(C$_8$) - GA

Forme biliniare. Forme pătratice

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$. Aplicatia $g: V\times V \to \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ g este e liniară în fiecare argument i.e. $g(\alpha x+\beta y, z) = \alpha g(x,z) + \beta g(y,z)$

$g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x,y) + \beta g(x,z)$

$\forall x,y,z \in V, \forall \alpha,\beta \in K.$

Not $L(V,V;\mathbb{K}) = \{ g: V\times V \to \mathbb{K} \ / \ g$ formă biliniară$\}$

Def g s.n. formă simetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x)$

" — antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = -g(y,x)$

OBS g este simetrică și liniară într-un argument

$\Rightarrow$ g este biliniară

$L^s(V,V;\mathbb{K}) = \{ g \in L(V,V;\mathbb{K}) \ / \ g$ sim$\}$

$L^a(V,V;\mathbb{K}) = \{ g \in L(V,V;\mathbb{K}) \ / \ g$ antisim$\}$

$L^s(V,V;\mathbb{K}), L^a(V,V;\mathbb{K}) \subset L(V,V;\mathbb{K})$ subsp. vect.

Matricea asociată unei forme biliniare

$R = \{e_1,..,e_n\}$ reper în V

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \qquad g_{ij} \doteq g(e_i,e_j), \forall i,j = \overline{1,n}$

$$(*)\quad g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \overbrace{g(e_i, e_j)}^{g_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

$R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper în V $\quad R \xrightarrow{C} R'$

$$\underset{\parallel}{g(e_k', e_l')} = g_{kl}' = g\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik} e_i, \sum_{j=1}^{n} c_{jl} e_j\right)$$

$$g_{kl}' = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ik} c_{jl} \underbrace{g(e_i, e_j)}_{g_{ij}}$$

$$\boxed{G' = C^T G C}$$

Prop $\quad \mathrm{rg}\, G' = \mathrm{rg}\, G$ = invariant la sch. reperelor.

Def Aplicația $Q : V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică $\Longleftrightarrow$

$\exists\, g \in L_2^s(V, V; \mathbb{K})$ a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

Prop $\exists$ o corespondență bijectivă între mulțimea formelor pătratice pe V și mult. formelor biliniare simetrice pe V $\quad (\mathrm{ch}\,\mathbb{K} \neq 2)$

Dem

- $Q : V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

Construim $g : V \times V \to \mathbb{K}$ bil + sim. a.î. $g(x,x) = Q(x)$, $\forall x \in V$

$$\underset{\parallel}{g(x+y, x+y)} = Q(x+y) \quad \Rightarrow g(x,y) = 2^{-1}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

$$\underset{Q(x)}{g(x,x)} + \underbrace{g(x,y) + g(y,x)}_{2g(x,y)} + \underset{Q(y)}{g(y,y)}$$

g forma polară a lui Q

• $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

Fie $Q : V \to \mathbb{K}$ forma pătratică : $Q(x) = g(x, x), \forall x \in V$

OBS $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V

$Q(e_i) = g(e_i, e_i) = g_{ii}, \forall i = \overline{1,n} \overset{*}{\Longrightarrow}$

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (x_i)^2 + \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j + \sum_{i>j} g_{ij} x_i x_j$$

$$\boxed{Q(x) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j}$$

Def $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$, $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V

$\mathrm{Ker}(g) = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall y \in V\}$

g s.n. nedegenerată $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g = \{0_V\}$.

OBS $x \in \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow \overset{*}{\begin{cases} g(x, e_1) = 0 \\ \vdots \\ g(x, e_n) = 0 \end{cases}}$

g nedegenerată $\Leftrightarrow$ SLO $*$ are sol unică nulă

$\Leftrightarrow \det G \neq 0$

Def $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

Q s.n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$ 1) $Q(x) > 0, \forall x \neq 0_V$

2) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

g forma polară asociată. g este pozitiv def $\Leftrightarrow$ Q este poz def.

Prop $g \in L^s(V,V;\mathbb{K})$

g este pozitiv def $\Rightarrow g$ nedegenerată

Dem Dem că $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y)=0, \forall y \in V$

Fie $y = x \Rightarrow g(x,x) = 0$; $g(x,x) = Q(x)$

dar g poz. def $\Rightarrow Q$ este poz. def

$\Rightarrow x = 0_V \Rightarrow g$ nedeg.

Ex

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic.

a) $G = ?$ matricea asoc. lui g în raport cu R_0.

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată.

Este Q poz. def?

SOL

a) $g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$, $G = I_3$

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

1. $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$

2. $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

Q este poz. def.

Ex $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ matricea asociată lui g

a) g sim $\Leftrightarrow G = G^T$

b) $g = ?$, $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

- $g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$

$g(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 - 1\cdot x_2y_3$
$+ 2x_3y_1 - 1\cdot x_3y_2 + 0\cdot x_3y_3$

- $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$

$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 0\cdot x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

<u>Problemă</u> $Q: V \longrightarrow \mathbb{K}$ formă pătratică.
$\exists\ R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V a.î. $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} a_1 \dots & & 0 \\ & a_r & \\ 0 & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$

$(r = rg(G))$?

$Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_rx_r^2$ (formă canonică).

<u>Teorema Gauss</u>
$Q: V \longrightarrow \mathbb{K}$ formă pătratică
$\Rightarrow \exists\ R = \{e_1, .., e_n\}$ a.î. Q are o formă canonică

<u>Dem</u>
I. $Q = 0 \Rightarrow Q$ are formă canonică
II. $Q \neq 0$.
a) $g_{11} \neq 0$
b) $g_{11} = 0$, $\exists\ i_0 \in \{2, .., n\}$ a.î. $g_{i_0 i_0} \neq 0$
Renumerotăm indicii (schimbare) de reper a.î. $g_{11} \neq 0$
c) $g_{ii} = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$
$G \neq O_n$ $\exists\ g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$
Fie schimbarea de reper

$g_{ij} \neq 0$

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_k = x_k, \quad k \in \{1,..,n\} \setminus \{i,j\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j) \\ x_k = y_k \end{cases}$$

$$2 g_{ij} x_i x_j = 2 \cdot g_{ij} \cdot \frac{1}{4}(y_i - y_j)(y_i + y_j) = \frac{1}{2} g_{ij} (y_i^2 - y_j^2)$$

Se aplică cazul b)

În concluzie $g_{11} \neq 0$

Dem prin inducție după nr. de coordonate ale lui x care apar în Q.

Ip adev P_{k-1} : Dacă $Q: V \to \mathbb{K}$ conține coord $x_1,.., x_{k-1}$ ale lui x, at $\exists$ un reper ai Q are o formă canonică.

Dem $P_{k-1} \Rightarrow P_k$: $Q: V \to \mathbb{K}$ conține $x_1,.., x_k$ (coord. lui x).

Dem că $\exists$ un reper ai Q are o formă canonică.

$$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + Q'(x)$$

apar coord $x_2,.., x_k$.

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} \left[g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{12} g_{11} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{11} g_{1k} x_1 x_k \right] + Q''(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1k} x_k)^2 + Q''(x)$$

apar coord $x_2,.., x_k$

Fie sch. de reper: $\begin{cases} y_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1k} x_k \\ y_i = x_i, \quad \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x) \to \text{apar } y_2,.., y_k.$$

cf P_{k-1} $\exists$ un reper a.î. Q'' are o formă canonică
$$Q''(x) = a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2,\ r = rg\,Q$$

$y_1 = z_1$
$$Q(x) = \underbrace{\frac{1}{g_{11}}}_{a_1} z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2.$$

Def $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ s.n. formă normală

$(p, r-p)$ s.n. signatura

$p \to$ nr „+", $r-p \to$ nr „−"

Prop $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ f. pătratică reală

$\exists$ un reper în V a.î. Q are forma normală.

Dem cf T. Gauss $\Rightarrow$ $\exists\ R$ un reper în V a.î.

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_p x_p^2 + a_{p+1} x_{p+1}^2 + \dots + a_r x_r^2$$

Putem alege $a_1, \dots, a_p > 0$ (altfel sch. indicii)
$a_{p+1}, \dots, a_r < 0$

Fie sch. de reper:

$$y_1 = \sqrt{a_1}\, x_1 \qquad \begin{cases} y_{p+1} = \sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1} \\ \vdots \\ y_r = \sqrt{-a_r}\, x_r \\ y_K = x_K, \quad K = \overline{r+1, n} \end{cases}$$
$$y_p = \sqrt{a_p}\, x_p$$

$$Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Teorema de inerție Sylvester

$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ f.p. reală.

Nr „+" și nr „−" din forma normală reprez. invarianți la sch de reper.

OBS Q pozitiv def $\Longleftrightarrow$ signatura $(n, 0)$; $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Ex1 $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară și $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

matricea asociată în rap cu R_0.

a) $g = ?$ b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată. Este p. def?

SOL

a) $g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$

b) $Q(x) = \underline{x_1^2} + 2x_2^2 + \underline{2x_1x_2} - 2x_2x_3$

$= (x_1+x_2)^2 + \underline{\underline{x_2^2}} - 2\underline{\underline{x_2}}x_3$

$= (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 - x_3^2$

Fie sch. de reper:

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$(2,1)$ signatura Nu este ~~poz~~ p. def.

Ex2 $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3$

a) $G = ?$ (matricea asociată în rap cu R_0)

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. pătratică asociată

c) Să se aducă Q la forma normală

SOL

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $g_{12} = 1 \neq 0$

b) $Q(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ $g_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1,3}$

Fie sch. de reper: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1-y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = \underline{\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)} + \underline{2y_1y_3} + 2y_2y_3$

$$Q(x) = \frac{1}{2}(y_1^2 + 4y_1y_3) - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3$$
$$= \frac{1}{2}(y_1+2y_3)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 - 2y_3^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(y_1+2y_3)^2 - \frac{1}{2}(y_2^2 - 4y_2y_3) - 2y_3^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(y_1+2y_3)^2 - \frac{1}{2}(y_2 - 2y_3)^2$$

Fie sch de reper

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1+2y_3) \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2-2y_3) \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$Q(x) = z_1^2 - z_2^2$

$(1,1)$ nu e poz. def.

Metoda Jacobi

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ f. p. reală.

Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V aî $G = (g_{ij})_{i,j}$ matricea asociată în rap cu R, verifică:

$\Delta_1 = \det(g_{11})$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_n = \det(G)$

sunt nenuli.

Atunci $\exists$ un reper în V aî

$$Q = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Mai mult, dacă $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, at Q este poz. def.

OBS a) Met. Jacobi este restrictivă

b) Met Gauss se poate aplica întotdeauna.