Logică matematică
CURS 8

Andrei Sipoș

Facultatea de Matematică și Informatică, DL Mate, Anul I
Semestrul II, 2023/2024

Mulțimi de formule

Vom introduce acum alte semnificații ale lui $\models$.

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Pentru orice $e : Q \to 2$, spunem că e **satisface** Γ sau că e este **model** pentru Γ, și scriem $e \models \Gamma$, dacă pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $e \models \varphi$. Mulțimea modelelor lui Γ se notează cu $Mod(\Gamma)$.

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există e cu $e \models \Gamma$, i.e. dacă $Mod(\Gamma) \neq \emptyset$, și că este **nesatisfiabilă** dacă nu este satisfiabilă, i.e. dacă $Mod(\Gamma) = \emptyset$.

Observăm că, pentru orice $e : Q \to 2$ și $\varphi \in E(Q)$, $e \models \{\varphi\}$ dacă și numai dacă $e \models \varphi$.

O mulțime se numește **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Leme

Lemă

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și $e \in Mod(\Gamma)$. Atunci $e \in Mod(\Delta)$.

Demonstrație

Fie $\varphi \in \Delta$. Atunci $\varphi \in \Gamma$ și deci $e \models \varphi$.

Corolar

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\Delta \subseteq \Gamma$ nesatisfiabilă. Atunci Γ este nesatisfiabilă.

Lemă

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $e : Q \to 2$. Atunci $e \models \Gamma$ dacă și numai dacă pentru orice $\Delta \subseteq \Gamma$ finită, $e \models \Delta$.

Demonstrație

Implicația „$\Rightarrow$" este dată de prima lemă. Pentru „$\Leftarrow$", fie $\varphi \in \Gamma$. Atunci $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ finită, deci $e \models \{\varphi\}$, i.e. $e \models \varphi$.

Deducție semantică din mulțimi

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$. Spunem că din Γ **se deduce semantic** φ și scriem $\Gamma \models \varphi$ dacă pentru orice e cu $e \models \Gamma$ avem $e \models \varphi$, i.e. dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.

Se observă că, pentru orice $\varphi \in E(Q)$, avem $\emptyset \models \varphi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$, iar pentru orice $\varphi, \psi \in E(Q)$, $\{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\varphi \models \psi$.

Lemă

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$, $\Delta \subseteq \Gamma$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Delta \models \varphi$. Atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstrație

Fie e cu $e \models \Gamma$. Cum $\Delta \subseteq \Gamma$, $e \models \Delta$, deci $e \models \varphi$.

Leme

Lemă

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Atunci Γ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\Gamma \models \bot$.

Demonstrație

Pentru „$\Rightarrow$", fie e cu $e \models \Gamma$. Dar aceasta este imposibil, în particular $e \models \bot$. Pentru „$\Leftarrow$", presupunem că Γ este satisfiabilă și fie e un model al său. Atunci $e \models \bot$, contradicție!

Lemă

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație

Pentru „$\Rightarrow$", fie $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Atunci $e \models \Gamma$ și deci $e \models \varphi$, contradicție cu $e \models \neg\varphi$. Pentru „$\Leftarrow$", fie $e \models \Gamma$. Dacă $e \not\models \varphi$, atunci $e \models \neg\varphi$ și deci $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, contradicție!

Teorema deducției semantice

Propoziție

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi, \psi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

Demonstrație

Avem:

$$\begin{aligned}
\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi &\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma \cup \{\varphi\},\ e \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \text{ cu } e \models \Gamma \text{ și } e \models \varphi,\ e \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e \models \varphi \text{ implică } e \models \psi \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e^+(\varphi) = 1 \text{ implică } e^+(\psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e^+(\varphi) \leq e^+(\psi) \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e^+(\varphi \to \psi) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{pentru orice } e \models \Gamma,\ e \models \varphi \to \psi \\
&\Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \to \psi.
\end{aligned}$$

Teorema de compactitate

Următorul rezultat este central în ceea ce privește deducția semantică din mulțimi de formule.

Teorema de compactitate – versiunea 1 (TK1)

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$.

Rezultatul este exprimat uneori și sub următoarea formă.

Teorema de compactitate – versiunea 2 (TK2)

O mulțime de formule este satisfiabilă dacă și numai dacă este finit satisfiabilă.

Implicațiile triviale

Vom începe prin a arăta că fiecare dintre versiuni are o implicație care este imediată.

Teoremă (TK1$\Leftarrow$)

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$. Presupunem că există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$. Atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstrație

Este un caz particular al unei leme precedente (unde nu aveam ipoteza de finitudine).

Teoremă (TK2$\Rightarrow$)

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ satisfiabilă. Atunci Γ este finit satisfiabilă.

Demonstrație

Fie $\Delta \subseteq \Gamma$ finită. Cum Γ este satisfiabilă, există $e \models \Gamma$. Dar atunci $e \models \Delta$, deci Δ este satisfiabilă.

Următorul pas constă în a arăta că cele două implicații netriviale sunt echivalente între ele.

Teoremă – (TK1⇒) ⇒ (TK2⇐)

Presupunem că pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \models \varphi$, există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$. Atunci orice mulțime finit satisfiabilă este satisfiabilă.

Demonstrație

Fie Γ finit satisfiabilă. Presupunem că Γ este nesatisfiabilă. Atunci $\Gamma \models \perp$ și, deci, există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \perp$. Dar atunci Δ este nesatisfiabilă, ceea ce contrazice faptul că Γ este finit satisfiabilă.

Echivalența dintre implicațiile netriviale

Teoremă – (TK2$\Leftarrow$) $\Rightarrow$ (TK1$\Rightarrow$)

Presupunem că orice mulțime finit satisfiabilă este satisfiabilă. Atunci, pentru orice $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \models \varphi$, există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi$.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $\Gamma \models \varphi$. Atunci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă și, deci, există $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită nesatisfiabilă. Luăm $\Delta := \Sigma \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulțime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \models \varphi$. Cum $\Sigma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\begin{aligned}\Sigma = \Sigma \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) &= (\Sigma \cap \Gamma) \cup (\Sigma \cap \{\neg\varphi\}) \\ &= \Delta \cup (\Sigma \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.\end{aligned}$$

Cum Σ este nesatisfiabilă, rezultă că și $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă, deci $\Delta \models \varphi$.

Ultraproduse

Ne mai rămâne de demonstrat oricare dintre acele implicații netriviale despre care am arătat că sunt echivalente. Instrumentul principal în acea demonstrație va fi conceptul de **ultraprodus**.

Fie I o mulțime nevidă și $e = (e_i)_{i \in I}$ o familie de evaluări (elemente ale lui 2^Q). Fie U un ultrafiltru pe I. Numim **ultraprodusul** lui e relativ la U funcția $e^U : Q \to 2$, definită, pentru orice $x \in Q$, prin

$$e^U(x) = 1 :\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i(x) = 1\} \in U.$$

Teorema fundamentală a ultraproduselor (Łoś)

Fie I o mulțime nevidă, $e = (e_i)_{i \in I}$ o familie de evaluări și U un ultrafiltru pe I. Atunci, pentru orice $\chi \in E(Q)$,

$$e^U \models \chi \Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \chi\} \in U.$$

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție structurală după χ. Cazul $\chi \in Q$ este evident. Presupunem acum că $\chi = \bot$. Cum $e^U \not\models \bot$, iar $\{i \in I \mid e_i \models \bot\} = \emptyset \notin U$, concluzia rezultă imediat.

Teorema fundamentală a ultraproduselor

Demonstrație (cont.)

Presupunem acum că există φ, ψ cu $\chi = \varphi \to \psi$. Notăm $A_\varphi := \{i \in I \mid e_i \models \varphi\}$ și $A_\psi := \{i \in I \mid e_i \models \psi\}$. Atunci

$$
\begin{aligned}
e^U \models \varphi \to \psi &\Leftrightarrow e^U \not\models \varphi \text{ sau } e^U \models \psi \\
&\Leftrightarrow A_\varphi \notin U \text{ sau } A_\psi \in U \\
&\qquad \text{(din ipoteza de inducție)} \\
&\Leftrightarrow I \setminus A_\varphi \in U \text{ sau } A_\psi \in U \\
&\qquad (U \text{ fiind ultrafiltru}) \\
&\Leftrightarrow (I \setminus A_\varphi) \cup A_\psi \in U \\
&\qquad (U \text{ fiind ultrafiltru}) \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \not\models \varphi \text{ sau } e_i \models \psi\} \in U \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \varphi \to \psi\} \in U.
\end{aligned}
$$

Teorema fundamentală a ultraproduselor

Teorema fundamentală a ultraproduselor – versiunea 2

Fie I o mulțime nevidă, $e = (e_i)_{i \in I}$ o familie de evaluări și U un ultrafiltru pe I. Atunci, pentru orice $\Delta \subseteq E(Q)$ finită,

$$e^U \models \Delta \Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Delta\} \in U.$$

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui Δ. Dacă $\Delta = \emptyset$, atunci $e^U \models \Delta$ și avem $\{i \in I \mid e_i \models \Delta\} = I \in U$ (U fiind filtru).

Teorema fundamentală a ultraproduselor

Demonstrație (cont.)

Presupunem acum că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|\Delta| = n^+$ și luăm $\Gamma \subseteq E(Q)$ și $\varphi \in E(Q)$ cu $|\Gamma| = n$ și $\Delta = \Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci avem

$$
\begin{aligned}
e^U \models \Delta &\Leftrightarrow e^U \models \Gamma \text{ și } e^U \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Gamma\} \in U \text{ și } e^U \models \varphi \\
&\qquad \text{(din ipoteza de inducție)} \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Gamma\} \in U \text{ și } \{i \in I \mid e_i \models \varphi\} \in U \\
&\qquad \text{(din teorema fundamentală)} \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Gamma\} \cap \{i \in I \mid e_i \models \varphi\} \in U \\
&\qquad (U \text{ fiind filtru}) \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Gamma \text{ și } e_i \models \varphi\} \in U \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid e_i \models \Delta\} \in U.
\end{aligned}
$$

Demonstrația teoremei de compacitate

Putem, acum, în sfârșit, demonstra teorema de compacitate.

Teoremă (TK2$\Leftarrow$)

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ finit satisfiabilă. Atunci Γ este satisfiabilă.

Demonstrație

Fie $I := 2^Q \neq \emptyset$ și $J := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\Gamma) = \{\Delta \in \mathcal{P}(\Gamma) \mid \Delta \text{ finită}\}$. Definim familia de evaluări $e = (e_i)_{i \in I}$ astfel încât, pentru orice $i \in I$, $e_i := i$.

Fie U un ultrafiltru pe I. Atunci $e^U \models \Gamma$ dacă și numai dacă, pentru orice $\Delta \in J$, $e^U \models \Delta$ dacă și numai dacă, pentru orice $\Delta \in J$, $\{i \in I \mid e_i \models \Delta\} \in U$. Notăm, pentru orice $\Delta \in J$, $S_\Delta := \{i \in I \mid e_i \models \Delta\}$. Pentru a arăta că Γ este satisfiabilă, este suficient, deci, să găsim un ultrafiltru U care include $\{S_\Delta \mid \Delta \in J\}$, i.e. să arătăm că $\{S_\Delta \mid \Delta \in J\}$ are proprietatea intersecțiilor finite.

Demonstrația teoremei de compactitate

Demonstrație (cont.)

Vom arăta chiar mai mult, anume că $\{S_\Delta \mid \Delta \in J\}$ are proprietatea **tare** a intersecțiilor finite, i.e. că:

- pentru orice $\Delta \in J$, $S_\Delta \neq \emptyset$;
- pentru orice $\Delta_1, \Delta_2 \in J$, există $\Delta \in J$ cu $S_{\Delta_1} \cap S_{\Delta_2} = S_\Delta$.

Prima proprietate este imediată, din ipoteză. Pentru a doua, fie $\Delta_1, \Delta_2 \in J$. Atunci $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in J$ și avem

$$\begin{aligned} S_{\Delta_1} \cap S_{\Delta_2} &= \{i \in I \mid e_i \models \Delta_1 \text{ și } e_i \models \Delta_2\} \\ &= \{i \in I \mid e_i \models \Delta_1 \cup \Delta_2\} = S_{\Delta_1 \cup \Delta_2}, \end{aligned}$$

deci putem lua $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$. Demonstrația este, deci, încheiată.

A se observa că în această demonstrație, spre deosebire de cele precedente, s-a folosit Axioma alegerii, dar doar via Teorema de existență a ultrafiltrului (strict mai slabă ca axioma), despre care se poate arăta că este echivalentă cu Teorema de compactitate.

O aplicație a teoremei de compactitate

Vom arăta acum un mod de a aplica această teoremă.

Numim **graf** (neorientat) o pereche (A, R) astfel încât R este o relație ireflexivă și simetrică pe A. Un graf (A, R) se numește **finit** dacă A este finită. Dacă (A, R) și (B, S) sunt grafuri, spunem că (B, S) este **subgraf** al lui (A, R) dacă $B \subseteq A$ și $S \subseteq R$. Dacă $k \in \mathbb{N}$, o k-**colorare** pe un graf (A, R) este o funcție $f : A \to k$ astfel încât pentru orice x, $y \in A$ cu xRy, avem $f(x) \neq f(y)$ – dacă există o asemenea funcție, spunem că (A, R) este k-**colorabil**.

Vom demonstra următorul rezultat.

Teoremă

Fie $k \in \mathbb{N}$. Atunci un graf este k-colorabil dacă și numai dacă orice subgraf finit al său este k-colorabil.

Implicația „$\Rightarrow$" este imediată: fie (A, R) un graf și fie (B, S) un subgraf finit al său. Atunci, dacă f este o k-colorare a lui (A, R), avem că $f_{|B}$ este o k-colorare a lui (B, S).

Demonstrăm implicația „$\Leftarrow$". Fie (A, R) un graf. Luăm Q astfel încât $Q \cap \{\bot, \to\} = \emptyset$ și $|Q| = |A \times k|$ (un asemenea Q există dintr-o propoziție anterioară). Fixăm o bijecție $q : A \times k \to Q$ și notăm, pentru orice $a \in A$ și $i \in k$, $q(a, i)$ cu $v_{a,i}$. Fie mulțimile:

$$\Gamma_1 := \{v_{a,0} \vee \ldots \vee v_{a,k-1} \mid a \in A\}$$
$$\Gamma_2 := \{v_{a,i} \to \neg v_{a,j} \mid a \in A, i, j \in k, i < j\}$$
$$\Gamma_3 := \{\neg(v_{a,i} \wedge v_{b,i}) \mid a, b \in A, aRb, i < k\}$$

și $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

O aplicație a teoremei de compactitate

Vom arăta că Γ este finit satisfiabilă. Atunci, din Teorema de compactitate, Γ este satisfiabilă și, deci, există $e \models \Gamma$. Se poate atunci defini o k-colorare $f : A \to k$, punând, pentru orice $a \in A$ și $i \in k$,

$$f(a) = i :\Leftrightarrow e(v_{a,i}) = 1.$$

Pentru a demonstra că Γ este finit satisfiabilă, fie $\Delta \subseteq \Gamma$ finită. Atunci

$$B := \{a \in A \mid \text{există } i < k,\ \varphi \in \Delta \text{ cu } v_{a,i} \in Var(\varphi)\}$$

este finită. Notăm $S := R \cap (B \times B)$. Atunci (B, S) este un subgraf finit al lui (A, R) și deci admite o k-colorare $g : B \to k$. Definim $e : Q \to 2$, punând, pentru orice $a \in B$ și $i \in k$,

$$e(v_{a,i}) = 1 :\Leftrightarrow g(a) = i,$$

iar pentru $a \notin B$ și $i \in k$, punem $e(v_{a,i}) := 1$. Atunci $e \models \Delta$.

Ne putem pune întrebarea dacă Teorema de compacitate are vreo legătură cu noțiunea de compacitate în spații topologice. Răspunsul este afirmativ și îl vom detalia în continuare. Pentru început, reamintim definiția spațiului topologic.

Definiție

Un **spațiu topologic** este o pereche (X, τ) unde $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ și:

- $\emptyset$, $X \in \tau$;
- pentru orice A, $B \in \tau$, $A \cap B \in \tau$;
- pentru orice familie $(A_i)_{i \in I}$ de elemente ale lui τ, avem $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Elementele lui τ se numesc **deschișii** spațiului. Submulțimile A ale lui X cu $X \setminus A \in \tau$ se numesc **închișii** spațiului.

Spații topologice definite prin închiși

Spațiile topologice se pot defini și luând noțiunea de închis ca fiind primară.

Definiție

Un **spațiu topologic** este o pereche (X, ρ) unde $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ și:

- $\emptyset$, $X \in \rho$;
- pentru orice A, $B \in \rho$, $A \cup B \in \rho$;
- pentru orice familie $(A_i)_{i \in I}$ de elemente ale lui ρ (cu $I \neq \emptyset$), avem $\bigcap_{i \in I} A_i \in \rho$.

Putem defini $\rho \subseteq \mathcal{P}(2^Q)$ ca fiind mulțimea tuturor mulțimilor de forma $Mod(\Gamma)$, cu $\Gamma \subseteq E(Q)$. Arătăm că $(2^Q, \rho)$ este spațiu topologic (definit prin închiși).

Clar, $\emptyset = Mod(\{\bot\}) \in \rho$ și $2^Q = Mod(\emptyset) \in \rho$.

Fie $(\Gamma_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi de formule. Atunci

$$\bigcap_{i\in I} Mod(\Gamma_i) = Mod\left(\bigcup_{i\in I} \Gamma_i\right) \in \rho.$$

Rămâne de arătat condiția din mijloc.

Fie acum $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq E(Q)$. Vrem să arătăm că există $\Gamma \subseteq E(Q)$ cu

$$Mod(\Gamma_1) \cup Mod(\Gamma_2) = Mod(\Gamma).$$

Luăm $\Gamma := \{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in \Gamma_1,\ \psi \in \Gamma_2\}$.

Pentru implicația „$\subseteq$”, fie w.l.o.g. $e \in Mod(\Gamma_1)$. Vrem $e \models \Gamma$. Fie $\varphi \in \Gamma_1$ și $\psi \in \Gamma_2$. Vrem $e \models \varphi \vee \psi$. Cum $\varphi \in \Gamma_1$, $e \models \varphi$, deci $e \models \varphi \vee \psi$.

Pentru implicația „$\supseteq$”, fie $e \in Mod(\Gamma)$ și presupunem $e \notin Mod(\Gamma_1)$, deci există $\varphi \in \Gamma_1$ cu $e \not\models \varphi$. Vrem $e \in Mod(\Gamma_2)$. Fie $\psi \in \Gamma_2$. Cum $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ și $e \models \Gamma$, avem $e \models \varphi \vee \psi$. Cum $e \not\models \varphi$, avem $e \models \psi$.

Compacitate

Faptul că un spațiu topologic (X, τ) este compact se definește de obicei astfel: pentru orice familie de deschiși $(A_i)_{i \in I}$ cu $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, avem că există $J \subseteq I$ finită cu $\bigcup_{i \in J} A_i = X$.

Noțiunea se poate reformula, în funcție de închiși, astfel: pentru orice familie de închiși $(A_i)_{i \in I}$ cu $I \neq \emptyset$ cu proprietatea că, pentru orice $J \subseteq I$ finită nevidă, $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, avem că $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Teorema de compacitate 3

Putem, acum, reformula teorema de compacitate.

Teoremă (TK3)

Spațiul topologic (definit prin închiși) $(2^Q, \rho)$ este compact.

Demonstrație

Fie $(\Gamma_i)_{i \in I}$ cu $I \neq \emptyset$ o familie de mulțimi de formule. Presupunem că, pentru orice $J \subseteq I$ finită nevidă, $\bigcap_{i \in J} Mod(\Gamma_i) \neq \emptyset$ – cum $\bigcap_{i \in J} Mod(\Gamma_i) = Mod\left(\bigcup_{i \in J} \Gamma_i\right)$, aceasta înseamnă că $\bigcup_{i \in J} \Gamma_i$ este satisfiabilă. Vrem să arătăm că $\bigcap_{i \in I} Mod(\Gamma_i) \neq \emptyset$. Cum $\bigcap_{i \in I} Mod(\Gamma_i) = Mod\left(\bigcup_{i \in I} \Gamma_i\right)$, rămâne de arătat, ținând cont de (TK2$\Leftarrow$), că $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ este finit satisfiabilă. Fie $\Delta \subseteq \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ finită. Atunci există $J \subseteq I$ finită nevidă cu $\Delta \subseteq \bigcup_{i \in J} \Gamma_i$. Cum $\bigcup_{i \in J} \Gamma_i$ este satisfiabilă, avem că și Δ este satisfiabilă.

Echivalența

Mai putem arăta și că această formă este echivalentă cu cele dinainte.

Teoremă – (TK3) $\Rightarrow$ (TK2$\Leftarrow$)

Presupunem că spațiul topologic (definit prin închiși) $(2^Q, \rho)$ este compact. Atunci orice mulțime finit satisfiabilă este satisfiabilă.

Demonstrație

Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ finit satisfiabilă. Vrem să arătăm că Γ este satisfiabilă. Putem presupune $\Gamma \neq \emptyset$. Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, putem pune $\Gamma_\varphi := \{\varphi\}$. Fie $\Delta \subseteq \Gamma$ finită nevidă, deci Δ este satisfiabilă. Avem că $\bigcap_{\varphi\in\Delta} Mod(\Gamma_\varphi) = \bigcap_{\varphi\in\Delta} Mod(\varphi) = Mod(\Delta) \neq \emptyset$. Din compacitatea spațiului, avem $\bigcap_{\varphi\in\Gamma} Mod(\Gamma) \neq \emptyset$. Cum $\bigcap_{\varphi\in\Gamma} Mod(\Gamma_\varphi) = \bigcap_{\varphi\in\Gamma} Mod(\varphi) = Mod(\Gamma)$, avem că Γ este satisfiabilă, ceea ce trebuia demonstrat.