

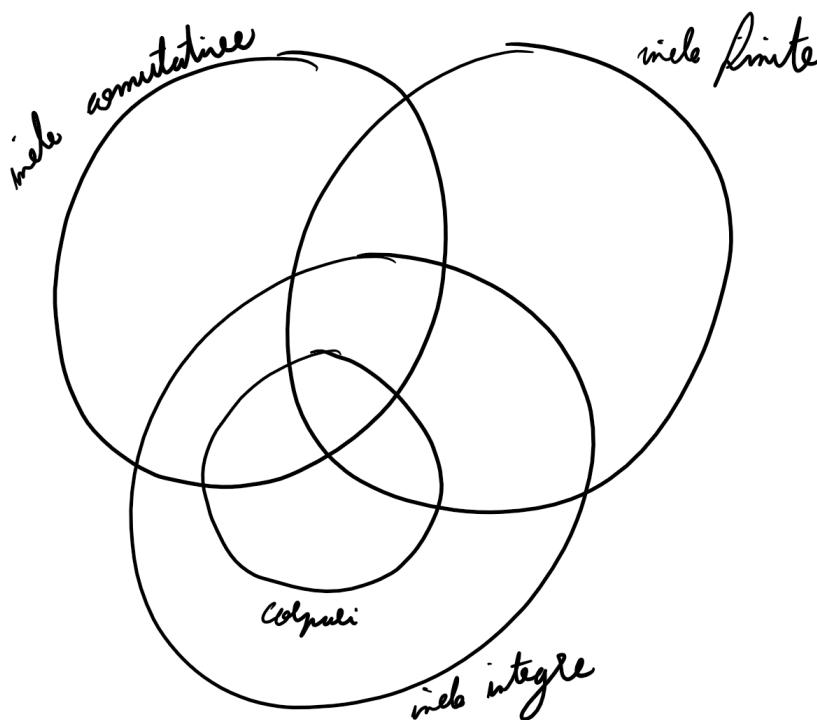
Seminarul 1 de Algebră II

Grupele 103 și 104 - 2020-2021

1 Exerciții de recapitulare

În acest semestru, toate inelele se presupun a fi unitare, dacă nu este specificat altfel.

Exercițiul 1.1: În diagrama de mai jos, completați toate zonele logic posibile cu cel puțin un exemplu de inel sau decideți că sunt vide:



Exercițiul 1.2:

- a) Pentru $n \geq 2$, determinați în inelul \mathbb{Z}_n elementele inversabile, divizorii lui zero și elementele nilpotente. Precizați numărul lor.
- b) Dați exemple de inele neizomorfe cu exact 36 de elemente nilpotente.

Exercițiul 1.3:

- a) Fie R un inel și $a \in R$ care este inversabil la stânga și inversabil la dreapta. Arătați că a este inversabil.
- b) Dați un exemplu de inel R și element $a \in R$ care este inversabil la dreapta (stânga), dar nu la stânga (dreapta).
- c) Demonstrați că dacă R este un inel și $a \in R$ este inversabil la dreapta, dar nu la stânga, atunci a are o infinitate de inverși la dreapta.

Exercițiul 1.4:

- a) Fie R un inel și $a, b \in R$. Demonstrați că $1 - ab$ este inversabil la dreapta (stânga) $\iff 1 - ba$ este inversabil la dreapta (stânga).
- b) Fie R un inel și $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), B \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$. Demonstrați că $I_m - AB$ este inversabilă în $\mathcal{M}_m(R) \iff 1 - BA$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(R)$.

Exercițiul 1.5: Fie

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demonstrați că, împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor, L are o structură de corp comutativ.

În plus, arătați că aplicația

$$\varphi : L \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right) = a + bi$$

este un izomorfism de corpuri între L și \mathbb{C} .

Exercițiul 1.6: Arătați că orice inel R se scufundă într-un inel de forma $\text{End}(G)$, cu G grup abelian.

Exercițiul 1.7: Determinați toate morfismele unitare de inele:

- de la \mathbb{Z} la \mathbb{Z} ;
- de la \mathbb{Z} la \mathbb{Q} ;
- de la \mathbb{Q} la \mathbb{Z} ;
- de la \mathbb{Z}_m la \mathbb{Z}_n ;
- de la \mathbb{Q} la \mathbb{Q} ;
- de la \mathbb{R} la \mathbb{R} ;
- de la \mathbb{C} la \mathbb{C} ;
- de la $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ la $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;