Seminar 4-5

① Fie A un inel comutativ și $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in A[X]$.

Să se arate că:

(i) f este nilpotent în $A[X] \Leftrightarrow a_0, \dots, a_n$ sunt nilpotente în A.

(ii) $f \in U(A[X]) \Leftrightarrow a_0 \in U(A)$ și $a_1, \dots, a_n$ sunt nilpotente.

(iii) f este divizor al lui zero în $A[X] \Leftrightarrow$ există $a \in A$, $a \neq 0$, cu $af = 0$.

(iv) f este idempotent în $A[X] \Leftrightarrow a_0$ este idempotent în A și $a_1 = \dots = a_n = 0$.

② Să se determine numărul polinoamelor de grad 2 din $\mathbb{Z}_{36}[X]$ care sunt:

(i) nilpotente; (ii) inversabile.

③ Fie A un inel comutativ și $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in A[[X]]$.

Să se arate că:

(i) $f \in U(A[[X]]) \Leftrightarrow a_0 \in U(A)$.

(ii) Dacă f este element nilpotent în $A[[X]]$, atunci $a_0, a_1, \dots$ sunt nilpotente în A.

Este adevărat și reciproc?

(iii) f este idempotent în $A[[X]] \iff a_0$ este idempotent în A şi $a_i = 0$ pt. orice $i \geq 1$.

④ Fie K un corp comutativ. Să se arate că orice ideal propriu (adică $\neq K[[X]]$) şi nenul al inelului $K[[X]]$ este de forma (X^n), pentru un $n \in \mathbb{N}^*$. Deduceţi că inelul $K[[X]]$ este local.

⑤ Fie A un inel comutativ. Să se arate că inelul $A[X]$ nu este local.

⑥ Fie A un inel comutativ şi $a \in A$. Să se arate că există un izomorfism de inele $\frac{A[X]}{(X-a)} \simeq A$.

⑦ Să se arate că $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-1)} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

⑧ Considerăm inelul factor $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-1)}$, în care notăm cu $\hat{f}$ clasa lui f, unde $f \in \mathbb{Z}[X]$.

(i) Dacă $I = (X-1)$ şi $J = (X+1)$, arătaţi că $I + J \neq \mathbb{Z}[X]$.

(ii) Arătaţi că $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-1)} = \{\widehat{a+bX} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi că pt. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avem $\widehat{a+bX} = \widehat{c+dX} \iff a = c$ şi $b = d$.

(iii) Să se determine idempotenţii din $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-1)}$.

(iv) Arătaţi că $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-1)} \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

⑨ Să se arate că: (i) $\frac{\mathbb{C}[X]}{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$; (ii) $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C}$.