FMI, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2023/2024
Logică matematică

Exerciţii de seminar

1 Teoria mulţimilor

1.1 Primele cinci axiome ZFC

1. Să se dea exemple de x şi y, astfel încât să se întâmple, pe rând:

   (a) $x \in y$ şi $x \subseteq y$;
   (b) $x \in y$ şi $x \not\subseteq y$;
   (c) $x \notin y$ şi $x \subseteq y$;
   (d) $x \notin y$ şi $x \not\subseteq y$.

   Soluţie:

   (a) Luăm $x := \emptyset$, $y := \{\emptyset\}$.
   (b) Luăm $x := \{\emptyset\}$, $y := \{\{\emptyset\}\}$.
   (c) Luăm $x := \emptyset$, $y := \emptyset$.
   (d) Luăm $x := \{\emptyset\}$, $y := \emptyset$.

   □

2. Reamintim din curs că, pentru orice F şi z,

$$z \in \bigcup F \Leftrightarrow \text{există } x \text{ cu } x \in F \text{ şi } z \in x$$

   şi că, pentru orice F nevidă,

$$\bigcap F = \left\{ z \in \bigcup F \mid \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x \right\}.$$

   Arătaţi că definiţia de mai sus pentru intersecţii arbitrare este corectă. Mai exact, arătaţi că pentru orice F nevidă, avem că pentru orice z,

$$z \in \bigcap F \Leftrightarrow \text{pentru orice } x \text{ cu } x \in F, \text{ avem } z \in x.$$

   Unde se foloseşte în demonstraţie faptul că F este nevidă?

   Soluţie: Fie F şi z ca în enunţ.

   „$\Rightarrow$" Evident.

   „$\Leftarrow$" Presupunem că z este astfel încât pentru orice x cu $x \in F$, avem $z \in x$ şi vrem să arătăm că $z \in \bigcap F$.

   Rămâne de arătat doar că $z \in \bigcup F$. Fiindcă F este nevidă, există $x \in F$. Avem deci $z \in x$. De aici deducem $z \in \bigcup F$. □

3. Definim, pentru orice x, y, $\langle x, y\rangle := \{x, \{y\}\}$. Arătaţi că aceasta nu este o definiţie adecvată a perechii ordonate.

   Soluţie: Vrem să găsim exemple de x, y, u, v astfel încât $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$, dar nu este adevărat că $x = u$ şi $y = v$, adică $x \neq u$ sau $y \neq v$.

   Ideea este următoarea. Ne uităm la egalitatea $\{x, \{y\}\} = \{u, \{v\}\}$ şi căutăm să o satisfacem „invers”, adică via $x = \{v\}$ şi $u = \{y\}$. Prin urmare, u şi x sunt atunci determinate de y şi v, şi deci este suficient să găsim y şi v cu $y \neq v$. Dar noi ştim două mulţimi diferite, de pildă $\emptyset$ şi $\{\emptyset\}$.

   Raţionăm acum riguros. Alegem $x := \{\{\emptyset\}\}$, $y := \emptyset$, $u := \{\emptyset\}$, $v := \{\emptyset\}$. Se observă că $y \neq v$ (şi, mai mult, deşi nu mai este nevoie, $x \neq u$). Atunci

   $$\langle x, y\rangle = \{x, \{y\}\} = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\},$$

   iar

   $$\langle u, v\rangle = \{u, \{v\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\},$$

   deci $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. □

4. Arătaţi (folosind doar primele cinci axiome ZFC din curs) că nu există mulţimea tuturor mulţimilor singleton.

   Soluţie: Presupunem că ar exista şi o notăm cu S.

   Notăm $V := \bigcup S$. Atunci, pentru orice x, avem $x \in \{x\}$ şi $\{x\} \in S$, deci $x \in \bigcup S = V$. Ca urmare, V este mulţimea tuturor mulţimilor. Contradicţie! □

1.2 Relaţii binare

1. Fie R o relaţie binară. Să se arate că:

   (a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   - există A şi B astfel încât R este grafic între A şi B;
   - pentru orice x, y, z cu (x, y), $(x, z) \in R$, avem $y = z$.

   (b) Dacă A, B, C, D sunt astfel încât R este grafic atât între A şi B, cât şi între C şi D, atunci $A = C$.

   Soluţie:

   (a) „$\Rightarrow$” Evident.
   „$\Leftarrow$” Cum R este relaţie binară, există C, B astfel încât R este relaţie între C şi B. Notăm:

   $$A := \{a \in C \mid \text{există } b \in B \text{ cu } (a, b) \in R\}.$$

   Fie $p \in R$. Atunci există $a \in C$ şi $b \in B$ cu $(a, b) = p \in R$. Deci $a \in A$ şi deci $p \in A \times B$. Prin urmare, $R \subseteq A \times B$, deci R este relaţie între A şi B.
   Demonstrăm acum că R este chiar grafic între A şi B. Fie acum $a \in A$. Atunci, din definiţia lui A, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Mai trebuie să arătăm că este unic. Dacă avem $z \in B$ cu $(a, z) \in R$, atunci, folosind condiţia din ipoteză, $b = z$.

   (b) Fie $a \in A$. Cum R este grafic între A şi B, există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$. Cum $R \subseteq C \times D$, există $c \in C$ şi $d \in D$ cu $(a, b) = (c, d)$. Rezultă $a = c \in C$. Am demonstrat că $A \subseteq C$.
   Analog se arată $C \subseteq A$, deci avem $A = C$.

   □

2. Fie A o mulţime. Să se arate că:

(a) Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A şi dacă definim $<\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a \leq b$ şi $a \neq b$, atunci $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A.

(b) Dacă $<$ este o relaţie de ordine strictă pe A şi dacă definim $\leq\subseteq A \times A$ ca fiind mulţimea tuturor perechilor (a, b) cu proprietatea că $a < b$ sau $a = b$, atunci $\leq$ este o relaţie de ordine parţială pe A.

Soluţie: Fie x, y, $z \in A$.

(a) Dacă avem $x < x$, atunci $x \neq x$, o contradicţie. Deci $<$ este ireflexivă.
Presupunem $x < y$ şi $y < z$. Atunci $x \leq z$. Dacă am avea $x = z$, atunci am avea $x \leq y \leq x$, deci $x = y$, contradicţie. Deci $x < z$. Am arătat că $<$ este tranzitivă.
Prin urmare, $<$ este o relaţie de ordine strictă.

(b) Cum $x = x$, avem $x \leq x$. Deci $\leq$ este reflexivă.
Presupunem prin absurd că $x \leq y$ şi $y \leq x$, dar $x \neq y$. Atunci $x < y$ şi $y < x$, contradicţie cu faptul că $<$ este asimetrică. Deci $\leq$ este antisimetrică.
Presupunem $x \leq y$ şi $y \leq z$. Dacă $x = y$, atunci clar $x \leq z$. Analog pentru $y = z$. Rămâne cazul când $x < y$ şi $y < z$, iar atunci $x < z$, deci $x \leq z$. Am arătat că $\leq$ este tranzitivă.
Prin urmare, $\leq$ este o relaţie de ordine parţială.

$\square$

1.3 Numere naturale în ZFC

1. Arătaţi că:

(a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ori $n = 0$, ori există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$.

(b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$.

(c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Soluţie:

(a) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.
Fie n. Vrem acum să arătăm că dacă există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, atunci există $p \in \mathbb{N}$ cu $n^+ = p^+$. E suficient să luăm $p := n$.
(Deşi inducţia este trivială, am scris acest enunţ în mod explicit, fiindcă va fi folosit în exerciţiul următor.)

(b) Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$, enunţul este trivial.
Presupunem adevărat că pentru orice $m \in n$, $m \in \mathbb{N}$ şi arătăm că pentru orice $m \in n^+$, $m \in \mathbb{N}$.
Fie $m \in n^+ = n \cup \{n\}$. Atunci $m \in n$, deci $m \in \mathbb{N}$ din ipoteza de inducţie, sau $m = n \in \mathbb{N}$.

(c) Incluziunea „$\supseteq$" este imediată. Pentru incluziunea „$\subseteq$", luăm $m \in n$, iar, din punctul anterior, ştim că $m \in \mathbb{N}$. Cum $m < n$ este doar o reformulare a lui $m \in n$, rezultă că m aparţine mulţimii din dreapta.

$\square$

2. Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ nevidă, care admite majorant. Arătaţi că A admite maxim.

Soluţie: Fie $B := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ majorant pentru } A\}$. Cum $B \neq \emptyset$, există minimul lui B (deci supremumul lui A), pe care îl notăm cu n. E suficient să arătăm că $n \in A$.

Presupunem că $n \notin A$. Atunci pentru orice $l \in A$, $l < n$. Cum $A \neq \emptyset$, rezultă $n \neq 0$, deci (din primul punct al exerciţiului anterior) există $m \in \mathbb{N}$ cu $n = m^+$, şi deci $m < n$. Avem că pentru orice $l \in A$, $l < m^+$, deci $l \leq m$. Prin urmare, m este majorant pentru A, contradicţie cu faptul că n este cel mai mic majorant. $\square$

1.4 Generalităţi despre cardinalitate

1. Fie X, Y cu $X \neq \emptyset$ şi $f : X \to Y$ injectivă. Să se arate că există $g : Y \to X$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   Soluţie: Cum $X \neq \emptyset$, există $a \in X$. Definim $g : Y \to X$, pentru orice $y \in Y$, astfel: dacă există $x \in X$ (necesar unic) cu $f(x) = y$, punem $g(y) := x$, altfel punem $g(y) := a$.

   Fie $x \in X$. Notând $y := f(x)$, avem $g(y) = x$, deci $g(f(x)) = x$. Am demonstrat că $g \circ f = \mathrm{id}_X$. $\square$

2. Arătaţi că o submulţime A a unei mulţimi finite B este finită.

   Soluţie: Demonstrăm prin inducţie după numărul de elemente n al lui B.

   Dacă $n = 0$, $B = \emptyset$ şi deci $A = \emptyset$ şi are şi ea 0 elemente.

   Presupunem adevărat pentru un n şi demonstrăm pentru n^+. Presupunem, deci, că B are n^+ elemente, deci există o bijecţie $f : n^+ \to B$. Notăm $C := B \setminus \{f(n)\}$. Atunci C are n elemente şi distingem două cazuri.

   Dacă $f(n) \notin A$, atunci $A \subseteq C$ şi este deci finită din ipoteza de inducţie.

   Dacă $f(n) \in A$, atunci notând $D := A \setminus \{f(n)\} = A \cap C$ avem că $D \subseteq C$, deci este finită din ipoteza de inducţie şi, aşadar, există m astfel încât D are m elemente. Rezultă că $A = D \cup \{f(n)\}$ are m^+ elemente şi este, deci, finită. $\square$

3. Dacă f este un şir $\mathbb{N}$-valuat infinit, spunem că f este **finalmente constant** dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $f_{k+m} = f_k$. Arătaţi că mulţimea C a şirurilor finalmente constante este numărabilă.

   Soluţie: Clar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ putem considera şirul ce ia numai valoarea n. Prin urmare $\aleph_0 \leq |C|$.

   Definim acum $\phi : C \to \mathbb{N}$, pentru orice $f \in C$, prin

   $$\phi(f) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{pentru orice } m \in \mathbb{N},\ f_{k+m} = f_k\}$$

   şi $\psi : C \to \mathrm{Seq_{fin}}(\mathbb{N})$, pentru orice $f \in C$, prin

   $$\psi(f) := (f_i)_{i<\phi(f)^+} = f \cap (\phi(f)^+ \times \mathbb{N}).$$

   Atunci ψ este injectivă şi, cum am demonstrat la curs că $\mathrm{Seq_{fin}}(\mathbb{N})$ este numărabilă, rezultă că $|C| \leq \aleph_0$, deci $|C| = \aleph_0$. $\square$

4. Arătaţi că mulţimea $\mathcal{O}$ a tuturor mulţimilor deschise ale lui $\mathbb{R}$ (în topologia canonică) are cardinalul $\mathfrak{c}$.

   Soluţie: Vom nota intervalele cu punct şi virgulă, pentru a deosebi intervalul $(a; b)$ de perechea ordonată (a, b).

   Clar, oricărui număr real r îi putem asocia intervalul deschis $(r; r+1)$, deci avem cel puţin $\mathfrak{c}$ deschişi. Rămâne de arătat că avem cel mult pe atât.

   Definim acum $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, pentru orice mulţime deschisă D, prin

   $$\phi(D) := \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid (a; b) \subseteq D\}.$$

   Demonstrăm că ϕ este injectivă, ceea ce ne încheie demonstraţia, dat fiind că $|\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})| = \mathfrak{c}$.

   Fie D, E mulţimi deschise cu $\phi(D) = \phi(E)$ şi vrem $D = E$. Este suficient să arătăm că $D \subseteq E$, cealaltă incluziune rezultând din simetria problemei. Fie $r \in D$. Cum D este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(r - \varepsilon; r + \varepsilon) \subseteq D$. Cum $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, există a, $b \in \mathbb{Q}$ cu

   $$r - \varepsilon < a < r < b < r + \varepsilon.$$

   Atunci $(a; b) \subseteq D$, deci $(a, b) \in \phi(D)$ şi deci $(a, b) \in \phi(E)$. Prin urmare, $(a; b) \subseteq E$ şi deci, cum $r \in (a; b)$, avem $r \in E$. $\square$

1.5 Ordinali

1. Fie α un ordinal. Arătaţi că $\alpha \notin \alpha$.

   Soluţie: Dacă am avea $\alpha \in \alpha$, atunci am avea $\alpha \in_\alpha \alpha$ şi s-ar contrazice ireflexivitatea lui $\in_\alpha$. □

2. Fie α un ordinal. Arătaţi că α^+ este ordinal.

   Soluţie: Reamintim că $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

   Demonstrăm că α^+ este tranzitivă. Fie x, y cu $x \in \alpha^+$ şi $y \in x$. Vrem $y \in \alpha^+$. Vom arăta chiar $y \in \alpha$. Cum $x \in \alpha^+$, avem $x \in \alpha$ sau $x = \alpha$. Dacă $x \in \alpha$, avem $y \in \alpha$ fiindcă α este tranzitivă. Dacă $x = \alpha$, cum $y \in x$, avem $y \in \alpha$.

   Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este ireflexivă. Fie $x \in \alpha^+$ şi vrem $x \notin x$. Dacă $x \in \alpha$, atunci nu putem avea $x \in x$ din faptul că $\in_\alpha$ este ireflexivă. Dacă $x = \alpha$, atunci aplicăm exerciţiul precedent.

   Demonstrăm că $\in_{\alpha^+}$ este tranzitivă. Fie x, y, $z \in \alpha^+$ cu $x \in y$ şi $y \in z$. Vrem $x \in z$. Dacă $z \in \alpha$, atunci, din tranzitivitatea lui α, rezultă, pe rând, $y \in \alpha$ şi $x \in \alpha$. Cum $\in_\alpha$ este tranzitivă, rezultă $x \in z$. Dacă $z = \alpha$, atunci avem $x \in y$ şi $y \in \alpha$, iar cum α este tranzitivă, avem $x \in \alpha = z$.

   Demonstrăm acum că $\in_{\alpha^+}$ este o bună ordine. Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. Notăm $B := A \cap \alpha$. Dacă B este nevidă, există un minim al ei relativ la $\in$. Cum $B \subseteq \alpha$, acel minim aparţine lui α, deci este mai mic şi decât α. Prin urmare, el este minimul lui A în ansamblu. Dacă B este vidă, atunci avem $A = \{\alpha\}$, care îl are pe α ca minim. □

3. Fie α un ordinal şi $\beta \in \alpha$. Arătaţi că β este ordinal.

   Soluţie: Demonstrăm că β este tranzitivă. Fie u, v cu $u \in v$ şi $v \in \beta$. Vrem $u \in \beta$. Cum α este tranzitivă şi $\beta \in \alpha$, avem $v \in \alpha$, iar apoi $u \in \alpha$. Deci u, v, $\beta \in \alpha$, iar concluzia rezultă din tranzitivitatea lui $\in_\alpha$.

   Cum $\beta \in \alpha$ şi α este tranzitivă, avem $\beta \subseteq \alpha$, deci $\in_\beta$ este restricţia la β (i.e. intersecţia cu $\beta \times \beta$) a lui $\in_\alpha$ şi este şi ea o relaţie de bună ordine. □

4. Fie α şi β ordinali astfel încât $\alpha \subsetneq \beta$. Arătaţi că $\alpha \in \beta$.

   Soluţie: Cum $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, există un minim al său, pe care îl notăm cu γ. Vom arăta $\gamma = \alpha$, de unde va rezulta $\alpha \in \beta$.

   Pentru implicaţia „$\subseteq$”, presupunem că există $\delta \in \gamma$ cu $\delta \notin \alpha$. Atunci, cum β este tranzitivă, avem $\delta \in \beta$, deci avem $\delta \in \beta \setminus \alpha$, ceea ce contrazice minimalitatea lui γ.

   Pentru implicaţia „$\supseteq$”, presupunem că există $\delta \in \alpha$ cu $\delta \notin \gamma$. Cum δ, $\gamma \in \beta$, folosind faptul că $\in_\beta$ este o relaţie de bună ordine (strictă), avem că $\gamma \in \delta$ sau $\gamma = \delta$. Din tranzitivitatea lui α, rezultă $\gamma \in \alpha$, contrazicând faptul că $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. □

1.6 Axioma alegerii

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$. Există două moduri de a exprima faptul că f este continuă în a:

   - pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x-a| < \delta$, avem $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$;
   - pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce are ca limită pe a, avem că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

   Folosind Axioma alegerii, arătaţi că ele sunt echivalente.

   Observaţie: Se ştie că echivalenţa nu rezultă fără Axioma alegerii, dar şi că este strict mai slabă decât ea.

   Soluţie: Pentru „$\Rightarrow$”, fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir cu limita a. Vrem să arătăm că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice x cu $|x-a| < \delta$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la a, avem că există N astfel încât pentru orice

$n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. Aşadar, pentru orice $n \geq N$, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Am arătat că $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are ca limită pe $f(a)$.

Pentru „$\Leftarrow$", presupunem prin absurd că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există x cu $|x - a| < \delta$ şi $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \frac{1}{n+1} \text{ şi } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset.$$

Ca urmare, putem aplica Axioma alegerii pentru familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X_n$, i.e. $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ şi $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Aşadar, limita lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este a, dar $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge la $f(a)$. Contradicţie! $\square$

2. Fie X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă. Să se arate, folosind Axioma alegerii, că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   Soluţie: Cum g este surjectivă, avem că pentru orice $x \in X$, $g^*(\{x\})$ este nevidă, deci, aplicând Axioma alegerii pentru familia $(g^*(\{x\}))_{x\in X}$, obţinem că există o familie $a = (a_x)_{x\in X}$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $a_x \in g^*(\{x\})$, deci $a_x \in Y$ şi $g(a_x) = x$.

   Definim $f : X \to Y$, punând, pentru orice $x \in X$, $f(x) := a_x$. (Altfel spus, $f = (X, Y, a)$.) Atunci, pentru orice $x \in X$, avem $g(f(x)) = g(a_x) = x$. Prin urmare, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. $\square$

3. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi şi $g : Y \to X$ surjectivă, avem că există $f : X \to Y$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_X$" implică Axioma alegerii.

   Soluţie: Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi nevide, disjuncte două câte două. Vrem să arătăm că există $(d_i)_{i\in I}$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $d_i \in D_i$.

   Notăm
   $$C := \bigcup_{i\in I} D_i.$$

   Fie $g : C \to I$, definită punând, pentru orice $x \in C$, $g(x)$ ca fiind acel unic i cu $x \in D_i$. Cum g este surjectivă, există $f : I \to C$ cu $g \circ f = \mathrm{id}_I$.

   Pentru orice $i \in I$, punem $d_i := f(i)$ şi atunci, cum $g(d_i) = g(f(i)) = i$, avem că $d_i \in D_i$. Aşadar, familia $(d_i)_{i\in I}$ este cea căutată. $\square$

4. Demonstraţi că faptul că „pentru orice X, Y mulţimi, există o injecţie de la X la Y sau există o injecţie de la Y la X" implică Axioma alegerii. **Indiciu:** Folosiţi ordinalul Hartogs.

   Soluţie: Fie A o mulţime. Atunci, fie există o injecţie de la $h(A)$ la A, fie există o injecţie de la A la $h(A)$. Primul caz contrazice definiţia ordinalului Hartogs. Avem aşadar că există o injecţie $g : A \to h(A)$. Cum $(h(A), \in_{h(A)})$ este bine-ordonată, există o bună ordine pe imaginea lui g, imagine care este echipotentă cu A, deci există o bună ordine pe A.

   Am arătat că orice mulţime este bine-ordonabilă, iar la curs am demonstrat că aceasta implică Axioma alegerii. $\square$

1.7 Ierarhia von Neumann

1. Arătaţi că:

   (a) Pentru orice ordinal α şi orice $x \in V_\alpha$, $x \notin x$.

   (b) Pentru orice ordinal α, avem că $V_\alpha \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(V_\alpha) = \alpha$.

   (c) Pentru orice ordinal α şi orice $\beta < \alpha$, $V_\beta \subsetneq V_\alpha$.

   Soluţie:

(a) Fireşte, enunţul rezultă din Axioma regularităţii, dar este interesant de văzut că este adevărat şi fără a o postula.

Demonstrăm prin inducţie după α.

Dacă $\alpha = 0$, atunci, cum $V_\alpha = V_0 = \emptyset$, nu avem ce demonstra.

Presupunem că există β cu $\alpha = \beta^+$. Atunci $x \in V_\alpha = V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta)$, deci $x \subseteq V_\beta$. Dacă am avea $x \in x$, atunci $x \in V_\beta$, iar, din ipoteza de inducţie, rezultă $x \notin x$.

Presupunem acum că α este ordinal limită. Atunci există $\gamma < \alpha$ cu $x \in V_\gamma$ şi, din ipoteza de inducţie, rezultă $x \notin x$.

(b) Avem că $V_\alpha \subseteq V_\alpha$, deci $V_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha^+}$, iar, din primul punct, avem că $V_\alpha \notin V_\alpha$.

(c) Fie $\beta < \alpha$. Ştim că $V_\beta \subseteq V_\alpha$, rămâne de arătat doar că incluziunea este strictă. Avem că $\beta^+ \leq \alpha$ (exerciţiu!) şi deci $V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$. Ştim, din punctul anterior, că $V_\beta \in V_{\beta^+} \setminus V_\beta$, deci $V_\beta \in V_\alpha \setminus V_\beta$.

□

2. Arătaţi că:

   (a) Pentru orice ordinal α, avem că $\alpha \in V_{\alpha^+}$.

   (b) Pentru orice ordinal α, avem că $\alpha \notin V_\alpha$. Prin urmare, $\mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$.

Soluţie:

(a) Demonstrăm prin inducţie completă după α. Cum $V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, trebuie să demonstrăm că $\alpha \subseteq V_\alpha$.

Fie $\beta \in \alpha$. Atunci β este un ordinal mai mic ca α, iar, din ipoteza de inducţie, avem $\beta \in V_{\beta^+}$. Cum $\beta < \alpha$, avem $\beta^+ \leq \alpha$ (exerciţiu!), deci $V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$, aşadar $\beta \in V_\alpha$.

(b) Demonstrăm prin inducţie după α.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $\alpha \notin \emptyset = V_0 = V_\alpha$.

Presupunem că există β cu $\alpha = \beta^+$. Presupunem prin absurd că $\alpha \in V_\alpha$, i.e. $\beta^+ \in V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta)$, deci $\beta^+ \subseteq V_\beta$. Dar $\beta \in \beta^+$, deci $\beta \in V_\beta$, ceea ce contrazice ipoteza de inducţie.

Presupunem acum că α este ordinal limită. Presupunem prin absurd că $\alpha \in V_\alpha$. Atunci există $\gamma < \alpha$ cu $\alpha \in V_\gamma$. Cum V_γ este tranzitivă, rezultă $\gamma \in V_\gamma$, ceea ce, din nou, contrazice ipoteza de inducţie.

□

1.8 Ultrafiltre

1. Fie I o mulţime nevidă şi A, B două submulţimi diferite ale sale. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care conţine exact una dintre submulţimi.

Soluţie: Avem $A \neq B$, deci $A \not\subseteq B$ sau $B \not\subseteq A$. Presupunem w.l.o.g. $A \not\subseteq B$, deci există $x \in A$ cu $x \notin B$.

Ştim că $[\{x\})$ este un ultrafiltru. Cum $\{x\} \subseteq A$, avem $A \in [\{x\})$, iar cum $\{x\} \subseteq I \setminus B$, avem $I \setminus B \in [\{x\})$, deci $B \notin [\{x\})$. □

2. Fie I o mulţime nevidă, F un filtru pe I şi $X \subseteq I$ cu $X \notin F$. Arătaţi că există un ultrafiltru pe I care include pe F şi nu conţine pe X (omite pe X).

Soluţie: Cum $X \notin F$, $X \neq I$, deci $I \setminus X \neq \emptyset$.

Fie $G := F \cup \{I \setminus X\}$. Vom arăta că G are proprietatea intersecţiilor finite, de unde va rezulta că se poate prelungi la un ultrafiltru. Acel ultrafiltru va include pe F şi, deoarece va conţine pe $I \setminus X$, nu va putea conţine pe X.

Fie $A \subseteq G$ finită nevidă şi vrem $\bigcap A \neq \emptyset$. Dacă $A \subseteq F$, suntem OK. Dacă $A \not\subseteq F$, există $B \subseteq F$ cu $A = B \cup \{I \setminus X\}$. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A = \{I \setminus X\}$ şi din nou suntem OK. Dacă $B \neq \emptyset$, atunci $\bigcap B \in F$, şi, presupunând prin absurd că $\bigcap A = (\bigcap B) \cap (I \setminus X) = \emptyset$, obţinem $\bigcap B \subseteq X$, deci $X \in F$, ceea ce este o contradicţie. $\square$

2 Logica propoziţională

2.1 Formule

1. Fie φ, ψ, $\chi \in E(Q)$. Arătaţi că avem:

   (a) $\psi \models \varphi \to \psi$;

   (b) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

   Soluţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a \in 2$,

$$\begin{array}{rr} 1 \to a = a, & a \to 1 = 1, \\ 0 \to a = 1, & a \to 0 = \neg a, \\ 1 \wedge a = a, & 0 \wedge a = 0. \end{array}$$

   (a) Fie $e : Q \to 2$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

   (b) Fie $e : Q \to 2$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi).$$

   Observăm că

$$\begin{array}{rcl} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) & = & e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) & = & (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi), \end{array}$$

   deci trebuie arătat că

$$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi).$$

   Avem cazurile:

   i. $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{array}{rcl} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) & = & 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) & = & (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{array}$$

   ii. $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{array}{rcl} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) & = & 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) & = & (1 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{array}$$

   □

2. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

   (a) $v_0 \to v_2$;

   (b) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

3. Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă φ este tautologie.

   Soluţie:

Avem:

$$\begin{aligned}
\neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă } &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că există } e : Q \to 2 \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\neg\varphi) \neq 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\neg\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ \neg e^+(\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2,\ e^+(\varphi) = 1\\
&\iff \varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

□

4. Confirmaţi sau infirmaţi:

   (a) pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

   (b) pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Soluţie:

(a) Este adevărat. Fie φ, $\psi \in E(Q)$. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi}\\
&\qquad \text{pentru orice } e : Q \to 2, e^+(\psi) = 1\\
&\iff \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}$$

(b) Nu este adevărat! Luăm $Q \neq \emptyset$. Fie $v \in Q$ arbitrar. Vom lua $\varphi := v$ şi $\psi := \neg v$.
Luăm $e_0 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 0. Atunci $e_0^+(\varphi) = e_0^+(v) = e_0(v) = 0$. Deci $e_0 \not\models \varphi$. Prin urmare, $\not\models \varphi$.
Luăm $e_1 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 1. Atunci $e_1^+(\psi) = e_1^+(\neg v) = \neg e_1^+(v) = \neg e_1(v) = \neg 1 = 0$. Deci $e_1 \not\models \psi$. Prin urmare, $\not\models \psi$.
Fie acum $e : Q \to 2$ arbitrară. Atunci

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(v \vee \neg v) = e^+(v) \vee e^+(\neg v) = e^+(v) \vee \neg e^+(v) = e(v) \vee \neg e(v) = 1,$$

deci $e \models \varphi \vee \psi$. Prin urmare, avem că $\models \varphi \vee \psi$.
Facem remarca că, atunci când punem condiţia $Q = \emptyset$, enunţul este adevărat. Avem atunci un unic $e : Q \to 2$ şi, atunci, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $e \models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $e \models \varphi$ sau $e \models \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

□

2.2 Mulţimi de formule

1. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Aflaţi mulţimea modelelor pentru fiecare dintre mulţimile de formule:

   (a) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (b) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Soluţie:

(a) Fie $e : Q \to 2$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \models v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$e \models \Gamma$ dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e \models v_n \to v_{n+1}$
dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
dacă şi numai dacă (pentru orice $v \in Q$, $e(v) = 0$)
sau (există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $i < k$, $e(v_i) = 0$ şi pentru orice $i \geq k$, $e(v_i) = 1$).

Definim $e^0 : Q \to 2$ ca fiind funcţia constantă 0. Definim şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : Q \to 2$, punând, pentru orice $i \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_i) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i < k, \\ 1, & \text{dacă } i \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^0\}.$$

(b) Fie $e : Q \to 2$. Atunci

$e \models \Gamma$ dacă şi numai dacă $e \models v_0$ şi, pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $e \models v_n \to v_{n+1}$
dacă şi numai dacă $e(v_0) = 1$ şi, pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $e(v_n) = 1$.

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : Q \to 2 \mid \text{pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\},\ e(v_n) = 1\}.$$

□

2. Fie $f : Q \to 2$. Găsiţi $\Gamma \subseteq E(Q)$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

Soluţie: Vom folosi următoarea notaţie: pentru orice $v \in Q$ şi $e : Q \to 2$, definim

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

şi, clar, $e^+(v^e) = 1$. În plus, pentru orice $W \subseteq Q$ şi $e : Q \to 2$, notăm $W^e := \{v^e \mid v \in W\}$.

Luăm $\Gamma := Q^f = \{v^f \mid v \in Q\}$.

Fie $e : Q \to 2$. Avem $e \in Mod(\Gamma)$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in Q$, $e \models v^f$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Vom arăta că ultima afirmaţie este echivalentă cu $e = f$.

Presupunem că pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in Q$. Vrem $e(v) = f(v)$. Dacă $f(v) = 1$, atunci $v^f = v$ şi deci $e(v) = e^+(v) = e^+(v^f) = 1 = f(v)$. Dacă $f(v) = 0$, atunci $v^f = \neg v$ şi deci

$$e(v) = e^+(v) = \neg\neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) = \neg e^+(v^f) = \neg 1 = 0 = f(v).$$

Invers, presupunem că $e = f$ şi vrem să arătăm că pentru orice $v \in Q$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in Q$. Atunci $e^+(v^f) = f^+(v^f) = 1$. □

3. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

Soluţie: Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : Q \to 2$, definită, pentru orice $x \in Q$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru orice k, $l \in \mathbb{N}$ cu $k \neq l$, avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, avem că $e_{k|Var(\varphi)} = e_{|Var(\varphi)}$, deci $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$. Aşadar, $e_k \models \varphi$.

Am obţinut, astfel, că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită. □

4. Considerăm Q numărabilă, i.e. $Q = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.

Soluţie: Considerăm $\Gamma := Q$. Clar, Γ este infinită. Fie $f : Q \to 2$ funcţia constantă 1. Avem că $Mod(\Gamma) = \{f\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm exerciţiul precedent pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$. □

2.3 Deducţia sintactică

1. Să se arate că, pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$,

(a) $\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\} \vdash \bot$;

(b) $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi))$.

Soluţie:

(a) Avem:

(1)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \psi$	
(2)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \bot$	
(3)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	
(4)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (3)
(5)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (4).

(b) Avem:

(1)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \bot$	Ex. 1a
(2)	$\{\psi, \varphi \to \bot\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(4)		$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \varphi))$	Teorema deducţiei.

□

2. Să se arate că, pentru orice φ, $\psi \in E(Q)$,

$$\vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi).$$

Soluţie: Avem:

(1)	$\{\psi, \varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \bot$	Ex. 1a
(2)	$\{\varphi \to \bot, \psi \to \varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\psi \to \varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(4)		$\vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	Teorema deducţiei.

□

3. Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ şi φ, $\psi \in E(Q)$. Să se arate că:

   (a) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;

   (b) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$.

Soluţie:

(a) Avem:

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \bot$	Ipoteză
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (1), (2)
(4)	Γ	$\vdash \varphi$	Metoda reducerii la absurd.

(b) Avem:

(1)	$\{\psi, \neg\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	
(2)	$\{\psi, \neg\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	
(3)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Ex. 3a pentru (1), (2)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(5)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei.

□

4. Să se arate că, pentru orice $\varphi \in E(Q)$,

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Soluţie: Avem:

(1)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \varphi$	
(2)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	
(3)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg\varphi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	Ex. 3a pentru (2), (3)
(5)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	Teorema deducţiei.

□

3 Logica de ordinul I

3.1 Formule

1. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Fie x, $y \in V$ cu $x \neq y$.

   (a) Fie $t := \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. (Îl putem scrie pe t şi ca $\dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y$.) Să se calculeze $t_v^{\mathcal{N}}$, unde $v : V \to \mathbb{N}$ verifică $v(x) = 3$ şi $v(y) = 7$.

   (b) Fie $\varphi := \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. (Îl putem scrie pe φ şi ca $x\dot{<}\dot{S}y \to (x\dot{<}y \vee x = y)$.) Să se arate că, pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$, $\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1$.

2. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Fie formula $\varphi := \forall x_4(x_3\dot{<}x_4 \vee x_3 = x_4)$. Să se caracterizeze acele $v : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\|\varphi\|_v^{\mathcal{N}} = 1$.

3. Fie σ o signatură. Să se arate că pentru orice σ-formulă φ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ şi $FV(\varphi) \subseteq \{x, y\}$, avem $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$. (Folosirea semnului $\models$ are sens deoarece $\exists y\forall x\varphi$ şi $\forall x\exists y\varphi$ sunt enunţuri.)

4. Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de signatură σ şi de formulă φ cu $FV(\varphi) \subseteq \{x, y\}$ astfel încât $\forall x\exists y\varphi \not\models \exists y\forall x\varphi$. (Din nou, folosirea semnului $\models$ are sens deoarece $\forall x\exists y\varphi$ şi $\exists y\forall x\varphi$ sunt enunţuri.)

5. Fie σ o signatură, φ, $\psi \in F_\sigma$ şi $x \in V \setminus FV(\varphi)$. Fie $\mathcal{A}$ o σ-structură cu universul A şi $v : V \to A$. Să se arate:
$$\|\forall x(\varphi \wedge \psi)\|_v^{\mathcal{A}} = \|\varphi \wedge \forall x\psi\|_v^{\mathcal{A}}.$$

6. Considerăm σ_{ar} şi $\mathcal{N}$ aşa cum au fost ele definite în curs. Să se dea exemplu de σ_{ar}-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât, pentru orice $v : V \to \mathbb{N}$,

   (a) $\|\varphi_1\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este par;

   (b) $\|\varphi_2\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este prim;

   (c) $\|\varphi_3\|_v^{\mathcal{N}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

7. Considerăm signatura σ_r ce conţine două simboluri de operaţie de aritate 2, notate cu $\dot{+}$ şi $\dot{\times}$.

   (a) Considerăm σ_r-structura $\mathcal{R}$ cu universul $\mathbb{R}$, unde cele două simboluri sunt instanţiate cu operaţiile uzuale pe numerele reale $+$, respectiv $\cdot$. Să se dea exemplu de σ_r-formulă ψ astfel încât pentru orice $v : V \to \mathbb{R}$,
$$\|\psi\|_v^{\mathcal{R}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0) \leq v(x_1).$$

   (b) (Exerciţiu suplimentar) Considerăm σ_r-structura $\mathcal{Z}$ cu universul $\mathbb{Z}$, unde cele două simboluri sunt instanţiate cu operaţiile uzuale pe numerele întregi $+$, respectiv $\cdot$. Să se dea exemplu de σ_r-formulă χ astfel încât pentru orice $v : V \to \mathbb{Z}$,
$$\|\chi\|_v^{\mathcal{Z}} = 1 \Leftrightarrow v(x_0) \leq v(x_1).$$

8. Considerăm signatura σ ce conţine un singur simbol de operaţie, $+$, de aritate 2. Să se găsească un σ-enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$.

3.2 Mulţimi de formule

1. Reamintim că grafurile (neorientate) pot fi definite ca mulţimi înzestrate cu o relaţie ireflexivă şi simetrică. Ele pot fi modelate, deci, ca structuri peste signatura ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat aici cu E, iar clasa lor poate fi descrisă de enunţurile care codifică ireflexivitatea şi simetria:
$$\forall x_0\neg E(x_0, x_0), \quad \forall x_0\forall x_1(E(x_0, x_1) \to E(x_1, x_0)).$$
   Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(a) grafurile complete;

(b) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(c) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

2. Să se arate că clasa grafurilor conexe nu este axiomatizabilă.