**Examen la analiză matematică**[1]
**an I, sem. I, grupele 101, 102, 103, 104**
**6.02.2019**

**Numele şi prenumele** ...........................................................

**Grupa** ..............

**Punctaj seminar** ............

**Subiectul 1. a)** Definiţi noţiunea de funcţie uniform continuă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}$. Definiţi noţiunea de mulţime compactă într-un spaţiu topologic.

**b)** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $U, V \subset \mathbb{R}$ două vecinătăţi ale punctului $a$. Demonstraţi că $U \cap V$ şi $U \cup V$ sunt vecinătăţi ale lui $a$.

**c)** Daţi exemplu de mulţimi nevide $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că $A$ este compactă şi nu este conexă, iar $B$ este conexă şi nu este compactă. Justificaţi alegerea făcută.

($0,5 + 0,5 + 1$ **= 2 pct.**)

**Subiectul 2.** Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n+1)} x^n \right)^2$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in [0, \infty)$.

(**2 pct.**)

**Subiectul 3. a)** Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}, & \text{dacă } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiaţi continuitatea funcţiei $f$.

**b)** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că funcţia $f$ este bijectivă.

($1 + 1$ **= 2 pct.**)

**Subiectul 4.** Considerăm şirul de funcţii $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$ pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n \geq 1}$ pe $[0, \infty)$ şi $[1, \infty)$.

(**2 pct.**)

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate. Se acordă 1 punct din oficiu. Succes!**