Definiție. O aplicație $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s.n. liniară dacă $T(x+y) = T(x) + T(y)$ și $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ și $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Propoziție. Dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o aplicație liniară atunci T este continuă.

Dem. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad , \quad \|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T(e_i) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|Te_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2}}_{M}$$

$$\|Tx\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \le M\|x-y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x, \quad \|Tx_n - Tx\| \le M\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} Tx$$

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid T \text{ liniară}\}$ – sp. vectorial peste $\mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$T, \quad \|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \le 1\} = \inf\{M > 0 \mid \|Tx\| \le M\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$T \to \|T\|$ este o normă pe $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Derivate parțiale

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

D deschisă $\Rightarrow \exists\, r > 0,\ B(a,r) \subset D$

$t \in \mathbb{R}$, $\quad a + tv \in B(a,r) \Longleftrightarrow \|a + tv - a\| = |t| \cdot \|v\| < r$

dacă $t \in \left(-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right)$ atunci $a + tv \in B(a,r)$.

Definiție: Spunem că f este derivabilă după vectorul v (sau după direcția v dacă $\|v\| = 1$) în punctul a dacă există și este finită

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

În acest caz limita se notează cu $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ și se numește derivata funcției f după vectorul v în punctul a.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Obs: $g : (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a+tv)$.

f deriv după vectorul v în $a \Longleftrightarrow$ funcția g este deriv în zero și

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=x+y^2,\quad a=(1,1),\quad v=(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big((1,1)+t(1,2)\big)-f(1,1)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1+2t)-f(1,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+t+(1+2t)^2-2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t+4t^2+4t}{t}=5.$$

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - baza canonică

Definiție - Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu x_i (unde $i \in \{1,2,\dots,n\}$) în punctul a dacă f este derivabilă după vectorul e_i în punctul a.

În acest caz $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ și se numește derivată parțială a fct. f în raport cu x_i în pct a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots a_i, \ldots, a_n)}{t}$$

$$= \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n)}{x_i - a_i}$$

$f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0, y_0, z_0) \in D$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}$$

<u>Def</u> Spunem că $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este derivabilă parțial pe D în raport cu x_i dacă f este derivabilă parțial în raport cu x_i în orice pct din D.

Funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$, $D \ni x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

se numește derivata parțială a lui f în raport cu x_i

$$f(x,y,z) = e^{x^2 - yz} + x^2 y + \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x e^{x^2 - yz} + 2xy + \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -z \cdot e^{x^2 - yz} + x^2 + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y e^{x^2 - yz}$$

Definiție. Dacă $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în orice punct din D în raport cu toate variabilele x_i și funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue pe D spunem că f este de clasă C^1 pe D și scriem $f \in C^1(D)$

Definiție. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.
Spunem că f este derivabilă după vectorul v în $a \in D$ dacă $f_1, f_2 \dots, f_m$ sunt derivabile după vect. v în a.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(a) \right).$$

$$v = e_i \,;\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$ cu cond ca limita să existe în $\mathbb{R}^m$

$$\parallel$$

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{f_1(a+tv) - f_1(a)}{t}, \frac{f_2(a+tv) - f_2(a)}{t}, \dots, \frac{f_m(a+tv) - f_m(a)}{t} \right)$$

Spunem $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ este de clasă C^1 pe D și scriem $f \in C^1(D)$ dacă toate funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele x_i în punctul a, matricea

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

se numește matricea Jacobiană a fct. f în pct a.

Dacă $m = n$, numărul $\det J_f(a) = \dfrac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_m)}$

se numește Jacobianul lui f în pct a.

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\underbrace{xy}_{f_1}, \underbrace{x^2 + y^3 x}_{f_2}, \underbrace{e^{x^2 y}}_{f_3})$.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x + y^3 & 3y^2 x \\ 2xy e^{x^2 y} & x^2 e^{x^2 y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(y, 2x + y^3, 2xy e^{x^2 y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(x, 3y^2 x, x^2 e^{x^2 y}\right)$$

Funcții diferențiabile

Propoziție. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$. Dacă există $T, T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicații liniare a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T_1(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

atunci $T = T_1$

Dem. $a \in D$, D deschisă $\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(a,r) \subset D$.

Fie $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $a + tz \in B(a,r) \iff |t| \|z\| < r \iff |t| < \frac{r}{\|z\|}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{T(x-a) - T_1(x-a)}{\|x-a\|} \qquad (1)$$

Fie $0 < t < \frac{r}{\|z\|}$, $x = a + tz$

$$T(z) - T_1(z) = \frac{T(\cancel{a} + tz - \cancel{a}) - T_1(a + tz - a)}{\|\cancel{a} + tz - \cancel{a}\|} = \frac{t(T(z) - T_1(z))}{t\|z\|} \cdot \|z\|$$

Trecând la limită cu $t \to 0$ din (1) rezultă

$$T(z) = T_1(z).$$

Definiție. Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$. Spunem că f este diferențiabilă în pct a dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Din Prop. anterioară rezultă că, dacă există T este unică;

În acest caz T se not. cu $df(a)$ și se numește diferențiala funcției f în punctul a.

Exemplu. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară. Atunci T este diferențiabilă pt orice $a \in \mathbb{R}^n$ și $dT(a) = T$.

$f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în $a \in D$.

$\exists\, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a.î. $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$.

$$\varepsilon_f(x) \doteq \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \in D \setminus \{a\} \\ 0, & x = a \end{cases}$$

$\lim_{x \to a} \varepsilon_f(x) = \varepsilon_f(a) = 0$

<u>Propoziție</u> Funcția $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în $a \in D$ dacă și numai dacă ~~există~~ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniară și $\varepsilon_f : D \to \mathbb{R}^m$ cu $\lim_{x \to a} \varepsilon_f(x) = \varepsilon_f(a) = 0$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \varepsilon_f(x) \cdot \|x-a\|, \quad \forall x \in D.$$

<u>Propoziție</u>. Dacă $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în $a \in D$ atunci f este continuă în a.

<u>Dem</u>: f diferențiabilă în $a \Rightarrow$ există T și ε_f ca în Prop. anterioară.

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|T(x-a)\| + \|\varepsilon_f(x)\| \cdot \|x-a\| \xrightarrow{x \to a} 0$$

$$\lim_{x \to a} \|T(x-a)\| = 0. \quad (T \text{ continuă})$$

Propoziție Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $x_0\in(a,b)$. ~~Atunci~~ f este diferențiabilă în $x_0 \Leftrightarrow f$ derivabilă în x_0. În acest caz

$$df(x_0)(t) = f'(x_0)\cdot t$$

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

$$\Updownarrow$$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0 \Rightarrow f$ diferențiabilă în x_0 și $df(x_0)(t) = f'(x_0)t$.

"$\Rightarrow$" exercițiu

Propoziție. Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă în $a \in D$ și $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Atunci f este derivabilă după vectorul v în punctul a și

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a)(v).$$

Dem. Fie $r > 0$ ai $B(a,r) \subset D$. Pt $t \in \left(-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right)$, $a + tv \in B(a,r)$;

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \quad \text{Atunci}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - df(a)(tv)}{|t| \cdot \|v\|} = 0.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-t\,df(a)(v)}{|t|}=0 .$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-t\,df(a)(v)}{t}=0 .$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-df(a)(v)\right)=0 .$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}= df(a)(v) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a)= df(a)(v)$$

Dacă $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în $a \in D$ atunci f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele x_i și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = df(a)(e_i).$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$

$$df(a)(u) = df(a)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, df(a)(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot u_i$$

$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $dx_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_i$, $(u_1, \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$

Cu această notație:

$$df(a)(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(u)$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n .$$

$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, f diferențiabilă în $(x_0, y_0, z_0) \in D$.

$$df(x_0, y_0, z_0)(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot w$$

$$df(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

Teoremă (Cond. suficientă de diferențiabilitate)

Fie $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$.

Dacă există V o vecinătate a punctului a astfel încât derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ există în orice punct din V și sunt continue în a, atunci f este diferențiabilă în a și

$$df(a)(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot u_i, \quad \forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

<u>Exemplu</u> : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (x^2 + xy + yz,\ x + xyz^2) \quad , \quad df(1,2,1) = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (2x + y,\ 1 + yz^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x + z,\ xz^2) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (z,\ 2xyz)$$

Derivatele parțiale sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ și deci f este diferențiabilă în orice punct din $\mathbb{R}^3$.

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y & x+z & y \\ 1+yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{pmatrix}$$

$$J_f(1,2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$df(1,2,1)(u,v,w) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u+2v+2w \\ 3u+v+4w \end{pmatrix}$$

Exerciții

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=0. \end{cases}$

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad h(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\dfrac{x}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0. \end{cases}$

Pentru fiecare funcție studiați continuitatea, calculați derivatele parțiale și studiați diferențiabilitatea.