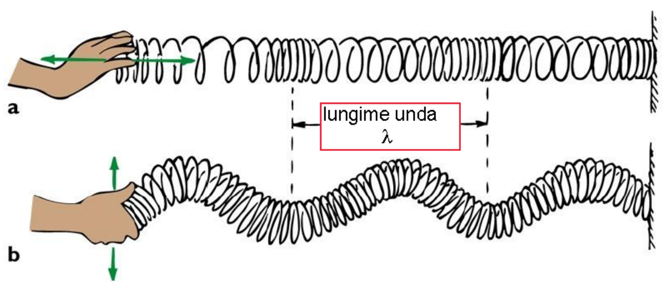
C7: Unde elastice-Elastic Waves

Fenomenul de propagare a unei perturbaţii (disturbance, perturbation) se numeşte *undă*. Există unde care se pot propaga numai printr-un mediu material (plasmă, gaz, lichid, solid). Acestea se numesc unde *mecanice* (undele mecanice nu se pot propaga in vid). Pentru ca o undă să se poată propaga, mediul trebuie să aibă *proprietăţi elastice*, astfel încât după perturbare să existe forţe care să tindă să readucă mediul în starea de nedeformare. Astfel, undele mecanice se numesc şi unde *elastice.* Dacă oscilaţia mediului se face în direcţia de propagare a undei, unda se numeşte *longitudinală*. Dacă oscilaţia mediului se produce în direcţie perpendiculară direcţiei de propagare a undei, unda se numeşte *transversală*. Exemple de unde elastice longitudinale: undele care se propaga de-a lungul unui resort (vezi Fig.1a), undele sonore (mediu de propagare-aer). Exemple de unde elastice transversale: undele care se propaga de-a lungul unui resort (vezi Fig.1b), valurile (mediu de propagare-apa). Undele seismice (mediu de propagare-Pamânt) pot fi atât longitudinale cât şi transversale.



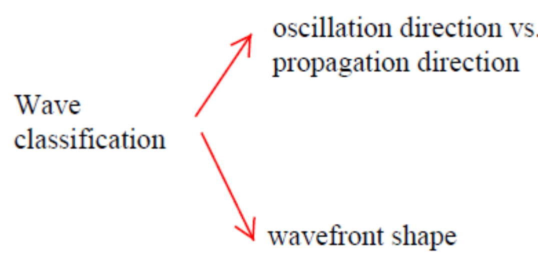


Fig. 1 Undă: a) longitudinală, b) transversală, într-un resort.

https://www.youtube.com/watch?v=7cDAYFTXq3E

Locul geometric al punctelor mediului care oscilează în fază (la fel) definesc *suprafaţa de undă* (wavefront). În funcţie de forma suprafeţei de undă, undele pot fi *plane*, *sferice, cilindrice*.

https://en.wikipedia.org/wiki/Wavefront

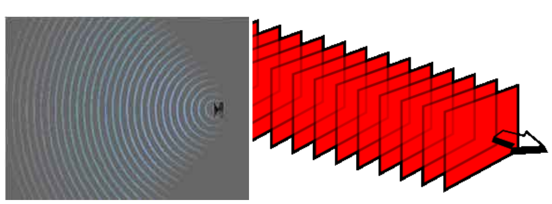


Fig. 2 Unda sferică: a) secţiune printr-un plan care conţine sursa; b) forma suprafeţelor de undă este plană, la distanţă suficient de mare de sursă.

1.Unde plane monocromatice-Travelling harmonic plane waves

Undele plane *monocromatice* au o singură frecvenţă de oscilaţie si suprafata de unda un plan. Să considerăm un punct S, dintr-un plan care oscilează si generează perturbaţia (sursă a undelor), ca origine a axei Ox. De exemplu, pentru o undă transversala care se propaga de-a lungul axei x, deplasarea fata de echilibru (*elongaţia*) se scrie:

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\nu t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}, \qquad (1)$$

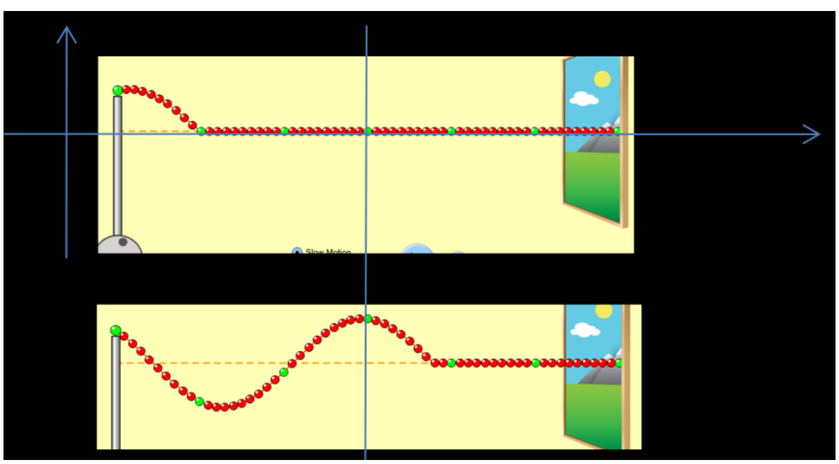
unde A se numeşte *amplitudine*, ω se numeşte *pulsaţie* (angular frequency), ν se numeşte frecvenţă, iar T se numeşte *perioadă*.

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

Un punct $P(x)$ al mediului prin care perturbaţia se propagă în mod ideal, fără disipări de energie, oscilează la momentul t *la fel* cum oscilau punctele mediului în S la momentul $t-\tau = t - x/c$, unde c este *viteza* cu care perturbaţia (unda) se propagă în mediu. Deci, considerând o propagare în sensul axei ($x > 0$, o asemenea undă se numeşte *progresivă*), putem scrie:

$$\begin{aligned}\xi_+(x,t) &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{Tc}\right)\\ &= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right)\end{aligned} \qquad (2)$$

unde λ se numeşte *lungime de undă* (wavelength), iar k se numeşte *număr de undă* (wave number).



Pentru o undă *regresivă* (propagare în sens invers axei, $x < 0$), putem scrie:

$$\xi_{-}(x,t) = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t + kx\right). \tag{3}$$

Unda plană monocromatică este periodică în timp şi spaţiu:

$$\xi_{\pm}(x,t) = \xi_{\pm}(x,t+T), \tag{4}$$

$$\xi_{\pm}(x,t) = \xi_{\pm}(x+\lambda,t), \tag{5}$$

astfel că distanţa minimă dintre două puncte ale mediului, care oscilează în fază este egală cu λ (vezi, Fig.1).

2. Ecuatia undelor Wave equation

Pentru o unda plana monocromatica care se propaga in directia *x* fara disipare putem scrie relatia

$$\xi(x,t) = \xi(0,t \pm \frac{x}{c}) \equiv f(t \pm \frac{x}{c}) = f(u(t,x)), \text{ cu } u(t,x) = t \pm \frac{x}{c}, \tag{6}$$

unde functia f este introdusa pentru o prelucrare matematica convenabila. Obtinem

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\pm 1}{c}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\pm 1}{c}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{c^2}, \tag{8}$$

si combinand derivatele partiale de ordinul 2 putem scrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{1}{c^2} = 0 \qquad \text{Wave equation} \tag{9}$$

Aceasta ultima ecuatie este *ecuatia undelor* plane pentru propagarea intr-o directie, *x*.

Q1: Verificati ca $\xi_{\pm}(x,t) = A\cos\left(\omega t \mp kx\right)$ verifica ecuatia undelor.

---

3. Interferenţa (Interference)

Fenomenul de compunere (superposition) a undelor se numeşte interferenţă. Două unde cu: *a*) *frecvenţă egală* si *b*) *diferentă de faza constantă* se compun într-un punct din mediu si generează o oscilatie. În urma compunerii in conditiile *a*) si *b*) apar puncte ale mediului care oscilează cu minim sau maxim de amplitudine.

Fenomenul se poate explica cu următorul model. Fie S_1 si S_2 puncte considerate surse de oscilaţie (unde), care generează ***unde plane*** de pulsaţie ω. Într-un punct din spaţiu P, aflat la distanţa r_1 faţă de S_1 şi r_2 faţă de S_2 oscilaţia este caracterizată de elongaţiile:

$$\xi_1(r_1,t) = A_1\cos(\omega t - kr_1) \tag{11}$$

$$\xi_2(r_2,t) = A_2\cos(\omega t - kr_2) \tag{12}$$

Ele vor genera o oscilaţie rezultantă:

$$\xi(r\ ,t) = \xi_1(r_1,t) + \xi_2(r_2,t)\ , \tag{13}$$

a cărei amplitudine este

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1\,A_2\cos k(r_1 - r_2)}\ . \tag{14}$$

Amplitudinea este minimă dacă:

$$k(r_1 - r_2) = k\Delta r = (2n+1)\pi,\ n \subset Z\ \Leftrightarrow\ \Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{15}$$

şi maximă dacă:

$$k(r_1 - r_2) = k\Delta r = 2n\pi,\ n \subset Z\ \Leftrightarrow\ \Delta r = 2n\frac{\lambda}{2} \tag{16}$$

În Fig.3 este prezentat schematic un dispozitiv în care sursele S_1 si S_2 genereaza *unde circulare* care se obţin ca surse secundare ale unei surse S, care este delimitată în mediu printr-un ecran în care sunt practicate două deschideri (fante-slits). Punctul P va oscila cu minimă (maximă) amplitudine dacă sunt îndeplinite anumite conditii referitoare la pozitia puctului in spatiu:

http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M02_C04/co/Contenu_08.html

De notat ca ec. (15) si (16) sunt *valabile numai* daca sursele S_1 si S_2 sunt unde plane.

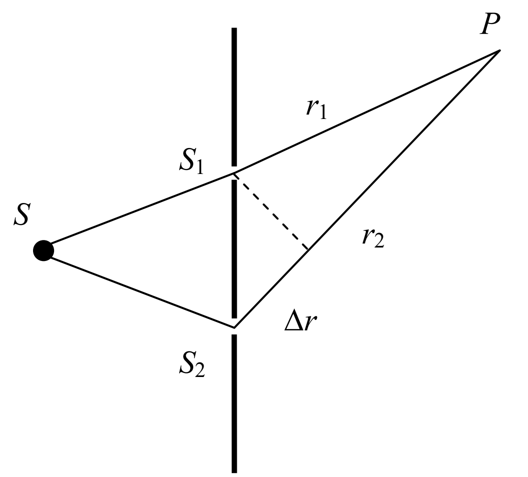


Fig. 3 Interferenţa- schema

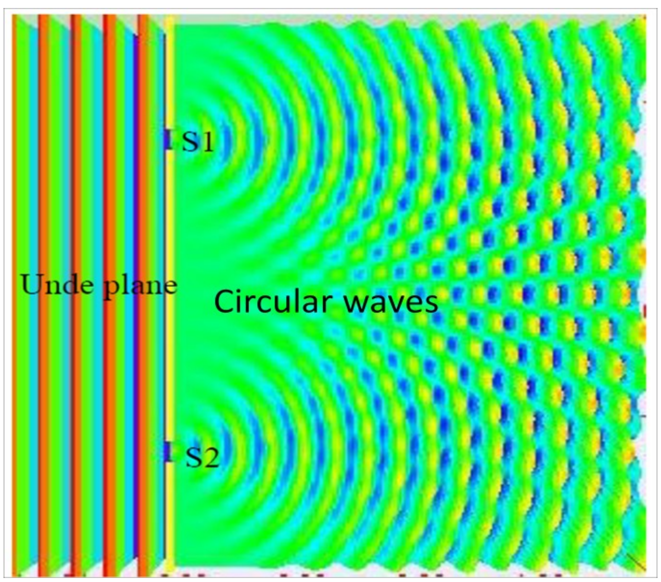


Fig. 4 Interferenţa undelor la suprafata apei – stationary regions

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_en.html

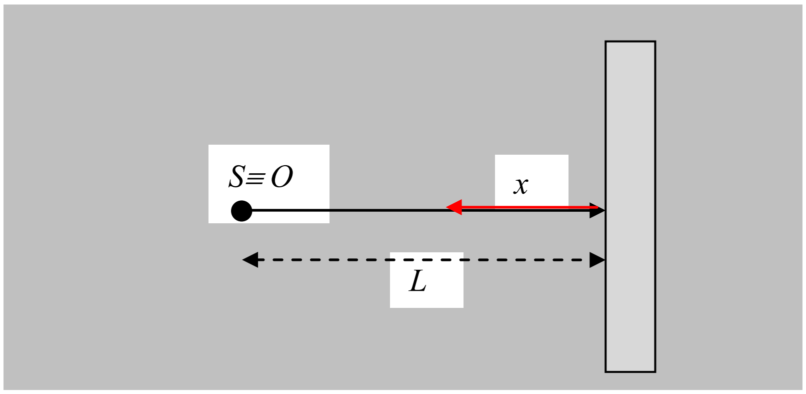
3. Unde staţionare – Standing (stationary) waves

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0

https://www.youtube.com/watch?v=Ixst0YL-eQE

Să considerăm o undă plană progresivă incidentă care se propagă în lungul axei Ox şi se reflectă pe un plan *rigid* aflat la distanţa L faţă de S (care coincide cu originea axei Ox), devenind undă regresivă.



Cele două unde, progresivă şi regresivă, *interferă* şi elongaţia undei rezultate într-un punct x este:

$$\begin{aligned}\xi(t,x) &= \xi_{+}(t,x) + \xi_{-}(t,x) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \alpha) \\ &= 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kx + \alpha/2)\end{aligned} \quad (17)$$

unde $-kx$, $kx+\alpha$ este *faza* undei incidente, respective reflectate. Punctele mediului aflate la distanţa L sunt în contact cu planul rigid şi nu oscilează. Ele se află într-un *nod* (node) şi

$$\xi(t,L) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kL + \alpha/2) = 0\,, \quad (18)$$

deci,

$$kL + \alpha/2 = (2n+1)\pi/2,\ n \in Z\,. \quad (19)$$

În S, elongaţia este:

$$\xi(t,0) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(\alpha/2). \quad (20)$$

Dacă oscilaţia în S are amplitudine maximă se formează un *anti-nod* (*ventru*) (*antinode*), atunci, $|\xi(t,0)|$ atinge valori maxime pentru $\cos(\alpha/2) = \pm 1$, adică,

$$\alpha/2 = 2m\pi/2,\ m \in Z\,. \quad (21)$$

Combinând ec. (19, 21) se obţine (cu condiţia L>0),

$$kL = (2n+1-2m)\pi/2 = (2i+1)\pi/2,\ i \in N\,. \tag{22}$$

adica

$$L = (2i+1)\lambda/4,\ i \in N$$

In acest caz, cu dependenta de i a numarului de unde k, k_i, pentru o lungime data L:

$$L = (2i+1)\pi/(2k_i) = (2i+1)\lambda_i/4 = (2i+1)c/(4\nu_i)\,. \tag{23}$$

si frecvenţele *proprii* de oscilatie sunt:

$$\nu_i = (2i+1)c/(4L)\,. \tag{24}$$

Cea mai mică frecvenţă corespunde *modului fundamental fundamental mode*,

$$\nu_f = c/(4L)\,. \tag{25}$$

iar celelalte (i>0) *armonicelor harmonics.* Frecvenţa fundamentală şi armonicele se numesc frecvenţe proprii.

În Fig. 4[1, 2] este prezentată schematic oscilaţia moleculelor de aer într-un tub închis la un capăt. Oscilaţia moleculelor de aer are loc de-a lungul tubului, unde apar zone cu variaţie maximă a presiunii şi zone în care presiunea nu variază. Moleculele de la capătul deschis oscilează cu maximă amplitudine, iar cele de la capătul închis nu oscilează.

https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic

https://www.youtube.com/watch?v=PqynSAFjof0

time: 2.0

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_frequency#/media/File:F0leftclosed.gif

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Overtone

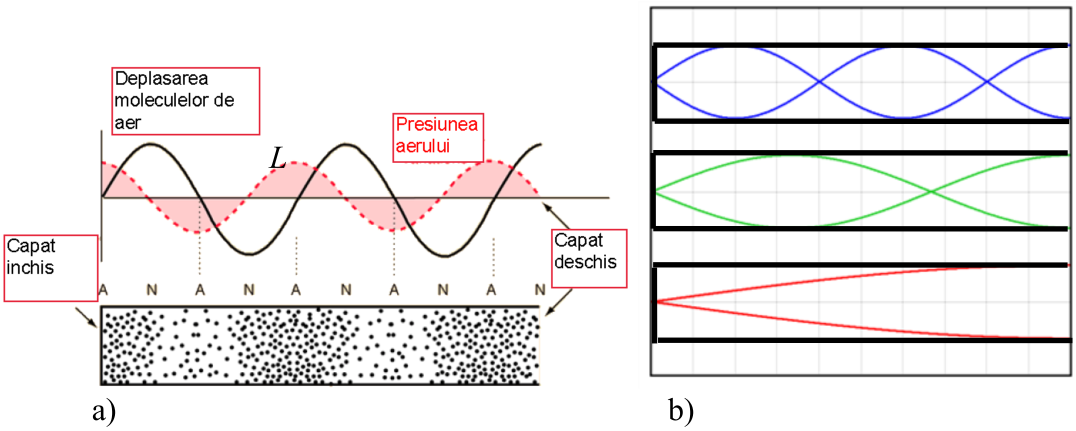


Fig. 4 a) Oscilaţia moleculelor de aer (reprezentate prin punctele negre) are loc în direcţia tubului. Moleculele de la capătul liber oscilează cu maximă amplitudine iar cele de la capătul închis stau pe loc. A-antinod(ventru), N-nod; b) Modul fundamental (culoare roşie) şi următoarele două armonice.

După excitarea aerului din tub, oscilaţia moleculelor de aer este rapid *amortizată* şi sunetul dispare. Dacă însă tubul sonor (în exemplul nostru, închis la un capăt) este excitat la capătul deschis de o perturbaţie externă *continuă* care are o frecvenţa egală cu una din frecvenţele proprii ale tubului, atunci apare fenomenul de rezonanta, se formează o unda staţionară. La capătul deschis al tubului se formează un ventru care este perceput de un observator, în afara tubului, în laborator, ca un sunet întărit.

4. Unde sonore - Sound wave

Variaţiile bruşte ale presiunii aerului într-o regiune din atmosferă generează perturbaţii locale ale mediului care se propagă, iar undele asociate acestei perturbaţii se numesc *unde sonore*. Propagarea sunetului este posibilă datorită propietăţilor elastice ale aerului. Oscilaţia moelculelor de aer se face în direcţia de propagare a undei sonore, aceasta fiind caracteristica *undelor longitudinale*. Unda sonoră este numită şi *sunet*, întrucât ajunsă la ureche este percepută/auzită (organul auditiv transformă oscilaţia aerului în impuls nervos, care creaza senzaţia de auz). Undele sonore sunt *unde sferice*, dar pe o porţiune mică a suprafetei sferice a ondei, la distanţe suficient de mari de sursă, ele pot fi considerate *unde plane* (vezi Fig. 1). *Rezonatorul acustic* este un sistem în care aerul oscilează cu o mai mare amplitudine pentru anumite frecvenţe, numite *frecvenţe de rezonanţă*. Instrumentele muzicale de suflat, de exemplu, sunt asemenea rezonatori acustici. Tuburile sonore se înscriu în categoria rezonatorilor acustici de formă cilindrică. Ele pot fi deschise la unul sau ambele capete.

O modelare simplă a fenomenelor acustice care se petrec în tuburi sonore se bazează pe conceptul de *undă staţionară.* Reamintim ca undele staţionare sunt undele la care oscilaţia într-un punct al mediului prin care se propagă perturbaţia se face cu amplitudine constantă.

5. Coarda vibranta - Vibrating string

Consideram o coarda cu proprietati elastic fixata la ambele capete si o portiune infinitezimala a acesteia, pentru care scriem legea dinamicii.

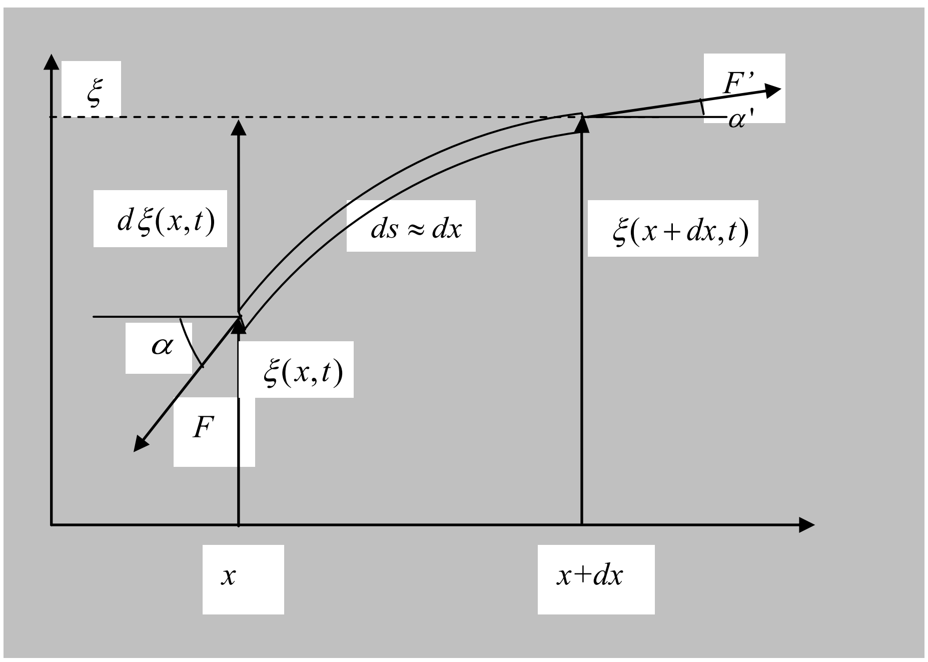


Fig 6 Segment de coarda infinitezimal de lungime $ds \approx dx$ la un moment dat in timpul oscilatiei.

Unghiurile α si α' sunt mici (sub 5°), deci, conform interpretatii geometrice a derivatei, $\tan\alpha = \partial\xi/\partial x \equiv \xi'(x,t)$, $\tan\alpha' = \xi'(x+dx,t)$; derivata cu semnul ‘ este doar o notatie pentru derivate la coordonata. In consecinta, lungimea segmentului infinitezimal de coarda (SIC) se scrie

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\xi^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2} \approx dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2} \equiv dx\sqrt{1+\xi'(x,t)^2}, \qquad (26)$$

$$\approx dx$$

unde in a treia egalitate am neglijat variatia temporala in scrierea diferentialei $d\xi(x,t)$.

SIC nu se deplaseaza in directia *x*, deci aplicand legea a 2-a a mecanicii obtinem

$$F\cos\alpha = F'\cos\alpha' \qquad (27)$$

si pentru ca unghiurile α si α' sunt mici, $\cos\alpha \approx \cos\alpha' \approx 1$, deci, cu buna aproximatie

$$F = F', \qquad (28)$$

adica tensiunea in coarda este practic constanta. Pentru directia verticala aplicand legea a 2-a a mecanicii pentru SIC ($\ddot{\xi}(x,t) = \dfrac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial t^2}$ este acceleratia) obtinem

$$F'\tan\alpha' - F\tan\alpha = dm\ddot{\xi}(x,t) \qquad (29)$$

sau, cu $dm = \rho S dx$ (unde ρ este densitatatea materialului din care este confectionata coarda, iar *S* este aria sectiunii transversal a coardei) si aproximatiile $\sin\alpha \approx \tan\alpha$, $\sin\alpha' \approx \tan\alpha'$ obtinem (cu ec. (29))

$$F\left(\tan\alpha' - \tan\alpha\right) = F\left[\xi'(x+dx,t) - \xi'(x,t)\right] = \rho S dx\ddot{\xi}(x,t). \qquad (30)$$

Dezvoltam Taylor $\xi(x+dx,t)$ pana la termenul de ordinul intai in *dx* si obtinem

$$\xi(x+dx,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}dx \qquad (31)$$

In consecinta, derivata partiala la *x* a elongatiei $\xi(x+dx,t)$ se scrie cu buna aproximatie

$$\begin{aligned}\xi'(x+dx,t) &\approx \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\xi'(x,t)\right]dx = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx \\ &\equiv \xi'(x,t) + \frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx\end{aligned} \qquad (32)$$

Cu ec. (30, 32), cu buna aproximatie, ec. (29) se scrie

$$F\frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial x^2}dx = \rho S dx\ddot{\xi}(x,t) \qquad (33)$$

sau, simplificand,

$$\frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\dfrac{F}{\rho S}}\frac{\partial\xi^2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (34)$$

Comparam ec. (34) cu ecuatia undelor si gasim ca viteza de propagare a undelor in coarda este

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \qquad (35)$$

In modul fundamental (vezi Fig. 7) lungimea coardei de chitara, *L*, este egala cu jumatate de lungime de unda, deci

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}, \text{ sau } \nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho S}} \qquad (36)$$

Obtinem ca frecventa modului fundamental (cel care se aude cel mai puternic cand coarda vibreaza in aer) creste cu tensiunea din coarda si scade cu grosimea acesteia.

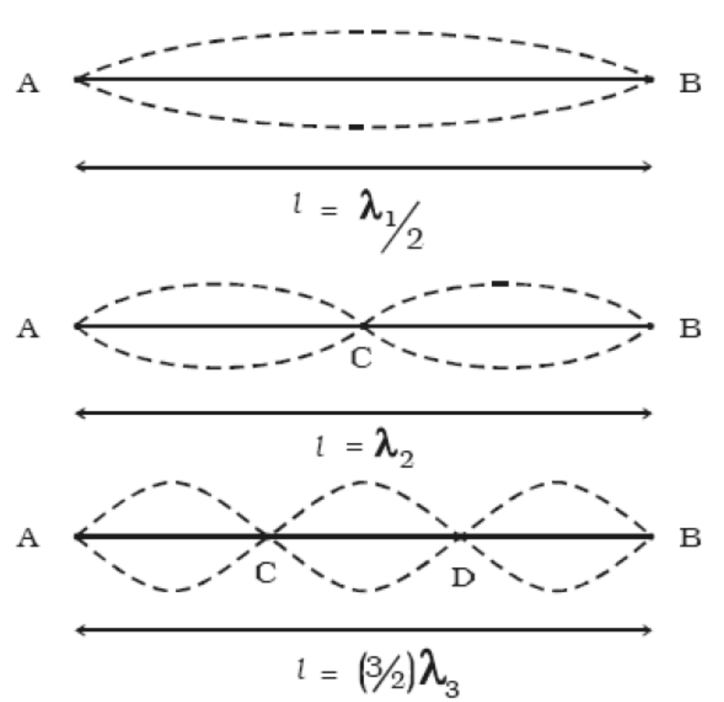
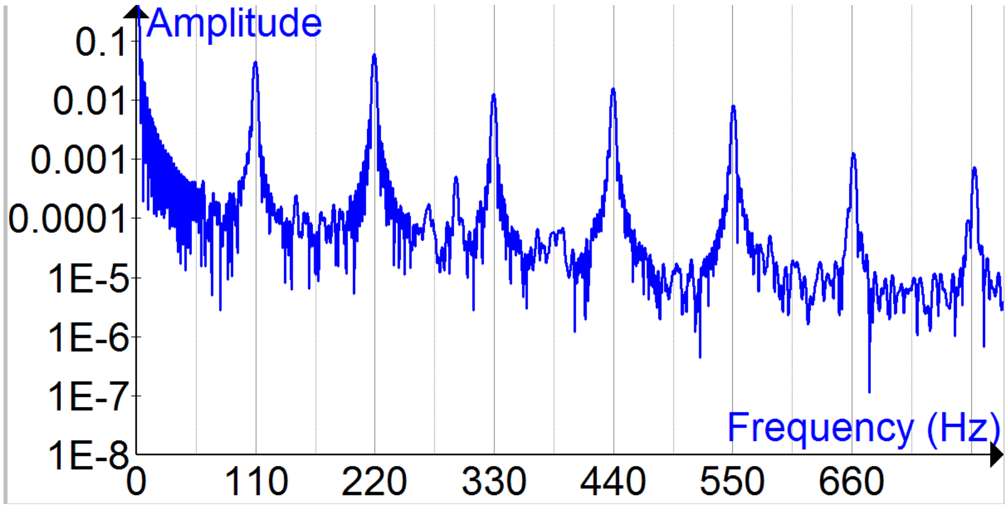


Fig. 7 Moduri de vibratie ale coardei de chitara: modul fundamental al coardei (randul de sus) si armonice.



String resonance of a bass guitar A note with fundamental frequency of 110 Hz.

https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_resonance#cite_note-Jaap-3

Guitar string equation

Cele două unde, progresivă şi regresivă, *interferă* şi elongaţia undei rezultate într-un punct x este:

$$\begin{aligned}\xi(t,x) &= \xi_+(t,x)+\xi_-(t,x) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx + \alpha) \\ &= 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kx+\alpha/2)\end{aligned} \quad (37)$$

unde $-kx$, $kx+\alpha$ este *faza* undei incidente, respective reflectate. Punctele $x = 0, L$ nu oscilează. Ele se află într-un *nod* şi

$$\xi(t,L) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(kL+\alpha/2) = 0\,, \quad (38)$$

deci,

$$kL + \alpha/2 = (2n+1)\pi/2,\ n \in Z\,. \quad (39)$$

Si

$$\xi(t,0) = 2A\cos(\omega t + \alpha/2)\cos(\alpha/2) = 0\,. \quad (40)$$

deci,

$$\alpha/2 = (2m+1)\pi/2,\ m \in Z\,. \quad (41)$$

Combinând ec. (39, 41) se obţine (cu condiţia L>0),

$$kL = (2n+1-2m-1)\pi/2 = i\pi,\ i \in N\,. \quad (42)$$

$$\Rightarrow\ L = i\pi / k_i = i\lambda_i/2 = ic/(2\nu_i)\,. \quad (43)$$

⇨ Pentru o lugime L dată frecvenţele *proprii* de oscilatie sunt:

$$\nu_i = ic/(2L)\,. \qquad (44)$$

Cea mai mică frecvenţă corespunde *modului fundamental* (i=1) (*fundamental mode*),

$$\nu_f = c/(2L)\,. \qquad (45)$$

iar celelalte (i>1) *armonicelor harmonics.*