$, introducem notaţia

  $$\mathcal{I}(A) = \{f \in K[X_1, ..., X_n] \mid f(x) = 0,\ \forall x \in A\}$$

  (mulţimea polinoamelor care se anulează pe A).

Demonstraţi următoarele:

a) Pentru orice $A \subset K^n$, $\mathcal{I}(A) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ şi $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) \supset A$.

b) Pentru orice $I \trianglelefteq K[X_1, .., X_n]$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supset \sqrt{I}$ (vedeţi Exercițiul 1.3).

c) Demonstraţi că există o topologie pe K^n pentru care mulţimile **închise** sunt exact cele de tipul $\mathcal{Z}(I)$ pentru un $I \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$ (se numeşte *topologia Zariski*).