$\boxed{S_{III}}$ - AG

① $\sum_{i=1}^{k}(1+i)x_i + \sum_{i=1}^{4-k} i\,x_{i+k} = 0,\ \forall k=\overline{1,3}$

Să se rez sistemul.

② $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = 4^{i-1},\ \forall i=\overline{1,4}$, unde $a_{ij} = j^{i-1},\ \forall i,j=\overline{1,4}$

③ $\begin{cases} x+y+mz-t=0 \\ 2x+y-z+t=0 \\ 3x-y-z-t=0 \\ mx-2y-2t=0 \end{cases}$

$m=?$ ai sist are și sol nenule.

④ $\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=-1 \\ 2x+y+3z+3t=0 \\ x+2y+3z=-3 \end{cases}$

Să se rez, utilizând metoda eliminării Gauss-Jordan.

⑤ Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculați det A, utilizând Th. Laplace pentru $p=2$ l_2, l_3 fixate, resp c_1, c_2 fixate

(6) Fie $A = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_2d_1 & a_1c_2 & a_2d_2 \\ a_3c_1 & a_4d_1 & a_3c_2 & a_4d_2 \\ b_1c_3 & b_2d_3 & b_1c_4 & b_2d_4 \\ b_3c_3 & b_4d_3 & b_3c_4 & b_4c_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

Utilizând th Laplace pt $p=2$ și l_1, l_2 fixate, să se arate că $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix}$

(7) Fie x_1, x_2, x_3 răd. ec. $x^3+px+q=0$

Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}^2$ în funcție de p, q.

(8) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile.

$\Rightarrow rg(A^{-1}+B^{-1}) = rg(A+B)$

Ind: Dacă $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile

$\Rightarrow rg(BAC) = rg A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

(9) Utilizând matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$,

arătați că $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

(10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Calculați A^n, utilizând Th H-C

(11) $X^{2024} = A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Precizați nr de soluții.

b) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, care este nr de soluții

Ex

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$$ Să se rez ec în $\mathbb{R}$

Ex

P, Q, R funcții de grad cel mult 2 și $a, b, c \in \mathbb{C}$ date

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \end{vmatrix}$$

Dacă $\Delta_0=1$, să se det $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$.

Ind. Se consideră funcția

$$f(x)=\begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \end{vmatrix}$$

$f(a)=f(b)=f(c)=\Delta_0=1$.

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

Ex $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ai $AB=BA$

Dem că $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

Ex $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A^n \neq O_n$, at $A^k \neq O_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Ind: H-C: $A^n-\sigma_1 A^{n-1}+\ldots+(-1)^n \sigma_n I_n=O_n \quad | \cdot A^{k-1} \Rightarrow \sigma_n=0$

Pp abs $\exists\, k>n$ (min) ai $A^k=O_n$

Se repetă rat și $\sigma_1=\ldots=\sigma_n=0 \Rightarrow A^n=O_n$