Examen final[1] la Algebră II, seria 11, 13.06.2021

Nume și prenume: ZAHARIA VLADUT IONUT

Grupa: 111

1. Fie polinomul $f(X) = X^3 + 2X - 4$.

a) Există o matrice diagonalizabilă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât polinomul $P_A(X)$ să fie egal cu $f(X)$? **(3p)**

b) Este $f(X)$ polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$? Dar în $\mathbb{Z}_5[X]$? **(4p)**

c) Determinaţi numărul de ideale maximale din $\mathbb{C}[X]$ în care este conţinut idealul generat de polinomul $f(X)$. **(3p)**

2.

a) Daţi exemplu de inel care are 13 ideale maximale şi este un produs direct de 5 inele distincte două câte două. **(3p)**

b) Este idealul $(2X^4 + 13X^3 + 27X^2 + 25X + 10, 2X^4 + 12X^3 + 23X^2 + 25X + 15)$ maximal în $\mathbb{Q}[X]$? **(4p)**

c) Să se determine (explicit, prin descrierea elementelor) un ideal maximal al inelului comutativ

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_{13} \right\}. \quad \textbf{(3p)}$$

3.

a) Daţi un exemplu de polinom simetric omogen de grad 14 în 4 variabile şi cu 6 termeni sau explicaţi de ce un astfel de polinom nu există. **(3p)**

b) Fie polinomul simetric $f(X_1, X_2, X_3) = (X_1^5 + X_2^5)(X_1^5 + X_3^5)(X_2^5 + X_3^5) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ şi $g \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ astfel încât $f(X_1, X_2, X_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, conform Teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice. Calculaţi $g(0, 0, 1)$ şi arătaţi că g nu este polinom simetric. **(4p)**

c) Fie $h \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ cu proprietatea că $\sigma^*(h) = \epsilon(\sigma) \cdot h$ pentru orice $\sigma \in S_3$. Demonstraţi că $h(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)h_1(X_1, X_2, X_3)$ pentru un $h_1 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ polinom simetric. **(3p)**

4. Considerăm inelul $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 4X + 5)$.

a) Daţi exemplu de un polinom de grad 5 a cărui clasă în inelul R este clasa polinomului $5X + 6$. **(3p)**

b) Determinaţi $U(R)$. **(3p)**

c) Este inelul R izomorf cu inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 16)$? **(2p)**

d) Determinaţi structura de inel pe mulţimea $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ astfel încât inelul obţinut să fie izomorf cu R. **(2p)**

---

[1]Fiecare subiect valorează 10p. Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor obţinute pe cele 4 subiecte.
Timp de lucru: 2 ore. Succes!