SEMINAR 10

PUNCTE DE EXTREM LOCAL

Ex1 Să se det. punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Rezolvare: 1. Se studiază continuitatea funcției și se identifică punctele de discontinuitate

f cont pe $\mathbb{R}^2$ (comb. de fcții elementare)

2. Se studiază diferențiabilitatea funcției și se identifică punctele în care nu este diferențiabilă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3+3xy^2-15x-12y)'_x = 3x^2+3y^2-15 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3+3xy^2-15x-12y)'_y = 3x\cdot 2y - 12 = 6xy-12 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ - mulțime deschisă $\Rightarrow$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

3. Determinarea punctelor critice ale funcției f. Se egalează cu 0 toate derivatele parțiale ale funcției f și se formează un sistem. Se rez. sistemul pe mulțimea unde f este diferențiabilă.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \Rightarrow 3x^2+3y^2-15=0 \quad /:3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Rightarrow 6xy-12=0 \quad /:3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-5=0 \\ 2xy-4=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+2xy-9=0 \\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-9=0 \\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=9 \\ xy=2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x+y=+3 \\ x+y=-3\end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y=\pm 3 \\ x\cdot y = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$~~x+2~~$ $\quad \frac{2}{y}+y=+3 \Rightarrow \quad y^2+2=3y$

$y^2-3y+2=0$

$\Delta = 9-8=1 \Rightarrow y_1 = \frac{3+1}{2} = 2$

$y_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

$\frac{2}{y}+y=-3 \Rightarrow \quad y^2+3y+2=0$

$\Delta = 9-8=1 \Rightarrow y_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$

$y_2 = -2$

$y=1 \Rightarrow x=2$ $\qquad (2,1), (-2,-1), (1,2), (-2,-1) \in \mathbb{R}^2$

$y=-1 \Rightarrow x=-2$

$y=2 \Rightarrow x=1$ $\qquad \Rightarrow$ 4 puncte critice

$y=-2 \Rightarrow x=-1$

4. Se studiază diferențiabilitatea de ordinul 2 a funcției f și se identifică punctele în care f nu este diferențiabilă de 2 ori.

Mai derivăm parțial încă o dată

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(3x^2+3y^2-15)'_x = 6x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(6xy-12)'_x = 6y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(6xy-12)'_y = 6x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(3x^2+3y^2-15)'_y = 6y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

toate sunt fcții continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ - mulțime deschisă $\Bigg\} \Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ este diferențiabilă de 2 ori

5. Se calculează matricea asociată diferențialei de ordin 2 în fiecare pct. critic în care f este diferențiabilă de 2 ori și se verifică dacă punctul critic este punct de extr. local

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(1,2) \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(1,2) & \frac{\partial f}{\partial y^2}(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6} & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 6 = a_{11} > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 144 < 0 \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow$ $\boxed{(1,2) \text{ maxim local}}$

1) $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ punctul critic verificat este punct. de <u>minim</u> local

2) $\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix} \Big| \Rightarrow$ punctul critic -"- <u>maxim</u> local

3) $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$
și cel puțin unul este nul $\Big| \Rightarrow$ nu ne putem pronunța

4) $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$
-"- $\Big|$ -"-

5) în orice altă situație diferită de primele 4 $\Rightarrow$ <u>nu</u> este pct. de extrem local

$Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \Delta_1 = -12 < 0 \\ \Delta_2 = 144 - 36 = 108 > 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$ $\boxed{(-2,-1) = \text{maxim local}}$

$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 12 > 0 \\ \Delta_2 = 144 - 36 > 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$ $\boxed{(2,1) - \text{minim local}}$

$Hf(-1,-2) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = -6 < 0 \\ \Delta_2 = 36 - 144 < 0 \end{matrix} \Rightarrow$ $(-1,-2)$ nu este pct. de extrem local

Ex2 Det. punctele de extrem local ale funcției

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3$

f cont pe $\mathbb{R}^2$ (comb de funcții elem.)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, -ll-

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, -ll-

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6y$, -ll-

$\Rightarrow$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{rcases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{rcases} \Rightarrow$ nu ne putem pronunța cu ac. metodă și activăm pasul 6

!

6. Se aplică definiția
1) în punctele de discontinuitate
2) unde f nu este diferențiabilă
3) unde -ll- de 2 ori
4) în pct. critice unde nu ne putem pronunța

Se compară $f(x,y)$ cu $f(0,0)$ pe vecinătăți ale lui $(0,0)$ $(x \to 0, y \to 0)$ nu facem limita !!

$f(x,y) = x^3 + y^3$

$f(0,0) = 0$

! Gasim o val. pt $\underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{f(x,y) < 0}$ şi o val pt. $\underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{f(x,y) > 0}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x^2, y^2) = x^6 + y^6 \geq 0 = f(0,0) \\ f(-x^2, -y^2) = -x^6 - y^6 \leq 0 = f(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ nu este punct de extrem local}$$

! pt. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$, $(0,0)$ era minim local