S6-7

1

Seminar 6-7

① Să se arate că există un izomorfism de inele

$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+1)} \simeq \mathbb{Z}[i] \text{ , unde } \mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

este inelul întregilor lui Gauss.

② Fie $f=X^2$ și $g=2X$ din $\mathbb{Z}[X]$. Atunci nu există $q, r\in\mathbb{Z}[X]$ cu $\deg(r)<\deg(g)$ și $f=qg+r$.

(adică nu există în general o teoremă de împărțire cu rest în $A[X]$, A inel comutativ)

③ Fie A domeniu de integritate, $u, v\in A[X]$ polinoame nenule, $a\in A$ și $i\in\mathbb{N}^*$. Dacă a este rădăcină multiplă de ordin i pentru u și $v(a)\neq 0$, atunci a este rădăcină multiplă de ordin i pentru uv.

④ Fie p un număr natural prim. Să se arate că:

(i) $\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}$ este grup cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_p$. Deduceți că $a^{p-1}=\hat{1}$ pt. orice $a\in\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}$.

(ii) Polinomul $f=X^{p-1}-\hat{1}\in\mathbb{Z}_p[X]$ are rădăcinile $\hat{1},\dots,\widehat{p-1}$, toate simple.

(iii) Folosind relațiile lui Viète, deduceți că $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$. (Teorema lui Wilson)

S 6-7

5. Fie K un corp comutativ, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și $f_1,\dots,f_n\in K[X]$. Atunci $D(f_1\dots f_n)=D(f_1)f_2\dots f_n+f_1D(f_2)f_3\dots f_n+\dots+f_1\dots f_{n-1}D(f_n)$.
(~~Pt.~~ $f\in K[X]$ notăm cu $D(f)$ derivata formală a lui f).

6. Fie K un corp comutativ, $a\in K$ și $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $f=(X-a)^n$, atunci

$$f^{(1)}=n(X-a)^{n-1}$$

$$f^{(2)}=n(n-1)(X-a)^{n-2}$$

$$\text{--- --- ---}$$

$$f^{(i)}=n(n-1)\dots(n-i+1)(X-a)^{n-i} \quad \forall\ 1\leq i\leq n$$

$$\text{--- --- ---}$$

$$f^{(n)}=n!\cdot 1_K$$

$$f^{(n+1)}=f^{(n+2)}=\dots=0.$$

7. Fie K un corp comutativ de caracteristică $p>0$. Atunci pentru orice $f\in K[X]$ avem $f^{(p)}=0$.

8. Fie K un corp comutativ și $f,g\in K[X]$. Atunci
$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} \text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}^*.$$

9. Fie $A=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Atunci A este subinel al lui $\mathbb{R}$ și $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-2)}\simeq A$. Este (X^2-2) ideal maximal în A?

S 6-7

(10) Fie A un inel comutativ. Să se arate că

$$\frac{A[X,Y]}{(Y-X)} \simeq A[X].$$

(11) Fie A un inel comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, \dots, a_n \in A$. Să se arate că $\frac{A[X_1, \dots, X_n]}{(X_1-a_1, \dots, X_n-a_n)} \simeq A$. Deduceți că dacă A este corp comutativ, atunci idealul $(X_1-a_1, \dots, X_n-a_n)$ este maximal în $A[X_1, \dots, X_n]$.

(12) (Teorema I de izomorfism pentru inele).
Fie $f: A \to B$ morfism surjectiv de inele comutative. Fie I un ideal al lui I pentru care $\operatorname{Ker} f \subset I$. Atunci $f(I)$ este ideal în B și are loc un izomorfism de inele $\frac{A}{I} \simeq \frac{B}{f(I)}$.

(13) Fie A inel comutativ și I, J ideale în A cu $I \subset J$. Atunci are loc un izomorfism de inele

$$\frac{\frac{A}{I}}{\frac{J}{I}} \simeq \frac{A}{J}.$$

14. Considerăm idealul $(2, X^2+1)$ din inelul $\mathbb{Z}[X]$. Să se arate că:

(i) $(2, X^2+1)$ nu este ideal principal.

(ii) $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(2, X^2+1)}$ este un inel cu 4 elemente.

(iii) $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(2, X^2+1)} \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

15. Să se arate că $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(2)} \simeq \mathbb{Z}_2[X]$.