Examen[1] la Algebră Linară, seria 10, 11.02.2024

Nume și prenume: ____________________________

Grupa: ____

Subiectul 1.

a) Daţi exemplu, dacă există, de matrice $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care are forma eşalon redusă I_3. **(2p)**

b) Decideţi dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă (*i.e.* demonstraţi-o sau daţi un contraexemplu):
Dacă o matrice are numai intrări întregi, atunci şi forma ei eşalon redusă are numai intrări întregi. **(3p)**

c) Fie matricele $M, N \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Decideţi dacă M şi N au aceeaşi formă eşalon redusă. **(3p)**

d) Fie $P \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$. Ştiind că forma eşalon redusă a lui P este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi că primele două coloane ale lui P sunt $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ respectiv $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, determinaţi matricea P. **(3p)**

Subiectul 2.

a) Decideţi dacă mulţimea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ 0 & b-c & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ este un subspaţiu vectorial al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dacă da, calculaţi $\dim_{\mathbb{R}} W$. **(2p)**

b) Fie $W_1 = \langle (0,1,3), (1,1,1) \rangle$, $W_2 = \langle (-1,2,4), (3,5,0) \rangle \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$. Determinaţi o bază a lui $W_1 \cap W_2$. **(3p)**

c) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice având $\mathrm{rang}(A) = 1$. Demonstraţi că există matricele $B \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A = BC$. **(3p)**

d) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice având $\mathrm{rang}(A) = 1$. Demonstraţi că $\det(A + I_n) = 1 + \mathrm{Tr}(A)$. **(3p)**

Subiectul 3.

a) Fie $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu polinomul caracteristic $P(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$. Decideţi dacă M este diagonalizablă şi dacă $M + I_3$ este inversabilă. Justificaţi răspunsul. **(2p)**

b) Decideţi dacă următoarea afirmaţie este adevărată sau falsă (*i.e.* demonstraţi-o sau daţi un contraexemplu):
Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ valoare proprie a lui A şi μ valoare proprie a lui B, atunci $\lambda + \mu$ este valoare proprie a lui $A + B$. **(3p)**

c) Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ cu exact două valori proprii distincte $\lambda, \mu \in K$. Presupunem că $\dim V_\lambda = n - 1$. Demonstraţi că A este diagonalizabilă. **(3p)**

d) Fie $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), T(A) = {}^tA$. Demonstraţi că T este o aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară diagonalizabilă. **(3p)**

Subiectul 4. Fie $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ (al polinoamelor reale de grad cel mult n).

a) Pentru orice $n \geq 2$, daţi exemplu de o bază a lui $\mathcal{P}_n$ care conţine $1 + X^2$. Justificaţi răspunsul. **(2p)**

b) Demonstraţi că $H : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$, $H(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ este un produs scalar. Pentru $n = 2$, scrieţi matricea lui H în raport cu baza $\{1, X, X^2\}$ a lui $\mathcal{P}_2$. **(3p)**

c) Pentru $n = 2$, determinaţi o bază ortonormală a lui $\mathcal{P}_2$ în raport cu H. **(3p)**

d) Demonstraţi că dacă $(V, \langle\, \rangle)$ este un spaţiu euclidian finit dimensional, $W \leq_{\mathbb{R}} V$, $v \in V$ şi u proiecţia ortogonală a lui v pe W, atunci $\inf\limits_{w \in W} \|v - w\| = \|v - u\|$. **(3p)**

[1]**Scrieţi subiectele pe foi separate. Toate răspunsurile trebuie justificate. Nota lucrării este media notelor celor 4 subiecte. Nu există punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!**