Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

29 mai 2021

Elemente de calcul ştiinţific
Verificare – Matematică, Anul I

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
4. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 10:30–13:00.**
5. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un Reply simplu la emailul în care aţi primit subiectele ca fişier PDF, cu denumirea `NUME_PRENUME_GRUPA.pdf`.
6. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **29 mai 2021, orele 13:40.**

EX#1 Fie sistemul

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) Menţionaţi dacă matricea asociată sistemului (1):

(i) admite factorizarea LU fără pivotare;
(ii) admite factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU);
(iii) admite metoda de eliminare Gauss fără pivotare;
(iv) admite metoda de eliminare Gauss cu pivotare (parţială, parţială scalată sau totală);
(v) admite factorizarea Cholesky.
(vi) este (strict) diagonal dominantă.

Justificaţi răspunsurile date.

(b) Determinaţi soluţia sistemului (1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, folosind factorizarea LU fără pivotare.

EX#2 Determinaţi ecuaţia *parabolei de regresie* asociată punctelor (i.e. parabola cea mai apropiată de punctele respective): $\mathrm{P}_1(-2;-5)$, $\mathrm{P}_2(-1;4)$, $\mathrm{P}_3(0;-1)$, $\mathrm{P}_4(1;0)$, rezolvând sistemul augumentat asociat folosind metoda de eliminare Gauss cu pivotare parţială. Explicaţi şi ilustraţi grafic rezultatul obţinut.

EX#3 Matricea $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ se numeşte *matrice proiecţie ortogonală* dacă este *idempotentă*, i.e. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, şi *simetrică*, i.e. $\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}$.

Dacă $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice proiecţie ortogonală pe subspaţiul vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^m$, atunci $\mathbf{I}_m - \mathbf{P} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este o matrice proiecţie ortogonală pe complementul ortogonal al subspaţiului vectorial S în $\mathbb{R}^m$, i.e. $S^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$.

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU 29 mai 2021
GRUPA: 113

Elemente de calcul științific
Verificare - Matematică Anul I

EX #1 Fie sistemul

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

a) i) Matricea admite LU fără pivotare dacă: Echivalente:

(*) $A_k := (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ $k=\overline{1,n}$ inversabile

(**) A admite MEGFP

$A_1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ inversabilă

$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 8 \neq 0 \Rightarrow$ inversabilă

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 8 \neq 0 \Rightarrow$ inversabilă

Am demonstrat că (*) e adevărată deci A admite LU fără pivotare.

ii) A admite PLU dacă
$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pătratică
A inversabilă

$\left.\begin{array}{l} A \text{ este pătratică } \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ 3 linii și 3 coloane} \\ \det(A) = 8 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversabilă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A admite PLU

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU
GRUPA: 113

Ex #1

a) iii) A admite MEGFP dacă:

A pătratică

$a_{ii}^{(i)} \neq 0$, la fiecare pas i, $a_{ii} \neq 0$

A inversabilă

$A \in M_3(\mathbb{R})$ cu 3 linii și 3 coloane => A pătratică

$a_{ii}^{(i)} \neq 0 \quad (\forall)\, i = \overline{1,3}$

Chiar dacă avem $a_{33} = 0$ inițial, după operațiile corespunzătoare pentru a face zerouri sub a_{11} și a_{22}, a_{33} se va schimba și, la pasul al 3-lea, $a_{33}^{(3)} \neq 0$.

$\det(A) = 8 \neq 0$ => A inversabilă

De asemenea, am arătat la i) că A admite LU fără pivotare, deci A admite MEGFP.

iv) A admite MEGFP => A admite MEGPP, MEGPPS, MEGPT

v) A admite Cholesky <=> A simetrică <=> $A = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A \neq A^T \Rightarrow A \text{ nu e simetrică} \Rightarrow$$

=> A nu admite factorizarea Cholesky.

vi) A e (strict) diagonal dominantă dacă elementele de pe diagonala principală sunt cele mai mari de pe linia lor.

Pe linia 3 $a_{32} > a_{33}$ deci A nu e (strict) diagonal dominantă

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU
GRUPA: 113

EX 1 b) Soluția sistemului (1) folosind LU fără pivotare

Descompunem $A = LU$ astfel:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} l_{11} & 0 \\ \hline \underline{L}_{21} & L_{22} \end{array}\right]}_{L} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} u_{11} & \underline{U}_{12} \\ \hline \underline{0} & U_{22} \end{array}\right]}_{U}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} l_{11}u_{11} & l_{11}\underline{U}_{12} \\ \hline \underline{L}_{21}u_{11} & \underline{L}_{21}\underline{U}_{12} + L_{22}U_{22} \end{array}\right]$$

$l_{11}u_{11} = 2 \Rightarrow l_{11} = 1$ (luăm)
$u_{11} = 2$

$l_{11}\underline{U}_{12} = [-2 \ \ 2] \Rightarrow \underline{U}_{12} = [-2 \ \ 2] \Rightarrow \begin{cases} u_{12} = -2 \\ u_{13} = 2 \end{cases}$

$\underline{L}_{21}u_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{L}_{21} = \frac{1}{u_{11}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{L}_{21} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = 0 \\ l_{31} = -1 \end{cases}$

$\underline{L}_{21}\underline{U}_{12} + L_{22}U_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L_{22}U_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[-2 \ \ 2] \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{22}U_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =: S$

Problema s-a redus la factorizarea LU a matricii S

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} l_{22}u_{22} & l_{22}u_{23} \\ \hline u_{22}l_{32} & l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{array}\right]$$

$l_{22}u_{22} = 4 \Rightarrow l_{22} = 1$
$u_{22} = 4$

$l_{22}u_{23} = 2 \Rightarrow u_{23} = 2$

$u_{22}l_{32} = 2 \Rightarrow l_{32} = \frac{2}{u_{22}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 + l_{33}u_{33} = 2 \Rightarrow l_{33}u_{33} = 1 \Rightarrow \begin{cases} l_{33} = 1 \\ u_{33} = 1 \end{cases}$

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU
GRUPA 113
EX #1 b

Am obținut $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ și $U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Astfel, ecuația (1) $A\underline{x} = \underline{b}$ devine $LU\underline{x} = \underline{b}$

Fie $U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow L\underline{y} = \underline{b}$ are sistemul:

$$\begin{cases} y_1 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + y_2 + 0 = 2 \\ -y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

Rezolvăm cu substituție ascendentă $\Rightarrow$

$y_1 = 0$
$y_2 = 2$
$y_3 = 2 - \frac{1}{2}y_2 = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$

Revenim la $U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow$ sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul cu met substituției descendente:

$x_3 = 1$
$4x_2 + 2\cdot 1 = 2 \Rightarrow x_2 = 0$
$2x_1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -1$

Am obținut $\underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU

GRUPA: 113

EX #2 $P_1(-2,-5)$ $P_2(-1,4)$ $P_3(0,-1)$, $P_4(1,0)$

Rezolvați sistemul augmentat folosind MEGPP.

~~Trebuie determinat α și β a.î. $\alpha x_i + \beta = y_i$ $i=\overline{1,4}$~~

Trebuie determinat a, b, c a.î. $a x_i^2 + b x_i + c = y_i$; $i=\overline{1,4}$

$$\begin{bmatrix} (-2)^2 & -2 & 1 \\ (-1)^2 & -1 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

În acest caz $m = 4$ și $n = 3$

Sistemul augmentat este dat de:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_4 & A \\ \hline A^T & O_3 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} r \\ \underline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{O}_3 \end{bmatrix}$$ unde $r \in \mathbb{R}^m$ vectorul eroare reziduală

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{c}} \quad (*)$$

Matricea extinsă a sistemului augmentat (*) este dată de

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & & -5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{E_6 \leftarrow E_6 + 2E_1 \\ E_7 \leftarrow E_7 - E_1}]{E_5 \leftarrow E_5 - 4E_1} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -16 & 8 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 8 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{E_6 \leftarrow E_c + E_2 \\ E_7 \leftarrow E_7 - E_2}]{E_5 \leftarrow E_5 - E_2}$$

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU

GRUPA: 113

EX #2

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1&0&0&0&4&-2&1&-5\\ 0&1&0&0&1&-1&1&4\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&-17&9&-5&16\\ 0&0&0&1&9&-5&3&-6\\ 0&0&1&1&-5&3&-2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_7 \leftarrow E_7 - E_3} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1&0&0&0&4&-2&1&-5\\ 0&1&0&0&1&-1&1&4\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&-17&9&-5&16\\ 0&0&0&1&9&-5&3&-6\\ 0&0&0&1&-5&3&-3&2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{E_6 \leftarrow E_6 - E_4 \\ E_7 \leftarrow E_7 - E_4}]{E_5 \leftarrow E_5 - E_4}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1&0&0&0&4&-2&1&-5\\ 0&1&0&0&1&-1&1&4\\ 0&0&1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&-18&8&[illegible]&[illegible]\\ 0&0&0&0&8&-6&[illegible]&[illegible]\\ 0&0&0&0&-6&2&[illegible]&[illegible] \end{array}\right]$$

Avem
$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} I_4 & & A & & b \\ \hline O_{3,4} & -18 & 8 & -6 & 16 \\ & 8 & -6 & 2 & -6 \\ & -6 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

Ajungem la sistemul:

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x_1 + 4a - 2b + c = -5 \\ x_2 + a - b + c = 4 \\ x_3 \qquad\quad + c = -1 \\ x_4 + a + b + c = 0 \\ -18a + 8b - 6c = 16 \\ 8a - 6b + 2c = -6 \\ -6a + 2b - 4c = 2 \end{cases} \Bigg| :2 \Rightarrow \begin{cases} -9a + 4b - 3c = 8 \\ 4a - 3b + c = -3 \\ -3a + b - 2c = 1 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul cu MEGPP

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU
GRUPA: 113

EX 2

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 4 & -3 & 8 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Caut maximul în modul pe coloana 1

$\max\limits_{i=\overline{1,3}} |a_{i1}^{(1)}| = \max\{|-9|, |4|, |-3|\} = |-9| = a_{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu trebuie interschimbate liniile, $a_{11}^{(1)} = -9 \neq 0$ aplicăm MEGFP

$i=\overline{2,3}$ $\quad m_i^{(1)} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$

$m_2^{(1)} = a_{21} / a_{11} = 4/-9 \Rightarrow E_2 + \frac{4}{9} E_1 \to E_2$

$j=\overline{2,3}$: $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + \frac{4}{9} a_{12}^{(1)} = -3 + \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{-11}{9}$

$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} + \frac{4}{9} a_{13}^{(1)} = 1 + \frac{4}{9} \cdot (-3) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

$a_{21}^{(2)} = 0$

$b_2^{(2)} = -3 + \frac{4}{9} \cdot 8 = \frac{-27}{9} + \frac{32}{9} = \frac{5}{9}$

$m_3^{(1)} = a_{31} / a_{11}^{(1)} = -3/-9 = \frac{1}{3} \Rightarrow E_3 - \frac{1}{3} E_1 \to E_3$

$j=\overline{2,3}$: $a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \frac{1}{3} a_{12}^{(1)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 4 = -\frac{1}{3}$

$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{1}{3} \cdot a_{13}^{(1)} = -2 - \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$

$a_{31}^{(2)} = 0$

$b_3^{(2)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{-5}{3}$

Am obținut $\overline{B}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$

Matricea care transformă $\overline{B}^{(1)}$ în $\overline{B}^{(2)}$ este $M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

NUME: PĂUN LIVIU-DUMITRU

GRUPA: 113

EX ~~1~~ 2

Caut max pe col 2

$\max\limits_{i=\overline{2,3}} |a_{i2}^{(2)}| = \max\{|-\frac{11}{9}|, |-\frac{1}{3}|\} = |-\frac{11}{9}| = a_{22} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu trebuie interschimbate liniile

$a_{22}^{(2)} \neq 0 \Rightarrow$ aplicăm MEGFP

$i=\overline{3,3}$ $\quad m_3^{(2)} = a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{11}\right) = \frac{3}{11} \Rightarrow E_3 - \frac{3}{11}E_2 \to E_3$

$j=\overline{3,3}$ $\quad a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \frac{3}{11} a_{23}^{(2)} = -1 - \frac{\cancel{3}}{11} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) = -1 + \frac{1}{11} = -\frac{10}{11}$

$a_{32}^{(3)} = 0$

$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - \frac{3}{11} b_2^{(2)} = -\frac{5}{\cancel{3}}^{3 \cdot 11 /} - \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{9} = \frac{(-33-3) \cdot 5}{9 \cdot 11} = \frac{-20}{11}$

Matricea care transformă $\overline{B}^{(2)}$ în $\overline{B}^{(3)}$ este $M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{11} & 1 \end{bmatrix}$

Are loc relația $M^{(2)} \cdot M^{(1)} \cdot \overline{B} = \overline{B}^{(3)} = [A^{(3)} \; \underline{b}^{(3)}] = \boxed{U \; \tilde{\underline{b}}}$

$A\underline{x} = \underline{b}$ devine $U\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$ unde $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Sistemul este:

$$\begin{cases} -9a + 4b - 3c = 8 \\ \quad -\frac{11}{9} b - \frac{1}{3} c = \frac{5}{9} \\ \quad\quad -\frac{10}{11} c = \frac{-20}{11} \end{cases} \qquad \overline{B}^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{11} & -\frac{20}{11} \end{array}\right]$$

Folosind metoda substituției descendente $\Rightarrow$

$c = 2$

$-11b - 6 = 5 \Rightarrow b = -1$ $\qquad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

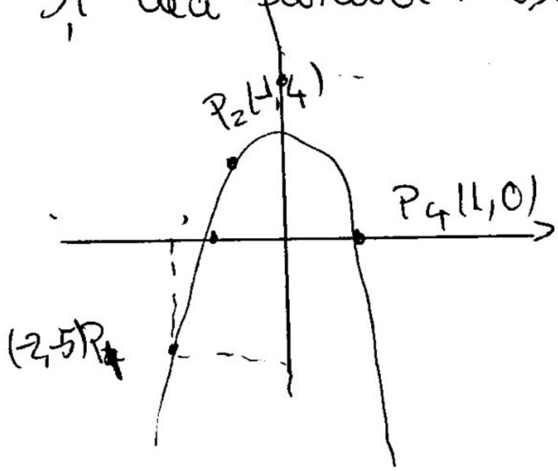
$-9a - 4 - 6 = 8 \Rightarrow a = -2$

NUME: PĂUN LIVIO-DUMITRU
GRUPA: 113
EX #2
Revenind în sistemul (0) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} r_1 + 4\cdot(-2) - 2\cdot(-1) + 2 = -5 & \Rightarrow r_1 = -1 \\ r_2 + \cancel{(-2)} - (-1) \cancel{+2} = 4 & \Rightarrow r_2 + 1 = 4 \Rightarrow r_2 = 3 \\ r_3 \qquad\qquad + 2 = -1 & \Rightarrow r_3 = -3 \end{cases}$$

Deci $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Și deci parabola este $-2x_i^2 - 1x_i + 2 = y_i$



EX #3