Examen[1] la Geometrie I, seria 10, 22.02.2024

Nume și prenume: ____________________________________

Grupa: _____

I. Pentru fiecare din obiectele cerute mai jos, daţi un exemplu justificat sau explicaţi de ce nu există.

1. O dreaptă perpendiculară pe dreapta $(d) : y = 5$ în planul $\mathbb{R}^2$. **(0,5p)**

2. Un punct $C \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $\triangle ABC$ e isoscel, unde $A = (1, 2)$ şi $B = (2, 1)$. **(0,5p)**

3. O dreaptă în spaţiul $\mathbb{R}^3$ care nu intersectează planul $\pi = \{(1 + 2t - s, t + s, 5 - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$. **(0,5p)**

4. O omotetie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(d_1) = d_2$, unde $(d_1) : x - 3y = 6$ şi $d_2 = \{(1 - 4t, 3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. **(0,5p)**

5. Izometrie afină a planului euclidian cu exact două puncte fixe. **(0,5p)**

6. O conică în $\mathbb{R}^2$ a cărei singură axă de simetrie este $(d) : x - y = 0$. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (0, 0), B = (-2, 2), C_\alpha = (2, \alpha), D = (6, 2)$ (unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 2$ este un parametru).

a) Determinaţi punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului $ABC_\alpha D$, fie el $\{O_\alpha\} := AC_\alpha \cap BD$. **(1p)**

b) Pentru ce valori ale α există un cerc $\mathcal{C}$ astfel încât $\{A, B, C_\alpha, D\} \subset \mathcal{C}$? **(1p)**

c) Pentru $\alpha = 4$, există un punct P pe dreapta C_4D astfel încât triunghiul ABP să fie echilateral? Justificaţi răspunsul dat. **(0,5p)**

2. În $\mathbb{R}^2$ fie conica $\mathcal{E}$ de ecuaţie:

$$(\mathcal{E}) : \ x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 2 = 0.$$

a) Determinaţi tipul conicei $\mathcal{E}$. **(1p)**

b) Fie $A = (0, 1), B = (2, 1)$. Determinaţi ecuaţia unui cerc $\mathcal{C}$ astfel încât $\{A, B\} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ şi $T_A(\mathcal{C}) = T_A(\mathcal{E}), T_B(\mathcal{C}) = T_B(\mathcal{E})$. **(1p)**

c) Există un punct $C \in \mathcal{E}$ astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic? Justificaţi răspunsul dat. **(0,5p)**

3. În $\mathbb{R}^2$ considerăm un triunghi oarecare ABC nedegenerat, şi fie M, N, P respectiv mijloacele laturilor $[AB], [AC], [BC]$. Arătaţi că există o elipsă $\mathcal{E}$ astfel încât $\{M, N, P\} \subset \mathcal{E}$ şi $T_M\mathcal{E} = AB, T_N\mathcal{E} = AC, T_P\mathcal{E} = BC$. **(1p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Redactaţi subiectele pe foi separate. Timp de lucru: 2 ore. Succes!