Cursul 8

III) Interpolarea polinomială

• Problemă (Interpolarea Lagrange)
Date $n+1$ puncte de coordonate $(x_i, y_i)_{i=\overline{0,n}}$ vrem să determinăm polinomul de interpolare Lagrange

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

care trece exact prin punctele respective.

$$P_n(x_i) = y_i \quad \forall i = \overline{0,n} \iff$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{x \in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{b \in \mathbb{R}^{n+1}}$$

• Observații:

i) Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow$ matricea A este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$ (Vandermonde) $\Leftrightarrow$

Coordonatele pe Ox sunt diferite două câte două ($x_i \neq x_j \ \forall \ 0 \leq i < j \leq n$)

ii) Complexitatea rezolvării acestui sistem este de $O(n^3)$.

iii) Polinomul Lagrange este reprezentat, în această metodă, în baza canonică a lui $\mathbb{P}_n$ (spațiul vectorial al polinoamelor de grad n): $\{1, x, x^2 \dots x^n\}$

• Idee: Ce ar fi să folosim altă bază, mai potrivită problemei noastre de interpolare?

• Lemă (Polinoamele de bază Lagrange)

$\forall\ n+1$ noduri $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$, $\exists!\ L_{n,k} \in \mathbb{P}_n$, $k=\overline{0,n}$ a.î.

$$\underbrace{L_{n,k}}_{\text{Gradul} \quad \text{nodul}}(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & x_i = x_k \\ 0, & x_i \neq x_k \end{cases}$$

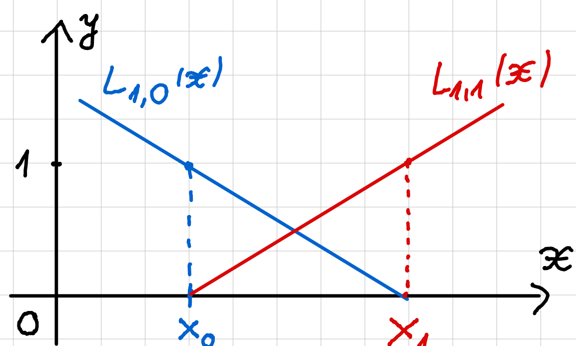
Demonstrație:

$\rightarrow n=0$: Un singur nod x_0, un singur polinom $L_{0,0}(x) \equiv 1$.

$\rightarrow n=1$: Două noduri, x_0 și x_1:

$$L_{1,0}(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$$

$$L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



$\rightarrow n \in \mathbb{N}$ oarecare: $L_{n,k}(x)$ are n rădăcini: $x_0, x_1 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n$ și ia valoarea 1 în x_k

$$\boxed{L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}}$$

$\Rightarrow$ Avem $(L_{n,k})_{k=\overline{0,n}}$ o bază în P_n.

- Consecință:

Polinomul de interpolare Lagrange poate fi scris în mod unic astfel:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_{n,k}(x)$$

- Problema de interpolare devine determinarea $c_0 \dots c_n \in \mathbb{R}$ a.î.

$$P_n(x_i) = y_i \quad \forall\, i = \overline{0,n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{L_{n,k}(x_i)}_{\delta_{ik}} = y_i \quad \forall\, i = \overline{0,n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{c_i = y_i} \quad \forall\, i = \overline{0,n}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)}$$

(Nu mai avem nici un sistem de rezolvat)

• Teoremă (Estimarea erorii)

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ o funcție pe care vrem să o aproximăm știind valorile ei în $n+1$ noduri: $(x_i, f(x_i))_{i=\overline{0,n}}$

Dacă $P_n(x)$ este polinomul de interpolare Lagrange asociat acestor noduri, atunci:

$\forall x \in [a, b]$, $\exists\ \xi = \xi(x) \in [a, b]$ a. î.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{\pi_{n+1}(x)}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - P_n(x) \right| \leq \frac{\| f^{(n+1)} \|_\infty}{(n+1)!} \left| \pi_{n+1}(x) \right| \quad , \forall x \in [a, b]$$

Demonstrație: Pentru $x \in [a, b]$, $x \neq x_i\ \forall i = \overline{0,n}$ definesc $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \cdot \pi_{n+1}(t)$$

$\varphi(x_i) = 0\ \forall i = \overline{0,n}$ și $\varphi(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi$ are $n+2$ zerouri distincte în $[a, b]$.

Din Thm. Rolle, φ' are $n+1$ zerouri distincte

——— " ———, φ'' are n zerouri distincte

. . . .

——— " ———, $\varphi^{(n+1)}$ are un zerou.

$$\Rightarrow \exists\ \xi = \xi(x) \in [a, b] \text{ a.î. } \varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)}(n+1)! = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) \quad \square$$

- Definiție

Fie $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ și $(x_i, f(x_i))_{i=\overline{0,n}}$ un set de noduri. Pentru $0 \le m_i \le n$ $\forall i=\overline{0,k}$ notăm cu $P_{m_0,m_1\dots m_k}(x)$ unicul polinom Lagrange asociat funcției f și nodurilor $x_{m_0}, x_{m_1} \dots x_{m_k}$, i.e.

$$P_{m_0,m_1\dots m_k}(x_i) = f(x_i) \quad \forall i=\overline{0,k}$$

- Propoziție (Formulă de recurență)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(x_i, f(x_i))_{i=\overline{0,n}}$ un set de noduri. Pentru orice $0\le i<j\le n$:

$$P_{0,1\dots n}(x)=\frac{1}{x_i-x_j}\Big[(x-x_j)\,P_{0,1\dots j-1,j+1\dots n}(x)-(x-x_i)\,P_{0,1\dots i-1,i+1\dots n}(x)\Big]$$

Demonstrație: (Temă bonus)

Cazul I: $x=x_k$, $k\ne i$ și $k\ne j$

Arătați $P(x)=f(x_k)$

Cazul II: $x=x_i$, arătați $P(x)=f(x_i)$

Cazul III: $x=x_j$, arătați $P(x)=f(x_j)$

- Algoritmul Neville:

j — Polinomul Lagrange în x

x_k	$P_{m_k}(x)$	$P_{m_i,m_j}(x)$	$\dots$	$P_{m_0,m_1\dots m_n}(x)$
x_0	$P_0(x)=f(x_0)$			
x_1	$P_1(x)=f(x_1)$	$P_{0,1}(x)$		
i $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$P_n(x)=f(x_n)$	$P_{n-1,n}(x)$	$\dots$	$P_{0,1\dots n}(x)$