29.02.2024 15/24

C1 GA

Matrice. Determinanți. Rang. Forma eșalon

Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ corp comutativ. (de ex: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, p = prim)

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$.

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$(S_n, \cdot)$ grupul permutărilor, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$(\sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ bij$)$, $|S_n| = n!$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$, $m(\sigma)$ = nr de inversiuni

(i,j) s.n. inversiune a lui $\sigma \Leftrightarrow \begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma$ = pară i.e. $\varepsilon(\sigma) = 1\}$, $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

OBS

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} + \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)}$$

$S_2 = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

EX

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$L_2' = L_2 - L_1$

Def $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s.n. nesingulară $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

— || — s.n. inversabilă $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I_n$

Prop A nesingulară $\Leftrightarrow$ A inversabilă

Prop $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$, $n \geq 2$.

1) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

2) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

$A \to A^T \to A^*$

$A^*_{ij} = (-1)^{i+j} \delta_{ij}$ complementii algebrici pt a_{ij}

Dem

1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ | det

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

2) $A^* = A^{-1} \cdot \underbrace{\det(A)}_{\alpha}$

$\det(A^*) = \det(\alpha A^{-1}) = (\det A)^n \det(A^{-1}) = (\det A)^{n-1}$.

Notații

1) $(GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}, \cdot)$ grupul general liniar.

2) $(O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \cdot A^T = I_n\}, \cdot)$ grupul ortogonal

3) $(SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special ortogonal.

4) $(SL(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) / \det A = 1\}, \cdot)$ grupul special liniar

OBS $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$

Exemple

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = -1 \Rightarrow A \in GL(3, \mathbb{R})$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$t = \frac{\pi}{3}$

$A \cdot A^T = I_3 \Rightarrow A \in O(3)$

$\det A = 1$

$\Rightarrow A \in SO(3)$

Def $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A \neq O_{m,n}$

$rgA = k$ $(k \leq \min\{m,n\}) \Leftrightarrow \exists$ un minor de ordin k și toți minori de ordin mai mare (dacă $\exists$) sunt nuli.

Conv $rg(O_{m,n}) = 0$

OBS $\exists\ C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ord $k+1$.

Teoremă

$rgA = k \Leftrightarrow \exists$ un minor de ord k nenul ($\Delta_k \neq 0$) și toți minorii de ord $k+1$ (dc $\exists$), care conțin Δ_k sunt nuli

OBS $\exists\ (m-k)(n-k)$ minori de ord $k+1$

(am optimizat algoritmul de determinare a rangului)

EX A pătratică (mare $\to$ mic)

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $rgA = ?$

C_j = fixată

$C_k' = C_k + \alpha C_j$

SOL

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$L_1' = L_1 + L_2 + L_3$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

OBS $\Delta(a) = a^3 - 3a + \boxed{2}$

1) $\Delta(a) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ $\quad rgA = 3$

2) $\Delta(a) = 0$

a) $a = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rgA = 1$

b) $a = -2$ $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $rgA = 2$

Ex. A nu e pătratică (mic → mare)

$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $rg A = ?$

SOL

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3+4 = 1 \neq 0$ $rg A = 3$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(nu mai este nevoie să calc. Δ_2).

Ex. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $A^3 - A - I_n = O_n$

a) $rg A = ?$; b) $rg(A+I_n) = ?$

SOL

a) $A^3 - A = I_n \Rightarrow A(A^2 - I_n) = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det(A^2 - I_n) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg A = n$ (maxim)

b) $A^3 = A + I_n \Rightarrow (\det A)^3 = \det(A+I_n) \Rightarrow rg(A+I_n) = n$ (maxim)

$\det A \neq 0$

Def S.n. <u>transformări elementare</u> asupra liniilor matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

(T1) transformări prin care se „înmulțește" o linie cu un scalar nenul

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{K} \neq 0$

(T2) transformări prin care se schimbă 2 linii între ele.

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$ $i \neq j$

(T3) transformări prin care se adună la elem. unei linii elementele coresp. altei linii, eventual „înmulțite" cu un scalar $\neq 0$

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_i \\ L_j \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_i + \alpha L_j \\ L_j \\ L_m \end{pmatrix}$

Def $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ s.n. <u>matrice echivalente pe linii</u> și se not $A \sim B$, dacă B se obține din A printr-un nr. finit de transf. elementare pe linii (Analog pe coloane)

Prop $A \sim B \Rightarrow rg A = rg B$

Def O matrice s.n. matrice în <u>formă eșalon</u> pe linii dacă

pivoți

$$A = \begin{pmatrix} \otimes & & & \cdots \\ 0 & \otimes & & \vdots \\ 0 & 0 & \otimes & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1) liniile nule se află sub toate liniile nenule
2) pe fiecare linie nenulă, primul elem. din stânga, care este nenul s.n. pivot
Pivotul de pe linia L_{i+1} se află la dreapta pivotului de pe linia L_i
A este în <u>formă eșalon redusă</u> (pe linii) dacă, în plus,
3) toți pivoții sunt 1
4) deasupra pivoților toate elementele sunt nule.

OBS
a) MATLAB → forma eșalon pt A : ref(A)
→ forma eșalon redusă pt A : rref(A)

b) În franceză : scară : échelle.

Prop. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ se poate transforma într-o matrice eșalon (resp. eșalon redusă) pe linii, după un nr finit de transf. elementare pe linii.

OBS a) forma eșalon (pe linii) nu este unică
b) forma eșalon redusă (pe linii) este unică

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

a) Să se aducă la forma eșalon, resp forma eșalon redusă (pe linii)

b) rg A

Sol

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$L_2' = L_2 - L_1$
$L_3' = L_3 + 2L_1$
$L_4' = L_4 - 2L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3' = L_3 - L_2$

forma eșalon.

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1' = \frac{1}{2} L_1$
$L_2' = \frac{1}{3} L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$L_2' = L_2 - 3L_3$

$L_1' = L_1 + L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ forma eşalon redusă

b) $rg\, A = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\, I_3 = 3$ (nr. pivoţilor)

<u>Algoritmul Gauss-Jordan de inversare a unei matrice</u>

Fie matricea dublă $(A | I_n) \sim (C | B)$

C = forma eşalon redusă pt A

<u>Prop</u> Dacă $\underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}{A}$ este inversabilă, atunci $C = I_n$ şi $B = A^{-1}$

$$(A | I_n) \sim (I_n | A^{-1})$$

Scanat cu CamScanner