SEMINAR V - 2. 11. 2023

Repere. Coordonate. Matricea de trecere

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ $\quad R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ - reper canonic

$R' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3, \; e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3, \; e_3' = -e_1 + e_2 + e_3\}$
$\qquad (1, 2, 1) \qquad (1, 7, 1) \qquad (-1, 1, 1)$

a) R' - reper în $\mathbb{R}^3$, $R_0 \xrightarrow{A} R'$ $\; A = ?$

b) $x = (3, 2, 1)$ coordonate în raport cu R'

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la R_0 la R'

matricea componentelor lui e_1', e_2', e_3'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 + C_2 \\ C_3 + C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6-16) =$$

$= 10 \neq 0 \Rightarrow$ rang maxim $\xRightarrow{\text{criteriul LI}}$ R' SLI (1)

$|R_0| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow R'$ bază ordonată $\Rightarrow R'$ este reper

$$e_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} e_j, \; \forall i = \overline{1,3}$$

$$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3$$

b) $x = (3, 2, 1) = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' = x_1'(1, 1, 1) + x_2'(1, 7, 1) + x_3'(-1, 1, 1)$
$= (x_1' + x_2' - x_3', \; 2x_1' + 7x_2' + x_3', \; x_1' + x_2' + x_3')$

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_3' = 3 \\ 2x_1' + 7x_2' + x_3' = 2 \\ x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1' + 8x_2' = 5 \\ 2x_1' + 2x_2' = 4 \,|\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1' + 8x_2' = 5 \\ -8x_1' - 8x_2' = -16 \end{cases} (+)$$

$$-5x_1' = -11$$

$$x_1' = \frac{11}{5}$$

$$x_1' + x_2' = 2$$

$$\frac{11}{5} + x_2' = 2$$

$$x_2' = \frac{10-11}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$x_3' = -1$$

Metoda 2

$X = AX'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)_{\mathbb{R}}$

$R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ reper canonic

$R' = \{e_1' = \overset{(-1,2,3)}{-1 + 2X + 3X^2}, e_2' = \overset{(0,1,-1)}{X - X^2}, e_3' = \overset{(0,1,-2)}{X - 2X^2}\}$

a) R' reper $R_0 \xrightarrow{A} R'$

b) $P = 3 - X + X^2$, coord (în r. cu R')

$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}_2[X]$

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \equiv (a_0, a_1, a_2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = max = 3 \Rightarrow$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow R'$ SLi

$\left.\begin{array}{l} \\ |R'| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] \end{array}\right\} \Rightarrow R'$ bază

A - matricea de trecere de la R_0 la R'

$(3, -1, 1) = x_1' (-1, 2, 3) + x_2' (0, 1, -1) + x_3' (0, 1, -2)$

$\begin{cases} -x_1' = 3 \\ 2x_1' + x_2' + x_3' = -1 \\ 3x_1' - x_2' - 2x_3' = 1 \end{cases}$

$x_1' = -3$

$\begin{cases} x_2' + x_3' = 5 \\ -x_2' - 2x_3' = 10 \end{cases} (+)$

$-x_3' = 15$

$x_3' = -15$

$x_2' = 20$

$P = -3 \cdot e_1' + 20 e_2' - 15 e_3' \Rightarrow (-3, 20, -15)$ coord P în raport cu R'

• $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i = \overline{1,3}$ subspații vectoriale

$V_1 : P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$P = \tilde{P}$

$\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\tilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$P(0) = a_0 = 0$

$V_1 = \{P = a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$\forall P, Q \in V_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha P + \beta Q \in V_1$ -

$\alpha P + \beta Q = \alpha(a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3) + \beta(b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3)$

$(\alpha a_1 + \beta b_1)X + (\alpha a_2 + \beta b_2)X^2 + (\alpha a_3 + \beta b_3)X^3$

$\Rightarrow V_1$ - subspațiu (fără termeni liberi)

$R = \{X, X^2, X^3\}$ S.G. în V_1

$R_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ reper în $\mathbb{R}_3[X] \Rightarrow$ SLI $\Rightarrow R_1$ SLI

(submulțime a unui SLI) $\Rightarrow R_1$ bază $\Rightarrow R_1$ reper

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\ P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right\} = -(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = a_1(X_1 - 1) + a_2(X^2 - 1) + a_3(X^3 - 1)$$

$R_2 = \{X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1\}$ SG pt V_2

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \max \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_2 \text{ este SLI} \\ R_2 \text{ este SG} \end{array}\right\} \Rightarrow R_2 \text{ este bază}$$

$\Rightarrow R_2$ este reper în V_2

matricea componentelor vectorilor din V_2 în raport cu R_2

$V_3 = V_1 \cap V_2$

$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$a_0 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$a_1 = -(a_2 + a_3)$

$\Rightarrow P = -(a_2 + a_3)X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$= a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X)$

$R_3 = \{X^2 - X, X^3 - X\}$ SG pt R_3

Scanned with CamScanner

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = max \Rightarrow SLi \Rightarrow reper$$

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$ dim $V_1 = 3$

$R_2 = \{x-1, x^2-1, x^3-1\}$ dim $V_2 = 3$

$R_3 = \{x^2-x, x^3-x\}$ dim $V_3 = 2$

c) $P_1 = x + 2x^2 + 3x^3 \in V_1$

$P_2 = 1 + 2x^2 - 3x^3 \in V_2$

$P_3 = x + 3x^2 - 4x^3 \in V_3$

coordonatele în raport cu R_1, R_2, R_3

$(1, 2, 3)$ - coordonatele lui P_1 în raport cu R_1

$P_2 = 3 - 2 + 2x^2 - 3x^3 = 0(x-1) + 2(x^2-1) - 3(x^3-1)$

$(0, 2, -3)$ - coordonatele lui P_2 în raport cu R_2

$P_3 = 4x - 3x + 3x^2 - 4x^3 = 3(x^2-x) - 4(x^3-x)$

$(3, -4)$ - coordonatele lui P_3 în raport cu R_3

d) $R_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i = \overline{1,3}$ V_i' - subspațiu complementar

$R_1 = \{x, x^2, x^3\}$ extindem la un reper în $R_3[X]$

$R_1 \cup \{1\}$, $V_1' = <\{1\}>$

$R_2 = \{x-1, x^2-1, x^3-1\}$ extindem la un reper în $R_3[X]$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = max \Rightarrow R_2 \cup \{1\} \text{ reper în } R_3[X]$$

$V_2' = V_1' = <\{1\}>$

$R_3 = \{x^2 - x, x^3 \cdot x\}$ extindem la un reper în $\mathbb{R}_3[x]$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 = \text{maxim} \Rightarrow R_2 \cup \{1, x\} \text{ reper în } \mathbb{R}_3[x]$$

$V_3' = <\{1, x\}>$

spațiu generat de mulțimea $\{1, x\}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[x]$ ca sumă dintre 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale

$R_3[x] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$W_1 = <\{1, x\}>$

$W_2 = <\{x^2\}>$

$W_3 = <\{x^3\}>$

$R_3[x] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$U_1 = <\{1\}>$

$U_2 = <\{x\}>$

$U_3 = <\{x^2\}>$

$U_4 = <\{x^3\}>$