Seminar 3

① Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine idealele maximale ale lui $\mathbb{Z}_n$.

② Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $R_1, \dots, R_n$ inele comutative. Să se determine idealele maximale ale lui $R_1 \times \dots \times R_n$.

③ Fie F un corp comutativ. Să se arate că privind F ca pe un domeniu de integritate, corpul lui de fracții este izomorf cu F.

④ Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că $\mathbb{Z}[i]$ este subinel al lui $\mathbb{C}$ (inelul întregilor lui Gauss), $\mathbb{Q}[i]$ este subcorp al lui $\mathbb{C}$, iar corpul de fracții al lui $\mathbb{Z}[i]$ este izomorf cu $\mathbb{Q}[i]$.

⑤ În inelul $\mathbb{Z}[i]$ considerăm idealul principal (3) generat de elementul 3. Să se arate că

inelul factor $K = \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}$ este corp cu 9 elemente.
Ce caracteristică are corpul K?

⑥ Fie p un număr prim și K un corp comutativ de caracteristică p. Fie $\varphi: K \to K$, $\varphi(x) = x^p$ pt. orice $x \in K$. Să se arate că:

(i) φ este morfism de corpuri

(ii) Dacă K este finit, atunci φ este izomorfism de corpuri.

⑦ Reamintim că o prezentare a corpului cuaternionilor este $\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, unde

$a+bi+cj+dk = a'+b'i+c'j+d'k \Leftrightarrow a=a', b=b', c=c', d=d'$,

$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k) = (a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$

pt. orice $a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{R}$, iar înmulțirea pe $\mathbb{H}$ este definită în așa fel încât: orice $a \in \mathbb{R}$ comută cu i, j și k; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

Dacă $x = a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$, notăm $\bar{x} = a-bi-cj-dk$,

$T(x) = x + \bar{x}$ și $N(x) = x\bar{x}$.

(a) Să se calculeze produsul $(1+2i-j+k)(2-i+3j+2k)$.

(b) Să se arate că $T(x), N(x) \in \mathbb{R}$ și $x^2 - T(x)x + N(x) = 0$ pt. orice $x \in \mathbb{H}$.

(c) Să se calculeze inversul lui $1+2i-j+k$ în $\mathbb{H}$.

(d) Să se determine centrul lui $\mathbb{H}$.

(e) Să se rezolve ecuația $x^2 = -1$ în $\mathbb{H}$.