SEMINAR 5:

TEORIE

$L_{a} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

$\mathcal{N} = (\underline{\mathbb{N}}, <, +, \cdot, S, 0)$ → universul structurii unde lucrez

v_1, v_2 - termeni ; $v_1, v_2 \to \underline{\mathbb{N}}$

$v_1 \dot{+} v_2 = \dot{+}(v_1, v_2)$ ← aritate 2

↳ este din limbaj

! v_1 plus v_2 nu are „+", depinde de limbajul pe care sunt

$(v_1 \dot{+} v_2) \dot{\times} v_3 = \dot{\times}(\dot{+}(v_1, v_3), v_3)$

Ca formule atomice: egalitatea dintre 2 termeni
rel. dintre 1 sau mai mulți termeni

formule:

$v_1 = v_2$

$v_1 = v_2 \dot{+} v_3$

$v_1 \dot{<} v_2$

$\underbrace{v_1}_{\text{termen}} \dot{<} \underbrace{v_2 \dot{+} v_3}_{\text{termen}}$

$\neg (v_1 = v_2)$

$\neg (v_1 \dot{<} v_2) \to v_1 = v_2$

! $\neg v_1 \dot{<} v_2$ NU pot nega termenii unei formule

$\forall v_1 (v_1 \dot{<} v_2)$

$\forall v_1 \forall v_2 (\neg (v_1 \dot{<} v_2) \to (v_1 = v_2))$

$\forall v_1 (\dot{0} \dot{<} v_1) \wedge (\neg (v_1 = 0))$

↳ adevărat pentru $\underline{\mathbb{N}}$ nu și pentru $\mathbb{Z}$

$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <$

mai multe la slide 143

SEMANTICA

! var. sunt evaluate în funcție de univ. structurii în care lucrăm

$e: V \to \underline{\mathbb{N}}$ alegem niște evaluări

$v_i^{\mathcal{N}}(e) = e(v_i)$

$e(v_1) = 2$
$e(v_2) = 10$
$e(v_i) = 100 \quad \forall i \in \underline{\mathbb{N}} \setminus \{1, 2\}$

$\dot{0}^{\mathcal{N}}(e) = 0$

$(v_1 \dot{+} v_2)^{\mathcal{N}}(e) = \dot{+}(v_1, v_2)^{\mathcal{N}}(e) = \dot{+}^{\mathcal{N}}(v_1^{\mathcal{N}}(e), v_2^{\mathcal{N}}(e))$

↳ „interpretat în $\mathcal{N}$ cu eval. (e)"

$= v_1^{\mathcal{N}}(e) + v_2^{\mathcal{N}}(e) = 2+10=12$

$e(v_1) + e(v_2) = 12 \in \underline{N}$

S5.1. Limb. de ord I

$\mathcal{L}ar = (\dot{<}, \dot{\times}, \dot{+}, \dot{S}, \dot{0})$

L-ar structura $\mathcal{N} = (\underline{N}, <, +, \cdot, S, 0)$

(i) $x, y \in V,\ x \neq y,\ t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$

$t^{\mathcal{N}}(e) = ?$ cu $e: V \to \underline{N}$, $e(x) = 3$, $e(y) = 7$

$= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) =$

$= (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)$

↓ $\in V$

$= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot (\dot{S}^{\mathcal{N}}(\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e))$

↓ funcția aplicată

$= S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) = S(3) \cdot S(S(e(y)))$

↳ e direct fără .

$= 4 \cdot S(8) = 4 \cdot 9 = 36$

(ii) $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \to (x \dot{<} y \lor x = y)$

$= \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x,y) \lor x = y)$

De arătat $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pt. orice $e: V \to \underline{N}$

~~[illegible]~~

aplicăm $a \to b$
$\neg a \lor b$

$\mathcal{N} \vDash \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x,y) \lor (x=y))[e] \iff$

$\mathcal{N} \nvDash \dot{<}(x, \dot{S}y)[e]$ sau $\mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x,y) \lor (x=y))[e] \iff$

nu este adev. că $e(x) < S(e(y))$ sau $(e(x) < e(y)$ sau $e(x) = e(y)) \iff$

$e(x) \geq e(y)$ sau $e(x) < e(y)$ sau $e(x) = e(y)$ ⟺

$e(x) \geq e(y)+1$ sau $e(x) < e(y)$ sau $e(x) = e(y)$

↳ adev. pe $\mathbb{N}$

S5.2

$L_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

L-ar str. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$

$\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \lor v_3 = v_4)$

Să se caracterizeze acele $e: V \to \mathbb{N}$ care au prop. $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$

pt. orice $a \in \mathbb{N}$, $(v_3 \dot{<} v_4 \lor v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1$

pt. orice $a \in \mathbb{N}$ $(v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1$ sau $(v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1$

$e(v_4) = a$

pt. orice $a \in \mathbb{N}$ $e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4)$ sau $e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4)$

pt. orice $a \in \mathbb{N}$ $e(v_3) < a$ sau $e(v_3) = a$

pt. orice $a \in \mathbb{N}$ $e(v_3) \leq a$ ⟺ $e(v_3) = 0$

↳ sg. care respectă oricare ar fi a

$e(v_3) = 0 \Rightarrow \mathcal{N} \vdash \varphi[e]$

S5.3

L = limbaj de ord. I

Să se arate că pt. orice φ, ψ ale lui L și orice var. x, y, $x \neq y$ avem:

(i) $\underbrace{\forall x (\varphi \land \psi)}_{1} \vDash\!\dashv \underbrace{\forall x \varphi \land \forall x \psi}_{2}$

Fie A o L-structură, $e: V \to A$, A - universul lui $\mathcal{A}$

Vrem să dem. că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \land \forall x \psi)[e]$ ⟺ $\mathcal{A} \vDash (\forall x (\varphi \land \psi))[e]$

(1) $\mathcal{A} \vDash (\forall x (\varphi \land \psi))[e] \overset{def.}{\iff}$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \land \psi)[e_{x \leftarrow a}]$

pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}]$

$\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \land \forall x \psi)[e]$ ⟺ $\mathcal{A} \vDash \forall x \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \forall x \psi[e]$

(2) pt. orice $b \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow b}]$ și (3) pt. orice $c \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow c}]$

Știm (1) vrem să dem (2)+(3)

Fie $b\in A$, în ① $a=b \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$

pt. orice var $b\in A$, $\mathcal{A}\vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$

Fie $c\in A$, în ① $a=c \overset{①}{\Rightarrow} \mathcal{A}\vDash \psi[e_{x\leftarrow c}] \Rightarrow$ pt. orice $c\in A$, $\mathcal{A}\vDash\psi[e_{x\leftarrow c}]$

Știm ② și ③ și vrem să dem ①

Fie $a\in A$, în ② $b:=a \Rightarrow \mathcal{A}\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$
și
în ③ $c:=a \Rightarrow \mathcal{A}\vDash\psi[e_{x\leftarrow a}]$

$\Rightarrow \mathcal{A}\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \wedge \psi[e_{x\leftarrow a}] \Rightarrow \mathcal{A}\vDash \varphi\wedge\psi[e_{x\leftarrow a}]$

S5.4 $x,y\in V$, $x\neq y$

Să se dea ex de limbaj. de ord I și de formule φ,ψ

(ii) $\forall x\exists y\varphi \nvDash \exists y\forall x\varphi$

$\varphi := x \dot{<} y$

$\mathcal{N}\vDash (\forall x\exists y\ x\dot{<}y)[e] \Leftrightarrow$ pt. orice $n\in\mathbb{N}$ există $m\in\mathbb{N}$ a.î. $n<m$

(adevărat)

$\mathcal{N}\vDash(\exists y\forall x\ x\dot{<}y)[e] \Leftrightarrow$ există $m\in\mathbb{N}$ a.î. pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem că $n<m$ (fals)

↳ unul sg. nu poate fi mai mare decât toate, mereu putem găsi unul mai mare ca m

$\Rightarrow \mathcal{N}\nvDash(\exists y\forall x\ x\dot{<}y)[e]$

(i) $\forall x(\varphi\vee\psi) \nvDash \forall x\varphi\vee\forall x\psi$

„ orice nr. natural este par sau impar" $\Rightarrow$ bună pt. prima $\Rightarrow$ $\forall x$ (este imp sau par) ↳ 2, 3, ... e bun

dar pt. a doua $\forall x$ este par sau $\forall x$ este imp $\Rightarrow$ și nu mai e bună
↳ 3 ↳ 2

S5.3 (continuare)

(ii) $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$
↳ se deduce

Fie $\mathcal{A}$ o L structură și $e: V \to A$, A - universul L al structurii $\mathcal{A}$

① știm $\mathcal{A} \models \exists y \forall x \varphi [e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pt. orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \to b}]$

② Vrem să dem. că $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \varphi [e] \iff$ pt. orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î.
vrem să g.
$\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \to d}]$

Fie $c \in A \overset{①}{\Rightarrow}$ ex. $b \in A$ a.î. pt. orice $c \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \to b}]$

Alegem $\underline{b = d}$ (0) $\Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \to c, y \to d}] \Rightarrow$ am dem. ②

(iii) $\forall x \varphi \models \exists x \varphi$
↳ se deduce

$\mathcal{A} \models \forall x \varphi[e] \Rightarrow$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \Rightarrow \exists a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$
$\iff \mathcal{A} \models \exists x \varphi[e]$

(iv) $\forall x (\varphi \to \psi) \models \exists x \varphi \to \exists x \psi$

$\mathcal{A} \models \forall x (\varphi \to \psi)[e] \iff$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}]$
$\iff$ pt. orice $a \in A$ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \to a}]$ atunci $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \to a}]$ ①
(implicația tradusă)

Fie $b \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \to b}] \overset{①}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[e_{x \to b}]$
↳ satisface

$\mathcal{A} \models (\exists x \varphi \to \exists x \psi)[e] \iff$ dacă există $b \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \to b}]$ atunci
există $c \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \to c}]$ ②

alegem $c = b$

S5.5. $L_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$
L_{ar}-structura canonică $= \mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$
Să se dea ex. de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ a.î. pt. orice $e: V \to \mathbb{N}$ sunt. adev.

(i) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par

$L_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$

$\dot{S}\dot{0} = \dot{1}$

$e(v_0)$ - nr. par

$v_0 = 2v_1 = v_1 + v_1$

$\varphi_1 := \exists v_1 (v_0 = v_1 \dot{\times} \dot{2})$, $\dot{2} = \dot{S}\dot{S}\dot{0}$

$\varphi_1 := \exists v_1 (v_0 = v_1 \dot{+} v_1)$

(ii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e]$, $e(v_0)$ este prim are ca div. doar 1 și $v_0 \Rightarrow v_0 = v_0 \dot{\times} \dot{1}$ și atât

$\varphi_2 = (\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \land \forall v_1 ((v_1 \dot{<} v_0) \land \exists v_2 (v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \rightarrow v_1 = \dot{S}\dot{0})$

$v_0 > 1$ și $\forall v_1$ ($v_1 < v_0$ și $\exists v_2 (v_1 \cdot v_2 = v_0)$) implică $v_1 = 1$)

✓

(iii)