SEMINAR 3

SERII DE NUMERE REALE

Notație:

$$\sum_{n=0} x_n \longleftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$$

↓ șirul term. generali

↳ șirul sumelor parțiale

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

3 tipuri de convergență

1) absolut convergentă ($\sum_{n\geq 0} |x_n|$ = seria modulelor lui x_n = conv.)

$\Downarrow$

2) convergentă (șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent)

3) divergentă (șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent)

! Dacă $x_n \geq 0$ $\forall n \geq p$ sau $x_n \leq 0$ $\forall n \geq p$ atunci noțiunile de serie conv. și serie absolut conv. sunt echivalente și studiem doar conv. și div.

! Totul este în funcție de semnul term. general

Ex 1 Studiați natura seriei de numere reale: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > 0$, toți termenii sunt pozitivi

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}^{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\cancel{n}-\cancel{n}-1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = \underbrace{\sqrt{1}-\sqrt{0}}_{x_0} + \underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{1}}_{x_1} + \dots + \underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}_{x_n}$$

$$= \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n \text{ - divergentă}$$

< Metoda aceasta este „ideală" (să putem calcula S_n și să-i aflăm lim) nu merge mereu

Ex2 Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(a+1)(a+2)\cdot \ldots (a+n)}{n!}$, unde $a>0$

b) $\sum_{n\geq 0} \left(a \cdot \frac{n^3+1}{n^3+2}\right)^n$, $a>0$

c) $\sum_{n\geq 0} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)} \cdot x^n$, $x>0$

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}$, $a>0$ $\quad e^{\ln(a^{\ln n})} = e^{\ln a \cdot \ln n}$

a) $a_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdot \ldots (a+n)}{n!}$, $n\geq 1$

Nu putem calc. S_n, deci ne vom folosi de criterii pt. calc. seriilor

Verificăm în următ. ordine dacă putem folosi:

POZ.	NEG./OARECARE
C. Rap.	Abbel
C Rad	Diriclait
Rabbe	Leibnitz
Divergența	Dir
comp. cu lim /ineg.	
C. de condensare a lui Cauchy	

Observăm că am reuși cu criteriul rap.:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(a+1)(a+2)\cdot \ldots \cdot(a+n)}\cdot(a+n+1)}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(a+n+1)}{n+1} = 1 \rightarrow$$ acest rez. nu ne ajută să det. nat. seriei

Încercăm să folosim Raabe

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{\cancel{(a+1)(a+2)\cdot\ldots(a+n)}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{(n+1)!}{\cancel{(a+1)(a+2)}\cdot\ldots\cdot(a+n+1)}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{n+1}{a+n+1}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{\cancel{n+1}-a-\cancel{n}-\cancel{1}}{a+n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-an}{a+n+1}=\frac{-a}{1}$$

$$=-a<0<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n = \text{divergentă}$$

b) $x_n=\left(a\cdot\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)^n$

$x_n>0,\ \forall n\geq 0$ term. poz.

Observăm puterea n $\Rightarrow$ încercăm să folosim criteriul rad. pt. serii

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to+\infty} a\cdot\frac{n^3+1}{n^3+2}=a$$

Facem o discuție pt. a:

$a<1 \Rightarrow a\in[0,1) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ - conv.

$a\in(1,+\infty) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ - div.

$a=1$ nu știm să spunem încă

Luăm $a=1$

$$x_n=\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)^n$$

Facem cu criteriul div. $\Rightarrow$ $\cancel{\lim x_n}$ $=\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{n^3}+1-\cancel{n^3}-2}{n^3+2}\right)^n$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{-1}{n^3+2}}=e^0=1\neq 0$$

$\Rightarrow a=1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ - div.

c) $\sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}}_{c_n} \cdot x^n \quad , a>0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n+1)} \cdot (2(n+1)+1) \cdot x^{n+1}}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6} \ldots \cdot (2(n+1)+2)} \cdot \cancel{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+1) \cdot x^n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(2(n+1)+1) \cdot x^{n+1-n}}{2(n+1)+2} = \frac{(2n+3)x}{2n+4} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x$$

Discuție în funcție de x

$x \in (0,1) \Rightarrow \sum_{n \geq 0} c_n$ - conv.

$x \in (1, +\infty) \Rightarrow \sum_{n \geq 0} c_n$ - div

$x = 1$ nu știm încă

$$x = 1 \Rightarrow c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$$

Încercăm cu Raabe (deja avem rap. calculat)

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \left(\frac{2n+4}{(2n+3)x} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \left(\frac{2n+4}{(2n+3)} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n \cdot \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow x = 1 \quad \sum_{n \geq 0} c_n$ - div.

d) $d_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}}$

Încercăm să facem o comb. în care să apară o serie remarcabilă

$$d_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left((n+1) \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + n \right)} = \frac{1}{\left((n+1)\sqrt{\frac{n+1}{n}} + n \right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + n}$$

← am adăugat seria armonică

$y_n = \frac{1}{n^1} \to$ seria armonică este div.

$x_n = y_n \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1}$

Să punem cine e mai mic sau să calc. $\lim \frac{x_n}{y_n} / \frac{y_n}{x_n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \cancel{y_n} \cdot \cancel{\frac{1}{y_n}} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$ finită și nenulă

$\Rightarrow \sum_{n>0} x_n$ și $\sum_{n \geq 1} y_n$ au ac. natură $\Rightarrow \sum_{n>0} a_n = x_n$ - div.

e) $e_n = a^{\ln n}$, $a>0$

$e^{\ln a^{\ln n}} = e^{\ln a \cdot \ln n}$