09.01.2024.

SEMINAR 7:

Teorie + obs:

$\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ sau

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ și

$\forall x\, \varphi(x) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall y\, \varphi[x/y]$

↳ subst. x cu y

! 189 slide = forma prenex + un ex bun

167 slide = important

$\forall y\, \varphi(y) \to \psi$

↳ nu are y în el

$\neg \forall y\, \varphi(y) \vee \psi \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$ / $\neg\forall y \Rightarrow \exists y$

$\exists y\, \neg\varphi(y) \vee \psi \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$

$\exists y\, (\neg\varphi(y) \vee \psi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$

$\exists y\, (\varphi(y) \to \psi)$

$\exists y\, \varphi(y) \to \psi \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$

$\neg(\exists y\, (\varphi(y)) \vee \psi$

$\forall y\, \neg\varphi(y) \vee \psi$

$\forall y\, (\varphi(y) \to \psi)$

$\psi \to \forall y\, \varphi(y) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$

$\forall y\, (\psi \to \varphi(y))$

$\psi \to \exists y\, \varphi(y) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv}$

$\exists y\, (\psi \to \varphi(y))$

Mă ajută în rezolvarea exercițiilor:

① $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \exists x \varphi \vee \exists x \psi$

② $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$

③ implicațiile ! să schimb dacă am în stg.

④ negațiile să nu ∄ în fața ∃ și ∀

S7.1 Să se găsească formele normale prenex pentru următoarele formule ale lui L:

(i) $\forall x\, (f(x) = c) \wedge \neg \underline{\forall z}\, (g(y,z) = d)$

$\mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x\, (f(x) = c) \wedge \exists z\, \neg(g(y,z) = d)$

$\mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x\, ((f(x) = c) \wedge \exists z\, \neg(g(y,z) = d)$

$\mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x\, \exists z\, ((f(x) = c) \wedge \neg(g(y,z) = d))$

(ii) $\forall y\,(\forall x\, P(x,y) \to \exists z\, Q(x,z))$

$\vDash \forall y\, \exists z\, (\forall x\, P(x,y) \to Q(x,z))$

↳ aici substituim

$\vDash \forall y\, \exists z\, \exists v\, (P(v,y) \to Q(x,z))$

↳ pt. că e în stânga implicației

? am scos întâi $\exists z$ pt. că nu avea nevoie de nicio modif. pt. că „ieșea direct"

(iii) $\exists x \forall y\, P(x,y) \vee \neg \exists y\, (S(y) \to \forall z\, R(z))$

$\vDash \exists x \forall y\, P(x,y) \vee \forall y\, \neg(S(y) \to \forall z\, R(z))$

↳ pot să-l scot așa da negat

$\vDash \exists x \forall y\, P(x,y) \vee \forall y \exists z\, \neg(S(y) \to R(z))$

$\vDash \exists x\, (\forall y\, P(x,y) \vee \forall y \exists z\, \neg(S(y) \to R(z)))$

$\vDash \exists x \forall v\, (P(x,v) \vee \forall y \exists z\, \neg(S(y) \to R(z)))$

$\vDash \exists x \forall v \forall y \exists z\, (P(x,v) \vee \neg(S(y) \to R(z)))$

y apare în 2 locuri dif deci îl substituim într-o parte doar pt. că avem $\vee$ și nu e echivalent (② t6.și)

(iv) $\exists z\, (\exists x\, Q(x,z) \vee \exists x\, R(x)) \to \neg(\neg \exists x\, R(x) \wedge \forall x \exists z\, Q(z,x))$

↳ merge scos din ambele părți fără substituție ①

$\vDash \exists z \exists x\, (Q(x,z) \vee R(x)) \to (\exists x \neg R(x) \vee \exists x \forall z\, \neg Q(z,x))$

$\vDash \exists z \exists x\, (Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x \forall z\, (\neg R(x) \vee \neg Q(z,x))$

$x \to a$, $z \to b$

$\vDash$ ~~$\exists z \exists x \exists a \forall b$~~

$\vDash \forall z \forall x \exists a \forall b\, ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (\neg R(a) \vee \neg Q(b,a))$

S7.2. Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunțul φ în formă normală prenex unde φ este, pe rând:

↳ „scăpăm" de $\exists$ care depinde doar de $\forall$

(i) $\varphi := \forall x \exists z\, (f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d))$

$\varphi_1 := \forall x\, (f(x) = c \wedge \neg(g(x,z) = d))_z\ h(x)$, h - un nou simbol de funcție de aritate 1

$\varphi_1 := \forall x\, (f(x) = c \wedge \neg(g(x, h(x)) = d))$ –"–

(ii) $\varphi = \forall y \exists z \exists u (P(u,y) \to Q(y,z))$

$\varphi_1 := \forall y (P(i(y),y) \to Q(y,h(y))$ unde h, i – ...

(iii) $\varphi := \exists x \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \vee \neg S(y) \to R(z))$

$\varphi_1 := \underbrace{\exists x}_{\text{constanta}} \forall u \forall y (P(x,u) \vee \neg S(y) \to R(h(u,y))) = \forall u \forall y (P(\ell,u) \vee \neg S(y) \to R(h(u,y)))$

, ℓ – const, h – ..

(iv) $\varphi := \forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u)))$

$\varphi_1 := \forall z \forall x \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(h(z,x)) \vee \neg Q(v, h(z,x)))$

unde h – ...

S7.3

(i) graf complet $\varphi_1 := \forall v_1 \forall v_2 (\neg(v_1 = v_2) \underset{\text{sau implică}}{\overset{\to}{\wedge}} \overset{\text{este muchie}}{\dot{E}}(v_1,v_2))$

(ii) graf. cu prop. că orice vârf are exact o muchie incidentă

$\varphi_2 := \forall v_1 \forall v_2 \dot{E}(v_1,v_2) \wedge \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (\dot{E}(v_1,v_2) \wedge \dot{E}(v_1,v_3) \underset{\text{sau} \to}{\wedge} (v_2 = v_3))$

(u oricare 2 noduri v_1, v_2 sunt conectate între ele și doar cu ele)

(iii) cel puțin un ciclu de lg. 3

$\varphi_3 := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 (\dot{E}(v_1,v_2) \wedge \dot{E}(v_2,v_3) \wedge \dot{E}(v_3,v_1))$

S7.4 ?