SEMINAR 4:

E 1.

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Fie $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e \models \Gamma \Leftrightarrow e \models v_n \to v_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow e^+(v_n) \leq e^+(v_{n+1})\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow e(v_n) \leq e(v_{n+1})\ \forall n \in \mathbb{N}$

pt. că implicația e falsă doar în cazul $1 \to 0$

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geq k \end{cases}$$

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	...
e_0	1	1	1	1	1	
e_1	0	1	1	1	1	
e_2	0	0	1	1	1	

... = toate evaluările posibile

$e_\infty(v_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$

Fie $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e \models \Gamma \Leftrightarrow e^+(v_0) = 1$ și $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$, $\forall n \in \overline{0,7}$

$e(v_0) = 1$

$e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow e(v_n) \leq e(v_{n+1})\quad \forall n \in \overline{0,7}$

$Mod(\Gamma) = \{e: V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1\ \forall n \in \overline{0,8}\}$

E2 Fie $f: V \to \{0,1\}$. Găsiți Γ a.î. $Mod(\Gamma) = \{f\}$

$f: V \to \{0,1\}$

$\Gamma = v^f = \{v^f \mid v \in V\}$

Fie $e \in Mod(\Gamma) \Leftrightarrow e \models \Gamma \Leftrightarrow$ pt. orice $v \in V$, $e \models v^f \Leftrightarrow$ pt. orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$

Vrem să dem. că $e = f$ pt. orice $v \in V$, $e(v) = f(v)$

Fie $v \in V$

Dacă $f(v) = 1 \Rightarrow v = v^f \Rightarrow e(v) = e(v^f)$, $e^+(v^f) = 1$ deci $f(v) = 1 = e(v)$

Dacă $f(v) = 0 \Rightarrow v^f = \neg v \Rightarrow e(v) = e^+(v) = \neg\neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) \Rightarrow$

$\neg e^+(v^f) = 0 \Rightarrow e(v) = f(v) = 0$

3. (i) Să se arate că mulțimea modelelor unei mulțimi satisfiabile și finite de formule este infinită.

Γ - satisf. $\Rightarrow \exists\ e \vDash \Gamma$

Γ - finită $\Rightarrow \exists\ m \in \mathbb{N}$ a.î. $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$

Fie $e_k : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_k(x) = \begin{cases} e(x), & x \in \{v_0 \dots v_m\} \\ 1, & x \in \{v_{m+1} \dots v_{m+k}\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

P. 2.13

$$\left.\begin{array}{l} e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1 \Rightarrow e_k \vDash \Gamma \\ \underbrace{\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}}_{\text{inf}} \subseteq Mod(\Gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow Mod(\Gamma) \text{ inf.}$$

(ii) Găsiți o mulțime (infinită) de formule cu prop. că $\nexists$ o mulțime finită de formule care să aibă exact aceleași modele.

$\Gamma := V = \underbrace{\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ = mulțime inf. de formule

$e : V \to \{0,1\}$ - model al lui $\Gamma \Leftrightarrow e(v_n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

e - fct. const. egală cu 1

$Mod(\Gamma) = \{1\}$

a) Δ - mulțime finită de formule:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \Delta \text{ nesatisfiabilă} \Rightarrow Mod = \emptyset \\ 2.\ \Delta \text{ satisfiabilă} \Rightarrow (i) \end{array}\right\} \Rightarrow Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$$