1) Arătați că ecuația

$$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$$

definește implicit funcția $y=y(x)$ într-o vecinătate a punctului $(1,-1)$. Determinați $y'(1)$, $y''(1)$ și polinomul Taylor de grad 2 asociat funcției y în pct. $x=1$.

Soluție $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=6x(x^2+y^2)^2-6x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=6y(x^2+y^2)^2-6y$$

(i) F de clasă C^2

(ii) $F(1,-1)=0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)=-6\cdot 4+6=-18\neq 0$

Atunci există U o vecinătate deschisă a lui 1, există V o vecinătate deschisă a lui -1 și o unică funcție $y=y(x)$, $y:U\to V$ de clasă C^2 a.î.

(1) $y(1)=-1$

(2) $F(x,y(x))=0, \forall x\in U \Leftrightarrow (x^2+y(x)^2)^3-3(x^2+y(x)^2)-2=0, \forall x\in U$

$$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, \forall x\in U$$

$$y'(x)=-\frac{6x(x^2+y(x)^2)^2-6x}{6y(x)(x^2+y(x)^2)^2-6y(x)}=-\frac{x}{y(x)}, \quad y'(1)=-\frac{1}{y(1)}=-\frac{1}{-1}=1$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \quad \forall x \in U$$

$$y''(x) = -\frac{y(x) - x\,y'(x)}{y(x)^2}, \quad \forall x \in U.$$

$$y''(1) = -\frac{y(1) - 1 \cdot y'(1)}{y(1)^2} = -\frac{(-1) - 1 \cdot 1}{1^2} = -\frac{-2}{1} = 2.$$

$$T_2(x) = y(1) + y'(1) \cdot (x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$= -1 + (x-1) + (x-1)^2 = x^2 - x - 1$$

Sau: Pt a calcula $y'(x)$ derivăm în raport cu x relația

$$\left(x^2+y(x)^2\right)^3-3\left(x^2+y(x)^2\right)-2=0,\ \forall x\in U$$

$$3\left(x^2+y^2(x)\right)^2\cdot\left(2x+2y'(x)y(x)\right)-3\left(2x+2y'(x)y(x)\right)=0,\ \forall x\in U$$

$$6x\left(x^2+y(x)^2\right)^2+6y'(x)\,y(x)\left(x^2+y(x)^2\right)^2-6x-6y(x)y'(x)=0,\ \forall x\in U$$

$$y'(x)=\frac{6x-6x\left(x^2+y(x)^2\right)^2}{-6y(x)+6y(x)\left(x^2+y(x)^2\right)^2}=-\frac{x}{y(x)},\ \forall x\in U$$

Observație.

$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$, $t=x^2+y^2$, $t^3-3t-2=0$.

$-1, 2, -1$

$(t+1)^2(t-2)=0$.

$(x^2+y^2+1)^2\cdot(x^2+y^2-2)=0$.

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2=0 \\ y(1)=-1 \end{array}\right| \Rightarrow y(x)=-\sqrt{2-x^2},\ x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, $y'(1)=1$.

2) Arătați că ecuația

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1 = 0$$

definește implicit funcția $z = z(x,y)$ în jurul lui $(1,0,0)$ și calculați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ și $dz(1,0)$.

Rezolvare. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos y - z\sin x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x\sin y + \cos z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -y\sin z + \cos x, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) = \cos 1.$$

(i) F de clasă C^1

(ii) $F(1,0,0) = 0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) \neq 0$.

Atunci exista o vecinatate deschisă U a lui $(1,0)$, există V o vecinătate deschisă a lui 0 și o unică funcție $z = z(x,y)$
$z : U \longrightarrow V$ astfel ca:

1) $z(1,0) = 0$

2) $F(x,y,z(x,y)) = 0, \ \forall (x,y) \in U$ adică

$$x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0, \ \forall (x,y) \in U$$

3) z este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\cos y - z(x,y)\sin x}{-y\sin z(x,y) + \cos x}, \quad \forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\cos z(x,y) - x\sin y}{-y\sin z(x,y) + \cos x}, \quad \forall (x,y) \in U.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\cos 0 - z(1,0)\sin 1}{\cos 1} \overset{z(1,0)=0}{=\!=} -\frac{1}{\cos 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}.$$

Sau Pt a calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$ pe U derivam în raport cu X relația

$$x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0 \quad , \forall (x,y)\in U$$

$$\cos y - y\sin z(x,y)\cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cos x - z(x,y)\sin x = 0 .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{z(x,y)\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z(x,y)} \quad , \forall (x,y)\in U$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}$$

$$dz(1,0)(u,v) = \left(-\frac{1}{\cos 1} \; , -\frac{1}{\cos 1}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{\cos 1}u - \frac{1}{\cos 1}v .$$

$$dz(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}dx - \frac{1}{\cos 1}dy$$

3) Să se determine extremele unei funcții implicite $z=z(x,y)$ definită de ecuația

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

Soluție. $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=10x-2y-2z,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=10y-2x-2z,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=10z-2x-2y$$

F este clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$.

Ecuația $F(x,y,z)=0$ def implicit funcția $z=z(x,y)$ într-o vecinătate a unui pct. $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ dacă

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

dacă (x_0, y_0, z_0) este ca mai sus, există o vecinătate deschisă U_{x_0,y_0} a lui (x_0, y_0), există V_{z_0} o vecinătate deschisă a lui z_0 și o unică funcție $z = z(x,y)$

$z : U_{x_0,y_0} \longrightarrow V_{z_0}$ de clasă C^2 a.î.

$z(x_0, y_0) = z_0$ și $F(x, y, z(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U_{x_0,y_0}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in U_{x_0,y_0}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}.$$

Pentru a determina pct de extrem local ale fct implicite trebuie să rezolvăm sistemul.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\neq 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=0 \end{cases}$$

} pt că trebuie să avem. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0$.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0. \\ 10z-2x-2y\neq 0. \\ 10x-2y-2z=0. \\ 10y-2x-2z=0. \end{cases}$$

Soluțiile sunt $(1,1,4)$, $(-1,-1,-4)$

Fiecare dintre punctele $(1,1,4)$ și $(-1,-1,-4)$ poate fi privit ca pct de forma (x_0, y_0, z_0) de mai sus.

Corespunzătoare lui $(1,1,4)$ avem funcția implicită $z_1 = z_1(x,y)$ cu $z_1(1,1)=4$ și pt care $(1,1)$ este pct critic

Corespunzătoare lui $(-1,-1,-4)$ avem funcția implicită $z_2 = z_2(x,y)$ cu $z_2(-1,-1) = -4$ pt care $(-1,-1)$ este punct critic.

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z_i(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z_i(x,y))} = -\frac{10x-2y-2z_i(x,y)}{10z_i(x,y)-2x-2y} = \frac{-5x+y+z_i(x,y)}{5z_i(x,y)-x-y}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial y}(x,y) = -\frac{10y-2x-2z_i(x,y)}{10z_i(x,y)-2x-2y} = \frac{-5y+x+z_i(x,y)}{5z_i(x,y)-x-y}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y) = \frac{-5x+y+z_i(x,y)}{5z_i(x,y)-x-y}$$

$$z_1(1,1) = 4$$
$$z_2(-1,-1) = -4$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\left(-5+\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y)\right)\left(5z_i(x,y)-x-y\right)-\left(5\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y)-1\right)\left(-5x+y+z_i(x,y)\right)}{\left(5z_i(x,y)-x-y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\left(-5+\frac{\partial z_i}{\partial y}(x,y)\right)\left(5z_i(x,y)-x-y\right)-\left(5\frac{\partial z_0}{\partial y}(x,y)-1\right)\left(x+z_i(x,y)-5y\right)}{\left(5z_i(x,y)-x-y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\left(1+\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y)\right)\left(5z_i(x,y)-x-y\right)-\left(x+z_i(x,y)-5y\right)\left(5\frac{\partial z_i}{\partial x}(x,y)-1\right)}{\left(5z_i(x,y)-x-y\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}(1,1) = -\frac{5}{18}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1) = \frac{1}{18}.$$

$$H_{z_1}(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 z}{\partial x}(1,1) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(1,1)$ este pct de maxem local pt functia z_1 def emplicat în jurul lui $(1,1,4)$

$$H_{z_2}(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}$$

$(-1,-1)$ pct de minim pt fcț implicată z_2

$$H_{z_1}(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 z}{\partial x}(1,1) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (1,1) este pct de maxim local pt funcția z_1 def implicit în jurul lui (1,1,4)

$$H_{z_2}(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}$$

(-1,-1) pct de minim pt fcț implicită z_2