Examen la Algebră II, 23 iunie 2020, seria 10.

Se acorda 10 puncte din oficiu. La subiectele 1 şi 7 se acordă câte 15 puncte, la subiectul 2 se acordă 20 puncte, iar la subiectele 3,4,5,6 se acordă câte 10 puncte. Nota lucrării este suma punctajelor pe subiecte şi a celui din oficiu, împărţită la 10.

Timp de lucru: 3 ore

1. (i) Fie $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că F este subcorp al lui $\mathbb{R}$.
(ii) Să se arate că mulţimea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

este subinel al inelului de matrice $M_2(\mathbb{Q})$ şi că inelele A şi F sunt izomorfe.

2. Fie $f = X^2 + 2X \in \mathbb{Z}[X]$. Fie I idealul generat de f în $\mathbb{Z}[X]$ şi J idealul generat de f în $\mathbb{Q}[X]$.
(i) Să se arate că $\frac{Q[X]}{(X+2)} \simeq \mathbb{Q}$ şi că $\frac{Q[X]}{J} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
(ii) Este J ideal maximal în $\mathbb{Q}[X]$?
(iii) Să se determine elementele idempotente (adică cele egale cu pătratele lor) din inelul factor $\frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$.
(iv) Să se arate că $\frac{Z[X]}{I}$ nu e izomorf cu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(v) Să se arate că idealul generat de 2 şi $X + 2$ în $\mathbb{Z}[X]$ nu este principal.

3. Fie $A = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \text{ nu se divide cu } 7\}$. Să se arate că A este subinel al lui $\mathbb{Q}$ şi că A are un singur ideal maximal.

4. Fie $f = (2X_1^2 - X_1X_2 + 2X_2^2)(2X_1^2 - X_1X_3 + 2X_3^2)(2X_2^2 - X_2X_3 + 2X_3^2) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$. Să se arate că f este polinom simetric şi să se scrie f ca polinom de polinoame simetrice fundamentale.

5. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

6. Fie polinoamele $f = X^4 + 4X^2 - 3$ şi $g = X^3 + 4X^2 + 1$ în $\mathbb{Q}[X]$. Să se determine restul împărţirii lui f la g şi c.m.m.d.c. al lui f şi g.

7. (i) Să se scrie polinomul $X^5 + X^3 + X^2 + X + \hat{1}$ ca produs de polinoame ireductibile monice în $\mathbb{Z}_3[X]$.
(ii) Să se arate că polinomul $g = X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 2X + 2$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.