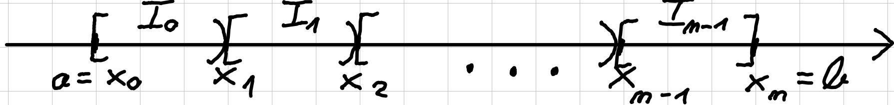
Cursul 9

• Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție dată și nodurile de interpolare

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$



Notăm intervalele și lungimile lor cu

$$I_j := [x_j, x_{j+1}) \quad \forall j = \overline{0, n-2}, \quad I_{n-1} = [x_{n-1}, x_n]$$

$$h_j := x_{j+1} - x_j \quad \forall j = \overline{0, n-1}$$

• Definiție (Spline liniar)

Funcția $S:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcția spline liniară pentru f și pentru nodurile $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$ dacă:

a) S este liniară pe porțiuni

$$S\big|_{I_j} = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) \quad \forall j = \overline{0, n-1}$$

unde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ trebuie determinate

b) S interpolează f în x_j, $\forall j = \overline{0,n}$

$$S(x_j) = f(x_j), \ \forall j = \overline{0,n} \quad (1)$$

c) S continuă în x_j, $\forall j = \overline{1,n-1}$

$$S_{j-1}(x_j) = S_j(x_j), \quad \forall j = \overline{1,n-1} \quad (2)$$

- Observație

Determinarea celor $2n$ necunoscute $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n-1}$ se face rezolvând sistemul de ecuații liniare $(1)+(2)$:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad \forall j = \overline{0,n-1} \\ a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) \\ a_{j-1} + b_{j-1}(x_j - x_{j-1}) = a_j, \quad \forall j = \overline{1,n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_j = f(x_j) \quad \forall j = \overline{0,n-1} \\[2ex] b_j = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} \quad \forall j = \overline{0,n-1} \end{array}}$$

• Teoremă (Estimarea erorii)

Fie $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$ și S funcția spline liniară asociată. Atunci

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{[a,b]} |f''(x)|,$$

unde $h := \max_{j=\overline{0,n-1}} h_j$.

Demonstrație:

Pe fiecare interval I_j, $S\big|_{I_j} = S_j$ este polinomul de interpolare Lagrange de grad $1 \Rightarrow \exists\, \xi_j \in I_j$ a. î.

$$|f(x) - S_j(x)| = \frac{|f''(\xi_j)|}{2} (x - x_j)(x_{j+1} - x), \forall x \in I_j$$

$$\max_{I_j} |f(x) - S_j(x)| \leq \frac{\max_{I_j} |f''(x)|}{2} \cdot \frac{h_j^2}{4} \quad \forall j = \overline{0, n-1}$$

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{[a,b]} |f''(x)| \quad \square$$

• Definiție (Spline pătratic)

Funcția $S:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcția spline pătratică pentru f și pentru nodurile $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$ dacă:

a) S este pătratică pe porțiuni

$$S\big|_{I_j} = S_j(x)$$
$$= a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 \quad \forall j=\overline{0,n-1}$$

unde $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ trebuie determinate.

b) S interpolează f în x_j, $\forall j=\overline{0,n}$

$$S(x_j) = f(x_j) \quad \forall j = \overline{0,n} \quad (1)$$

c) S continuă în x_j, $\forall j=\overline{1,n-1}$

$$S_j(x_j) = S_{j+1}(x_j) \quad \forall j = \overline{1,n-1} \quad (2)$$

d) S' continuă în x_j, $\forall j=\overline{1,n-1}$

$$S_j'(x_j) = S_{j+1}'(x_j) \quad \forall j = \overline{1,n-1} \quad (3)$$

e) Una din următoarele ecuații are loc:

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{sau} \quad S'(x_n) = f'(x_n) \quad (4)$$

- Observație

Determinarea celor $3n$ necunoscute $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{0,n-1}$ se face rezolvând sistemul de ecuații liniare $(1)+(2)+(3)+(4)$:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), & \forall j=\overline{0,n-1} \\ a_{n-1} + h_{n-1} b_{n-1} + h_{n-1}^2 c_{n-1} = f(x_n) & \\ a_{j-1} + h_{j-1} b_{j-1} + h_{j-1}^2 c_{j-1} = a_j, & \forall j = \overline{1,n-1} \\ b_{j-1} + 2h_{j-1} c_{j-1} = b_j, & \forall j = \overline{1,n-1} \\ b_0 = f'(x_0) & \end{cases}$$

$$\left(\text{Sau } b_{n-1} + 2h_{n-1} c_{n-1} = f'(x_n)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & a_j = f(x_j), \quad c_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j}{h_j^2}, \quad j=\overline{0,n-1} \\ & b_1 = f'(x_0) \\ & b_{j+1} = \frac{2(f(x_{j+1}) - f(x_j))}{h_j} - b_j, \quad j = \overline{0,n-2} \end{aligned}}$$

• Definiție (Spline cubic)

Funcția $S:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcția spline cubică pentru f și pentru nodurile $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$ dacă:

a) S este cubică pe porțiuni

$$S\Big|_{I_j} = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \ \forall j = \overline{0, n-1}$$

unde $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$ trebuie determinate.

b) S interpolează f în x_j, $\forall j = \overline{0,n}$

$$S(x_j) = f(x_j) \quad \forall j = \overline{0,n} \quad (1)$$

c) S continuă în x_j, $\forall j = \overline{1,n-1}$

$$S_j(x_j) = S_{j+1}(x_j) \quad \forall j = \overline{1,n-1} \quad (2)$$

d) S' continuă în x_j, $\forall j = \overline{1,n-1}$

$$S_j'(x_j) = S_{j+1}'(x_j) \quad \forall j = \overline{1,n-1} \quad (3)$$

e) S'' continuă în x_j, $\forall j=\overline{1,n-1}$

$$S_j''(x_j)=S_{j+1}''(x_j) \quad \forall j=\overline{1,n-1} \qquad (4)$$

f) Următoarele ecuații au loc

$$\begin{cases} S'(x_0)=f'(x_0) \\ S'(x_n)=f'(x_n) \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} S''(x_0)=0 \\ S''(x_n)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

- Observație

Determinarea celor $4n$ necunoscute $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{0,n-1}$, se face rezolvând sistemul de ecuații liniare $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)$.

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j=\overline{0,n-1} \\ a_{j-1}+h_{j-1}b_{j-1}+h_{j-1}^2c_{j-1}+h_{j-1}^3d_{j-1}=a_j, \quad j=\overline{1,n} \\ b_{j-1}+2h_{j-1}c_{j-1}+3h_{j-1}^2d_{j-1}=b_j, \quad j=\overline{1,n-1} \\ 2c_{j-1}+6h_{j-1}d_{j-1}=c_j, \quad j=\overline{1,n-1} \\ c_0=0 \\ c_{n-1}+6h_{n-1}d_{n-1}=0 \end{cases}$$

Hinturi rezolvare sistem:

1. Exprimați pe d_j în funcție de c_j folosind ecuațiile corespunzătoare condițiilor e) și f) din definiție.
2. Exprimați pe b_j în funcție de c_j folosind ecuațiile corespunzătoare condiției c) din definiție.
3. Înlocuiți expresiile din 1 și 2 în ecuațiile corespunzătoare condiției d) din definiție. Veți obține un sistem de ecuații a cărui soluție vă va da c_j-urile.