Seminar 1-2

(1) Să se determine elementele inversabile din $\mathbb{Z}_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

(2) Fie R un inel și $a \in R$ care este inversabil la stânga (adică există $b \in R$ cu $ba = 1$) și inversabil și la dreapta (adică există $c \in R$ cu $ac = 1$). Să se arate că a este inversabil.

(3) Să se dea exemplu de un inel R și de un element $a \in R$ care este inversabil la dreapta, dar nu este inversabil.

(4) Dacă R este inel și $a \in R$ este inversabil la dreapta, dar nu este inversabil, să se arate că a are o infinitate de inverși la dreapta.

(5) Fie R inel și $a, b \in R$. Atunci
$1-ab$ este inversabil la dreapta (stânga) $\Leftrightarrow$ $1-ba$ este inversabil la dreapta (stânga).

(6) Pe mulțimea $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim operațiile $+$ și $\cdot$ prin

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

pt. orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Atunci $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ.

(7) Fie A un corp (cu operațiile notate $+$ și $\cdot$) și fie B o mulțime pt. care există o bijecție $f: B \to A$. Definim pe B operațiile $\oplus$ și $\odot$ prin

$$x \oplus y = f^{-1}(f(x) + f(y))$$
$$x \odot y = f^{-1}(f(x) f(y))$$

pt. orice $x, y \in B$. Atunci $(B, \oplus, \odot)$ este corp, iar f este izomorfism de corpuri.

(8) Fie $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Atunci L este închisă în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor, și este corp comutativ împreună cu aceste operații. În plus, aplicația $g: L \to \mathbb{C}$, $g\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + bi$, este izomorfism de corpuri.

(9) Orice inel R se scufundă într-un inel de forma $End(G)$, cu G grup abelian.

(10) Fie $d \in \mathbb{N}$ care nu este pătrat perfect. Atunci $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$, iar $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este subcorp al lui $\mathbb{R}$.

(11) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al lui $\mathbb{R}$, iar $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ este subcorp al lui $\mathbb{R}$.

12) Să se determine morfismele de inele:
(i) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$; (ii) $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$; (iii) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

13) Fie $\mathcal{C}=\{ f \mid f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funcție continuă$\}$. Să se arate că:
(i) $\mathcal{C}$ este inel cu adunarea și înmulțirea (punctuale) funcțiilor.
(ii) Dacă $t\in[0,1]$, atunci aplicația $\varphi_t:\mathcal{C}\to\mathbb{R}$, $\varphi_t(f)=f(t)$ pt. orice $f\in\mathcal{C}$, este morfism de inele.
(iii) Orice morfism de inele $\varphi:\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ este de forma φ_t pt. un $t\in[0,1]$.

14) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Să se determine elementele nilpotente, divizorii lui zero și elementele idempotente din $\mathbb{Z}_n$, precum și numărul acestora.

15) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Să se arate că $\mathbb{Z}_n$ este inel local dacă și numai dacă există p prim și $k\in\mathbb{N}^*$ cu $n=p^k$.

16) Fie R un inel comutativ. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
(a) R este local
(b) $R\setminus U(R)$ este ideal în R
(c) Dacă $a,b\in R$ și $a+b\in U(R)$, atunci $a\in U(R)$ sau $b\in U(R)$.

17. Să se arate că singurele elemente idempotente într-un inel local sunt 0 și 1.

18. Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim și fie

$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b \right\}$. Să se arate că:

(i) A este subinel al lui $\mathbb{Q}$.

(ii) A nu este corp.

(iii) A este inel local.