Cursuri logică matematică

September 6, 2024

1 Curs 1

1.1 Teoria mulţimilor şi axiomele ZFC

Teoremă (Paradoxul lui Russell) : Nu există o mulţime R astfel încât pentru orice x, $[x \in R \iff x \notin x]$.

1. **Axioma extensionalităţii**: Pentru orice x, y, avem că dacă pentru orice z, $[z \in x \iff z \in y]$, atunci $x = y$.

   Teoremă: Există cel mult o mulţime vidă.

2. **Axioma comprehensiunii**: Pentru orice x şi pentru orice "proprietate" P, există o mulţime y, astfel încât pentru orice z, avem $z \in y \iff z \in x$ şi $P(z)$.

   Teoremă: Nu există mulţimea tuturor mulţimilor, adică o mulţime căreia să îi aparţină orice mulţime. Ca urmare, pentru orice x există y cu $y \notin x$.

   Teoremă: Există o mulţime vidă.

3. **Axioma perechii**: Pentru orice x, y există z a.î $x \in z$ şi $y \in z$.

   O mulţime de forma $\{x\}$ s.n. **singleton**. Notăm cu 0:=$\emptyset$, 1:=$\{\emptyset\}$, 2:=$\{0, 1\}$.

4. **Axioma reuniunii**: Pentru orice F există x a.î. pentru orice y, z cu $z \in y$ şi $y \in F$ avem $z \in x$.

   Ca mai înainte putem folosi axioma comprehensiunii pentru a obţine , pentru fiecare F mulţimea care conţine exact acei z a. î. există $y \in F$ cu $z \in y$. Vom nota această mulţime cu $\bigcup F$ şi o vom numi **reuniunea** mulţimii F.

   Atenţie! Aceasta nu este reuniunea obişnuită a două mulţimi, ci este, practic "reuniunea tuturor mulţimilor din F".

   $x \cup y := \bigcup\{x, y\}$
   Inductiv: $\{x, y, z\} := \bigcup\{\{x, y\}, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$

   Definim pentru orice x, $x^+ := x \cup \{x\}$, numind această mulţime **succesorul** lui x.

5. **Axioma mulţimilor părţilor**: Pentru orice x există y astfel încât pentru orice z cu $z \subseteq x$ avem $z \in y$.

   Propoziţie: Fie x, y, X, Y cu $x \in X$ şi $y \in Y$. Atunci $(x, y) \in P(P(X \cup Y))$.

   Def: $X \times Y := \{w \in P(P(X \cup Y))|$ există $x \in X, y \in Y$ cu $w = (x, y)\}$ conţine toate perechile ordonate din X cu Y şi se numeşte **produsul cartezian** al lui X şi Y.

   Def: Dacă F = mulţime nevidă, def. **intersecţia** mulţimii F ca fiind $\bigcap F := \{z \in \bigcup F|$ pentru orice x cu $x \in F$, avem $z \in x$.

   Def: Fie X o mulţime. Numim o mulţime $A \subseteq P(X)$ **mulţime Moore** pe X dacă $X \in A$, iar pentru orice $B \subseteq A$ nevidă avem $\bigcap B = A$.

   Teoremă: Fie X o mulţime şi A o mulţime Moore pe X. Atunci există un unic $C \in A$, numit **minimul lui** A, astfel încât pentru orice $D \in A$, avem $C \subseteq D$.

2 Curs 2

2.1 Relaţii binare

Propoziţie-Definiţie: Fie R o mulţime. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- există A şi B a. î. $R \subseteq A \times B$
- elementele lui R sunt perechi ordonate.

În acest caz, R s.n. **relaţie (binară)**, iar dacă A, B sunt ca mai sus, spunem ca $R =$ **relaţie între A şi B**.

2.2 Grafice şi funcţii

Def: Dacă $A=$ mulţime, notăm cu Δ_A şi denumim **relaţia diagonală** pe A: $\{p \in A \times A |$ există a a. î. $p = (a, a)\}$.

Def: Fie A, B mulţimi şi R o relaţie între A şi B. Spunem că R este **grafic între** A **şi** B dacă pentru orice $a \in A$ există şi e unic $b \in B$ a.î. $(a, b) \in R$.

Def: Fie A, B două mulţimi. Spunem că f este **funcţie între A şi B** (notăm cu $f : A \to B$ dacă există R un grafic între A şi B a.î. $f = (A, B, R)$. Pentru orice $a \in A$ notăm cu $f(a)$ acel unic $b \in B$ a.î. $(a, b) \in R$.

Propoziţie: Fie R o relaţie binară. U.A.S.E:

- există A, B a.î. $R =$ grafic intre A şi B
- $\forall x, y, z$ cu $(x, y), (x, z) \in R$, avem $y = z$ şi vom nota $R(x) := y = z$.

Propoziţie: Fie R o relaţie binară şi A, B, C, D a.î. R este grafic atât între A şi B, cât şi între C şi D. Atunci $A = C$.

Notaţii:

- $B^A := \{f \in (\{A\} \times \{B\} \times P(A \times B) | f$ funcţie $\}$.
- $f_*(X) := \{y \in B |$există $x \in X$ cu $f(x) = y\}$ şi s.n. **imaginea directă** a lui X prin f.
- $f^*(Y) := \{x \in A | f(x) \in Y\}$ şi s.n. **imaginea inversă** a lui Y prin f.
- Imf:=$f_*(A)$.

Obs: Există o unică funcţie $f = (\emptyset, A, B) = (\emptyset, A, \emptyset)$ şi s.n. **funcţia vidă**. Atunci avem $A^\emptyset = A^0$ este un sigleton, iar $\emptyset$ este **mulţimea iniţială**. Atunci obligatoriu $A = \emptyset$.

2.3 Comportamentul singleton-urilor faţa de funcţii

Fixăm un X singleton.
Fie A=mulţime.

- Există o unică funcţie $f : A \to X \implies \forall$ singleton este o **mulţime terminală** (noţiune **duală** celei de mulţime iniţială).
- Acum căutăm $f : X \to A \iff$ selectăm elementul din A în care va fi dus acel unic elemnt din X. $\forall a \in A$, notăm $\langle a \rangle := \{(0, a)\}$ şi cu $[a]_A := (1, A, \langle a \rangle)$ (acea unica funţie cu dom. 1 şi codom. A care duce singurul elem. al lui 1 în a).

2.4 Tipuri de relaţii binare pe o mulţime

Definiţie: Fie A o mulţime şi R o relaţie pe A. Notăm xRy $(x, y) \in R$. Atunci spunem că R este:

- **totală** dacă $\forall x, y \in A$ avem xRy sau yRx.
- **antisimetrică** dacă $\forall x, y \in A$ a.î. xRy şi $yRx \implies x = y$
- **de ordine parţială ($\leq$)** dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.
- **ireflexivă** dacă $\forall x \in A$ nu avem xRx
- **asimetrică** dacă $\forall x, y \in A$ cu xRy nu avem yRx

Prop-def: Fie A=mulţime, R= rel tranz pe A. U.A.S.E:

- R e ireflexivă
- R e asimetrică

În acest caz, Rs.n. **relaţie de ordine strctă** ($<$).

Def: Fie A= mulţime şi $\leq$ ordinea parţială pe A. Spunem că $\leq$ este o rel. de **bună ordine**, dc. $\forall B \neq \emptyset$ submulţime a lui A are un elem. minim.

2.5 Mulţimi inductive

Def: O mulţime A s.n. **inductivă** dc. $\emptyset \in A$ şi $\forall x \in A \implies x^+ \in A$.

Axioma infinitului: Există o mulţime inductivă.

Obs: Dc. F= mulţime nevidă de mulţimi inductive $\implies \bigcap F$ este inductivă.

Def: O mulţime inductivă s.n. **minimal inductivă** dc. $\forall B \subseteq A$ inductivă $\implies B = A$.

Prop: Fie A minimal inductivă $\implies \forall B$ inductivă avem $A \subseteq B$. (avem cel mult o mţ. minimal inductivă)

Prop: Fie u inductivă şi notăm cu $F := \{x \in P(u) | x \text{ inductivă } \}$. Atunci $y := \bigcap F$ este unica mulţime minimal inductivă.

2.6 Şiruri

Def: Fie A= mulţime. Numim **şir A-valuat** o familie care are imaginea inclusă în A şi domeniu fie un n nr. nat (şir finit), fie $\mathbb{R}$

Notaţie:

- $\mathbf{Seq_{fin}}(A)$:= mulţimea tuturor şirurilor A-valuate finite.
- $\mathbf{Seq}_n(A)$:= mulţimea tuturor şirurilor A-valuate de lungime n.

Teorema recursiei: Fie A= mulţime, $a \in A, g : P \times A \times \mathbb{N} \to A$. Atunci există o unică funcţie $f : \mathbb{N} \to A$ a.î. $f(0) = a$ şi $\forall n \in , f(n^+) = g(f(n), n)$.

Teorema recursiei complete: Fie A=mulţime, $g : \mathrm{Seq_{fin}}(A) \to A \implies \exists! f : \mathbb{N} \to A$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $f(n) = g((f(i))_{i<n})$.

Teorema recursiei parametrizate: Fie A, P= mulţimi, $a : P \to A, g : P \times \mathbb{N} \to A \implies \exists! f : P \times \mathbb{N} \to A$ a. î. $\forall p \in P, f(p, 0) = a(p)$ şi $\forall p \in P, \forall n \in \mathbb{N}, f(p, n^+) = g(p, f(p, n), n)$.

2.7 Dinamici punctate

Def: Un triplet (A, z, s) s.n. **dinamică punctată** dc. $z \in A$ şi $s : A \to A$.

Ex: $(,0, (.)^+)$

Def: Fie $(A, z, s), (A', z', s')$ dinamici punctate. Un **morfism** între ele este o funcţie $f : A \to A'$ cu $f(z) = z'$ şi $\forall a \in A, f(s(a)) = s'(f(a))$.

Def: O dinamică punctată (A, z, s) s.n. **iniţială** dacă pt. orice dinamică punctată $(A', z', s')\exists!$ morfism $f : A \to A'$.

Prop: $\forall$ 2 dinamici iniţiale sunt izomorfe.

Prop: Dacă 2 dinamici sunt izomorfe, iar una este iniţială, atunci şi cealaltă este iniţială.

Def: O dinamică punctată (A, z, s) s.n. **Peano** dc:

1. $z \notin \mathrm{Im} s$
2. s injectivă
3. $\forall B \subseteq A$ cu $z \in B$ şi $s_*(B) \subseteq B \implies B = A$.

Prop: Dacă 2 dinamici sunt izomorfe, iar una este Peano şi cealaltă este Peano.

Prop(Th Dedekind): Orice dinamică punctată Peano este izomorfă cu $(\mathbb{N}, 0, (.)^+)$.

Prop: O dinamică punctată este iniţială dacă şi numai dacă este Peano.

3 Curs 3

3.1 Mulţimi finite

Lemă: Un număr (şi ca urmare o mţ. finită) nu este în bijecţie cu o parte a sa.

Corolar:

- Dc. $n \neq m \in \mathbb{N}$, nu există bij. între n şi $m \implies$ nr. elem. mţ. finită este unic.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}, f(n) = n^+$ este bij $\implies \mathbb{N}$ este infinită.

Dem:

- Dc. $n \neq m \implies m < n$ sau $n < m$. Pp.w.l.o.g că $n < m$. Atunci $\forall p < n \implies p < m \implies n \subset m$. Din lema anterioară avem concluzia.
- injectivitatea a fost dem. mai devreme, iar surj. rezultă dintr-un ex. de seminar.

Def: Fie A, B. Spunem că A **are cadinalul mai mic sau egal ca** B (notat $A \preceq B$) dc. există o inj. de la A la B.

Prop: Fie A, B, C. Atunci:

- Dc. $A \preceq B$ şi $A \sim C$, atunci $C \preceq B$
- Dc. $A \preceq B$ şi $B \sim C$, atunci $A \preceq C$.

Teorema Cantor-Bernstein-Schröder: Dc. $X \preceq Y$ şi $Y \preceq X \implies X \sim Y$.

Lemă: Fie $A_1 \subseteq B \subseteq A$ şi $A \sim A_1 \implies A \sim B$.

3.2 Mulţimi numărabile

A **numărabilă** dc. $A = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Prop: Dc. A este infinită, $|B| = \aleph_0$ şi $A \subseteq B \implies |A| = \aleph_0$.

Prop-Def: Fie A o mulţime. UASE:

- A este finită sau numărabilă

- există B numărabilă şi $f : A \to B$ inj.

Atunci A s.n. **cel mult numărabilă**.

Prop: Fie A, B numărabile $\implies A \cup B$ numărabilă.

Prop: Mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Prop: Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ surjecţie. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este cel mult numărabilă.

Prop: Mulţimea $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ este numărabilă.

Prop: Pentru orice $X, P(X) \sim 2^X$.

Prop: $\forall X$ nu există surj. de la X la $P(X) \implies |X| < |P(X)|$.

Prop: $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Def: Pt. a, b 2 cardinali, aleg A, B cu $|A| = a, |B| = b, A \cap B = \emptyset$ şi punem:

- $a + b{:=}|A \cup B|$
- $a \cdot b{:=}|A \times B|$
- $a^b{:=}|A^B|$.

Prop: $\forall a$ cardinal, $a + a = 2 \cdot a$.

Prop. exponenţiere:

- $0 < a \implies b < b^a$
- $1 < b \implies a \leq b^a$

Prop-def: $2^{\aleph_0} = c$ s.n. **cardinalul(puterea) continuumului** şi:

- $\forall n > 0, |\mathbb{R}^n| = c$
- $|\mathbb{C}| = c$
- $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c$
- $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c$

4 Curs 4

4.1 Ordinali

Prop: Fie $(W, <)$ o mţ. bine ord. şi $s \subset W$ a.î. $\forall x \in W, y \in S$ cu $x < y \implies x \in S$. Atunci avem că există $a \in W$ a.î. $S = \{x \in W | x < a\} := W[a]$.

Def: O mţ. s.n. **tranzitivă** dacă $\forall x \in T \implies x \subseteq T$.

Notaţie: $\in_A := \{(x, y) \in A \times A | x \in y\}$ şi $\omega = \mathbb{N}$.

Def: O mţ. α s.n. **ordinal** dacă este tranzitivă şi $(\alpha, \in_\alpha)$ este mulţime bine ordonată.

Prop: Dacă α, β sunt ordinali, atunci:

- $\alpha \notin \alpha$
- α^+ ordinal
- $\beta \in \alpha \implies \beta$ ordinal
- $\alpha \subset \beta \implies \alpha \in \beta$

Def: Un ordinal în care nu este 0/ ordinal succesor s.n.**ordinal limită**.

Prop: Fie P o proprietate şi α un ordinal a.î. $P(\alpha) \implies \exists\beta$ ordinal a.î. $\forall\gamma$ ordinal cu $P(\gamma) \implies \beta \leq \gamma$.

Prop: Fie X o mţ. ale cărei elem. sunt ordinali. Notăm cu **sup**$X := \bigcup X$.Atunci:

- $\sup X$ este ordinal
- $\forall\alpha \in X, \alpha \leq \sup X$
- $\forall\gamma$ ordinal a.î. $\forall\alpha \in X, \alpha \leq \gamma \implies \sup X \leq \gamma$
- $(\sup X)^+ \notin X \implies \exists\alpha$ ordinal cu $\alpha \notin X$.

Prop: Ordinalul ω este limită.

În continuare vom dem. că ordinalii form. un **pseudo** sistem complet de reprezentatnţi pt. **pseudo** relaţia de izomorfism între mţ. bine ord.

Teoremă: Fie $(W, <)$ o mţ. bine ord. Atunci $\exists\alpha$ ordinal a. î. $(W, <) \sim (\alpha, \in_\alpha)$.

Axioma înlocuirii: Pt. orice operaţie F şi orice mţ. A, există o mţ. B a. î. $\forall x \in A, F(x) \in B$.

$$G(a) := \begin{cases} \text{acel ordinal } \beta \text{ izomorf cu } W[a] & \text{dc. } a \in T \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$$

Atunci vom avea $\alpha = \{G(a) | a \in T\}$.

4.2 Inducţia pe ordinali

Pp. inducţiei complete (pp II inducţie) pe ordinali: Fie P o proprietate şi pp că pt. orice ordinal α avem că dc. $\forall\beta < \alpha, P(\beta) \implies P(\alpha)$.Atunci $\forall\alpha$ ordinal avem $P(\alpha)$.

Pp. inducţiei (pp I de inducţie) pe ordinali: Fie P o proprietate şi pp. că:

- $P(0)$
- $\forall\alpha$ ordinal cu $P(\alpha)$, avem $P(\alpha^+)$
- $\forall\alpha$ ordinal limită a. î. $\forall\beta < \alpha, P(\beta) \implies P(\alpha)$

Atunci $\forall\alpha$ ordinal avem $P(\alpha)$.

Th. recursiei complete pe ordinali: Fie G o operaţie. Atunci $\forall\alpha$ ordinal, $\exists!y$ a. î. $\exists t$ grafic ce are dom. α^+ a.î. $\forall\beta < \alpha, t(\beta) = G(t_{|\beta})$ şi $t(\alpha)$.

Lemă: Fie G o operaţie. Fie β, δ ordinali şi t, u grafice cu dom. β, resp. δ a. î. $\forall\gamma < \beta, \delta \implies t(\gamma) = G(t_{|\gamma})$ şi $u(\gamma) = G(u_{|\gamma})$.
Atunci, $\forall\gamma < \beta, \delta$ avem $t_{|\gamma} = u_{|\gamma}$ şi $t(\gamma) = u(\gamma)$.

Th. recursiei pe ordinali: Fie G_1, G_2, G_3 operaţii. Atunci $\forall\alpha$ ordinal $\exists!y$ a.î. $\exists!t$ grafic cu dom. α^+ a. î. $\forall\beta \leq \alpha$:

- dc. $\beta = 0 \implies t(\beta) = G_1(0)$
- dc. $\exists\delta$ cu $\beta = \delta^+ \implies t(\beta) = G_2(t(\delta))$
- dc. β este limită $t(\beta) = G_3(t_{|\beta}), y = t(\alpha)$

Def: Definim **adunarea ordinalilior**:

- $\alpha + 0 := \alpha$
- $\alpha + \beta^+ := (\alpha + \beta)^+$
- dc β este ordinal limită, $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma | \gamma < \beta\}$

4.3 Operaţii cu ordinali

Obs: Adunarea nu este neapărat comutativă: $1 + \mathbb{N} = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N} + 1 = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$.

Def: Definim **înmulţirea şi exponenţierea**:

- $\alpha \cdot 0 := 0$
- $\alpha \cdot \beta^+ := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- dc. β ordinal limită, $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma | \gamma < \beta\}$
- $\alpha^0 := 1$
- $\alpha^{\beta^+} := \alpha^\beta \cdot \alpha$
- dc. β ordinal limită, $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\}$

Notaţii: Punem:

- $\omega_1 := \omega$
- $\omega_{n^+} := \omega^(\omega_n)$
- $\epsilon_0 := \sup\{\omega_n | n \geq 1\}$

Def: U ordinal s.n. **iniţial** dc. nu este echipotent cu un ordnal mai mic ca el.

Teoremă: Pt. orice mţ. bine-ordonată există şi este unic un ordinal iniţial echipotent cu ea. Acest ordinal se va numi **cardinal**.

4.4 Ordinali Hartogs

Prop-def: $\forall A$ mţ. $\exists \alpha$ ordinal a .î. u este echipotent cu nicio submulţime a lui A. Deci există un ordinal minim cu această prop, care este iniţial. Acesta s. n. **ordinalul Hartogs** al lui A şi îl notăm cu $h(A)$.

Def: Definim alef-uri pt. α ordinal:

- $\aleph_{\alpha^+} := h(\aleph_\alpha)$
- dc. α este ordinal limită $\aleph_\alpha := \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\}$

Prop: $\forall \alpha$ ordinal avem că $\alpha < \aleph_\alpha$ şi $\aleph_\alpha$ este ordinal iniţial infinit.

Prop: Dc. $\beta < \aleph_\gamma$ ordinal iniţial infinit $\implies \exists \alpha < \gamma$ ordinal cu $\beta = \aleph_\alpha$.

5 Curs 5

5.1 Axioma alegerii

Prop(Axioma alegerii): UASE:

- $\forall S$ cu $\emptyset \notin S, \exists (g_y)_{y \in S}$ a.î. $\forall y \in S \implies g_y \in y$
- $\forall I$ şi orice fam. de mulţimi nevide index. după $i, (F_i)_{i \in I}$, avem că $\prod_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
- $\forall I$ şi orice fam. de mulţimi nevide, disjuncte 2 câte 2 index. după $i, (D_i)_{i \in I}$, avem că $\prod_{i \in I} D_i \neq \emptyset$.

5.2 Lema lui Zorn

Def: Fie $(A, \leq)$ o mţ. ordonată şi $B \subseteq A$. B s.n. **lanţ** al lui A dc. $\forall x, y \in B$, avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Def: O mţ. $(A, \leq)$ s.n. **inductiv ordonată** dc. orice lanţ al său admite un majorant.

Lema lui Zorn: Orice mţ. inductiv ordonată admite un element maximal.

Teorema bunei ordonări(Zermelo): Orice mţ. este bine ord.

Obs: Axioma alegerii, Lema lui Zorn şi Teorema bunei ord sunt echivalente.

Teoremă(Axioma alegerii dependente): Fie $X \neq \emptyset$ şi $R \subseteq X \times X$ a.î. $\forall x \in X, \exists Y \in X$ cu $(x, y) \in R$. Atunci $\exists (x_n)$ şir cu $(x_n, x_{n+1}) \in R$.

5.3 Cardinali

Prop: $\forall \alpha$ card infinit $\implies \alpha \cdot \alpha = \alpha$.

Prop: Fie X infinită. Atunci există $Y \subset X, Y \neq X$ cu $X \sim Y$.

Prop: Dc. $P_n(X) := \{A \in P(x) | |A| = n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ atunci $|P_n(X)| = |x|$.

5.4 Spaţii vectoriale

Prop: Fie K un corp şi V un K-spaţiu vect. şi $\mathbb{B} \neq \emptyset$ bază pt. V. Atunci $\max\{|\mathbb{B}|, |K|\} \leq |V|$.

Prop: Fie K un corp infinit şi V un K-spaţiu vect. şi $\mathbb{B} \neq \emptyset$ bază finită pt. V. Atunci $|K| = |V|$. Dc. $\mathbb{B}$ infinită atunci $\max\{|\mathbb{B}|, |K|\} = |V|$.

Prop: Fie $\mathbb{B}$ o bază pt. $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Atunci $|\mathbb{B}| = c$.

6 Curs 6

Axioma regularităţii: Pentru orice mţ. nevidă $a, \exists b \in a$ cu $b \cap a = \emptyset$.

Consecinţe:

- Nu există x cu $x \in x$.
- Nu există x, y cu $x \in y \in x$
- Nu există x, y, z cu $x \in y \in z \in x$
- Nu există $n \in \mathbb{N}$ şi $(x_i)_{i<n^+}$ a.î. $x_0 \in x_n$ şi, pt. orice $i < n$, avem $x_{i^+} \in x_i$
- **Pp şirului:** Nu există $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a.î. $\forall i \in \mathbb{N}$ să avem $x_{i^+} \in x_i$.

Prop: Pp. şirului implică Axioma regularităţii.

Def: Definim un şir de mţ. indexat după ordinali, care s.n. **ierarhia von Neumann**: $V_0 := \emptyset, \forall \beta$ ordinal, punem $V_{\beta^+} := P(V_\beta)$ şi pt. orice ord. lim, punem $V_\alpha := \bigcup\{V_\gamma | \gamma < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma$.

6.1 Rangul

Def: Fie x mţ. a.î. $\exists \alpha$ minim cu $x \in V_\alpha \implies \exists \beta$ cu $\alpha = \beta^+$. Atunci β s.n. **rangul lui** x şi îl notăm cu $\mathbf{rg}(x)$.

Prop: Fie α un ordinal, $x \in v_\alpha, y \in x \implies \exists \delta < \alpha$ cu $y \in V_\delta$.

Prop: Fie α un ordinal. Atunci:

- Dc. $\gamma < \alpha \implies v_\gamma \subseteq V_\alpha$
- Avem că V_α e tranzitivă.

Prop: Fie x o mţ. ale cărei elem. au toate rang. Atunci x are rang.

Def: Pt. o mţ. X, definim $T_0(X) := X$ şi apoi, recursiv, $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n^+}(X) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(X)$. Atunci $T(X)$ s.n. **închiderea tranzitivă a lui** X.

Obs: $T(X)$ este tranzitivă şi $\forall Y, X \subseteq Y \implies T(X) \subseteq X$.

Prop (Pp rangului): Orice mţ. are rang.

Axioma inducţiei: Pentru orice proprietate P a.î. $\forall x$, avem că dc. $\forall y \in x$ avem $P(y) \implies P(x)$, atunci este adevărat că $\forall x, P(x)$.

Prop: Axioma inducţiei este echiv cu Pp. rangului.

Prop-def: Fie $G \subseteq P(I)$. UASE:

- $\forall S_1, S_2 \in G \implies S_1 \cup S_2 \in G$
- $\forall A \subseteq G$ finită nevidă, $\bigcap A \in G$.

În acest caz spunem că G este **închisă la intersecţii finite**.

6.2 Filtre

Def: S.n.**filtru pe** I o submulţime F a lui $P(I)$ a. î.:

- $\emptyset \notin F$
- $I \in F$
- F închisă la intersecţii finite
- $\forall S_1, S_2 \subseteq I$ cu $S_1 \in F, S_1 \subseteq S_2 \implies S_2 \in F$.

Def: Fie $G \subseteq P(I)$

- Spunem că G are **proprietatea slabă a intersecţiilor finite** dc. $\forall A \subseteq G$ finită nevidă, $\bigcap A \neq \emptyset$
- Spunem că G are **prop. tare a intersecţiilor finite** dc. $\emptyset \notin G$, iar G este închisă la intersecţii finite.

Obs: Orice filtru posedă prop. tare a intersecţiilor finite.

Prop-def: Fie $G \subseteq P(I)$ care are prop intersecţiilor finite. Dc $G \neq \emptyset \implies \{S \in P(I) | \exists A \subseteq G$ finită cu $\bigcap A \subseteq S\}$ este filtru care include G şi s.n. **filtru generat de G**.

Obs: Dc. $G = \emptyset$ spunem că filtrul generat de G este $\{I\}$.

Def: Filtrul generat de $\{T\}$ se notează cu $[T)$ şi s.n. **filtru principal**.

Corolar: Fie $G \subseteq P(I)$. UASE:

- G are prop. intersecţiilor finite.
- Există un filtru pe I care include pe G.

6.3 Ultrafiltre

Prop-def: Fie U un filtru pe I. UASE:

- $\forall F$ filtru cu $U \subseteq F \implies U = F$
- $\forall S_1, S_2 \subseteq I$ cu $S_1 \cap S_2 \in U$, avem, $S_1 \in U$ sau $S_2 \in U$
- $\forall S \subseteq I$ avem exact una dintre $S \in U$ sau $I - S \in U$.

În acest caz U s.n. **ultrafiltru**.

Prop: Fie $U \subseteq P(I)$. Atunci U este ultrafiltru $\iff$ $\chi_U : P(I) \in 2$ satisface urm prop, care o fac să fie **probabilitate finit aditivă**:

- $\chi_U(\emptyset) = 0$
- $\chi_U(I) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_i)_{i<n}$ familie de submulţimi ale lui I a.î. $\forall i, j < n$ cu $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ avem: $\chi_U(\bigcup_{i<n} A_i) = \sum_{i<n} \chi_U(A_i)$.

Prop (Galvin şi Horn, 1970): Fie $U \subseteq P(I)$. Atunci U este un ultrafiltru $\iff$ $\forall (A_i)_{i<3}$ fam. de submulţimi ale lui I a.î. $\forall i \neq j < 3, A_i \cap A_j]\emptyset, A_0 \cup A_1 \cup A_2 = I$ avem că $\exists! i < 3$ cu $A_i \in U$.

Teorema de existenţă a ultrafiltrului Fie F un filtru. Atunci $\exists U$ ultrafiltru cu $F \subseteq U$.

Corolar: Fie $G \subseteq P(I)$. UASE:

- G are prop. intersecţiilor finite
- $\exists$ un filtru pe I care include G
- $\exists$ un ultrafiltru pe I care include G

Obs: Orice ultrafiltru principal pe I este de forma $[\{x\}), x \in I$.

Def: Fie I infinită. Atunci mţ. $\{T \subseteq I | I - T$ este finită$\}$ este foltru pe I şi s.n. **filtru Fréchet pe** I.

7 Curs 7

7.1 Logică propoziţională

Notaţii:

- $\perp$:=0
- $\top$:=1
- $\neg p$ = non p

Prop: Fie $p, q \in 2$. Atunci:

- $\neg p = (p \to \perp), \top = \neg \perp = (\perp \to \perp)$
- $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$

Notaţie:

- $S(Q) = Q \cup \{\perp, \to\}$, unde Q = mţ. tuturor variabilelor/simbolurilor propoziţionale.
- $k := |Q|$ şi $f : k \to Q$ bij.
- $\forall \alpha \in k, f(\alpha) := v_\alpha$

7.2 Formule

Def: **Formulele** vor fi elem. ale lui $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$, iar prop. pe care $A \subseteq \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(S(Q))$ trebuie să le verifice ca să fie **mţ. de formule** vor fi:

- $\mathrm{Seq}_1(Q) \subseteq A$ (variab. sunt formule)

- $\langle \bot \rangle \in A$
- dc. $\phi, \psi \in A \to \phi\psi \in A$.

Minimul ei se notează cu $E(Q)$, iar elem. ei s.n. **formule/enunţuri** peste Q.

Obs: În general scriem $\phi\psi$ în loc de $\phi \to \psi$.

Notaţii:

- Dc. Σ= alfabet, atunci $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ = **Mţ. cuvintelor**
- dc. $a, b \in \mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ notăm cu $ab = \{(0, a), (1, b)$ şir
- **lungimea** unui cuv = dom. său
- O submulţime a lui $\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$ s.n. **limbaj formal**.

Pp. inducţiei pe formule: Fie $B \subseteq E(Q)$ a.î.:

- $\mathrm{Seq}_1(Q) \subseteq B$
- $\langle \bot \rangle \in B$
- dc. $\phi, \psi \in B \implies \phi\psi \in B$

Atunci $B = E(Q)$.

Prop. de citire: Fie $\chi \in E(Q)$. Atunci se întâmplă exact una dintre urm. alternative:

- $\chi \in \mathrm{Seq}_1(Q)$
- $\chi = \langle \bot \rangle$
- $\exists \phi, \psi \in E(Q)$ cu $\chi =\to \phi\psi$.

Lemă: Fie $\chi \in E(Q)$. Atunci nu există $\alpha \in E(Q)$ care să fie segment iniţial strict pe χ.

Prop. de citire unică a formulelor: Fie $\phi, \psi, \phi', \psi' \in E(Q)$ cu $\to \phi\psi =\to \phi, \psi,$. Atunci $\phi = \phi', \psi = \psi'$.

7.3 Operaţii pe $E(Q)$

Def: Definim:

- $\phi \to \psi :=\to \phi\psi$
- $\top {:=} \bot {\to} \bot$
- $\neg\phi := \phi \to \bot$
- $\phi \wedge \psi := \neg(\phi \to \neg\psi)$
- $\phi \vee \psi := (\neg\phi) \to \psi$
- $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

Pp. recursiei pe formule: Fie A o mţ. şi $G_0 : Q \to A, G_\bot \in A, G_\to : A^2 \to A$. Atunci $\exists! F : E(Q) \in A$ cu:

- $\forall v \in Q, F(v) = G_0(v)$
- $F(\bot) = G_\bot$
- $\forall \phi, \psi \in E(Q), F(\phi \to \psi) = G_\to(F(\phi), F(\psi))$.

7.4 Mulţimea variabilelor

Corolar: $\exists! Var : E(Q) \to P(Q)$ cu

- $\forall v \in Q, Var(v) = \{v\}$
- $Var(\bot) = \emptyset$
- $\forall \phi, \psi \in E(Q), Var(\phi \to \psi) = Var(\phi) \cup Var(\psi)$.

Corolar: $\forall \phi \in E(Q), Var(\phi)$ este finită.

7.5 Evaluarea formulelor:

Fie $e : Q \to 2$. Atunci $\exists! e^+ : E(Q) \to 2$ a.î.:

- $\forall v \in Q, e^+(v) = e(v)$
- $e^+(\bot) = \bot = 0$
- $\forall \phi, \psi \in E(Q), e^+(\phi \to \psi) = e^+(\phi) \to e^+(\psi)$.

Corolar: Fie $e : Q \to 2, \phi, \psi \in E(Q)$. Atunci:

- $e^+(\neg\phi) = \neg e^+(\phi)$
- $e^+(\phi \land \psi) = e^+(\phi) \land e^+(\psi)$
- $e^+(\phi \lor \psi) = e^+(\phi) \lor e^+(\psi)$
- $e^+(\phi \leftrightarrow \psi) = e^+(\phi) \leftrightarrow e^+(\psi)$.

7.6 Tautologii

Def: Fie $\phi, \psi \in E(Q)$

- Fie $e : Q \to 2$. Sunem că e **satisface/e model pt.** ϕ şi notăm cu $e \models \phi$ dc. $e^+(\phi) = 1$.Mţ. modelelor unei formule ϕ se notează cu $Mod(\phi)$.
- Spunem că ϕ e **tautologie** şi scrie $\models \phi$ dc. $\forall e, e \models \phi$. Adică $Mod(\phi) = 2^Q$.
- Spunem că ϕe **satisfiabilă** dc. $\exists e$ cu $e \models \phi$.
- Spunem că ϕe **nesatisfiabilă** dc. $\forall e$ ϕ e nesatsifăcubilă.
- Spunem că **din** ϕ **se deduce semantic** ψ şi scriem $\phi \models \psi$ dc. $\forall e$ cu $e \models \phi$ avem $e \models \psi$.

Prop: Fie $\phi \in E(Q)$. Atunci:

- ϕ e tautologie $\iff$ $\neg\phi$ e nesatisfiabiă
- ϕ e nesatisfiabilă $\iff$ $\neg\phi$ e tautologie.

Prop: Fie $\phi, \psi \in E(Q)$. Atunci $\phi \models \psi \iff \models \phi \to \psi$.

7.7 Mulţimi diferite de variabile

Prop: Fie $Q' \subseteq Q$, deci $E(Q') \subseteq E(Q)$. Fie $f \in 2^Q, e := f_{|Q'}$. Atunci $\forall \phi \in E(Q'), e^+(\phi) = f^+(\phi)$.

Corolar: Fie $e_1, e_2 \in 2^Q, \phi \in E(Q)$. Pp că $\forall v \in Var(\phi), e_1(v) = e_2(v)$. Atunci $e_1(\phi) = e_2(\phi)$.

Def: O **funcţie booleană pe** I este o funcţie de la 2^I la 2.

Corolar: Dc. Q e finită, $|E(Q)/\sim| = 2^{2^{|Q|}}$.

Prop: Fie A infinită. Atunci $|\mathrm{Seq}_{\mathrm{fin}}(A)| = |A|$.

Prop: Dc. Q infinită, atunci $|E(Q)| = |Q|$.

8 Curs 8

8.1 Mulţimi de formule

Lemă: Fie $\Gamma \in E(Q), \Delta \subseteq \Gamma, e \in Mod(\Gamma)$. Atunci $e \in Mod(\Delta)$, unde $Mod(\Gamma)$ este mţ. de e cu $e \models \phi, \forall \phi \in \Gamma$.

Lemă: Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$ şi $e : Q \to 2$. Atunci $e \models \Gamma \iff [\forall \Delta \subseteq \Gamma \text{finită}, e \models \Delta]$.

8.2 Deducţie semantică pe mulţimi

Def: Fie $\Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$. Spunem că Γ **se deduce semantic din** ϕ şi scriem $\Gamma \models \phi$ dc. $\forall e$ cu $e \models \Gamma$ avem $e \models \phi$.

Lemă: Fie $\Gamma \subseteq E(Q), \Delta \subseteq \Gamma, \phi \in E(Q)$ cu $\Delta \models \phi$. Atunci $\Gamma \models \phi$.

Lemă: Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Atunci Γ este nesatisfiabilă $\iff G \models \perp$.

Lemă: Fie $\Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \models \phi \iff$ $G \cup \{\neg\phi\}$ este nesatisfiabilă.

Pro: Fie $\Gamma \subseteq E(Q), \phi, \psi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \iff \Gamma \models \phi \to \psi$.

8.3 Teorema de compacitate

Th. de compacitate - TK1: Fie $\Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$. Atunci $\Gamma \models \phi \iff \exists \Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \phi$.

Th. de compacitate - TK2: O mţ. de formule este satisfiabilă $\iff$ este finit satisfiabilă.

Def: Fie $I \neq \emptyset, e = (e_i)_{i \in I}$ o fam. de evaluări (elem. ale lui 2^Q şi U un ultrafiltru pe I. Numim **ultraprodusul lui** e **relativ la** U funcţia $e^U : Q \to 2, e^U(x) = 1 :\iff \{i \in I | e_i(x) = 1\} \in U$.

Th. fundam. a ultraproduselor: Fie $I \neq \emptyset, e = (e_i)_{i \in I}$ o fam. de evaluări (elem. ale lui 2^Q şi U un ultrafiltru pe I.Atunci $\forall \chi \in E(q), e^U \models \chi \iff \{i \in I | e_i \models \chi\} \in U$.

Th. fundam. a ultraproduselor - var 2: Fie $I \neq \emptyset, e = (e_i)_{i \in I}$ o fam. de evaluări (elem. ale lui 2^Q şi U un ultrafiltru pe I. Atunci, $\forall \Delta \subseteq E(Q)$ finită $e^U \models \Delta \iff \{i \in I | e_i \models \Delta\} \in U$.

8.4 Grafuri

Def:

- Numim **graf neorientat** o pereche (A, R) cu R rel. sim+ireflexivă pe A.
- $k \in \mathbb{N}$. O $k-$**colorare pe un graf** este o funcţie $f : A \to k$ cu $\forall x, y \in A$ cu xRy, avem $f(x) \neq f(y)$.
- Dc. există o $k-$colorare, atunci raful este $k-$**colorabil**.

Teoremă: Un graf este $k-$colorabil $\iff \forall$ subgraf finit al său este $k-$colorabil.

8.5 Spaţii topologice

Def: Un **spaţiu topologic** este o pereche (X, τ) unde $\tau \subseteq P(X)$ şi:

- $\emptyset, X \in \tau$
- $\forall A, B \in \tau, A \cap B \in \tau$
- $\forall (A_i)_{i \in I} \in \tau, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Elem. lui τ s.n. **deschişii spaţiului**. $A \subseteq X$ cu $X - A \in \tau$ s.n. **închişii spaţiului**.

Def: Un **spaţiu topologic def. prin închişi** este o pereche (X, τ) unde $\tau \subseteq P(X)$ şi:

- $\emptyset, X \in \tau$
- $\forall A, B \in \tau, A \cup B \in \tau$
- $\forall (A_i)_{i \in I} \in \tau, \bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$.

Spaţii asociate logicii prop: Iau $\rho \subseteq P(2^Q)$ mţ. tuturor mţ. de forma $Mod(\Gamma)$ cu $\Gamma \subseteq E(Q)$. Atunci $(2^Q, \rho)$ este sp. top. def. prin închişi.

Def: (X, τ) este un **sp. top. compact** dc. $\forall (A_i)_{i \in I}$ fam. de deschişi cu $\bigcup_{i \in I} A_i = X$, avem că există $J \subseteq I$ finită cu $\bigcup_{i \in J} A_i = X$.

Def: (X, τ) este un **sp. top. compact** dc. $\forall (A_i)_{i \in I}$ fam. de închişi cu $\forall J \subseteq I$ finită cu $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, avem că $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

th. de compacitate - TK3: Sp.top def. rin închişi $(2^Q, \rho)$ este compact.

9 Curs 9

9.1 Deducţie sintactică

Def: Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Definim **mţ. consecinţelor sintactice ale lui** Γ ca fiind acea submulţime A a lui $E(Q)$ care verifică urm. prop:

- $\Gamma \subseteq A$
- $\forall \phi, \psi, \chi \in E(Q)$, avem:
  A1: $\phi \to (\psi \to \phi) \in A$
  A2: $((\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to \chi)) \in A$
  A3: $\neg\neg\phi \to \phi \in A$
- **MP:** $\forall \phi, \psi \in E(Q)$ cu $\phi, \phi \to \psi \in A$ avem $\psi \in A$.

Această mţ. se otează cu $Thm(\Gamma)$ şi $\forall \phi \in E(Q)$ spunem că Γ **se deduce sintactic din** ϕ şi scriem $\Gamma \vdash \phi$ dc. $\pi \in Thm(\Gamma)$. cea mai mica mţ. care verif. rel. s.n. **mţ. teoremelor formale** şi se notează cu Thm.

Pp. inducţiei pe deducţia semnatică: Fie $\Gamma, B \subseteq E(Q)$ a. î.:

- $\Gamma \subseteq B$
- $\forall \phi, \psi, \chi \in E(Q)$, avem:
  A1: $\phi \to (\psi \to \phi) \in B$
  A2: $((\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)) \in B$
  A3: $\neg\neg\phi \to \phi \in A$
- **MP:** $\forall \phi, \psi \in E(Q)$ cu $\phi, \phi \to \psi \in B$ avem $\psi \in B$.

Atunci $Thm(\Gamma) \subseteq B$.

Corolar: Fie $\Gamma, \Delta \subseteq E(Q)$ cu $\Gamma \subseteq \Delta$. Atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$.

Corolar: Fie $\Gamma \subseteq E(Q)$. Atunci $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$.

Prop: $\forall \phi \in E(Q)$, avem $\vdash \phi \to \phi$.

Th. deducţiei sintactice: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi, \psi \in E(Q)$ avem că $\Gamma \vdash \phi \to \psi \iff \Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Prop: $\forall \pi, \psi, \chi \in E(Q)$ avem $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$.

Prop: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi, \psi, \chi \in E(Q)$ cu $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ şi $\Gamma \vdash \psi \to \chi$, avem $\Gamma \vdash \phi\chi$.

9.2 Metoda reducerii la absurd

Prop: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$ cu $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp$, avem $\Gamma \vdash \phi$.

Prop: Fie $\phi, \psi \in E(Q)$. Atunci avem:

- $\vdash \psi \to (\neg\phi \to \neg(\psi \to \phi))$
- $\vdash (\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$
- $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \phi)$
- $\vdash (\neg\phi \to \phi) \to \phi$.

Prop: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi, \psi \in E(Q)$ cu $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \phi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \phi$, avem $\Gamma \vdash \phi$.

9.3 Teorema de corectitudine

Th. de corectitudine: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$ cu $\Gamma \vdash \phi$, avem $\Gamma \models \phi$.

Corolar: $\forall \phi \in E(Q)$ cu $\vdash \phi$, avem $\models \phi$.

Def: Spunem că $\Gamma \subseteq E(Q)$ este **consistentă** dc. $\Gamma \nvdash \perp$ şi inconsitentă altfel.

Th. de corectitudine -var2: Orice mţ. satisfiabilă este consistenă.

Notaţii: $\forall v \in Q, e : Q \to 2$:

$$v^e = \begin{cases} v & \text{pentru } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{pentru } e(v) = 0 \end{cases}$$

Notăm $W^e := \{v^e | v \in W\}$

Prop: Fie $e : Q \to 2, \phi \in E(Q)$. Atunci:

- dc. $e^+(\phi) = 1$, atunci $Var(\phi)^e \vdash \phi$
- dc. $e^+(\phi) = 0$, atunci $Var(\phi)^e \vdash \neg\phi$

9.4 Teorema de completitudine

Th. de completitudine slabă: $\forall \phi \in E(Q)$ cu $\models \phi$, avem $\vdash \phi$.

Th. de completitudine medie: $\forall \Delta \subseteq E(Q)$ finită şi $\phi \in E(Q)$ cu $\Delta \models \phi$, avem $\Delta \vdash \phi$.

Th. de completitudine tare: $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$ cu $\Gamma \models \phi$, avem $\Gamma \vdash \phi$.

Th. de completitudine - var2: Orice mţ. consistentă este satisfiabilă.

Th. de completitudine - sumar:

- $\forall \Gamma \subseteq E(Q), \phi \in E(Q)$ avem $\Gamma \models \phi \iff \Gamma \vdash \phi$
- O mţ. este consistentă $\iff$ este satisfiabilă.

10 Curs 10

10.1 Logica de ordin I

Def: Sinatura de ordinul I este un triplet $\sigma = (F, R, r)$ unde $F \cap R = \emptyset, (F \cup R) \cap (V \cup \{\perp, \to, \forall, =\}) = \emptyset, r : F \cup R \to \mathbb{N}$. Atunci elem lui R s.n. **simboluri de relaţie** ale lui σ, elem. lui F **simboluri de funcţie** şi $\forall s \in F \cup R$, $r(s)$ s.n. **aritatea** lui s. Dc. $r(s) = 0$, s s.n. **constantele lui** σ.

$S_\sigma := \{\perp, \to, \forall, =\} \cup V \cup F \cup R$

Def: Dc. $\sigma = (F, R, r)$ este o signatură de ord I, atunci o $\sigma-$**structură** va fi o perecge $(A, \{A_s\}_{s \in F \cup R}$, unde $A \neq \emptyset$ şi se va numi **universul/ mţ. suport/subiacentă a structurii**.

Pp. inducţiei pe termeni: Fie $B \subseteq T_\sigma$ a.î.:

- $V \subseteq b$
- $\forall s \in F, \forall t_1, \cdots t_{r(s)} \in B$, avem $st_1 \cdots t_{r(s)} \in B$.

Atunci $B = T_\sigma$.

Def: Putem def. **mţ. variabilelor unui termen** $Var : T_\sigma \to P(V)$ cu:

- $\forall x \in V, Var(x) := \{x\}$
- $\forall s \in F, t_1, \cdots t_{r(s)} \in T_\sigma, Var(st_1 \cdots t_{r(s)} := Var(t_1) \cup \cdots \cup Var(t_{r(s)})$.

Lema variabilelor pt. termeni: Fie $\mathbb{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R})$ o $\sigma-$structura, $v_1, v_2 : V \to A, t \in T_\sigma$ a.î. $v_{|Var(t)} = v2|Var(t)$. Atunci $t^{\mathbb{A}}_{v_1} = t^{\mathbb{A}}_{v_2}$.

10.2 Formule

Def: Fie $\sigma = (F, R, r)$ o signatură. Numim **formulă atomică peste** σ un şir de forma $= tu$ cu $t, u \in T_\sigma$ sau $st_1 \cdots t_n$ cu $s \in R, n = r(s), t_i \in T_\sigma$. **Mţ. formulelor atomice peste** σ se notează cu F_{a_σ}. **Mţ. formulelor peste** σ se defineşte ca fiind cea mai mică mţ. $A \subseteq \mathrm{Seq_{fin}}(S_\sigma)$ cu prop:

- formulele atomice aparţin lui A
- $\bot \in A$
- Dc. $\phi, \psi \in A$, atunci $\phi\psi \in A$
- Dc. $\phi \in A, x \in V$, atunci $\forall x\phi \in A$.

Mţ. formulelor se noează cu F_σ.

Pp. inducţiei pe formule: Fie $B \subseteq F_\sigma$ a.î.:

- formulele atomice aparţin lui
- $\bot \in B$
- Dc. $\phi, \psi \in B$, atunci $\phi \to \psi \in B$
- Dc. $\phi \in B, x \in V$, atunci $\forall x\phi \in B$.

Atunci $B = F_\sigma$.

Pp. recursiei pe formule: Fie A o mţ. şi $G_0 : F_{a_\sigma} \to A, G_\bot \in A, G_\to : A^2 \to A, G_\forall : V \times A \to A$. Atunci $\exists! F : F_\sigma \to A$ a.î:

- $\forall \phi \in F_{_\sigma}, F(\phi) = G_0(\phi)$
- $F(\bot) = G_\bot$
- $\forall \phi, \psi \in F_\sigma, F(\phi \to \psi) = G_\to(F(\phi), F(\psi))$
- $\forall \phi \in F_\sigma, x \in V, F(\forall x\phi) = G_\forall(x, f(\phi))$.

Def: Putem def. recursiv **mţ. variab. libere ale unei formule**. Fie $FV : F_\sigma \to P(V)$, prin:

- $\forall t, u \in T_\sigma, FV(t = u) := Var(t) \cup Var(u)$
- $\forall s \in R, \forall t_1, \cdots t_{r(s)} \in T_\sigma, FV(st_1 \cdots t_{r(s)}) := Var(t_1) \cup \cdots \cup Var(t_{r(s)})$
- $FV(\bot) := \emptyset$
- $\forall \phi\psi \in F_\sigma, FV(\phi \to \psi) := FV(\phi) \cup FV(\psi)$
- $\forall \phi \in F_\sigma, x \in V, FV(\forall x\phi) := FV(\phi) - \{x\}$.

Dc. $\phi \in F_\sigma$ cu $FV(\phi) = \emptyset$, atunci ϕ s.n. **enunţ**. Mţ. enunţurilor se notează cu E_σ.

$$v_{x\leftrightarrow a}(y) := \begin{cases} v(y) & \text{pentru } y \neq x \\ a & \text{pentru } y = x \end{cases}$$

Def: Avem că $\exists ! || \cdot ||^{\mathbb{A}} : F_\sigma \to 2^{A^V}$ a.î. $\forall v : V \to A$, avem:

- $\forall t, u \in T_\sigma, ||t = u||^{\mathbb{A}}_v = 1 \iff t^{\mathbb{A}}_v = u^{\mathbb{A}}_v$
- $\forall s \in R, \forall t_1, \cdots t_{r(s)} \in T_\sigma, ||st_1 \cdots t_{r(s)}||^{\mathbb{A}}_v = 1 \iff ((t_1)^{\mathbb{A}}_v \cdots (t_{r(s)})^{\mathbb{A}}_v \in A_s$
- $|| \perp ||^{\mathbb{A}}_v = \perp = 0$
- $\forall \phi, \psi \in F_\sigma, ||\phi \to \psi||^{\mathbb{A}}_v = ||\phi||^{\mathbb{A}}_v \to ||\psi||^{\mathbb{A}}_v$
- $\forall \phi \in F_\sigma, x \in V, ||\exists x \phi||^{\mathbb{A}}_v = 1 \iff \exists a \in A$ cu $||\phi||^{\mathbb{A}}_{v\leftrightarrow a}$

Def: Spunem că $\chi \in F_\sigma$ s.n. **tautologie** dc. $\forall F : F_\sigma \to 2$ cu $F(\perp) = 0$ şi $\forall \phi, \psi \in F_\sigma, F(\phi \to \psi) = F(\phi) \to F(\psi)$, avem $F(\chi) = 1$.

Prop: Orice tautologie este formulă validă.

Lema variab. libere: Fie $\mathbb{A} = (A, (A_s)_{s \in F \cup R}$ o $\sigma-$structură, $v_1, v_2 : V \to \mathbb{A}$ şi $\phi \in F_\sigma$ a.î. $v_{FV(\phi)} = v_{2|FV(\phi)}$. Atunci $||\phi||^{\mathbb{A}}_{v_1} = ||\phi||^{\mathbb{A}}_{v_2}$.

Prop: Fie $\chi \in F_\sigma, y \in V, u \in T_\sigma$. Atunci, dc. $Var(\chi) \cap Var(u) = \emptyset$, avem că y este liber pt. u în χ.

Prop. substituţiei libere: Fie $\chi \in F_\sigma, t, u \in T_\sigma, y \in V, \mathbb{A}\sigma-$structură cu universul A şi $v : V \to A$. Atunci:

- $(t[y := u])^{\mathbb{A}}_v = t^{\mathbb{A}}_{v_{y\leftrightarrow u^{\mathbb{A}}_v}}$
- dc. y este liber pt. u în χ, $||\chi[y := u]||^{\mathbb{A}}_v = ||\chi||^{\mathbb{A}}_{v_{y\leftrightarrow u^{\mathbb{A}}_v}}$.

Prop: Fie $\chi \in F_\sigma, y \in V, u \in T_\sigma, A\sigma-$structură cu universul A şi $v : V \to A$. pp că y este liber pt. u în χ. Atunci avem $||\forall y \chi \to (\chi[y := u])||^{\mathbb{A}}_v = 1$.

Prop: Fie $\chi \in F_\sigma$.

- Fie $y \in V, u \in T_\sigma$. Atunci y este liber pt. u în $\chi^{Var(u)}$
- Fie $W \subseteq V$ finită, $\mathbb{A}, \sigma-$structură cu universul $A, v : V \in A$. Atunci $||\chi^W||^{\mathbb{A}}_v = ||\chi||^{\mathbb{A}}_v$

Prop: Fie χ, y, u cu y nu e liber pt. u în χ. Atunci avem, $\forall \mathbb{A}, v, ||\chi[y := u]||^{\mathbb{A}}_v$ este validă.