## Preliminarii

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $S \subset V$ subm. $\neq \emptyset$

- $S$ s.n. <u>SLI</u> $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\forall x_1,\dots,x_n \in S \\ \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}\end{array} : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}\right]$

SLI = sistem liniar independent

- $S$ s.n. <u>sistem liniar dependent</u> (<u>SLD</u>) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \exists x_1,\dots,x_n \in S \\ \exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}, \text{ nu toti nuli} \end{cases}$ a.i. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_V$

- $S$ s.n. <u>sistem de generatori</u> (<u>SG</u>) $\Leftrightarrow$

$\forall x \in V$, $\exists x_1,\dots,x_n \in S$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ a.i. $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Not $V = \langle S \rangle$

Dacă $S$ este SG finit, atunci $V$ s.n. <u>sp. vect. finit generat.</u>

- $S$ s.n. <u>bază</u> $\Leftrightarrow$ 1) $S$ este SLI
  2) $S$ este SG

(T) Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat.

$B_1, B_2$ baze $\Rightarrow \text{card } B_1 = \text{card } B_2 = n = \dim_{\mathbb{K}} V$

<u>OBS 1</u> $n$ = nr. max de vect din SLI
= nr. min. de vect din SG.

<u>OBS 2</u>
a) $\forall$ subm $\neq \emptyset$ a unui SLI este SLI
b) $\forall$ supram. a unui SLD este SLD.
c) $\forall$ supram. a unui SG este SG
d) Din $\forall$ SG (finit) se poate extrage o bază
e) $\forall$ SLI (finit) se poate completa la o bază

<u>OBS 3</u> $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Scanned with CamScanner

⑥ Fie sp vect. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) Fie sist de vect $S = \{(1, m, 1), (m, 1, 1), (1, 0, m)\} \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$

1. $m = ?$ ai $S$ este SLI

2. $m = ?$ ai $S$ este SLD.

3. Dacă $m = 2$, at $S$ este bază

b) Fie sist de vect $S' = \{(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)\} \subset \mathbb{R}^3$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Ce relație verifică $a_1, a_2, a_3$ ai $S'$ este bază?


Scanned with CamScanner

(7) Fie sp v. $((\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) Fie $S_1 = \{(1,1,0), (1,-1,-1), (2,0,-1)\}$

Să se extragă din $S_1$ un SLI maximal $S_1'$ și să se extindă acesta la o bază.

b) Fie $S_2 = \{(1,2,3)\}$

Să se arate că este SLI și nu este SG.

Să se extindă $S_2$ la o bază.

c) $S_3 = \{(1,0,-1), (2,1,3), (1,1,1), (-1,2,3)\}$ 1. $\dim\langle S_3\rangle$ 2. det $S_3' \subset S_3$ SLI max 3. prelungiți la o bază

(8) Fie $(\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \le 2\}, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) $f = 2X^2 - 3X + 1 \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \{f, f', f''\}$ bază. Generalizare.

b). $\mathcal{B}_2 = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ bază. Generalizare.

OBS $f = \tilde{f}$ (funcția polinomială asociată).

(9) Fie $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $B = \{(1,2), (3,4)\}$ bază

b) $S = \{(1,2), (3,4), (4,2)\}$ este SLD, SG

c) $S' = \{(1,4)\}$ este SLI, nu e SG.

Să se extindă la o bază.

d) $S'' = \{(1,-1), (2,3), (3,2), (1,4)\}$ este SG

Să se extragă o bază din $S''$.

(10) Fie $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha - ?$ a.î. $\mathcal{B}$ este bază

b) Fie $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

S este SLI și să se completeze la o bază.

c) $S'=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}\right\}\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\dim\langle S'\rangle = ?$

2. Să se extragă din $S'$ un SLI max și acesta să se extindă la o bază.

(11) $(\mathcal{C}(\mathbb{R}),+,\cdot)/\mathbb{R}$

a) $S=\{f_1,f_2,f_3\}$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\sin x$, $f_3(x)=\cos x$

S este SLI

b) $S'=\{g_1,g_2,g_3\}$, $g_1(x)=1$, $g_2(x)=\cos x$, $g_3(x)=\sin^2\frac{x}{2}$

$S'$ este SLD.

c) $S''=\{h_1,h_2,h_3\}$, $h_1(x)=e^x$, $h_2(x)=e^{-x}$, $h_3(x)=ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$S''$ este SLD.

(12) Fie sp vect $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)/\mathbb{R}$ cu baza $\{f_1,\dots,f_n\}$.

Să se arate că sp. vect $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)/\mathbb{R}$ are baza $\{f_1, if_1,\dots,f_n, if_n\}$.

(13) Fie $(V_1,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp vect și $\mathcal{B}_1=\{e_1,\dots,e_n\}$ baza

$(V_2,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp vect și $\mathcal{B}_2=\{f_1,\dots,f_m\}$ bază

Să se arate că sp vect $(V_1\times V_2,+,\cdot)/\mathbb{K}$ are baza

$\mathcal{B}=\{(e_1,0_{V_2}),\dots,(e_n,0_{V_2}),(0_{V_1},f_1),\dots,(0_{V_1},f_m)\}$ și

deci $\dim(V_1\times V_2)=\dim V_1+\dim V_2=n+m$

Ex 14. Fie $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

$S = \{u_1 = (1, 5, 3),\ u_2 = (2, 0, 6)\}$

$S' = \{w_1 = (-1, 7, -3),\ w_2 = (4, 5, 12)\}$

Să se arate că $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$

Ex 15 Arătați că $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$

## TEMA 2 (seminar)

1) $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_0$ = reperul canonic

$S = \{(1,0,-1,2), (1,1,1,1), (2,1,0,3), (3,2,1,4)\}$

a) S este SLD

b) Să se extragă $S'$ un SLI max și să se extindă la un reper $\mathcal{R}$ în $\mathbb{R}^4$

c) $\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}$, $A = ?$

d) Să se afle coord. lui $x = (1,2,3,4)$ în rap cu $\mathcal{R}$

2) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V' = \left\{ A = \begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| u, x \in \mathbb{R} \right\}$ ssp vect

a) Precizați o bază în $V'$,

b) Determinați $V''$ un subspațiu complementar lui $V'$,

3) Fie $V' = \{(1, \ldots$ [illegible]