Examen[1] la Geometrie I, seria 10, 26.01.2024

Nume și prenume: ____________________

Grupa: ______

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, dreptele $(d_1): x - 4y = 0$ şi $d_2 = \{(1-4t, 3-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sunt perpendiculare. **(0,5p)**

2. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (5xy + 2, x + y - 1)$ este o aplicaţie afină. **(0,5p)**

3. În spaţiul $\mathbb{R}^3$, planul $(\pi_\alpha): \alpha x + 2y - 3z = 1$ şi dreapta $d_\alpha = \{(1-2t, 3+\alpha t, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ nu se intersectează pentru niciun $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,5p)**

4. Pentru orice două cercuri $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^2$, există o omotetie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. **(0,5p)**

5. În planul $\mathbb{R}^2$, dacă $(d_\alpha): x + y = \alpha$, atunci există o conică nedegenerată $\mathcal{C}$ astfel încât $|\mathcal{C} \cap d_\alpha| = 1$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,5p)**

6. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este o izometrie afină astfel încât $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, atunci f are un punct fix. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (0, 0), B = (6, 4), C_\alpha = (3, \alpha)$ unde $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 2)$ este un parametru.

a) Determinaţi coordonatele punctelor G_α, H_α care sunt, respectiv, centrul de greutate şi ortocentrul triunghiului ABC_α. **(1p)**

b) Determinaţi ecuaţia bisectoarei unghiului $\widehat{BAC_1}$. **(1p)**

c) Pentru ce valori ale lui α avem $AH_\alpha || BG_\alpha$? **(0,5p)**

2. În $\mathbb{R}^2$ considerăm conica

$$(\mathcal{C}_\alpha) \ : x^2 - y^2 + 2(\alpha + 1)x + 2y - 1 = 0.$$

a) Ce tip de conică este $\mathcal{C}_0$? Justificaţi răspunsul. **(1p)**

b) Determinaţi toate valorile lui α pentru care conica $\mathcal{C}_\alpha$ este tangentă la dreapta $(d): \ x = y$. **(1p)**

c) Daţi exemplu, dacă există, de valoare a lui α pentru care conica $\mathcal{C}_\alpha$ admite măcar un punct singular. **(0,5p)**

3. Fie $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ două conice nedegenerate distincte de ecuaţii respectiv

$$(\mathcal{E}_1): \ F_1(x, y) = 0, \ (\mathcal{E}_2): \ F_2(x, y) = 0.$$

astfel încât există punctele distincte $A \neq B$ cu proprietăţile: $\{A, B\} \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ şi $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ au tangente comune în A, B,

$$T_A\mathcal{E}_1 = T_A\mathcal{E}_2, T_B\mathcal{E}_1 = T_B\mathcal{E}_2.$$

Fie $\mathcal{C}$ o conică de ecuaţie $(\mathcal{C}): \ F(x, y) = 0$ astfel încât $\{A, B\} \subset \mathcal{C}$ şi

$$T_A\mathcal{C} = T_A\mathcal{E}_2, T_B\mathcal{C} = T_B\mathcal{E}_2.$$

Arătaţi că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$. **(1p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Redactaţi subiectele pe foi separate. Timp de lucru: 2 ore. Succes!