SEMINAR 7:

FUNCȚII DERIVABILE

Ex1: Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

a) să se studieze derivabilitatea funcției
b) să se studieze continuitatea derivatei funcției

a) f. cont pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{mărginit}}=0\\ f(0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cont în } x_0=0$$

$\Rightarrow f$ cont. pe $\mathbb{R}$

f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (comp. de fct. derivabile)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\cdot\cos\frac{1}{x}}{\cancel{x}}=\underbrace{x}_{\downarrow\,0}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{mărginit}}=0 \Rightarrow f \text{ derivabilă în } x_0$$

$\Rightarrow f$ derivabila pe $\mathbb{R}$

b) $f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+-\cancel{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot-\frac{1}{\cancel{x^2}}=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

f' continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ = nu există

$f'(0)=0$

$\Rightarrow f'$ nu este cont în $x_0=0 \Rightarrow f'$ nu este cont. pe $\mathbb{R}$

Ex2: Să se det. punctele de extrem local ale funcției

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-5x, & x\leq 0\\ x^3\cdot e^{-x}, & x>0\end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (comb de fct. elem.)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -5x = 0 \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^3 \cdot e^{-x} = 0 \\ \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cont. în } x_0 = 0 \Rightarrow f \text{ cont pe } \mathbb{R}$$

f derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-5x-0}{x-0} = -5 \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \cdot e^{-x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{derivatele sunt diferite}$$

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -5 & , x<0 \\ 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) & , x>0 \end{cases} = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x} = \cancel{x^3 e^{-x}(3-x)} \cancel{= 2x^2 e^{-x}}$$

$$= x^2 \cdot e^{-x}(3-x)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^{-x}(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 3$, e bun doar $x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$- - - -$	$+ +$	0	$- - -$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0 $\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$	$\searrow 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

$\hookrightarrow$ punct. critic

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(-2) = -5$

$f(3) = 27 \cdot e^{-3} = \dfrac{27}{e^3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

0 - minim local ? global

$\frac{27}{e^3}$ - maxim local

E3: Să se dem. inegalitatea $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{21}}{21!}$

Teorema cu:? Taillor rest Lagrange?

↳ o vom deriva de gradul $21+1=22$

Fie $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^{21}(x) &= e^x \end{aligned}\right\} T_{21}(x)$$

$$\left. f^{22}(x) = e^x \right\} R_{21}(x)$$

Pt. $x=0$ are loc inegalitatea

$\forall x \in [0,+\infty) = D$, $\neq 0$, $\exists c \in D$ $[0,+\infty)$ $c \in (0,x)$ şi

situat între x şi $0 \to c \in (0,x)$, $x>0$

$c \in (x,0)$ $x<0$

$f(x) = T_{21}(x) + R_{21}(x)$

$T_{21}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \ldots \frac{f^{21}(0)}{21!} \cdot (x-0)^{21}$

$T_{21}(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x + \ldots + \frac{1}{21!} \cdot x$

$R_{21}(x) = \frac{f^{22}(c)}{22!} \cdot (x-0)^{22} = \frac{e^c \cdot x^{22}}{22!}$

$f(x) = T_{21}(x) + R_{21}(x)$ $\Rightarrow$ inegalitatea este adev.

$e^x = T_{21}(x) + R_2(x)$ $\forall x \in (0,+\infty)$ $\forall$ $c \in (0,x)$

deci $T_{21}(x) + R_2(x) \geq T_{21}(x)$ este adev dacă $R_2(x)$ este poz.

Studiem semnul restului

$$\left.\begin{aligned} &\frac{e^c \cdot x^{22}}{22!} \\ &e^c > 0 \\ &x^{22} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R > 0$$