

EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA I

I. Fie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\} \cup \{(0, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinati interiorul, aderenta si multimea punctelor de acumulare ale multimii A . Decideti daca A este inchisa, deschisa sau compacta. Decideti daca aderenta multimii A este compacta. Justificati raspunsurile!

II. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{daca } x < 0 \\ 2x, & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Studiati continuitatea si derivabilitatea lui f .
- 2) Studiati uniform continuitatea functiei f pe \mathbb{R} si pe $(-\infty, 0)$.

III. Pentru $n \geq 1$, fie $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3}$$

Sa se studieze convergenta simpla si convergenta uniforma a sirului $(f_n)_{n \geq 1}$ pe $[0, 2]$ si $[2, \infty)$.

IV. Cu ajutorul sumelor Darboux si criteriului de integrabilitate al lui Darboux aratati ca functia

$$f : \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$$

este integrabila Riemann si calculati

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx.$$

Atentie: Este obligatoriu sa folositi sume Darboux si criteriul lui Darboux! Mentionez ca rezolvarea **nu se puncteaza** in cazul in care folositi alte teoreme precum: orice functie monotona sau continua este integrabila Riemann, formula Leibniz-Newton sau Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

V. Studiati convergenta seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \right)$$

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 5 note. Toate raspunsurile trebuie justificate!

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU

GRUPA: 113

SUBIECT: AM-142

Examen analiză 27.01.2021.

$$I \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\} \cup \{(0, 2^{-m}) \mid m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\} \cup \{(0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{4}), \dots, (0, \frac{1}{2^n})\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \eta > 0 \text{ \textit{a\c{u}} } (x-\eta, x+\eta) \subset A\}$$

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

$$\exists \eta > 0 \text{ \textit{a\c{u}} } (x-\eta, x+\eta) \subset A \quad \forall x \in \overset{\circ}{A}$$

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall) V \in \mathbb{N}(x) \quad V \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\} \cup B_1(0, 0)$$

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists) V \in \mathcal{O}(x) \quad V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$$

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\} \cup \{0, 0\}$$

A nu este nici deschisă nici închisă

A nu este deschisă deoarece $A \neq \overset{\circ}{A}$

A nu este închisă deoarece $A \neq \overline{A} \Rightarrow A$ nu este compactă

\overline{A} nu este închisă $\Rightarrow \overline{A}$ nu este compactă

$$II \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x < 0 \\ 2x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

1.) Studiați continuitatea și derivabilitatea lui f .

2.) Studiați uniform continuitatea lui f pe \mathbb{R} și pe $(-\infty, 0)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{\text{mărginită}} = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x=0 \quad (1)$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$ deoarece f se obține prin operații algebrice de compunere cu funcții elementare continue (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R}

$$f'(x) = \begin{cases} (x \sin \frac{1}{x})' = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} & x < 0 \\ (2x)' = 2 & x > 0 \end{cases}$$

$$(x \sin \frac{1}{x})' = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{— nu există această}$$

limită, și deci, f nu este derivabilă în $x=0$

$[-1, 0]$ — interval compact } $\Rightarrow f$ uniform continuă pe $[-1, 0]$
 f continuă

Pe $(-\infty, -1]$ avem:

$$|f'(x)| = \left| \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \right| \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \right| \leq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'$ — mărginită, deci f este uniform continuă pe $(-\infty, -1]$

$\Rightarrow f$ uniform continuă pe $(-\infty, 0]$ } $\Rightarrow f$ uniform continuă pe \mathbb{R} .
 f uniform continuă și pentru $x > 0$

$$\text{II } m \geq 1 \quad f_m: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f_m(x) = \frac{6 - 2mx + 2m^3x^3}{3 + m^3x^3}$$

Studiam convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n \geq 1}$ pe $[0, 2]$ și $[2, \infty)$

- convergența simplă

Fie $x \in [0, 2]$ — fixat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3} = \frac{2x^3}{x^3} = 2 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\Delta} f, \text{ unde}$$

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2$$

- convergența uniformă

$$\text{Calculăm } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 2]} \left| \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3} - 2 \right| =$$

$$= \sup_{x \in [0, 2]} \left| \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3 - 6 - 2n^3x^3}{3 + n^3x^3} \right| = \sup_{x \in [0, 2]} \left| \frac{-2nx}{3 + n^3x^3} \right| = \sup_{x \in [0, 2]} \frac{2nx}{3 + n^3x^3}$$

$$\text{Alăg } x \rightarrow x_0 = \frac{1}{n} \Rightarrow \sup_{x \in [0, 2]} \frac{2nx}{3 + n^3x^3} \geq \sup_{x \in [0, 2]} \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{3 + n^3 \left(\frac{1}{n}\right)^3} = \sup_{x \in [0, 2]} \frac{2}{3 + 1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$

-convergența simplă

Fie $x \in [2, \infty)$ - fixat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3} = \frac{2x^3}{x^3} = 2 \Rightarrow f_n \xrightarrow{p} f, \text{ unde}$$

$$f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2$$

-convergența uniformă

$$\sup_{x \in [2, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [2, \infty)} \frac{2nx}{3 + n^3x^3} \rightarrow 0 \quad \forall x \in [2, \infty) \text{ gradul numitorului} > \text{decat gradul numărătorului}$$

$$\text{deci } f_n \xrightarrow{u} f \text{ pentru } x \in [2, \infty)$$

$$\text{II } f: \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x$$

Fie $\Delta_n = (-\frac{\pi}{3} = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 0)$ - diviziune a lui $[-\frac{\pi}{3}, 0]$

Din crt. Darboux $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$ aî. $\forall \Delta$ cu $S_\Delta(f) - D_\Delta(f) \leq \varepsilon$
și f mărg $\Rightarrow f$ integrabilă.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \Rightarrow f(x) = \cos x - \text{mărginită}$$

$$m_i = \inf\{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = -1$$

$$M_i = \sup\{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1$$

$$D_\Delta(f) = \sum_{i=1}^m m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m (x_{i-1} - x_i)$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^m M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})$$

$$\cos - \text{funcție pară} \Rightarrow D_\Delta(f) = S_\Delta(f) \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx \rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

V Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\right) =$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln(\sqrt{n^2+1}+1) - \ln(\sqrt{n^2+1})\right) =$

Fie $x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\rightarrow 0}\right) = \ln 1 = 0$

$1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{2}}\right)$