25.01.2023

$(f) \trianglelefteq K[X]$
$= \{f \cdot g \mid g \in K[X]\}$

Fie $h \in (f) \Rightarrow \text{grad}(h \cdot X) = \text{grad}(h) + 1$

$h = f \cdot g$

$h \cdot X \in (f)$
$= f \cdot (g \cdot X)$

$\boxed{Q1}$ Nr. ciclilor de lungime m din S_n este $\dfrac{A_n^m}{m}$

$(i_1\, i_2 \dots i_m) = (i_m\, i_1\, i_2 \dots i_{m-1}) = \dots$
$= (i_2 \dots i_m\, i_1)$

$\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)(8\,9)(10)(11)(12\ 13) \in S_{13}$

tipul lui $\sigma = (2, 2, 1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{9}) \in \mathbb{N}^{13}$

Nr. de permutări de tip $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ este $\dfrac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!\, 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}}$

$\tau \in S_n$

τ are tipul $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ dacă în descompunerea sa în produs de cicli disjuncți conține k_1 cicli de lungime 1, k_2 cicli de lungime 2, ..., k_n cicli de lungime n

$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n = n$

De exemplu un ciclu de lungime m în S_n are tipul:
$(m \leq n)$

$(n-m, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pe poz. } m}}{1}, 0, \dots, 0)$

Vrem $(\mathbb{C}^*, \cdot) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\qquad$ $x^2 = -1$ are sol. în $\mathbb{C}$, nu are sol. în $\mathbb{R}$.

Presupunem că există $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ un izom. de grupuri.

f morf. de grupuri $\Rightarrow f(1) = 1$

f surj $\Rightarrow (\exists)\, a \in \mathbb{R}^*$ a.î. $f(a) = i$

$$f(a) \cdot f(a) = i^2 = -1$$

$\parallel$ f morf.

$$f(a^2)$$

$$f((-1)^2) \overset{f}{\underset{\text{morf}}{=}} f(-1) f(-1) = f(-1)^2$$

$\parallel$

$$f(1) = 1$$

$\Rightarrow f(-1)^2 = 1 \Rightarrow f(-1) = 1$ ~~X~~ sau $\boxed{f(-1) = -1}$

$$f(a^2) = -1 = f(-1) \xrightarrow[\text{inj}]{f}$$

$\underline{a^2 = -1}$ X $(a \in \mathbb{R}^*)$ $\Rightarrow$ Pp e falsă $\Rightarrow$

Grupurile nu sunt izomorfe

$R = \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]$ $\qquad$ $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\phi : R \to S$ $\qquad$ $\phi(P(X), Q(X)) = (P(a), Q(b))$

ϕ morfism de inele $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
1. $\phi(c + d) = \phi(c) + \phi(d)$ $(\forall)\, c, d \in R$
2. $\phi(c \cdot d) = \phi(c) \cdot \phi(d)$ $(\forall)\, c, d \in R$
3. $\phi(1_R) = 1_S$

$c, d \in R \Rightarrow c = (P_1(X), Q_1(X))$ $\qquad$ $P_1(X), Q_1(X) \in \mathbb{Z}[X]$

$d = (P_2(X), Q_2(X))$ $\qquad$ $P_2(X), Q_2(X) \in \mathbb{Z}[X]$

$1_R = (1, 1) \in \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]$ $\qquad$ $1_S = (1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3 $\quad \phi((1,1)) = (1, 1)$ $\qquad$ Pol. constant 1 evaluat în a, resp b, este tot 1.

① $\phi\Big((P_1(x),Q_1(x))+(P_2(x),Q_2(x))\Big) = \phi\Big((\underbrace{P_1(x)+P_2(x)}_{F(x)}, \underbrace{Q_1(x)+Q_2(x)}_{G(x)})\Big)$

$\stackrel{def}{\underset{\phi}{=}} (F(a), G(b))$ $\qquad F(x)=P_1(x)+P_2(x)$

$\qquad \|$ $\qquad\qquad\qquad\qquad F(a)=P_1(a)+P_2(a)$

$(P_1(a)+P_2(a), Q_1(b)+Q_2(b))$

$\qquad \|$

$(P_1(a),Q_1(b))+(P_2(a),Q_2(b)) \stackrel{def}{\underset{\phi}{=}} \phi\big((P_1(x),Q_1(x))\big)+$

$\phi\big(P_2(x),Q_2(x)\big).$

② Analog cu ①.

$\operatorname{Ker}\phi \stackrel{def}{=} \{(P_1(x),Q_1(x)) \in \underbrace{\mathbb{Z}[x]\times\mathbb{Z}[x]}_{R} \mid \phi(P_1(x),Q_1(x)) = \underbrace{0_S}_{(0,0)}\}$

$(P_1(a),Q_1(b)) = (0,0) \iff \begin{cases} P_1(a)=0 \stackrel{\text{Bézout}}{\iff} P_1(x)=(X-a)F(x) \\ Q_1(b)=0 \underset{\text{Bézout}}{\iff} Q_1(x)=(X-b)G(x) \end{cases}$

$\operatorname{Ker}\phi = \{(P_1(x),Q_1(x)) \in \mathbb{Z}[x]\times\mathbb{Z}[x] \mid \begin{array}{l} P_1(x)\in(X-a)\mathbb{Z}[x] \\ Q_1(x)\in(X-b)\mathbb{Z}[x] \end{array}\}$

$\stackrel{"\subseteq"}{\underset{"\supseteq"}{=}} \{((X-a)F(x), (X-b)G(x)) \mid F(x),G(x)\in\mathbb{Z}[x]\}$

$\phi((X-a)F(x), (X-b)G(x)) \underset{\text{morf}}{\overset{\phi}{=}} \underbrace{\phi(X-a, X-b)}_{(0,0)}\cdot\phi(F(x),G(x)) \cdot \ldots = (0,0)$

$= \underline{(X-a, X-b)\,R}$

$\hookrightarrow$ idealul principal din $R(=\mathbb{Z}[x]\times\mathbb{Z}[x])$ generat de elementul $(X-a, X-b)\in R$.

$\mathbb{Q}[X]/(X^2-a^2-a) \simeq (\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$ $\quad a>0$ $(a\in\mathbb{N}^*)$

adunarea și înm. nr complexe

$a=7$ $\quad \mathbb{Q}[X]/(X^2-56) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{56}] = \{a+b\sqrt{56} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

T.F.I inele

$f: R \to S$ morf. de inele

$R/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f$

izom. de inele

Tb. să "construiesc" un morfism surj de inele $f: \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{56}]$

a.î. $\mathrm{Ker} f = (X^2-56)\mathbb{Q}[X]$

Definesc f astfel: $f(P(X)) = P(\sqrt{56})$ ("știu" de la curs că f este morf. de inele)

......

Fie $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{56}] = \{a+b\sqrt{56} \mid a,b\in\mathbb{Q}\} \Rightarrow z = a_0+b_0\sqrt{56}$ pt $a_0,b_0\in\mathbb{Q}$

Atunci $f(\underbrace{a_0+b_0X}_{=F(X)}) = F(\sqrt{56}) = a_0+b_0\sqrt{56} = z$

Cum z a fost ales arbitrar $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este surjectiv.

"$\supseteq$" $\quad (X^2-56) = \{(X^2-56)F(X) \mid F(X)\in\mathbb{Q}[X]\}$

Fie $G(X) \in \Rightarrow G(X) = (X^2-56)F(X)$

$f(G(X)) = f((X^2-56)F(X)) \overset{f}{\underset{\text{morf.}}{=}} f(X^2-56)f(F(X)) =$

$= ((\sqrt{56})^2-56)\cdot F(\sqrt{56}) = 0 \Rightarrow G(X)\in \mathrm{Ker} f \Rightarrow$ "$\supseteq$" OK.

"$\subseteq$" $\quad$ Fie $H(X)\in\mathrm{Ker} f \Rightarrow f(H(X)) = 0 \Rightarrow H(\sqrt{56}) = 0$ (1)

$\| \text{def } f$

$H(\sqrt{56})$

Aplic thm. împ. cu rest pentru $H(x)$ și x^2-56:

$$(*) \quad H(x) = (x^2-56)\cdot q(x) + c + dx \quad , c,d\in\mathbb{Q}.$$

Evaluez $(*)$ în $x=\sqrt{56}$: $\quad H(\sqrt{56}) = 0 + c + d\sqrt{56} \Rightarrow c + d\sqrt{56} = 0 \ (2)$

$(1) \ \| \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$0 \qquad\qquad\qquad\qquad d\sqrt{56} = -c$

De $d\neq 0 \Rightarrow \sqrt{56} = -\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $\times$ $\Rightarrow \underline{d=0}$

$\Downarrow (2)$

$\underline{c=0}$

$\Rightarrow (*)$ devine $\quad H(x) = (x^2-56)\cdot q(x) \Rightarrow H(x) \in (x^2-56)\mathbb{Q}[x]$

$\Rightarrow$ "$\subseteq$" OK

Aplicând acum T.F.I obț. izomorfismul căutat.

$$\mathbb{Q}[x]/(x^2-4) \ \cancel{\cong}\ \mathbb{Q}[\sqrt{4}] = \mathbb{Q}[2] = \mathbb{Q}$$

$\cong$

$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$$f : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$$

$$f(P(x)) = (P(2), P(-2)) \ \text{e}$$

morfism de inele surj
(Exc!) cu $\operatorname{Ker} f = (x^2-4)$

Fie $(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. $\qquad P(x) = c + dx$

Atunci $f\Big(\underbrace{\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}x}_{P(x)}\Big) = (P(2), P(-2))$

$$\begin{aligned} c + 2d &= a \\ c - 2d &= b \\ \hline 2c = a+b &\Rightarrow c = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$2d = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

$$\Big(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}\cdot 2, \ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}\cdot(-2)\Big) \qquad d = \frac{a-b}{4}$$

$\|$

$(a,b) \Rightarrow f$ morf surj.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ \underset{\mathbb{Q}[X]}{\hat{P}(X)} \mid \varphi(P(X)) = (0,0) \}$

$\Leftrightarrow (P(2), P(-2)) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \overset{\text{Bézout}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} P(X) \,\vdots\, X-2 \\ P(X) \,\vdots\, X+2 \end{cases}$

$X-2, X+2$ sunt pol monice, ireductibile, distincte

$\Rightarrow \begin{cases} P(X) \,\vdots\, X-2 \\ P(X) \,\vdots\, X+2 \end{cases} \Leftrightarrow P(X) \,\vdots\, (X-2)(X+2) = (X^2-4)$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ P(X) \mid P(X) = (X^2-4)F(X), F(X) \in \mathbb{Q}[X] \} =$

$= (X^2-4)\mathbb{Q}[X].$

Det. $c, d \in \mathbb{Q}$ a.î. polin. $X^b - aX + 1$, $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2-a^2-a)$

$\mathbb{Q}[X]/(X^2-a^2-a) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}]$

$\mathbb{Q}[X]/(X^2-a^2-a) \overset{\varphi}{=} \{ \widehat{cX+d} \mid c, d \in \mathbb{Q} \}$

Folosesc Proprietate: Fie $f(X) \in K[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Atunci un S.C.R pt inelul $K[X]/(f(X))$ este mulțimea $\{ b_0 + b_1 X + \dots + b_{n-1} X^{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in K \}$, i.e.

$K[X]/(f(X)) = \{ \widehat{b_0 + \dots + b_{n-1}X^{n-1}}, b_0, \dots, b_{n-1} \in K \}.$

$\begin{cases} b=5 \\ a=6 \end{cases}$ $X^5-aX+1 = X^5-6X+1$ $X^2-a^2-a = X^2-36-6 = X^2-42$

$$\begin{array}{l|l} X^5-6X+1 & X^2-42 \\ \hline -X^5+42X^3 & X^3+42X \\ \hline / \ 42X^3-6X+1 & \\ -42X^3+42^2X & \\ \hline / \ (42^2-6)X+1 = d & \end{array}$$

$(42^2-6) = c$

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$a \equiv r \pmod{n}$

r este restul împ lui a la n

$K[X]/(f(x))$

$g(x) \equiv r(x) \pmod{f(x)}$

$\Downarrow$

restul împ. lui $g(x)$ la $f(x)$

---

① $P(X) = X^3 - aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ Este $P(X)$ ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$?

Vezi Curs 13(14): Dacă $P(X) \in K[X]$ este un polinom de grad 2 sau 3 atunci $P(X)$ este ireductibil în $K[X] \Leftrightarrow$ P nu are rădăcini în K.

Propr. Fie $F(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $F(X)$ are rădăcina rațională $\alpha = \frac{p}{q}$ cu $(p,q)=1$ $p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ atunci $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

$2X-1$ $\frac{1}{2}$

$\underline{a=8}$ $\underline{b=5}$ $P(X) = X^3 - 8X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$

$\text{grad}(P) = 3 \Rightarrow$ $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

(*) $\Updownarrow$ vezi Curs

$P(X)$ nu are răd. în $\mathbb{Q}$

Conform propr. de $P(x)$ are răd. rațională $\frac{p}{q}$ atunci

$q \mid 1,\ p \mid 5 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 5\}$

$p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1-8+5 \neq 0 \\ P(-1) = -1+8+5 \neq 0 \\ P(5) = 5^3 - 8\cdot 5 + 5 \neq 0 \\ P(-5) = (-5)^3 + 8\cdot 5 + 5 \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow P \text{ nu are răd rat, } \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$P(x)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$

Comentariu $X^4 - 10X^2 + 1$ e ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$
e reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$
$(\forall)$ p - prim.

$a^{a^{b^b}} \pmod{31}$ $\quad a = 5 \quad b = 6$

$5^{5^{6^6}} \pmod{31}$

$2^{2^3} = 2^8 = 256$

$\neq$

$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$

Thm (Euler) $a, m \in \mathbb{N}^*$ $(a, m) = 1$

$\Downarrow$

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$5^{\boxed{5^{6^6}}} \pmod{31}$

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

$(2^2, 5^2) = 1$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$(5, 31) = 1 \xRightarrow[\text{Euler}]{\text{Thm}} 5^{\varphi(31)} \equiv 1 \pmod{31}$

$\varphi(31) = 30$; $\boxed{5^{\boxed{30}} \equiv 1 \pmod{31}}$

Afirm Dacă $5^{6^6} \equiv r \pmod{30} \Rightarrow 5^{6^6} = 30 \cdot k + r \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{5^{6^6}} = 5^{30\cdot k + r} = (5^{30})^k \cdot 5^r \underset{\text{Euler}}{\equiv} 5^r \pmod{31}$

$5^{6^6} \pmod{30}$

$30 = 5\cdot 6 \quad (5,6)=1$

$30 = 2\cdot 3\cdot 5 \quad (2,3)=(3,5)=(2,5)=1$

$5^{6^6} \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$

$5^{6^6} \equiv (-1)^{6^6} \pmod 6 \equiv 1 \pmod 6$ $\Rightarrow$

Var. scurtă

$5^3 = 125 \equiv 1 (31)$

$5^{6^6} \equiv (-1)^{6^6} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

$5^{5^{6^6}} \equiv 5 \pmod{31}$

$5^{6^6} = 5t = 6l+1$

$5t \equiv 1 \pmod 6 \Leftrightarrow -t \equiv 1 \pmod 6$

$t \equiv 5 \pmod 6 \Rightarrow t = 6q+5$

$5^{6^6} = 5(6q+5) = 30q+25 \Rightarrow 5^{6^6} \equiv 25 \pmod{30}$ Afirm

$5^{5^{6^6}} \equiv 5^{25} \pmod{31} \equiv (5^3)^8 \cdot 5 \pmod{31} \equiv 5 \pmod{31}$

$p=2, \; q=19$

$\exp_p(n)$ = exp. lui p din desc în fact. primi a lui n

$a=10$
$b=9$

$n = 2^4\cdot 5^7 \cdot 17 \qquad \exp_2(n)=4 \quad \exp_3(n)=0$

$\exp_5(n)=7 \quad \exp_{17}(n)=1$

pe $\mathbb{N}$ avem rel. binară ρ: $\quad m\rho n \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}\exp_2(m)=\exp_2(n)\\ \exp_{19}(m)=\exp_{19}(n)\end{cases}}$

ρ e rel. de echiv.; $\hat{10}, \hat{9} = ?$; un SCR pt ρ.

$(\forall)\, m\in\mathbb{N}^* \qquad m = \boxed{2^{\exp_2(m)}\cdot 19^{\exp_{19}(m)}}\cdot t \qquad (t, 2\cdot 19)=1$

CIORNĂ

$m\rho n \Rightarrow \hat{m} = \hat{r}$, unde $r = 2^{\exp_2(m)}\cdot 19^{\exp_{19}(m)}$

$m = 2^{\exp_2(m)}\cdot 19^{\exp_{19}(m)}\cdot t$,

$\hat{m} = \{2^{\exp_2(m)}\cdot 19^{\exp_{19}(m)}\cdot t \mid (t,38)=1\}$

rel de echiv $\Leftrightarrow$ reflexivitate, simetrie, tranzitivitate

reflexivitate: Fie $a \in \mathbb{N}^*$ $\left.\begin{array}{l} exp_2(a) = exp_2(a) \\ exp_{19}(a) = exp_{19}(a) \end{array}\right| \Rightarrow a \rho a \ (\forall) a \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \rho$ este reflexivă (1)

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ $a \rho b \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_2(b) \\ exp_{19}(a) = exp_{19}(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} exp_2(b) = exp_2(a) \\ exp_{19}(b) = exp_{19}(a) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \rho a \Rightarrow \rho$ este simetrică (2)

Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ $\left.\begin{array}{l} a \rho b \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_2(b) \\ exp_{19}(a) = exp_{19}(b) \end{cases} \\ b \rho c \Rightarrow \begin{cases} exp_2(b) = exp_2(c) \\ exp_{19}(b) = exp_{19}(c) \end{cases} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_2(c) \\ exp_{19}(a) = exp_{19}(c) \end{cases}$

$\Downarrow$

$a \rho c \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho$ este tranzitivă (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \rho$ e rel. de echiv.

$10 = 2^1 \cdot 19^0 \cdot 5^1 \Rightarrow \hat{10} = \{ 2^1 \cdot 19^0 \cdot t \mid (t, 38) = 1 \} = \{ 2t \mid (t, 38) = 1 \}$

$9 = 2^0 \cdot 19^0 \cdot 3^2 \Rightarrow \hat{9} = \{ 2^0 \cdot 19^0 \cdot t \mid (t, 38) = 1 \} = \{ t \mid (t, 38) = 1 \}$

Afirmație: SCR $= \{ 2^i \cdot 19^j \mid i, j \in \mathbb{N} \} = A$

1) Fie $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow exp_2(m) = k$; $exp_{19}(m) = l \Rightarrow$

$\Rightarrow m \rho 2^k \cdot 19^l \Rightarrow$ A este un sistem de reprezentanți

2) Fie (i, j) ; $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a.î. $2^i \cdot 19^j \rho 2^k \cdot 19^l \Rightarrow$

$\xRightarrow[\rho]{def} \begin{cases} i = k \\ j = l \end{cases} \Rightarrow (i, j) = (k, l) \Rightarrow$ A este un sistem complet

7 Dați exemplu, dacă există, de: $a,b \neq 0$

- fct. inj, nesurj, $f_{a,b}: \left(-\infty, \frac{a}{b}\right] \to \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$
- fct. surj, neinj, $g_{a,b}: \left[\frac{a}{b}; +\infty\right) \to \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$
- fct. bij $h_{a,b}: (a, a+b] \to \mathbb{N}$

∴ Știm că $(a, a+b] \sim \mathbb{R}$, deci $(a, a+b]$ e mulțime nenumărabilă; $\mathbb{N}$ e numărabilă. Dacă ar exista $h_{a,b}$ bijectivă $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ și $(a, a+b]$ ar avea același cardinal ✗

• $f = f_{a,b}: (-\infty, 2] \to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

f nesurj $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subsetneq \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

CIORNĂ

$f(x) = cx + d$, $c \neq 0$

$\boxed{c<0}$

$f(2) = 1$, $f(2) = 2c + d$

$c = -1$, $-2 + d = 1$, $d = 3$

$\operatorname{Im} f = [f(2), +\infty)$

Redactare:

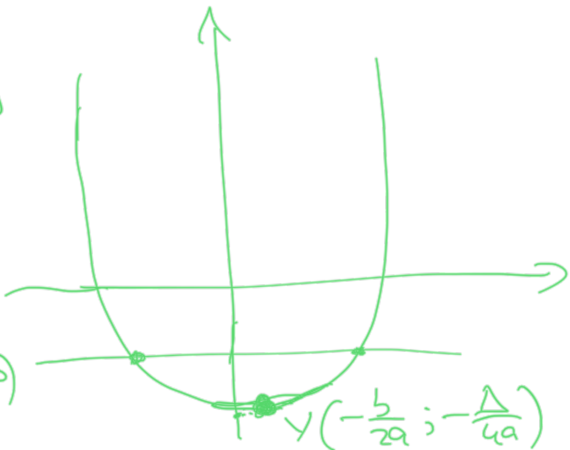
Fie $f: (-\infty, 2] \to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $f(x) = -x + 3$, f fct. de gr. I descrescăt.

$\operatorname{Im} f = [f(2); +\infty) = [1; +\infty) \subsetneq \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Rightarrow f$ nesurj.

f fct. de gr. I $\Rightarrow f$ e injectivă

•• $g: \left[\frac{3}{5}; +\infty\right) \to \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$

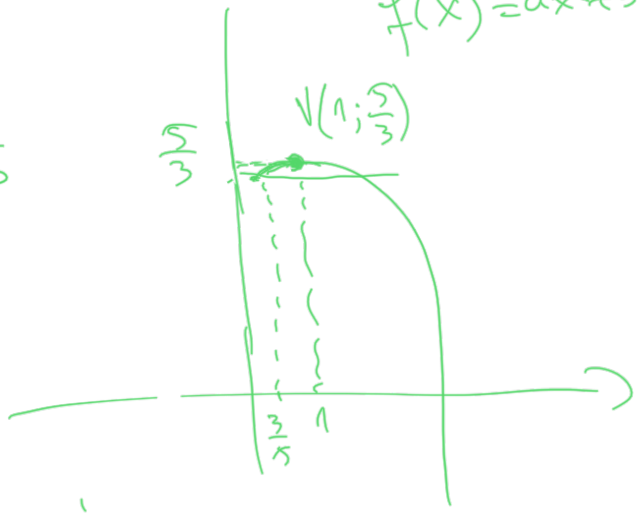


$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$g(x) = -(x-1)^2+\frac{5}{3} \le \frac{5}{3}$

g e neinj, surj



$\sigma = (1,\dots,a)(a+1,\dots,a+b)(a+b+1,\dots,2a+2b) \in S_{2a+2b}$

$\tau^3=\sigma$

$a=9$
$b=7$

$18+14=32$

$\sigma=(1\dots 9)(10,\dots 16)(17\dots 32)$ → ciclu de lungime 16; → ciclu de lungime 7; → ciclu de lungime 9

$a, b, a+b$

Fie $\tau=\tau_1\dots\tau_k$ desc. lui τ în produs de cicli disj. cu lungimea lui τ_i este l_i (pot pp $l_1\le l_2\le\dots\le l_k$).

τ_i^3: $3 \mid l_i \to \tau_i^3$ este un produs de 3 cicli de lungime $\frac{l_i}{3}$

$3 \nmid l_i \to \tau_i^3$ este un ciclu de lungime l_i

$\tau^3=\sigma$ și în desc. lui σ am cicli de lungimi diferite

(*) Niciun l_i nu poate fi divizibil cu 3

și $\tau_1^3=(1\dots9)$, $\tau_2^3=(10\dots16)$, $\tau_3^3=(17\dots32)$

(până la o renumerotare)

$l_1=9$ ↯ cu (*)

$\Rightarrow$ Nu există o astfel de permutare τ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ec. nu are soluții