13.12.2023.

SEMINAR 11:

Ex 1. Să se det. punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y^3$ cu legătura $x^2+y^2=1$

Rez: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y^3$

$x^2+y^2=1 \iff x^2+y^2-1=0$

$g(x,y)=x^2+y^2-1$

Leg. $x^2+y^2=1$ generează multiplicatorul lui Lagrange (o nouă variabilă) $\lambda\in\mathbb{R}$

Se construiește funcția F:

$F:\Delta\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)=x^3+y^3+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)$

Se identifică punctele critice ale funcției F.

F funcție continuă pe $\Delta\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,\lambda)=x^3+y^3+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)$

1: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=(x^3+y^3+\lambda\cdot(x^2+y^2-1))'_x=3x^2+\lambda\cdot(2x)$, $\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$

2: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=(x^3+y^3+\lambda\cdot(x^2+y^2-1))'_y=3y^2+\lambda 2y$, $\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$

3: $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=(x^3+y^3+\lambda\cdot(x^2+y^2-1))'_\lambda=x^2+y^2-1$, $\forall(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l}1,2,3 \Rightarrow \exists \text{ toate derivatele parțiale} \\ 1,2,3 \text{ sunt f. continue pe } \mathbb{R}^3\end{array}\right\}\Rightarrow F\in C^1(\mathbb{R}^3)$

$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sunt m. deschise

$1,2,3=0 \Rightarrow \begin{cases}3x^2+2\lambda x=0\\3y^2+2\lambda y=0\\x^2+y^2-1=0 \quad 3\end{cases} \iff \begin{cases}x(3x+2\lambda)=0\\y(3y+2\lambda)=0\\x^2+y^2-1=0\end{cases}$ $\Rightarrow x=0$; $3x+2\lambda=0$; $\Rightarrow y=0$; $3y+2y=0$

$\left.\begin{cases}x=0\\y^2=1\ (3)\end{cases}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}y_1=1\\y_2=-1\end{array}\Big\}\Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=\frac{-3}{2}\\\lambda_2=\frac{3}{2}\end{array}$ $\quad (0,1,-\frac{3}{2})\in\mathbb{R}^3$; $(0,-1,\frac{3}{2})$

$\begin{cases}y=0\\x^2=1\ (3)\end{cases}\Rightarrow$ $\quad (1,0,-\frac{3}{2})$ $(-1,0,\frac{3}{2})$

$x, y \neq 0$

$3x + 2\lambda = 0$ și $3y + 2\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{-2\lambda}{3} \\ y = \frac{-2\lambda}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{4\lambda^2}{9} + \frac{4\lambda^2}{9} = 1 \Rightarrow 8\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\lambda_5 = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^3$$

$(x, y, \lambda) = (0, 1, -\frac{3}{2})$ renunț. la multiplicatorul lui Lagrange.

$\Rightarrow (0,1)$ pct. critic condiționat al funcției F

1) $d^2 f(0,1)(u,u) > 0$ $\forall u \neq 0 \Rightarrow (0,1)$ punct. de minim condiționat.

2) $d^2 f(0,1)(u,u) < 0$ $\forall u \neq 0 \Rightarrow (0,1)$ — " — maxim

3) $d^2 f(0,1)(u,u) = 0$ $\forall u \neq 0$, nu ne putem pronunța

4) în orice alt caz, $\Rightarrow$ nu este pct. de extrem

$f(x,y) = x^3 + y^3$

$\frac{df}{dx}(x,y) = 3x^2$, $\frac{df}{dy}(x,y) = 3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$

$= 0$

$= 0$

$= 6y$

$d^2 f(0,1)((a,b),(a,b)) =$ diferențiala de ord. 2 $=$

$a^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^2}(0,1) + a \cdot b \cdot \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,1) + b \cdot a \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) + b^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y^2}(0,1)$

$= 0 + 0 + 0 + 6b^2$

$\partial^2 f(0,1)((a,b),(a,b)) = 6b^2 \; \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$d^2 f(0,1)$

4