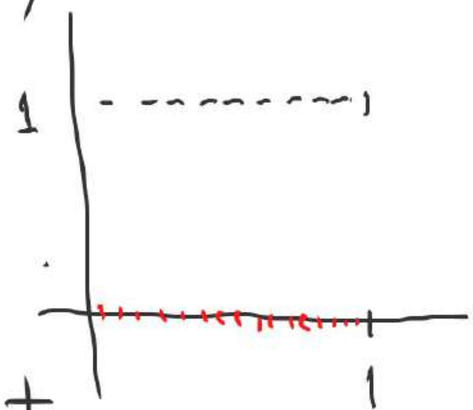
1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y = f(x)\}$ graficul lui f

$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ 0 \le y \le f(x)\}$ subgraficul lui f

Aratati ca $G_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, $\lambda(G_f) = 0$ si $\Gamma_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

<u>Solutie</u>. $(x,y) \in G_f \Rightarrow x \in [0,1],\ y \in \{0,1\}$

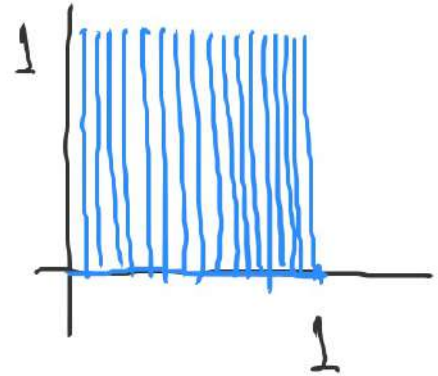


$G_f \subset B = \left([0,1] \times \{0\}\right) \cup \left([0,1] \times \{1\}\right)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

$$\lambda\left(\left([0,1] \times \{0\}\right) \cup \left([0,1] \times \{1\}\right)\right) = \lambda\left([0,1] \times \{0\}\right) + \lambda\left([0,1] \times \{1\}\right) = 0$$ (Ex 8, Sem 14)

$$\Rightarrow \lambda^*(G_f) \le \lambda^*(B) = \lambda(B) = 0 \Rightarrow \lambda^*(G_f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} G_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \\ \lambda(G_f) = 0. \end{cases}$$

$\Gamma_f \subset [0,1] \times [0,1] \Rightarrow \Gamma_f$ mărginit.



Reamintim.

$A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. UASE

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$; 2) $Fr(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(Fr(A)) = 0$

3) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(\bar{A}) = \lambda(\mathring{A})$.

$\mathring{\Gamma}_f = \emptyset$ (dacă $\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathring{\Gamma}_f \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B((\alpha, \beta), r) \subset \Gamma_f$

$\Rightarrow \exists\, (x, y) \in B((\alpha, \beta), r) \subset \Gamma_f$ cu $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cum însă

$\Gamma_f = \left([0,1]\times\{0\}\right)\cup\left(([0,1]\cap\mathbb{Q})\times[0,1]\right)$ și deci

$\forall (x_0, y_0) \in \Gamma_f$ avem $x \in \mathbb{Q}$ sau $y \in \mathbb{Q}$

Rezultă că $\mathring{\Gamma}_f = \emptyset$

$\overline{\Gamma_f} = [0,1]\times[0,1]$

Fie $(\alpha,\beta) \in [0,1]\times[0,1]$, arătăm că există

$(x_n, y_n) \in \Gamma_f$ a.î. $(x_n, y_n) \longrightarrow (\alpha,\beta)$

Într-adevăr, fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}\cap[0,1]$ a.î. $x_n \to \alpha$ și $y_n = \beta$.

$(x_n, y_n) = (x_n, \beta) \xrightarrow{n\to\infty} (\alpha,\beta) \Longrightarrow (\alpha,\beta) \in \overline{\Gamma_f}$

Aşadar $\overline{\Gamma_f} = [0,1] \times [0,1]$ şi $\mathring{\Gamma}_f = \emptyset$

Cum $\overline{\Gamma_f}, \mathring{\Gamma}_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ dar $\underset{1}{\underset{\parallel}{\lambda(\overline{\Gamma_f})}} \neq \underset{0.}{\underset{\parallel}{\lambda(\mathring{\Gamma}_f)}}$

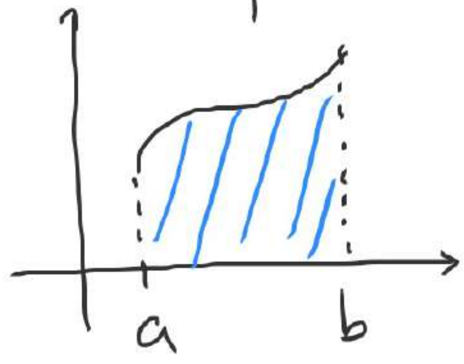
rezultă că $\Gamma_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

! Am folosit:

Dacă (X, d) sp. metric $A \subset X$ şi $x \in X$, atunci

$x \in \overline{A} \iff \exists\, (x_n)_{n \geq 1} \subset A$ cu $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

2) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann, $f\geq 0$.



Atunci mulțimea

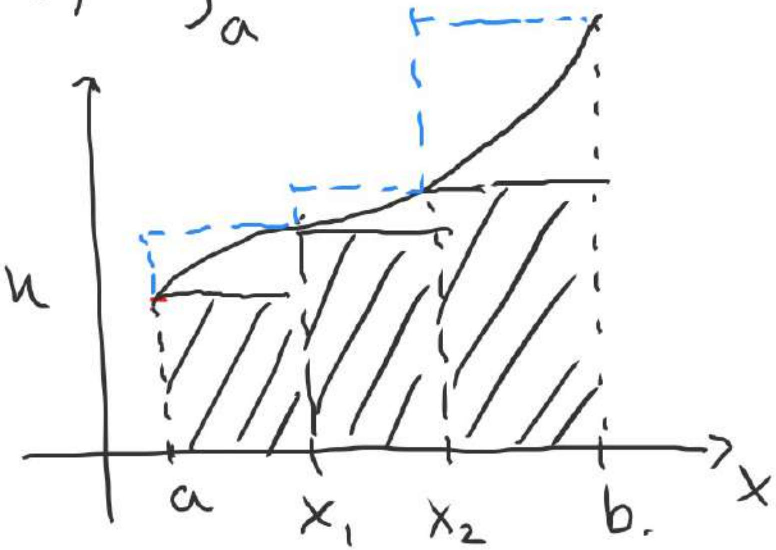
$$\Gamma_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$$

este măsurabilă Jordan și $\lambda(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Soluție: Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$ $1\leq i\leq n$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$



$E_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n}\left([x_{i-1},x_i]\times[0,m_i]\right)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$

$F_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n}\left([x_{i-1},x_i]\times[0,M_i]\right)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$.

$$E_\Delta\subset\Gamma_f\subset F_\Delta$$

$$\lambda(E_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = s_\Delta(f) \qquad \lambda_*(\Gamma_f) = \sup_{\substack{E \subset \Gamma_f \\ E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)}} \lambda(E)$$

$$\lambda(F_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = S_\Delta(f)$$

$$s_\Delta(f) = \lambda(E_\Delta) \leq \lambda(F_\Delta) \leq S_\Delta(f) \quad , \quad E_\Delta \subset \Gamma_f \subset F_\Delta$$

$$\sup_\Delta s_\Delta(f) = \inf_\Delta S_\Delta(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$s_\Delta(f) \leq \lambda(E_\Delta) \leq \lambda_*(\Gamma_f) \leq \lambda^*(\Gamma_f) \leq \lambda(F_\Delta) = S_\Delta(f) \ , \ \forall \Delta.$$

Deci $s_\Delta(f) \leq \lambda_*(\Gamma_f)$ și $\lambda^*(\Gamma_f) \leq S_\Delta(f)$, $\forall \Delta$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sup_{\Delta} s_{\Delta}(f) \leq \lambda_*(\Gamma_f) \text{ și}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{\Delta} S_{\Delta}(f) \geq \lambda^*(\Gamma_f)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \lambda_*(\Gamma_f) \leq \lambda^*(\Gamma_f) \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \lambda_*(\Gamma_f) = \lambda^*(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

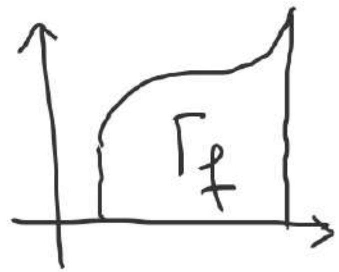
deci $\Gamma_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$.

Consecințe.

1) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann și $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ atunci

$$\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

și $$\lambda(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx.$$



2) dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int. R. atunci

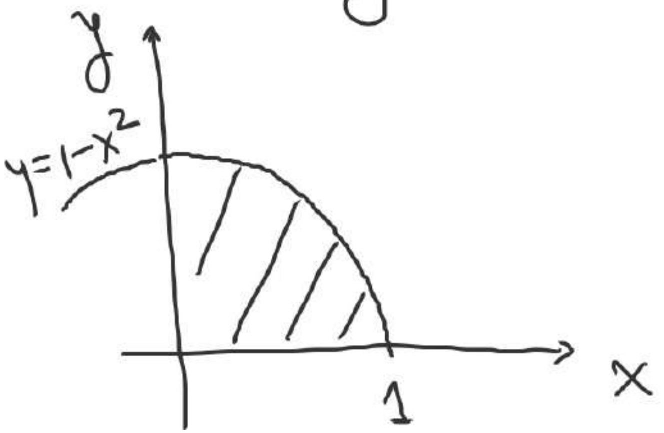
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \text{ și } \lambda(G_f) = 0.$$

Dacă $f \geq 0$, $G_f \subset Fr(\Gamma_f) \Rightarrow \lambda^*(G_f) \le \lambda^*(Fr(\Gamma_f)) = 0$.

3) Dacă f nu este int. R este posibil că $\Gamma_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ (Vezi Ex 1).

4) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ continuă $\Rightarrow G_f, \Gamma_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ (pt că f cont $\Rightarrow f$ integr. Riemann)

3) Arătați că $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x^2\}$ este mas Jordan și calc $\lambda(A)$.



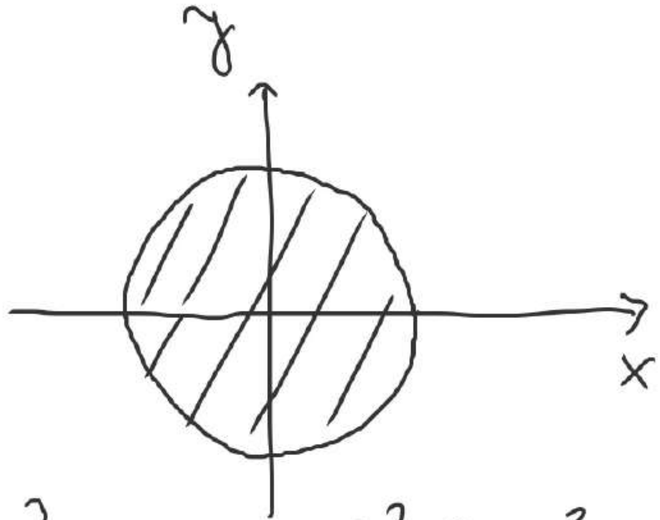
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1-x^2$ este int. R pt că este cont

$$\Rightarrow A = \Gamma_f = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x) = 1-x^2\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

$$\lambda(A) = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

Arătați că $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calc. $\lambda(A)$.



$$A = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

$y^2 \le 1-x^2$

$f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, f, g integ. R.

$$\Rightarrow A = \Gamma_{f,g} = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ f(x) \le y \le g(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$$

$$\lambda(A) = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt$$

$x = \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \pi$$

$dx = \cos t\,dt$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

Obs: $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda(C) = 0$.

5) Arătați că dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă și neglijabilă Lebesgue atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(A) = 0$.

Rezolvare. Fie $\varepsilon > 0$. Cum A este neglij. Lebesgue.

$\exists\ (I_k)_{k\geq 1}$ un șir de intervale deschise (i.e. $I_k = \mathring{I}_k$) a.î. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ și $\sum_{k\geq 1} \mathrm{vol}(I_k) < \varepsilon$.

A compactă $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ a.î. $A \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$

$F = I_1 \cup \dots \cup I_N \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(F) \leq \sum_{k=1}^{n} vol(I_k) < \varepsilon$$

Cum ε a fost ales arbitrar rezultă că

$\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(A) = 0$.

<u>Obs.</u> Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\lambda(A) = 0$ atunci A neglijabilă Lebesgue.

Fie $\varepsilon > 0$.

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n),\ \lambda(A) = 0 \Rightarrow \exists F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ $A \subset F$ a.î. $\lambda(F) < \varepsilon$

$F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\ I_1, I_2, \dots, I_p$ intervale cu interioarele disjuncte două câte două a.î.

$$F = \bigcup_{j=1}^{p} I_j$$

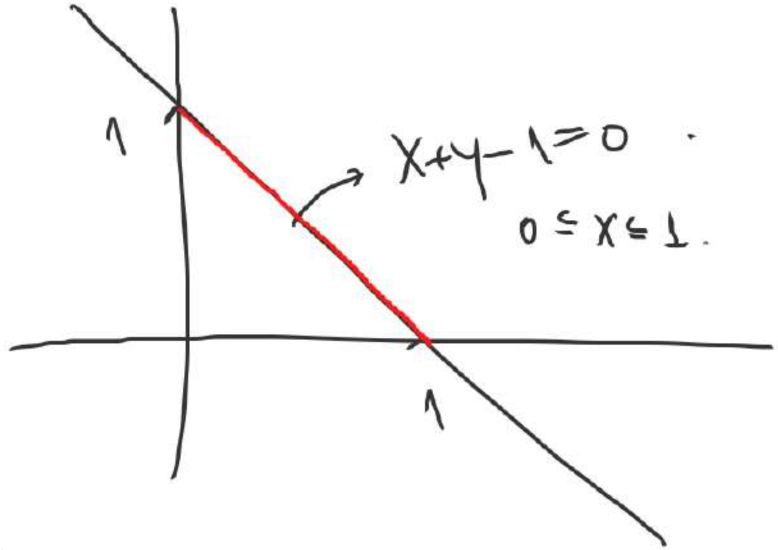
$(I_k)_{k \geq 1}$ unde $I_k = \emptyset$, $k > p$. At. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

$$\sum_{k \geq 1} vol(I_k) = \sum_{k=1}^{p} vol(I_k) = \lambda(F) < \varepsilon$$

Deci A este neglij. Lebesgue.

6). $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0\}$ neglijabilă Lebesgue.

$A : x+y-1=0.$



Fie. $A_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ y = 1-x\}$

$f(x) = 1-x$ int Riemann

și deci $A_1 = G_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\lambda(A_1) = 0$.

$\Rightarrow A_1$ neglijabilă Lebesgue.

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \qquad A_n = \{(x,y) \mid n-1 \le x \le n,\ y = 1-x\}$

La fel ca mai sus, A_n sunt neglijabilă Lebesgue.
Cum A este o reuniune numărabilă de mulțimi neglij. Lebesgue rezultă că A este neglij Lebesgue.

Exercitii

1) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime situată în primul cadran mărginită de curbele $y = 2x$, $y = 3x$, $xy = 1$.
Arătați că $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\lambda(D)$.

2*) $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} r_1, & x = \frac{p}{2^q},\ p, q \in \mathbb{N}^* \\ r_2, & x = \frac{p}{3^q},\ p, q \in \mathbb{N}^* \\ r_3, & x = \frac{p}{5^q},\ p, q \in \mathbb{N}^* \\ \vdots & \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

unde $(r_n)_{n \geq 1}$ este o enumerare a numerelor raționale din $(0,1)$ și $f(x) = r_n$, dacă $x = \frac{p}{d_n^q}$, unde d_n este al n-lea număr prim. Arătați că $G_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

3*) Fie $I \subset \mathbb{R}^2$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann și $g : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = g(x)$ cu excepția unui număr finit de puncte. Arătați că g este integrabilă Riemann și $\int_I f = \int_I g$.