Universitatea din Bucureşti 29 mai 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Elemente de calcul ştiinţific
Verificare – Matematică, Anul I

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
4. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 10:30–13:00.**
5. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un Reply simplu la emailul în care aţi primit subiectele ca fişier PDF, cu denumirea `NUME_PRENUME_GRUPA.pdf`.
6. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **29 mai 2021, orele 13:40.**

EX#1 Fie sistemul

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) Menţionaţi dacă matricea asociată sistemului (1):

(i) admite factorizarea LU fără pivotare;
(ii) admite factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU);
(iii) admite metoda de eliminare Gauss fără pivotare;
(iv) admite metoda de eliminare Gauss cu pivotare (parţială, parţială scalată sau totală);
(v) admite factorizarea Cholesky.
(vi) este (strict) diagonal dominantă.

Justificaţi răspunsurile date.

(b) Determinaţi soluţia sistemului (1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, folosind metoda de eliminare Gauss fără pivotare.

EX#2 Determinaţi ecuaţia *parabolei de regresie* asociată punctelor (i.e. parabola cea mai apropiată de punctele respective): $P_1(-2;-7)$, $P_2(-1;3)$, $P_3(1;-5)$, $P_4(2;-13)$, rezolvând sistemul de ecuaţii normale asociat folosind factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU). Explicaţi şi ilustraţi grafic rezultatul obţinut.

EX#3 Fie $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n] \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, unde $\mathbf{a}_k = \left(a_{ik}\right)_{i=\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1,n}$.

Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:

(i) $\mathbf{A}$ este inversabilă la stânga;
(ii) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ sunt liniar independenţi;