LABORATOR#3

EX#1 Scrieţi o funcţie în Python care are ca date de intrare matricea $\mathbf{L} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ corespunzători sistemului inferior triunghiular de ecuaţii liniare

$$\mathbf{L}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

iar ca dată de ieşire soluţia numerică, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a sistemului (1), obţinută prin *metoda substituţiei ascendente*.

Rulaţi funcţia de mai sus pentru:

(a) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Precizări suplimentare: Înainte de a aplica efectiv metoda substituţiei ascendente, trebuie verificate următoarele condiţii necesare:

(i) matricea $\mathbf{L}$ este pătratică;
(ii) matricea $\mathbf{L}$ este inferior triunghiulară;
(iii) matricea $\mathbf{L}$ şi vectorul $\mathbf{b}$ sunt compatibili;
(iv) matricea $\mathbf{L}$ este inversabilă.

EX#2 Scrieţi o funcţie în Python care are ca date de intrare matricea $\mathbf{U} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ corespunzători sistemului superior triunghiular de ecuaţii liniare

$$\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{2}$$

iar ca dată de ieşire soluţia numerică, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a sistemului (2), obţinută prin *metoda substituţiei descendente*.

Rulaţi funcţia de mai sus pentru:

(a) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Precizări suplimentare: Înainte de a aplica efectiv metoda substituţiei descendente, trebuie verificate condiţiile necesare corespunzătoare.

EX#3 Scrieţi o funcţie în Python care are ca date de intrare matricea $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ corespunzători sistemului de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3}$$

iar ca date de ieşire matricea superior triunghulară $\mathbf{U} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ şi vectorul $\widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$, obţinuţi prin *metoda de eliminare Gauss fără pivotare* (*MEGFP*) aplicată sistemului (3).

Aplicaţi MEGFP folosind funcţia de mai sus, apoi rezolvaţi sistemul superior triunghiular echivalent rezultat, i.e.

$$\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{b}}\,, \tag{4}$$

folosind funcţia de la **EX#2** pentru:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon \\ 2 \end{bmatrix}$, unde $\epsilon = 10^{-2k}$ cu $k \in \big\{1, 2, \ldots, 10\big\}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 1 & -1 \\ 40 & -60 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 17 + 10^{-12} \\ -1160 \\ -62 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.