Examen[1] la Geometrie I, seria 10, 02.09.2023

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: ______

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Punctul $P = (2, \sqrt{2})$ se află în interiorul elipsei de ecuaţie $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. **(0,5p)**

2. Distanţa dintre dreptele $d_1 : 2x - y - \alpha = 0$ şi $d_2 : -4x + 2y + 5 = 0$ nu depinde de parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0,5p)**

3. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $d : \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ şi $\pi : 4x - 2y + 2z - 3 = 0$, atunci $d \parallel \pi$. **(0,5p)**

4. Imaginea unei elipse printr-o omotetie este o elipsă de aceeaşi excentricitate. **(0,5p)**

5. Dacă conica $\Gamma : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ este o hiperbolă echilateră, atunci $b = 0$ şi $a + c = 0$. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie punctele $A = (2, -6), A' = (-4, 4), B = (-5, 0), B' = (-2, -5)$ şi dreapta $d : x + 4y + 5 = 0$.

a) Arătaţi că $AA' \parallel BB'$. **(0,5p)**

b) Arătaţi că există o simetrie axială $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$.
Determinaţi axa de simetrie a lui f. **(0,5p)**

c) Calculaţi $f(d)$. **(0,5p)**

d) Fie d_f axa de simetrie a lui f, aflată anterior. Arătaţi că $\angle(d, d_f) = 45°$. **(0,5p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie conica $\Gamma_\alpha : x^2 + 4xy + \alpha y^2 - 4x + 2y + \alpha = 0$ şi mulţimea

$$M_\alpha = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f \text{ izometrie}, f(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha\}.$$

a) Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care Γ_α este nedegenerată. **(0,5p)**

b) Demonstraţi că există un unic $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care Γ_α este o parabolă. **(0,5p)**

c) Pentru $\alpha = 2$, determinaţi centrele de simetrie ale lui Γ_α (sau demonstraţi că nu are centru). **(0,5p)**

d) Pentru $\alpha = 2$, daţi exemplu de $f \in M_\alpha$, $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}^2$, scriind expresia lui f în coordonate. **(0,5p)**

e) Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, decideţi dacă M_α este un grup împreună cu compunerea funcţiilor. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

f) Decideţi dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$ şi M_α este infinit. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

3. Fie $\mathcal{H}$ o hiperbolă în planul euclidian $\mathbb{R}^2$. Se numeşte **coardă** a lui $\mathcal{H}$ orice segment cu capetele pe $\mathcal{H}$.
Demonstraţi că mijloacele a orice trei coarde paralele sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin centrul hiperbolei. **(1,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!