Seminarul 6 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Rezultate utile din curs

Teorema 1.1: *(de corespondenţă a idealelor)*

Fie R, S inele și $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele.

Atunci există o corespondență bijectivă între idealele lui S și idealele lui R care conțin $\operatorname{Ker} f$ i.e. *funcțiile*

$$\varphi : \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\} \to \{J \trianglelefteq S\},\ \varphi(I) = f(I),$$
$$\psi : \{J \trianglelefteq S\} \to \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\},\ \psi(J) = f^{-1}(J).$$

sunt mutual inverse: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}, \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Teorema 1.2: *(fundamentală de izomorfism)*

Fie R, S inele comutative și $f : R \to S$ un morfism de inele.

Atunci

$$R/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f.$$

În plus, acest izomorfism este dat de $R/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Im} f$, $\overline{f}(\hat{h}) = f(x)$.

Teorema 1.3: *(Lema chineză a resturilor)*

Fie R inel comutativ şi $I_1, ..., I_n \trianglelefteq R$ ideale astfel încât $I_i + I_j = R$, pentru orice $i \neq j$ (două câte două comaximale).

Atunci $I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_n = I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ şi

$$R/I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n = R/I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_n \simeq R/I_1 \times R/I_2 \times ... \times R/I_n.$$

2 Inele de polinoame & Inelul factor (cont.)

Exercițiul 2.1: (Teorema I de izomorfism) Folosiți Teorema Fundamentală de Izomorfism pentru a demonstra:

Fie R un inel și $I \subset J$ ideale ale lui R. Atunci

$$\frac{R/I}{J/I} \simeq R/J.$$

Observația 2.2: Dacă $\varphi : R \to S$ este un izomorfism de inele, $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq S$ astfel încât $\varphi(I) = J$, atunci $R/I \simeq S/J$.

Exercițiul 2.3: Calculați:

a) $\mathbb{Z}[X]/(2, X)$

b) $\mathbb{Z}[X]/(7, X-2)$

c) $\mathbb{Z}[X]/(X+5, X-2)$

d) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$

e) $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2+X+1)$

f) $\mathbb{Z}[i]/(7+i)$

g) $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$

Pentru fiecare subpunct, precizaţi dacă idealul la care care s-a factorizat este maximal.

Exercițiul 2.4: Considerăm idealul $I = (2, X^2+1) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că:

a) I nu este ideal principal.

b) $\mathbb{Z}[X]/I$ este inel cu 4 elemente, care nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Exercițiul 2.5:

a) Pentru p, q prime, demonstraţi că $\mathbb{Z}[X]/(X^2-p) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2-q)$ dacă şi numai dacă $p = q$.

b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(6+\sqrt{7})$ este un corp cu 29 elemente.

Exercițiul 2.6: Fie $f = X^2$ şi $g = 2X$ în $\mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că nu există $q, r \in \mathbb{Z}[X]$ cu $\deg r < \deg g$ astfel încât $f = gq + r$.

Exercițiul 2.7: Fie a, b, c numere reale nenule astfel încât $a+b+c \neq 0$ şi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Demonstraţi că pentru orice număr întreg impar n,

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

Exercițiul 2.8: Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad n astfel încât $P(k) = \frac{k}{k+1}$, $\forall k = 0, 1, ..., n$. Calculaţi $P(n+1)$.

Exercițiul 2.9: Fie p prim. Să se arate că:

a) Mulțimea $\mathbb{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}$ este grup cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_p$. Deduceți că $a^{p-1} = \hat{1}$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}$.

b) Polinomul $f = X^{p-1} - \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$ are rădăcinile simple $\hat{1}, ...\widehat{p-1}$.

c) Folosind relațiile lui Viète, deduceți Teorema lui Wilson:

$$(p-1)! \equiv -1 (\text{mod } p).$$

d) Deduceţi că -1 este rest pătratic modulo $p \iff p = 2$ sau $p \equiv 1 \pmod 4$.

Exercițiul 2.10: Fie idealul $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că I nu este ideal principal şi că ${\mathbb{Z}[X]}\diagup{I}$ nu este corp.

Exercițiul 2.11: Fie $P \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$,

$$P = 3X_1^2X_2^2X_3 + 7X_1^3X_2^2X_3 + 5X_1^6 - 3X_1X_2X_3 - 25X_3^3 + 1.$$

Scrieți P ca polinom în $\mathbb{Z}[X_2, X_3][X_1]$, ca polinom în $\mathbb{Z}[X_1, X_3][X_2]$ și ca suma de componente omogene (*i.e.* de același grad).

Exercițiul 2.12: Fie R un inel comutativ. Demonstraţi că

$$R[X,Y]\diagup(X-Y) \simeq R[X].$$

Generalizaţi.

Exercițiul 2.13: Demonstrați că $K[X,Y]\diagup(Y^2-X)$ și $K[X,Y]\diagup(Y^2-X^2)$ nu sunt izomorfe, pentru orice corp K.

Exercițiul 2.14:

a) Fie K un corp și $a_1, ..., a_n \in K$. Demonstrați că idealul

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$$

este maximal.

b) Daţi exemplu de corp K pentru care $K[X_1, ..., X_n]$ are şi alte ideale maximale.

Exercițiul 2.15: Fie K un corp. Când este polinomul

$$P = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3) \in K[X_1, X_2, X_3]$$

simetric?

Exercițiul 2.16: Fie R un domeniu de integritate infinit și $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Presupunem că există o submulțime $A = A_1 \times ... \times A_n \subset R^n$ cu A_i infinite pentru orice $1 \leq i \leq n$ astfel încât $f(x) = 0$ pentru orice $x \in A$. Demonstrați că $f = 0$.

Mai rămâne adevărată afirmația dacă știm doar că $f(x) = 0$ pentru orice x dintr-o submulțime infinită a lui R^n?