<u>Definiție</u>. Fie $f: D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există toate derivatele parțiale de ordinul n ale lui f într-o vecinătate a pct $a \in D$ și acestea sunt cont în a.

$$T_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a)$$

T_n - pol. Taylor de grad m asociat funcției f în pct a.

Pt $m=2$, $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D$

$$T_n(x,y) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k} \cdot (y-b)^k$$

Teorema 1: Fie $D \subset \mathbb{R}^m$ deschisă convexă și $f: D \to \mathbb{R}$ de clasă C^{n+1}. Atunci pt orice a și x din D există c pe segmentul $[a,x] = \{ta + (1-t)x \mid t \in [0,1]\}$ a.î.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)(x-a).$$

T_n - pol Taylor grd. n asoc lui f în a

Dem. Pt $m=2$, $f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(D)$ Arătam că pt orice $(a,b), (x,y) \in D$ există (ξ, η) pe segmentul care unește (a,b) și (x,y) a.î.

$$f(x,y) = T_n(x,y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi,\eta)(x-a, y-b)$$

Teorema 2 : $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^{n+1}, $a, x \in I$.

Atunci există c între a și x a.î.

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

$$T_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\cdot(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$$

$$x(t) = a + t(x-a), \quad y(t) = b + t(y-b), \quad t \in [0,1].$$

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [0,1], \quad \varphi(1) = f(x,y); \ \varphi(0) = f(a,b)$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\cdot y'(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot (y-b)$$

$$= df(x(t), y(t))(x-a, y-b)$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), y(t))(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t), y(t)) \cdot (x-a) \cdot (y-b) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t), y(t)) \cdot (y-b)^2 = d^2 f(x(t), y(t))(x-a, y-b).$$

$$\varphi^{(k)}(t) = d^k f(x(t), y(t))(x-a, y-b).$$

$$\varphi^{(k)}(0) = d^k f(a, b)(x-a, y-b) \qquad (\text{pt } t=0).$$

Aplicăm Teorema 2. pt φ, și pct 0 și 1. și atunci există $\theta \in (0,1)$ a.î.:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)(1-0) + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)(1-0)^n + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta)(1-0)^{n+1}$$

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad \eta = b + \theta(y-b)$$

Atunci obținem

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}df(a,b)(x-a, y-b) + \dots \frac{1}{n!}d^n f(a,b)(x-a,y-b)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)(x-a,y-b).$$

Teorema 3. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 și $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{\|x-a\|^2} = 0,$$ unde T_2 este pol Taylor de grad 2 asoc lui f în a

Dem. arătăm pt cazul $m=2$. Fie $(a,b) \in D \subset \mathbb{R}^2$

Arătam că $$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^2} = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pt că $f \in C^2(D)$ există $r > 0$ a.î. $B((a,b), r) \subset D$.

și a.î.

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right|<\varepsilon\,,\quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right|<\varepsilon$$

și
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right|<\varepsilon\,,\quad \forall (x,y)\in B((a,b),r).$$

Fie $(x,y)\in B((a,b),r)$, $(x,y)\neq(a,b)$. Din Teorema 1, pt $n=1$ există (ξ,η) pe segmentul care unește (a,b) și (x,y) ai.

$$f(x,y)=\underbrace{f(a,b)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right)}_{T_1(x,y)}+$$

$$+\frac{1}{2}d^2f(\xi,\eta)(x-a,y-b).$$

$$\left|f(x,y)-f(a,b)\right| = \frac{1}{2}\left| d^2f(\xi,\eta)(x-a,y-b) - d^2f(a,b)(x-a,y-b)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi,\eta)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2\right|$$

$$< \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right|\cdot|x-a|^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right|\cdot|y-b|^2$$

$$+ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi,\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right||x-a|\cdot|y-b| \ . <$$

$$< \frac{1}{2}|x-a|^2\varepsilon + \frac{1}{2}|y-b|^2\varepsilon + |x-a||y-b|\varepsilon \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(|x-a|^2+|y-b|^2+|x-a|^2+|y-b|^2\right)\cdot\varepsilon = \|(x-a,y-b)\|^2\cdot\varepsilon$$

Asadar pt $\forall (x,y) \in B((a,b),r)$, $(x,y) \neq (a,b)$ avem

$$\left|\frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^2}\right| < \varepsilon$$

Asadar

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^2} = 0 .$$

Teorema. Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă C^n atunci pt orice $a \in D$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - T_n(x)}{\|x - a\|^n} = 0$$

unde $T_n(x)$ este polinomul Taylor de grad n asociat lui f în punctul a.

Extreme locale pentru funcții de mai multe variabile

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este pct de minim (resp. maxim) local a lui f dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$) pt orice $x \in V \cap A$.

Punctele de minim și maxim local ale lui f s.n. puncte de extrem local

Definiție. Fie $f: D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in D$. Spunem că a este punct critic (sau staționar) al lui f dacă f este diferențiabilă în a și $df(a) = 0$.

Teoremă (Fermat). Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de extrem local al lui f. Dacă f este diferențiabilă în a atunci $df(a) \equiv 0$

Dem. Pt $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f diferențiabilă în $(a,b) \in D$.

Sa pres că (a,b) este minim local al lui f.

Arătăm că $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Există $r > 0$ a.î. $B((a,b), r) \subset D$ și

$$f(x,y) \geq f(a,b) \text{ pt orice } (x,y) \in B((a,b), r).$$

$$\Rightarrow f(a+t, b) \geq f(a,b) \text{ pt orice } t \in (-r, r).$$

$g : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $\quad g(t) = f(a+t, b)$; $\quad 0$ - pt de minim local pt g

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{f(a+t, b) - f(a,b)}{t}$$

f derivabilă în rap cu x în $(a,b) \Longrightarrow g$ derivabilă în zero

și $\quad g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Teorema Fermat pt funcții de o variabilă $\Longrightarrow g'(0) = 0$.

Deci $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$. La fel arătăm și $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Observatie. Nu orice punct critic este pct de extrem local

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ $(0,0)$ - pct critic.

$r > 0$ $0 < a < r$ $(0,a), (0,-a) \in B(a,r)$.

$f(0,a) = a^3 > 0 = f(0,0)$

$f(0,-a) = -a^3 < 0 = f(0,0)$

Teoremă (Condiții necesare de extrem local)

Fie $f: D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2. Dacă $a \in D$ este punct de minim (resp. maxim) local atunci $df(a) = 0$. și $d^2 f(a)(u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ (resp. $d^2 f(a)(u) \leq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$).

Dem. Fie $a \in D$ pct de minim local. Știm (Teorema 3)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)}{\|x-a\|^2} = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $r > 0$ a.î. $B(a,r) \subset D$, $f(x) \geq f(a)$

și $\left| f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) \right| \leq \varepsilon \|x-a\|^2$, $\forall x \in B(a,r)$.

Pt $x \in B(a,r)$ avem.

$$f(x)-f(a)-\frac{1}{2}d^2f(a)(x-a) \leq \left|f(x)-f(a)-\frac{1}{2}d^2f(a)(x-a)\right| \leq \varepsilon \|x-a\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x)-f(a) \leq \frac{1}{2}d^2f(a)(x-a)+\varepsilon\|x-a\|^2$$

Fie $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. Fie $t \in \mathbb{R}$ a.î. $a+tu \in B(a,r)$.

$$0 \leq f(a+tu)-f(a) \leq \frac{1}{2}d^2f(a)(tu)+\varepsilon\|tu\|^2 =$$

$$= t^2\left(\frac{1}{2}d^2f(a)(u)+\varepsilon\|u\|^2\right).$$

Deci $\frac{1}{2}d^2f(a)(u)+\varepsilon\|u\|^2 \geq 0$. Cum ε a fost ales arbitrar.

rezultă că $d^2f(a)(u) \geq 0$.

Lema. Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dacă $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (adică φ este pozitiv definită)

atunci există $\alpha > 0$ a.î. $\varphi(x) \geq \alpha \|x\|^2$

<u>Teorema</u> (Condiții suficiente de extrem)

Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 și $a \in D$ un pct critic

1) Dacă $d^2 f(a)(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este minim local.

2) Dacă $d^2 f(a)(u) < 0, \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este maxim local.

3) Dacă există $u, v \in \mathbb{R}^n$ a.î. $d^2 f(a)(u) > 0$ și $d^2 f(a)(v) < 0$ atunci a nu este pct de extrem local (punct șa)

Dem. $df(a) = 0$ și $d^2 f(a)(u) > 0, \forall u \neq 0$. Din Lema, există $\alpha > 0$ a.î. $d^2 f(a)(u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in \mathbb{R}^n$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)}{\|x-a\|^2} = 0 .$$

Există $r>0$, a.î. $B(a,r) \subset D$ şi a.î. $\forall x \in B(a,r)$, $x \neq a$.

$$\frac{|f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)|}{\|x-a\|^2} < \frac{\alpha}{4}$$

adică $|f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)| < \frac{\alpha}{4} \|x-a\|^2$; Atunci

$$f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) > - |f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)|$$

$$f(x) - f(a) > \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) - |f(x) - f(a) - \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a)|$$

$$f(x)-f(a) > \frac{\alpha}{2}\|x-a\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x-a\|^2 = \underbrace{\frac{\alpha}{4}\|x-a\|^2}_{\substack{\vee \\ 0}}, \ \forall x \in B(a,r),\ x \neq a.$$

Deci a este pct de minim strict al lui f.

3) Rezultă din Teorema anterioară

$f \in C^2(D)$, $a \in D$.

$H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \le i,j \le n}$ – matricea Hessiană a lui f în pct a

$$d^2 f(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1 \dots u_n) \cdot H_f(a) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Teoremă: Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 și (x_0, y_0) un punct critic.

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

$$\Delta_2 = \det H_f(x_0,y_0).$$

1) Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0,y_0) este pct de minim local

2) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0,y_0) este pct de maxim local

3) Dacă $\Delta_2 < 0$ atunci (x_0,y_0) nu este pct de extrem local

4) Dacă $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nicio concluzie.

Demonstratie

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),\quad A\neq 0.$$

$$d^2 f(x_0,y_0)(u,v)=Au^2+2Buv+Cv^2=$$

$$=A\left[\left(u+\frac{B}{A}v\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}v^2\right]$$

Dacă $\Delta_2=AC-B^2>0$ atunci $d^2 f(a,b)$ este pozitiv definită dacă $\Delta_1=A>0$ şi negativ definită dacă $\Delta_1<0$ şi (1) şi (2) rezultă din Teorema anterioară.

Dacă $\Delta_2<0$ atunci $d^2 f(x_0,y_0)$ este nedefinită (indiferent dacă $A=0$ sau $A\neq 0$) şi deci (x_0,y_0) nu este pct de extrem local.

Exemplu. Determinați punctele de extrem local ale fct.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Soluție. Domeniul de definiție $\mathbb{R}^2$ este mulțime deschisă și f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$. Așadar pct de extrem local se găsesc printre punctele critice (staționare). Rezolvăm sist.

$$\text{I)}\ \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\left|\ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0. \\ xy=2. \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2}{x}$$

$$x^2+\frac{4}{x^2}-5=0 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0.$$

$x^2=t$

$t_1=1$

$x_1=1$, $y_1=2$

$x_2=-1$, $y_2=-2$

$t_2=4$

$x_3=2$, $y_3=1$

$x_4=-2$, $y_4=-1$

Punctele critice sunt

$(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$.

$\underline{II}$) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 = 6$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow (1,2)$ nu este pct de extrem local.

$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow (-1,-2)$ nu este pct de extrem local.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 12 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow (2,1) \text{ pct de minim local.}$$

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -12 < 0 \\ \Delta_2 = 108 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow (-2,-1) \text{ pct de maxim local.}$$

Exemplu. (cazul $\Delta_2 = 0$).

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = x^2 + y^4$, $\quad g(x,y) = x^2 - y^4$.

$(0,0)$ - pct critic pt f și g.

$$H_f(0,0) = H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (0,0)$ pct de minim global al lui f.

$(0,0)$ - nu este pct de extrem local pt g.

Teoremă

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 și $a \in D$ pct critic.

Fie $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $H_f(a) = (a_{ij})_{1 \le i \le n}$

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \dots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(adică $\Delta_n = \det H_f(a)$)

(1) Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$ at. a este pct de minim local.

(2) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ... $(-1)^n \Delta_n > 0$ at. a este pct de maxim local

(3) Dacă $(\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0)$ sau $(\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \Delta_3 \leq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0)$ dar există j a.î. $\Delta_j = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie.

(4) În orice altă situație a nu este pct de extrem local.

Propoziție

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, $a \in D$ pct critic și $H_f(a)$ matricea hessiană asociată lui f în a.

(1) dacă toate valorile proprii ale lui $H_f(a)$ sunt strict pozitive, atunci a este pct. de minim local

(2) dacă toate valorile proprii ale lui $H_f(a)$ sunt strict negative, atunci a este pct de maxim local

(3) dacă $H_f(a)$ are o val proprie strict pozitivă și o val. proprie strict negativă, at. a nu este pct. de extrem local.

(4) în orice altă situație, nu ne putem pronunța.