1) Fie $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ o funcție continuă a.î. $\int_0^\infty f(x)\,dx<\infty$. Arătați că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\,dx=0$$

Soluție. Fie $F:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

$x\longmapsto F(x)$ este o primitivă a lui f și deci $F'(x)=f(x)$.

Funcția $x\longmapsto F(x)$ este crescătoare.

$$(*)\ \frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^n x\cdot F'(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\,xF(x)\Big|_0^n-\frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx=F(n)-\frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx$$

$$\int_0^n F(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} F(x)\,dx \underset{F \text{ crescătoare}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} F(k+1)\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} F(k+1)\,dx = F(1)+F(2)+\cdots+F(n)$$

$$\int_0^n F(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} F(x)\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} F(k)\,dx = F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)$$

Deci

$$\frac{F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)}{n} \leq \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx \leq \frac{F(1)+F(2)+\cdots+F(n)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx < \infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)}{n} = \lim_{n\to\infty} F(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(1)+F(2)+\cdots+F(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} F(n+1)$$

Deci $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^1 f(x)\,dx.$

Dem $(*) \Longrightarrow \displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\,dx = 0.$

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy \qquad x = \frac{y}{1+y}$$

$$B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad p \in (0,1)$$

2) Calculati $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx$

$$\sqrt[3]{8-x^3} = 2\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^3} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^3 = y, \quad x = 2\sqrt[3]{y}$$

$$x = 0,\ x = 2$$

$$dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\,dy \qquad y = 0;\ y = 1$$

$$\int_0^2 x \cdot \sqrt[3]{8-x^3}\,dx = \int_0^1 2\sqrt[3]{y} \cdot 2\sqrt[3]{1-y} \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\,dy$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 y^{-\frac{1}{3}} \cdot (1-y)^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{1}$$

$$= \frac{8}{9}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Teoremă. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu rază de convergență $R > 0$ și $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Atunci f este derivabilă și $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $\forall x \in (-R, R)$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$= \sum (a_n x^n)'$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in (-1,1)$$

3) Determinați mulțimea de conv a seriei de puteri

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

și găsiți suma ei.

a) $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

Pt $x = 1$, $x = -1$ seria este divergentă.

Mulțimea de conv este $A = (-1, 1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$x^n = n x^{n-1}.$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

Deci $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, $R = 1$; $A = (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(n^2 x^{n-1}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1,1) \Longrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)', \forall x \in (-1,1)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \forall x \in (-1,1).$$

4) Dezvoltați în serie de puteri ale lui x și precizați intervalul pe care dezvoltarea este valabilă funcția $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

Soluție: $$\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=\frac{3x-5}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$$A(x-3)+B(x-1)=3x-5,\ \forall x$$

$x=3 \Rightarrow 2B=4 \Rightarrow B=2$

$x=1 \Rightarrow -2A=-2 \Rightarrow A=1$

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = 1 + \frac{x}{3} + \cdots + \frac{x^n}{3^n} + \cdots, \quad \forall x, \ \frac{x}{3} \in (-1, 1)$$

$$\Updownarrow$$

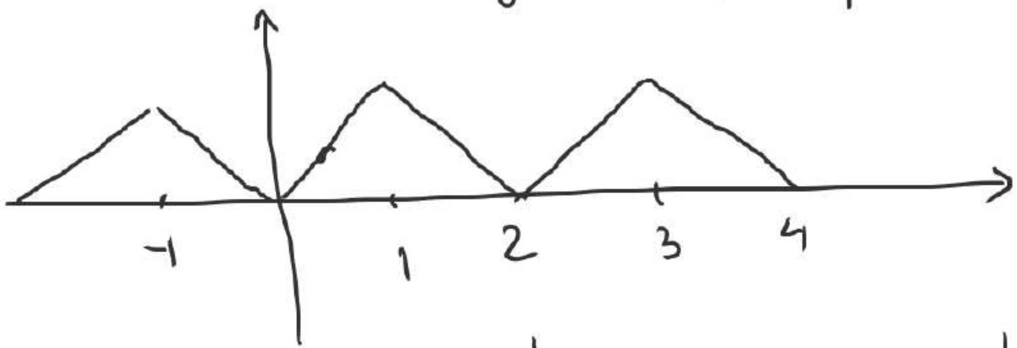
$$x \in (-3, 3).$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

5) Există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă pe $\mathbb{R}$ și care nu este derivabilă în niciun punct.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ și

$f(x+2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Obs. $0 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$)



Observăm că $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x)$. converge.

uniform pe $\mathbb{R}$ deoarece.

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x)\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty. \quad \left(\begin{array}{l}\text{Crit. lui}\\ \text{Weierstrass}\end{array}\right)$$

Deci funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x) \text{ este continuă pe } \mathbb{R}.$$

Arătăm că pt orice $x \in \mathbb{R}$, g nu este derivabilă în x.

Fie $x \in \mathbb{R}$. Pt $m \in \mathbb{N}^*$ fie $\delta_m = \pm \frac{4^{-m}}{2}$ unde

semnul este ales astfel încât să nu existe niciun număr întreg între $4^m x$ și $4^m(x+\delta_m)$.

$$\left|\frac{g(x+\delta_m)-g(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \underbrace{\frac{f\left(4^n(x+\delta_m)\right)-f\left(4^n x\right)}{\delta_m}}_{\gamma_n}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \gamma_n\right| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m \gamma_m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^n$$

$$= 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{3^m-1}{3-1}$$

$$= 3^m - \frac{3^m-1}{2} = \frac{3^m+1}{2} \xrightarrow{m\to\infty} \infty.$$

Deci g nu este derivabilă în x.

Remarcă Primul exemplu de funcție care este continuă pe $\mathbb{R}$ și nu este derivabilă în niciun punct îi aparține lui Waierstrass:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi x)$$

unde $0 < a < 1$, b este un număr natural impar și

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Exerciții

1) Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x. \end{cases}$

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n \ge 1}$. Determinați mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ și decideți dacă convergența este uniformă.

2) Arătați că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniform pe orice interval mărginit, dar pt orice $x \in \mathbb{R}$

seria nu este absolut convergentă.

3*) Arătați că dacă f este uniform continuă pe $[0,\infty)$ și integrala $\int_0^\infty f(x)\,dx$ este convergentă atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4) Presupunem că $f_n : [a,b] \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ sunt funcții continue, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă pentru orice $x \in [a,b]$ și funcția $x \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este continuă pe $[a,b]$. Arătați că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniform pe $[a,b]$.