EXAMEN, ALGEBRĂ I, 25 IANUARIE 2023

Puteţi folosi orice rezultat teoretic din curs. SUCCES!

Exerciţiul 1: Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+7, & x \leq -1, \\ -x^2+4, & -1 < x < 2, \\ 3x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Aflaţi $f([-3,2])$ şi $f^{-1}([0,2])$. (1 punct)

(b) Este f o funcţie injectivă ? Dar surjectivă? Argumentaţi. (1 punct)

(c) Aflaţi acei $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f^{-1}(y)$ are cel mai mare număr de elemente. (0,5 puncte)

Exerciţiul 2: Fie $D = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ şi G grupul funcţiilor bijective de la D în D (operaţia considerată este compunerea uzuală a funcţiilor).
(a) Arătaţi că $f_1(x) = \frac{1}{x}$ şi $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ sunt elemente ale grupului G şi calculaţi-le ordinele. (1,25 puncte)

(b) Arătaţi că subgrupul lui G generat de f_1 şi f_2 are 6 elemente. (1,25 puncte)

Exercţiul 3: Se consideră permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 13 & 8 & 3 & 14 & 2 & 6 & 12 & 11 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_{15}.$$

(a) Descompuneţi permutarea σ în cicli disjuncţi. (0,75 puncte)

(b) Calculaţi σ^{2023} şi ordinul permutării σ. (0,75 puncte)

(c) Rezolvaţi ecuaţia $\tau^3 = \sigma$ în S_{15}. (1 punct)

Exerciţiul 4: Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Arătați că $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ este un subinel în corpul uzual $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. (0,5 puncte)
(b) Determinați mulțimea elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. (1 punct)
(c) Fie $I = (1+i\sqrt{2})$ idealul generat de elementul $1+i\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, arătați că $a + bi\sqrt{2} \in I \iff 3 \mid a - b$ și demonstrați că are loc următorul izomorfism de inele:

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]/I \simeq \mathbb{Z}_3 \qquad \text{(1 punct)}$$