SEMINAR 1:

cel mult numărabilă = finită sau numărabilă

Corolar 1.10 = A = m. num., B = m. nevidă cmm => ↳ echipotentă cu $\mathbb{N}$
$A \times B$, $A \cup B$ = num.

Propoziția 1.13

i) $\cup$ unei fam. cel mult num. de mulțimi cel mult numărabile = mulțime cel mult numărabilă

ii) $\cup$ unui nr. finit de mulțimi numărabile = numărabilă

iii) $\times$ (produsul cartezian) al unui nr. finit de mulțimi num. = numărabil

Noțiuni:

tautologie

$\models \varphi$ „φ este tautologie" dacă pt. $\forall\, e: V \to \{0,1\}$ $e \models \varphi$ = „e satisface φ sau e model pt. φ"

satisfiabilă ↳ dacă $e^+(\varphi)=1$, $\exists$ măcar o evaluare pt. care dă 1, (tautologie: toate evaluările dau 1)

nesatisfiabilă nu $\exists$ o evaluare $e: V \to \{0,1\}$ pt. care $e^+(\varphi)=1$

exemple: $p \wedge \neg p$ ← nesatisfiabilă, $p \vee \neg p$ ← tautologie ($\models p \vee \neg p$)

Exerciții:

S1.1. i) $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n = Sim^0 \cup Sim \cup Sim^n$
↳ mulțimile simbolurilor

$Sim = V \cup \{\neg, \to, (,)\}$
↳ toate variabilele ↳ toate simbolurile

V = mulțime numărabilă

$\{\neg, \to, (,)\}$ = finită = cel mult numărabilă

} Sim = numărabilă

$Sim^n = Sim \times Sim \times Sim \times Sim \times \ldots Sim$

Sim = numărabilă

} $\overset{P.\,1.13\,(iii)}{\Longrightarrow}$ Sim^n = numărabilă

$\Rightarrow \bigcup_{n \geq 2} Sim^n$ - numărabilă $\Rightarrow$ Expr numărabilă

ii) Form $\subseteq$ Expr

Expr = numărabilă (i) $\}\Rightarrow$ Form = numărabilă

TABEL DE IMPLICAȚII:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

S1.2 $\forall \varphi, \psi, \chi \in$ Form

i) $\psi \models (\varphi \to \psi)$

$e: V \to \{0,1\}$ → evaluează variabile

$e^+:$ → -"- formule

$e^+(p \vee q) = e^+(p) \vee e^+(q) = e(p) \vee e(q)$

$e^+(\neg p \vee q) = e^+(\neg p) \vee e^+(q) = \neg e(p) \vee e(q)$

exemple ↑

Fie $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e^+(\psi) = 1$

$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1$

adev. 0,1 implica 1, deci este tautologie pt. că $e^+(\varphi) \to 1 = 1$ $\forall$ $e^+(\varphi)$

Deci $\psi \models \varphi \to \psi$

ii) Fie $e: V \to \{0,1\}$

$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$

$\left(e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = 1 \text{ ddacă } e^+((\varphi \wedge \psi) \to \chi) = 1 \right)$ *

$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

$e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi)$

I. Dacă $e^+(\varphi) = 0$ → $A = 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1$ $\forall$ ar fi val expr.

și!

$B = \underline{(0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi)} = \underline{0 \to e^+(\chi)} = 1$ $\forall$ ar fi $e^+(\chi)$

$\underset{0}{e^+(\varphi)} \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = (\underbrace{e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)}_{0}) \to e^+(\chi)$

$A = B$ (1) deci sunt egale, 0 din cauza infi ului

0 poate implica și 1 și 0

este egal cu val exps.

II. Dacă $e^+(\varphi) = 1 \Rightarrow A = 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \Leftrightarrow e^+(\psi) \to e^+(\chi)$

$B = (1 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \Leftrightarrow e^+(\psi) \to e^+(\chi)$

↳ depinde de val lui $e^+(\psi)$

/// $1 \to a = a$

$\Rightarrow A = B$ (2) daci sunt egale

Din (1) și (2) $\Rightarrow \varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$

S1.3

i) $v_0 \to v_2$

$v_0 = 0$

$v_2 = 1$ (poate și 0)

$\Rightarrow$ și e 1 (mereu chiar = tautologie)

ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$

$v_0 = 1$

$v_3 = 0$

$v_4 = 0$

S1.4 pt. $\forall$ form. φ, $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă (nesatisfiabilă) ddacă φ este tautologie

pt. orice $e: V \to \{0,1\}$, $e^+(\neg\varphi) = 0 \Rightarrow \neg\varphi$ este nesatisfiabilă (nu are niciun model)

$\neg e(\varphi) = 0$

$\Rightarrow$ pt. orice $e: V \to \{0,1\}$ pt. care $e^+(\neg\varphi) = 0 \Rightarrow e(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi$ este tautologie