Examen[1] la Algebră Linară, seria 10, 19.02.2024

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: _____

Subiectul 1.

a) Daţi exemplu, dacă există, de matrice $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a cărei forma eşalon redusă nu este I_3. **(2p)**

b) Decideţi dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă (*i.e.* demonstraţi-o sau daţi un contraexemplu): *Dacă A şi B sunt matrice $n \times n$ care au aceeaşi formă eşalon redusă, atunci* $\det A = 0 \iff \det B = 0$. **(3p)**

c) Decideţi dacă cele două sisteme de ecuaţii liniare de mai jos sunt echivalente:

$$(S_1): \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases} ; \quad (S_2): \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 7x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} .$$ **(3p)**

d) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice ale căror intrări sunt toate numere întregi. Ştiind că A este neinversabilă, demonstraţi că $\det(A + 2024B)$ este un număr par. **(3p)**

Subiectul 2.

a) În $\mathbb{R}^n$ cu structura uzuală de spaţiu vectorial, fie U mulţimea vectorilor care au suma coordonatelor 0 şi $V = \langle(1, 1, ..., 1)\rangle_{\mathbb{R}}$. Demonstraţi că $U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ şi verificaţi dacă $U \oplus V = \mathbb{R}^n$. **(2p)**

b) Fie $\mathcal{P}_2$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult 2. Definim funcţia $T : P_2 \mapsto P_2$, $T(f(x)) = f'(x) + 3f(x)$. Demonstraţi că T este o aplicaţie liniară inversabilă şi calculaţi $T^{-1}(2 - 3x + x^2)$. **(3p)**

c) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demonstraţi că există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având $\operatorname{rang}(B) = 1$ astfel încât $AB = BA$. **(3p)**

d) Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang k. Demonstraţi că A poate fi scrisă ca o sumă de k matrice de rang 1. **(3p)**

Subiectul 3. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu J_n matricea $n \times n$ având 1 pe fiecare poziţie şi I_n matricea identitate. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, considerăm matricea $A_n(a, b) = (a - b)I_n + bJ_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Eventual folosind transformări elementare asupra matricei $A_n(a, b)$, arătaţi că

$$\det(A_n(a, b)) = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b), \ \forall n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}.$$ **(2p)**

b) Folosind punctul anterior, demonstraţi că valorile proprii ale matricei $A_n(a, b)$ sunt $a - b$ şi $a + (n - 1)b$. Aflaţi multiplicităţile lor algebrice. **(3p)**

c) Decideţi dacă $A_n(a, b)$ este diagonalizabilă (peste $\mathbb{R}$). Justificaţi răspunsul. **(3p)**

d) Fie $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ două izomorfisme liniare diagonalizabile astfel încât $f \circ g = g \circ f$. Demonstraţi că există o bază a lui $\mathbb{R}^n$ în raport cu care f şi g au simultan formă diagonală. **(3p)**

Subiectul 4.

a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că, în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$, vectorii linie ai lui A formează o bază ortonormală dacă şi numai dacă vectorii coloană ai lui A formează o bază ortonormală. **(2p)**

b) Demonstraţi că

$$H : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}, \ H(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

este un produs scalar. Pentru $n = 2$, folosind procedeul Gram-Schmidt, determinaţi o bază ortonormală plecând de la baza canonică $\{1, X, X^2\}$ a lui $\mathcal{P}_2$. **(3p)**

c) Pentru $n = 3$, determinaţi proiecţia ortogonală a lui $f_1(x) = x^3$ pe $\mathcal{P}_2$. **(3p)**

d) Fie $V = C([-1, 1])$ spaţiul vectorial al funcţiilor continue definite pe intervalul $[-1, 1]$ cu valori în $\mathbb{R}$ şi notăm cu W_p, respectiv W_i, subspaţiul funcţiilor pare, respectiv impare al lui V. Arătaţi că în raport cu produsul scalar definit mai sus avem că $W_p^\perp = W_i$. **(3p)**

[1] **Scrieţi subiectele pe foi separate. Toate răspunsurile trebuie justificate. Nota lucrării este media notelor celor 4 subiecte. Nu există punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!**