Exerciții

1. Determinați punctele de extrem local ale funcțiilor de mai jos și precizați natura lor:

a) $f:(0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$.

$(0,\infty)^2 = (0,\infty)\times(0,\infty)$

b) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+3z^2-xy+yz+2xz$.

c) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$.

2. Arătați că ecuația $(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,-1)$ funcția implicită $y=y(x)$ și determinați $y'(1)$.

3. Arătați că ecuația $xz+ye^z=1$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,0,1)$ funcția implicită $z=z(x,y)$ și determinați $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ și $dz(1,0)$.

4. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $x+y=1$.

5. Fie $f:(0,\infty)^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy^2z^3$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $x+2y+3z=1$.

6. Determinați valorile extreme ale funcției $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x+3y+z$ atunci când variabilele sale sunt supuse restricției $x^2+y^2+z^2=11$.

7. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=y+z$. Determinați punctele de extrem global ale funcției $f|_{\overline{B}(0,3)}$.
$$\overline{B}(\underset{\substack{\parallel \\ (0,0,0)}}{0},3)$$

8. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=5x^2+3xy+y^2$. Determinați valorile extreme ale funcției $f|_{\overline{B}(0,1)}$.
$$\overline{B}(\underset{\substack{\parallel \\ (0,0)}}{0},1)$$

9. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,dx$.

10. Determinați:

a) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

b) $\int_1^\infty \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$.

c) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$.

d) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

e) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$.

f) $\int_1^2 \frac{1}{4-x^2}\,dx$.

11. Folosind eventual funcțiile Γ și B determinați:

a) $\int_0^\infty x^3 e^{-3x}\,dx$.

b) $\int_0^\infty x e^{-x^4}\,dx$.

c) $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2}\,dx$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

12. Fie $a\in\mathbb{R}$ și $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori a.î. integrala improprie $\int_a^\infty f(x)f''(x)\,dx$ este convergentă și limita $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)f'(x)\right)$ este finită.

Arătați că integrala improprie $\int_a^\infty \left(f'(x)\right)^2 dx$ este convergentă.

13. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $A\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită. Arătați că A este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon>0$, există două mul-

țimi elementare E_1 și E_2 astfel încât $E_1 \subset A \subset E_2$ și $vol(E_2) - vol(E_1) < \varepsilon$.

14. Arătați că mulțimea

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \ y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\}$$

nu este măsurabilă Jordan.

15. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \ ; \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \ ; \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Considerăm mulțimile:

$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \ y = f(x)\}$ (graficul lui f) și

$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (subgraficul lui f).

Arătați că:

a) f nu este integrabilă Riemann.

b) $G_f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(G_f) = 0$.

c) $\Gamma_f \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.