Operații cu funcții diferențiabile

<u>Propoziție</u> Fie $f, g : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a.î. f și g sunt diferențiabile în $a \in D$. Atunci $f+g$ și αf (unde $\alpha \in \mathbb{R}$) sunt diferențiabile în a și

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a); \quad d(\alpha f)(a) = \alpha\, df(a).$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & G \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

<u>Propoziție</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^m$ deschise,

$f : D \to G$ diferențiabilă în $a \in D$,

$g : G \to \mathbb{R}^k$ diferențiabilă în $b = f(a) \in G$. Atunci $g \circ f$ este diferențiabilă în a și $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

<u>Corolar</u>. În condițiile de mai sus,

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$

<u>Teoremă</u> Fie $E \subset \mathbb{R}^n$ și $F \subset \mathbb{R}^m$ deschise. Dacă

i) $u_1, u_2, \dots, u_m : E \to \mathbb{R}$ diferențiabile (resp. are derivate parțiale continue) pe E,

ii) $\big(u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)\big) \in F$ pt orice $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$,

iii) $\varphi : F \to \mathbb{R}$ diferențiabilă (resp. are derivate parțiale continue) pe F. Atunci funcția $f: E \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi\Big(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\Big)$$

este diferențiabilă (resp. are derivate parțiale continue) pe E, și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\Big(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)\Big) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

pt orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Pe scurt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Dem. $m=2$, $n=3$.

$u, v : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big) \in F$, $\forall (x,y,z) \in E$

$\varphi : F \to \mathbb{R}$

$g : E \to F$, $g(x,y,z) = \big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big)$

$f(x,y,z) = (\varphi \circ g)(x,y,z) = \varphi\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big)$

$J_f(x,y,z) = J_\varphi\big(g(x,y,z)\big) \cdot J_g(x,y,z)$.

$$g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$$

$$\varphi : F \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(u,v)$$

$$J_f(x,y,z) = J_\varphi(g(x,y,z)) \cdot J_g(x,y,z)$$

$$J_\varphi(u,v) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right)$$

$$J_\varphi(u(x,y,z), v(x,y,z)) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y,z), v(x,y,z)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y,z), v(x,y,z)) \right).$$

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)$$

Pe scurt,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fel,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

Exemplu: $f(x,y,z) = \varphi(\underbrace{xy}_{u}, \underbrace{x^2+yz}_{v}, \underbrace{xyz^2}_{w})$. φ de clasă C^1

$\varphi(u,v,w)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot yz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} z + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot xz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\cdot 2xyz$$

Derivate parțiale de ordin superior

Definiție. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că derivata parțială $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ există într-o vecinătate a punctului $a \in D$ și funcția $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ este derivabilă parțial în raport cu x_i în punctul a $(i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$

Derivata $$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

se notează cu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ dacă $i \neq j$ sau $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ dacă $i = j$

și se numește derivată parțială de ordinul doi a fct. f în a.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) \quad i \neq j \quad \text{derivate parțiale mixte.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$$

La fel definim derivate parțiale de ordin superior.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)(a)$$

Funcția f se numește de clasă C^k pe D și scriem $f \in C^k(D)$ dacă toate derivatele parțiale de ordin k există și sunt continue pe D.

$$f(x,y) = \cos(x^2+xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x^2+xy)\cdot(2x+y) \;;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x^2+xy)\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(x^2+xy)\cdot(2x+y)\right)$$

$$= \cos(x^2+xy)\cdot(2x+y)^2 - 2\sin^2(x^2+xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = -\cos(x^2+xy)\cdot(2x+y)\cdot x - \sin(x^2+xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = -\cos(x^2+xy)\cdot(2x+y)\cdot x - \sin(x^2+xy)$$

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Pt $(x,y)\neq(0,0)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right)=y\cdot\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-2x(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=y\cdot\frac{3x^4-y^4+3x^2y^2-x^2y^2-2x^4+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$x\neq0$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\dfrac{x^5}{x^4}=x; \quad y\neq0 \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-\dfrac{y^5}{y^4}=-y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Ex: Studiați cont. funcțiilor. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

<u>Propoziție</u>. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a.i. $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din D. Fie $(a,b) \in D$ și $h, k \in \mathbb{R}^*$ a.î. dreptunghiul cu vârfurile (a,b), $(a+h, b)$, $(a, b+k)$ și $(a+h, b+k)$ este inclus în D. Dacă

$$E(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b).$$

atunci există (ξ, η) în interiorul dreptunghiului a.î.

$$E(h,k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

<u>Dem</u>: $g(t) = f(t, b+k) - f(t, b)$ satisface cond. T. Lagrange pe $[a, a+h] \Rightarrow \exists\ \xi \in (a, a+h)$ a.î.

$$E(h,k) = g(a+h) - g(a) = g'(\xi)\cdot h = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)\right)$$

Aplicam T. Lagrange funcției

$$s \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, s)$$ pe intervalul $[b, b+k]$, și deci

există $\eta \in (b, b+k)$ a.î.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = k\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

Asadar există (ξ, η) în interiorul dreptunghiului a.î.

$$E(h,k) = h\cdot k\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)$$

Teoremă (Criteriul lui Schwarz).

Fie $f: D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a.î.

i) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din D

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ este continuă în $(a,b) \in D$.

Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

Dem. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ este continuă există $\delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$R_\varepsilon = (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \times (b - \delta_\varepsilon, b + \delta_\varepsilon) \subset D$ și $\forall (x,y) \in R_\varepsilon$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$$

$E(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$.

Fie $h, k \in \mathbb{R}^*$, a.î. $|h| < \delta_\varepsilon$ și $|k| < \delta_\varepsilon$

Din Propoziția anterioară, există $(\xi, \eta) \in R_\varepsilon$ a.î.

$$E(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot hk.$$

$$\left| \frac{E(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$$

Pt orice h, k nenule cu $|h|, |k| < \delta_\varepsilon$ avem.

$$\left| \frac{\dfrac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \dfrac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}}{h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| < \varepsilon$$

Trecând la limită cu $k \to 0$ obținem că $\forall h$ cu $0<|h|<\delta_\varepsilon$ avem

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \right| \leq \varepsilon$$

Rezultă că există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ și că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

<u>Teoremă</u> Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a.i.

i) $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există în orice pct din D

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ este continuă în $a \in D$.

Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Corolar

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe D. Atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \text{ pt orice } a \in D.$$

Diferențiale de ordin superior.

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că toate derivatele parțiale de ordin n există într-o vecinătate a punctului $(a,b) \in D$ și sunt continue în (a,b).

Deci ordinea de derivare nu contează.

Funcția $d^n f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$d^n f(a,b)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y\right)^{(n)}$$

se numește diferențiala de ordin n a fct. f în (a,b) unde exponentul (n) înseamnă că paranteza se ridică formal la puterea n după form. binom. Newton cu convențiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x\right)^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)\,x^n$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x\right)^{(n-k)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y\right)^{(k)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)\,x^{n-k}y^k$$

$$d^n f(a,b)(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a,b)\, x^{n-k} y^k$$

$$d^2 f(a,b)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\, x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\, y^2$$

Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite toate derivatele parțiale de ordin 2 (resp 3) și sunt continue în $a \in D$.

$$d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d^2 f(a)(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i u_j \quad , \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$d^3 f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d^3 f(a)(u) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) u_i u_j u_k$$

$f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a = (x_0, y_0, z_0) \in D.$ $\quad f \in C^2(D)$

$$d^2 f(a)(u, v, w) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) v^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) w^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) uv + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) uw + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) vw$$

$$f(x,y,z) = x^2y + e^{x-yz} + z \qquad d^2 f(2,1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + e^{x-yz} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 - z\, e^{x-yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y\, e^{x-yz} + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2y + e^{x-yz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = z^2 e^{x-yz} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = y^2 e^{x-yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -y\, e^{x-yz} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 2x - z e^{x-yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = yz e^{x-yz} - e^{x-yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1,2) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1,2) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(2,1,2) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(2,1,2) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1,2) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(2,1,2) = 1.$$

$$d^2 f(2,1,2)(u,v,w) = 2u^2 + 4v^2 + w^2 + 4uv - 2uw + 2vw.$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Exerciții:

1) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Arătați că

i) f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

ii) f are derivate parțiale mixte de ordinul 2 în orice punct și calculați $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

iii) Este f de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$?

2) Să se determine $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$ știind că funcția $u(x,y) = f(x^2-y^2)$ verifică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (adică u este armonică pe $\mathbb{R}^2$).

3*) Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice pct din D.

Să se arate că pentru orice $(a,b) \in D$ și orice $\varepsilon > 0$ există $(x,y), (u,v) \in D$ cu $\|(x,y)-(a,b)\| < \varepsilon$, $\|(u,v)-(a,b)\| < \varepsilon$ astfel încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,v)$$