NOTIȚE CURS 8

22.11.2023.

METODA GREEDY

Ex: $A = \{5, 1, -7, 3, -2, -1, 10\}$

$S \subseteq A$ a.î. suma elem. lui S să fie maximă

$S =$ toate nr. strict pozitive $= \{5, 1, 3, 10\}$

$A = \{-7, -1, -3, -10\} \Rightarrow S = \{-1\}$

Forma generală a unei probleme de optim.

Fie $A \neq \emptyset$. Să se det. o submulțime $S \subseteq A$ a.î. val. unei funcții obiectiv $f: P(A) \to \mathbb{R}$ să fie minimă sau maximă pe S.

↳ mulțimea submulțimilor lui A

↳ pt. $\forall S' \subseteq A, S' \neq S$ avem $f(S') \leq f(S)$

Principiul de optim

1) optimul global implică întotdeauna optime locale DA

2) optime locale implică întotdeauna optim global DA/NU

↳ met. Greedy

Forma generală a unui alg. de tip Greedy

1) se stabilește un criteriu de selecție pentru ca un elem. din A să fie adăugat în soluția S și se dem. matematic corectitudinea sa (optimalitatea)

2) (*opțional) se sortează convenabil elem. lui A ($O(n \log_2 n)$)

$A = \{5, -1, 7, -3, -8, 9, 2, -4\}$

$S = ?$ $|S| = 5$, a.î. $\sum_{x \in S} x$ să fie maximă, cele mai mari 5 nr.

$O(n^2) \simeq$ maxim

$\to A = \{\underbrace{9, 7, 5, 2, -1}, -3, -4, -8\}$

$\simeq O(n \log_2 n)$

3) se parcurge A elem cu elem și se selectează în S elem. care verifică criteriul respectiv ($O(n \cdot crt())$)

```
S ← ∅
for x in A:
    if crt(x) == True:
        S ← S ∪ {x}
```

Complexitate: sor $O(n)$

des $O(n \log_2 n)$

f.sor $O(n^2)$ (criteriul ia $O(n)$)

Contraexemplu: Plata unei sume folosind un nr. minim de monede

$v = \{8, 7, 1\}$ €

$S = 17$ € $2 \times 8 + 1 \times 1$: 3 monede

$S = 14$ € $8 \times 1 + 1 \times 6$: 7 monede în loc de 2 (nu este optim)

$v = \{8, 7, 5\}$

$S = 14$: $8 \times 1 + 5 \times 1$ rămâne cu 1 euro

PROBLEME:

1) Minimizarea timpului mediu de așteptare

• un ghișeu, avem o coadă formată din n persoane la care cunoaștem
↳ resursă partajată cu excludere reciprocă
timpii individuali de servire $t_1, t_2, \dots t_n$. Să se găsească o modalitate de rearanjare a celor n pers la coadă, a.î. timpul mediu de așteptare să fie minim.

ex: $n = 7$ persoane

$t = (5, 1, 7, 3, 5, 2, 3)$

$t = (5, 6, 13, 16, 21, 23, 26) = \frac{110}{7} = 15,7$ minute

$t' = (1, 2, 3, 3, 5, 5, 7)$

$= (1, 3, 6, 9, 14, 19, 26) = \frac{78}{7} = 11,14$ minute

PP. $p_1, p_2, \dots p_n$ a.î. ① $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_i \le \dots t_j \le \dots \le t_n$ (optimă pt. alg. Greedy) / sol. optimă a alg. Greedy

PP. prin absurd că soluția nu este optimă $\Rightarrow \exists$ o sol. optimă

$p_1, p_2, \dots p_j \dots p_i \dots p_n$
poz i, poz j

② $t_1, t_2 \dots t_j \dots t_i \dots t_n$

$$tm① = \frac{t_1 + (t_1+t_2) + (t_1+t_2+t_3) + \dots (t_1+t_2+\dots t_i) + \dots + (t_1+\dots+t_j) + \dots + (t_1+\dots+t_n)}{n}$$

$$= \frac{nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + (n-i\overset{+1}{)}t_i + \dots (n-j\overset{+1}{)}t_j + \dots + t_n}{n}$$

$$tm② = \frac{nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + (n-i+1)t_j + \dots (n-j+1)t_i + \dots + t_n}{n}$$

$$t_m(1) - t_m(2) = (n-i+1)t_i + (n-j+1)t_j - (n-i+1)t_j - (n-j+1)t_i$$

$$t_m(1) - t_m(2) = \frac{t_i(\cancel{n}-i+\cancel{1} - \cancel{n}+j-\cancel{1}) + t_j(\cancel{n}-j+\cancel{1}-\cancel{n}+i-\cancel{1})}{n}$$

$$= \frac{(j-i)t_i + (i-j)t_j}{n}$$

$$= \frac{\underbrace{(i-j)}_{neg}\underbrace{(t_j - t_i)}_{poz}}{\underbrace{n}_{poz}} < 0 \Rightarrow t_m(1) < t_m(2)$$

pp.

↳ timpul coresp. Greedy

↳ contradicție cu pp.

$\Rightarrow$ sol. optimă = $t_m(1)$ cea Greedy