**FMI, Mate, Anul I**
**Logică matematică**

# Examen

**Nume:** ______________________

**Prenume:** __________________

**Grupa:** _____________________

| **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** | **P6** | **P7** | **P8** | **P9** | **Oficiu** | **TOTAL** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ___/1 | ___/1,5 | ___/1,5 | ___/1 | ___/1 | ___/1,5 | ___/1,5 | ___/3 | ___/2 | 1 | _____/15 |

## 1 Teoria mulţimilor

**(P1)** [1 punct] Fie $E$ o mulţime nevidă cel mult numărabilă. Să se arate că există o funcţie surjectivă $g : \mathbb{N} \to E$.

**(P2)** [1,5 puncte] Fie $A$ mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui $\mathbb{N}$ având 6 sau 4 elemente. Demonstraţi că $A$ este numărabilă.

**(P3)** [1,5 puncte] Demonstraţi că

$$|(8,9) \cup [10,11]| = |[8,9) \cup \{10,11\}| = |[8,9] \cup \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}| = \mathfrak{c}.$$

## 2 Logica propoziţională

**(P4)** [1 punct] Arătaţi că pentru orice formule $\sigma$, $\alpha$, $\chi$, avem:

$$(\alpha \vee \chi) \to \sigma \sim (\alpha \to \sigma) \wedge (\chi \to \sigma).$$

**(P5)** [1 punct] Fie $\Sigma$, $\Theta$ mulţimi satisfiabile de formule ale logicii propoziţionale $LP$ astfel încât

(i) $\Sigma \subseteq \Theta$;

(ii) pentru orice formulă $\varphi$, avem că dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este satisfiabilă, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Să se arate că $\Sigma = \Theta$.

**(P6)** [1,5 puncte] Fie $\psi$, $\sigma$ formule în logica propoziţională $LP$. Să se arate că

$$\vdash \sigma \to (\psi \vee \sigma).$$

**(P7)** [1,5 puncte] Fie $LP$ logica propoziţională. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, definim evaluarea $e_k : V \to \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = k; \\ 1, & \text{dacă } n \neq k. \end{cases}$$

Notăm $\mathcal{E} := \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că nu există $\Delta \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Delta) = \mathcal{E}$.

**(P8)** [3 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := \neg(v_5 \leftrightarrow v_6)$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := (v_6 \wedge v_5) \to \neg v_7$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

# 3 Logica de ordinul întâi

**(P9)** [2 puncte]

(i) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I care conţine un simbol de relaţie unară $S$. Să se arate că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists v_4 \forall v_5 (S(v_4) \to S(v_5)).$$

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule $\varphi, \chi$ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât

$$\forall y \varphi \vee \forall y \chi \not\vDash \exists y (\varphi \wedge \chi), \text{ unde } y \text{ este o variabilă.}$$