Examen la Algebră Liniară, 27 ianuarie 2021, seria 10.
La fiecare subiect se acordă un punctaj între 1 şi 10; 1 punct este din oficiu, iar punctajele din paranteză indică numărul de puncte acordate pentru respectivul subpunct. De exemplu (2p) înseamnă că se acordă 2 puncte. Nota lucrării este media notelor celor 5 subiecte. Timp de lucru: 3 ore

1. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & m-3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & 7x_6 & = & 4 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & - & 4x_6 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & + & 11x_6 & = & m \end{array}$$

este compatibil. În acest caz să se rezolve sistemul.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ considerăm matricea $A_n \in M_n(\mathbf{R})$ care are

- 2 pe toate poziţiile $(i, n-i)$ cu $1 \leq i \leq n-1$;
- 3 pe toate poziţiile $(i, n+2-i)$ cu $2 \leq i \leq n$;
- 1 pe toate poziţiile (i, i) cu $1 \leq i \leq n$;
- Pe orice altă poziţie (dacă mai rămân poziţii în afară de cele de mai sus), A_n are 0.

Notăm $\Delta_n = det(A_n)$.
(a) (**4p**) Să se calculeze Δ_2, Δ_3 şi Δ_4 şi să se arate că $\Delta_n = (-1)^{n-1}\Delta_{n-1} + 6\Delta_{n-2}$ pentru orice $n \geq 4$.
(b) (**2p**) Să se arate că A_3 este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.
(c) (**3p**) Să se arate că $\Delta_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 2$.

3.(a) (**2p**) Să se arate că vectorii

$$w_1 = (1, 1, 2),\ w_2 = (-1, 3, 1),\ w_3 = (3, 4, 1)$$

formează o bază a $\mathbf{R}$-spaţiului vectorial $\mathbf{R}^3$.
(b) (**2p**) Fie V un $\mathbf{R}$-spaţiu vectorial care are baza $\{v_1, v_2, v_3\}$. Să se arate că

$$\{v_1 + v_3, v_2 + 3v_3, v_3\}$$

este bază a lui V.
(c) (**5p**) Fie V un $\mathbf{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbf{N}^*$. Fie $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ şi $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ două baze ale lui V, iar $(u_i^*)_{1\leq i\leq n}$ şi $(p_i^*)_{1\leq i\leq n}$ bazele lui V^* duale acestora. Să se arate că pentru orice aplicaţie liniară $f : V \to V$ avem

$$\sum_{1\leq i\leq n} u_i^*(f(u_i)) = \sum_{1\leq i\leq n} p_i^*(f(p_i))$$

4. Fie o aplicaţie liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ care are în baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$ matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (**2p**) Să se determine polinomul caracteristic al lui T şi valorile proprii ale sale.
(b) (**3p**) Pentru fiecare valoare proprie λ a lui T să se calculeze spaţiul V_λ de vectori proprii corespunzători, să se determine o bază a lui V_λ şi să se completeze această bază până la o bază a lui $\mathbf{R}^4$.
(c) (**1p**) Să se determine $Ker(T)$ şi $Im(T)$.
(d) (**3p**) Să se determine forma canonică Jordan a lui T.

5.(a) (**6p**) Fie aplicaţia liniară $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ care are în baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$ matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$. Să se arate că T este diagonalizabilă şi să se determine o bază a lui $\mathbf{R}^2$ în care matricea lui T este diagonală. Să se determine o matrice inversabilă U pentru care UAU^{-1} este matrice diagonală şi să se calculeze A^n pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.
(b) (**3p**) Să se reducă la forma canonică forma pătratică care în baza canonică este dată de

$$q(x) = 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3$$

.