SEMINAR 2

LIMITE INFERIOARE. LIMITE SUPERIOARE. SERII

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir din $\mathbb{R}$

$\overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ - limita superioară a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\underline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ - limita inferioară a şirului (x_n)

$\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

Ex1: Să se calculeze $\underline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, x_n$ pentru şirul

$$x_n = \frac{1+(n)^{(-1)^n}}{2\cdot n\cdot(-1)^{n+1}} + \sin\frac{n\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{N}^*$$

Pas 1: Se identifică în formula şirului părţile care necesită explicitate

EXPLICITĂRI:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n=2k+1 \\ 1, & n=2k \end{cases}$$

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} -1, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n=2k \ \{0,2,4,6\ldots\} \\ -1, & n=4k+3 \ \{3,7,11\ldots\} \\ 1, & n=4k+1 \ \{1,5,9\ldots\} \end{cases}$$

pe cercul luăm val. pt. n şi vedem din cât în cât se repetă:

$n=0 \Rightarrow \sin 0 = 0$

$n=1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$n=2 \Rightarrow \sin\pi = 0$

$n=3 \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$n=4 \Rightarrow \sin 2\pi = 0$

$n=5 \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$n=6 \Rightarrow \sin 3\pi = 0$

$n=7 \Rightarrow \sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Pas 2: Se aleg subşirurile pt. a calc. limite pt. fiecare

$(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}^*}$

! Cum facem verificarea dacă totul este bine:

1) $2k \cap 4k+1 \cap 4k+3 = \emptyset$

2) $2k \cup 4k+1 \cup 4k+3 = \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = \frac{1+2k^{1}}{2\cdot 2k\cdot(-1)} + 0 = \frac{1+2k}{-4k} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{4k+1} = \frac{1+(4k+1)^{-1}}{2\cdot(4k+1)\cdot 1} + 1 = \frac{1+\frac{1}{4k+1}}{8k+2} + 1$$

$$= \frac{4k+2}{4k+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{8k+2}}_{\to 0} + 1 = 1$$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{4k+3} = \frac{1+(4k+3)^{-1}}{2\cdot(4k+3)\cdot 1} + (-1) = -1$$

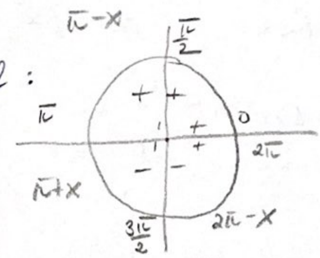
$A = \{-\frac{1}{2}, 1, -1\}$ = Mulțimea lim tuturor subșirurilor care au lim din x_n

$\underline{\lim}\, x_n = \inf A = -1$ ⇒ Șirul ~~are~~ este mărginit dar nu are lim

$\overline{\lim}\, x_n = \sup A = 1$

(ex: $(-1,1)$ are infimum și supremum dar nu are max și min - dif. dintre ele)

$\nexists \lim_{n\to+\infty} x_n$



Ex2: Să se calculeze $\underline{\lim}\, x_n$ și $\overline{\lim}\, x_n$ pentru șirul:

$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1} \cdot tg\, \frac{n\pi}{3}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$tg\, \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 0, & n=3k \\ \sqrt{3}, & n=3k+1 \\ -\sqrt{3}, & n=3k+2 \end{cases}$$

$n=0 \Rightarrow tg\, 0 = 0$

$n=1 \Rightarrow tg\, \frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = \sqrt{3}$

$n=2 \Rightarrow tg\, \frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{3})}{\cos(\pi-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$

$n=3 \Rightarrow tg\, \pi = 0$

$n=4 \Rightarrow tg\, \frac{4\pi}{3} = \frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{3})}{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}$

$n=5 \Rightarrow tg\, \frac{5\pi}{3} = tg\,(\pi+\frac{2\pi}{3}) = tg\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

! Observăm că nu avem cum să alegem subșirurile deja existente, dar ne vom folosi de cel mai mic multiplu comun

cmmmc $(2,3) = 6$

Alegem subșirurile

$(x_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{6k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ... până la 5

(x_{6k}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k} = 1\cdot\frac{6k}{6k+1}\cdot 0 = 0$

(x_{6k+1}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k+1} = -1\cdot\frac{6k+1}{6k+2}\cdot\sqrt{3}$

$= -1\cdot\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

(x_{6k+2}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k+2} = +1\cdot\frac{6k+2}{6k+3}\cdot(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

(x_{6k+3}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k+3} = -1\cdot\frac{6k+3}{6k+4}\cdot 0 = 0$

(x_{6k+4}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k+4} = 1\cdot\frac{6k+4}{6k+5}\cdot\sqrt{3}$

$= 1\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$

(x_{6k+5}): $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{6k+5} = -1\cdot\frac{6k+5}{6k+6}\cdot$

$= -1\cdot 1\cdot -\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$A = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

$\overline{\lim}\, x_n = \sqrt{3}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\sqrt{3}$

$\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Ca să ne dăm seama ce val alegem încercăm să aducem șirul la o formă din șirurile inițiale

$6k+1 = 3\cdot(2k)+1$

$p=2k \Rightarrow \boxed{3p+1}$

$6k+2 = 3(2k+2$

$6k+4 = 6k+3+1$

$= 3(2k+1)+1$

$= 3p+1$

$6k+5 = 6k+3+2$

$= 3(2k+1)+2$

$= 3p+2$