Cursul 11

- Problemă (Integrarea numerică)

Dată $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, vrem să aproximăm numeric integrala definită

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

- Ideea: Cum polinoamele sunt ușor de integrat, aproximăm f cu polinomul de interpolare Lagrange asociat unei discretizări echidistante ale intervalului $[a,b]$, $(x_k)_{k=\overline{0,n}}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,L_{n,k}(x).$$

Obținem astfel următoarea <u>formulă de cuadratură</u> Newton-Cotes:

$$I(f) \approx I_n(f) := \int_a^b P_n(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_{n,k}(x) \right] dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b L_{n,k}(x)\,dx \right]}_{w_k} \cdot f(x_k)$$

$(x_k)_{k=\overline{0,n}}$ se numesc nodurile cuadraturii

$(w_k)_{k=\overline{0,n}}$ se numesc ponderile cuadraturii

- Exemple:

1) Metoda trapezului ($n=1$)

$x_0 = a, \; x_1 = b$

$$L_{1,0}(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad L_{1,1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$w_0 = \int_a^b \frac{b-x}{b-a}\,dx = b \cdot \frac{x}{b-a}\Big|_a^b - \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b$$

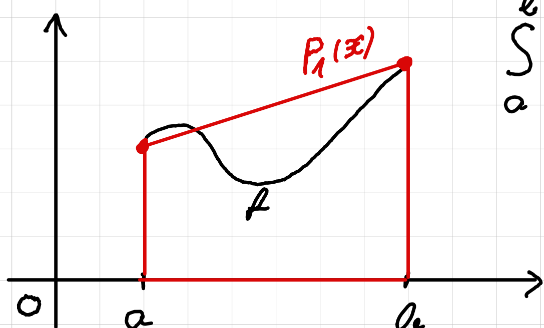
$$= b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$w_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}$$

- Interpretare grafică:



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_{\text{trapezului}}$$

$$= (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

2) Metoda Simpson $(n=2)$

$$X_0 = a, \quad X_1 = \frac{a+b}{2}, \quad X_2 = b$$

$$w_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}\cdot dx$$

S. V. $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{b-a}{2} t \left(\frac{b-a}{2} t - \frac{b-a}{2} \right)}{\frac{b-a}{2} \cdot (b-a)} \cdot \frac{b-a}{2} \, dt$$

$$w_0 = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \frac{t(t-1)}{2} \, dt = \frac{b-a}{2} \frac{t^3}{6} \Big|_{-1}^{1}$$

$$w_0 = \frac{b-a}{6}$$

Idem, $w_1 = \frac{4(b-a)}{6}$ și $w_2 = \frac{b-a}{6}$

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\boxed{I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]}$$

3) Metoda Simpson $\frac{3}{8}$ $(n = 3)$

$$\boxed{I_3(f) = \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3 f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3 f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right]}$$

- Formula de cuadratură Newton-Cotes

Fie $(x_k)_{k=\overline{0,n}}$ o discretizare echidistantă a intervalului $[a, b]$, i.e.

$$x_k = a + kh, \quad \forall k=\overline{0,n}, \text{ unde } h = \frac{b-a}{n}$$

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx$$

$$\text{S.V.: } x = a + th, \quad t\in[0,n], \quad x\in[a,b]$$

$$dx = h\,dt$$

$$\Rightarrow w_k = \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(a+th)-(a+ih)}{(a+kh)-(a+ih)}\,h\,dt$$

$$w_k = h \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i}\,dt, \quad \forall k=\overline{0,n}$$

$$\boxed{I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} w_k\, f(x_k)}$$

• Teoremă (Estimarea erorii)

Fie $f \in C^{n+1}([a,b])$ și $(x_k)_{k=\overline{0,n}}$ o discretizare echidistantă $[a, b]$. Atunci

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{h^{n+2} \max\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\,dt$$

Demonstrație:

Din teorema de estimare a erorii aproximării cu polinomul Lagrange,

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{\max\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \int_a^b \pi_{n+1}(x)\,dx,$$

unde $\pi_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

Folosind S. V. $x = a + th$, $t \in [0, n]$, $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b \pi_{n+1}(x)\,dx = h \int_0^n \prod_{i=0}^{n} (ht - hi)\,dt$$

$$= h^{n+2} \int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\,dt \;\square$$

Q: Ce ne facem când nu reușim să obținem precizia dorită oricât de mult am crește gradul polinomului?

Idee: Interpolăm cu funcții spline în loc de polinoame și obținem formule de cuadratură sumate.

- Formula de cuadratură sumată a trapezului:

Fie $(x_k)_{k=\overline{0,m}}$ discretizare echidistantă a intervalului $[a, b]$

$$x_k = a + k h, \ \forall k=\overline{0,m}, \text{ unde } h = \frac{b-a}{m}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

(Integrala pe fiecare subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ este aproximată cu un trapez)

$$\Rightarrow I(f) \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(x_m)\right]$$

• Formula de cuadratură sumată a lui Simpson

Fie $(x_k)_{k=\overline{0,2m}}$ discretizare echidistantă a intervalului $[a,b]$

$$x_k = a + kh,\ k=\overline{0,2m},\ \text{unde } h = \frac{b-a}{2m}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{m} \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(x_{2m})\right]}$$