Seminar 14

19.01.2024

Thm: $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in A[X]$

1) f nilpotent $\Leftrightarrow$ a_i nilpotent $\forall i = \overline{1,n}$

2) f inversabil $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_0 \text{ inversabil} \\ a_i \text{ nilpotent } \forall i = \overline{1,n} \end{cases}$

„$\Leftarrow$" $f = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underset{i}{a_0} + \underset{n}{a_1 X}}_{i} + \dots}_{} + a_n X^n}_{i}$

Aplicație: ① Det. nr de polinoame nilp/inversabile din $\mathbb{Z}_{12}[X]$, de grad 4.

• $12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \hat{a}$ nilp în $\mathbb{Z}_{12}$ dacă $a \in M_6 \Rightarrow \hat{a} \in \{\hat{0}, \hat{6}\}$

• $(a, 12) = 1 \Rightarrow a = \text{inv} \Rightarrow \hat{a} = \hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}$

$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$, $a_4 \neq \hat{0}$.

NILP: a_0, a_1, a_2, a_3 $\{\hat{0}, \hat{6}\}$ $2^4 = 16$
$\{\hat{6}\}$

INV: a_0 $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$
a_1 a_2 a_3 $\{\hat{0}, \hat{6}\}$
a_4 $\{\hat{6}\}$
$\Rightarrow 4 \cdot 2^3 = 32$

② Descomp $X^n - 1$ în factori ired. în $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}[X]$, pt $n = 2, 3, 4, 6$.

• $n=2$: $X^2 - 1 = \underbrace{(X-1)(X+1)}$ ired. în $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

• $n=3$: $X^3 - 1 = \underbrace{(X-1)(X^2+X+1)}_{\text{ired în } \mathbb{Q}, \mathbb{R}}$

în $\mathbb{C}$: $(X-1)(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)$ $\varepsilon_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

• $n=4$: $X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1) = \underbrace{(X-1)(X+1)(X^2+1)}_{\text{ired în } \mathbb{Q}, \mathbb{R}}$

în $\mathbb{C}$: $= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$

• $n=6$: $X^6-1 = (X^3-1)(X^3+1)$

$= (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$

ired în $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

în $\mathbb{C}$: $= (X-1)(X+1)(X-\varepsilon_1)(X+\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)(X+\varepsilon_2)$

③ Det pol. ired. de grad ≤ 4 din $\mathbb{Z}_2[X]$.

grad 1: $X+\hat{1}$, X

grad 2: $X^2+bX+1 \Rightarrow X^2+X+\hat{1}$

$X=1$: $1+b+1 \neq 0 \Rightarrow b=1$

grad 3: e ired. dacă nu are rădăcini

X^3+bX^2+cX+1

$X=\hat{1}$: $1+b+c+1=\hat{1} \Rightarrow b \neq c$

b	c
1	0
0	1

$\Downarrow$

X^3+X+1 ; X^3+X^2+1

grad 4: $3+1 \rightarrow$ e ired dacă nu are rădăcini

$2+2 \rightarrow \neq (X^2+X+\hat{1})\cdot(X^2+X+\hat{1}) = X^4+X^2+1$

$X^4+aX^3+bX^2+cX+1$

$X=1$: $a+b+c=\hat{1} \Rightarrow$ 100, ~~010~~, 001, 111

Obs: A = inel de caracteristică p = nr prim

$F: A \rightarrow A$, $F(k)=k^p$ = morf de inele

$\hookrightarrow \mathbb{Z}_7$ car $\mathbb{Z}_7 = 7$.

$F(k_1+k_2) = k_1^p + k_2^p$

$\parallel$

$(k_1+k_2)^p$

(4) Descompuneți în $\mathbb{Z}_7$: $X^{56} - X^{49} - X^7 + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$ în factori ired.

$$X^{7\cdot 8} - X^{7\cdot 7} - X^{7\cdot 1} + 1^{7\cdot 1} = (X^8 - X^7 - X + 1)^7$$

$$X^8 - X^7 - X + 1 = X^7(X-1) - (X-1) = (X^7 - 1)(X-1) =$$
$$= (X-1)^7 (X-1) = (X-1)^8$$

$$f = \left((X-1)^8\right)^7 \Rightarrow f = (X-1)^{56}$$

(5) $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$ ired în $\mathbb{Q}[X]$?

Obs: $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$

f ired în $\mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ired în } \mathbb{Q}[X] \\ \gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1 \end{cases}$

1) grad 1 · grad 3 $\Rightarrow$ f are o rădăcină.

$\frac{u}{v}$ rădăcină dacă $u \mid 1$ și $v \mid 1 \Rightarrow \frac{u}{v} \in \{\pm 1\}$

$X = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 - 2 + 3 - 1 + 1 \neq 0 \Rightarrow$ nu e răd

2) grad 2 · grad 2 $\Rightarrow h, g \in \mathbb{Z}[X]$,

$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2) = f$

$a_2 b_2 X^4 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) X^3 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_1) X^2 +$
$+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) X + a_0 b_0 = f$.

$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 = b_0 = \pm 1$

$a_2 b_2 = 1 \Rightarrow a_2 = b_2 = \pm 1$

$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 (b_1 + a_1) = 1 \Rightarrow a_1 + b_1 = \pm 1 = a_0$

$a_1 b_2 + b_1 a_2 = 2 \Rightarrow a_2 (b_1 + a_1) = 2 \Rightarrow (\pm 1) \cdot (\pm 1) = 2$ Fals

$\Rightarrow f$ ired în $\mathbb{Z}[X] \Rightarrow f$ ired în $\mathbb{Q}[X]$

Criteriul Eisenstein

$f = a_0 + a_1 X + \dots + X^n \in \mathbb{Z}[X]$

$\exists\, p \in \mathbb{N}$ a.î. $p \mid a_i$, $i = \overline{0, n-1}$ $\Big/ \Rightarrow f$ ired în $\mathbb{Q}[X]$

$p \neq 1$ $\quad p^2 \nmid a_0$

exp: $f = X^4 + 2X^3 + 12X^2 + 24X + 2$

$p = 2 \mid 2, 12, 24$ $\Big| \Rightarrow f$ ired în $\mathbb{Q}[X]$.

$4 \nmid 2$

$g = X^5 + 49X^4 + 56X + 7$.

$7 \mid 49, 56, 7$ $\Big| \Rightarrow f$ ired în $\mathbb{Q}[X]$

$49 \nmid 7$