Examen[1] la Geometrie II, seria 10, 06.07.2024

Nume și prenume: ________________________________

Grupa: ______

1. Considerăm $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică.

a) Decideţi dacă punctele $M = (1, 1, 2), N = (0, -3, -1), P = (2, 1, -2)$ formează un sistem afin de generatori. **(0,5p)**

b) Scrieţi ecuaţia unei drepte paralele cu planul $\pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

c) Demonstraţi că, dacă $v, w \in \mathbb{R}^3$, $\langle v + w, v - w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$. Explicaţi apoi de ce într-un paralelogram cu laturi egale, diagonalele sunt perpendiculare. **(0,5p)**

d) Demonstraţi că, dacă $v, w \in \mathbb{R}^3, \|v\| = \|w\| = 1$, $v \neq w$, atunci $\|tv + (1 - t)w\| < 1$ pentru orice $t \in (0, 1)$. **(0,5p)**

2. Considerăm $\mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică şi funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - y - 1, 3x + z + 4)$.

a) Demonstraţi că f este o aplicaţie afină care nu este izomorfism. **(0,5p)**

b) Decideţi dacă există o dreaptă $d \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $f(d) = \{(2 + t, t, t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. **(0,5p)**

c) Fie $\Gamma : x^2 - yz - 1 = 0$. Determinaţi $T_{(2,1,3)}\Gamma$. Ce este mulţimea $\Gamma \cap T_{(2,1,3)}\Gamma$? **(0,5p)**

d) Demonstraţi că $f^{-1}(\Gamma)$ este o cuadrică degenerată. **(0,5p)**

3. Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, $f([X : Y : Z]) = [X + Z : Y - 2Z : Z]$.

a) Este f un izomorfism proiectiv? Justificaţi răspunsul. **(0,25p)**

b) Determinaţi mulţimea punctelor fixe ale lui f. Formează ea o conică proiectivă în $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$? **(0,75p)**

c) Fie dreapta proiectivă $d : X - Y - 2Z = 0$. Determinaţi mulţimea $d \cap f(d)$. **(0,5p)**

d) Determinaţi ecuaţia unei conice proiective nedegenerate $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ tangentă simultan la d şi $f(d)$. **(0,5p)**

4. Pentru fiecare din obiectele cerute mai jos, daţi un exemplu **justificat** sau explicaţi de ce nu există:

a) Aplicaţie afină $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care e injectivă dar nu surjectivă. **(0,5p)**

b) Izometrie a lui $\mathbb{R}^3$ care nu se poate scrie ca o compunere de două simetrii ortogonale faţa de plane. **(0,5p)**

c) Izometrie a lui $\mathbb{R}^2$ care duce elipsa $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ în hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. **(0,5p)**

d) Izomorfism proiectiv care nu este proiectivitate $f : \mathbb{P}^2K \to \mathbb{P}^2K$, unde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. **(0,5p)**

5. Demonstraţi că orice proiectivitate $f : \mathbb{P}^n\mathbb{R} \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ are un punct fix dacă şi numai dacă n este par. **(1p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. **Justificaţi toate răspunsurile date**. Timp de lucru: 3 ore. Succes!