Cursul 12

V) Rezolvarea ecuațiilor neliniare

• Problemă: Vrem să rezolvăm ecuații neliniare oarecare pentru $x \in [a, b]$

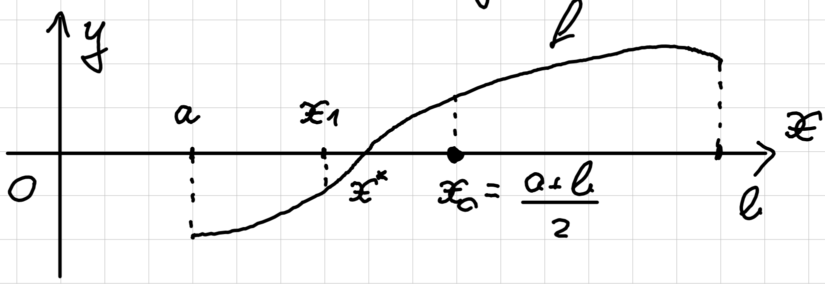
$$\underbrace{x^4 - 3x e^{2x} + \cos(3x) - 2}_{f(x)} = 0$$

Problema este echivalentă cu a determina $x^* \in [a, b]$ a.î. $f(x^*) = 0$ pentru o funcție f oarecare.

1) Metoda bisecției:

Presupunem $f \in C([a, b])$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Vom izola soluția într-un interval pe care îl înjumătățim succesiv.



- Algoritm (metoda bisecției)

Inițializări: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $n = 0$

Cât timp $|f(x_n)| > \varepsilon$:

Dacă $f(a_n) \cdot f(x_n) \leq 0$:

$a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$

altfel:

$a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$$

$n = n + 1$

- Estimarea erorii

Pentru orice $n \geq 1$,

$$e_a(x^*) = |x_n - x^*| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n}$$

- Consecință: Putem astfel estima de câte iterații avem nevoie pentru a aproxima soluția oricărei ecuații neliniare $f(x)=0$ pe $[a,b]$ cu o eroare absolută maximă ε:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$\iff n \geq \left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

Exemplu: Pentru $[a,b]=[0,1]$ și $\varepsilon = 10^{-16}$, $n \geq 54$. (Destul de mult).

2) Metode iterative de punct fix:

• Definiție (Punct fix)

Punctul $x^* \in [a,b]$ s.n. punct fix pentru $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dacă $\Phi(x) = x$.

• Observație: Rezolvarea ecuației neliniare $f(x)=0$ se poate reduce la o problemă de punct fix pentru o funcție $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită astfel: $\Phi(x) = x - f(x)$ sau $\Phi(x) = x + 5f(x)$ sau $\Phi(x) = x + \dfrac{f(x)}{x^2+2}$ etc.

• Teoremă (Brouwer)

Fie $\Phi \in \mathcal{C}([a, b])$ a.î. $\Phi([a,b]) \subseteq [a, b]$

Atunci Φ are un punct fix, $x^* \in [a,b]$

Dacă, în plus, Φ e derivabilă și $\exists k \in (0,1)$ a.î. $|\Phi'(x)| < k$, $\forall x \in [a, b]$, punctul fix este unic.

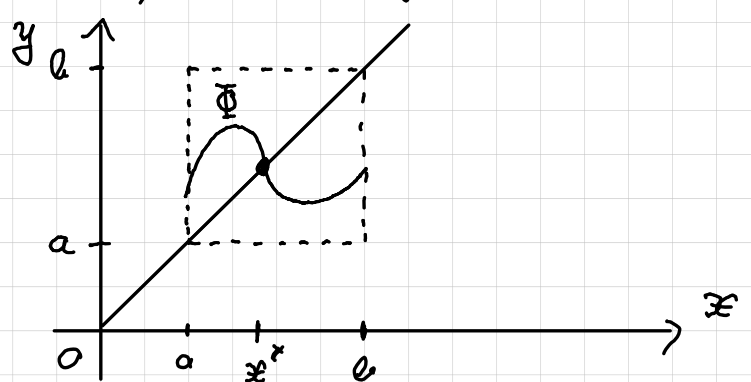
Demonstrație:

→ Existența: Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \Phi(x) - x$

$$\left.\begin{array}{l} g \in \mathcal{C}([a,b]) \\ g(a) > 0 \text{ și } g(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x^* \in [a,b] \text{ a.î. } g(x^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x^*) = x^*$$

Interpretare grafică:



→ Unicitate: Pp. $\exists\ x^* \neq \tilde{x}^* \in [a,b]$ pct. fixe

$$|x^* - \tilde{x}^*| = |\Phi(x^*) - \Phi(\tilde{x}^*)|$$

Din teorema lui Lagrange, $\exists\ \xi$ între x^* și $\tilde{x}^*$ astfel încât

$$|x^* - \tilde{x}^*| = |\Phi'(\xi)(x^* - \tilde{x}^*)|$$
$$< k\,|x^* - \tilde{x}^*| < |x^* - \tilde{x}^*| \quad \square$$

- Definiție (Viteza de convergență)

Șirul $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge către x^* cu viteza de convergență $r>0$ dacă $\exists\ C \geq 0$ a.î. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|^r} = C$.

- Exemplu: Metoda bisecției

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b-a}{2^n}}{\frac{b-a}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}$$

⇒ Metoda bisecției are o viteză de convergență liniară ($r=1$).

• Teoremă (Convergența metodei de pct. fixe)

Dacă Φ satisface ipotezele teoremei lui Brouwer, șirul generat de metoda de punct fix

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{oarecare} \\ x_n = \Phi(x_{n-1}), & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

converge către unicul punct fix a lui Φ, $x^* \in [a, b]$. Mai mult,

i) Dacă $\Phi'(x^*) \neq 0$, viteza este liniară.

ii) Dacă $\Phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$ și $\Phi'(x^*) = 0$, viteza este pătratică. $(r = 2)$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} |x^* - x_n| &= |\Phi(x^*) - \Phi(x_{n-1})| \\ &= |\Phi'(\xi_{n-1})(x^* - x_{n-1})| \\ &< k\,|x^* - x_{n-1}| < \dots \\ &< k^n |x^* - x_0|. \end{aligned}$$

Cum $k < 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

i) $\frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = \frac{|\Phi(x^*) - \Phi(x_{n-1})|}{|x^* - x_{n-1}|}$

Din Th. Lagrange, $\exists\, \xi_{n-1}$ între x_{n-1} și x^*:

$$\frac{|x^* - x_n|}{|x^* - x_{n-1}|} = |\Phi'(\xi_{n-1})| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\Phi'(x^*)| \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ Viteză de convergență liniară.

ii) Din Taylor aplicat pentru funcția $\Phi \in C^2([a,b])$ în x_{n-1} și x^*, $\exists\, \xi_{n-1}$ între x_{n-1} și x^* a. î.

$$\underbrace{\Phi(x_{n-1})}_{x_n} = \underbrace{\Phi(x^*)}_{x^*} + \underbrace{\Phi'(x^*)}_{0}(x_{n-1} - x^*) + \Phi''(\xi_{n-1})\frac{(x_{n-1} - x^*)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|x_n - x^*|}{|x_{n-1} - x^*|^2} = \frac{|\Phi''(\xi_{n-1})|}{2} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{|\Phi''(x^*)|}{2}$$

$\Rightarrow$ Viteză de convergență pătratică $\square$