Seminarul 12 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Polinoame ireductibile

Exercițiul 1.1: Fie K un corp comutativ şi $a, b \in K, a \neq 0$. Arătaţi că $f(X) \in K[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă $f(aX + b) \in K[X]$ este ireductibil.

Exercițiul 1.2: Demonstraţi că următoarele polinoame sunt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$:

a) $X^4 - 4X^3 + 6$;

b) $X^n - 2$;

c) $X^6 + 30X^5 - 15X^3 + 6X - 120$;

d) $\frac{X^p-1}{X-1} = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + 1$ pentru p prim;

e) $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 2X + 1$;

f) $\frac{(X+2)^p-2^p}{X}$ pentru p prim, $p \neq 2$.

Exercițiul 1.3*: Demonstraţi că $X^2 - YZ \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ şi $X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$ sunt ireductibile.

Exercițiul 1.4: Spunem că un polinom cu coeficienţi întregi $f(X)$ este *Eisenstein modulo* p, unde p este un număr prim, dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(X + a)$ este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein aplicat numărului prim p.

Determinaţi toate numerele prime p pentru care $f(X) = X^3 + 65$ este *Eisenstein modulo* p. În plus, pentru fiecare astfel de p precizaţi şi un $a \in \mathbb{Z}$ ca mai sus.

Exercițiul 1.5: Fie K un corp comutativ şi $f(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in K[X]$ cu $a_0 \neq 0$. Arătaţi că f este ireductibil dacă şi numai dacă $a_n + a_{n-1}X + ... + a_1X^{n-1} + a_0X^n \in K[X]$ este ireductibil.

Exercițiul 1.6: Demonstraţi că următoarele polinoame sunt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$:

a) $6X^4 - 4X + 1$;

b) $120X^6 + 6X^5 - 15X^3 + 30X + 1$;

c) $X^4 + 2X^3 + 6X^2 + 4X + 1$.

Exercițiul 1.7: Demonstraţi că $X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă n este prim.

Exercițiul 1.8: Scrieţi factorizarea polinoamelor $X^n - 1, 1 \leq n \leq 8$, în:

a) $\mathbb{Q}[X]$;

b) $\mathbb{Z}_2[X]$;

c) $\mathbb{Z}_3[X]$.

Exercițiul 1.9: Fie $f = X^9 + X^8 + X^6 + X + \hat{1}$ şi $g = X^9 + X^8 + X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$. Determinaţi (f, g) şi scrieţi f şi g ca produs de factori ireductibili.

Exercițiul 1.10: Decideţi dacă polinoamele următoare sunt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$:

a) $X^3 + X + 2$;

b) $X^3 + X + 1$;

c) $X^3 + 2X + 2$;

d) $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 4X - 3$;

e) $X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3$;

f) $X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 6X + 1$;

g) $X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 6X - 1$;

h) $X^4 - 2X^3 + 6X^2 + 4X - 2$;

i) $X^4 + 6X^3 + 15X^2 + 9X + 3$;

j) $X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 5$.

Exercițiul 1.11: Fie p prim şi $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $f(X) = X^{p^n} + p - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Exercițiul 1.12: Demonstraţi că polinomul $f(X) = (X-1)(X-2)...(X-n)+1 \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil pentru $n \neq 4$.

Exercițiul 1.13: Dacă $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ sunt distincte două câte două, atunci polinomul $f(X) = (X-a_1)^2(X-a_2)^2...(X-a_n)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

2 Criterii de ireductibilitate pentru polinoame

Propoziția 2.1: *Fie R un domeniu şi $f \in R[X]$, $\deg f \geq 2$. Dacă f are o rădăcină în R, atunci este reductibil în $R[X]$.*

Propoziția 2.2: *Fie R un domeniu şi $f \in R[X]$ monic. Dacă $\deg f = 2$ sau 3, atunci f este ireductibil în $R[X]$ dacă şi numai dacă nu are rădăcini în R.*

Propoziția 2.3: *Fie $f = a_nX^n + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină a lui f cu $(r, s) = 1$, atunci $r \mid a_0$ şi $s \mid a_n$.*

Propoziția 2.4: ("Schimbare de variabile") *Fie K un corp comutativ şi $a, b \in K, a \neq 0$. Atunci $f(X) \in K[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă $f(aX + b) \in K[X]$ este ireductibil.*

Propoziția 2.5: *Fie K un corp comutativ. Atunci $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in K[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă $a_n + a_{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in K[X]$ este ireductibil.*

Teorema 2.6: (Lema lui Gauss pentru $\mathbb{Z}$) *Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$. Presupunem că cel mai mare divizor comun al coeficienţilor lui f este 1.*

Atunci f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X] \iff f$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Teorema 2.7: (Lema lui Gauss) *Fie R inel factorial şi $f \in R[X]$. Presupunem că cel mai mare divizor comun al coeficienţilor lui f este 1.*

Atunci f este ireductibil în $R[X] \iff f$ este ireductibil în $Q(R)[X]$.

Propoziția 2.8: (Criteriul lui Eisenstein) *Fie p prim şi $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 1$. Presupunem că $p \mid a_k$ pentru orice $0 \leq k \leq n-1$ şi $p^2 \nmid a_0$. Atunci f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X] \iff$ ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.*

Propoziția 2.9: (Criteriul lui Eisenstein (variantă)) *Fie p prim şi $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, $n \geq 1$. Presupunem că $p \nmid a_n$, $p \mid a_k$ pentru orice $0 \leq k \leq n-1$ şi $p^2 \nmid a_0$. Atunci f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.*

Propoziția 2.10: (Criteriul lui Eisenstein, limbaj de ideale prime)

a) Fie R un domeniu şi $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in R[X]$ un polinom ***monic****.*

Presupunem că există $P \trianglelefteq R$ un ideal prim astfel încât $a_k \in P$ pentru orice $0 \leq k \leq n-1$ dar $a_0 \notin P^2$. Atunci f este ireductibil în $R[X]$.

b) Fie R un inel factorial şi $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in R[X]$.

Presupunem că există $P \trianglelefteq R$ un ideal prim astfel încât $a_n \notin P$, $a_k \in P$ pentru orice $0 \leq k \leq n-1$ dar $a_0 \notin P^2$. Atunci f este ireductibil în $Q(R)[X]$.

Propoziția 2.11: (Criteriul reducerii) *Fie R un domeniu şi $I \trianglelefteq R, I \neq R$. Dacă $f \in R[X]$* ***monic*** *este ireductibil în $\left(R/I\right)[X]$, atunci este ireductibil în $R[X]$.*

Teorema 2.12: (Criteriul lui Cohn) *Fie $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ şi $p \in \mathbb{N}$ prim a cărui scriere în baza b este*

$$p = a_0 + a_1b + a_2b^2 + ... + a_nb^n,\ 0 \leq a_i < b.$$

Atunci polinomul $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ este ireductibil (în $\mathbb{Z}[X]$ şi $\mathbb{Q}[X]$).