Seminarul 2 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Inele. Recapitulare

Exercițiul 1.1: Fie R un inel (nu neapărat unitar). Demonstraţi că inelul de matrice $\mathcal{M}_n(R)$ este comutativ $\iff$ fie $n = 1$ şi R comutativ, fie $ab = 0,\ \forall a, b \in R$.

Exercițiul 1.2: Fie R un inel comutativ. Demonstraţi că

$$Z(\mathcal{M}_n(R)) = \{aI_n \mid a \in R\} \simeq R.$$

Exercițiul 1.3: Fie K, L corpuri comutative. Demonstraţi că $\mathcal{M}_m(K) \simeq \mathcal{M}_n(L) \iff K \simeq L$ şi $m = n$.

De acum, toate inelele se consideră comutative şi unitare, dacă nu este precizat altfel.

Exercițiul 1.4: Fie $\mathcal{C} = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$. Arătaţi că:

a) $\mathcal{C}$ este un inel cu adunarea şi înmulţirea (punctuală) a funcţiilor.

b) Dacă $t \in [0, 1]$, atunci aplicaţia

$$\varphi_t : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ \varphi_t(f) = f(t),\ \forall t \in [0, 1]$$

este morfism de inele.

c) **Orice** morfism de inele $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ este de forma φ_t pentru un $t \in [0, 1]$.

Exercițiul 1.5: Fie R inel și $I_1, I_2 \trianglelefteq R$. Demonstraţi că

$$I_1 \cdot I_2 \subset I_1 \cap I_2 \subset I_1 + I_2.$$

Arătaţi că dacă $I_1 + I_2 = R$ (spunem că I_1 și I_2 sunt *comaximale*), atunci $I_1 \cdot I_2 = I_1 \cap I_2$.

Exercițiul 1.6: Calculaţi $18\mathbb{Z} + (2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z})$, $15\mathbb{Z} \cap (12\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z})$ şi $(2\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}) \cdot (5\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z})$.

2 Inelul factor. Recapitulare

Exercițiul 2.1: Demonstraţi următoarea **Teoremă de corespondenţă a idealelor**:

Fie R, S inele și $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele.

Atunci există o corespondență bijectivă între idealele lui S și idealele lui R care conțin $\operatorname{Ker} f$ *i.e.* funcțiile

$$\varphi : \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\} \to \{J \trianglelefteq S\},\ \varphi(I) = f(I),$$
$$\psi : \{J \trianglelefteq S\} \to \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\},\ \psi(J) = f^{-1}(J).$$

sunt mutual inverse: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}, \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Exercițiul 2.2: Pentru un inel R şi $I \trianglelefteq R$, descrieţi idealele lui ${}^{R}\!/_{I}$. În particular, descrieţi idealele lui $\mathbb{Z}_n$.