Teme şi probleme pentru concursurile studenţeşti de matematică

Volumul III

Concursuri naţionale

Stănăşilă Octavian Nicolae, Pîrvan Monica, Mircea Olteanu,
Universitatea Politehnică din Bucureşti

Costinescu Cristian, Gavrilă Marinică,
Universitatea Tehnică de Construcții din Bucureşti

Popa Dorian, Pop Vasile,
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Popa Liliana, Monica Burlică, Mihai Ispas,
Universitatea "Gh. Asachi" din Iaşi

Gica Alexandru, Gherghe Cătălin, Vuletescu Victor,
Universitatea din Bucureşti

Editura StudIS
adicenter@yahoo.com
Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5
Tel./fax: 0232 – 217.754

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
COORDONATOR: OCTAVIAN NICOLAE STĂNĂȘILĂ
Monica Pîrvan, Mircea Olteanu, Cristian Costinescu, Marinică Gavrilă, Dorian Popa, Vasile Pop, Liliana Popa, Monica Burlică, Mihai Ispas, Alexandru Gică, Cătălin Gherghe, Victor Vuletescu

Teme şi probleme pentru concursurile studenţeşti de matematică. Vol. 3 Concursuri naţionale / Octavian Nicolae Stănășilă, Monica Pîrvan, Mircea Olteanu, Cristian Costinescu, Marinică Gavrilă, Dorian Popa, Vasile Pop, Liliana Popa, Monica Burlică, Mihai Ispas, Alexandru Gică, Cătălin Gherghe, Victor Vuletescu - Vatra Dornei : StudIS, 2013

Bibliogr.
ISBN: 978-606-624-302-5
ISBN vol.3 978-606-624-301-8

I. Octavian Nicolae Stănășilă
II. Monica Pîrvan
III. Mircea Olteanu
IV. Cristian Costinescu
V. Marinică Gavrilă
VI. Dorian Popa
VII. Vasile Pop
VIII. Liliana Popa
IX. Monica Burlică
X. Mihai Ispas
XI. Alexandru Gică
XII. Cătălin Gherghe
XIII. Victor Vuletescu

Consilier editorial: Dranca Adrian
Secretar editorial: Moroşanu Paul

Pre-press, tipar digital şi finisare:
S.C. ADI CENTER SRL
Şos. Ştefan ce Mare, nr. 5
Tel.: 217 754

CUPRINS

Capitolul 5. Probleme date la alte concursuri studenţeşti - Universitatea Bucureşti

Soluţii la capitolul 1

Soluţii la capitolul 2

Soluţii la capitolul 3

Soluţii la capitolul 5

PREFAŢĂ

După 1900, în ţara noastră au avut loc concursuri tinereşti anuale de matematică, transformate în evenimente naţionale, întrerupte doar în anii de război sau de tranziţie nedefinită. Organizatorul principal a fost Societatea de Ştiinţe Matematice din România, cu implicarea Ministerului Învăţământului. Este binecunoscut că Olimpiadele Internaţionale de Matematică ale elevilor, ajunse la peste 50 de ediţii, au fost lansate la iniţiativa României; totodată, au început să aibă loc concursuri locale - Balcaniada, Scandinaviada, în Benelux, în Asia de Sud - Est etc.

În 1970, concursurile de matematică de la noi au cuprins şi pe studenţi, iar Concursul Naţional "Traian Lalescu" a avut loc sistematic până în 1984, reluat după 2007. În jurul acestui concurs, s-a creat o anumită emulaţie şi o motivaţie pentru pregătirea studenţilor talentaţi, oferind ocazia afirmării acestora. Uneori, concursurile s-au transformat într-un fel de nefericită "întrecere socialistă" între şefi de catedră, decani şi chiar rectori. Dar dincolo de dificultăţi şi asperităţi, pentru Universităţile mari ale ţării - Politehnicile din Bucureşti, Timişoara, Iaşi, Cluj-Napoca, Academia Tehnică Militară - concursurile "Traian Lalescu" au fost un prilej de competiţie, de analiză a pregătirii, cu atenţie la asigurarea corectitudinii selecţiei în cadrul concursurilor locale. Premianţii au fost popularizaţi în presă şi au fost recompensaţi cu diplome şi uneori cu bani (puţini !). Interesul studenţilor şi prezenţa lor la fazele locale au avut fluctuaţii, dar întotdeauna a existat un nucleu de studenţi remarcabili şi cadre didactice valoroase, care nu s-au uitat la ceas.

După anul 2005, s-a organizat prima Olimpiadă Studenţească de Matematică pentru Ţările din Sud - Estul Europei (SEEMOUS), la iniţiativa Societăţii de Matematică din Cipru. Deja s-au scurs câteva ediţii, care au prilejuit întâlnirea reprezentanţilor a peste 15 - 20 de Universităţi din ţările balcanice, la care s-au adăugat Rusia, Ucraina, Israel ş.a. Această competiţie a condus la creşterea atenţiei acordată pregătirii studenţilor noştri, ca şi testării capacităţii lor pentru performanţă.

În această culegere de probleme, nu ne adresăm unor studenţi care se pregătesc pentru examene curente, dornici de exerciţii-tip, expediente şi reţete-standard, ci unora care au o motivaţie lăuntrică de a înţelege matematica şi a căuta performanţa. Culegerea cuprinde în principal probleme date la concursurile studenţeşti anterioare, anii fiind indicaţi în mod explicit. Calculatorul nu este implicat direct, deşi el este mereu util şi utilizabil. Există şi un capitol de probleme propuse, în bună parte originale, dar în general autorii au evitat "cimiliturile" matematice sau problemele artificiale adresate unor rafinaţi.

Scopul autorilor a fost acela de a sintetiza un număr mare de probleme şi de a prezenta soluţii complete, însoţite uneori de comentarii. Este pentru prima dată când se pun laolaltă, în Capitolul 1, problemele date la fazele locale ale Concursului "Traian Lalescu" (de la câteva universităţi din ţară), iar în Capitolul 2 - seturile de probleme date la fazele naţionale, în perioadele 1977 - 1984; 2008 - 2011 (între anii 1985 şi 2007, faza naţională fiind întreruptă).

Capitolul 3 cuprinde probleme propuse, iar capitolul următor - probleme date la alte concursuri, inclusiv la universităţi celebre din Franţa sau SUA, cu scop ilustrativ - informativ; acestea din urmă sunt singurele care nu sunt urmate de soluţii, în rest toate problemele sunt rezolvate. Capitolul 5 cuprinde probleme formulate de Facultatea de matematică a Universităţii din Bucureşti.

Cartea de faţă fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2 /S/32768, "Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învăţare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii". Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu partenerii: The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane - POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învţământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de nvăţare. Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţei eficiente, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care nvaţă discipline matematice în univer-

sităţi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea-nvăţarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca raspuns materialul de faţă.

Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităţi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata nsă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studen-ţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe pnă a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-nvăţare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă.

În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii n legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor.

De asemenea, se urmăreşte evidenţierea a noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Concluzionând, această lucrare a fost posibilă prin efortul comun al reprezentanţilor universităţilor participante la proiectul POSDRU, care şi-au asumat rolul de "culegători". O bună parte dintre aceştia sunt şi autorii de fapt ai problemelor, dar există şi alţi autori al căror nume nu a fost reţinut. Lor şi tuturor celor care au înlesnit apariţia acestei lucrări, le adresăm mulţumiri.

Autorii

Capitolul 1

FAZE LOCALE

ale concursurilor studenţeşti de matematică

1.1 Universitatea Politehnica Bucureşti

Probleme date la concursul studenţesc ”Traian Lalescu” în perioada 1978-2010

1. Fie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un izomorfism $\mathbf{R}$-liniar.

a) Să se arate că imaginea prin f a unei drepte este tot o dreaptă .

b) Dacă T este un tetraedru, să se calculeze raportul dintre volumele $f(T)$ şi T.

(etapa locală UPB 1978)

2. Pentru orice $p \in \mathbf{Z}$ se defineşte funcţia $\varphi_p : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\varphi_p(x) = e^{ipx}$. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de forma $f = \sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} \lambda_p\varphi_p$, unde $\lambda_p \in \mathbf{C}$ sunt toţi nuli, cu excepţia unui număr finit.

a) Să se arate că $\mathcal{F}$ este un spaţiu vectorial complex (relativ la $f + g$, λf).

b) Pentru $f \in \mathcal{F}$ fixată , să se calculeze $c_q = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-iqx}dx$, $q \in \mathbf{Z}$ şi să se arate că familia de funcţii $(\varphi_p)_{p\in\mathbf{Z}}$ formează o bază pentru $\mathcal{F}$.

c) Să se arate că o funcţie $f \in \mathcal{F}$, $f = \sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} \lambda_p\varphi_p$, are toate valorile reale $\Longleftrightarrow \overline{\lambda_p} = \lambda_{-p}$, $\forall p \in \mathbf{Z}$.

d) Să se arate că aplicaţia $u : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto f' - f$ este un izomorfism $\mathbf{C}$-liniar; este acelaşi lucru valabil şi pentru $v : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto f' - if$?

(etapa locală UPB 1978)

3. Fie $p \geq 2$, polinomul $P(X) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^k}{k!} X(X-1)\ldots(X-k+1)$ şi matricea $A \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât

$$I_n + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} A(A - I_n)\ldots(A - (k-1)I_n) = O_n,$$

unde I_n este matricea unitate.

a) Să se determine rădăcinile lui P.

b) Să se arate că A are valori proprii reale printre rădăcinile lui P şi că 0 nu este valoare proprie.

c) Să se arate că A este diagonalizabilă.

(etapa locală UPB, 1978)

4. Se consideră sferele:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

Să se determine:

a) ecuaţia planelor perpendiculare pe linia centrelor.

b) ecuaţia cilindrului circumscris celor două sfere.

(etapa locală UPB, 1979)

5. Pentru $x, y \in \mathbf{R}$ se notează $d(x, y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|$.

a) Să se arate că d este o distanţă pe $\mathbf{R}$.

b) Relativ la distanţa d, să se arate că şirul $x_n = n$, $n \geq 0$ este Cauchy, monoton şi mărginit, dar nu convergent.

c) Fie mulţimea $X = \mathbf{N}^\star$ şi pentru orice $x, y \in X$, definim $\delta(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$. Să se arate că (X, δ) este un spaţiu metric necomplet.

(etapa locală UPB, 1979)

6. Fie V spaţiul vectorial real al şirurilor $x = (x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$ să fie convergentă.

a) Să se arate că punând $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$, pentru orice $x, y \in V$, se obţine un produs scalar.

b) Să se calculeze $\langle x, y\rangle$ pentru $x = \left(\dfrac{2n-1}{2^{n/2}}\right)$ şi $y = \left(\dfrac{1}{2^{n/2}}\right)$, $n \geq 1$.

c) Se cere măsura unghiului $\theta \in [0, \pi]$ dintre şirurile $x = (2^{1-n})$ şi $y = (3^{1-n})$, $n \geq 1$.

(etapa locală UPB, 1980)

7. Fie $V = \mathbf{C}^0_{[-\pi,\pi]}$ şi $T : V \to V$, $f \mapsto g$, unde

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \sin(x+t)] f(t) dt.$$

a) Să se arate că T este un operator liniar şi să se calculeze $T(\sin)$ şi $T(\cos)$.

b) Să se determine dimensiunile imaginii şi nucleului lui T.

c) Să se determine valorile proprii ale lui T.

(etapa locală UPB, 1980)

8. Fie $U = \mathbf{R}^n \backslash 0$, $v_i : U \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x_i}{r^2}$ (unde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$).

a) Să se arate că $\forall i, j$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{1}{r^4} \delta_{ij}$$

şi $r^2 \Delta v_i + 2(n-2) v_i = 0$ în U.

b) Dacă $f : U \to \mathbf{R}$ este de clasă $\mathbf{C}^2$ şi $\Delta f = 0$, să se arate că $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^{2-n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de asemenea armonică .

(etapa locală UPB, 1981)

9. Fie P spaţiul real al funcţiilor polinomiale $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, cu norma $\| f \| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Să se arate că:

a) Seria $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, dar nu convergentă; cum se explică ?

b) Bila unitate $B = \{f \in \mathbf{R} | \|f\| \leq 1\}$ este închisă şi mărginită, dar nu este compactă; cum se explică ?

c) Operatorul $D : P \to P$, $f \mapsto f'$ nu este continuu.

(etapa locală UPB, 1981)

10. Să se demonstreze următoarele afirmaţii:

a) $3 \sin 20^\circ > 1$.

b) $\forall n \geq 3$ întreg şi $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right)$, există ε, $\varepsilon \in (0,1)$, astfel încât $\left|\frac{\sin(nx)}{n \sin x}\right| < 1 - \varepsilon$.

c) $\forall n \in \mathbf{N}$, există $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sin(nx)}{\sin x} \leq \frac{\sin(na)}{\sin a}$, $\forall x \in \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

(etapa locală UPB, 1981)

11. Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ având valoarea proprie -1.

a) Să se arate că $I_n + A$ este inversabilă şi că $(I_n + A)^{-1}$ comută cu $I_n - A$.

b) Fie $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Să se arate că A este ortogonală $\Leftrightarrow$ B este antisimetrică.

c) Să se arate că mulţimea matricelor pătratice din $M_n(\mathbf{R})$ care nu au -1 ca valoare proprie este o mulţime deshisă în spaţiul $M_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^{n^2}$.

(etapa locală UPB, 1982)

12. Fie $z_n = (x_n, y_n)^T$, $n \geq 0$, astfel încât

$$z_0 = (1,1)^T, \quad x_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n, \qquad n \geq 0.$$

a) Să se determine o matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $z_{n+1} = Az_n$, $n \geq 0$ şi apoi să se determine z_n în funcţie de n.

b) Să se arate că toate punctele $z_n \in \mathbf{R}^2$ sunt situate pe o reuniune de conice, care se vor reprezenta grafic.

c) Să se indice o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ astfel încât $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 1 = 0$.

(etapa locală UPB, 1982)

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x,h) \quad \forall x, h \in \mathbf{R},$$

unde $|\alpha(x,h)| \leq M|h|^3$, $M > 0$ fiind o constantă. Să se arate că f este un polinom de gradul întâi, iar A este o funcţie constantă.

(etapa locală UPB, 1982)

14. Să se arate că:

a) O mulţime $A \subset \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

$$\forall x, y \in A, \quad x - y \in A,$$

şi A conţine un şir convergent de numere reale distincte, este densă în $\mathbf{R}$ (adică $\overline{A} = \mathbf{R}$).

b) Mulţimea $\{\sin(2n) | n \in \mathbf{N}\}$ este densă în [-1,1].

c) $\max\limits_{[0,a]}(\sin x + \cos(\pi x)) < 2$ şi $\sup\limits_{x \geq 0}(\sin x + \cos(\pi x)) = 2$, $\forall a > 0$.

(etapa locală UPB, 1983)

15. Fie $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ o formă pătratică. Se spune că o matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ invariază q dacă

$$\forall \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \qquad q(\underline{x}) = q(A\underline{x}).$$

a) Să se determine , pentru $n = 2$, matricele care invariază formele pătratice $x_1^2 + x_2^2$ şi $x_1^2 - x_2^2$.

b) Să se arate că mulţimea $G(q)$ a matricelor din $M_n(\mathbf{R})$ care invariază q este închisă relativ la înmulţirea matricelor şi să se indice condiţii ca $G(q)$ să fie grup.

(etapa locală UPB, 1983)

16. a) dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} f(x)dx$.

b) Să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{x^3}dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\ln(1 + x)}{x^3}dx$.

(etapa locală UPB, 1984)

17. Fie D mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indefinit derivabile şi nule în afara unui interval mărginit.

a) Să se arate că D este un spaţiu vectorial real.

b) Fie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $\varphi(x) = \exp(\frac{1}{x^2-1})$, pentru $x \in (-1,1)$ şi nulă în rest. Să se arate că $\varphi \in D$, că funcţiile $\varphi(x+k)$, $k \in \mathbf{R}$ sunt liniar independente şi $\dim D = \infty$.

c) Să se demonstreze egalitatea de mulţimi

$$\{f' | f \in D\} = \{g \in D | \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0\}.$$

(etapa locală UPB, 1984)

18. Fie $A \in M_2(\mathbf{R})$ simetrică şi inversabilă.

a) Să se arate că $\forall k \in \mathbf{Z}$, A^k este o combinaţie liniară de I_2 şi A.

b) Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2}}$ are valorile proprii λ_1, λ_2, să se arate că $|a_{12}| \leq \frac{1}{2}|\lambda_1 - \lambda_2|$.

c) Dacă A este pozitiv definită şi $K = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x^T A x = 1\}$, să se arate că mulţimea K este compactă şi să se determine $\min\limits_{x \in K} \|x\|$ şi $\max\limits_{x \in K} \|x\|$.

(etapa locală UPB, 1984)

19. Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}}$.

a) Să se reprezinte grafic domeniul maxim de definiţie $D \subset \mathbf{R}^2$.

b) Să se arate că există polinoame p_n de grad $n \geq 0$, astfel încât $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x) y^n$, precizând valorile (x,y) admisibile.

c) Să se calculeze expresia

$$E = (1 - 2xy + y^2)\frac{\partial f}{\partial y} - (x - y)f$$

şi să se deducă o relaţie de recurenţă între p_{n-1},p_n şi p_{n+1}.

(etapa locală UPB, 1988)

20. Fie $f : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = X - X^T$.

a) Este sau nu f o aplicaţie $\mathbf{R}$-liniară ?

b) Să se determine Ker$f$ şi Imf şi dimensiunile lor.

c) Să se determine valorile proprii ale lui f.

(etapa locală UPB, 1991)

21. a) Se consideră n vectori nenuli $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{R}^n$. Să se arate că ei formează o bază a lui $\mathbf{R}^n$ peste $\mathbf{R}$ dacă singurul vector ortogonal peste toţi u_i, $1 \leq i \leq n$ este vectorul nul.

b) Fie $\alpha \in (-1, 1)$, $\alpha \neq 0$. Să se arate că vectorii $v_k = (1, \alpha^k, \alpha^{2k}, \ldots, \alpha^{k(n-1)})$, $1 \leq k \leq n$, formează o bază a lui $\mathbf{R}^n$ peste $\mathbf{R}$.

(etapa locală UPB, 1992)

22. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^2, \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

a) Să se arate că orice funcţie $f \in \mathcal{F}$ este diferenţiabilă în origine.

b) Să se determine $f \in \mathcal{F}$ de clasă $\mathbf{C}^1$ dacă este omogenă de gradul doi şi $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ în fiecare punct din $\mathbf{R}^2 \setminus Oy$.

(etapa locală UPB, 1992)

23. Fie şirul $a_n = \dfrac{(ne^{-1})^n}{n!}$, $n \geq 1$.

a) Se cere natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ şi suma ei.

b) Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ este convergentă.

(etapa locală UPB, 1995)

24. a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

b) Să se studieze convergenţa uniformă a şirului de funcţii $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, \quad n \geq 0.$$

(etapa locală UPB, 1995)

25. Fie $V = M_2(\mathbf{R})$. Pentru orice matrice $A, B \in V$ se defineşte

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

a) Să se arate că se obţine un produs scalar în V.

b) Fie $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,. Să se determine matricele din V, ortogonale pe C şi pe C^2.

c) Să se arate că pentru orice aplicaţie $\mathbf{R}$-liniară $f : V \to \mathbf{R}$, există o matrice A astfel încât $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$, pentru orice $M \in V$.

(etapa locală UPB, 1995)

26. Fie şirul$(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$a_0 = \frac{2}{5}, a_{n+1} = 2^n - 3a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Să se determine:

a) raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

b) suma seriei acestei serii.

(etapa locală UPB, 1997)

27. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ şi $f(0, 0) = 0$.

a) Să se arate că f are derivate parţiale în orice punct $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, fără a fi continuă în origine.

b) Să se studieze dacă există sau nu versorii s, t astfel încât $\dfrac{df}{ds}(0, 0)$, $\dfrac{df}{dt}(0, 0)$ să fie nule, dar derivata $\dfrac{df}{dv}(0, 0)$ să fie nenulă , unde $v = \dfrac{s + t}{\|s + t\|}$.

(etapa locală UPB, 1997)

28. Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^4 x^2 + 1}$.

a) Se cere mulţimea de convergenţă punctuală .

b) Se defineşte $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^4x^2+1}$. Să se arate că f se poate prelungi la o funcţie continuă $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

c) Este sau nu $\widetilde{f}$ derivabilă pe $\mathbf{R}$?

(etapa locală UPB, 1997)

29. Fie parabola $(P) : y = x^2$ şi dreapta $(D) : y = x - 2$ în planul xOy.

a) Se cere distanţa $d(D, P)$.

b) Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie a lui (P) în jurul (D), în spaţiul $Oxyz$.

(etapa locală UPB, 1997)

30. Fie E spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n, $n \geq 2$. Punem $Q_0 = 1$, şi $\forall k \geq 1$, $Q_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$.

a) Să se arate că polinoamele $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ formează o bază B a lui E şi că există şi este unic un izomorfism $T : E \to E$ astfel încât $T(X^k) = Q_k$, $0 \leq k \leq n$.

b) Fie aplicaţia $f : E \to E$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. Să se arate că f este $\mathbf{R}$-liniară şi să se determine $Ker(f)$ şi $Im(f)$.

c) Să se expliciteze operatorul $d = T^{-1} \circ f \circ T$ şi matricea lui f relativ la baza B. Să se decidă dacă operatorul d este sau nu diagonalizabil.

(etapa locală UPB, 1998)

31. Fie discul $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z\text{-}i| \leq 1\}$.

a) Să se calculeze $I_1 = \oint_{FrD} \dfrac{dz}{(z^2+1)^2}$ şi $I_2 = \iint_D z\overline{z}dxdy$;

b)Să se arate că dacă $z_1, z_2 \in D$, atunci există $z \in D$ astfel încât $z^2 = z_1z_2$.

(etapa locală UPB, 1998)

32. Fie E mulţimea funcţiilor continue $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$. Se notează

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx\right)^{1/2}, \quad f \in E.$$

a) Să se arate că $\dim_{\mathbf{R}} E = \infty$ şi că se obţin două structuri de spaţii vectoriale normate pe E.

b) Să se arate că are loc relaţia

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2), \quad \forall f, g \in E.$$

Are loc această relaţie şi pentru norma $\|\cdot\|_\infty$?

c) Fie şirul (f_n) în E, $f_n(x) = 1 + nx$, $x \in \left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$, $f_n(x) = 1 - nx$, $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ şi nulă în rest, $n \geq 1$. Să se studieze convergenţa şirului (f_n) în cele două norme.

d) Să se arate că normele $\|\cdot\|_\infty$ şi $\|\cdot\|_2$ nu sunt echivalente.

(etapa locală UPB, 1999)

33. Fie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin

$f(x,y) = x^2 e^{-y^2/x^2}$, dacă $x \neq 0$ şi 0, dacă $x = 0$.

a) Studiaţi continuitatea lui f în punctele $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$.

b) Studiaţi diferenţiabilitatea Fréchet a lui f in $(0,0)$.

c) Calculaţi derivatele parţiale ale lui f şi studiaţi continuitatea acestora.

d) Fie $g(x,y,z) = f(1, \sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Să se calculeze produsul scalar $\langle (\mathrm{grad} g)(x,y,z), \bar{r} \rangle$ cu $\bar{r} = (x,y,z)$.

(etapa locală UPB, 2003)

34. Se consideră seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ unde x este real şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze raza de convergenţă a seriei.

b) Să se precizeze mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\beta = 0$ (discuţie după $\alpha \in \mathbf{R}$).

c) Să se precizeze mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\alpha = 1$ (discuţie după $\beta \in \mathbf{R}$).

d) Determinaţi forma funcţiei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ şi precizaţi domeniul maxim de definiţie.

(etapa locală UPB, 2003)

35. a) Fie $D \in \mathbf{R}^3$ o mulţime deschisă, $(a, b, c) \in D, f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1 cu

$$f(a, b, c) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0.$$

Fie $x = \varphi_1(y, z),\ y = \varphi_2(x, z),\ z = \varphi_3(x, y)$ funcţiile definite prin aplicarea teoremei funcţiilor implicite lui f relativ la (a, b, c). Să se arate că

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(b, c) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(a, c) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a, b) = -1.$$

b) Fie $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $F(x, a, b) = x^7 + ax + b$. Verificaţi aplicabilitatea teoremei funcţiilor implicite pentru F relativ la punctul $(1, 1, -2)$ şi deduceţi că $x = \varphi(a, b)$.

c) Calculaţi $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ şi $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ pentru φ definit la b).

d) Verificaţi că $F(x, 1, -2) = 0$ are o unică rădăcină reală şi precizaţi valoarea acesteia.

e) Calculaţi aproximativ o rădăcină a ecuaţiei

$$x^7 + 0.99x - 2.03 = 0.$$

(etapa locală UPB, 2003)

36. Fie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \text{arctg}(x + y)$.

a) Scrieţi formula Taylor cu rest de ordin 2 pentru f şi demonstraţi că are loc inegalitatea

$$|f(x, y) - x - y| \leq x^2 + y^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

b) Dezvoltaţi în serie Taylor centrată în $x = 0$ funcţia

$$g(x) = \int_0^x \left[f(t, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \right] dt.$$

Precizaţi mulţimea punctelor de convergenţă din $\mathbf{R}$.

c) Estimaţi numărul de termeni necesari pentru calculul valorii aproximative cu două zecimale exacte pentru integrala $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ folosind seria de la punctul b).

(etapa locală UPB, 2004)

37. Fie funcţia $z(x, y)$ definită implicit prin

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0, \quad z \neq -1.$$

a) Demonstraţi că $-3 \leq z(x, y) \leq 1$.

b) Aduceţi cuadrica la forma canonică; precizaţi tipul acesteia.

c) Determinaţi punctul în care se pot duce plane tangente la cuadrică, paralele cu planul $x + 2y - z = 0$.

(etapa locală UPB, 2004)

38. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

a) Puteţi găsi, fără a calcula polinomul caracteristic, o majorare pentru cea mai mare valoare proprie ?

b) Operatorul liniar T asociat matricii A în baza canonică este autoadjunct ? (Justificare).

c) Operatorul liniar T este pozitiv definit ? (Justificare).

(etapa locală UPB, 2005)

39. Determinaţi elementele triedrului Frenet pentru curba

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad x + y + z = 0$$

în punctul $A(1, 1, -2)$.

(etapa locală UPB, 2005)

40. Fie seria $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+2}$. Exprimaţi prin funcţii cunoscute $\int_1^x S(t)dt$.

(etapa locală UPB, 2005)

41. Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ o matrice având toate valorile reale simple şi strict pozitive. Să se arate că ecuaţia $X^2 = A$ are soluţia

$$X = \frac{2}{\pi} A \int_0^{\infty} (t^2 I_n + A)^{-1} dt.$$

(etapa locală UPB, 2006)

42. Să se arate că seria $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ este convergentă şi folosind o serie de puteri convenabilă, să se calculeze suma ei.

(etapa locală UPB, 2006)

43. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă $\mathbf{C}^2$ şi $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$. Să se determine f dacă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, în toate punctele lui $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

(etapa locală UPB, 2006)

44. Fie V spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienţi reali şi aplicaţia $f : V \to V$ definită prin

$$f(p(X)) = p(X + 1) + \int_{X-1}^{X+1} p(t)dt.$$

a) Să se arate că f este $\mathbf{R}$-liniară şi să se determine $Ker(f)$ şi $Im(f)$.

b) Să se determine matricea asociată aplicaţiei f relativ la baza $B = \{1, X, X^2\}$ a lui V.

c) Să se arate că f are o singură valoare proprie reală şi să se determine vectorii proprii respectivi.

(etapa locală UPB, 2006)

45. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 7$$

şi

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| \le \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall n \ge 1.$$

Să se arate că şirul $f^{(n)}$ este uniform convergent şi să se determine limita sa.

(etapa locală UPB, 2007)

46. Se consideră funcţia $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \{x\}$, partea fracţionară a lui x.

a) Să se arate că φ este periodică şi să se calculeze $I_n = \int_0^n \varphi(x) \cos(2\pi n x) dx$, pentru $n \in \mathbf{N}$.

b) Fie $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi(kx)$. Să se arate că şirul (f_n), $n \ge 1$, este un şir de funcţii periodice, de gradul întâi pe porţiuni, uniform convergent pe $\mathbf{R}$.

c) Fie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Să se arate că f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

(etapa locală UPB, 2007)

47. Fie $A, B \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $AB = BA$, $A^{2007} = I_3$, $B^{2008} = I_3$.

a) Să se determine valorile proprii comune ale matricelor A şi B.

b) Să se arate că polinoamele $P = X^{2007} - 1$ şi $Q = (X+1)^{2008} - 1$ sunt relativ prime.

c) Presupunem că există un vector coloană nenul $x \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ astfel încât $(A + B + I_3)x = 0$. Să se arate că $(A + I_3)^n x = (-1)^n B^n x$, $\forall n \ge 1$.

d) Folosind punctele b) şi c), să se arate că matricea $A+B+I_3$ este inversabilă.

(etapa locală UPB, 2007)

48. Fie $f_n:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=x^{n+1}\ln(x)$, $n\geq 0$.

a) Să se determine $\inf\limits_x f_n(x)$ şi $\sup\limits_x f_n(x)$ pentru $n\geq 0$ fixat.

b) Să se studieze uniform convergenţa pentru seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ pe intervalul $(0,1)$.

(etapa locală UPB, 2008)

49. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f:K\to\mathbf{R}$, $f(x,y,z)=x^{1/2}+y+z^2$, unde

$$K=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}.$$

(etapa locală UPB, 2008)

50. Fie $A\in M_n(\mathbf{R})$ o matrice al cărei polinom caracteristic nu admite nicio rădăcină reală. Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi că polinomul caracteristic al matricei A^{-1} nu admite rădăcini reale.

(etapa locală UPB, 2008)

51. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-\sin a_n|$ 'si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ au aceeaşi natură (sunt simultan convergente sau divergente).

b) Să se arate că, dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ este convergentă atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin a_n$ au aceeaşi natură.

c) Studiaţi convergenţa simplă şi convergenţa absolută a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right).$$

(etapa locală UPB, 2008)

52. Fie S spaţiul vectorial real al şirurilor de numere reale. Fie

$$L = \left\{ (x_n)_n | x_{n+1} = \frac{5}{6} x_n - \frac{1}{6} x_{n-1} \right\}, \quad n \geq 2, \quad u = \left(\frac{1}{2^n} \right), \quad v = \left(\frac{1}{3^n} \right).$$

a) Să se arate că L este subspaţiu al lui S.

b) Să se arate că u şi v aparţin lui L.

c) Dacă $(z_n)_n \in L$, $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, să se arate că există α, $\beta \in \mathbf{R}$, astfel încât

$$z_n = \alpha \frac{1}{2^n} + \beta \frac{1}{3^n}, \ \forall n \geq 1.$$

(etapa locală UPB, 2009)

53. Fie $P \subset \mathbf{R}^3$ planul de ecuaţie $x+2y+2z = 0$ şi aplicaţia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ care asociază fiecărui punct M, punctul $M' =$ proiecţia ortogonală a lui M pe planul P.

a) Să se arate că f este liniară şi să se determine nucleul şi imaginea lui f;

b) Să se arate că f este diagonalizabilă;

c) Generalizare.

(etapa locală UPB, 2009)

54. Fie $\{i, j, k\}$ o bază ortonormată în spaţiul V_3.

a) Dacă vectorii $a, b, c \in V_3$ satisfac inegalitatea $\|a\|^2+\|b\|^2+\|c\|^2 < 1$, atunci vectorii $i + a$, $j + b$, $k + c \in V_3$ alcătuiesc o bază în V_3.

b) Dacă vectorii $a, b, c \in V_3$ satisfac inegalitatea

$$\cos(a, i) + \cos(b, j) + \cos(c, k) > \frac{5}{2},$$

atunci familia $\{a, b, c\}$ este o bază în V_3.

(etapa locală UPB, 2010)

55. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât A are toate valorile proprii distincte. Să se arate că: $AB = BA$ dacă şi numai dacă există un polinom $P \in \mathbf{C}[X]$ cu $B = P(A)$.

(etapa locală UPB, 2010)

56. Determinaţi raza de convergenţa R, a seriei $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, în următoarele cazuri:

a) a_n este numărul divizorilor lui n, $(n \geq 1)$;

b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $n \geq 1$;

c) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. În acest ultim caz calculaţi suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, ştiind că

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} y_k z_{n-k}.$$

S-a notat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ suma seriei $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$.

(etapa locală UPB, 2010)

57. Fie $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^{2n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Deduceţi o relaţie de recurenţă între f_n şi f_{n-1}.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(etapa locală UPB, 2010)

58. Fie A o matrice 3×3 cu elementele reale, astfel ca $A^3 = A$.

a) Arătaţi că singurele valori proprii sunt $-1, 1$ sau 0.

b) Arătaţi că o astfel de matrice poate fi totdeauna diagonalizată.

(etapa locală UPB, 2010)

1.2 Universitatea ”Gheorghe Asachi” Iaşi

Probleme date la concursul ”Alexandru Climescu” în perioada 2006-2010

1. Se dă funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se arate că f este monotonă dacă şi numai dacă pentru orice interval $I \subseteq \mathbf{R}$, $f^{-1}(I)$ este interval. ($f^{-1}(A) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) \in A\}$.)

2. Care este mai mare e^{π} sau π^{e} ?; argumentaţi răspunsul.

3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de numere cu $x_0 \in (0,1)$ şi

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - \cdots + x_n^{2007} - x_n^{2008}.$$

a) Arătaţi că x_n este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Demonstraţi că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$

4. Şirul x_n se defineşte prin relaţiile

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1/2, \quad x_{n+2} = x_{n+1}\, x_n^2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Să se determine expresia lui x_n şi limita lui x_n.

5. Se consideră şirul $a_1 = \alpha \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1, \quad n \geq 1$. Studiaţi

a) existenţa limitei şirului a_n

b) natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Şirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sunt definite astfel $x_0 = a \in \mathbf{R}$,$y_0 = b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$, iar pentru $n \geq 1$ avem

$$x_n = \frac{2x_{n-1} + 3y_{n-1}}{5}, \quad y_n = \frac{4x_{n-1} + y_{n-1}}{5}.$$

Ştiind că seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

sunt convergente, să se determine raportul sumelor lor.

7. Se dă şirul

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6}.$$

a) Se cere să se arate că şirul este convergent.

b) Calculaţi limita sa.

8. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$ este convergentă. Să se arate că dacă $\alpha > 1/2$ atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a}_n}{n^\alpha}, \quad a_n \geq 0$ este convergentă.

9. Fie $n \in \mathbf{N}$ şi $x_i \in [0,1], i = 1, \cdots, n$. Aflaţi valoarea maximă a sumei

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|.$$

10. Fie $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbf{R}$, care satisface $f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = a \neq 0, \quad f'''(0) = b$. Să se arate că

$$g(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)' & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

defineşte o funcţie într-o vecinătate a originii şi să se calculeze saltul funcţiei în origine.

11. Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de două ori continuu derivabilă pe (a,b). Arătaţi că pentru orice $x \in [a,b]$ există $\xi \in (a,b)$ astfel ca

$$[f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)] = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi).$$

12. Fie $S = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} | x_n > 0, \forall n \in n \in \mathbf{N}^*, \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1\}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \in (0,1)$.

b) Să se arate că $\forall \alpha \in (0,1)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in S$ astfel ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k^2 = \alpha$

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi care satisface condiţiile : $f'(0) = 1$ şi $f(x+t) = e^x f(t) + e^t f(x), \forall x, t \in \mathbf{R}$.

a) Arătaţi că $f'(x) - f(x) = e^x, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Demonstraţi că funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x} - x$ este constantă pe $\mathbf{R}$.

c) Determinaţi funcţia f.

14. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^{x^2}, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $F = F(x)$ o primitivă a acesteia pe $\mathbf{R}$. Să se demonstreze că:

a) $F(n+1) - F(n) > e^{n^2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{xF(x)} = 2$

d) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x))^{\frac{F(x)}{xf(x)}}$

15. Să se determine numerele întregi pozitive $n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ce verifică

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 5n - 4$$
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

16. Numerele întregi pozitive a, b verifică $\dfrac{a}{b} < \sqrt{7}$. Să se arate că

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} < \sqrt{7}.$$

17. Fie M o mulţime formată din 10 numere naturale mai mici decât 100. Să se arate că există două submulţimi nevide ale lui M astfel ca suma numerelor din fiecare submulţime să fie aceeaşi.

18. Să se demonstreze că oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$ avem

$$x^{16} + y^{16} + z^{16} \geq x^5 y^5 z^5 (x + y + z).$$

19. Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{R}$ sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$$

20. Să se determine toate polinoamele $p(X)$ cu coeficienţi complecşi care au proprietatea $p(X) \in \mathbf{R}$ dacă şi numai dacă $X \in \mathbf{R}$.

21. Fie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\beta \neq 0$ şi matricele

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad B = \left(\frac{1}{a_{ij}}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

unde

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{dacă } i = j \\ \beta & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

a) Să se exprime A şi B în funcţie de I_n şi E_n unde I_n este matricea unitate şi E_n este matricea cu toate elementele egale cu 1.

b) Să se studieze inversabilitatea matricelor A şi B.

22. Dacă A şi B sunt matrice pătratice de ordin n care verifică $AB = -I_n$ atunci să se arate că $\det(I_n - BA) = 2^n$.

23. Fie $x_i > 0$ şi $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Să se arate că au loc inegalităţile

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

$$\frac{s}{s - x_1} + \cdots + \frac{s}{s - x_n} \geq \frac{n^2}{n - 1}$$

24. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ care verifică $AB - B^2A^2 = I_n$ şi $A^3 + B^3 = O_n$. Să se arate că dacă una dintre matricele A sau B este inversabilă atunci are loc $BA - A^2B^2 = I_n$.

25. Se consideră matricele $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ şi $C = AB - BA$. Ştiind că $AC = CA$ şi $BC = CB$ să se arate că

a) $AB^k - B^kA = kB^{k-1}C, \quad k \in \mathbf{N}^*$

b) $C^n = O_n$.

26. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Dacă $AB = 2A + 3B$ atunci să se arate că

a) $\text{rang}(A - 3I_n) = \text{rang}(B - 2I_n) = n$

b) $\text{rang}A = \text{rang}B$.

27. Matricele $A \in M_{4,2}(\mathbf{R})$ şi $B \in M_{2,4}(\mathbf{R})$ verifică relaţia $BA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinaţi

a) Rangurile matricelor A, B, AB.

b) Valorile proprii ale matricei AB.

28. a) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice simetrică ale cărei valori proprii sunt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Demonstraţi că are loc inegalitatea

$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2, \forall x \in \mathbf{R}_n$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Notăm, în ordine crescătoare cu $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ respectiv $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$ valorile proprii ale matricelor A^TA respectiv B^TB. Dacă ρ este valoare proprie reală a matricei AB, să se arate că $\lambda_1\mu_1 \leq \rho^2 \leq \lambda_n\mu_n$.

c) Dacă A şi B sunt două matrice reale simetrice, de ordinul n, având autovalorile λ_i, respectiv μ_i şi dacă $AB = BA$, atunci rezultă

$$\left(\min \lambda_i^2\right)\left(\min \mu_i^2\right) \le \rho_j^2 \le \left(\max \lambda_i^2\right)\left(\max \mu_i^2\right), \quad j = \overline{1,n}$$

pentru toate autovalorile ρ_j ale matricei AB

29. Fie matricea $A \in M_2(\mathbf{R})$ şi $\mathrm{tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X. Demonstraţi că

a) $\det(X + I_2) = \det(X - I_2)$ dacă şi numai dacă $\mathrm{tr}(X) = 0$.

b) Dacă $A \in M_2(\mathbf{R})$, astfel ca $\det(A+I_2) = \det(A-I_2)$ şi $\det(A^{2010} + I_2) = \det(A^{2010} - I_2)$ atunci $A^2 = O_2$.

30. Se dă aplicaţia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ dată prin matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi polinomul caracteristic al matricei A, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$, utilizând proprietăţile determinaţilor.

b) Pentru $a = -1$, să se determine vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 2$.

31. Se dă aplicaţia $T : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$, $T(A) = A + A^t, \forall A \in M_2(\mathbf{R})$, unde A^t este matricea transpusă.

a) Să se demonstreze că T este transformare liniară şi să se cerceteze bijectivitatea.

b) Să se determine matricea transformării liniare în raport cu baza standard formată din matricele

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Să se afle valorile şi vectorii proprii.

d) Calculaţi M^{2010} unde M este matricea determinată la punctul b.

32. Fie $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, planul $(P) : y + z = 0$ şi dreapta $(D) : x - y = 1, x + z = 1$. Să se determine locul geometric al punctelor $A \in (P)$ cu proprietatea că există $B \in (D)$ astfel ca $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$.

33. Stabiliţi numărul maxim de puncte ce pot fi plasate pe o sferă de rază 1, astfel ca distanţa dintre oricare două puncte să fie strict mai mare ca $\sqrt{2}$.

34. În interiorul pătratului de latură 1 construim cercuri având suma circumferinţelor egală cu dublul perimetrului pătratului. Să se arate că există o infinitate de drepte care să taie cel puţin trei cercuri.

35. Tangenta în punctul $A\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ la cercul de ecuaţie $x^2+y^2+2x = 0$ intersectează un cerc concentric cu cel dat în două puncte între care distanţa este 6. Aflaţi aria coroanei circulare.

1.3 Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti

Probleme date la concursul studenţesc "Traian Lalescu" în perioada 1987-2011

1. Fie curba plană având următoarele ecuaţiile parametrice:

$$x = t - \text{ch } t \text{ sh } t, \quad y = 2 \text{ ch } t.$$

a) Să se calculeze raza de curbură într-un un punct curent M al curbei;

b) Să se scrie ecuaţia tangentei şi a normalei î n M;

c) Dacă notăm cu C centrul cercului de curbură al curbei în M, cu N şi T punctele în care normala, respectiv tangenta în M intersectează axa Ox, să se arate că există relaţia $\|MT\|^2 = \|MC\| \cdot \|MN\|$.

(etapa locală UTCB, 1987)

2. Fie curba strâmbă (C) de ecuaţii parametrice:

$$x = t - \sin\ t,\ \ y\ = 1 - \cos\ t,\ z = 4\ \sin\frac{t}{2}.$$

In fiecare punct al curbei (C) se consideră pe direcţia pozitivă a normalei sale principale un punct situat la o distanţă de 4 ori mai mare ca valoarea curburii în acel punct.

Să se determine ecuaţia planului osculator al curbei astfel obţinute.

(etapa locală UTCB, 1988)

3. Fie curba strâmbă (C) definită implicit de ecuaţiile următoare:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

a) Să se indice o parametrizare a curbei (C);

b) Să se scrie ecuaţiile tangentei, binormalei şi planului osculator la curba (C) în punctul M(0, 4, 0);

c) Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei (C) în M.

(etapa locală UTCB, 1989)

4. Prin V_3 vom nota spaţiul vectorial al vectorilor liberi 3-dimensionali şi fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \in V_3$ astfel încât $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{c}\| = 1$ şi $\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}} = \alpha$; transformarea liniară $T : V_3 \to V_3$ este definită astfel:

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{a} \quad \text{unde } \overrightarrow{v} \in V_3.$$

a) Să se arate că $\overrightarrow{c} \cdot T(\overrightarrow{v}) = 0$ pentru orice $\overrightarrow{v} \in V_3$;

b) Determinaţi în funcţie de α valorile proprii ale lui T şi precizaţi poziţia vectorilor proprii asocia ţi faţă de $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{c}$;

c) Care sunt valorile lui $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care matricea asociată lui T, în raport cu baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, nu este diagonalizabilă ?

(etapa locală UTCB, 2002)

5. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ având următoarea matrice asociată în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se găsească valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

b) Să se cerceteze dacă transformarea liniară T este diagonalizabilă; în caz afirmativ să se scrie forma diagonală a matricei A şi să se indice o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^4$ în raport cu care se face diagonalizarea;

c) Să se calculeze A^{2002}.

(etapa locală UTCB, 2002)

6. Fie

$$A = \{ M\,(x, y, z) \in E_3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3\},$$

unde E_3 desemnează spaţiul geometric 3-dimensional.

a) Să se arate că orice dreaptă care trece prin originea $O(0,0,0)$ şi printr-un punct $M \in A$ mai conţine un punct şi numai unul din A; determinaţi coordonatele acestui punct în funcţie de coordonatele lui M.

b) Să se arate că A este reuniunea a două cercuri; determinaţi centrele şi razele lor.

(etapa locală UTCB, 2003)

7. Fie forma pătratică $Q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definită prin: $Q(x,y,z,u) = 2\,xy + 2\,zu$;

a) Să se determine o formă canonică a lui Q şi apoi o bază ortogonală a lui $\mathbf{R}^4$, în raport cu care Q are această formă canonică;

b) Găsiţi coordonatele lui $v = (1,1,1,1)$ în raport cu baza determinată anterior;

c) Fie V un spaţiu vectorial real şi $F : V \times V \to \mathbf{R}$ o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită; să se arate că $(F(x,y))^2 \leq F(x,x)F(y,y)$ pentru orice $x,\ y \in V$.

(etapa locală UTCB, 2003)

8. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

şi vom nota cu S subspaţiul vectorial al soluţiilor sistemului omogen:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine o bază ortonormată în S precum şi complementul ortogonal al lui S ;

b) Dacă $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ este transformarea liniară având pe A ca matrice asociată în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$, să se determine nucleul lui T şi apoi să se calculeze rang T. Este T izomorfism ?

c) Să se determine valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii asociate; este T diagonalizabilă ? În caz afirmativ să se scrie forma diagonală a matricei A.

(etapa locală UTCB, 2005)

9. Fie spaţiul vectorial real

$$V = \{\ a + b\cos x + c\sin x |\ a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

înzestrat cu următorul produs scalar:

$$< g\ , h >= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\ dx, \quad g, h \in V.$$

a) Să se găsească o bază pentru V ; care este dim$V$?

b) Fie transformarea liniară $T : V \to V$ definită de formula:

$$T\ (a + b\cos x + c\sin x) = b + c + (a + c)\cos x + (a + b)\sin x.$$

Să se scrie matricea asociată lui T în raport cu baza determinată la a).

c) Să se determine valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii asociate; este T diagonalizabilă ? În caz afirmativ să se găsească o bază ortonormată a lui V în raport cu care se face diagonalizarea.

(etapa locală UTCB, 2006)

10. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se afle valorile sale proprii şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

b) Să se arate că matricea A este diagonalizabilă şi să se indice o matrice ortogonală în raport cu care se face diagonalizarea;

c) Fie forma pătratică $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ care are pe A ca matrice asociată în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$; să se scrie forma canonică a lui g şi să se precizeze dacă este pozitiv definită.

(etapa locală UTCB, 2006)

11. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită de

$$T\ (x, y, z) = (x + y + z,\ x + y + z,\ x + y + z)$$

a) Să se determine valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

b) Să se arate că T este diagonalizabilă şi să se determine o bază ortonormată în raport cu care se face diagonalizarea;

c) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât matricea $A + m\, I_3$ să fie pozitiv definită, unde A desemnează matricea asociată transformării liniare T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$.

(etapa locală UTCB, 2007)

12. Fie planul $(P) \subset E_3$ de ecuaţie $x+y+z = 0$, unde E_3 desemnează spaţiul geometric 3-dimensional; se consideră $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită de

$$T\ (a, b, c) = (x,\ y,\ z)$$

unde $(x,\ y,\ z)$ sunt coordonatele proiecţiei punctului $M\ (a, b, c)$ pe planul (P).

a) Să se afle expresia lui T şi să se arate că este transformare liniară;

b) Să se determine valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

c) Să se calculeze $T^{2007}(3, 0, 6)$.

(etapa locală UTCB, 2007)

13. Fie $V = M_2(\mathbf{R})$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice de ordin 2, cu coeficienţi reali şi fie transformarea liniară $T : V \to V$ definită astfel:

$$T\ (\ X\ ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ X\ +\ X\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $X \in V$.

a) Să se determine nucleul şi imaginea lui T, apoi să se calculeze $\operatorname{def}(T)$ şi rang T ;

b) Să se găsească valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

c) Să se arate că T este diagonalizabilă, apoi să se scrie forma diagonală a matricei asociate şi să se determine o bază ortonormată în raport cu care se face diagonalizarea.

(etapa locală UTCB, 2008)

14. Fie V_3 spaţiul vectorial al vectorilor liberi 3-dimensionali şi fie transformarea liniară $T : V_3 \to V_3$ având următoarea matrice asociată în raport cu baza canonică $\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \}$ a lui V_3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Se cere m astfel încât $T (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 4 \overrightarrow{i} + 10 \overrightarrow{j} + 4 \overrightarrow{k}$;

b) Pentru $m = 1$, să se determine valorile proprii ale lui T şi apoi subspaţiile proprii corespunzătoare;

c) Pentru $m = 1$, să se arate că T este diagonalizabilă, să se scrie forma diagonală a matricei asociate A şi să se determine o bază ortonormată în raport cu care se face diagonalizarea.

(etapa locală UTCB, 2008)

15. Fie $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ forma pătratică definită de

$$Q(x, y, z) = (\lambda - 2)\ x^2 + (\lambda - 2)\ y^2 + (\lambda + 1)\ z^2 - 2\ xy + 4\ xz - 4\ yz$$

unde $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) Pentru ce valori ale lui λ este forma pătratică Q pozitiv definită ?

b) Pentru $\lambda = 3$ să se determine forma canonică a lui Q folosind metoda transformărilor ortogonale;

c) Să se găsească o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^3$ în raport cu care Q are forma canonică obţinută anterior.

(etapa locală UTCB, 2009)

16. Fie transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ astfel încât

$$T\ (1,0,0) = (2,3,-1), \quad T\ (1,1,0) = (3,2,-1), \quad T\ (1,1,1) = (1,-1,0).$$

a) Să se calculeze $T(0,1,0)$ şi să se determine matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$;

b) Să se determine $Ker\ T$ şi să se cerceteze injectivitatea lui T ;

c) Să se indice o bază în ImT şi să se calculeze rangul lui T .

(etapa locală UTCB, 2009)

17. Fie V_3 spaţiul 3-dimensional al vectorilor liberi şi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V_3$ necoplanari, iar α, β, γ sunt numere reale fixate; se defineşte $T : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$ prin formula:

$$T\ (\ \overrightarrow{u}\ ) = \alpha\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\ \overrightarrow{a} + \beta\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{c})\ \overrightarrow{b} + \gamma\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u})\ \overrightarrow{c}.$$

a) Să se arate că T este o transformare liniară;

b) Dacă $\alpha = \beta = \gamma$ să se calculeze $T(\overrightarrow{i}), T(\overrightarrow{j})$ şi $T(\overrightarrow{k})$;

c) Să se arate că T este izomorfism dacă şi numai dacă $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

(etapa locală UTCB, 2010)

18. Se dau $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$ şi $v_3 = (1,-1,0)$.

a) Să se arate că v_1, v_2 şi v_3 formeaz ă o bază a lui $\mathbf{R}^3$;

b) Ştiind că v_1, v_2 şi v_3 sunt vectori proprii pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix},$$

$a, a', b, b', c, c' \in \mathbf{R}$. Să se determine valorile proprii ale lui A, precum şi parametrii reali a, a', b, b', c, c'.

c) Pentru $a = a' = b = b' = c = c' = 1$ să se calculeze $A\ (1,1,1)^t$.

(etapa locală UTCB, 2010)

19. Fie $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin:

$$T(x, y, z) = (3\ x - y + 2z, -\ x + 3\ y + 2\ z, 2x + 2y).$$

a) Să se determine valorile proprii ale transformării liniare T şi apoi subspaţiile proprii asociate;

b) Cercetaţi dacă T este diagonalizabilă; în caz afirmativ să se scrie forma diagonală şi să se indice o bază ortonormată în raport cu care se face diagonalizarea;

c) Să se calculeze $(A - 4I_3)^n$, unde $n \geq 2$ şi A desemnează matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$.

(etapa locală UTCB, 2011)

20. Fie punctul $M(3, 0, 1)$ şi dreapta (d) de ecuaţii:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

a) Să se determine coordonatele simetricului lui M faţă de dreapta (d);

b) Să se stabilească poziţia relativă a dreptelor de ecuaţii:

$$(d_1) : \begin{cases} y = x - 1 \\ z = x - 1 \end{cases} \qquad (d_2) : \begin{cases} y = 3x - 9 \\ z = 2 - x \end{cases}$$

c) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin M şi se sprijină pe dreptele (d_1) şi (d_2).

(etapa locală UTCB, 2011)

1.4 Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Probleme date la concursul studenţesc "Traian Lalescu" în perioada 2001-2011

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pentru care există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^k = 0$. Să se arate că:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$, b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$.

2. Fie f un polinom de grad n. Să se arate că:

a) $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \det f(A) \geq 0,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\det f(A) \geq 0,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow f(x)f(y) > 0,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $TrA = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ urma matricei A.

Să se arate că dacă $Tr(A^k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, atunci $\det A = 0$.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$Tr(A) = Tr(A^2) = \cdots = Tr(A^{n-1}) = 0 \text{ şi } Tr(A^n) = n.$$

Să se arate că $A^n = I_n$.

5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $\det A = 0$ şi există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel ca minorul Δ_{ii} să fie nenul. Să se arate că $rangA^k = n - 1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu elemente pozitive şi cu proprietatea $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Să se arate că A nu poate avea valori proprii de modul mai mare ca 1.

7. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A + xB) = \det(C + xD)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{C}$ cu $x^{n+1} = 1$.

Să se arate că $\det A = \det C$ şi $\det B = \det D$.

8. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Să se arate că dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^p = O_n$, atunci matricele $I - A$ şi $I + A$ sunt inversabile.

9. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$A^2 + B^2 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}(A \cdot B - B \cdot A)$$

şi $A \cdot B - B \cdot A$ este inversabilă, atunci n este multiplu de k. Pentru $k = 2$ să se dea exemplu de matrice care verifică relaţiile din enunţ.

10. Fie V spaţiul vectorial tridimensional al vectorilor liberi. Considerăm aplicaţia $A : V \to V$, $A(\overline{u}) = \overline{a} \times \overline{u}$, $\overline{u} \in V$, unde $\overline{a}$ este un vector de lungime 1 fixat.

a) Să se arate că A este o transformare liniară;

b) A păstrează unghiul vectorilor ortogonali pe $\overline{a}$;

c) A este o transformare ortogonală a subspaţiului vectorial perpendicular pe $\overline{a}$;

d) Să se arate că există o bază ortonormată în raport cu care A are matricea

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Să se determine toate transformările liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu proprietatea $\mathrm{Im}T = \mathrm{Ker}T$. Există astfel de endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$?

12. Fie un spaţiu vectorial V peste corpul K, de dimensiune finită.

a) Să se determine toate endomorfismele lui V care au aceeaşi matrice în orice bază a spaţiului;

b) Fie spaţiul vectorial W de dimensiune finită peste coprul comutativ K. Să se determine toate transformările liniare din V în W care au aceeaşi matrice în orice baze ale spaţiilor V şi W.

13. Fie p un număr natural, $p \geq 2$, V un spaţiu vectorial peste corpul K şi $T : V \to V$ o transformare liniară astfel ca $T^p = 0$. Să se arate că aplicaţia $S = 1_V - T$ este inversabila, iar dacă $T^{p-1}(x_0) \neq 0$, $x_0 \in V$, atunci sistemul de vectori $x_0, T(x_0), \ldots, T^{p-1}(x_0)$ este liniar independent.

14. Să se arate că nucleul operatorului T definit prin

$$T : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi],\ T(f)(x) = \int_0^{2\pi} [1+\sin(px+qy)]f(y)dy,\ p, q \in \mathbb{N}^*$$

are dimensiune infinită şi să se determine valorile proprii nenule şi vectorii proprii corespunzători:

15. Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ şi $A^5 = I$ atunci $\det(A - I) = 0$.

16. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K şi $p \in \mathbb{N}^*$, $p < n$. Să se determine operatorii liniari $T : V \to V$ care invariază toate subspaţiile liniare de dimensiune p ale lui V.

17. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, un număr fixat. Determinaţi infimumul şi supremumul mulţimii

$$\left\{ x \mid x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}},\ a_1, \ldots, a_n > 0,\ a_{n+1} = a_1,\ a_{n+2} = a_2 \right\}.$$

18. Să se determine cel mai mic număr real pozitiv x pentru care şirul

$$(a_n)_{n\geq 1}, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+x}$$

este descrescător.

19. Fie $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.
Demonstraţi că:
a) $0 < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!}$, $n \geq 1$;
b) $e \notin Q$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n!e - [n!e]) = 0$.([ ]noteaza partea intreaga)

20. Să se determine suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, unde

$$a_1 = 2 \text{ şi } a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1,\ n \geq 1.$$

21. Să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_1 x_3 \dots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \dots x_{2n}} \right)^a$, unde $a \in \mathbb{R}$ si $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

22. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n),\ n \geq 1 \text{ şi } a_1 = 1.$$

a) Să se arate că $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă.

23. Notăm cu $f(n)$ cel mai mic număr natural cu proprietatea

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{f(n)} \geq n.$$

Să se determine $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}$.

24. Fie $f : [a, b] \to]a, b[$ o funcţie continuă. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, există $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, în progresie aritmetică, astfel ca

$$f(c_1) + \dots + f(c_n) = c_1 + \dots + c_n.$$

25. Fie $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că există $M > 0$ astfel încât

$$[f^{(n)}(x)] \leq M,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

şi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că $f(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

26. Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$ şi $a \in I$ cu proprietatea că există $f^{(n+2)}(a)$ finită şi nenulă. Conform formulei lui Taylor, pentru orice $x \in I$ fie c_x între a şi x astfel ca:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{c_x - a}{x - a}$.

27. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$, satisfăcând condiţiile $g(0) = 0$ şi $g'(0) \neq 0$. Definim funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ prin relaţia

$$f(x,y) = \begin{cases} g(xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Să se studieze existenţa derivatelor parţiale de ordinul I şi diferenţiabilitatea lui f în $(0,0)$.

b) Să se arate că $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

28. Se dă ecuaţia cu derivate parţiale

$$az''_{x^2} + 2bz''_{xy} + cz''_{y^2} = 0$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $ac - b^2 < 0$. Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta y \end{cases}$$

ecuaţia să devină $w''_{uv} = 0$. Să se rezolve ecuaţia dată.

29. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

30. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel ca $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ este convergentă. Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

31. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x}dx$.

32. Fie funcţia $f : (0, \infty)^4 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z, t) = \frac{x}{x+y+t} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}.$$

Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

33. Fie $VABC$ un tetraedru. Prin centrul de greutate G al feţei ABC ducem un plan care taie muchiile VA, VB, VC în M, N, P. Să se arate că între volumele tetraedrelor are loc inegalitatea:

$$\mathcal{V}(VABC) \le \mathcal{V}(VMNP).$$

34. Pe muchiile AB, AC şi AD ale tetraedrului $ABCD$ se iau punctele M, N, P astfel ca:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} + \frac{DP}{PA} = 1.$$

Să se arate că planele (MNP) trec printr-un punct fix.

35. Să se arate că dacă într-un poligon $[A_1A_2 \ldots A_{2n}A_{2n+1}]$, $2n$ dintre mediane sunt concurente, atunci toate medianele sunt concurente (numim mediană dreapta ce uneşte un vârf A_k cu mijlocul laturii opuse $A_{n+k}A_{n+k+1}$).

36. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte în spaţiu şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Dacă notăm cu $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_n$ vectorii de poziţie ai punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi cu A_0 punctul cu vectorul de poziţie

$$\overline{r}_0 = a_1\overline{r}_1 + a_2\overline{r}_2 + \ldots + a_n\overline{r}_n$$

să se arate că:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(MA_k^2 - \overline{r}_k^2) = MA_0^2 - \overline{r}_0^2$

b) Să se afle locul geometric al punctelor M din spaţiu pentru care

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot MA_k^2 = a^2 \text{ (constantă)}.$$

c) Să se determine valoarea minimă a sumei

$$S(M) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot MA_k^2$$

când M parcurge spaţiul.

37. Se consideră familia de plane:

$$P_t : 2x\cos t + 2y\sin t - z = 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Să se arate că există sfere care sunt tangente la toate planele din familie.

b) Să se determine locul geometric al centrelor acestor sfere.

c) Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în origine circumscris unei astfel de sfere.

Capitolul 2

Faze naţionale

Probleme date la etapa naţională

în perioadele 1977-1984; 2008-2011

Anul 1977- subiecte anul I

1. Să se arate că:

a) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $|\text{arctg}\, \alpha| \le |\alpha|$;

b) seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n}\text{arctg}\, \frac{x}{n}$ este uniform convergentă pe orice interval mărginit, iar suma ei $S(x)$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu $\lim_{x\to\infty} S'(x) = 0$.

2. Să se arate că

$$\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \ldots < \frac{\pi+1}{2}.$$

3. Se consideră şirul de funcţii: $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \ge 0$, definite prin

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x} t^{2n+1}e^{-t^2}dt.$$

a) Să se calculeze $f_0(x)$ şi să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \ge 1$,

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = -x^{2n}\cdot\frac{e^{-x^2}}{2(n!)}.$$

b) Să se deducă relaţia

$$f_n(x) = -\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\cdot\frac{e^{-x^2}}{2}$$

şi să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f_n(x)}{x^2+1}dx$.

Anul 1978 - subiecte anul I

1. Fie S mulţimea şirurilor din $\mathbf{R}_+^*$.

a) Fie $a = (a_n)$, $n \ge 1$ din S şi $c > 0$ o constantă. Să se arate că dacă $a_n(1 - ca_n) \ge a_{n+1}$ pentru orice $n \ge N$ (cu N natural fixat), atunci $a_n < \frac{N+1}{nc}$ pentru $n > N$.

b) Fie $b = (b_n)$, $n \geq 1$ descrescător spre 0. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n - nb_n$, $n \geq 1$ este mărginit.

c) Fie $c = (c_n)$, $n \geq 1$ din S şi $d = (d_n)$, $n \geq 1$ un şir oarecare de numere reale astfel încât $c_n \cdot |d_n| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-2t} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k d_k \frac{t^k}{k!} \right) dt = 0.$$

2. Fie funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

a) Să se arate că

$$(1 - x^2) \cdot f^{(n)}(x) - (2n - 3)xf^{(n-1)}(x) - (n - 2)^2 \cdot f^{(n-2)}(x) = 0$$

pentru orice $n \geq 2$ şi orice $x \in (-1, 1)$ şi să se deducă $f^{(n)}(0)$ pentru $n \geq 1$;

b) Natura integralei

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

şi valoarea ei, direct şi utilizând dezvoltarea în serie Taylor a lui f în jurul originii;

c) Se cer sumele seriilor $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, folosind b).

3. Fie curba $\gamma : x = t \cos t$; $y = t \sin t$; $z = t$ $(t \geq 0)$.

a) Să se arate că γ este situată pe o suprafaţă conică şi să se reprezinte grafic proiecţia lui γ pe planul xOy.

b) Se cere unghiul dintre curbele γ şi $\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x = y \end{cases}$ în punctul lor de intersecţie cu cota $z > 0$ cea mai mică.

c) Se cere aria porţiunii de con cuprinsă între planele $x = y$, $x = y\sqrt{3}$ şi arcul curbei γ (prima buclă).

Anul 1979 - subiecte anul I

1. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \int_0^1 \text{sgn}\,(x - t)dt.$$

2. Să se studieze convergenţa integralei improprii

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R} \text{ parametru}),$$

apoi să se calculeze valoarea pentru $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $f > 0$, $f' > 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Să se determine t minim astfel încât şirul (a_n), $n \geq 0$, definit prin $a_n = [f(n)+t]\cdot[\ln(f(n)+1) - \ln f(n)]$ să fie strict descrescător.

4. Se consideră forma pătratică

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy + 4xz.$$

Să se reducă la forma canonică şi să se discute natura cuadricelor $q(x, y, z) = \lambda$ cu λ parametru real.

5. Fie curba $\gamma : e^t$, $y = e^t$, $z = t\sqrt{2}$, $t \in \mathbf{R}$. Să se determine versorii triedrului Frenet în punctul curent. Există puncte pe γ unde binormala respectivă intersectează axa Ox ?

6. Să se determine punctele de cotă maximă sau minimă ale suprafeţei

$$z = x^2 + \sqrt{4 - x^2}\cos y.$$

Anul 1980 - subiecte anul I

1. Fie M un punct oarecare pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$ şi punctele $A(-R, 0)$, $B(R, 0)$. Fie C punctul de intersecţie al dreptei AM cu tangenta în B şi D intersecţia dreptei BM cu tangenta în A.

a) Să se arate că înfăşurătoarea familiei de drepte CD este o elipsă (E);

b) Să se determine punctele de pe (E) unde raza de curbură este egală cu media geometrică a lungimilor semiaxelor.

2. Fie $A \in M_2(\mathbf{R})$ nesingulară şi matricea celulară $B \in M_4(\mathbf{R})$, definită prin

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix},$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $\det B$;

b) Să se arate că dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, atunci B este nesingulară şi să se determine B^{-1}, în termeni de A^{-1};

c) Generalizare.

3. Folosind dezvoltări în serie de puteri, să se calculze:

a) suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2}{(2n+2)! 2^{2n+2}}$;

b) valoarea integralei improprii $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

Anul 1980 - subiecte anul II

1. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+1)^3} dx$.

2. Se dă ecuaţia

$$(1) : (2x^2 - 2\pi x + \pi^2)y'' - 2(2x - \pi)y' + 4y = 0$$

şi funcţia

$$(2) : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{dacă} \quad \alpha < |x| \leq \pi \end{cases}, \alpha \in (0, \pi).$$

a) Să se rezolve ecuaţia (1), ştiind că admite soluţii polinomiale.

b) Să se determine soluţiile particulare care verifică condiţiile

$$(I) \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad (II) \quad \begin{cases} y(\pi) = \dfrac{\pi^2}{6} \\ y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

c) Să se dezvolte în serie Fourier funcţia (2).

d) Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{2\alpha}{\pi}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

e) Din dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei (2) pe $[-\pi, \pi]$, să se arate că suma seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$ verifică ecuaţia diferenţială (1) pe $[0, \pi]$, precum şi condiţiile (I).

Anul 1981 - subiecte anul I

1. Pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ din $\mathbf{R}^3$, se consideră matricea

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ sunt fixate. Să se arate că aplicaţia $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \det B$ este biliniară şi să se determine matricea lui f relativ la baza canonică din $\mathbf{R}^3$. Generalizare.

2. Fie punctul $A(1,1,0)$. Se consideră o dreaptă oarecare Δ care se sprijină pe axa Oz şi pe dreapta $d:\begin{cases} x+z=0 \\ y=2 \end{cases}$. Să se determine locul geometric al proiecţiei lui A pe Δ.

3. Se consideră funcţiile $u_n:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, $n\geq 1$, definite prin

$$u_n(x)=\frac{\cos^{n-1}x}{n^2+\cos^{2n}x}.$$

Să se studieze:

a) Natura seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{\pi/2}u_n(x)\cdot\sin x dx$;

b) Convergenţa uniformă a seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n(x)$ pe intervalul $[0,\pi]$.

4. a) Fie $A=[0,2\pi)$, $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2+y^2=1\}$ şi aplicaţia $f:A\to B$, dată prin $f(t)=(\cos t,\sin t)$. Să se arate că f este continuă şi bijectivă, dar f^{-1} nu este continuă.

b) Dacă $f:K\to L$ este o aplicaţie continuă şi bijectivă între două mulţimi compacte din $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 1)$, să se arate că f^{-1} este continuă.

5. a) Pentru ce $\alpha\in\mathbf{R}$, integrala $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-x+\alpha}$ este convergentă ?

b) Să se calculeze $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$.

Anul 1981 - subiecte anul II

1. Să se determine soluţia pe $[0,\infty)$ a ecuaţiei diferenţiale $xy''+2y'=x^2$ care satisface condiţia $y(0)=0$, mărginită în vecinătatea originii.

a) folosind transformarea Laplace

b) recunoscând tipul ecuaţiei şi folosind metoda corespunzătoare.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{5-4\cos x}\cdot e^{inx}dx$, $n\in\mathbf{N}$, folosind teorema reziduurilor.

3. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{\sin x}{5 - 4\cos x}$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se dezvolte în serie Fourier pe $[0, 2\pi]$.

b) Să se arate că seria converge uniform (U.C) pe $[0, 2\pi]$ şi are ca sumă funcţia dată.

4. Funcţia $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ fiind, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ fixat, olomorfă în domeniul $0 < |t| < \infty$, admite o dezvoltare în serie Laurent de forma

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot t^n.$$

Verificaţi următoarele relaţii:

1) $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$.

2) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} \cdot J_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

Anul 1982 - subiecte anul I

1. Se dau trei funcţii $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, bijective, derivabile, cu derivatele nenule în orice punct. Se consideră funcţiile $u, v, w : D \to \mathbf{R}$, unde D este primul octant deschis şi $u(x, y, z) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $v(x, y, z) = g\left(\dfrac{y}{z}\right)$, $w(x, y, z) = h\left(\dfrac{z}{x}\right)$. Să se arate că u, v, w sunt dependente funcţional şi să se indice o relaţie de dependenţă funcţională între ele.

2. Fie integrala improprie $I(r) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(rx)}{x(1+x^2)}dx$, $r > 0$. Să se determine valorile lui r pentru care integrala este convergentă şi în acest caz, să se calculeze valoarea $I(r)$.

3. Fie E mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de forma $f(t) = a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + b_2\sin 2t$, unde $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că E este spaţiu vectorial real şi că

$$B = \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t\}$$

formează o bază pentru E;

b) Să se determine matricea operatorului liniar $\varphi : E \to E$, $f(t) \mapsto f\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, relativ la baza B.

c) Generalizare.

4. Fie curba $\gamma : x = a\cos^2 t$; $y = a \sin 2t$; $z = a \sin^2 t$ ($a > 0$ constantă şi $t \in [0, 2\pi]$). Să se arate că γ este o elipsă şi să se determine valoarea minimă a curburii lui γ.

5. Se consideră forma pătratică $f(x, y, z, t) = t^2 - 2tx + 2xy + 2yz + 2zx$.

a) să se reducă f la forma canonică;

b) să se studieze natura cuadricei $f(x, y, z, 0) = m$, cu m parametru real. Pentru ce m, cuadrica admite generatoare rectilinii?

Anul 1982 - subiecte anul II

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u + iv$, unde $u = \mathrm{Re}(f(z))$ are forma

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right), \quad \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}).$$

2. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz$.

3. Funcţia original $f(t)$ satisface condiţia

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t},$$

$(\forall)t \geq 0$, $s_0 < 1$. Pentru $F(p) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ să se demonstreze că

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} F(n) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{e^t + 1} dt.$$

4. Folosind metoda separării variabilelor să se afle soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - a^2 u = 0, \quad a > 0$$

care satisface condiţiile

1) $u(x,t) = u(x, t+2\pi)$, $x \in \mathbf{R}^*$, $t \geq 0$;

2) $u(0,t) = \dfrac{1}{5 - 3\cos t}$.

Anul 1983 - subiecte anul I

1. Fie $I = (-a, a)$ cu $a > 0$ şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^∞ pe I, astfel încât şirul $f^{(n)}$ este UC (uniform convergent) pe I către o funcţie g.

a) Să se arate că $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_0^x g(t)dt = g(x) - 1$;

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$, să se determine g.

2. a) Să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, şirul $(\sqrt{n} \cdot \cos nx)$, $n \geq 1$ este nemărginit;

b) Să se construiască un şir de funcţii $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, UC pe $\mathbf{R}$, astfel încât şirul f_n' să nu fie punctul convergent în nici un punct din $\mathbf{R}$.

3. Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix},$$

unde $a_i \in \mathbf{R}$ pentru $1 \leq i \leq 4$. Fie $P = a_1 + a_2X + a_3X^2 + a_4X^3$.

a) Să se calculeze A^k pentru $k \in \mathbf{N}$ şi să se arate că $B = P(A)$;

b) Să se determine valorile şi vectorii proprii pentru matricele A şi B;

c) Generalizare.

4. O curbă γ de clasă C^3 se numeşte *curbă Ţiţeica* dacă $\forall M \in \gamma$, raportul dintre torsiunea lui γ în M şi pătratul distanţei de la un punct fix A din spaţiu la planul osculator al curbei γ în M este constant. Să se arate că $\gamma : \begin{cases} xyz = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$ este o curbă Ţiţeica relativ la A= originea.

5. Fie $I = (0,1]$ şi $f_n : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{n+1} \ln x$, $(n \geq 0)$. Să se calculeze marginile lui $|f_n|$ pe I şi să se studieze uniform convergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ pe intervalul I.

Anul 1983 - subiecte anul II

1. Se consideră funcţia

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2},$$

$\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

a) Să se dezvolte f în serie Fourier.

b) Să se dezvolte în jurul punctului de la infinit funcţia

$$g : \{z \in \mathbf{C} | |z| > 1\} \to \mathbf{C}, \quad g(z) = \frac{1}{1 - 2z \cos \theta + z^2},$$

unde $\theta \in [0, 2\pi]$ este un parametru.

2. Se consideră ecuaţia cu derivate parţiale

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 1 - x^2 \neq 0.$$

Să se aducă la forma canonică. Discuţie.

Anul 1984 - subiecte anul I

1. Fie $E = C^0_{[0,2\pi]}$ şi $n \geq 1$ întreg fixat. Se notează $K(x,t) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \sin(x + (-1)^k t)$ şi pentru orice $f \in E$, se defineşte $g \in E$, prin

$$g(x) = \int_0^{2\pi} K(x,t) f(t) dt.$$

a) Să se arate că aplicaţia $T : E \to E$, $f \mapsto g$ este un operator liniar şi să se calculeze $\dim(\mathrm{Im}T)$;

b) Să se determine valorile proprii reale şi vectorii proprii corespunzători pentru operatorul T.

2. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{2}} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}\left(\frac{x-y}{2}t\right) dt$. Pentru $a < b$, se consideră funcţia $h : [a,b] \to \mathbf{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x,b)}{f(x,a)}$.

a) Să se studieze continuitatea lui f ;

b) Pentru $a < b < 0$, să se arate că $\forall x \in [a,b]$, $h(x) > \dfrac{1+e^b}{1+e^a}$.

3. a) Să se determine mulţimea M de convergenţă şi suma pentru seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n}{2n-1} x^{2n-1}$, $x \in M$;

b) Fie $h : [0,a] \to \mathbf{R}$, $a > 0$, o funcţie derivabilă. Pentru orice $x \in (0,a]$ se notează $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (h(x) - h(t))dt$ şi $g(x) = \displaystyle\int_x^a \frac{f(t)}{t} dt$. Să se arate că $f - g - h$ este constantă pe $(0,a]$.

4. Se consideră curba $\Gamma_\alpha : \begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 \end{cases}$ unde $\alpha \in \mathbf{R}$, $z > 0$.

a) Se cere numărul punctelor de intersecţie ale curbei Γ_α cu planul xOz; discuţie după parametrul α.

b) Se cer ecuaţiile proiecţiei curbei Γ_α pe planul xOz;

c) Să se calculeze curbura lui Γ_1 în punctul $A(1,0,\sqrt{3})$.

Anul 2008-subiecte anul I, Profil mecanic

1. Fie sfera : $(S) :\ x^2+y^2+z^2-9=0$, planul $(H) :\ x+y+z-3=0$ şi cercul spaţial $(C) = (S) \cap (H)$.

a) Să se afle raza şi coordonatele centrului cercului (C).

b) Să se arate că orice sferă care conţine efectiv cercul (C), are ecuaţia de forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + \lambda(x + y + z - 3) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

c) Să se găsească ecuaţia sferei de rază $R = 6$, care conţine cercul (C).

2. Să se arate că ecuaţia $X^2 + aX + bI_3 = 0_3$, unde $a^2 - 4b \geq 0$, admite o infinitate de soluţii în $M_3(\mathbf{R})$.

3. Fie funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}.$$

a) Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiei f în origine.

b) Să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2})]^n dt.$ pentru $n = 2k$ şi $n = 2k + 1$.

c) Să se arate că şirul de funcţii $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, definit prin $g_n(x) = \dfrac{f(x^2, n)}{2n}$ este uniform convergent pe $\mathbf{R}$ către o funcţie continuă g şi să se calculeze $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.

4. Să se studieze natura seriei:$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{n^\beta \sin \frac{1}{n}}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Anul 2008-subiecte anul I, Profil electric

1. a) Să se precizeze clasa de diferenţiabilitate a funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right] - [2x] + [x],$$

unde $[\,\cdot\,]$ reprezintă partea întreagă a expresiei pe care o conţine.

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \left[\dfrac{x+2^n}{2^{n+1}}\right]$. Să se studieze convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

c) Să se stabilească dacă funcţiile diferenţiabile pot fi aproximate oricât de bine prin funcţii discontinue.

2. Fie V subspaţiul vectorial al lui $M_n(\mathbf{C})$, generat de matricile de forma $AB - BA$, $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Să se arate că $\dim_{\mathbf{C}} V = n^2 - 1$.

3. În spaţiul real $V = \mathbf{R}^3$ se consideră forma pătratică

$$\varphi(x,x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3,$$

în care ξ_1, ξ_2, ξ_3 sunt coordonatele vectorului $x \in V$ în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$. Se cere:

a) Să se arate că forma biliniară simetrică asociată acestei forme pătratice este un produs scalar.

b) Să se afle normele vectorilor e_1, e_2, e_3 şi $\cos(\widehat{e_1, e_2})$ (în raport cu produsul scalar definit la punctul a)).

4. Funcţiile f, f', f'' sunt continue pe $[0,a]$, $a \geq 0$ şi $f(0) = f'(0) = 0$. Să se arate că

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{a^2}{2}\int_0^a (f''(x))^2 dx.$$

Anul 2008 - subiecte anul II

1. Fie funcţia $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + e^x \cos y$.

a) Arătaţi că $u(x,y)$ este o funcţie armonică.

b) Construiţi $f(z)$ olomorfă , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, unde $u(x,y)$ este funcţia precizată în enunţ, cu condiţia $f(1) = e$.

c) Fie $R \in (0,\infty)\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Calculaţi integrala

$$I = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R} \frac{f(z) - 2\ln z}{z^2(z+i)} dz$$

2. Calculaţi integrala
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot e^{inx}}{(13 - 12\cos x)^2} dx,\ n \in \mathbf{N}^*.$$
3. Să se rezolve ecuaţia diferenţială:

$$x'' - 2x' + x = e^t, x(0) = 0, x'(0) = 1,$$

folosind transformarea Laplace.

4. Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale: $\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$,
care verifică condiţiile iniţiale $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1$.

Anul 2009 - subiecte anul I, Profil mecanic

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{y}{x^2}, & \text{dacă} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$.

a) Să se calculeze derivatele parţiale ale lui f în $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$.

b) Să se studieze diferenţialitatea Fréchet a lui f în $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$.

c) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale ale lui f în $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$.

d) Fie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi $g(x, y, z) = f(r, 1)$.

Să se calculeze grad g .

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$.

a) Folosind eventual schimbarea de variabilă $t = x + s$, să se arate că

$$0 < xf(x) < 1, \forall x > 0.$$

b) Să se calculeze $f'(x)$.

c) Să se arate că $f'(x) < 0, \forall x > 0$.

d) Să se calculeze $f(0)$.

3. a) Să se găsească o transformare liniară $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, astfel încât

$$f(e_1) = (4,3,3), f(e_2) = (6,-5,-6), f(e_3) = (0,0,1),$$

unde $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$.

b) Să se arate că există un număr natural n şi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât

$$a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R^3}$, unde $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$, $k \geq 2$.

Să se găsească n şi $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

c) Să se găsească un subspaţiu vectorial U al lui $\mathbf{R^3}$ astfel încât $\dim U = 1$ şi $f(u) = u$ pentru orice $u \in U$.

4. Se dă familia de sfere

$$S_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 - 4(\lambda+1)x - 2(3\lambda-2)y + 2(\lambda-5)z - 14\lambda + 33 = 0,$$

$\lambda \in \mathbf{R}$.

a) Să se precizeze centrul şi raza sferei S_λ.

b)Să se arate că centrele sferelor S_λ se află pe o dreaptă şi să se afle ecuaţia acesteia.

c) Să se găsească un plan care să fie tangent tuturor sferelor din familia dată.

Anul 2009 - subiecte anul I, Profil electric

1. Fie a_n un şir de numere reale astfel incât seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ are raza de convergenţă 1 şi fie $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n, x \in$ (-1,1). Presupunem că există $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L \in \mathbf{R}$.

a) Dacă $a_n \geq 0$ să se demonstreze că seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă şi are suma L.

b) Să se dea un exemplu de serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ ca în enunţ, cu $a_n \in \mathbf{R}$, astfel încât $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ diverge.

2. Fie $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ şi fie $f_0 : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $f_0(a) = 0$. Fie

$$f_n : [a, b] \to \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt, n \geq 1.$$

a) Să se studieze convergenţa uniformă a seriei $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

b) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

3. Fie $P_1, ..., P_n$ $(n \geq 3)$ n puncte distincte aflate pe aceeaşi circumferinţă (în această ordine). Pentru fiecare pereche de puncte P_i, P_j, notăm cu a_{ij} lungimea segmentului P_iP_j dacă $i \leq j$ şi $a_{ji} = -a_{ij}$. Considerăm matricea (antisimetrică) $A = [a_{ij}]$. Să se determine dimensiunile imaginii şi nucleului aplicaţiei liniare $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, asociate acestei matrice.

4. Fie A, B matrice pătratice din $M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că există o coloană nenulă x din $M_{n,1}(\mathbf{R})$ astfel incât $Ax = 0$ şi o coloană y din $M_{n,1}(\mathbf{R})$ astfel ca $Ay = Bx$. Dacă A_i este matricea obţinută prin înlocuirea în A a coloanei i, a_i, prin coloana i, b_i, din B, să se arate că $\det A_1 + ... + \det A_n = 0$, unde $\det A_i$ este determinantul matricei A_i.

Anul 2009 - subiecte anul II, Profil mecanic

1. Se consideră ecuaţia diferenţială

$$x''' + (2a - 1)x'' + (a^2 + 3)x' + (a^2 + 3a)x = 1,$$

unde $a \in \mathbf{R}$ este un parametru.

a) Să se determine valorile lui a pentru care soluţiile sunt stabile pentru $t \to \infty$.

b) Pentru $a = 1$, să se determine , folosind transformarea Laplace, soluţia $x(t)$ pe $(0, \infty)$ a ecuaţiei , astfel încât $x(0_+) = 0, x'(0_+) = 0, x''(0_+) = 0$.

2. a) Să se determine $\left\{ z \in \mathbf{C} / \cos z = \dfrac{5}{4} \right\}$.

b) Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{5 - \cos t}$;

c) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{5 - 4\cos z}$.

3. Fie sistemul $x' = f(x, y), y' = g(x, y)$ cu $f, g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^\infty$, cu soluţii $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

a) Un punct $(a, b) \in \mathbf{R^2}$ se numeşte un echilibru dacă funcţia $\varphi(t) = (a, b)$ este soluţie. Să se arate ca (a, b) este echilibru dacă şi numai dacă $f(a, b) = 0, g(a, b) = 0$.

b) Să se arate că două orbite sunt sau disjuncte, sau coincid.

4. Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + ...a_n z^n$, cu $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, 1, ..., n$.

a) Să se calculeze

$$I_k = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz \quad \text{şi} \quad J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt,$$

pentru $0 \le k \le n$.

b) Dacă toţi $a_k \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) dx = -i \int_0^{\pi} f^2(e^{it}) e^{it} dt,$$

şi că

$$\int_0^1 f^2(x) \le 2\pi \sum_{k \ge 0} a_k^2.$$

Anul 2009 - subiecte anul II, Profil electric

1. Se consideră ecuaţia difernţială

$$x''' + (2a-1)x'' + (a^2+3)x' + (a^2+3a)x = 1,$$

unde $a \in \mathbf{R}$ este un parametru.

a) Să se determine valorile lui a pentru care soluţiile sunt stabile pentru $t \to \infty$.

b) Pentru $a = 1$, să se determine , folosind transformarea Laplace, soluţia $x(t)$ pe $(0, \infty)$ a ecuaţiei , astfel încât $x(0_+) = 0, x'(0_+) = 0, x''(0_+) = 0$.

2. Fie D un disc deschis în planul complex.

a) Să se arate că o funcţie olomorfă $f : D \to \mathbf{C}$ are primitive şi că orice două primitive diferă printr-o constantă .

b) Dacă F este o primitivă a unei funcţii $f : D \to \mathbf{C}$, are loc relaţia

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_2).$$

c) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ dacă $a + ib = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz$.

3. Să se determine seria Fourier ataşată funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{5 - 4\cos x}$ pe $(-\pi, \pi)$, să se studieze natura acestei serii şi să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{5 - 4\cos z}$.

4. Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n$, cu $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

a) Să se calculeze $I_k = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz$ şi $J_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt$, pentru $0 \le k \le n$.

b) Dacă toţi $a_k \in \mathbf{R}$, să se arate că

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx = -i \int_0^{\pi} f^2(e^{it})e^{it}dt,$$

şi că

$$\int_0^1 f^2(x) \leq 2\pi \sum_{k\geq 0} a_k^2.$$

Anul 2010 - subiecte anul I, Profil mecanic

1. Fie $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases},$$

dacă $a \geq \dfrac{1}{2}, b \geq \dfrac{1}{2}$ sunt doi parametri reali.

a) Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \forall (x,y) \neq (0,0).$$

b) Studiaţi continuitatea funcţiei în origine.

c) Studiaţi existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei în origine.

d) Pentru $a = 4$ şi $b = 1$, să se găsească mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii:

$$\sum_{n\geq 1} f(\frac{1}{n}, n)(x+1)^n.$$

2. Fie funcţia $I : [0,\infty] \to \mathbf{R}$, $I(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(x+\frac{y}{x})^2} dx$.

a) Arătaţi că $I(y)$ este convergentă pentru orice $y \in [0,\infty]$.

b) Determinaţi $I'(y)$ şi arătaţi că $I'(y) = -4I(y)$.

c) Ştiind că $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, să se calculeze $I(y)$.

3. Fie funcţia $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ definită prin

$$T(x_1,x_2,x_3) = (2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_1 - 2x_2), \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R^3}.$$

a) Să se arate că T este aplicaţie liniară şi să se calculeze Ker$T$ şi ImT.

b) Să se arate că dacă $u, v \in \mathrm{Im}T$, atunci unghiul dintre u şi v este egal cu cel dintre $T(u)$ şi $T(v)$.

c) Fie matricea $Q = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$, unde A este matricea transformării T în baza canonică din $\mathbf{R^3}$. Determinaţi valorile proprii reale ale matricei Q şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

4. Se consideră planul π de ecuaţie: $(2m+1)x+(3-4m)y+3z-2 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile planelor π_1 , π_2 şi π_3 care sunt perpendiculare pe planul π şi conţin axele Ox, respectiv Oy şi Oz.

b) Să se arate că cele trei plane de la punctul a) trec printr-o dreaptă d, a cărei ecuaţie se cere.

c) Să se arate că dreapta d descrie un plan atunci când m variază.

Anul 2010 - subiecte anul I, Profil electric

1. Găsiţi funcţiile $f : \mathbf{R} \to [0, \infty]$ cu proprietatea

$$f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)dt}.$$

2. Fie f o funcţie care admite o dezvoltare în serie de puteri în jurul lui 0, având raza de convergenţă R.

a) Să se arate că

$$\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}) = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt, |x| < R.$$

b) Să se arate că

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. Fie $\overrightarrow{a} \in \mathbf{R^3}$ un vector nenul fixat şi $T : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} \in \mathbf{R^3}$.

a) Să se atare că T este o aplicaţie liniară şi să se determine subspaţiile Ker$T$ şi ImT.

b) Să se atare că pentru orice $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in ImT$, unghiurile dintre vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$, respectiv $T(\overrightarrow{v_1})$ şi $T(\overrightarrow{v_2})$ sunt egale.

c) Să se determine toate aplicaţiile liniare $S : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ cu proprietatea $S(\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbf{R^3}$.

4. Fie V un subspaţiu vectorial real de dimensiune n şi $T : V \to V$ o aplicaţie liniară care admite $n+1$ vectori proprii astfel că oricare n dintre ei sunt liniar independenţi. Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $T = aI$, unde I este aplicaţia identică.

Anul 2010 - subiecte anul II

1. a) Se consideră ecuaţia diferenţială: $tx''(t) + x'(t) + tx(t) = 0$. Să se arate că ecuaţia admite o soluţie unică sub forma unei serii de puteri convergentă pe $\mathbf{R}$, care respectă condiţia $x(0) = 1$.

b) Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = -x - z \\ z' = x + y + 2z \end{cases},$$

unde $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1$.

2. Să se determine f olomorfă , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $x > 0$, ştiind că $f(1) = 0$, $f(e) = 1 - i$ şi $u(x,y) + v(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$, unde $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbf{R}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia integrală :

$$x'(t) - 2\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau d\tau,$$

ştiind că $x(0) = 0$ şi $t > 0$.

4. Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos^2(x)}{5 + 4\sin x}.$$

Anul 2011 - subiecte anul I, Profil mecanic

1. În $\mathbf{R}^3$ se consideră transformarea liniară, pentru a real fixat,

$$T_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad T_a(x, y, z) = \left(x, ax + y, \frac{a^2}{2}x + ay + z\right).$$

a) Se cere matricea M_a a lui T_a în baza canonică din $\mathbf{R}^3$ şi să se determine nucleul şi imaginea transformării.

b) Să se afle valorile şi vectorii proprii pentru M_a. Stabiliţi dacă matricea este diagonalizabilă.

c) Arătaţi că $M_a M_b = M_{a+b}$ şi calculaţi M_a^n şi M_a^{-1}.

d) Să se studieze convergenţa şi să se afle (dacă există) limita şirului (S_n), în care

$$S_n = I_3 + \frac{1}{1!}M_a + \frac{1}{2!}M_a^2 + \ldots + \frac{1}{n!}M_a^n.$$

2. Se consideră dreapta de ecuaţie

$$d_1 : \frac{x - a}{1} = \frac{y + 2}{b} = \frac{z - a + b}{3}$$

şi planele de ecuaţii

$$(P_1) : x - 2y + z - 4 = 0, \quad (P_2) : x + 2y + 2z + 1 = 0, \quad (P_3) : x + 7y + 7z + m = 0,$$

unde $a, b, m \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a, b \in R$ ştiind că dreapta d_1 este inclusă în planul (P_1).

b) Să se găsească proiecţia punctului $A = (1, -2, 2)$ pe planul (P_2).

c) Să se discute poziţia relativă a celor trei plane în funcţie de m.

3. Fie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiei f în origine.

b) Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în (0,0).

c) Se consideră şirul de funcţii $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definit prin

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{x} f\left(x, \dfrac{1}{n}\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şi să se precizeze dacă şirul f_n converge uniform pe $\mathbf{R}$.

4. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{n}x^{2n}$.

a) Să se afle mulţimea de convergenţă a seriei şi să se calculeze suma ei.

b) Discutaţi convergenţa uniformă a seriei.

c) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \ln(1+3x^2)dx$ şi să se arate că

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n+1)} = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Anul 2011 - subiecte anul I, Profil electric

1. Fie funcţia $f \in C^2(\mathbf{R})$ astfel încât $|f(x)| \leq 1$ şi $|f''(x)| \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a) Scrieţi formula lui Taylor de ordinul doi pentru funcţia

$$g(t) = 1 - f(x+t), \quad t \in \mathbf{R},$$

în jurul unui punct t_0 arbitrar ($x \in \mathbf{R}$ fixat).

b) Să se demonstreze că $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2. Găsiţi cea mai mare valoare a integralei

$$\int_0^y \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}dx, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

3. Se consideră spaţiile euclidiene $\mathbf{R}^2$ şi $\mathbf{C}^2$ cu produsele scalare

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = x \cdot u + y \cdot v, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2,$$

respectiv

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle = x \cdot \overline{u} + y \cdot \overline{v}, \quad (x, y) \in \mathbf{C}^2, \quad (u, v) \in \mathbf{C}^2.$$

Să se determine aplicaţiile liniare $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ şi $S : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ cu proprietatea $\langle T(x, y), (x, y) \rangle = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, respectiv

$$\langle S(u, v), (u, v) \rangle = 0, \quad \text{pentru orice} \quad (u, v) \in \mathbf{C}^2.$$

4. Fie $A \in M_2(\mathbf{R})$ o matrice simetrică ($A' = A$) astfel ca

$$(\mathrm{Tr}(A^{2010}))^{2011} = (\mathrm{Tr}(A^{2011}))^{2010}.$$

Să se arate că pentru orice $n \geq 2$, $A^n = \mathrm{Tr}(A) \cdot A^{n-1}$.

Anul 2011 - subiecte anul II

1. a) În coordonate polare (ρ, θ), sistemul Cauchy-Riemann este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases},$$

iar operatorul lui Laplace are expresia $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$, unde $z = \rho e^{i\theta}$, ştiind că $u(\rho, \theta) = \varphi(\text{tg}\theta)$, unde φ este o funcţie de două ori diferenţiabilă.

b) Calculaţi:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{1}{z-a}}}{z(z-a)^2} dz, \quad r > 0,\ r \neq a,\ a \in \mathbf{R},$$

2. Să se rezolve următoarea ecuaţie integrală, utilizând transformata Laplace

$$\varphi''(t) + \int_0^t 3e^{4(t-u)} \varphi'(u) du = \sin(5t),$$

cu condiţiile iniţiale $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

3. Rezolvaţi ecuaţia integrală

$$\int_0^\infty \varphi(t) \sin(ut) dt = \frac{u}{(u^2 + a^2)^2},\ u > 0,\ a > 0.$$

4. Fie $f : (-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\text{sh}\pi} \cdot e^x$.

a) Să se dezvolte funcţia f în serie Fourier.

b) Folosind dezvoltarea obţinută la punctul a), calculaţi sumele seriilor numerice

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{şi} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}.$$

Capitolul 3

Probleme propuse

3.1 Analiză matematică

1. Să se determine sumele seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)},\ a>0,\ b>a+1.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a+2^n}{2^{n+1}}\right],\ a \in \mathbf{R}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{a}{2^n},\ a \in \mathbf{R} \setminus \left\{2^n\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \mid k,n \in \mathbf{Z}\right\}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{arctg}\frac{2^n}{1+2^{2n+1}}$.

g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{arctg}\frac{3}{n^2-n-1}$.

h) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

j) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$.

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+bn+c}{n!},\ a,b,c \in \mathbf{R}.$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unde $a_1=1$ şi $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_1+a_2+\dots+a_n}-\sqrt{2},\ n \geq 1.$

2. Să se precizeze natura seriilor (convergente sau divergente).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$, $a>0$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot a^n$, $a>0$.

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^a}$, $a \in \mathbf{R}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\sin n + b\cos n}{n}$.

3. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$ este convergentă şi are loc inegalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

4. Dacă termenii şirului $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ aparţin mulţimii $\{-1,0,1\}$ să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\varepsilon_3\sqrt{2+\dots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n}{2^n}\right)$$

5. Se consideră şirul $(a_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $n \geq 1$ şi $a_1 = 1$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

c) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă.

6. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, convergentă. Să se arate că dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ atunci ea este egală cu zero,

7. Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ este convergentă dar nu este absolut convergentă.

8. Fie seria convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Să se arate că pentru orice $a \in (-1, 1)$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n a^n$ este convergentă şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n a^n = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n.$$

9. Fie $(a_n)_n$ un şir cu termeni pozitivi. Să se arate că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ este convergent dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

10. Fie $(\varepsilon_n)_n$ un şir cu termenii $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n!}$ este un număr iraţional.

11. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^a \sin \dfrac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este diferenţiabilă pentru orice $a > 1$.

12. Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^2$ şi $(x_0, y_0) \in \text{int}D$. Să se arate că dacă f are derivate parţiale într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) şi dacă una din ele este continuă în (x_0, y_0), atunci f este diferenţiabilă în (x_0, y_0).

13. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbf{R}$, satisfăcând condiţiile $g(0) = 0$ şi $g'(0) \neq 0$. Definim funcţia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ prin relaţia

$$f(x,y) = \begin{cases} g(xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Să se studieze existenţa derivatelor parţiale de ordinul I şi diferenţiabilitatea lui f în $(0,0)$.

b) Să se arate că $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

14. Se dă ecuaţia cu derivate parţiale

$$az''_{x^2} + 2bz''_{xy} + cz''_{y^2} = 0$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ şi $ac - b^2 < 0$. Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel ca prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta z \end{cases}$$

ecuaţia să devină $w''_{uv} = 0$. Să se rezolve ecuaţia dată.

15. Să se determine funcţiile f de clasă C^2 de forma:

a) $f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$;

b) $f(x,y) = \varphi(y^2 - x^2)$;

c) $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$
unde $\varphi \in C^2(\mathbf{R})$, care verifică ecuaţia lui Laplace.

16. Fie $B=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|<1\}$ bila unitate din $\mathbf{R}^n$ şi fie $f:B\to B$ o funcţie continuă cu proprietatea $\|f(x)\|<\|x\|$ pentru orice $x\in B$, $x\neq 0$.

Să se demonstreze că şirul $(x_m)_{m\geq 0}$ definit prin relaţia

$$x_{m+1}=f(x_m),\quad m\geq 0,\ x_0\in B,\ x_0\neq 0_n,$$

are limita 0_n. ($\|\cdot\|$ notează norma euclidiană din $\mathbf{R}^n$, iar 0_n vectorul nul din $\mathbf{R}^n$).

17. Să se arate că pentru orice $x,y\in[0,\infty)$ are loc inegalitatea

$$\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}.$$

18. Fie $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ şi $f:B\to\mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietatea $|f(x,y)|\leq 1$ pentru orice $(x,y)\in B$. Să se arate că există un punct (x_0,y_0) interior lui B astfel ca

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leq 16.$$

19. Pe elipsoidul (E) de ecuaţie $\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ găsiţi punctul aflat la distanţă minimă de planul (P) de ecuaţie $3x+4y+12z=288$.

20. Să se determine extremele globale ale funcţiei $f(x,y)=x^2+y^2$, pe mulţimea $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2-6x-8y+24\leq 0\}$.

21. Să se determine extremele locale şi globale ale funcţiei $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$.

22. Găsiţi distanţa minimă de la punctul $M(4,6)$ la elipsa

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

23. Fie $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbf{R}$ cu proprietatea $b^2-4ac<0$ şi fie M mulţimea perechilor $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ cu proprietatea

$$ax^2+bxy+cy^2+dx^3+ex^2y+fxy^2+gy^3=0.$$

Demonstraţi că există un număr $r>0$ cu proprietatea că în mulţimea

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<r^2\}$$

nu există nici un punct din M. (Putnam, 1970)

24. Folosind a doua teoremă de medie, să se arate că:

a) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\quad x<\frac{\ln 2}{2}$.

b) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\right|<2.$

25. Fie $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx,\ n\in\mathbf{N}.$

a) Să se calculeze I_{2n} şi I_{2n+1};

b) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ avem

$$a_n=\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}=b_n;$$

c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2}$$

(Formulele lui Wallis);

d) Să se deducă inegalităţile

$$\sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{n\pi}},\ \forall n \in \mathbf{N}^*;$$

e) Să se afle natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

26. Fie $a \in \mathbf{R}_+^*$ şi $f, g : [-a, a] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue.

a) Să se arate că dacă funcţia f este pară $\big($adică $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-a, a]\big)$ şi $g(x) \cdot g(-x) = 1,\ \forall x \in [-a, a]$ atunci

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)} dx = \int_{0}^{a} f(x) dx;$$

b) Să se calculeze integrala

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{1+e^{2013x}} dx$$

$\big($În loc de x^2 putem pune orice funcţie continuă pară$\big)$.

Caz particular

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{2013x}} dx.$$

27. Fie $a \in \mathbf{R}_+^*$ şi $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă.

a) Să se arate că

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_{0}^{a} \big[f(x) + f(-x)\big] dx;$$

b) Să se arate că

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, & \text{dacă f este funcţie pară} \\ 0, & \text{dacă f este funcţie impară;} \end{cases}$$

c) Să se calculeze

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{(1+e^x)\cos x}\, dx;$$

d) Să se calculeze

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}\, e^{2x-3}}\, dx.$$

28. (**Formula lui Stirling**) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

29. (**Formula lui Bonnet-Weierstrass**) Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1 descrescătoare şi $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

30. (**Integrala Poisson**) Utilizând relaţia

$$X^{2n} - 1 = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

să se demonstreze că valoarea integralei

$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos x + 1)dx, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

este 0 dacă $|a| < 1$ şi $2\pi \ln |a|$ dacă $|a| > 1$.

31. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Să se arate că $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4.$

32. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx,$

a) Să se arate că:

$$2I_n = \frac{1}{n} + I_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

b) Să se deducă de aici că

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right)$$

33. Fie $f \in C^1[0, 1]$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$
Să se arate că

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 30.$$

34. Dacă $f : [0, 1] \to [0, 1]$ este o funcţie continuă atunci

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq 2 \int_0^1 xf(x)dx.$$

35. Să se determine funcţiile $f : [0,1] \to (0,\infty)$ de clasă C^1 care verifică relaţiile:

$$f(1) = ef(0) \quad \text{şi} \quad \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{(f(x))^2} dx \leq 2.$$

36. Fie $M = \{f \mid f \in C^2[0,1],\ f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = 1\}$.
Să se determine

$$\min_{f \in M} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

şi funcţiile pentru care se atinge minimul.

37. (**Formula lui Gauss**) Fie $a > b > 0$ şi

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

Definim şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ prin relaţiile de recurenţă

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \quad a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

a) Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mu(a,b)$.

b) $G(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 x + b_n^2 \sin^2 x}}$, $\forall\ n \geq 0$.

c) $G(a,b) = \dfrac{\pi}{2\mu(a,b)}$.

38. Fie $f \in C^1[a,b]$. Fie şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$u_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \dfrac{a-b}{2}(f(b) - f(a))$.

39. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ să aibă loc egalitatea

$$\int_0^{\pi} (ax + bx^2) \cos nx dx = \frac{1}{n^2}.$$

Să se deducă de aici că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

40. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$. Să se demonstreze relaţiile:

a) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,\ \forall\ a \in \mathbf{R};$

b) $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx,\ \forall\ a \in \mathbf{R},\ \forall\ a \in \mathbf{N}.$

Aplicaţie. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2003\pi} \arcsin(\sin x)dx.$

41. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de perioadă $T > 0$ şi $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ funcţii integrabile. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx \int_0^T g(x)dx.$$

42. Fie $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}[x]$. Atunci

$$F(x) = \int_1^x f_1(t)f_3(t)dt \int_1^x f_2(t)f_4(t)dt - \int_1^x f_1(t)f_4(t)dt \int_1^x f_2(t)f_3(t)dt$$

este un polinom divizibil cu $(x-1)^4$.

43. Arătaţi că :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y))^2 dxdy.$$

44. Să se determine $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ pentru care

$$f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{f(x)},\quad x\in(0,\infty).$$

45. Fie $f\in C^1[0,1]$ cu $f(0)=0$, $0\le f'(x)\le 1$, $\forall\, x\in(0,1)$. Să se arate că

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\ge\int_0^1 (f(x))^3dx.$$

Când are loc egalitatea?

46. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă cu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)dx$.

47. Să se calculeze următoarele integrale improprii reductibile la funcţia beta:

a) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$ $\lceil$**R:** $B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{\pi}{8}.\rfloor$

b) $\displaystyle\int\limits_0^1 x\sqrt{x^3(1-x)}\,dx.$ $\lceil$**R:** $\frac{5\pi}{27}.\rfloor$

c) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}\,dx.$ $\lceil$**R:** $\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{n!3^{n+1/2}}\,\pi.\rfloor$

d) $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0.$ $\lceil$**R:** $\frac{\pi a^4}{16}.\rfloor$

e) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ n\in\mathbf{N}^*, m>0.$ $\lceil$**R:** $\frac{1}{m}B\Big(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\Big).\rfloor$

f) $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a<b.$ $\lceil$**R:** $\pi.\rfloor$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x dx.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{\pi}{32}.\rfloor$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{3\pi}{512}.\rfloor$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \cos^{n-1} x dx,\ n \in \mathbf{N}^*.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{1}{2}B\Big(\dfrac{n}{2}+1, \dfrac{n}{2}\Big) = \dfrac{n}{4}\dfrac{\big[\Gamma(n/2)\big]^2}{\Gamma(n+1)}.\rfloor$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\, dx,\ p > -1 < q.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{1}{2}B\Big(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{q+1}{2}\Big).\rfloor$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^p x\, dx, p < 1.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{\pi}{2\cos(p\pi/2)}.\rfloor$

l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$ $\lceil$**R:** $\pi.\rfloor$

m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\, dx.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}.\rfloor$

n) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^6)^2}\, dx.$ $\lceil$**R:** $\dfrac{\pi}{12}.\rfloor$

48. (**Formula lui Legendre**) Să se demonstreze că:

$$\Gamma(a)\Gamma\Big(a+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

49. (**Formula lui Dirichlet**) Să se arate că :

$$\Gamma(r)\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-\alpha x}}{(x+\beta)^t}\, dx = \Gamma(s)\int_0^{\infty} \frac{y^{r-1}e^{-\beta x}}{(y+\alpha)^s}\, dy,\ \alpha > 0 < \beta,\ r > 0 < s.$$

50. (**Integrala lui Raabe**) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \ln\big(\Gamma(x)\big)dx.$

3.2 Algebră

1. Fie V mulţimea funcţiilor $f : [1, e] \to \mathbf{R}$ de clasă $\mathbf{C}^2$ astfel încât $f(1) = 0$, $f(e) = 0$.

a) Să se arate că V este spaţiu vectorial de dimensiune infinită, că submul-ţimea $W \subset V$ a funcţiilor polinomiale de grad $\leq n$($n \geq 2$ fixat) este un subspaţiu finit dimensional şi să se indice o bază pentru W.

b) Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia diferenţială

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$$

să aibă soluţii nenule din V. Are această ecuaţie soluţii nenule în W?

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Să se arate că:

$$\det(A + B) + \det(A + \varepsilon B) + \cdots + \det(A + \varepsilon^{n-1} B) = n[\det A + \det B].$$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $B = \overline{A^t A}$.

a) Să se arate că $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} = 0$, atunci $\det A = 0$.

b) Dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$ atunci $A = 0$.

4. Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ şi $A^2 + B^2 = \pi(A \cdot B - B \cdot A)$ atunci $\det[A^2 + B^2] = 0$.

5. Dacă $A \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$, $A^n = [a_{ij}^{(n)}]_{i,j=\overline{1,k}}$ şi există i astfel încât $a_{ii}^{(n)} = 0$, $i = \overline{1, k}$, atunci $\det A = 0$.

6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $\mathrm{Tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ urma matricei A.

Să se arate că dacă $\text{Tr}(A^k) = 0$, $k = \overline{1, n}$ atunci

a) $\det A = 0$

b) $A^n = 0$.

7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice. Să se arate că dacă $A^n \neq 0$ atunci $A^k \neq 0$ pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$.

8. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice pătratică de ordin n pentru care există astfel $k \in \mathbf{N}^*$ ca $A^k = 0$. Să se arate că:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$, b) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$.

9. Fie $A_k \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că:

$$\sum \det(\pm A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_n) = 2^n \sum_{k=1}^{n} \det A_k$$

unde suma se face după toate combinaţiile de semne.

10. Fie $k \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că dacă există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel ca:

$$A^2 + B^2 = \text{ctg}\frac{\pi}{k}(A \cdot B - B \cdot A)$$

şi $A \cdot B - B \cdot A$ este inversabilă, atunci n este multiplu de k. Pentru $k = 2$ să se dea exemplu de matrice care verifică relaţiile din enunţ.

11. Fie matricele linie $a = [a_1, \ldots, a_n]$, $b = [b_1, \ldots, b_n]$ cu $a_i, b_i \in \mathbf{C}$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$. Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ verifică relaţia: $A^p = a^t b - I_n$, $p \geq 1$ să se arate că:

a) $A \cdot a^t = 0$, $b \cdot A = 0$.

b) $A^k + a^t \cdot b$ este inversabilă pentru $k = \overline{1, p-1}$.

12. Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ cu proprietatea $f(\text{tr}A) = \text{tr}(f(A))$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

13. Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbf{C}[X]$ cu proprietatea:

$$\det(f(A)) = f(\det A), \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$$

14. Să se determine numărul matricelor de tip (m, n) cu elemente $a_{ij} \in \{\pm 1\}$ pentru care produsul elementelor fiecărei linii şi fiecărei coloane este -1.

15. Fie f un polinom de grad n. Să se arate că:
a) $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbf{R}, \quad \det f(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
b) $\det f(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), f(x)f(y) > 0,\ x, y \in \mathbf{R}$.

16. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice cu proprietatea

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^{n-1}) = 0 \text{ şi } \mathrm{Tr}(A^n) = n.$$

Să se arate că $A^n = I_n$.

17. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 1.

Să se arate că:

a) $\det(A - I_n) = 0$.

b) Pentru orice $k \in \mathbf{N}$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei A^k este egală cu 1.

c) Dacă A este inversabilă, atunci suma elementelor de pe fiecare linie a matricei A^{-1} este egală cu 1.

d) Pentru orice polinom $P \in \mathbf{C}[X]$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $P(A)$ este aceeaşi.

18. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice cu elemente pozitive şi cu proprietatea $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Să se arate că A nu poate avea valori proprii de modul mai mare ca 1.

19. Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q})$ verifică relaţia $A^8 = I_3$ atunci $A^4 = I_3$.

20. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{C})$ două matrice care nu au valori proprii comune. Să se arate că ecuaţia:

$$AX - XB = 0, \quad X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$$

are doar soluţia $X = 0$ iar ecuaţia

$$AX - XB = C$$

are o unică soluţie pentru orice $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$.

21. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ două matrice cu valorile proprii λ_A astfel ca $|\lambda_A| < 1$ şi λ_B astfel ca $|\lambda_B| < 1$ şi $A \cdot B = B \cdot A$. Să se arate că valorile proprii ale matricei $A \cdot B$ sunt de modul $|\lambda_{A \cdot B}| < 1$.

22. Fie $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, o matrice cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Să se arate că

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

23. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel ca $A^2 = -I_n$. Să se arate că n este par şi există o matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel ca

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right], \quad n = 2k.$$

24. Să se arate că dacă $A \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ şi $A^5 = I$ atunci $\det(A - I) = 0$.

25. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice antisimetrică ($A^t = -A$). Să se arate că rangul său este un număr par.

26. Fie J_n celule Jordan de dimensiune n având pe diagonală 0. Să se determine forma canonică Jordan a matricei $(J_n)^2$.

Să se arate că matricele A şi B sunt asemenea şi să se determine matricea R astfel ca $B = R^{-1} \cdot A \cdot R$.

27. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel ca $A^2 + 2A + 5I_n = 0$.
Să se arate că n este par.

28. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice cu cele n valori proprii distincte şi

$$C(A) = \{B \in M_n(C) |\ A \cdot B = B \cdot A\}.$$

a) Să se arate că toate matricele din $C(A)$ au aceeaşi vectori proprii.

b) Să se arate că $C(A)$ este un subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de bază $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

29. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ două matrice diagonalizabile astfel că $AB = BA$. Să se demonstreze că există n vectori independenţi care sunt vectori proprii pentru ambele matrice.

30. Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice cu proprietatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \geq 0,\ \forall\ x_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1, n}.$$

Să se arate că:

a) $\det(B + xI_n) \geq 0,\ \forall\ x \in [0, \infty)$;

b) $\det(A^t \cdot A) \geq 0,\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R}),\ m \in \mathbf{N}^*$.

31. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\det A \neq 0$ şi $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

$$f_A(X) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_{ij},\ \text{unde } B = A \cdot A^t.$$

Să se arate că:

a) $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f_A(X \cdot X^t) = 0 \Rightarrow X = 0$;

b) $[f_A(X \cdot Y)]^2 \leq f_A(X \cdot X^t) \cdot f_A(Y^t \cdot Y)$, $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

32. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$. Să se arate că polinomul caracteristic al matricei

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A + B$ şi $A - B$.

32. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\lambda = a + ib$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ o valoare proprie şi $Z = X + iY$; $X, Y \in \mathbf{R}$ vector propriu corespunzător.

a) Să se arate că X şi Y sunt liniar independenţi;

b) Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ şi $f(\lambda) \in \mathbf{R}$ atunci X şi Y sunt vectori proprii pentru $f(A)$.

33. Să se arate că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este diagonalizabilă atunci şi matricea cu blocuri

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{bmatrix}$$

este diagonalizabilă.

34. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ o matrice cu cele n valori proprii distincte şi

$$C(A) = \{B \in M_n(C) | \ A \cdot B = B \cdot A\}.$$

a) Să se arate că toate matricele din $C(A)$ au aceeaşi vectori proprii.

b) Să se arate că $C(A)$ este un subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de bază $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$.

35. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ astfel ca $\det(A - I_n) = 0$ şi $A^p = I_n$, unde p este un număr prim. Să se arate că $(p - 1)|n$.

36. Fie $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definită prin formula următoare:

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z)$$

a) Să se arate că T este transformare liniară ; să se calculeze T (1, 1, 1);

b) Determinaţi nucleul lui T şi apoi arătaţi că T este izomorfism;

c) Să se găsească expresia lui T^{-1}.

37. Fie formele pătratice f , $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definite prin:

$$f\ (x,\ y, z) = x^2 + 6\ z^2 + 2\ xy - 2\ xz + 3\ yz$$

$$g\ (x,\ y, z) = x^2 + 2\ y^2 + 3z^2 + 2\ xy - 2\ xz.$$

a) Folosind forma pătratică g să se înzestreze $\mathbf{R}^3$ cu un produs scalar;

b) Să se determine transformarea ortogonală cu ajutorul căreia se reduc simultan f şi g la forma canonică şi să se indice formele canonice respective.

3.3 Geometrie

1. Fie suprafaţa (S) de ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} x = u \ \cos v \\ y = u \ \sin v \\ z = u + v \end{cases}$$

iar curbele definite de:

$$(C_1) : u - e^v = 0, \quad (C_2) : u^2 + u + 1 - e^{-v} = 0$$

sunt situate pe suprafaţă.

a) Să se calculeze forma întâi fundamentală a lui (S);

b) Să se scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul $M(1, 0, 1)$;

c) Să se determine unghiul format de cele două curbe.

2. Fie curba strâmbă definită de ecuaţiile:

$$x = t \ , \quad y = \frac{t^2}{2} \ , \quad z = \frac{t^3}{6}.$$

a) Să se scrie ecuaţiile tangentei la curbă în punctul M de abscisă egală cu -1;

b) Să se arate că planele osculatoare curbei în două puncte pentru care produsul absciselor este egal cu -2 sunt perpendiculare.

c) Să se calculeze curbura în punctul M.

3. Fie curba de ecuaţii parametrice:

$$(C) : \begin{cases} x = t^2(2t + 1) \\ y = t \ (t - 2) \\ z = t^3 + t - 1 \end{cases}$$

a) Să se arate că (C) este o curbă plană;

b) Să se scrie ecuaţia planului curbei.

4. Fie curba strâmbă dată de ecuaţiile:

$$(C):\begin{cases} x = e^{at}\cos t \\ y = e^{at}\sin t \qquad a \in \mathbf{R}. \\ z = e^{at} \end{cases}$$

a) Să se arate că unghiul format de tangenta într-un punct curent al curbei cu axa Oz este constant;

b) Să se arate că (C) este situată pe un con şi să se scrie ecuaţia acestui con;

c) Să se calculeze curbura în $t = 0$.

5. Curba (C) este reprezentată parametric de ecuaţiile:

$$x = \frac{2\,t - 2}{t^2 + 1}\ , \quad y = \frac{2\,t + 1}{t^2 + 1}\ , \quad z = \frac{t\ + 2}{t^2 + 1}.$$

a) Să se determine punctele situate pe (C) la distanţe extreme de originea $O\ (0,0,0)$;

b) Să se scrie ecuaţiile tangentei la curbă în punctul $M\ (-2,1,2)$;

c) Să se determine punctele de pe curbă în care tangenta este perpendiculară pe vectorul $\overrightarrow{v} = 2\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

6. Fie o suprafaţă (S) de ecuaţii

$$\begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = \sin(u+v) \end{cases}.$$

a) Să se scrie forma întâi fundamentală a lui (S) şi ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul O de coordonate curbilinii $u = v = 0$;

b) Să se determine unghiul format de normala la (S) în punctul O şi axa Oz.

c) Să se calculeze unghiul format de curbele de ecuaţii

$$(C_1): \ u+v=0 \quad \text{şi} \quad (C_2): \ u-v=0$$

situate pe suprafaţa (S).

7. O suprafaţă (S) este definită de următoarele ecuaţii parametrice:

$$\begin{cases} x=(u-v)^2 \\ y=u^2-3v^2 \\ z=\frac{1}{2}\,v(u-2v) \end{cases}.$$

a) Să se determine versorul normalei într-un punct curent al suprafeţei (S);

b) Să se arate că (S) este un plan şi să se scrie ecuaţia acestuia;

c) Să se arate că a doua formă fundamentală a lui (S) este identic nulă.

8. Fie curba strâmbă dată de ecuaţiile implicite:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ y+z=4 \end{cases} \qquad (1)$$

a) Să se scrie ecuaţiile proiecţiei sale pe planul xOy ;

b) Să se găsească o parametrizare a curbei (C) ;

c) Să se determine versorii triedrului Frenet în punctul $M\ (0,0,4)$ şi să se calculeze curbura în M.

9. Fie A, B, C trei puncte mobile situate pe axele Ox, Oy şi respectiv Oz ; dacă dreapta determinată de A şi B trece prin punctul fix I , iar dreapta determinată de B şi C trece prin punctul fix J se cer:

a) Ecuaţiile dreptelor determinate de punctele B şi I, respectiv de B şi J ;

b) Să se arate că dreapta determinată de A şi C conţine un punct fix K ;

c) Să se arate că punctele I, J, K sunt coliniare.

10. Se dau trei plane de ecuaţii:

$$(P_1):\ 2\,x - y - z = 2$$

$$(P_2):\ x + 2\,y + 2\,z = -1$$

$$(P_3):\ x + 7\,y + 7\,z = -m\ ;\ m \in \mathbf{R}$$

şi punctul $M\ (1,0,0)$.

a) Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul M şi este perpendicular pe dreapta $(d) = (P_1) \cap (P_2)$;

b) Să se determine coordonatele simetricului lui M faţă de dreapta (d) ;

c) Să se găsească parametrul real m astfel încât cele trei plane să se intersecteze după o dreaptă.

11. Fie dreptele de ecuaţii:

$$(d_1):\ x = y - 1 = z - 2, \quad (d_2):\ x = y\ ,\ z = 1.$$

a) Să se stabilească poziţia lor relativă;

b) Să se calculeze unghiul dintre cele două drepte;

c) Să se scrie ecuaţiile dreptei care se sprijină pe (d_1) şi (d_2), în plus este perpendiculară pe planul (P) de ecuaţie $2\,x + y - z = 7$.

12. Fie dreptele de ecuaţii:

$$(d_1):\begin{cases} y = 2\,x + 3 \\ z = 3\,x + 5 \end{cases} \qquad (d_2):\ \begin{cases} y = x + 1 \\ z = 4\,x + 8 \end{cases}.$$

a) Să se stabilească poziţia lor relativă;

b) Să se scrie ecuaţiile dreptei care se sprijină pe (d_1) şi (d_2), iar în plus este paralelă cu dreapta de ecuaţii:

$$(d): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

c) Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale dreptei găsite cu dreptele (d_1) şi (d_2).

13. Fie planele de ecuaţii:

$$(P_1): x + 2\ y - z = 6, \quad (P_2): x - y = 0$$

şi dreapta (d) definită de

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

a) Care este poziţia relativă a celor două plane;

b) Determinaţi coordonatele punctului în care dreapta (d) intersectează planul (P_1);

c) Să se scrie ecuaţiile dreptei inclusă în planul (P_1), care este paralelă cu planul (P_2) şi se sprijină pe dreapta (d).

14. Fie dreptele de ecuaţii:

$$(d_1): \begin{cases} y = x - 7 \\ z = 3 - x \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} y = 3\ x + 1 \\ z = 3\ x - 1 \end{cases}.$$

a) Să se stabilească poziţia lor relativă;

b) Să se scrie ecuaţiile dreptei care se sprijină pe (d_1) şi (d_2), în plus este paralelă cu planul yOz şi cu planul (P) dat de $2\ x + y + 2\ z = 5$.

c) Să se calculeze distanţele de la punctele de intersecţie ale acestei drepte cu (d_1) şi (d_2), la planul (P).

15. Fie dreptele de ecuaţii:

$$(d_1) : y = x + 1 \ , \quad z = x - 1,$$

$$(d_2) : 5y = 8\ x + 1 \ , \quad z = x - 2,$$

$$(d_3) : y = x - 1 \ , \quad z = 2\ x - 1$$

şi planul (P) dat de $x + y - z = 0$.

a) Care este poziţia relativă a dreptelor (d_1) şi (d_2) ?

b) Care este poziţia dreptei (d_3) faţă de planul (P) ?

c) Să se scrie ecuaţiile dreptei care se sprijină pe (d_1), (d_2) şi (d_3), în plus este paralelă cu planul (P).

3.4 Matematici speciale

1. Fie $\alpha > 0$ fixat. Să se determine, folosind transformarea Laplace, funcţiile $y_n(t)$ pe $(0, \infty)$, $n \geq 0$, pentru care:

a) $y_1' + \alpha y_1 = 0$, $y_1(0_+) = 1$,

b) $y_n' = \alpha y_{n-1} - \alpha y_n$, $y_n(0_+) = 0$, pentru $n \geq 2$,

c) $2ty_0'' + y_0' + 2y_0 = 0$, $\lim\limits_{t \searrow 0} \sqrt{t} y_0'(t) = 1$ şi $y_0(0_+) = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbf{C} \backslash \{-1\} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z + 1}$. Să se arate că:

a) restricţia lui f la orice disc $\Delta_r = \{|z| \leq r | 0 < r < 1\}$ este injectivă şi să se determine imaginea prin f a discului $|z| < 1$.

b)

$$2i \text{Aria} f(\Delta_r) = \int_{|z|=r} \overline{f(z)} f'(z) dz, \quad 0 < r < 1.$$

3. Fie $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq 3}$ o matrice antisimetrică, unde funcţiile $a_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue şi mărginite.

a) Să se arate că sistemul diferenţial $x'(t) = A(t)x(t)$ are integrala primă $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)$. Deduceţi că soluţiile acestui sistem sunt mărginite.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine soluţia generală a sistemului $x' = Ax$, folosind transformarea Laplace şi să se arate că orice soluţie este un cerc în $\mathbf{R}^3$.

4. Fie $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$, $f(z) = \exp(z + \dfrac{1}{z})$. Să se determine :

a) Punctele singulare ale lui f în $\overline{\mathbf{C}}$ şi reziduurile ei în aceste puncte singulare.

b) Se cere dezvoltarea Taylor a lui $\varphi(t) = f(e^{it})$ în jurul lui $t = 0$ şi coeficienţii dezvoltării Laurent a lui f în jurul lui $z = 0$.

5. Să se determine singularităţile funcţiei complexe $f(z) = \cos\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$ şi dezvoltările Laurent în jurul punctelor $z = 1$ şi $z = \infty$.

6. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{5 - 4\cos x}$.

a) Să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx$, $n \in \mathbf{Z}$, folosind reziduuri.

b) Să se dezvolte f în serie Fourier şi să se studieze uniform convergenţa seriei obţinute.

7. a) Să se determine o funcţie olomorfă $f = u + iv$ în semiplanul $\mathrm{Re}(z) > 0$, ştiind că partea ei reală este de forma $u(x, y) = \varphi\Big(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\Big)$, unde φ este de clasă C^2 pentru $x \neq 0$.

b) Pentru f determinat mai sus, să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz$.

8. Să se determine soluţia problemei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0$$

cu condiţiile

$$u(x,t) = u(x, t + 2\pi), \quad x \neq 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = \frac{1}{5 - 3\cos t}, \quad t \geq 0.$$

9. a) Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică funcţia:

$$f(x) = \frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad -1 < a < 1.$$

b) Folosind seria Fourier a funcţiei f şi formula lui Parseval, să se demonstreze că:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{1 - a^2}.$$

10. Să se arate că transformata Fourier prin sinus a funcţiei $xe^{-x^2/2}$ coincide cu ea însăşi.

11. Dezvoltaţi în serie Fourier trigonometrică, pe $[-\pi, \pi]$, funcţia: $f(x) = \mathrm{ch}(ax)$, $a > 0$ şi determinaţi suma seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2}$.

12. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = \frac{\sin t}{5 + 3\cos t}$.

a) Să se dezvolte funcţia f în serie Fourier trigonometrică.

b) Să se regăsească dezvoltarea de la a), utilizând o dezvoltare Laurent în coroană pentru o funcţie complexă ataşată funcţiei f.

13. Să se rezolve ecuaţia integrală $x(t) = \cos t + \int_0^t (t - \tau)\, e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$, utilizând transformata Laplace.

14. Dezvoltaţi în serie Laurent în jurul punctului indicat $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, $\quad a = 0$.

15. Construiţi $f(z)$ olomorfă , $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $u(x, y) = \cos x \mathrm{sh} y$, $f(0) = 1$ şi calculaţi $\int_0^{2\pi} (1 - f(x))^n f(nx) dx$, $n \geq 0$.

16. Calculaţi $\int_{|z|=r} \frac{z^n}{z^n + 3^n} dz$, dacă $r \neq 3$.

Capitolul 4

Probleme date la alte concursuri

Math. Transfer Examination
University CALTECH - SUA - 2005 (4 ore)

1. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2\sin^3 x + 3\cos x$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + ax + b}dx$; discuţie după $a, b \in \mathbf{R}$.

3. Să se haşureze mulţimile

$$M_1 = \{z \in \mathbf{C}|\ |z| \leq |2z + 1|\}, \quad M_2 = \{z \in \mathbf{C}|\mathrm{Re}\, z^2 > \mathrm{Im}\, z^2\}.$$

4. Se consideră seria $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n + 1)(n - 2)x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Se cere mulţimea de convergenţă şi suma.

5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se indice o matrice inversabilă $U \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât UAU^T să fie o matrice diagonală.

6. Se cere reprezentarea grafică a imaginii curbei $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ şi să se determine lungimea lui γ.

7. Să se calculeze

$$I_n = \iiint_D \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^n}, \quad n \geq 2,$$

unde $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

8. Să se determine $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ olomorfă dacă $f = u+iv$, $u = x^3-3xy^2$ şi $f(1) = 1$.

9. Se cere graficul soluţiei $y = y(x)$ a problemei: $y'' + 5y + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

10. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ dacă ecuaţia $x^2y'' + \lambda y = 0$ admite soluţii nenule, pentru care $y(1) = 0$ şi $y(e) = 0$.

University CALTECH - SUA - 2006 (4 ore)

1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$ şi $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}dx$, $(0<a<b)$.

2. Să se determine intersecţia dreptei care trece prin (1,1,0) şi (0,1,2) cu planul care conţine punctele (1,1,1), (1,-1,0), (-1,0,1).

3. Să se indice un versor normal la planul care trece prin origine şi este paralel cu vectorii (1,2,1), (1,0,-1).

4. Să se calculeze A^{-1} pentru $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Fie curba $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3$, $\gamma(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos t,\sin t,t)$. Să se determine arcul $s(t)$, versorul tangentei $\vec{\tau}(t)$, curbura $k(t)$ şi să se expliciteze $s(\pi)$, $\vec{\tau}(\pi)$, $k(\pi)$.

6. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D(x^2y-3xy)dxdy$ unde $D=[-2,2]\times[0,1]$.

7. Fie $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ o funcţie armonică. Să se calculeze $\displaystyle\oint_C\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial y}dy$, unde C este o curbă jordaniană închisă în $\mathbf{R}^2$.

8. Să se indice o bază pentru spaţiul soluţiilor ecuaţiei $y'''-4y'=0$ şi apoi soluţia generală a ecuaţiei $y'''-4y'=\sin x$.

9. Să se arate că $\dfrac{\pi+1}{4}<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{\pi+2}{4}$.

10. Să se rezolve, folosind transformarea Laplace, problema:

$$y''+2y'=4e^{-2t}, y(0_+)=0, y(0_+)=-1.$$

Admitere 1998
Şcolile Superioare de Comerţ şi Industrie din Franţa (4 ore)

I. Se fixează un câmp de probabilitate (Ω, K, P) şi un şir de variabile aleatoare independente (X_n), $n \geq 1$ la fel distribuite şi astfel încât

$$P(X_n = -1) = p, \quad P(X_n = +1) = 1 - p,$$

unde $p \in (0, 1)$ este fixat. Se notează $Z_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ pentru $n \geq 1$.

a) Fie $a_n = P(Z_n = -1)$ şi $b_n = P(Z_n = +1)$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze $a_n + b_n$ şi să se arate că punând $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, avem $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că $\forall n \geq 1$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$, unde $p_n \in (0, 1)$ şi indicaţi o relaţie de recurenţă între p_{n+1} şi p_n. Deduceţi explicit p_n ca funcţie de n şi p şi arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \dfrac{1}{2}$.

c) Ce se poate spune despre şirul (Z_n) pentru $n \to \infty$?

d) În ce caz pentru p, variabilele aleatoare Z_1 şi Z_2 sunt independente; care este atunci legea de repartiţie pentru Z_n ? Să se arate că $\forall n \geq 1$, $P(Z_1 = \varepsilon_1, \ldots, Z_i = \varepsilon_i, \ldots, Z_n = \varepsilon_n) = \dfrac{1}{2^n}$, unde $\varepsilon_i = \pm 1$ pentru $1 \leq i \leq n$.

II. Fie $E =$ spaţiul vectorial real al funcţiilor continue $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Pentru orice $f \in E$, se asociază funcţia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$.

a) Să se arate că F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi să se calculeze $F'(x)$. Indicaţi F pentru $f(x) = \sin 2\pi x$ şi pentru $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1. \end{cases}$

b) Fie operatorul $T : E \to E$, $f \mapsto F$. Să se arate că T este liniar; este injectiv sau surjectiv ?

c) Să se arate că 0 este o valoare proprie pentru T şi că pentru orice $a \in \mathbf{R}$, funcţia $f(x) = e^{ax}$ este un vector propriu pentru T, cu o valoare proprie $\lambda(a)$; este adevărat sau nu că orice număr $a > 0$ este o valoare proprie a lui T ?

III. Se consideră o funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$); se spune că f are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă $f(1) = 1$ şi $\forall x \in D, x{+}1 \in D$ şi $f(x{+}1) = xf(x)$.

a) Să se arate că pentru $D = \mathbf{N}^*$, $f(n) = (n-1)!$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi că o funcţie cu proprietatea $\mathcal{P}$ nu poate fi definită în punctele $x = -n$ cu $n \in \mathbf{N}$.

b) Fie $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Să se arate că Γ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi determinaţi $\Gamma(n)$ pentru $n \in \mathbf{N}^*$. Apoi că $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1).\,\Gamma(x)$

c) Fie $E = \mathbf{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots, \dots\} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-$. Pentru orice $x \in E$ şi orice $n \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x + n > 0$, se notează $A_n(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$. Să se arate că $\forall x > 0$, $n \geq 0$, $A_n(x)$ nu depinde de n.

d) Fie $x < 0$, neîntreg. Să se arate că $x + n > 0$ începând de la un rang N_x. Dacă $n, p \in N$ şi $n > N_x$, să se calculeze $A_{n+p}(x)$ în funcţie de $A_p(x+n)$. Deduceţi că $\forall n > N_x$, $\forall p \in \mathbf{N}$, $A_{n+p}(x) = A_n(x)$. Se defineşte $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ pentru $n > N_x$. Să se arate că $\tilde{\Gamma}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi că $\forall x > 0$, $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.

Admitere 2001

Şcolile Superioare de Comerţ şi Industrie din Franţa (4 ore)

I. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A^3 + A = 0$

b) Să se determine valorile proprii ale lui A; A este diagonalizabilă ?

c) În $\mathbf{R}^3$ se consideră baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ şi vectorii $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

Să se arate că $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbf{R}^3$ şi să se scrie matricea T de trecere de la B la B_1. Dacă u este endomorfismul lui $\mathbf{R}^3$ asociat matricei A în baza canonică, să se determine matricea lui u relativ la baza B_1.

II. a) Să se arate că pentru orice $x > 0$, integrala $\int_0^1 e^{-u}u^{x-1}du$ este convergentă; notăm cu $F(x)$ valoarea ei.

b) Să se calculeze $F(1), F(2)$ şi $F\left(\frac{1}{2}\right)$ în funcţie de $\Phi(\sqrt{2})$. Arătaţi că $\forall x > 0,\ F(x+1) = xF(x) - \frac{1}{e}$.

c) Să se arate că $\forall x > 0,\ \frac{1}{ex} \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$ şi schiţaţi graficul lui F.

d) Se cere natura seriei $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+x)}$, $x > 0$ şi fie $g(x)$ suma ei; calculaţi $g(1)$. Să se arate că $\forall u \geq 0$, $\forall n \in N$, $\left| e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$ şi pentru $x > 0$, $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \int_0^1 e^{-u}u^{x-1}du - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{k+x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Deduceţi că $\forall x > 0,\ F(x) = g(x)$.

III. Fie $N \in \mathbf{N}^*$ şi $\alpha \in (0,1)$. Dispunem de N bile numerotate de la 1 la N, repartizate în două urne U şi V. Se consideră următorul experiment

E : se alege la întâmplare un număr întreg între 1 şi N; dacă acest număr este k, bila numerotată k îşi schimbă urna cu probabilitatea α şi este menţinută în urna ei cu probabilitatea $1-\alpha$. Se repetă experimentul E şi pentru orice $n \in \mathbf{N}$, se notează cu X_n variabila reală egală cu numărul de bile conţinute în urna U, după n repetări ale experimentului E.

a) Presupunem $N = 3$, $\alpha = \frac{1}{3}$ şi că la plecare, toate bilele se află în urna U. Să se indice legile de repartiţie pentru X_0 şi X_1. Apoi pentru $r \in \{1,2,3\}$ şi $s \in \{2,3\}$, să se calculeze $P(X_2 = r | X_1 = s)$; deduceţi legea pentru X_2.

b) Presupunem acum că $N = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ şi că X_0 urmează o lege uniformă pe $\{0,1,2\}$. Exprimaţi $P(X_0 = k)$ pentru $k \in \{0,1,2\}$.

Pentru $i, j \in \{0,1,2\}$, determinaţi $P(X_{n+1} = i | X_n = j)$ şi verificaţi că $\forall j \in \{0,1,2\}$, $\sum\limits_{i=0}^{2} P(X_{n+1} = i | X_n = j) = 1$.

c) Pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, se pune $U_n = (P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2))^T$.

Determinaţi $M \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

Arătaţi că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & b_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ b_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix}$, unde a_n, b_n vor fi exprimaţi în funcţie de n (se va verifica că $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 0$). Deduceţi pentru orice $n \geq 1$, probabilităţile $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$.

Admitere 2002
Şcolile Superioare de Comerţ şi Industrie din Franţa (4 ore)

I. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ se notează $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Să se arate că aplicaţia $\varphi : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ este un automorfism al spaţiului vectorial $\mathbf{R}_n[X]$; determinaţi matricea M asociată în baza $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$ şi M^{-1}.

b) Se presupune că $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ şi $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ aparţin la $\mathbf{R}^{n+1}$ şi că $\forall p \in \{0, \ldots, n\}$, $b_p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \cdot a_k$. Să se determine o legătură între matricele linie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ şi M. Deduceţi pentru $0 \leq k \leq n$, expresia lui a_k în funcţie de $b_0, \ldots, b_k$.

II. Fie (w_n), $n \geq 1$ un şir în $\mathbf{R}$; $g : [1, \infty) \to \mathbf{R}_+$ continuă şi monoton crescătoare pe un interval $[c, \infty) \subset [1, \infty)$, astfel încât $\int_1^{\infty} g(t)dt$ este divergentă, dar $w_{n+1} - w_n \sim g(n)$ când $n \to \infty$.

a) Fie $c \leq q < N$. Arătaţi că $\forall n \geq q$, $g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt < g(n)$ şi deduceţi că

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q).$$

b) Fie apoi $\varepsilon \in (0,1)$. Arătaţi că există un întreg natural $q \geq c$ astfel încât $(1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$ pentru $n \geq q$. Deduceţi că pentru $N > q$,

$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) + w_p.$$

Arătaţi că $w_n \sim \int_1^n g(t)dt$, când $n \to \infty$.

c) Deduceţi că $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ când $n \to \infty$.

III. Fie (x_n) un şir de numere reale din $[0, \infty)$.

a) Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă , să se arate că seria $\sum x_n^2$ este convergentă.

b) Fie şirul (u_n), $n \geq 0$ definit prin $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch} u_n}$. Indicaţi dezvoltarea limitată de ordin 2 pentru "ch" şi arătaţi că şirul u_n este strict pozitiv şi strict descrescător. Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

c) Pentru $n \in \mathbf{N}$, se defineşte $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$. Arătaţi că (v_n) este strict negativ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Pentru $n \geq 1$, să se simplifice $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$ şi să se deducă divergenţa seriei $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$. Arătaţi că $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$ când $n \to \infty$ şi că seria $\sum u_n$ este divergentă.

IV. Se realizează un şir de aruncări independente ale unei monede echilibrate, ban/stemă cu probabilitatea 1/2. Se notează cu b_k (resp. s_k) dacă se obţine ban (resp. stemă) la lansarea "k". [Se scrie $b_1 s_2$ în loc de $b_1 \cap s_2$]. Fie X variabila aleatoare care ia valoarea k dacă se obţine pentru prima dată ban apoi stemă la lansările $k-1$ şi k (pentru $k \geq 2$); X ia valoarea 0 dacă nu există o astfel de succesiune. Fie apoi Y variabila aleatoare care ia valoarea k dacă, pentru prima dată, ban este urmat de ban la lansările $k-1$ şi k şi $Y = 0$ dacă nu există o astfel de succesiune.

Scopul exerciţiului este să arătăm că $M(Y) > M(X)$.

a) Calculaţi $P(X = 2)$.

b) Fie $k \geq 3$. Arătaţi că dacă la prima aruncare se obţine **ban**, atunci este necesar şi suficient să se realizeze $b_2 b_3 \ldots b_{k-1} s_k$ pentru a realiza $(X = k)$. Deduceţi că $\forall k \geq 3$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2} P(X = k - 1) + \dfrac{1}{2^k}$. Se notează $u_k = 2^k P(X = k)$. Determinaţi u_k şi apoi legea lui X. Calculaţi MX.

c) Arătaţi că $(s_1, b_1 b_2, b_1 s_2)$ este un sistem complet de evenimente şi că $\forall k \geq 4$,

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}P(Y=k-1) + \frac{1}{4}P(Y=k-2) \qquad (*)$$

Se pune $v_k = P(Y=k)$ pentru $k \geq 2$. Determinaţi v_2, v_3 şi arătaţi că punând $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, rezultă $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$, $\forall k \geq 2$. Deduceţi (v_k), $k \geq 0$, legea lui Y şi $M(Y)$.

Admitere 2003
Şcolile superioare de Comerţ Paris (4 ore)

I. Se spune că o variabilă aleatoare Z urmează o lege exponenţială bila-terală dacă are densitatea de probabilitate $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

a) Determinaţi funcţia de repartiţie şi dispersia.

b) Fie Z_1, Z_2 variabile aleatoare independente urmând câte o lege exponen-ţială bilaterală. Determinaţi densitatea de probabilitate a lui $V = Z_1 + Z_2$.

c) Fie X, Y variabile aleatoare independente urmând fiecare câte o lege de exponenţială cu parametrul $\lambda = 1$ şi $Z = X - Y$. Determinaţi funcţia de repartiţie şi densitatea pentru $-Y$ şi verificaţi că Z urmează o lege exponen-ţială bilaterală, iar $T = |Z|$ urmează o lege exponenţială, pentru care se va determina parametrul.

II. Fie $\varphi : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$, $P \mapsto Q = (X-1)P' - XP''$.

a) Arătaţi că φ este un endomorfism şi determinaţi $\varphi(X^j)$ pentru $0 \leq j \leq n$. Indicaţi matricea lui φ relativ la baza $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$ şi deduceţi că φ este diagonalizabil.

b) Pentru $0 \leq k \leq n$, se notează cu L_k unicul polinom monic astfel încât $\varphi(L_k) = kL_k$. Se scrie $L_k = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i$, cu $a_p = 1$. Arătaţi că $p = k$

şi determinaţi L_0. Pentru $k \geq 1$ scrieţi sistemul de ecuaţii având soluţiile $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Deduceţi că oricare ar fi $0 \leq i \leq k$, $a_i = (-1)^{k-i}(k-1)!(C_k^i)^2$.

c) Arătaţi că pentru $0 \leq k \leq n$, $x \in \mathbf{R}$, $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$, unde $f_k(x) = x^k e^{-x}$.

III. Pentru orice $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, fie $r_{ij} \geq 0$ şi se notează $A_i = \sum_{j=0}^{\infty} r_{ij}$, $B_j = \sum_{i=0}^{\infty} r_{ij}$, sub rezerva convergenţei.

a) Presupunem că seriile ce definesc A_i sunt convergente şi că seria $\sum A_i$ este convergentă. Să se arate că $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2$,

$$\sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{i=0}^{p} r_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q} r_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_{ij}\right).$$

Deduceţi convergenţa seriilor ce definesc B_j şi făcând $p \to \infty$, deduceţi convergenţa seriei $\sum_j B_j$, ca şi inegalitatea

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_{ij}\right).$$

Ce rezultat se obţine permutând ipotezele asupra numerelor A_i, B_j şi ce concluzie rezultă ?

b) Dacă X, Y sunt variabile aleatoare cu valori în $\mathbf{N}$, precizaţi în ce condiţii avem $M(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) M(Y|X=i)$.

Admitere 2005
Şcolile superioare de Comerţ Paris (4 ore)

I. Fie $a > 0$ şi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{a(x-1)}$; fie şirul (u_k), $k \geq 0$, $u_0 = 0$; $u_{k+1} = f(u_k)$.

a) Arătaţi că $u_k \in [0,1]$ şi $u_k \leq u_{k+1}$. Deduceţi convergenţa şirului u_k şi fie $L(a) = \lim_{k\to\infty} u_k$. Arătaţi că $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1-u_k)$, folosind inegalitatea creşterilor finite. Deduceţi că $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ pentru orice k şi apoi $L(a)$ pentru $a \in (0,1)$. Apoi arătaţi că $0 \leq 1 - \dfrac{\ln a}{a} \leq 1$ pentru $a \geq 1$. Din variaţia lui $f(x) - x$ pentru $a = 1$ şi apoi pentru $a > 1$, deduceţi numărul de soluţii ale ecuaţiei $f(x) = x$.

Fie $r(a) =$ cea mai mică soluţie a ecuaţiei $f(x) = x$. Arătaţi că $0 < r(a) < 1$ pentru $a > 1$ şi $r(1) = 1$. Trasaţi graficul lui $\varphi(x) = xe^{-x}$ şi comparaţi $\varphi(a)$ şi $\varphi(a \cdot r(a))$. Deduceţi că $\varphi|_{[0,1]}$ realizează o bijecţie $[0,1] \to \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ şi arătaţi că φ^{-1} este continuă şi strict crescătoare. Din tabelul de variaţie pentru φ^{-1}, arătaţi că $r(a) = \dfrac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$ şi apoi determinaţi $\lim_{a\to\infty} r(a)$. Arătaţi că $0 \leq u_k \leq r(a)$, $\forall k$ şi deduceţi $L(a)$ pentru $a \geq 1$.

Scrieţi un algoritm în PASCAL pentru a determina $L(a)$ cu aproximaţie 10^{-2}; $L(2) = 0,20$ şi $L(4) = 0,02$ etc. Se cere alura curbei $a \mapsto L(a)$ pentru $a > 0$.

II. Timpul se consideră discret, ca o succesiune de momente $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ şi se consideră un ghişeu la care se prezintă cel mult un client în intervalul de timp $[n-1, n)$, $n \geq 1$. Se presupune că un prim client este la ghişeu la momentul 0 şi că pentru orice $n \geq 1$,

$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{dacă un client se prezintă între momentele } n-1, n \\ 0 & \text{altminteri} \end{cases}$$

(iar clientul astfel sosit se plasează la capătul şirului în aşteptare de dinaintea ghişeului). Variabilele aleatoare $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ se presupun independente şi luând valoarea 1 cu probabilitatea $p (0 < p < 1)$.

Numim *durata* de servire a clientului la ghişeu timpul necesar funcţionarului să-l servească (după ce aşteptarea clientului la coadă este încheiată). Dacă durata de servire a primului client este n, ghişeul este liber să servească clientul următor, începând cu momentul n. Presupunem duratele de servire ale clienţilor succesivi independente şi urmând aceeaşi lege Poisson (cu parametrul $\lambda > 0$).

Fie D variabila aleatoare egală cu durata de servire la ghişeu a clientului iniţial. Vom numi primul val de clienţi mulţimea celor sosiţi la ghişeu în timpul duratei de servire a clientului iniţial, apoi cel de-al $(k+1)-$lea val de clienţi este alcătuit de cei sosiţi în timpul duratei de servire a clienţilor din valul k. Fie apoi N_k numărul aleator al clienţilor din valul k ($N_k = 0$ dacă nu există clienţi în valul k). Prin convenţie, $N_0 = 1$.

a) Dat n, determinaţi legea variabilei aleatoare N_1 condiţionată de evenimentul $D = n$. Se vor preciza $P(N_1 = k|D = n)$. Deduceţi cu formula probabilităţii totale că N_1 urmează o lege Poisson, pentru care se va preciza parametrul.

b) Punem $p_k = P(N_k = 0)$. Arătaţi că evenimentul {coada la ghişeu se încheie după un timp finit} este $\bigcup_{k\geq 1}\{N_k = 0\}$. Arătaţi că şirul de evenimente $\{N_k = 0\}$, $k \geq 1$ este crescător şi deduceţi că şirul (p_k), $k \geq 1$ este convergent cu o limită $L \leq 1$ şi că probabilitatea ca acea coadă să se încheie după un timp finit este L.

Justificaţi că $\forall j,\ k \in \mathbf{N}$, $P(N_{k+1} = 0|N_1 = 1) = P(N_k = 0)$;

$P(N_{k+1} = 0|N_1 = j) = P(N_k = 0)^j$. Deduceţi expresia lui $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0)$ în funcţie de p_k, precizaţi p_0 şi folosind rezultatul din I, deduceţi $\lim\limits_{k\to\infty} p_k$ şi probabilitatea ca acea coadă să se termine în timp finit. Se va interpreta rezultatul obţinut în funcţie de valorile lui λp.

Admitere 2001
Şcolile de înalte studii comerciale din Paris şi Lyon

I. Un gestionar investeşte un capital în n active $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (de exem-plu, acţiuni), disponibile pe piaţa bursieră. Randamentele la un an ale acestor active, exprimate în procente sunt variabile aleatoare

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ [de exemplu, dacă activul A_1 a raportat 6%, $R_1 = 6$]. Gestionarul constituie un portofoliu, deci un n-uplu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel încât $1 \leq i \leq n$, $x_i \geq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Fiecare coeficient x_i reprezintă proporţia din capitalul investit în activul A_i [de exemplu, dacă $n = 3$ şi gestionarul investeşte $\frac{1}{4}$ din capitalul său în activul A_1, $\frac{1}{2}$ în activul A_2 şi $\frac{1}{4}$ în activul A_3, atunci portofoliul este $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$]. Atunci pentru orice portofoliu dat $Q = (x_1, \ldots, x_n)$, randamentul acestui portofoliu, în procente, este variabila aleatoare $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.

Gestionarul prudent vrea să minimizeze riscurile şi şi caută portofoliile pentru care randamentul R are varianţa(dispersia) minimă:

$$V(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j).$$

a) Arătaţi că $V(x_1, \ldots, x_n)$ are un minim în

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

b) Pentru $n = 2$ şi randamentele activelor A_1, A_2 notate cu X, Y, presupunem $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$, $\operatorname{cov}(X, Y) = c$ cu $c \in \mathbf{R}$ dat. Pentru $a \in [0, 1]$, se consideră portofoliul $(a, 1 - a)$, al cărui randament este variabila aleatoare $R = aX + (1 - a)Y$.

Arătaţi că $|c| \leq 6$, $V(R) = (15 - 2c)a^2 + 2(c - 3)a + 3$. Studiind variaţia lui $V(R)$ în cazurile $c \in [-6, 3]$ şi $c \in [3, 6]$, arătaţi că există un singur portofoliu pentru care varianţa $V(R)$ este minimă. Determinaţi acest portofoliu ca funcţie de c. Dacă $c = -6$, ce se poate spune despre R? Dacă $c = -6$ şi X, Y sunt independente, arătaţi că $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ este portofoliul pentru care varianţa este minimă.

c) Presupunem X, Y gaussiene independente cu $MX = 6, V(X) = 12$; $MY = 3$ şi $V(Y) = 3$. Fie R randamentul portofoliului $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Care este legea lui R? Calculaţi $P(R \geq 4)$ ştiind că $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \simeq 0,60$.

d) Dacă X, Y sunt independente, X urmează legea uniformă pe $[0, 12]$ şi Y legea uniformă pe $[0, 6]$ şi R este randamentul portofoliului $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, să se calculeze $P(R \geq 4)$.

e) Presupunem acum $n = 3$ şi fie randamentele activelor A_1, A_2, A_3 notate respectiv X, Y, Z. Presupunem $V(X) = 2$, $V(Y) = V(Z) = 6$, $\operatorname{cov}(X, Y) = -1$, $\operatorname{cov}(X, Z) = 2$, $\operatorname{cov}(Y, Z) = 1$. Se consideră randamentul portofoliului (x, y, z) ca fiind $R = xX + yY + zZ$.

Definim

$$f(x, y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6;$$

$$K = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\};$$

$$K_0 = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Arătaţi că problema gestionarului revine la minimizarea lui f pe K. Arătaţi că f are un minim într-un punct (x_0, y_0) care se va determina, dar nu are minim în K_0.

Fie $K_1 = \{(0, y) | y \in [0, 1]\}$, $K_2 = \{(x, 0) | x \in [0, 1]\}$, $K_3 = \{(x, 1 - x) | x \in [0, 1]\}$. Determinaţi minimul lui f pe K_1, K_2 şi K_3. Deduceţi unicul portofoliu cu randamentul de varianţă minimă.

Presupunem că $V(X) = V(Y) = V(Z) = 1$, $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Z) = \operatorname{cov}(Y, Z) = c$, cu $c \in \mathbf{R}$ dat. Calculaţi $V(X + Y + Z)$ şi arătaţi că $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Presupunem $c \neq 1$ şi se consideră un portofoliu (x, y, z) de randament R. Arătaţi că

$$V(R) = (1 - c)\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{1 + 2c}{3}.$$

Determinaţi portofoliul cu randamentul de varianţă minimă.

Fie acum A, B, C variabile aleatoare independente cu valori în $\mathbf{N}^*$ urmând legea geometrică de parametru $\frac{1}{2}$, adică $\forall k \geq 1$, $P(A = k) = P(B = k) = P(C = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Presupunem $X = B+C$, $Y = A+C+1$, $Z = A + B + 2$.

Determinaţi varianţele şi covarianţele variabilelor aleatoare X, Y, Z. Arătaţi că portofoliul de varianţă minimă este $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Determinaţi legea lui $A + B + C$ şi $P(R \geq 5)$.

f) Fie acum $n \geq 2$, M matricea de covarianţă $M = (\mathrm{cov}\,(R_i, R_j))$; pentru $\forall U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $T = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$, arătaţi că $V(T) = U^T M U$.

Arătaţi că M este diagonalizabilă şi are valorile proprii ≥ 0. Dacă M este inversabilă, definim $\varphi(U, W) = U^T M W$. Arătaţi că dacă $U^T M U = 0$, atunci $U = 0$ şi φ este un produs scalar.

Dacă $N(U) = \sqrt{\varphi(U, U)}$, arătaţi că $(\forall) U, W$-vectori coliniari, avem

$$N\left(\frac{U+W}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}[N(U)^2 + N(W)^2] - N\left(\frac{U-W}{2}\right)^2.$$

Deduceţi unicitatea portofoliilor cu randamentul de varianţă minimală.

II. Fie $a > 0$, $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, (x_n), $x_0 = a$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 0$.

a) Arătaţi că $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$ şi $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}}(a - x_{n+1}^2)$. Deduceţi că $x_n \to \sqrt{a}$. Arătaţi că $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$.

b) Fie $b > 0$ şi (u_n), $n \geq 1$ cu toţi $u_n > 0$ astfel încât $u_{n+1} \leq b u_n^2$. Pentru orice $n \geq 1$ daţi o majorare a lui u_n în funcţie de n, b, u_1 şi deduceţi o majorare pentru $x_n - \sqrt{a}$ în funcţie de n, x_1, a.

c) Fie $a \in \mathbf{C}$ (nereal negativ sau nul). Arătaţi că există şi este unic $b \in \mathbf{C}$ cu $\operatorname{Re} b > 0$ astfel încât $b^2 = a$. Fie $P_+ = \left\{ z \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} \frac{z}{b} > u \right\}$. [Pentru $a = 2i$, determinaţi b şi P_+].

Fie $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$, $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a}{z} \right)$. Arătaţi că $f(P_+) \subset P_+$; fie (z_n), $n \geq 0$ cu $z_0 = a$ şi $z_{n+1} = f(z_n)$. Exprimaţi $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ în funcţie de w_{n-1} şi apoi w_n în funcţie de w_0 şi n. Arătaţi că $|w_0| < 1$ şi deduceţi $\lim\limits_{n \to \infty} z_n$.

d) Arătaţi că pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nu există $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^2 = A$ şi că există $A_1 \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care ecuaţia $X^2 = A_1$ are o infinitate de soluţii. Mai general , pentru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dacă ar exista $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ liniară astfel încât $M_g = B$, atunci $g(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g$ deci $g | \operatorname{Im} g$ este un automorfism; calculaţi g^{2n} şi arătaţi că ecuaţia $X^2 = A$ nu are soluţie.

Admitere 2002
Şcoala Normală Superioară Paris (6 ore)

Fie $P_n = \mathbf{R}_n[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali de grad $\leq n$; Q_n mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali monice şi de grad n; $I = [-1, 1]$; $C(I) = \{f : I \to \mathbf{R} | f \text{continuă } \}$; $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), n \in \mathbf{N}$.

1. Să se arate că $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$. Să se determine T_n şi să se arate că este polinom de grad n. Să se calculeze coeficientul lui x^n, $T_n(1)$, $T_n(-1)$.

2. Să se arate că $\{T_0, T_1, ..., T_n\}$ formează o bază pentru P_n.

3. Să se determine rădăcinile lui T_n şi să se arate că toate sunt reale şi aparţin intervalului I.

4. Să se arate că T_n îşi atinge în I valorile extreme în $n+1$ puncte. Care sunt acestea ?

5. Să se calculeze explicit şi să se reprezinte grafic T_2, T_3, T_4 pe acelaşi sistem de axe şi T_5 separat.

6. Să se arate că $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q}(-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k$, unde $q = [\frac{n}{2}]$.

7. Fie $f \in C(I)$. Să se arate că are sens $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Să se arate că punând $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, se obţine un produs scalar în $C(I)$.

9. Să se calculeze $< T_n, T_m >$ şi să se determine un şir de polinoame $(t_n), n \geq 0$ astfel încât $< t_n, t_m >= \delta_{mn}$.

10. Fie $\Phi : C^2(I) \to C^0(I)$, $f \mapsto (1-x^2)f''(x) - xf'(x)$. Să se arate că Φ este $\mathbf{R}$-liniară şi să se determine $\mathrm{Ker}\Phi$.

11. Dacă $f, g \in C^2(I)$, să se arate că $< \Phi(f), g >=< f, \Phi(g) >$.

12. Să se arate că $\Phi(P_n) \subset P_n$. Este adevărat că $\Phi(Q_n) \subset Q_n$?

13. Să se arate că dacă $P \in P_n$, atunci există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $\Phi(P) + \lambda P \in P_{n-1}$. Să se arate că dacă $< P, x^s >= 0$ pentru $s = 0, 1, ...n-1$, atunci la fel este şi $\Phi(P)+\lambda P$. Deduceţi că $\| \Phi(P)+\lambda P \|= 0$.

14. Să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}$, $\Phi(T_n + n^2 T_n = 0$. Să se determine valorile proprii ale lui $\Phi|P_n$ şi să se arate că operatorul $\Phi : T_n \to T_n$ este diagonalizabil.

15. Fie $a \geq 1$ întreg. Să se indice o soluţie particulară pentru ecuaţia $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + a^2 y(x) = 0$. Să se arate că $y = \sin(a \cdot \arccos x)$ este de asemenea soluţie şi să se deducă mulţimea soluţiilor pe $(-1, 1)$.

16. Pentru $f \in C(I)$ se notează $\| f \| = \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$. Fie $V_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n, \quad n \geq 1$ şi $V_0 = T_0$. Să se arate că $\forall n \geq 1, \| V_n \| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

17. Să se arate că nu există polinoame monice $Q \in Q_n$ astfel încât $\| Q_n \| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Deduceţi că $\inf\limits_{Q \in Q_n} \| Q \| = \frac{1}{2^{n-1}}$, atinsă pentru un anume polinom din Q_n.

18. Să se arate că pentru $n = 1, 2$, $\inf\limits_{Q \in Q_n} \| Q_n \|$ este atinsă într-un singur punct din Q_n.

19. Fie $n+1$ puncte distincte $x_0, x_1, ..., x_n \in I$ şi fie $f \in C(I)$. Să se arate că există şi este unic un polinom $L_n \in P_n$ astfel încât $L_n(x_k) = f(x_k)$, pentru $0 \leq k \leq n$.

20. Fie $f \in C^{n+1}(I)$ şi L_n polinomul de interpolare pentru $x_0, x_1, ..., x_n$ şi f. Fie $x \neq x_i, i = \overline{0, n}$. Notăm $h(t) = f(t) - P_n(t) - (t - x_0)(t - x_1)...(t - x_n)A$, cu $A \in \mathbf{R}$ ales astfel încât $h(x) = 0$.

Să se arate că există $\xi \in (-1, 1)$ astfel încât $h^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Deduceţi că, dacă $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, atunci $\forall x \in (-1, 1)$, există $\xi \in (-1, 1)$ astfel încât $f(x) - L_n(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Să se arate că $\| f - L_n \| \leq \frac{1}{(n+1)!} \| f^{(n+1)} \| \cdot \| \pi \|$.

21. Fie $f \in C^{\infty}(I)$. Să se arate că există un şir de polinoame de interpolare L_n astfel încât $\| f - L_n \| \leq \frac{1}{(n+1)! 2^n} \| f^{(n+1)} \|$. Deduceţi o condiţie suficientă pentru f astfel încât f să fie limita în $C^0(I)$ a unui şir de polinoame de interpolare.

22. Să se arate că seria $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergentă pe I este mai bine aproximată cu polinoamele L_n de la punctul **21** decât prin sumele parţiale $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$, şi anume arătaţi că $\frac{1}{e(n+1)! 2^n} \leq \| e^x - L_n(x) \| \leq \frac{e}{(n+1)! 2^n}$ şi $\| e^x - S_n(x) \| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Deduceţi că $\frac{1}{(n+1)!} \leq \|$

$e^x - S_n(x) \parallel \leq \dfrac{n+2}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(n+1)!}$. Comparaţi ordinul de mărime pentru $\| e^x - S_n(x) \|$ şi $\| e^x - L_n(x) \|$ pentru $n \to \infty$.

Admitere 2003
Şcoala Normală Superioară Paris (6 ore)

Se notează $M_p = M_p(\mathbf{C})$ cu matricea nulă O şi matricea unitate I.

1. Pentru orice $A = (a_{ij}) \in M_p$ se notează $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}$ urma matricei$A$. Să se arate că aplicaţia tr : $M_p \to \mathbf{C}$ este $\mathbf{C}$ -liniară.

2. Să se arate că $\forall A, B \in M_p$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3. Fie E un spaţiu vectorial peste $\mathbf{C}$, de dimensiune p. Fie b_0 o bază pentru E şi φ endomorfismul asociat matricei $A \in M_p$ (scriem $A = M_\varphi^{b_0}$). Fie b_1 o altă bază pentru E, $A' = M_\varphi^{b_1}$ şi $P = (p_{ij})$ matricea de trecere de la baza b_0 la b_1. Să se exprime A' în funcţie de A şi P şi să se arate că $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A)$ (deci "tr" este un invariant la schimbarea bazei) .

4. Fie $\sigma(A) = \{s_1, ..., s_p\}$ spectrul lui A şi $S_n = \mathrm{tr}(A^n), n \geq 1$. Să se arate că $S_n = \sum_{i=1}^{p} s_i^n$.

5. Fie $l(A) = (l_{ij})$, l_{ij} cofactorul lui a_{ji} (complementul algebric). Dacă A este inversabilă, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} l(A)$.

Fie $P(s) = \det(sI - A) = s^p + a_1 s^{p-1} + ... + a_p$, polinomul caracteristic al matricei A. Să se arate că $\forall A \in M_p$, A comută cu $l(A)$.

6. Fie $P'(s) = \dfrac{dP}{ds}$. Să se arate că $P'(s) = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{P(s)}{s - s_i}$.

7. Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ şi $P(s) = (s - \lambda)(b_0 s^p + b_1 s^{p-1} + ... + b_{p-1}) + b_p$.

Arătaţi că $\forall k = \overline{1, p}$, există o relaţie simplă de recurenţă între b_k şi b_{k-1}. Deduceţi b_k în funcţie de a_k şi λ. Exprimaţi $P'(s)$ ca polinom de grad $p-1$ cu coeficienţi funcţie de a_i şi S_i. Deduceţi relaţia

$$S_k + a_1 S_{k-1} + ... + a_{k-1} S_1 + k a_k = 0, \quad \forall k = \overline{1,p}.$$

8. Fie $A \in M_p$ inversabilă. Să se calculeze $\det l(A)$ şi să se exprime $l(l(A))$ ca funcţie de A.

9. Să se arate că $\forall s \in \mathbf{C}$, matricea $Q(s) = l(sI - A)$ se scrie

$$Q(s) = s^{p-1} B_0 + s^{p-2} B_1 + ... + s B_{p-2} + B_{p-1},$$

unde $B_k \in M_p$.

10. Dacă $C_0, C_1, ..., C_k$ sunt $k+1$ matrice din M_p şi $s \in \mathbf{C}$, să se arate că

$$s^k C_0 + s^{k-1} C_1 + .. + s C_{k-1} + C_k = 0 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = ... = C_k = 0, \quad \forall k.$$

11. Să se calculeze matricele de la punctul **9**, în funcţie de puterile lui A şi de coeficienţii polinomului caracteristic $P(s)$; apoi să se arate că

$$A^p + a_1 A^{p-1} + ... + a_{p-1} A + a_p I = 0.$$

12. Să se calculeze $l(-A)$ şi apoi $l(A)$ în funcţie de puterile lui A şi de coeficienţii a_k. Deduceţi $\mathrm{tr}(l(A))$ în funcţie de a_i şi $\mathrm{tr} S_n$. Arătaţi că $\mathrm{tr}(l(A))$ se exprimă cu ajutorul unui a_k (Cât este k?).

13. Să se arate că dacă $\alpha \in \sigma(A)$ (valoare proprie pentru A), atunci

$$R(\alpha) = (-1)^{p-1}(\alpha^{p-1} + a_1 \alpha^{p-2} + ... + a_{p-1}) \in \sigma(l(A)).$$

Dacă α este valoare proprie nenulă pentru A, deduceţi o relaţie între $R(\alpha)$ şi $\det A$.

14. Fie $a \in [-1, 1]$ dat şi $U_n(a)$ şirul definit prin

$$U_n(a) = 2a U_{n-1}(a) - U_{n-2}(a), \quad \forall n \geq 2,$$

$$U_1(a) = 2a, \quad U_2(a) = 4a^2 - 1.$$

Fie $U_{n-1}(a) = V_n(a)$ şi $X_n(a) = (U_n(a), V_n(a))^T$. Să se arate că există $\Gamma_a \in M_2$ astfel încât $X_n(a) = \Gamma_a^{n-2} X_2(a)$.

15. Pentru $a = 1$, să se arate (folosind punctul **11**) că

$$\forall k \geq 1, \quad \Gamma_1^k = k\Gamma_1 - (k-1)I.$$

Să se calculeze $X_n(1)$ şi să se deducă $U_n(1)$, pentru $n \geq 1$.

16. Să se calculeze $U_n(-1)$ şi să se exprime Γ_{-1}^{n-2}.

17. Fie $a \in (-1, 1)$ şi $\theta = \arccos a$. Să se calculeze în funcţie de θ valorile proprii λ_1 şi λ_2 pentru $\Gamma_a \in M_2$.

Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 1 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ este diagonalizantă pentru Γ_a şi să se calculeze Γ_a^k pentru $k \geq 1$.

Să se verifice că $U_n(a)$ se exprimă în funcţie de θ sub forma

$$U_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

18. Să se arate că $\forall n \geq 1$, funcţia $a \mapsto U_n(a)$ este restricţia la (-1,1) a unei funcţii polinomiale cu toate rădăcinile reale şi distincte, situate în intervalul (-1,1). Să se precizeze gradul polinomului.

19. Pentru orice $n \geq 1$, se consideră matricea $A_n \in M_n$, cu

$$(A_n)_{ii} = 2, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(A_n)_{i,i+1} = (A_n)_{i+1,i} = -1, \quad \forall i = \overline{1, n-1}$$

şi ceilalţi coeficienţi nuli.

Fie $D_n(s) = \det(A_n - sI), s \in \mathbf{R}$. Să se calculeze $D_1(s), D_2(s)$ şi să se arate că există α, β funcţii de s astfel încât

$$D_{n+1}(s) = \alpha D_n(s) + \beta D_{n-1}(s), \quad \forall n \geq 2.$$

20. Utilizând rezultatul punctului **15**, determinaţi $\det(A_n)$.

21. Folosind punctele **16**, **17**, ..., să se calculeze valorile proprii ale matricei A_n, $\forall n \geq 1$. Să se arate că toate aceste valori proprii sunt reale, distincte şi cuprinse între 0 şi 4.

22. Să se determine n dacă 1 (respectiv 2, 3) este valoare proprie pentru matricea A_n.

23. Pentru ce n, matricea A_n are valorile proprii 1,2,3? Determinaţi atunci toate valorile proprii ale matricei A_5.

24. Să se determine vectorii proprii ai matricei A_5, care corespund unor valori proprii întregi.

Capitolul 5

Probleme date la concursuri studenţeşti - Universitatea Bucureşti

5.1 Algebră

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural liber de pătrate, D_n mulţimea divizorilor naturali ai lui n şi $D \subseteq D_n$ o mulţime cu proprietăţile

a) $1 \in D$;

b) Dacă $x \in D$, atunci $\frac{n}{x} \in D$;

c) Dacă $x, y \in D$, atunci $(x, y) \in D$, unde cu (x, y) s-a notat cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Să se arate că numărul de elemente al mulţimii D este de forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

(Traian Lalescu Constanţa, 2011)

2. Pe mulţimea divizorilor naturali ai unui număr natural liber de pătrate să se definească o structură de inel boolean.

(Traian Lalescu Constanţa, 2003)

3. Se dă matricea M cu două linii şi două coloane şi elemente reale. Să se studieze ecuaţia matricială $X^2 = M$, determinându-se numărul şi natura rădăcinilor ei. Să se studieze cazul particular în care $M = I_2$ sau matricea $M = -I_2$.

(Traian Lalescu, 1973)

4. Un grup finit G se numeşte raţional dacă orice element $g \in G$ este conjugat cu g^d pentru orice număr natural d prim cu cardinalul mulţimii G.

a) Să se arate că grupul de permutări S_n este raţional pentru orice n.

b) Să se afle cardinalul unui grup finit raţional şi comutativ.

c) Fie p un număr prim care divide cardinalul grupului G. Să se arate atunci că şi $p - 1$ divide cardinalul grupului G.

(Traian Lalescu, Bucureşti, 1989)

5. Să se arate că grupurile finite cu proprietatea că subgrupurile lor proprii au acelaşi număr de elemente sunt comutative.

(Traian Lalescu Constanţa, 2003)

6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu $A \neq I_n$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$ astfel încât $\hat{A} = \hat{I_n}$ în

$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$. Arătaţi că pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ avem $A^p \neq I_n$.

(Traian Lalescu Bucureşti, 2009)

7. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel în care $x^4 = x$ pentru orice $x \in R$. Arătaţi că inelul R este comutativ.

(Traian Lalescu Craiova, 2002)

8. Fie A un domeniu de integritate şi K corpul său de fracţii. Fie $\varphi : K \to \mathbb{Q}$ astfel încât

$$\varphi(A^*) \subset \mathbb{N}^*, \ \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in K^*$ şi $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

a) Să se arate că (A, φ) este inel euclidian dacă şi numai dacă oricare ar fi $\alpha \in K$ există $a \in A$ astfel încât $\varphi(\alpha - a) < 1$.

b) Folosind eventual punctul anterior să se arate că inelul

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right] = \left\{m + n\frac{1+\sqrt{11}}{2} | m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

(în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire) este inel euclidian.

(Traian Lalescu Craiova, 2002)

5.2 Algebra liniară şi geometrie

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că A este nilpotentă dacă şi numai dacă $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, oricare ar fi $k > 0$; ($\mathrm{tr}(A)$ este urma matricei A).

(Concursul "Traian Lalescu" 2008)

2. Fie Δ mulţimea plană formată din punctele interioare şi laturile unui dreptunghi $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $BC = b$. Se defineşte funcţia $f : \Delta \to \mathbb{R}$ prin:

$$f(P) = PA + PB + PC + PD.$$

Să se calculeze mulţimea valorilor funcţiei f.

(Concursul "Traian Lalescu" 2008)

3. Considerăm hiperboloidul cu o pânză, în reperul cartezian $Oxyz$:

$$(\mathcal{H})\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ştiind că există punctele $M, N, P \in \mathcal{H}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ sunt mutual ortogonali, demonstraţi că

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{c^2}.$$

(Concursul "Traian Lalescu" Bucureşti, 2009)

4. Fie $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y).$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Dacă $n \geq 2$, să se arate că există o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(X) = \mathrm{Tr}(AX),\ \text{pentru orice} X \in M_n(\mathbb{R})$.

b) Să se arate că există o matrice inversabilă $B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(B) = 0$.

(Concursul "Traian Lalescu" 2010)

5. Găsiţi locul geometric descris de centrul unei elipse de semiaxe fixate, care este tangentă la două drepte perpendiculare date.

(Concursul ”Traian Lalescu” 2010)

6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că şirul $(a_k)_{k\geq 0}$, unde

$$a_k = \text{rang}A^{k+1} - \text{rang}A^k,$$

este crescător.

(Concursul ”Traian Lalescu” Constanţa, 2011)

7. Se consideră spaţiul vectorial $(K_n[X], +)$ al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi în corpul comutativ K. Pentru fiecare $a, b \in K$ definim aplicaţia $f_b^a(P(X)) = P(aX + b)$,

a) Să se arate că f_a^b este un endomorfism al spaţiului $(K_n[X], +)$.

b) Să se determine matricea lui f_b^a în baza $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ a spaţiului $(K_n[X], +)$.

c) Fie F mulţimea automorfismelor de tipul f_b^a. Să se arate că F împreună cu compunerea funcţiilor formează grup. Să se determine matricea lui $(f_b^a)^{-1}$ în baza indicată la puncul anterior.

d) Fie F_1 mulţimea automorfismelor de tipul f_b^1. Să se arate că F_1 este subgrup în F şi că $f_b^a(f_c^1(f_b^a)^{-1}))$ este în F_1 pentru orice f_b^a din F şi orice f_c^1 din F_1.

(Concursul ”Traian Lalescu” 1977)

8. Fie A o aplicaţie liniară, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, şi fie $a = (a_{ij})$ matricea asociată aplicaţiei A în baza canonică. Să se arate că:

a) A are totdeauna o valoare proprie reală.

b) Dacă a este simetrică atunci toate valorile proprii ale lui A sunt reale.

c) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii în cazul în care a este antisimetrică (adică $a_{ji} = -a_{ij}$ pentru toţi indicii i, j).

d) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii în cazul în care a este ortogonală (adică $aa' = 1$ sau $a^{-1} = a$).

(Concursul "Traian Lalescu" 1973)

9. În spaţiul euclidian E^3 se consideră, în raport cu un reper ortonormat, dreapta

$$(d)\ \ \frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$

şi familia de drepte (d_a) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-(a+1)}{a}$.

a) Să se arate că dreptele (d_a) trec printr-un punct fix, pentru $a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine a astfel încât distanţa dintre dreptele (d) şi (d_a) să fie maximă.

(Concursul "Traian Lalescu" Constanţa, 2003)

10. Două pătrate $ABCD$ şi $ABEF$ au latura comună AB iar planele lor sunt perpendiculare. Se iau pe diagonalele AC şi BF segmentele egale $AM = BN$. Să se arate că în poziţia în care lungimea segmentului MN este minimă, MN este perpendicular pe BF şi AC şi este paralel cu DE.

(Concursul "Traian Lalescu" Constanţa, 2003)

11. În spatiul euclidian E^3 raportat la un reper cartezian ortonormat se consideră familia de plane:

$$\pi_\lambda: \quad (4\lambda^2-\lambda+3)x-(3\lambda^2+\lambda+4)y+(\lambda^2-\lambda)z+24\lambda^2+\lambda+25=0$$

a) Să se arate că există o dreaptă fixă d conţinută în toate planele familiei $\{\pi_\lambda\}$.

b) Să se determine planul din această familie situat la cea mai mare distanţă de originea reperului şi să se precizeze această distanţă.

c) Fie F fasciculul de plane de axă d. Să se compare mulţimile F şi $\{\pi_\lambda\}$.

(Concursul "Traian Lalescu" Craiova, 2002)

12. Se poate determina o bază ortonormată în spaţiul euclidian format din mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii

$$3x_1-x_2-x_3+x_4=0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0?$$

(Concursul "Traian Lalescu" 1973)

13. Să se găsească în planul euclidian E^2, locul geometric al vârfurilor reperelor ortonormale circumscrise unei conice nedegenerate (cu centru sau fără centru).

(Concursul "Traian Lalescu" 1973)

14. Fie V spaţiul vectorial al vectorilor liberi. Pentru $\overline{p}$ diferit de vectorul zero se consideră aplicaţia liniară $A_{\overline{p}} : V \to V$ definită prin $A_{\overline{p}}(\overline{u}) = \overline{p} \times \overline{u}$ pentru orice $\overline{u} \in V$ unde prin $\times$ notăm produsul vectorial.

a) Să se arate că dacă $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt ortogonali pe $\overline{p}$, atunci $A_{\overline{p}}$ păstrează unghiul vectorilor $\overline{u}, \overline{v}$.

b) Dacă $\overline{p}$ este unitar, $A_{\overline{p}}$ induce o transformare ortogonală pe subspaţiul vectorial perpendicular pe $\overline{p}$.

c) Să se arate că există o bază ortonormată în care $A_{\overline{p}}$, $\overline{p}$ unitar, are matricea $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ unde $a_{ij} = 0$ în afara cazurilor $a_{23} = -1$ şi $a_{32} = 1$.

(Concursul "Traian Lalescu" 1977)

15. Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ planele tangente în vârfurile A, B, C, D ale unui tetraedru la sfera circumscrisă lui $ABCD$. Să se arate că dacă dreapta de intersecţie a planelor α şi β este coplanară cu dreapta CD atunci acelaşi lucru este adevărat şi pentru dreapta de intersecţie a planelor δ, γ şi dreapta AB.

(Concursul "Traian Lalescu" Bucureşti, 1989)

16. Fie Γ o curbă parametrizată biregulată, dată prin parametrizarea naturală

$$r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ r = \overline{r}(s)$$

şi fie Γ' curba definită de parametrizarea

$$r^b : I \to \mathbb{R}^3,\ \overline{r}^b(s) = \overline{r}(s) + \frac{1}{k_1(s)}\overline{\nu}(s)$$

unde k_1 este curbura curbei Γ iar $\overline{\nu}$ este versorul normalei principale.

a) Dacă torsiunea curbei Γ este identic nulă, să se determine versorul tangentei, versorul normalei principale şi curbura curbei Γ'.

b) Dacă Γ este elicea cilindrică dată de parametrizarea

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \overline{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)\,,\ a > 0, b \neq 0$$

să se arate că curba Γ' este de asemenea o elice cilindrică.

(Concursul "Traian Lalescu" Constanţa, 2002)

17. Fie $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 3)$ puncte distincte aflate pe aceeaşi circumferinţă (în această ordine). Pentru fiecare pereche de puncte P_i, P_j notăm cu a_{ij} lungimea segmentului P_iP_j dacă $i < j$ şi $a_{ji} = -a_{ij}$. Considerăm matricea (antisimetrică) $A = [a_{ij}]$. Să se determine dimensiunile imaginii şi nucleului aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ asociat acestei matrice.

18. Fie A, B matrice pătratice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietăţile că există o coloană nenulă $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $Ax = 0$ şi o coloană $y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $Ay = Bx$.

Dacă A_i este matricea obţinută prin înlocuirea în A a coloanei i, a_i prin coloana i, b_i din B, să se arate că

$$\det A_1 + \cdots + \det A_n = 0$$

unde $\det A_i$ este determinantul matricei A_i.

5.3 Analiză şi ecuaţii diferenţiale

1. Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 + k(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)} < \frac{\pi}{4},$$

iar constanta din dreapta este cea mai mică cu această proprietate.

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2009)

2. Fie E o submulţime nevidă a intervalului $(0, +\infty)$ care îndeplineşte condiţiile

(i) $\dfrac{x}{2} \in E$ oricare ar fi $x \in E$.

(ii) $\sqrt{x^2 + y^2} \in E$, oricare ar fi $x, y \in E$.

Se cer:

a) Să se dea un exemplu de mulţime $E \neq (0, \infty)$ care îndeplineşte condiţiile (i) şi (ii).

b) Să se arate că $\bar{E} = [0, \infty)$; ($\bar{E}$ este închiderea topologică a lui E).

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2008)

3. Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o submulţime deschisă care conţine discul unitate închis D şi $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietatea că :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right| \leq 1 \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \leq 1,\ \forall P \in D.$$

Să se arate că dacă $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ este o mulţime de puncte din D cu centrul de greutate în O atunci pentru orice punct $P \in D$ este adevărată inegalitatea:

$$\left|f(P) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\right| \leq 2.$$

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2008)

4. Să se justifice faptul că

$$f(x) := \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$$

defineşte o funcţie continuă $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.

a) Dacă funcţia continuă $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ verifică

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2F(x)$$

pentru oricare $x \in [0,1]$, atunci F este constantă.

b) Să se demonstreze egalitatea

$$\pi \text{cotg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2010)

5. Fie $f_n \in \mathcal{C}[0,1]$ ($n \geq 1$) un şir de funcţii concave. Presupunem că (f_n) converge simplu la 0. Să se arate că şirul (f_n) este uniform convergent pe $[0,1]$.

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2010)

6. Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

a) Să se arate că dacă f este uniform continuă, atunci este mărginită.

b) Arătaţi, dând un contraexemplu, că reciproca afirmaţiei a) este falsă.

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2011)

7. Fie $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$, $u \in \mathcal{C}^1(D)$ şi $\epsilon > 0$ fixat.

a) Să se arate că

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=u(x,y),\ \forall(x,y)\in D$$

dacă şi numai dacă există $\varphi\in\mathcal{C}^1(0,\infty)$ astfel ca

$$u(x,y)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ \forall(x,y)\in D.$$

b) Să se arate că dacă

$$\left|x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-u(x,y)\right|\leq\epsilon,\ \forall(x,y)\in D,$$

atunci există o unică funcţie $\varphi\in\mathcal{C}^1(0,\infty)$ astfel ca

$$\left|u(x,y)-x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right|\leq\epsilon,\ \forall(x,y)\in D.$$

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2011)

8. Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi şi $x_n\to 0$, iar $s_n=\sum_{k=0}^{n}x_k$.

Să se arate că $\sum_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $\{s_n\}$ este convergent (cu $\{x\}$ se notează partea fracţională a numărului real x).

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2003)

9. Fie $(x_n)_n$ un şir monoton crescător şi divergent de numere reale strict pozitive şi $\alpha\leq 1$. Arătaţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n}\right)^{\alpha}$ este divergentă.

Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 2009)

10. Fie F mulţimea funcţiilor $f:[0,1]\to[0,1]$ cu proprietatea că există două mulţimi nevide şi disjuncte încât $[0,1]=A\cup B$, $f(A)\subset B$ şi $f(B)\subset A$.

Să se studieze dacă F conţine funcţii continue, funcţii primitivabile, funcţii cu proprietatea lui Darboux.

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2003)

11. Să se găsească toate funcţiile continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

pentru orice $x \in [0,1]$.

(Concursul Traian Lalescu, Craiova 2002)

12. Fie funcţia

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{t \cdot \ln t}{(1+t^2)^x} dt,\ x > 1.$$

i) Să se arate că f este convexă, descrescătoare şi derivabilă.

ii) Să se calculeze $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2003)

13. Fie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie continuă şi integrabilă pe $[0,\infty)$

i) Să se demonstreze că dacă $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o soluţie mărginită a ecuaţiei $x" + \varphi(t) \cdot x = 0$ atunci

$$\lim_{t \to \infty} x'(t) = 0.$$

ii) Să se demonstreze că ecuaţia $x" + \varphi(t) \cdot x = 0$ are cel puţin o soluţie nemărginită.

(Concursul Traian Lalescu, Constanţa 2003)

14. a) Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă (*Fréchet*) în origine, atunci:

$$\lim_{cr \to 0, r>0} \frac{1}{r^3} \int\int_{cx+y \le r, x \ge 0, y \ge 0} |f(x,y) - f(0,0)| xy = \frac{1}{6}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right].$$

b) Folosind, eventual, afirmaţia de la punctul anterior să se calculeze

$$\lim_{cr\to 0, r>0} \frac{1}{r^3} \oint_{T_r} Px + Qy$$

unde T_r este triunghiul orientat pozitiv determinat de punctele $(0,0), (r,0)$ şi $(0,r)$ iar $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ care au proprietatea că

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(0,0).$$

(Concursul Traian Lalescu, Craiova 2002)

15. Dacă f, g sunt funcţii continue definite pentru $x \geq 0$, cu valori reale, se defineşte operaţia $\star$ în modul următor:

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

a) Pentru ce valori $\alpha \in \mathbb{R}$ are sens $f(x) \star x^{-\alpha}$?

b) Pentru ce valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are sens

$$(f(x) \star x^{-\alpha}) \star x^{-\beta}?$$

c) Să se arate că exisă valori reale pentru α şi β astfel încât $(f(x) \star x^{-\alpha}) \star x^{-\beta} = Af(x) \star x^{1-\alpha-\beta}$ şi se cere să se determine constanta reală A.

d) Poate fi utilizat punctul c) pentru a se rezolva ecuaţia integrală

$$\int_0^x \frac{f(t)}{x-t} dt = g(x)$$

f fiind funcţie continuă necunoscută iar g fiind o funcţie dată?

(Concursul Traian Lalescu, 1973)

16. Fie D_n o mulţime din $\mathbb{R}^n (n > 1)$ cu proprietatea: dacă $x, y \in D_n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ atunci întreg segmentul care uneşte aceste două puncte este în întregime cuprins în D_n. Fie f o funcţie definită în D_n, de două ori diferenţiabilă, iar $d^2 f \geq 0$ în D_n. Să se arate că pentru orice $x, y \in D_n$ avem

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{df(x)}{dx_j}(y_j - x_j) \leq f(y) - f(x)$.

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{df(y)}{dy_j}(y_j - x_j) \geq f(y) - f(x)$.

c) $f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)), t \in [0, 1]$.

(Concursul Traian Lalescu, 1973)

17. Fie $u = u(r, x, y, z)$ o funcţie definită pentru $(x, y, z) \in D$ şi $r \geq 0$ un parametru, admiţând n derivate continue în raport cu toate variabilele sale. Să se arate că dacă $u(r, x, y, z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{q} r^p S_p(x, y, z)$ atunci şi funcţiile $S_p, p = \overline{0, q}$ admit n derivate parţiale continue în D. Să se arate că dacă S_p este funcţie omogenă de grad p (adică $S_p(tx, ty, tz) = t^p S_p(x, y, z)$) care este astfel încât $\dfrac{d^2 S_p}{dx^2} + \dfrac{d^2 S_p}{dy^2} + \dfrac{d^2 S_p}{dz^2} = 0$, atunci avem

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = \sum_{p=0}^{q} a_p r^{p-2} S_p(x, y, z)$$

unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Să se determine a_p.

(Concursul Traian Lalescu, 1973)

18. a) Fie s_n un şir de numere pozitive cu următoarea proprietate:

$$s_n - s_{n+1} \geq q s_n^2, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $q > 0$ nu depinde de n. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n = n s_n$ este mărginit.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă astfel încât f' satisface condiţia Lipschitz: există $L > 0$ cu proprietatea că:

$$|f'(y) - f'(z)| \leq |y - z|$$

pentru orice numere reale y, z. Se consideră şirul

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{L} f'(x_n), x_0 \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq \frac{-1}{2L} (f'(x_n))^2.$$

c) Se presupune că f satisface condiţia de la punctul b). Să se arate că dacă f este convexă şi există $a = \min\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$, atunci şirul $b_n = n(f(x_n) - a)$ este mărginit. (se folosesc rezultatele de la punctele anterioare).

d) Fie $f : [1, 2] \to [0, \infty)$ o funcţie integrabilă pentru care

$$\int_1^x f(t)^2 dt \leq \frac{x^3 - 1}{3}, \forall x \in [1, 2].$$

Să se demonstreze că $\int_1^2 f(t)dt \leq \frac{3}{2}$.

(Concursul Traian Lalescu, 1973)

19. Fie $y(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt$ şi $z(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt$.

a) Să se arate că $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi că $y, z \in C^1(\mathbb{R})$.

b) Să se găsească un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I pe care y, z îl verifică.

(Concursul Traian Lalescu, 1977)

20. Se consideră funcţia $f(z) = \dfrac{1 - z}{1 + z}$.

a) Să se arate că $f(D) = D$, unde $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, Rez > 0\}$.

b) Să se calculeze $\int_C \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{f(z)} dz$ unde cercul C este dat de ecuaţia $|z + 1| = \sqrt{2}$.

c) Să se găsească locul geometric al punctelor $z \in C$ care verifică $|f(z)| = |z|$.

d) Se consideră seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{z^n} - 1)$. Să se arate că seria converge uniform pe orice compact K inclus în mulţimea $\{z||z| < 1\}$ şi să se generalizeze (înlocuind pe $g(z) = e^z$ cu o funcţie mai generală).

(Concursul Traian Lalescu, 1977)

21. Se consideră ecuaţia diferenţială

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0, \tag{5.1}$$

unde $A, B \in C^0(\mathbb{R})$.

a) Ce condiţii trebuie să îndeplinească funcţiile A, B pentru ca printr-o schimbare de variabilă de forma $x = f(t)$, ecuaţia transformată să fie liniară cu coeficienţi constanţi.

b) Să se arate că $A(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, B(x) = -\dfrac{k^2}{1+x^2}$ iar f, sinusul hiperbolic verifică condiţiile de la primul punct şi apoi să se integreze ecuaţia

$$(1 + x^2)y'' + xy' - k^2y = 0.$$

c) Fie $\phi \neq 0$ o soluţie a ecuaţiei (1) şi $Z_\phi = \{x \in \mathbb{R}|\phi(x) = 0\}$. Să se arate că pentru orice numere reale a, b, intersecţia mulţimilor $[a, b]$ şi Z_ϕ este o mulţime finită.

d) Dacă ϕ_1, ϕ_2 sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei (1) şi x_1, x_2 sunt zerouri consecutive ale soluţiei ϕ_1 atunci intersecţia mulţimilor (x_1, x_2) şi Z_{ϕ_2} conţine un singur element.

(Concursul Traian Lalescu, 1977)

22. Fie $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un polinom cu coeficienţi reali astfel încât funcţia polinomială asociată (definită pe $\mathbb{R}^n$) este mărginită inferior. Să se arate că P îşi atinge această margine inferioară.

(Concursul Traian Lalescu, Bucureşti 1989)

Soluţii la Capitolul 1

Universitatea Politehnica Bucureşti

1. a) Fie D o dreaptă în $\mathbf{R}^3$. Fixăm un punct $a \in D$ şi un vector director $v \neq 0$ al dreptei D. Atunci $D = \{a + tv | t \in \mathbf{R}\}$. Avem $f(v) \neq 0$ (căci f este aplicaţie injectivă) şi se verifică prin dublă incluziune că

$$f(D) = \{f(a) + tf(v) | t \in \mathbf{R}\}.$$

b) Raportul respectiv este egal cu $|\det f|$. Se poate folosi faptul că dacă $T = A_1A_2A_3A_4$, atunci $\operatorname{vol} T = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})|$.

2. a) Verificări directe.

b) Rezultă $c_q = 2\pi\lambda_q$ şi o combinaţie liniară finită de φ_p-uri este nulă $\Longleftrightarrow$ toţi coeficienţii sunt nuli.

c) $f \in \mathcal{F}$; $\bar{f}(x) = \sum\limits_p \bar{\lambda}_p e^{-ipx} = \sum\limits_p \bar{\lambda}_{-p} e^{ipx}$ şi $f(x) = \sum\limits_p \lambda_p e^{ipx}$. deoarece funcţiile $\{e^{ipx}\}$ formează un sistem liniar independent, rezultă că, $f = \bar{f} \Longleftrightarrow \lambda_p = \bar{\lambda}_{-p}$, oricare p.

d) Evident, u şi v sunt aplicaţii $\mathbf{C}$-liniare; u este izomorfism, având inversa $w = u^{-1}$, definită prin

$$w\left(\sum_p \lambda_p e^{ipx}\right) = \sum_p \frac{\lambda_p}{ip - 1} e^{ipx}.$$

Dar v nu este izomorfism, deoarece nucleul ei $\ker v = \{\alpha e^{ix} | \alpha \in \mathbf{C}\}$ este nenul.

3. a) Dacă $1 \leq r \leq p$, atunci

$$P(r) = 1 + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \frac{r(r-1)\dots(r-k-1)}{k!} = (1 + (-1))^r = 0.$$

Deoarece grad$P = p$, rezultă că P are rădăcinile simple $1, 2, \dots, p$.

b) Aşadar,

$$I = A \cdot \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{(A - I)\dots(A - (k-1)I)}{k!}$$

deci A are inversă. Ca atare, $\det A \neq 0$ şi toate valorile proprii ale lui A sunt nenule. Pe de altă parte, $P(A) = 0$ deci P este divizibil cu polinomul minimal al matricei A.

c) A are toate valorile proprii simple deci A este diagonalizabilă.

4. a) Centrele sferelor sunt $C_1(0,0,0)$ şi $C_2(1,1,0)$ deci $\overrightarrow{C_1C_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Planele cerute au ecuaţia comună $x + y + \lambda = 0$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$.

b) Cele două sfere au aceeaşi rază. Fie $M(x, y, z)$ un punct în spaţiu. Punctul M aparţine cilindrului din enunţ $\leftrightarrow$ există un punct $N(a, b, c)$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ astfel încât $MN || C_1C_2$ şi MN este tangentă la una din sfere. Ecuaţiile dreptei MN sunt

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{1} = \frac{z-c}{0} = t$$

deci $a = x - t$, $b = y - t$, $c = z$ şi ecuaţia $(x-t)^2 + (y-t)^2 + z^2 - 4 = 0$ trebuie să aibă soluţii duble deci discriminantul nul. Ecuaţia cilindrului va fi $(x + y)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0$.

5. a) Verificări directe.

b) Avem $d(x_n, 0) = |\text{arctg} n| < \dfrac{\pi}{2}$ pentru orice $n \geq 0$ deci şirul (x_n) este mărginit. Apoi

$$d(x_{n+p}, x_n) = \text{arctg}\, \frac{p}{1 + n(n+p)} < \text{arctg}\, \frac{1}{n}$$

şi (x_n) rezultă şir Cauchy (căci $\forall \varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încât $\text{arctg} \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$). Dacă şirul (x_n) ar fi convergent în $\mathbf{R}$, ar exista $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $d(x_n, a) \to 0$ pentru $n \to \infty$, adică $|\text{arctg} n - \text{arctg} a| \to 0$ deci $\text{arctg}\, a = \dfrac{\pi}{2}$, absurd.

c) δ este o distanţă şi luăm din nou $x_n = n$. Atunci

$$\delta(x_{n+p}, x_n) = \left| \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

deci (x_n) este şir Cauchy. Dacă $x_n \to a$ în $\mathbf{R}$, adică $\left| \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{a} \right| \to 0$, ar rezulta $\dfrac{1}{a} = 0$; absurd.

6. a) Verificări directe.

b) $$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

În general, pentru $|a| < 1$, avem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$; înlocuind $a = \dfrac{1}{2}$, se va obţine $\langle x, y \rangle = 3$.

c) $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$. Dar $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6^{1-n} = \frac{6}{5}$, $\langle x, x \rangle = \dfrac{4}{3}$ şi $\langle y, y \rangle = \dfrac{9}{8}$ deci $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

7. a) Verificări directe; apoi $T(\sin) = -\pi \cos$ şi $T(\cos) = \pi \sin$.

b) $g \in \text{Im}\, T \to \exists f \in V$, $g(x) = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$, unde

$$c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad c_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt, \quad c_3 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt$$

deci $\mathrm{Im}T$ este generat de $1, \sin, \cos$ şi $\dim \mathrm{Im}T = 3$. Apoi $\ker T = (\mathrm{Im}T)^{\perp}$. Cum $f_2 = \cos 2x$, $f_3 = \sin 2x$, $f_4 = \cos 3x, \ldots$ sunt ortogonale pe $\mathrm{Im}T$, ele aparţin lui $\ker T$ şi fiind liniar independente, rezultă că $\dim \ker T = \infty$.

c) $\lambda_1 = 0$ este valoare proprie pentru T. Dacă $\lambda \neq 0$ ar fi o altă valoare proprie, ar exista $f \neq 0$ astfel încât $T\, f = \lambda\, f$ deci

$$c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x = \lambda f(x),$$

de unde

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}(c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x)$$

şi respectiv relaţiile

$$c_1 \left(1 - \frac{2\pi}{\lambda}\right) = 0, \quad c_2 - \frac{\pi}{\lambda} c_3 = 0, \quad c_3 - \frac{\pi}{\lambda} c_2 = 0.$$

Acest sistem are soluţii nenule doar pentru $\lambda = 2\pi$.

8. $\dfrac{\partial r}{\partial x_k} = \dfrac{x_k}{r}$ deci $r^2 \cdot v_i = x_i$ deci $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} = \dfrac{\delta_{ik} - 2x_k v_i}{r^2}$ etc. Prin calcul direct,

$$2v_i + 4x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + r^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = 0, \quad \sum_k x_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -v_i$$

şi însumând, $r^2 \Delta v_i + 2(n-2)v_i = 0$, etc.

9. a) Notăm $f_n = \dfrac{x^n}{n!}$ deci $||f_n|| = \dfrac{1}{n!}$. Avem $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$ deci $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$ este AC. Dacă ar fi C, atunci suma ei în spaţiul $C^0_{[0,1]}$ care este $f(x) = e^x$, ar trebui să fie polinomială; absurd. De fapt P nu este spaţiu Banach.

b) Fie (s_n) şirul sumelor parţiale ale seriei anterioare deci $||s_n|| \leq e$; atunci $t_n = \dfrac{1}{e} s_n$ aparţine la B; cum $t_n \to e^{x-1}$ în $C^0_{[0,1]}$, rezultă că şirul (t_n) este Cauchy în P. Dar acest şir nu are nici un subşir convergent. Faptul că o mulţime închisă şi mărginită este compactă are loc în $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ (dar nu şi în spaţiul $C^0_{[0,1]}$).

c) Luăm $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. Avem $f_n \to 0$, dar f_n' nu tinde la zero, pentru $n \to \infty$.

10. a) Notând $y = \sin 20^\circ$, rezultă că $\sin 60^\circ = 3y - 4y^3$ deci $4y^3 - 3y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ şi se aplică şirul lui Rolle.

b) Fie $f(x) = \dfrac{|\sin nx|}{n \sin x}$ pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Deci $f(x) \leq \dfrac{1}{n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$ pentru $x \in \left[\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Fie $g(x) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{x}{\sin x}$. g este crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $g(\dfrac{\pi}{2n}) < g(\dfrac{\pi}{6})$, deci

$$f(x) \leq \frac{1}{n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)} \leq \frac{2}{3} < 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}.$$

c) Pentru $n = 1$ este evident. Pentru $n \geq 2$ luăm $a = \dfrac{\pi}{2n}$.

11. a) $P_A(X) = \det(A - XI_n)$; $P_A(-1) \neq 0 \leftrightarrow \det(A + I_n) \neq 0 \leftrightarrow A + I_n$ este inversabilă.

b) Verificare directă.

c) Fie $d : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$, $d(A) = \det(I_n + A)$; d este aplicaţie continuă deci $d^{-1}(\{0\})$ este închisă.

12. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $z_n = A^n \cdot z_0$ pentru orice $n \geq 0$. Apoi A se diagonalizează: are valorile proprii $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ şi $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ deci $A^n = T \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n)T^{-1}$, unde

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad T^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

b) Punctele $z_n = (x_n, y_n)$ din $\mathbf{R}^2$ sunt situate pe curba $|x^2 - 2y^2| = 1$, care este reuniunea a două hiperbole etc.

c) Se consideră perechea $(1, 1)$, apoi $A^n(1, 1)^T$.

13. Aşadar, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = A(x) + \dfrac{\alpha(x,h)}{h}$ pentru orice $h \neq 0$. Dar $\dfrac{\alpha(x,h)}{h} \to 0$ pentru $h \to 0$ deci funcţia f este derivabilă şi $f'(x) =$

$A(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Rămâne să arătăm că $A(x)$ este derivabilă, cu $A'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Înlocuind x cu $x - h$ în relaţia din enunţ, se obţine

$$f(x) - f(x-h) = A(x-h) \cdot h + \alpha(x-h, h)$$

şi înlocuind h cu $-h$,

$$f(x) - f(x+h) = A(x+h) \cdot (-h) + \alpha(x+h, -h).$$

Adunând această relaţie cu cea din enunţ, rezultă

$$0 = A(x) \cdot h + \alpha(x,h) - A(x+h) \cdot h + \alpha(x+h, -h)$$

deci

$$0 = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} - \frac{\alpha(x,h)}{h^2} - \frac{\alpha(x+h,-h)}{h^2}$$

pentru orice $h \neq 0$ şi orice x etc.

14. a) A este subgrup aditiv al lui $\mathbf{R}$. Fie $\forall \varepsilon > 0$ fixat şi un interval deschis (a, b) de lungime ε. Arătăm că acest interval conţine punct din A. Dacă $x, y \in A$ şi $n \in \mathbf{Z}$, atunci $n|x-y| \in A$. Fie (a_n) un şir convergent cu toţi $a_n \in A$. Atunci există N astfel încât $0 < |a_N - a_{N+1}| < \varepsilon$ şi notând $\alpha = |a_N - a_{N+1}|$, $n = [a/\alpha]$, rezultă $n\alpha \leq a < (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha < n\alpha + \varepsilon = n\alpha + b - a \leq b$ deci intervalul (a, b) conţine elementul $(n+1)\alpha$ al mulţimii A.

b) Fie $A = \{2m\pi + 2n | m, n \in \mathbf{Z}\}$; A conţine şirul injectiv $a_n = 2n\pi - 2[n\pi]$ şi $a_n \in [0, 2]$ pentru orice $n \geq 0$. Cum $[0, 2]$ este compact, şirul (a_n) are un subşir convergent. Conform a), rezultă că A este densă în $\mathbf{R}$. Atunci $B = \{\sin x | x \in A\}$ rezultă densă în $[-1, 1]$ (într-adevăr, $\forall u \in [-1, 1]$, alegem $x \in \mathbf{R}$ cu $a = \sin x$. Dar $x = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ cu $\alpha_n \in A$ deci $u = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \alpha_n$ şi $\sin \alpha_n \in B$). Dar $B = \{\sin 2n | n \in \mathbf{N}\}$.

c) Evident maximul respectiv este ≤ 2; egalitatea înseamnă $\sin x = \cos \pi x = 1$, absurd (căci $\pi \notin \mathbf{Q}$). Pentru partea secundă, avem de arătat că există un şir $x_n \geq 0$ astfel încât $\sin x_n + \cos \pi x_n$ are limita 2.

Dar mulţimea $\{\sin 2n\}$ este densă în $[-1, 1]$ deci există un şir de numere naturale r_n astfel încât $\sin 2r_n \to 1$ deci $\sin 2r_n + \cos 2\pi r_n \to 2$ (de fapt $\cos 2\pi r_n = 1$).

15. a) Fie $\mathbf{Q}$ matricea asociată lui q în baza canonică a lui $\mathbf{R}^n$ deci $q(\underline{x}) = X^T \cdot Q \cdot X = (AX)^T \cdot Q \cdot AX$, de unde $A^T \cdot Q \cdot A = Q$. Pentru $n = 2$ şi $q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$, rezultă $Q = I_2$ şi condiţia devine $A^T \cdot A = I_2$. Deci A este o matrice ortogonală. Pentru $q(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2$, rezultă $Q = \mathrm{diag}(1, -1)$ etc.

b) Evident, $I_n \in G(q)$; $G(q)$ este grup $\leftrightarrow \forall A \in G(q)$, $\det A \neq 0$ [Dacă $\det A \neq 0$, atunci există A^{-1} şi $A^{-1} \in G(q)$; în relaţia $q(x') = q(Ax')$ punem $x' = A^{-1}x$ deci $q(A^{-1}x) = q(x)$, pentru orice x etc.]. Dacă forma pătratică q are valori proprii nenule (q nedegenerată), atunci din relaţia $A^T \cdot Q \cdot A = Q$, rezultă $(\det A)^2 \cdot \det Q = \det Q$ şi dacă $\det Q \neq 0$, atunci $\det A = \pm 1$ şi $G(q)$ este grup.

16. a) Notând $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pentru $x \in [0, 1]$, funcţia F este deri-vabilă şi $F'(x) = f(x)$. Atunci

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 0} F'(x) = f(0).$$

Deci, dacă $x_n \to 0$, atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} f(t)dt = f(0)$ şi luăm $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Limita din enunţ este egală cu $f(0)$.

c) Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, integrala are aceeaşi natură cu $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ deci este D.

c) Avem $\forall x \in [0, 1]$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x} + f(x)$, unde $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+3}$; funcţia f este continuă pe $[0, 1]$. Notăm

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{1/\sqrt{n}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + f(x) \right) dx.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{1/\sqrt{n}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}\right) dx + f(0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln x)\right)\Bigg|_{1/\sqrt{n}}^{1} + \frac{1}{3}, \text{etc.}$$

17. a) Verificări directe.

b) Presupunem că

$$\lambda_1\varphi(x+k_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(x+k_n) = 0$$

cu $k_1 > k_2 > \ldots > k_n$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Alegem x_0 astfel încât $\varphi(x_0 + k_1) = 0, \ldots, \varphi(x_0+k_{n-1}) = 0$ şi $\varphi(x_0+k_n) \neq 0$. Atunci $\lambda_n \cdot \varphi(x_0+k_n) = 0$ deci $\lambda_n = 0$ etc.

c) Fie $g = f'$ cu $f \in D$ deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = f|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Apoi, fie $g \in D$ cu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$. Dar $g = 0$ în afara unui interval $[a, b]$. Fie $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ deci $f' = g$ şi f se anulează în afara intervalului $[a, b]$ etc.

18. a) Conform teoremei Hamilton-Cayley, există $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^2 = \alpha A + \beta I_2$. Atunci prin inducţie după $n \geq 0$ se arată că A^n este combinaţie liniară de A, I_2. Cum A este inversabilă rezultă $\beta \neq 0$ şi notând $B = A^{-1}$, rezultă $A = \alpha I_2 + \beta A^{-1}$ deci A^{-1} este combinaţie liniară de A, I_2 şi prin inducţie, A^{-n} are aceeaşi proprietate pentru $n \geq 1$.

b) λ_1, λ_2 sunt soluţiile (reale) ale ecuaţiei $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0$, unde $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$. Atunci

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 =$$

$$= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 4a_{12}^2.$$

c) Fie $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ şi $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$. Există T ortogonală astfel încât $T^{-1}AT = D$. Punând $x = T \cdot y$, rezultă $x^T \cdot x = y^T \cdot y$ şi $x^T \cdot A \cdot x = y^T \cdot D \cdot y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$. Avem de determinat $\max(y_1^2 + y_2^2)$ cu legătura $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$ şi minimul respectiv. Punem $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cos t$, $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sin t$ $(t \in \mathbf{R})$ etc. Extremele cerute sunt $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ etc.

19. a) $1 - 2xy + y^2 > 0$. Curba $y^2 - 2xy + 1 = 0$ este o hiperbolă situată în regiunea $|x| \geq 1$ etc.

b) $f(x,y) = (1 + (y^2 - 2xy))^{-1/2}$ şi pentru $|y^2 - 2xy| < 1$,

$$f(x,y) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (y^2 - 2xy) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)(y^2 - 2xy)^2 + \ldots$$

c) Rezultă $E \equiv 0$, după calcule. Derivăm această relaţie în raport cu y de n ori şi facem $y = 0$. Va rezulta

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(x,0) - (2n+1)\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0) + n^2 \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}(x,0) \equiv 0$$

şi

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0) = n! \cdot p_n(x).$$

În final, $(n+1)p_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) = 0$.

20. a) Răspunsul este afirmativ.

b) $\mathrm{Ker}\, f$ este mulţimea matricilor simetrice din $M_2(\mathbf{R})$. Apoi $\mathrm{Im}\, f =$ mulţimea matricilor $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; $\dim \ker f = 3$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$.

c) Dacă λ este o valoare proprie, atunci există un vector coloană nenul X astfel încât $X - X^T = \lambda X$ deci $X^T = (1 - \lambda)X$. Evident $\lambda \neq 1$ şi singura valoare proprie este $\lambda = 0$.

21. a) Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică în $\mathbf{R}^n$. Atunci $u_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k$, $1 \leq i \leq n$. Fie $u \in \mathbf{R}^n$ un vector oarecare, $u = \sum b_j e_j$.

Avem $u \perp u_i \leftrightarrow \sum_k \alpha_{ik} b_k = 0$. Conform ipotezei, acest sistem liniar în $b_1, \ldots, b_n$ are numai soluţia nulă ($b_k = 0, \forall k$). Dar atunci $\det(\alpha_{ik}) \neq 0$ deci vectorii $u_1, \ldots, u_n$ sunt liniar independenţi în $\mathbf{R}^n$. Fiind în număr cât dimensiunea spaţiului, ei formează bază în $\mathbf{R}^n$.

b) Matricea componentelor vectorilor $v_1, \ldots, v_n$ este de tip Vandermonde. Determinantul corespunzător este un produs de factori de forma $\alpha^p - \alpha^j$ cu $p > j$ şi cum $\alpha \neq 0$ şi $|\alpha| \neq 1$, rezultă că determinantul este nenul, deci vectorii $v_1, \ldots, v_n$ sunt liniar independenţi, deci bază în $\mathbf{R}^n$.

22. a) Vom arăta că f este diferenţiabilă în (0,0) şi că $df(0,0)$ este aplicaţia nulă $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Pentru aceasta, avem de arătat că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Dar $0 \leq \dfrac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ şi apoi $f(0,0) = 0$ şi afirmaţia este evidentă.

b) Dacă $f(tx, ty) = t^\alpha \cdot f(x,y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ şi orice t admisibil, se spune că f este omogenă de grad α şi are loc relaţia lui Euler $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = = \alpha f$. În cazul problemei, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$ şi în plus, $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ în punctele lui $\mathbf{R}^2$. Facem schimbarea de variabile independente $(x,y) \to (u,v)$ definită prin $u = x^2 + y^2$, $v = y$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Atunci $x\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$ deci $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$ şi $f = \varphi(u)$ cu φ funcţie arbitrară; aşadar, $f = \varphi(x^2+y^2)$ deci $u \cdot \varphi'(u) = \varphi(u)$. Atunci $\varphi(u) = Cu$ cu C constantă arbitrară şi în final, $f(x,y) = C(x^2+y^2)$.

23. a) Avem $a_n > 0$. Se cunoaşte formula lui Stirling: $n! \sim n^n \cdot e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (se scrie $(a_n) \sim (b_n)$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$). Atunci $a_n = \dfrac{n^n}{e^n \cdot n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$. Sumele parţiale ale seriei din enunţ sunt $s_n = \ln a_1 - \ln a_{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, seria fiind divergentă.

b) Evident, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 1$ pentru $n \geq 1$ deci şirul (a_n) este descrescător, cu limita zero. Seria este C, conform criteriului lui Leibniz.

24. a) Notăm $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}$; acestea sunt funcţii derivabile şi seria derivatelor $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ este UC pe $\mathbf{R}$ (deoarece $\left\|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right\| \leq \dfrac{1}{n^2}$ pentru $n \geq 1$ şi aplicăm criteriul lui Weierstrass). Deoarece seria $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ este de asemenea UC pe $\mathbf{R}$, rezultă că suma ei f este o funcţie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$ deci $f_n \to \cos$ PC pe $\mathbf{R}$. Dacă convergenţa ar fi UC , ar rezulta că funcţia "cos" este polinomială, ceea ce este absurd (căci polinoamele neconstante nu sunt periodice!). Aşadar, convergenţa din enunţ nu este UC.

25. a) Verificări directe. Pentru $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\operatorname{tr} A =$ "urma" lui A, deci suma elementelor de pe diagonala principală.

b) Se determină $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $\operatorname{tr}(A^T \cdot C) = 0$ şi $\operatorname{tr}(A^T \cdot C^2) = 0$ şi se obţine un sistem liniar în a, b, c, d.

c) Este cunoscută teorema lui Riesz: dacă V este un spaţiu Hilbert şi $f : V \to \mathbf{R}$ este o aplicaţie $\mathbf{R}$-liniară, atunci există şi este unic un vector $a_f \in V$ astfel încât $\forall x \in V$, $f(x) = \langle a_f, x\rangle$. Dacă V este un spaţiu euclidian (finit dimensional cu produs scalar), aceasta se poate demonstra direct. Aplicând acest fapt pentru $V = M_2(\mathbf{R})$, există $B \in M$ astfel încât $f(M) = \langle B, M\rangle = \operatorname{tr}(B^T \cdot M)$ şi luâm $A = B^T$.

26. a) Şirul este definit printr-o relaţie de recurenţă într-un pas. Căutând termenul general sub forma $a_n = c \cdot r^n + d \cdot 2^n$, rezultă $r = -3$, $d = \frac{1}{5}$ deci $a_n = c \cdot (-3)^n + \frac{1}{5}2^n$; dar $a_0 = \frac{2}{5}$ deci $c = \frac{1}{5}$ şi în final, $a_n = \frac{1}{5}(2^n + (-3)^n)$, $n \geq 0$. Raza de convergenţă cerută este

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{2^n + (-3)^n}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}.$$

b) Suma respectivă este

$$S(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+3x},$$

pentru $|x| < \frac{1}{3}$.

27. a) În deschisul $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, funcţia este elementară deci de clasă C^∞. În origine, funcţia nu este continuă, căci luând şirurile

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right); \quad (x''_n, y''_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$$

convergente în $\mathbf{R}^2$ către (0,0) avem $f(x'_n, y'_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ şi $f(x''_n, y''_n) =$ $= n^4 \to \infty$, pentru $n \to \infty$. Rămâne să arătăm că există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

b) Pentru orice versor $s = (a,b)$ din $\mathbf{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$ avem

$$\frac{df}{ds}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(ts) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^4a^4 \cdot t^2 \cdot b^2}{t(t^8a^8 + t^4b^4)} = \lim_{t\to 0}\frac{ta^4b^2}{a^8t^4 + b^4} = 0.$$

Răspunsul la întrebarea pusă este negativ.

28. a) Dacă $x \neq 0$, se consideră seria $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$, evident convergentă; cum $0 \leq \frac{1}{n^4x^2+1} \leq \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{n^2}$, rezultă că şi seria din enunţ este convergentă în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

b) Definim $f^*(0) = 0$. Evident, f este continuă în $\mathbf{R}^*$ (ca sumă a unei serii UC de funcţii continue). Apoi, pentru orice şir $x_n \to 0$ $(x_n \in \mathbf{R}^*)$ avem $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) \to 0 = \tilde{f}(0)$ deci $\tilde{f}$ este continuă în $\mathbf{R}$.

c) Funcţiile $u_n(x) = \frac{x^2}{n^4x^2+1}$ sunt derivabile şi $u_n'(x) = \frac{2x}{(n^4x^2+1)^2}$; seria $\sum\limits_{n \geq 0} u_n'(x)$ este UC pe orice interval care nu conţine originea (aplicând criteriul lui Weierstrass). Atunci $\tilde{f}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$, iar

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4x^2+1} = 0.$$

29. a) Un punct oarecare pe parabola (P) este $M(u, u^2)$ şi un punct oarecare pe dreapta (D) este $N(v, v-2)$. Determinarea distanţei cerute revine la minimul funcţiei $f(u,v) = (u-v)^2 + (u^2 - v + 2)^2$. Altă metodă: se consideră tangenta (T) la parabolă, paralelă cu (D) deci $y = x + \lambda$ şi ecuaţia $x^2 = x + \lambda$ trebuie să aibă soluţii duble deci $\lambda = -\frac{1}{4}$. Trebuie atunci determinată distanţa dintre dreptele $y = x - 2$ şi $y = x - \frac{1}{4}$. Este suficient de calculat distanţa de la origine la cele două drepte.

b) Ecuaţiile dreptei (D) în $\mathbf{R}^3$ vor fi $\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$ şi paralelii vor fi $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, $x + y = \mu$. Aceştia trebuie să se sprijine pe curba $(P) : y = x^2$, $z = 0$. Rezultă $(x-2)^2 + x^4 = \lambda$, $x + x^2 = \mu$ şi condiţia de sprijin se obţine eliminând x. Rezultă o relaţie de forma $F(\lambda, \mu) = 0$, în care înlocuim

$$\lambda = (x-2)^2 + y^2 + z^2 \text{şi } \mu = x + y.$$

30. a) Verificări directe.

b) $\mathrm{Ker}\, f = \{P \in E | P(X+1) = P(X)\}$. Pentru $P \in E$, gradul lui P este cel mult $n (n \geq 2)$ deci $P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$, cu $a_0 \neq 0$. Condiţia $P(X+1) = P(X)$ devine

$$a_0(X+1)^n + a_1(X+1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(X+1) + a_n = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Egalând coeficienţii lui X^{n-1}, rezultă $a_0 \cdot C_n^1 + a_1 = a_1$ deci $a_0 = 0$; absurd. Singurele polinoame acceptabile sunt constantele reale (polinoame de grad zero) deci $\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{R}$. Apoi $\dim \mathrm{Im} f = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f = n$. Se observă că $\mathrm{Im}\, f = \{P(X+1) - P(X) | \mathrm{gr}\, P \leq n\} = \mathbf{R}_{n-1}[X]$, mulţimea polinoamelor de grad cel mult $n-1$.

c) Avem

$$f(Q_k) = Q_k(X+1) - Q_k(X) = k \cdot Q_{k-1}$$

deci

$$d(X^k) = T^{-1}(f(Q_k)) = T^{-1}(kQ_{k-1}) = kT^{-1}(Q_{k-1}) = kX^{k-1},$$

adică derivata lui X^k. Deci d este operatorul de derivare etc. Acesta nu este diagonalizabil (are $\lambda = 0$ ca valoare proprie cu multiplicitatea n, iar subspaţiul propriu corespunzător are dimensiunea $n-1$).

31. a) Fie $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$. Atunci $I_1 = 2\pi i \mathrm{Rez}(f, i)$. Dar

$$\mathrm{Rez}(f, i) = \left((z-i)^2 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} = \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} = \frac{1}{4}$$

şi $I_1 = \dfrac{\pi i}{2}$. Apoi

$$I_2 = \iint_D (x^2+y^2) dx dy = \iint_{x^2+y^2-2y=0} (x^2+y^2) dx dy$$

şi trecând la coordonate polare,

$$I_2 = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \quad \text{etc.}$$

32. a) Verificări directe; funcţiile $1, x, x^2, \ldots$ restrânse la $[-1,1]$ sunt liniar independente.

b) În cazul normei $||\cdot||_2$, se aplică proprietăţile produsului scalar $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ (relaţia din enunţ are loc în orice spaţiu pre-hilbertian şi se numeşte "identitatea paralelogramului"). Relaţia nu are loc şi pentru norma $||\cdot||_\infty$; de exemplu, luăm $f = 1$ şi $g = x$.

c) Se recomandă trasarea graficului lui $f_n; n \geq 1$. Se consideră funcţia $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ cu $f(0) = 1$. Avem

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1,$$

deci deşi $f_n \to f$ PC pe $[-1,1]$, convergenţa nu este uniformă, deci nu are loc în spaţiul E înzestrat cu norma $||\cdot||_\infty$. Apoi

$$||f_n - f||_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_{-1/n}^{0} (1+nx)^2 dx + \int_{0}^{1/n} (1-nx)^2 dx = \frac{2}{3n}$$

(după calcul) deci $f_n \to f$ în norma $||\cdot||_2$.

d) Dacă normele ar fi echivalente, ar exista $\alpha > 0$ astfel încât $||f||_\infty \leq \alpha ||f||_2$ pentru orice $f \in E$. Dar conform c) ar rezulta că $||f_n - f||_\infty \leq \alpha \cdot ||f_n - f||_2$, adică $1 < \alpha \cdot \dfrac{2}{3n}$ pentru orice $n \geq 1$. Absurd.

33. a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{-y^2/x^2} = 0$ şi $f(0, y) = 0$, deci f continuă în punctul $(0, y)$.

b) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,$$

deci

$$\alpha(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se observă că $|\alpha(x,y)| = \frac{x^2 \cdot e^{-y^2/x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Deoarece $e^{y^2/x^2} \geq \frac{y^2}{x^2} + 1$ rezultă

$$|\alpha(x,y)| = \frac{x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0,$$

pentru $x \to 0$, $\quad y \to 0$, deci f este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

c) Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 e^{-y^2/x^2}}{x} = 0$, şi, similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \lim_{y\to a} \frac{f(0,y)-f(0,a)}{y-a} = \lim_{y\to a} \frac{0-0}{y-a} = 0,$$

rezultă imediat continuitatea cerută.

d) Rezultă $g = e^{-}r^2$ şi grad$g = -2e^{-}r^2\overline{r}$.

34. a) Raza de convergenţă ρ a seriei este $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

b) Distingem cazurile:

• dacă $\alpha \leq 0$ atunci $M = (-1,1)$;

• dacă $0 < \alpha \leq 1$ atunci $M = [-1,1)$;

• dacă $\alpha > 1$ atunci $M = [-1,1]$.

c) Avem cazurile:

• dacă $\beta > 0$ atunci $M = [-1,1)$;

• dacă $\beta \leq 0$ atunci $M = (-1,1)$.

d)Domeniul maxim de definiţie este $[-1,1)$ şi $f(x) = -\ln(1-x)$.

35. a) $f(\varphi_1(y,z),y,z) = 0$. Derivând în raport cu x, obţinem $\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, deci $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} \to \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(b,c) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}$. Analog, rezultă

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(a,c) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a,b) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)},$$

de unde, prin înmulţirea celor trei egalităţi, rezultă relaţia

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(b,c)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(a,c)\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(a,b) = -1.$$

b) Avem $F(x,a,b) = x^7 + ax + b$. Condiţiile teoremei funcţiilor implicite sunt verificate, rezultă că există U_0 o vecinătate a punctului $(1,-2)$ şi V_0 o vecinătate a punctului '1 şi o unică funcţie $\varphi : U_0 \to V_0$ astfel încât $\varphi(1,-2) = 1$, $F(\varphi(a,b),a,b) = 0$, $\forall(a,b) \in U_0$, $\varphi \in C^1(U_0,V_0)$, $x = \varphi(a,b)$.

c) Din relaţia $F(\varphi(a,b),a,b) = 0$, prin derivare în raport cu x rezultă $\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b)\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b) + \frac{\partial F}{\partial a}(x,a,b) = 0$, deci obţinem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial a}(x,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b)} = \frac{-x}{7x^6+a} = \frac{-\varphi(a,b)}{7\varphi^6(a,b)+a},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}(a,b) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial b}(x,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b)} = \frac{-1}{7x^6+a} = \frac{-1}{7\varphi^6(a,b)+a}.$$

d) $F(x,1,-2) = 0 \Leftrightarrow x^7+x-2 = 0$. Notând $g(x) = x^7+x-2$ obţinem $g'(x) = 7x^6+1 > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$; g fiind continuă şi strict crescătoare , rezultă că ecuaţia $g(x) = 0$ are soluţie unică şi se observă că aceasta este $x = 1$.

e) Folosim metoda contracţiei: Se observă că ecuaţia se rescrie sub forma $x(x^6 + 0.99) = 2.03$, deci $x = \frac{2.03}{x^6+0.99}$. Atunci funcţia $g : [1.004, 1.008] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{2.03}{x^6+0.99}$ este o contracţie. Prima iteraţie folosind valoarea iniţială $x_0 = 1.004$, este $x_1 = g(x_0) \sim 1.0078$.

36. a) Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$, deci

$$df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) = \frac{1}{1+(x_0+y_0)^2}(x+y-x_0-y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2},$$

deci

$$d^2 f(\xi_1, \xi_2)(x - x_0, y - y_0)^2 = \frac{-2(\xi_1 + \xi_2)}{[1 + (\xi_1 + \xi_2)^2]^2}(x + y - x_0 - y_0)^2.$$

Atunci, pentru $(x_0, y_0) = (0, 0)$, rezultă $f(x, y) = 0 + x + y + R_f$, unde

$$R_f = \frac{-2(\xi_1 + \xi_2)}{[1 + (\xi_1 + \xi_2)^2]^2}(x + y)^2,\ \xi_1 \in (x, 0),\ \xi_2 \in (y, 0)$$

şi

$$|f(x, y) - x - y| = \frac{2(x + y)^2}{[1 + (\xi_1 + \xi_2)^2]^2}|\xi_1 + \xi_2| \leq x^2 + y^2,\ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

b) $g(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\mathrm{arctg}(t) + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$, $g'(x) = \mathrm{arctg}(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$.

Dar $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, deci

$$\mathrm{arctg}(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Rezultă

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(x^{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right);$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right).$$

c) Aproximarea corectă se realizează cu primii 5 termeni ai sumei.

37. a) Relaţia din enunţ se rescrie

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 2y^2 + (z+1)^2 = 4,$$

de unde rezultă $(z+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq z + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq z \leq 1 \Leftrightarrow z \in [-3, 1]$.

b) Aducem ecuaţia cuadricei la forma canonică (redusă)

$$(x-2)^2+2y^2+(z+1)^2=4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{4}=1,$$

deci efectuând translaţia de reper $Oxyz \to OXYZ$ dată de relaţiile

$$X=x-2, \quad Y=y, \quad Z=z+1,$$

se obţine în noile coordonate ecuaţia redusă $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=1$, ecuaţia unui elipsoid de rotaţie cu axa de rotaţie OY.

c) Fie $x+2y-z+a=0$ un plan paralel cu $x+2y-z=0$. Impunem condiţia ca sistemul ce descrie intersecţia cuadricei cu planul

$$(x-2)^2+2y^2+(z+1)^2=4, \quad x+2y-z-a=0$$

să aibă soluţie unică. Substituim $y=\frac{a+z-x}{2}$ în prima ecuaţie şi obţinem $3z^2+z(2a-2x+4)+3x^2-2ax-8x+2+a^2=0$. Soluţia z este unică în cazul în care discriminantul ecuaţiei este nul: $8x^2-4x(a+5)+2(a-1)^2=0$. Anularea discriminantului conduce la relaţiile:

$$\Delta'=0 \Leftrightarrow 4(a+5)^2-16(a-1)^2=0 \Leftrightarrow 3(7-a)(a+1)=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,7\}.$$

Distingem cazurile:

i) $a=-1$, atunci $x=\frac{-16}{-16}=1$; $z=0$, $y=-1$, deci punctul $(1,-1,0)$.

ii) $a=7$, atunci $x=\frac{-48}{-16}=3$; $z=\frac{-12}{6}=-2$; $y=1$, deci punctul $(3,1,-2)$.

38. a) Fie λ valoare proprie pentru A. Atunci

$$AX=\lambda X \to ||AX||=|\lambda|\cdot||X|| \to |\lambda|=\frac{||AX||}{||X||}\leq\frac{||A||\cdot||X||}{||X||}=||A||.$$

Alegem $||A||=||A||_\infty=\max\limits_i\left\{\sum_{j=1}^4|a_{ij}|\right\}=\max\{11,17,23,23\}=23$, şi obţinem $|\lambda|\leq 23$.

b) A este autoadjunctă. (evident).

c) A este pozitiv definită deoarece minorii principali ai matricei A sunt strict pozitivi.

39. Curba de intersecţie este un cerc, intersecţia unui cilindru ($x^2+xy+y^2=3$) cu planul $x+y+z=0$. O parametrizare a acestui cerc este: $y=2\sin t$, $x=\sqrt{3}\cos t-\sin t$, $z=-\sqrt{3}\cos t-\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, deci $\alpha(t)=(\sqrt{3}\cos t-\sin t,\, 2\sin t,\, -\sqrt{3}\cos t-\sin t)$.

Deci elementele Frenet sunt versorii Frenet

$$\bar{T}=\frac{\bar{\alpha}'}{||\bar{\alpha}'||}=\frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{6}}=\frac{-1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\sin t+\cos t)\bar{\imath}+\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\bar{\jmath}+\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\sin t-\cos t)\bar{k},$$

$$\bar{B}=\frac{\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''}{||\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''||}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k}),$$

$$\bar{N}=\bar{B}\times\bar{T}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t-\sqrt{3}\cos t)\bar{\imath}-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\bar{\jmath}+\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos t+\sin t)\bar{k};$$

Curbura $k=\dfrac{||\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''||}{\bar{\alpha}'}=\dfrac{6}{(\sqrt{6})^3}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ şi torsiunea $\tau=0$ (care se obţine prin calcul direct, sau observând că α este curbă plană inclusă în planul $x+y+z=0$). Formulele Frenet se scriu

$$\frac{d\bar{T}}{dt}=kv\bar{N}=\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{N}=\bar{N},$$

$$\frac{d\bar{N}}{dt}=-kv\bar{T}+\tau v\bar{B}=-\bar{T},$$

$$\frac{d\bar{B}}{dt}=\tau v\bar{N}=0,$$

unde $v=||\bar{\alpha}'||=\sqrt{6}$.

Căutăm valoarea parametrului t asociată punctului A. Din relaţia

$$(1,1,-2)=(\sqrt{3}\cos t-\sin t,2\sin t,-\sqrt{3}\cos t-\sin t),$$

rezultă $t=\dfrac{\pi}{6}$. Atunci în acest punct avem elementele Frenet:

$$\left\{\bar{T}_A=\frac{-1}{\sqrt{2}}\bar{\imath}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\jmath},\ \bar{N}_A=\frac{-1}{\sqrt{6}}\bar{\imath}-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\jmath}+\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{k},\ \bar{B}_A=\frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{\imath}+\bar{\jmath}+\bar{k})\right\},$$

$$k_A = \frac{1}{\sqrt{6}},\ \tau_A = 0.$$

40. $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x^2)^n}{n+1}.$

Dar $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x| < 1$; prin integrare obţinem

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},$$

deci $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},\ |x| < 1$. Substituim $x \to x^2$ şi rezultă

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1} = 1 + S(x) \to S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - 1,$$

Atunci, integrând prin părţi, avem:

$$\int_1^x S(t)dt = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt - x + 1 =$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(t^2+1)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{1}{t}\frac{1}{t^2+1}2t\,dt - x + 1 =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x^2+1) + \ln 2 + 2\text{arctg}t\Big|_1^x - x + 1 =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x^2+1) + \ln 2 + 2\text{arctg}x - \frac{\pi}{2} - x + 1.$$

41. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}_+$ valorile proprii ale matricei A. Aşadar, A se diagonalizează deci există $T \in M_n(\mathbf{R})$ nesingulară astfel încât $T^{-1}AT = D$, unde $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ecuaţia $X^2 = D$ are soluţii, de exemplu $X_1 = \text{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Notând $X_2 = T \cdot X_1 \cdot T^{-1}$, rezultă

$$X_2^2 = (TX_1T^{-1})^2 = T \cdot D \cdot T^{-1} = A$$

deci X_2 este soluţie a ecuaţiei $X^2 = A$.

Lucrând pe celule 1-dimensionale (λ), $\lambda > 0$, membrul drept al relaţiei din enunţ devine

$$\frac{2}{\pi}\lambda\int_0^{\infty}(t^2+\lambda)^{-1}dt = \frac{2\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\Big|_0^{\infty} = \sqrt{\lambda}$$

şi aceasta este soluţie a ecuaţiei $x^2 = \lambda$.

42. Se consideră seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ (cu $x \in \mathbf{R}$). Raza de convergenţă este $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3n+4}{3n+1}\right| = 1$. Deoarece seria dată este convergentă (conform criteriului lui Leibniz), se poate aplica teorema lui Tauber şi suma seriei dată este $\lim\limits_{x\to -1} S(x)$, unde $S(x)$ este suma seriei de puteri anterioare. Dar $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$ deci $S(x) = -\int\frac{dx}{x^3-1} + C$ etc.

43. Notăm $\alpha = x^2 - y^2$ deci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\alpha)\cdot 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = f'(\alpha)\cdot(-2y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(\alpha) + f''(\alpha)\cdot 4x^2$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2f'(\alpha) + 4y^2\cdot f''(\alpha).$$

Relaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ devine $(x^2+y^2)\cdot f''(\alpha) = 0$ şi în $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, rezultă $f''(\alpha) = 0$ adică $f'(\alpha) = C_1$ şi $f(\alpha) = C_1\alpha + C_2$ cu C_1, C_2 constante reale arbitrare. Deci $f(x,y) = C_1(x^2+y^2) + C_2$.

44. a) Dacă $p(X) = aX^2 + bX + c$, atunci, după calcul,

$$f(aX^2+bX+c) = 3aX^2+(2a+3b)X+b+3c+\frac{5a}{3},\quad \operatorname{Ker} f = 0,\quad \operatorname{Im} f = V.$$

b) $M_f^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c)$\lambda = 3$, etc.

45. Pentru orice $n \geq 1$ şi pentru $p \geq 1$, se scrie

$$f^{(n+p)}(x) - f^{(n)}(x) = f^{(n+p)}(x) - f^{(n+p-1)}(x) + f^{(n+p-1)}(x) -$$

$$-f^{(n+p-2)}(x) + \ldots + f^{(n+1)}(x) - f^{(n)}(x)$$

deci $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$|f^{(n+p)}(x) - f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{(n+p)^2} + \frac{1}{(n+p-1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Dar $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pentru $k \geq 2$ deci

$$|f^{(n+p)}(x) - f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{1}{n},$$

pentru orice $p \geq 1$. Atunci şirul $(f^{(n)})$, $n \geq 1$ este UC pe $\mathbf{R}$ (conform criteriului general Cauchy). Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$. Atunci $f(0) = 7$ şi în plus,

$$f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x))' = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = f(x)$$

deci $f(x) = Ce^x$, cu C constantă. Făcând $x = 0$, rezultă $C = 7$ şi în final, $f(x) = 7e^x$.

46. a) φ este periodică de perioada 1. Apoi

$$I_n = \int_0^1 + \int_1^2 + \ldots + \int_{n-1}^n .$$

Dar

$$\int_k^{k+1} \varphi(x) \cos 2\pi n x dx \overset{x=k+t}{=} \int_0^1 \varphi(k+t) \cdot \cos 2\pi n(k+t) dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi(t) \cdot \cos 2\pi n(k+t) dt = \int_0^1 t \cos 2\pi n t dt = 0$$

deci $I_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

b) $f_n(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi(kx+k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi(kx) = f_n(x)$, $\forall x$. Este suficient de studiat UC pe intervalul $J = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Pentru $p < q$ şi $x \in J$, avem

$$0 \leq f_q(x) - f_p(x) = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{2^k}\varphi(kx) \leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^p}.$$

Aşadar, $||f_q - f_p|| < \frac{1}{2^{\min(p,q)}}$ etc.

c) Pentru $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

47. a) Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ o valoare proprie comună. Deci există vectori-coloană nenuli u, v astfel încât $Au = \lambda u$, $Bv = \lambda v$ deci $A^k u = \lambda^k u$, $B^k v = \lambda^k v$ pentru orice $k \geq 1$. Atunci $\lambda^{2007} = 1$, $\lambda^{2008} = 1$, de unde $\lambda = 1$.

b) Este suficient de arătat că P, Q nu au rădăcini comune. Dacă ar exista $\alpha \in \mathbf{C}$ cu $P(\alpha) = 0$, $Q(\alpha) = 0$, atunci $|\alpha| = 1$ şi $|\alpha + 1| = 1$, de unde $\alpha = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\alpha + 1 = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ deci $(\alpha+1)^{2007} = e^{\pm i\pi 669} = \pm 1$. Apoi $(\alpha+1)^{2008} = 1$ deci $\pm(\alpha+1) = 1$. Contradicţie.

c) Aşadar, $(A + I_3)x = -Bx$, deci

$$-B^2x = B(A+I_3)x = (A+I_3)Bx = -(A+I_3)^2x, \text{etc.}$$

d) Dacă $A + B + I_3$ nu ar fi inversabilă, atunci ar exista $x \neq 0$ astfel încât $(A+B+I_3)x = 0$ deci conform c), $(A+I_3)^{2008}x = B^{2008}x = x$ deci $((A+I_3)^{2008} - I_3)x = 0$. Dar $(A^{2007} - I_3)x = 0$. Cum P, Q sunt relativ prime, atunci conform teoremei lui Bezont ar exista polinaome U, V astfel încât $PU + QV = 1$ deci $P(A)\cdot U(A) + Q(A)\cdot V(A) = I_3$. Aşadar,

$$(A^{2007} - I_3)\cdot U(A) + ((A+I_3)^{2008} - I_3)\cdot V(A) = I_3.$$

Înmulţind la dreapta cu vectorul coloană x, rezultă atunci că $x = 0$, ceea ce este o contradicţie.

48. a) Avem $f_n'(x) = x^n \cdot ((n+1)\ln x + 1)$. Funcţia f_n are un minim absolut pe (0,1), atins în punctul $x_n = \exp\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)$. Din tabloul de variaţie al lui f_n rezultă că $\forall x \in (0,1)$, $\inf\limits_x f_n(x) = f_n(x_n)$ şi $\sup\limits_x f_n(x) = 0$.

b) Funcţia $\varphi : (0,1) \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x\ln x$ este mărginită şi $f_n(x) = = x^n \cdot \varphi(x)$. Convergenţa uniformă a lui (f_n) este echivalentă cu convergenţa uniformă a şirului (x^n), $n \geq 0$. Se ştie că şirul de funcţii (x^n) nu este UC pe (0,1), dar este UC pe orice subinterval compact conţinut în (0,1).

Altă metodă constă în calculul sumelor parţiale

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s_n(x) = \frac{x^{n+2} - x}{1-x} \ln x,$$

pentru $x \in (0,1)$. Apoi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \dfrac{x\ln x}{1-x}$ deci notând $s(x) = \dfrac{x\ln x}{1-x}$, şirul s_n converge punctual către s pe (0,1) şi ca atare, seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este PC, cu suma s. Pentru studiul UC, se calculează

$$||s_n - s|| = \sup_{x\in(0,1)} |s_n(x) - s(x)| \quad \text{etc.}$$

49. Sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ nu are soluţii deci nu există puncte critice în $\overset{\circ}{K}$. Maximul funcţiei continue f pe compactul K va fi atins numai pe frontiera lui K. Pe feţele "laterale" rezultă $\max f = 1$ şi pe planul $x+y+z = 1$, rezultă $f(x,y,z) = \sqrt{x} + 1 - x - z + z^2$. Maximul cerut este $\dfrac{5}{4}$, după calcule.

50 . A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$. Dar $\det A$ este produsul rădăcinilor complexe ale polinomului său caracteristic $P_A(\lambda) =$

$\det(A-\lambda I) \in \mathbf{C}[\lambda]$, deci dacă prin absurd A neinversabilă, atunci $\det A = 0 \to P_A(\lambda)$ admite rădăcina reală $\lambda = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă A inversabilă.

Polinomul caracteristic al matricii A are doar rădăcini complexe conjugate de forma λ, $\bar{\lambda} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. Dacă $P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)\left(\lambda - \bar{\lambda}_k\right)$, $n = 2m$, atunci

$$P_{A^{-1}}\left(\lambda^{-1}\right) = \det\left(A^{-1} - \lambda^{-1} I\right) = \det\left(AA^{-1}\right)\det\left(\lambda A^{-1} - I\right)\lambda^{-n} =$$

$$= \lambda^{-n}\det\left(A^{-1}\right)\det\left[A\left(\lambda A^{-1} - I\right)\right] = \lambda^{-n}\det\left(A^{-1}\right)\det(A - \lambda I).$$

Cum $\lambda = 0$ nu este rădăcină a lui $P_A(\lambda)$, pentru orice rădčină λ a lui $P_A(\lambda)$, rezultă $P_{A^{-1}}\left(\lambda^{-1}\right) = 0$. Deci polinomul caracteristic al matricii A^{-1} are drept rădăcini inversele rădăcinilor matricii A, deci de forma $\frac{1}{\lambda}$.

51. a) Folosim

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3x^2} = \frac{1}{6} \neq 0$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n - \sin a_n}{a_n^3} \right| = \frac{1}{6},$$

deoarece $\lim a_n = 0$. Din criteriul comparaţiei la limită, rezultă că seriile respective au aceeaşi natură.

b) Conform punctului a), deoarece $\sum_{n\geq 1} |a_n|^3$ este convergentă, rezultă că $\sum_{n\geq 1} |a_n - \sin a_n|$ este convergentă, deci $\sum_{n\geq 1} (a_n - \sin a_n)$ este absolut convergentă, deci $\sum_{n\geq 1} (a_n - \sin a_n)$ este convergentă.

Dacă am presupune că $\sum_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum_{n\geq 1} \sin a_n$ nu au aceeaşi natură, atunci $\sum_{n\geq 1} (a_n - \sin a_n)$ este divergentă, ceea ce este fals, deci $\sum_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum_{n\geq 1} \sin a_n$ au aceeaşi natură.

c) Fie $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0$ iar $a_n < \frac{\pi}{2}$ implică $\sin a_n > 0$, deci

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)\right| = \sum_{n\geq 1}\sin a_n.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^3 = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{n^3}{(n^3+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, din criteriul de comparaţie cu inegalităţi, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^3$ este convergentă şi conform punctului b), $\sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ are aceeaşi natură cu $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. Avem $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} = 1 \neq 0$, deci $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ şi $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ au aceeaşi natură. Dar $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă $\rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă $\rightarrow \sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ este divergentă $\rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ nu este absolut convergentă. Pentru convergenţa simplă, se observă că argumentul sinusului din seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ satisface $0 < \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} < 1 < \frac{\pi}{2}$, deci $\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ este şir descrescător şi poate fi folosit criteriul lui Leibnitz.

52. a) Fie $(x'_n)_n$, $(x''_n)_n \in L$. Atunci adunnd egalităţile de mai jos şi înmulţind prima egalitate cu λ, obţinem:

$$x'_{n+1} = \frac{5}{6}x'_n - \frac{1}{6}x'_{n-1}x''_{n+1} = \frac{5}{6}x''_n - \frac{1}{6}x''_{x-1} \rightarrow$$

$$\left(x'_{n+1} + x''_{n+1}\right) = \frac{5}{6}\left(x'_n + x''_n\right) - \frac{1}{6}(x'_{n-1} + x''_{n-1})$$

$$\left(\lambda x'_{n+1}\right) = \frac{5}{6}\left(\lambda x'_n\right) - \frac{1}{6}(\lambda x'_{n-1})$$

pentru orice λ. Rezultă $(x'_n + x''_n) \in L$, $(\lambda x'_n) \in L$, deci L este subspaţiu vectorial.

b) Avem

$$\frac{5}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{5}{12} - \frac{2}{12}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} = u_{n+1}$$

$$\frac{5}{6}v_n - \frac{1}{6}v_{n-1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3^n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{5}{18} - \frac{2}{18}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} = v_{n+1},$$

deci $(u_n)_n$, $(v_n)_n \in L$.

c) u, v sunt liniar independenţi, ca vectori în S.

În cazul nostru, relaţia $z_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n}$, $n \geq 1$ se rescrie pentru $n \in \{1, 2\}$,

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 1\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{9} = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = 69\alpha + 4\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -4\beta = 9 \rightarrow z_n = (-4)\frac{1}{2^n} + 9\frac{1}{3^n}.$$

53. a) Avem $P : x+2y+2z = 0$; fie $M(a, b, c)$ şi $M' = pr_P M$. Ecuaţiile perpendicularei din M pe planul P sunt: $\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-c}{2} = t$.

Atunci

$$M'(x, y, z) :\ x = a + ty = 2t + bz = 2t + cx + 2y + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow t = (-a - 2b - 2c)/9x = (8a - 2b - 2c)/9y =$$

$$= (5b - 2a - 4c)/9z = (5c - 2a - 4b)/9.$$

Prin urmare $f(a, b, c) = \left(\frac{8a - 2b - 2c}{9}, \frac{5b - 2a - 4c}{9}, \frac{5c - 2a - 4b}{9}\right)$ şi, evident, f este liniar'ă.

Ker$f$ este $\{v_1 = (1, 2, 2)\}$şi Imf este $\{v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (2, 0, 1)\}$.

b) Aflăm valorile proprii şi obţinem $\lambda_1 = 9$, $(m_{\lambda_1} = 1)$, $\lambda_2 = 1$, $(m_{\lambda_2} = 1)$, $\lambda_3 = 8$, $(m_{\lambda_3} = 1)$. Se verifică uşor că f este diagonalizabilă.

c) Fie $P: \; Ax + By + Cz = 0$ un plan care trece prin origine; aflăm proiecţia unui punct $M(a, b, c)$ pe planul P. Dreapta perpendiculară pe P ce conţine punctul M are ecuaţiile

$$x = At + a \quad y = Bt + b \quad z = Ct + c,$$

deci proiecţia căutată $\{(a, b, c)\} = P \cap D$ corespunde valorii t care satisface ecuaţia

$$A(At + a) + B(Bt + b) + C(Ct + c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(A^2 + B^2 + C^2) = -Aa - Bb - Cc \Leftrightarrow t = \frac{-Aa - Bb - Cc}{A^2 + B^2 + C^2},$$

Înlocuind , obţinem

$$(a, b, c) = \Big(\frac{(B^2 + C^2)\, a - Bb - Cc}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{(A^2 + C^2)\, b^2 - Aa - Cc}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\frac{(A^2 + B^2)\, c - Bb - Aa}{A^2 + B^2 + C^2}\Big),$$

deci o aplicaţie liniară de matrice.

54. a) Fie $\{i, j, k\}$ o bază ortonormată în V_3. Notând $\sigma = ||u - i||^2 + ||v - j||^2 + ||w - k||^2$, avem de demonstrat implicaţia $\sigma < 1 \Rightarrow$ familia $F = \{u, v, w\}$ este liniar independentă. Presupunem prin absurd că deşi $\sigma < 1$, familia F este liniar dependentă, deci există o combinaţie liniară nulă $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ în care cel puţin unul dintre coeficienţii α, β, γ este nenul, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$. Atunci avem

$$\alpha(u - i) + \beta(v - j) + \gamma(w - k) = -(\alpha i + \beta j + \gamma k).$$

Aplicând acestei relaţii norma din $\mathbf{R}^3$ şi folosind faptul că baza $\{i, j, k\}$ este ortonormată,

$$||\alpha(u - i) + \beta(v - j) + \gamma(w - k)|| = || - (\alpha i + \beta j + \gamma k)|| = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Utilizând apoi succesiv inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwartz pentru produsul scalar canonic din $\mathbf{R}^3$ şi ipoteza $\sigma < 1$, rezultă

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = ||\alpha(u-i) + \beta(v-j) + \gamma(w-k)|| \leq$$

$$\leq |\alpha| \cdot ||u-i|| + |\beta| \cdot ||v-j|| + |\gamma| \cdot ||w-k||$$

$$\leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2) \cdot (||u-i||^2 + ||v-j||^2 + ||w-k||^2)$$

$$= \sigma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

deci s-a obţinut o contradicţie. Prin urmare familia F este liniar independentă.

b) Notăm $c_1 = \cos(\widehat{a,i})$, $c_2 = \cos(\widehat{b,j})$, $c_3 = \cos(\widehat{c,k})$. Avem $c_k \in [-1,1]$, $\forall k \in \overline{1,3}$, deci folosind ipoteza, rezultă:

$$\frac{5}{2} < c_1 + c_2 + c_3 \leq 2 + c_3 \to c_3 > \frac{1}{2}.$$

Admitem prin absurd că familia $F = \{a, b, c\}$ este liniar dependentă. Fie π subspaţiul vectorial generat de F, asimilat cu un plan care conţine originea. Fie $i' = pr_\pi i$. Avem $(\widehat{i,i'}) \leq (\widehat{i,a})$, deci $\cos(\widehat{i,i'}) \geq \cos(\widehat{i,a}) = c_1$. Notând cu n versorul normal la π, avem $\cos(\widehat{i,i'}) = \sin(\widehat{n,i})$ şi $c_1 \leq \sin(\widehat{n,i}) \stackrel{not}{=} s_1$. Analog rezultă relaţiile omologe

$$c_2 \leq \sin(\widehat{n,j}) \stackrel{not}{=} s_2, \quad c_3 \leq \sin(\widehat{n,k}) \stackrel{not}{=} s_3.$$

Avem astfel $s_1 + s_2 + s_3 \geq c_1 + c_2 + c_3 > \frac{5}{2}$.

Notăm

$$k_1 = \cos(\widehat{n,i}),\ k_2 = \cos(\widehat{n,j}),\ k_3 = \cos(\widehat{n,k}),$$

Din faptul că n este versor, rezultă $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$. Folosind relaţiile $s_j^2 + k_j^2 = 1,\ \forall j \in \{1,2,3\}$, rezultă $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 3 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 2$ şi

$$1 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

Obţinem $\sqrt{6} \geq s_1 + s_2 + s_3 > \frac{5}{2}$, de unde $\sqrt{6} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{6} > 5 \Leftrightarrow 24 > 25$, contradicţie.

55. Se observă că implicaţia inversă este imediată. Pentru a demonstra implicaţia directă, presupunem adevărată egalitatea $AB = BA$. Notând cu $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ cele n valori proprii distincte ale matricii A şi respectiv cu $f_1, \cdots, f_n$ generatorii celor n subspaţii proprii $S_1, \ldots, S_n$ asociate, se observă că ipoteza $AB = BA$ implică $A(Bf_k) = BAf_k = B(\lambda_k f_k) = \lambda_k(Bf_k)$, deci $Bf_k \in S_k$. Dar $S_k = L(f_k)$, deci există μ_k astfel încât $Bf_k = \mu_k f_k$. Deci $\{f_1, \cdots, f_n\}$ este bază diagonalizatoare atât pentru A, cât şi pentru B. Notăm cu C matricea diagonalizatoare $C = [f_1, \cdots, f_n]$ şi avem matricele diagonale asociate $\tilde{A} = C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ şi $\tilde{B} = C^{-1}BC = \text{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$.

Se constată că, deoarece valorile proprii $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sunt distincte, determinantul Vandermonde care are pe linii vectorii $v_k = (\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ este nenul, deci vectorii $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ formează o bază . Prin urmare, pentru $w = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$, există scalarii $a_0, \cdots, a_{n-1}$, astfel ca $w = a_0 v_0 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}$ şi deci $\tilde{B} = a_0 I_n + a_1 \tilde{A} + a_2 \tilde{A}^2 + \cdots + a_{n-1} \tilde{A}^{n-1} \equiv P(\tilde{A})$. Înmulţind această relaţie cu C la stânga şi cu C^{-1} la dreapta şi folosind egalitatea $C\tilde{A}^k C^{-1} = (C\tilde{A}C^{-1})^k, \forall k \in \{0, \cdots, n-1\}$, rezultă $B = P(A)$.

56. a) $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 0$.

b) Integrând prin părţi, obţinem

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -\int_0^1 x^n (e^{-x})' dx = -\left(x^n e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{-x} dx \right),$$

deci $a_n = -\dfrac{1}{e} + n a_{n-1}$. Prin calcul direct, $a_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x} dx = \dfrac{e-1}{e}$. Se observă că $a_n > 0, \forall n$, deoarece integrandul este funcţie pozitivă continuă neidentic nulă, deci $0 < a_n, \forall n \neq 0$. Obţinem

$$a_n = n! a_0 - \frac{1}{e}\Big(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)\cdots 3 \cdot 2\Big)$$

$$= n!a_0 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\right) n!$$
$$= \frac{n!}{e}(e - \theta_n),$$

unde

$$\theta_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

Dar $e - \theta_n$ este eroarea dintre suma seriei Taylor asociată funcţiei $f(x) = e^x, x \in [0,1]$, deci este restul Lagrange în $x = 1$, dat de $R = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} = \frac{e^{x^*}}{(n+1)!}, x^* \in [0,1]$. Dar $0 \leq x^* \leq 1 \to \frac{1}{(n+1)!} \leq R \leq \frac{e}{(n+1)!}$, deci $\frac{1}{e(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă $a_n = \frac{1}{e} + n \cdot a_{n-1}$, rezult'a $\lim\limits_{n\to\infty} na_{n-1} = \frac{1}{e}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_{n-1}}{(n+1)a_n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1/e}{1/e} \cdot 1 = 1,$$

şi deci raza de convergenţă este $R = 1$. c) Orice şir de numere reale $\{x_n\}_{n\geq 1}$ este convergent d.n.d. este şir Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}^*, \text{ a.î. } \forall n_1, n_2 \geq n, \ \ |x_{n_2} - x_{n_1}| < \varepsilon.$$

Dar pentru $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ avem

$(\exists)\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, a.î. $\forall n \in \mathbf{N}^*, (\exists) n_1 = n-1, n_2 = 2n \geq n$, cu proprietatea

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| = \left|\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right|}_{n \text{ termeni}} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon,$$

deci şirul nu este şir Cauchy, deci nu este convergent. Fiind şir crescător cu termeni pozitivi, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$, deci

$$L = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|1 + \frac{1/(n+1)}{a_n}\right| = 1,$$

deci $R = \frac{1}{L} = 1$. Distingem trei cazuri: (i) pentru $x = 1$, seria numerică are termenul general $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$, şi este serie divergentă deoarece $\lim b_n = \lim a_n = \infty \neq 0$, deci seria de puteri diverge; (ii) pentru $x = -1$, seria de puteri devine $S(-1) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$; termenul general al acestei serii, $b_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ produce şirul sumelor parţiale, format din subşirurile $b_{2n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ şi $b_{2n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, deci $b_n \stackrel{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, prin urmare pentru $x = -1$ seria de puteri nu este convergentă;

(iii) pentru $|x| < 1$, folosim indicaţia din enunţ. Are loc egalitatea $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \cdot x^{n-k}$, de unde

$$S(x) \equiv \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} x^n\right).$$

Dar $\sum_{n\geq 1} x^n = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x}{1-x}$, iar $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, deci suma seriei este $S(x) = -\frac{x\ln(1-x)}{1-x}$.

57. a) Se observă că funcţia $\varphi(t) = t^{2n+1}e^{-t^2}$ este impară, deci pentru $x > 0$ avem $\int_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 0$, deci $f_n(x) = f_n(-x), \forall x \in \mathbf{R}$. Cu schimbarea de variabilă $u = t^2$, unde $t \in (-\infty, x]$, şi apoi integrând prin părţi, obţinem

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{\infty}^{x^2} \frac{u^n}{2} e^{-u} du = -\frac{1}{2n!} \int_{x^2}^{\infty} u^n e^{-u} du$$
$$= -\frac{1}{2n!} \left(-u^n e^{-u} \Big|_{x^2}^{\infty} + n \int_{x^2}^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du \right) = -\frac{x^{2n}e^{-x^2}}{2n!} + f_{n-1}(x),$$

deci $f_n(x) = -\frac{x^{2n}e^{-x^2}}{2n!} + f_{n-1}(x)$. b) Integrând în relaţia de recurenţ unde $a_n = \int_0^1 f_n(x)$, avem egalitatea $a_n = -b_n + a_{n-1}$, unde $b_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}e^{-x^2}}{2 \cdot n!}dx$.

Sumând relaţiile obţinute din relaţia de recurenţă prin înlocuirea $n \to 1, 2, 3, ...$, avem

$$a_n = a_0 - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2} dx = a_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{n} \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx =$$

$$= a_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} \cdot \left(-1 + \sum_{n=0}^{n} \frac{(x^2)^n}{n!} \right) dx.$$

Se observă că suma tinde pentru $n \to \infty$ la e^{x^2}, deci rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} \cdot \left(-1 + e^{x^2} \right) dx =$$

$$= a_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - e^{-x^2}) dx = a_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Dar

$$a_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{0!} \int_{-\infty}^{x} te^{-t^2} dt \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

deci $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$.

58. a) Fie λ o valoare proprie a matricei A şi $v \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ un vector propriu asociat valorii proprii λ. Atunci avem

$$Av = \lambda v, \quad A^2 v = A \cdot Av = \lambda Av = \lambda^2 v, \quad A^3 v = \lambda^3 v.$$

Folosind relaţia din ipoteză aplicată vectorului v, obţinem

$$A^3 v = Av \to \lambda^3 v = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda) v = 0.$$

Dar $v \neq 0$, deci $\lambda^3 - \lambda = 0$, şi singurele valori proprii sunt rădăcinile ecuaţiei $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$, deci $\lambda \in \{0, \pm 1\}$.

b) Deoarece matricea are valori proprii reale, ea este jordanizabilă. Fie C matricea modală (diagonalizatoare) care are pe coloane coordonatele unei baze formate din vectori proprii şi eventual vectori principali ai matricei A.

Atunci $J = C^{-1}AC$ are formă canonică Jordan şi se observă că

$$J^3 = (CAC^{-1})^3 = CA^3C^{-1} = CAC^{-1} = J,$$

deci $J^3 = J$. Distingem trei cazuri:

(i) dacă valorile proprii sunt distincte $\{-1, 0, 1\}$; atunci, acestea fiind simple (de multiplicitate unu), matricea este diagonalizabilă;

(ii) dacă una dintre valorile proprii este dublă şi prin absurd A nu este diagonalizabilă, atunci J conţine două celule Jordan, una dintre acestea având ordinul 2; în acest caz $J = D + N$ unde D este matrice diagonală cu proprietatea $D^3 = D$ Atunci

$$J^3 = J \Leftrightarrow (D + N)^3 = D + N \Leftrightarrow (3D^2 - I_3)N = O_3.$$

Dar matricea $3D^2$ conţine pe diagonală numerele 0 sau 3, deci $(3D^2 - I_3)$ este o matrice diagonală inversabilă şi deci $N = O_3$, contradicţie;

(iii) dacă A admite o unică valoare proprie triplă $\lambda \in \{\pm 1, 0\}$, atunci J con'tine o singură celulă Jordan; în acest caz $J = D+N$ unde $D = \lambda I_3$ este matrice diagonală cu proprietatea $D^3 = D$, iar N este o matrice nenulă nilpotentă de ordinul trei ($N^3 = 0$).

Atunci

$$J^3 = J \Leftrightarrow (D + N)^3 = D + N \Leftrightarrow (3D^2 - I_3)N + 3DN^2 = O_3.$$

Dar $(3D^2 - I_3) = (3\lambda^2 - 1)I_3 \overset{not}{=} M$ este o matrice diagonală inversabilă şi deci $N = -3M^{-1}DN^2$, unde matricea din stanga este nilpotentă de ordin trei, iar cea din dreapta este fie nilpotentă de ordin doi (pentru $\lambda \in \{\pm 1\}$), fie nulă (în cazul $\lambda = 0$), deci contradicţie. În concluzie, în toate cele trei cazuri, A este matrice diagonalizabilă.

Universitatea Gheorghe Asachi - Iaşi

1. Presupunem că f este crescătoare. Fie I un interval $x, x' \in f^{-1}(I)$ cu $x \leq x'$; există deci $y, y' \in I$ cu $y \leq y'$ astfel ca $f(x) = y, \quad f(x') = y'$. Pentru a arăta că $f^{-1}(I)$ este un interval, fie $x'' \in [x, x']$, din $x \leq x'' \leq x'$ rezultă $f(x) \leq f(x'') \leq f(x')$ şi deoarece I este interval, avem $f(x'') \in I$, deci $x'' \in f^{-1}(I)$.

Reciproc. Presupunem că f nu este monotonă. Există deci x_1, x_2, cu $x_1 < x_2$ astfel ca $f(x_1) \geq f(x_2)$ şi $x_3 < x_4$ astfel ca $f(x_3) \leq f(x_4)$. Comparând cele 4 valori ale funcţiei se poate obţine următoarea condiţie echivalentă. Există $x_1 < x_2 < x_3$ astfel ca $f(x_1) \leq f(x_2)$ şi $f(x_3) \leq f(x_2)$. Fie $a = \min(f(x_1), f(x_3))$ şi $b = f(x_2)$. Atunci rezultă că $f^{-1}[a, b)$ nu este interval, deoarece $x_1, x_3 \in f^{-1}[a, b)$, dar $x_2 \notin f^{-1}[a, b)$.

2. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e \ln x - x$, care admite punctul e punct de maxim şi deoarece $f(e) = 0$ rezultă că $f(x) \leq 0, \forall x > 0$, deci $e \ln x \leq x$. În particular, dacă $x = \pi$ deducem că $f(\pi) < f(e)$, de unde $\pi^e \leq e^\pi$.

3. a) Putem scrie

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n + x_n^2 - \cdots + x_n^{2006} - x_n^{2007}) = x_n \frac{1 - x_n^{2008}}{1 + x_n}.$$

Demonstrăm prin inducţie că $x_n \in (0, 1)$. Din ipoteză etapa de verificare este îndeplinită. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru n, adică $x_n \in (0, 1)$. Avem

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1 + x_n} < 1.$$

În mod evident rezultă $x_{n+1} > 0$.

Arătăm că x_n este şir descrescător.

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 + x_n^3 - \cdots + x_n^{2007} - x_n^{2008} =$$

$$-x_n^2(1 - x_n + \cdots - x_n^{2005} + x_n^{2006}) = -x_n^2 \frac{1 + x_n^{2007}}{1 + x_n}.$$

Observăm că $x_{n+1} - x_n \leq 0$ şi deci şirul este descrescător, deci convergent. Fie l limita sa. Înlocuind în relaţia de recurenţă deducem

$$l = l \frac{1 - l^{2008}}{1 + l},$$

deci $l = 0$.

b) Comparăm cu seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Calculăm limita raportului dintre termenii seriilor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\frac{1}{x_n}} \right)^\alpha$$

Apoi folosind teorema Stolz- Cesaro.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 1 - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+x_n}{x_n(1-x_n^{2008})} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n(1 - x_n^{2008})}{1 + x_n - 1 + x_n^{2008}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x_n^{2008}}{1 + x_n^{2007}} = 1.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$$

şi seria dată este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

4. Observăm că şirul are termeni pozitivi şi logaritmăm relaţia de recurenţă. Notăm $y_n = \ln x_n$ şi obţinem

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0.$$

Rezolvând ecuaţia cu recurenţe (căutând soluţii de forma $y_n = a^n$) obţinem ecuaţia (caracteristică) $a^2 - a - 2 = 0$. Deci

$$y_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n.$$

Condiţiile iniţiale devin $y_0 = \ln 1 = 0$ şi $y_1 = \ln 1/2$. Folosind aceste condiţii deducem

$$C_1 = -\frac{\ln 2}{3}, \quad C_2 = \frac{\ln 2}{3}.$$

Atunci obţinem

$$y_n = \frac{\ln 2}{3}((-1)^n - 2^n),$$

iar şirul x_n este

$$x_n = \left(e^{\ln \sqrt[3]{2}}\right)^{(-1)^n - 2^n} = 2^{-\dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}.$$

Rezultă că şirul x_n are limita 0.

5. a) Se arată prin inducţie că şirul $a_n \in (0,1)$. Dacă $x \in (0,1)$ are loc inegalitatea $2^x < x + 1$, de unde deducem că $a_{n+1} < a_n$. Deci şirul este convergent, iar limita este 0.

b) Folosim criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2 < 1,$$

deci seria este convergentă.

6. Scriem sub forma matriceală

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Matricea A admite forma diagonală $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2/5 \end{pmatrix}$ unde matricea de schimbare de bază este $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Are loc $CDC^{-1} = A$ şi

$A^n = CD^nC^{-1}$, unde $C^{-1} = -1/7 \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Efectuând calculele avem

$$\begin{array}{l} x_n = 1/7\,(4a + 3b + 3(a-b)(-2/5)^n) \\ y_n = 1/7\,(4a + 3b - 4(a-b)(-2/5)^n) \end{array}.$$

Din condiţia că seriile sunt convergente, urmează în mod necesar că $4a + 3b = 0$ şi calculând suma seriilor geometrice se constată că raportul cerut este -3/4.

7. a) Are loc descompunerea termenului general

$$\frac{1-k}{k^3 + 6k^2 + 11k + 6} = \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{2}{k+3}$$

de unde rezultă că şirul este convergent la $-\dfrac{1}{6}$.

8. Are loc următoare majorare, dacă folosim inegalitatea mediilor

$$\frac{\sqrt{a}_n}{n^\alpha} = \sqrt{\frac{a_n}{n^{2\alpha}}} \le \frac{a_n + \dfrac{1}{n^{2\alpha}}}{2}.$$

Folosind criteriul comparaţiei şi observând că pentru $\alpha > 1/2$ seria armonică generalizată converge, rezultă afirmaţia dorită.

9. Pentru $a \in \mathbf{R}$ fixat funcţia $|x - a|$ este convexă. Dacă fixăm $x_2, x_3, \cdots, x_n$, funcţia este o sumă de funcţii convexe, deci convexă (în x_1). Valoarea maximă se atinge atunci în extremităţi adică $\{0, 1\}$. Analog $x_i \in \{0, 1\}$. Presupunem că p numere sunt 0 şi $n - p$ sunt 1. Suma este $p(n - p)$ şi ca funcţie de p are maxim în $p = \dfrac{n}{2}$.

Dacă n este număr par, atunci $p \in \mathbf{N}$ şi are valoarea maximă $\dfrac{n^2}{2}$.

Dacă n este număr impar funcţia are maxim în $p = \dfrac{n \pm 1}{2}$ şi acesta este $\dfrac{n^2 - 1}{4}$.

10. Din $f''(0) = a \neq 0$ rezultă că f' este strict monotonă într-o vecinătate a originii şi $f'(x) \neq 0$, dacă $x \neq 0$. Din $f'(x) \neq 0$ rezultă analog că $f(x) \neq 0$ dacă $x \neq 0$ şi deci fracţia este corect definită. Dacă $x \neq 0$ funcţia g este

$$g(x) = \frac{(f')^2 - 2ff''}{2(f')^2\sqrt{f}}.$$

Din formula lui Taylor aplicată funcţiilor f, f', f'' deducem dezvoltările limitate

$$f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$f'(x) = ax + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$f''(x) = a + bx + o(x)$$

unde $o(f)$ este funcţia h (definită într–o vecinătate a lui 0), care are proprietatea că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0$.

Înlocuim in expresia lui g:

$$g(x) = \frac{(ax + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2))^2 - 2(\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{6}x^3 + o(x^3))(a + bx + o(x))}{2(ax + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2))^2\sqrt{\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{6}x^3 + o(x^3)}}$$

care după efectuarea calculelor devine

$$\frac{-\frac{b}{3}ax^3 + o(x^3)}{2x^2|x|(a + \frac{b}{2}x + o(x))^2\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{b}{6}x + o(x)}}.$$

Deducem că

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \frac{-\sqrt{2}b}{6a\sqrt{a}}, \quad \lim_{x\nearrow 0} g(x) = \frac{\sqrt{2}b}{6a\sqrt{a}}$$

iar saltul este $\dfrac{-\sqrt{2}b}{3a\sqrt{a}}$

11. Dacă $x = a$ sau $x = b$ relaţia este evidentă.

Definim funcţia $h : [a, b] \to \mathbf{R}$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)} & x \neq a \\ f'(a) & x = a. \end{cases}$$

Funcţia h este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pentru $x \in (a, b)$ iar

$$h'(x) = \frac{(x - a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}, \quad \forall x \in (a, b).$$

Deci pentru orice $x \in (a, b)$ există $\xi_1 \in (x, b)$ astfel ca

$$h(x) - h(b) = h'(\xi_1)(x - b) \quad (*).$$

Aplicăm dezvoltarea funcţiei f în $y \in (a, b)$ cu rest Lgrange există $\xi_2 \in (a, y)$ astfel ca

$$f(a) = f(y) + (a - y)f'(y) + \frac{(a - y)^2}{2} f''(\xi_2).$$

Fie $x \in (a, b)$ şi $\xi_1 \in (x, b)$ care verifică (**??**). Fie $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ ales pentru $y = \xi_1$. Astfel avem

$$h'(\xi_1) = \frac{h(x) - h(b)}{x - b} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x - b} =$$

$$\frac{(f(x) - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)}{(x - a)(x - b)}.$$

Dar, dacă folosim (*)

$$h'(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - a)f'(\xi_1) - (f(\xi_1) - f(a))}{(\xi_1 - a)^2} = \frac{f''(\xi_2)}{2},$$

de unde deducem afirmaţia problemei.

12. a) Din definiţie, rezultă că orice şir din mulţimea S are proprietatea $0 < x_k < 1$; deci are loc $0 < x_k^2 < x_k$, de unde $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 < \lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

b) Fie $a \in (0,1)$ astfel şi şirul $x_k = (1-a)a^{k-1}$ aparţine mulţimii S. Atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k^2 = \dfrac{(1-a)^2}{1-a^2}$. Pentru $\alpha \in (0,1)$, punând condiţia $\alpha = \dfrac{1-a}{1+a}$, rezultă că alegând $a = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ obţinem şirul căutat.

13. Observăm că dacă luăm $t = 0$ în condiţia din definiţie, avem $f(0) = 0$.

a) Calculăm derivata funcţiei cu definiţia

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^x f(t) + e^t f(x) - f(x)}{t}.$$

Aplicând l'Hôpital, limita anterioară este

$$e^x f'(0) + f(x) = e^x + f(x).$$

b) Derivata funcţiei g rezultă imediat 0 şi cum $g(0) = f(0) = 0$ deducem că $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) Din afirmaţia precedentă rezultă $f(x) = xe^x$.

14. a) Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[n, n+1]$ şi rezultă că există $\xi \in (n, n+1)$ astfel ca $F(n+1) - F(n) = F'(\xi) > F'(n) = e^{n^2}$

b) Folosim inegalitatea precedentă şi avem

$$\begin{gathered} F(n+1) - F(n) > e^{n^2} \\ F(n) - F(n-1) > e^{(n-1)^2} \\ \dots \\ F(1) - F(0) > 1 \end{gathered}$$

de unde după sumare deducem afirmaţia.

c) Aplicăm regula lui l'Hôpital şi avem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xF(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{x^2}}{F(x) + xe^{x^2}} = 2,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{xe^{x^2}} = 0$.

d) Aplicând succesiv regula lui l'Hôpital limitei

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(F(x))^{\frac{F(x)}{xf(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)\ln F(x)}{xf(x)}$$

se obţine limita $\frac{1}{2}$.

15. Din inegalitatea mediilor obţinem că $5n-4 \geq n^2$ de unde deducem că $n \in \{1,2,3,4\}$. Analizând cele 4 cazuri obţinem

$n = 1,\quad p_1 = 1$

$n = 3,\quad (p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 6)$ şi toate permutările.

$n = 4,\quad (p_1, p_2, p_3, p_4) = (4, 4, 4, 4)$

16. Pentru $a = 1$ avem din ipoteză $\frac{1}{b} < \sqrt{7}$ deci $b \geq \frac{1}{\sqrt{7}}$. Deoarece b este număr întreg, rezultă $b > 1$. Condiţia ce trebuie arătată este $\frac{2}{b} < \sqrt{7}$, care revine la inegalitatea evidentă $b \geq 1 > \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Presupunem că $a > 1$. Trebuie arătat că $\frac{a^2+1}{a} < \sqrt{7}b$. Prin ridicare la pătrat relaţia este echivalentă cu

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} < 7b^2. \quad (*)$$

Din ipoteză $a^2 < 7b^2$, iar $a^2 \in \mathbf{Z}$, rezultă că $a^2 + 1$ poate fi cel mult $7b^2$. Dacă $a^2 + 1 < 7b^2$, atunci $a^2 + 2$ poate fi cel mult $7b^2$. Arătăm că

$$a^2 + 1 \neq 7b^2, \quad a^2 + 2 \neq 7b^2. \quad (**)$$

Dacă $a = 7k + r$, $r \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$ atunci $r^2 \in \{-3, 0, 1, 2\}$ şi se observă că $a^2 + 1$ şi $a^2 + 2$ nu au restul 0.

Deoarece am demonstrat (**) urmează că $a^2 + 2 < 7b^2$ şi prin adăugarea numărului subunitar $\frac{1}{a^2}$ inegalitatea se păstrează. Deci (*) este adevărată.

17. Fie M mulţimea celor 10 numere. Fie

$$s : \mathcal{P}^*(M) = \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbf{N}, \quad s(A) = \text{ suma elementelor lui } A.$$

Se observă că suma ia valori în mulţimea $[0, 1000] \cap \mathbf{N}$. Pe de altă parte $\mathcal{P}^*(M)$ are $2^{10} - 1 = 1023$ elemente; deci s nu este injectivă.

18. Vom folosi succesiv cunoscuta inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ şi obţinem

$$x^{16} + y^{16} + z^{16} \geq (xy)^8 + (yz)^8 + (zx)^8 \geq (xyz)^4(y^4 + z^4 + x^4) \geq$$

$$\geq (xyz)^4((yz)^2 + (yx)^2 + (xy)^2) \geq (xyz)^5(x + y + z).$$

19. Dacă adunăm şi scădem relaţiile obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 \\ \dfrac{1}{y} = 5x^4 + 10x^2y^2 + y^4. \end{cases}$$

Dacă înmulţim prima ecuaţie cu x a doua cu y şi adunăm apoi scădem relaţiile deducem

$$\begin{cases} 3 = (x + y)^5 \\ 1 = (x - y)^5 \end{cases}$$

de unde soluţia este

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt[5]{3} + 1), \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt[5]{3} - 1)$$

20. Vom arăta că polinomul p este de grad 1. Observăm că polinomul p are proprietăţile:

p nu poate fi un polinom constant: dacă $p(x) = c$, $\forall x \in \mathbf{C}$ atunci pe de o parte $p(0) = c$ implică $c \in \mathbf{R}$; pe de altă parte $p(i) = c \in \mathbf{R}$ ar conduce la $i \in \mathbf{R}$, ceea ce duce la o contradicţie.

Arătăm mai întâi că p are toate rădăcinile reale: într-adevăr dacă $\alpha \in \mathbf{C}$ este o rădăcină, $p(\alpha) = 0 \in \mathbf{R}$ şi ipoteza implică $\alpha \in \mathbf{R}$. Astfel

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$$

cu $x_k \in \mathbf{R}$. Fie $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; prin ipoteză $p(x) \in \mathbf{R}$. Ceilalţi factori fiind nenuli, urmează $a_n \in \mathbf{R}$. Adică p are toţi coeficienţii reali.

Presupunem $a_n > 0$. Dacă p ar fi de grad par, atunci $\lim\limits_{x \to \pm\infty} p(x) = +\infty$. Urmează că $m = \inf\{p(x) | x \in \mathbf{R}\} > -\infty$. Considerăm polinomul $q(x) = p(x) - m + 1$. Polinomul q satisface şi el ipoteza $q(x) \in \mathbf{R}$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbf{R}$. Dar q nu are nici o rădăcină reală şi se obţine o contradicţie.

Să analizăm cazul p este de grad impar. Avem $\lim p(x) = +\infty$. Notând $M = \sup\{p(x) | x \in \mathbf{R}\} < +\infty$, urmează că polinomul $q(x) = p(x) - M - 1$ are exact o rădăcină reală. Deci q este de grad 1 şi la fel va fi p.

21. Se observă că
$$A = \alpha I_n + \beta E_n,$$
iar dacă scriem $\dfrac{1}{\beta + \alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{-\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}$ obţinem
$$B = \frac{-\alpha}{\beta(\alpha + \beta)} I_n + \frac{1}{\beta} E_n.$$
Calculăm determinantul lui A prin transformări elementare şi avem
$$\det(A) = (-1)^{n+1} (\alpha + n\beta) \alpha^{n-1}.$$
Înlocuind α cu $\dfrac{-\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}$ şi β cu $\dfrac{1}{\beta}$ obţinem
$$\det(B) = \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^n (\alpha + \beta)^n} \left((n-1)\alpha + n\beta\right).$$
Deci A este inversabilă dacă şi numai dacă $\alpha \neq 0$ şi $\alpha + \beta n \neq 0$. B este inversabilă dacă şi numai dacă $\alpha \neq 0$ şi $(n-1)\alpha + \beta n \neq 0$.

22. Aplicând determinantul obţinem
$$\det(AB) \neq 0.$$

Presupunem că $\det(B) \neq 0$ şi deducem

$$I_n - BA = B(I_n - AB)B^{-1}.$$

Rezultă

$$\det(I_n - BA) = \det B \det(I_n - AB) \det B^{-1} =$$

$$= \det(I_n - AB) = \det(2I_n) = 2^n.$$

23. Din inegalitatea mediilor deducem

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

şi

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq n\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}.$$

Prin înmulţire, găsim prima afirmaţie.

Pentru a doua, fie $a_i = s - x_i$. Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)s.$$

Urmează să aplicăm prima inegalitate pentru numerele a_i şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

de unde deducem imediat

$$(n-1)s\left(\frac{1}{s-x_1} + \cdots + \frac{1}{s-x_n}\right) \geq n^2$$

24. Presupunem că matricea A este inversabilă şi amplificăm prima relaţie cu A^{-1} la stânga şi cu A la deapta. Obţinem

$$BA = A^{-1}B^2A^3 + I_n.$$

Dar dacă folosim şi a doua relaţie obţinem

$$BA = -A^{-1}B^5 + I_n.$$

Pentru a demonstra relaţia din enunţ este suficient să arătăm că

$$-A^{-1}B^5 = A^2B^2.$$

Aceasta rezultă adevărată dacă o amplificăm la dreapta cu A şi folosim a doua relaţie din enunţ.

25. a) Afirmaţia rezultă prin inducţie. Pentru $k = 1$ este definiţia. Apoi

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB - BA)B^k + B(AB^k - B^kA) =$$

$$= CB^k + kBB^{k-1}C = CB^k + kB^kC = (1 + k)B^kC.$$

b) Din punctul a), rezultă că pentru orice polinom q are loc

$$Aq(B) - q(B)A = q'(B)C. \tag{1}$$

unde q' este derivata polinomului. Dacă în particular luăm polinomul caracteristic, p şi folosim $p(B) = 0$ rezultă $O_n = Ap(B) - p(B)A = p'(B)C$ de unde

$$O_n = p'(B)C. \tag{2}$$

Aplicăm 1 pentru p' şi avem

$$Ap'(B) - p'(B)A = p''(B)C$$

de unde prin înmulţire prin C şi folosind relaţia 2 deducem $O_n = p''(B)C^2$. Prin inducţie deducem

$$p^{(k)}(B)C^k = O_k$$

de unde obţinem, în particular, relaţia $n!C^n = O_n$

26. a) Scriem relaţia din enunţ sub forma

$$AB - 2A - 3B + 6I_n = 6I_n$$

care este echivalentă cu

$$(A - 3I_n)(B - 2I_n) = 6I_n.$$

Dacă aplicăm determinantul peste produs obţinem

$$\det(A - 3I_n)\det(B - 2I_n) = 6^n.$$

Rezultă că matricele $A - 3I_n$ şi $B - 2I_n$ au determinantul nenul, deci au rangul n.

b) Scriind relaţia din enunţ sub forma

$$(A - 3I_n)B = 2A$$

deducem

$$\det(A - 3I_n)\det(B) = \det(2A) = 2^n \det(A).$$

Din

$$\text{rang}A = \text{rang}((A - 3I_n)B) \le \min(\text{rang}(A - 3I_n), \text{rang}B) = \text{rang}(B)$$

rezultă $\text{rang}(A) \le \text{rang}(B)$. Analog din

$$A(B - 2I_n) = 3B$$

deducem

$$\text{rang}(B) \le \min(\text{rang}(A),\ \text{rang}(B - 2I_n)) = \text{rang}(A).$$

27. a) Din relaţia $2 = \text{rang}(AB) \le \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ şi din faptul că $\text{rang}(A) \le 2, \text{rang}(B) \le 2$, deducem că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 2$.

b) Fie λ valoare proprie a matricei BA, corespunzătoare vectorului propriu $x \neq \overline{0}$. Atunci are loc

$$BAx = \lambda x. \tag{3}$$

Deoarece $\text{rang}(A) = 2$ şi $x \neq \overline{0}$, rezultă că $Ax \neq \overline{0}$. Înmulţim * cu matricea A şi obţinem $A(BAx) = \lambda Ax$, deci λ este valoare proprie pentru AB.

Matricea BA are valorile proprii $5 \pm 3i$, deci acestea sunt valori proprii şi pentru AB; deoarece $\text{rang}(A) = 2$, deducem că $\lambda = 0$ este de asemenea valoare proprie pentru AB, cu ordinul de multiplicitate 2.

28. a) A simetrică $\Rightarrow$ A diagonalizabilă $\Rightarrow$ $\exists$ o bază ortonormată $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ formată din vectori proprii ai matricei A. Atunci

$$\forall x \in \mathbf{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i,$$

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle Av_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \lambda_i v_i,$$

$$x^T Ax = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, v_i \rangle x^T v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, v_i \rangle^2$$

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, v_i \rangle^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle^2 .$$

Dar $\sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle^2 = \|x\|^2$, de unde rezultă că

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2, \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

b) Forma pătratică $x^T \left(A^T A\right) x = \|Ax\|^2 \geq 0$, deci toate autovalorile λ_i sunt ≥ 0. La fel, toate autovalorile μ_i sunt ≥ 0. În plus, avem şi inegalităţile

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2, \quad \mu_1 \|x\|^2 \leq \|Bx\|^2 \leq \mu_n \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}_n.$$

Fie v un vector propriu pentru AB, corespunzător autovalorii *reale* ρ, adică $(AB)\,v = \rho v$, $v \neq \theta$. Avem

$$\|(AB)\,v\|^2 = \|A\,(Bv)\|^2 \leq \lambda_n \|Bv\|^2 \leq \lambda_n \mu_n \|v\|^2$$

care implică $\rho^2 \|v\|^2 \leq \lambda_n \mu_n \|v\|^2$, deci $\rho^2 \leq \lambda_n \mu_n$. Asemănător, se găseşte şi inegalitatea $\lambda_1 \mu_1 \leq \rho^2$.

c) Întradevăr, în acest caz AB este simetrică, deci are toate autovalorile ρ_j reale, $A^T A = A^2$, $B^T B = B^2$, cu valorile proprii λ_i^2, μ_i^2, $i = \overline{1,n}$. Dar λ_i şi μ_i, $i = \overline{1,n}$ nu mai sunt, în general, numerotate în ordinea crescătoare. Putem scrie şi altfel

$$(\min|\lambda_i|)\,(\min|\mu_i|) \leq |\rho_j| \leq (\max|\lambda_i|)\,(\max|\mu_i|)\,, \quad j = \overline{1,n}.$$

29. a) Se ştie că dacă P este polinomul caracteristic este

$$P(\lambda) = \det(X - \lambda I_2) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(X)\lambda + \det(X)$$

şi $P(-1) = P(-1)$ revine la $\operatorname{tr}(X) = 0$.

b) Din condiţia $\det(A^{2010} + I_2) = \det(A^{2010} - I_2)$ şi punctul a), deducem $\operatorname{tr}(A^{2010}) = 0$, iar din teorema Cayley Hamilton avem $A^2 = -\det(A) I_2$ şi $A^{2010} = -\det^{1005}(A) I_2$. Urmează $\operatorname{tr}(A^{2010}) = -2\det^{1005}(A) = 0$, de unde $\det(A) = 0$ şi $A^2 = O_2$.

30. a) Prin adunarea tuturor liniilor la prima, deducem

$$P(\lambda) = (3 + a - \lambda)(1 - a - \lambda)(\lambda^2 - (a-1)^2).$$

b) Dacă $a = -1$ găsim faptul că $\lambda = 2$ este rădacină cu ordinul de multiplicitate 3, iar cealaltă rădacină este $\lambda = -2$. Spaţiul vectorilor proprii corespunzător valorii proprii$\lambda = -2$ este $\{(\alpha+\beta, \alpha, \beta, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$.

31. a) Se observă că transformarea liniară duce o matrice oarecare într-una simetrică, deci nu poate fi surjectivă şi cum spaţiul este de dimensiune finită, rezultă că nu poate fi nici injectivă.

b) Matricea in baza dată este

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Valorile proprii sunt $\lambda = 2$, cu ordinul de multiplicitate 3 şi $\lambda = 0$. Pentru $\lambda = 2$ valorile proprii sunt $\{(\alpha, \beta, \beta, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$, iar pentru $\lambda = 0$, valorile proprii sunt $\{(0, \beta, -\beta, 0), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$.

d) Se poate arăta prin inducţie că puterea n a matricei M este

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

32. Un punct $A \in (P)$ are forma $A(\alpha, \beta, -\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar $B \in (D)$ este de forma $B(\gamma, \gamma - 1, 1 - \gamma),\ \gamma \in \mathbf{R}$. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este de forma

$$\overrightarrow{AB} = (\gamma - \alpha)\,\overrightarrow{i} + (\gamma - \beta - 1)\,\overrightarrow{j} + (1 - \gamma + \beta)\,\overrightarrow{k}.$$

Din ipoteză rezultă

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = 2 \\ \gamma - \beta - 1 = -1 \\ 1 - \gamma + \beta = 1. \end{cases}$$

Sistemul compatibil nedeterminat are soluţia $\alpha = \gamma - 2, \beta = \gamma$; deci punctul A are coordonatele $A(\gamma - 2, \gamma, -\gamma)$. Locul geometric cerut este dreapta

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

33. Fie a_n numărul maxim de puncte cu proprietatea din enunţ şi fie $M_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_{a_n}\}$ punctele corespunzătoare. Notăm sfera unitate

$S_{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1.\}$. Dacă $X, Y \in S_{n-1}$, din condiţia $d^2(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 > 2$, deducem că $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k < 0$.(**)

Dacă $X = A_1(-1, 0, \ldots, 0)$ este unul dintre puncte, pentru orice $Y \in S_{n-1}$, din condiţia (**) deducem că $y_1 > 0$. Fie $X, Y \in M_n \setminus \{A_1\}$, de forma $X = (x_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, $Y = (y_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$; din **??** şi faptul că $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ rezultă $x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} \overline{x}_k \overline{y}_k < 0$. Obţinem deci $\sum_{k=2}^{n} \overline{x}_k \overline{y}_k < 0$ şi de asemenea $\sum_{k=2}^{n} x'_k y'_k < 0$, unde $x'_k = \dfrac{\overline{x}_k}{\sqrt{\sum (\overline{x}_k)^2}}$, $y'_k = \dfrac{\overline{x}_k}{\sqrt{\sum (\overline{y}_k)^2}}$. Urmează că $(x'_2, \ldots, x'_n), (y'_2, \ldots, y'_{n-1}) \in S_{n-2}$. Deducem că $a_n \leq 1 + a_{n-1}$ şi deoarece $a_1 = 2$ rezultă că $a_n \leq 1 + n$. Arătăm că $a_n = n + 1$, construind o mulţime de $n + 1$ elemente care satisface condiţia problemei. Acestea sunt

$$A_1 = (-1, 0, \ldots, 0), A_2 = \left(\frac{1}{n}, -c_1, 0, \ldots, 0\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, c_1, -c_2, 0, \ldots, 0\right)$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} c_1, \frac{1}{n-2} c_2, -c_3, 0, \ldots, 0\right) \ldots$$

$$A_{n-1} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} c_1, \frac{1}{n-2} c_2, \frac{1}{n-3} c_3, \ldots, -c_{n-2}, 0\right)$$

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} c_1, \frac{1}{n-2} c_2, \frac{1}{n-3} c_3, \ldots, \frac{1}{2} c_{n-2}, -c_{n-1}\right)$$

$$A_{n+1} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} c_1, \frac{1}{n-2} c_2, \frac{1}{n-3} c_3, \ldots, \frac{1}{2} c_{n-2}, c_{n-1}\right)$$

unde

$$c_k = \sqrt{(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n-k+1})}, \; k = 1, \ldots, n-1.$$

Din relaţiile

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} c_1^2 + \cdots + \frac{1}{(n-k)^2} c_k^2 - \frac{1}{n-k+1} c_{k+1}^2 = -\frac{1}{n}$$

şi

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}c_1^2+\cdots+\frac{1}{(n-k)^2}c_k^2+c_{k+1}^2=1$$

deducem $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = -\frac{1}{n} < 0$ şi $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$. Distanta dintre oricare din aceste puncte este $\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} > \sqrt{2}$.

Observăm că pentru $n = 2$ punctele formează un triunghi echilateral, iar pentru $n = 3$ un tetraedru regulat.

34. Notăm n numărul de cercuri, cu r_i respectiv d_i raza respectiv diametrul cercului i. Din ipoteză avem condiţia

$$8=\sum 2\pi r_i=\pi\sum d_i$$

unde d_i este un diametru, care evident este mai mic decât 1. Rezultă că

$$8 \leq n\pi$$

deci $n \geq 3$, iar $\sum d_i > 22,5$. Dacă două dintre cercuri sunt secante, rezultă că unind de exemplu mijlocul coardei comune cu centrul celui de al treilea cerc, avem o direcţie si totodată o infinitate de drepte paralele cu ea, care intersectează cele 3 cercuri.

Cazul cel mai general este al cercurilor care nu au puncte comune. Deoarece suma diametrelor este mai mare decât 2 proiectând diametrele pe o latură a pătratului acoperim de două ori latura, iar restul diametrelor se proiectează pe segmente ce se vor suprapune peste segmentele din cele două şiruri anterioare. Deci există cel puţin 3 diametre ale căror proiecţii se suprapun şi care dau soluţia problemei.

35. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic format cu centrul cercului dat şi jumătatea coardei, rezultă că centrul cercului concentric este de $\sqrt{10}$. Atunci aria coroanei circulare este 9π.

Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti

1. a) Deoarece avem $x' = 1 - \text{ch}^2\, t - \text{sh}^2 t = -2\ \text{sh}^2 t$, $\quad y' = 2\ \text{sh}\ t$; $x'' = -4\ \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t$, $y'' = 2\ \text{ch}\ t$, se obţine imediat raza de curbură în M

$$R = \frac{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|x'\,y'' - x''y'|} = \frac{(4\ \text{sh}^4 t + 4\ \text{sh}^2 t)^{\frac{3}{2}}}{4\ \text{ch}\ t\ \text{sh}^2\ t} = 2\ \text{ch}^2 t\ \ |\ \text{sh}\ t\ | .$$

b) Ecuaţia tangentei în M la curbă este:

$$\frac{x - t + \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t}{-2\ \text{sh}^2 t} = \frac{y - 2\ \text{ch}\ t}{2\ \text{sh}\ t},$$

iar ecuaţia normalei în M

$$(x - t + \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t)(-2\ \text{sh}^2 t) + (y - 2\ \text{ch}\ t)2\ \text{sh}\ t = 0.$$

c) Pentru $y = 0$ în cele două ecuaţii de mai sus, se obţin punctele $T\ (t + \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t, 0)$, respectiv $N\ \left(t - \text{sh}\ t\ \text{ch}\ t - 2\frac{\text{ch}\ t}{\text{sh}\ t}, 0\right)$ şi prin urmare avem:

$$\left\|\overrightarrow{MT}\right\| = 2\ \text{ch}^2 t \quad \text{şi} \quad \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = 2\ \frac{\text{ch}^2 t}{|\ \text{sh}\ t\ |}.$$

Cum $\left\|\overrightarrow{MC}\right\| = R$ relaţia cerută este verificată.

2. Deoarece avem $x' = 1 - \cos t$, $y' = \sin t$, $z' = 2\ \cos\ \frac{t}{2}$, se obţine imediat elementul de arc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2}} = 2.$$

Notând cu $M = \overrightarrow{r}(t)$ un punct curent al curbei (C) avem $\frac{d\overrightarrow{r}}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ şi prin urmare:

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \frac{1}{4}\left(\sin t, \cos t, -\sin\frac{t}{2}\right).$$

Dacă N este punctul corespunzător lui M de pe noua curbă vom avea: $\overrightarrow{MN} = 4\ k\ \overrightarrow{\nu}$, unde k este curbura curbei (C) în punctul M iar $\overrightarrow{\nu}$ este versorul normalei principale în M.

În continuare vom nota prin $\overrightarrow{\rho}$ vectorul de poziţie al punctului N şi utilizând prima formulă a lui Frenet se obţine:

$$\overrightarrow{\rho}(t) = \overrightarrow{r}(t) + 4\ \frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2} = \left(t, 1, 3\sin\ \frac{t}{2}\right).$$

Aşadar, noua curbă este situată în planul de ecuaţie: $y = 1$, care este chiar planul osculator în orice punct al să u.

3. a) Inlocuind $z = 4 - y$ în prima ecuaţie a curbei (C) se obţine: $x^2 + 2(y-2)^2 = 8$ şi prin urmare se poate folosi, pentru $t \in [0, 2\pi]$, parametrizarea

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\ \cos\ t \\ y = 2 + 2\ \sin\ t \\ z = 2 - 2\ \sin\ t \end{cases}$$

b) Pentru punctul $M(0,4,0)$ se obţine $t = \dfrac{\pi}{2}$ şi cum avem:

$$\begin{cases} x' = -\ 2\sqrt{2}\ \sin\ t \\ y' = 2\ \cos t \\ z' = -2\ \cos\ t \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = -2\sqrt{2}\ \cos\ t \\ y'' = -\ 2\ \sin\ t \\ z'' = 2\ \sin\ t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\ \sin\ t \\ y = -\ 2\ \cos\ t \\ z = 2\ \cos\ t \end{cases},$$

ecuaţiile tangentei la (C) în punctul M sunt de forma: $y = 4$, $z = 0$.

Ecuaţia planului osculator în M este:

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

adică $y + z = 4$. Prin urmare ecuaţiile binormalei la curba (C) în punctul M sunt: $x = 0$, $y - z = 4$.

c) Deoarece $A = 0$, $B = C = 4\sqrt{2}$ se obţine imediat curbura în M $k = \dfrac{\sqrt{32+32}}{(8)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{8}{16\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, iar torsiunea în M este

$$T = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Curba C este de fapt un cerc în spaţiu, cu raza $2\sqrt{2}$ şi torsiunea nulă.

4. a) Vom nota $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_2\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$; ţinând seama de ipoteză se obţine:

$$T(\overrightarrow{v}) = \cos\alpha\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{a}$$

şi atunci avem

$$\overrightarrow{c}\cdot T(\overrightarrow{v}) = \cos\alpha\,(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{v})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}) =$$

$$= \cos\alpha\,(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{v}) - \cos\alpha\,(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{v}) = 0$$

pentru orice $\overrightarrow{v} \in V_3$.

b) Pentru a determina matricea asociată lui T în raport cu baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vom calcula

$$T(\overrightarrow{i}) = (\cos\alpha - a_1c_1, -a_2c_1, -a_3c_1),$$

$$T(\overrightarrow{j}) = (-a_1c_2, \cos\alpha - a_2c_2, -a_3c_2),$$

$$T(\overrightarrow{k}) = (-a_1c_3, -a_2c_3, \cos\alpha - a_3c_3);$$

atunci ecuaţia caracteristică ataşată lui T este

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - a_1c_1 - \lambda & -a_1c_2 & -a_1c_3 - a_1c_2 \\ -a_2c_1 & \cos\alpha - a_2c_2 - \lambda & -a_2c_3 \\ -a_3c_1 & -a_3c_2 & \cos\alpha - a_3c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tinând seama că $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \cos\alpha$ se obţine în final: $\lambda^3 - 2\ \lambda^2 \cos\alpha + \lambda\ \cos^2\alpha = 0$; aşadar valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \cos\alpha$.

Pentru a găsi subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 0$ trebuie rezolvat sistemul următor:

$$\begin{cases} (\cos\alpha - a_1c_1)\ x - a_1c_2\ y - a_1c_2\ z = 0 \\ -a_2c_1\ x + (\cos\alpha - a_2c_2)\ y\ - a_2c_3\ z = 0 \\ -a_3c_1\ x\ - a_3c_2\ y + (\cos\alpha - a_3c_3)\ z = 0; \end{cases}$$

pentru $\cos\alpha \neq 0$ se obţine, de exemplu

$$V = \left\{ \frac{y}{a_2}\ \overrightarrow{a}\ \mid y \in \mathbf{R},\ a_2 \neq 0 \right\}$$

adică o mulţime de vectori coliniari cu $\overrightarrow{a}$.

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = \cos\alpha$ este de forma

$$U = \left\{ (x, y, -\frac{c_1x + c_2y}{c_3}) \mid c_3 \neq 0 \right\}.$$

c) Pentru $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}\Big| k \in \mathbf{Z}$ valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi cum $\dim U = 2$ rezultă că transformarea liniară T nu este diagonalizabilă.

5. a) Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sau $\lambda\ (\lambda - 6)(\lambda - 1)^2 = 0$; atunci valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 6$. Pentru a determina subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 1$ trebuie rezolvat sistemul

$$\begin{cases} t = 0 \\ x - 2\ z = 0 \end{cases}$$

şi se obţine $V = \{(2\,x, y, x, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 0$ este $\{(-\,x, 0, 2x, x)\,|x \in \mathbf{R}\}$, iar cel corespunzător valorii proprii $\lambda = 6$ este de forma $\{(x, 0, -2\,x, 5\,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

b) Deoarece $\lambda = 1$ este rădăcină dublă a polinomului caracteristic ataşat lui T şi $\dim V = 2$ rezult ă că transformarea liniară T este diagonalizabilă; forma diagonală cerută este

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vom alege în subspaţiile proprii determinate mai sus următorii vectori ortogonali doi câte doi:

$$v_1 = (2, 0, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, 0, 0),\ v_3 = (-1, 0, 2, 1),\ v_4 = (1, 0, -2, 5);$$

după normarea lor se obţine baza ortonormată căutată

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 0, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 0, -2, 5) \right\}.$$

c) Folosind formula:

$$D = C^{-1}\ A\ C$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

obţinem:

$$A^{2002} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{2002} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

6. a) Dacă $M\,(a,b,c)\in A$ atunci

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+b^2+(c-2)^2=3 \end{cases}$$

Ecuaţiile dreptei determinate de originea O şi de punctul $M\,(a,b,c)$ sunt

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Putem presupune că $a\neq 0$. cazul $a=0$ se tratează separat. Introducând $y=\frac{bx}{a}$, $z=\frac{cx}{a}$ în a doua relaţie şi ţinând seama că $a^2+b^2=c^2$ se obţine ecuaţia:

$$\frac{2c^2}{a^2}x^2-4\frac{c}{a}x+1=0$$

cu soluţiile $x=\dfrac{a(2\pm\sqrt{2})}{2c}$; atunci $y=\dfrac{b(2\pm\sqrt{2})}{2c}$ şi $z=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Cele două cercuri sunt situate în planele de ecuaţii $z=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$; centrele lor sunt punctele $C_1(0,0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2})$ şi $C_2(0,0,\dfrac{2-\sqrt{2}}{2})$, iar razele sunt $R_1=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, respectiv $R_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

7. a) Pentru a utiliza metoda transformărilor ortogonale se consideră matricea asociată formei pătratice Qîn raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

atunci ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

adică $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = 0$. Soluţiile ei sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ şi deci obţinem următoarea formă canonică a lui Q:

$$Q(X) = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 - (u')^2,$$

unde $X = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3 + u'v_4$, iar $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este baza cerută.

Subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 1$ este $\{(x, x, z, z)\}$, iar cel corespunzător lui $\lambda = -1$ este $\{(x, -x, z, -z)\}$; atunci se pot alege vectorii $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, -1)$ care formează baza ortogonală cerută.

Altă metodă. Pentru a reduce forma pătratică Q la forma canonică vom folosi metoda lui Gauss şi anume notând:

$$x = a + b,\ y = a - b,\ z = c + d,\ u = c - d$$

rezultă $Q = 2\ a^{\ 2} - 2\ b^{\ 2} + 2\ c^{\ 2} - 2\ d^{\ 2}$.

b) Se obţine imediat $v = (1, 1, 1, 1) = v_1 + v_2$.

c) Deoarece F este pozitiv definită avem $F(x+\lambda y,\ x+\lambda y) \geq 0$ pentru orice x, $y \in V$ şi orice $\lambda \in \mathbf{R}$; dar

$$F(x + \lambda y, x + \lambda y) = F(x, x) + 2\lambda F(x, y) + \lambda^2 F(y, y)$$

deoarece forma biliniară F este simetrică. Prin urmare avem

$$\lambda^2 F(y, y) + 2\lambda F(x, y) + F(x, x) \geq 0 \text{ pentru orice } \lambda \in \mathbf{R};$$

de unde rezultă că discriminantul trinomului precedent este:

$$(F(x, y))^2 - F(x, x)F(y, y) \leq 0 \text{ pentru orice } x, y \in V.$$

8. a) Sistemul omogen este

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$

şi atunci avem:

$$S = \{(x, -x, z, -z)\,|x, z \in \mathbf{R}$$

Se obţine imediat atât o bază ortonormată a lui S:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)\right\}$$

cât şi complementul său ortogonal $S^{\perp}$ care este de forma

$$S^{\perp} = \{(x, x, z, z)\mid x, z \in \mathbf{R}$$

b) Deoarece nucleul lui T este tocmai subspaţiul S din $\mathbf{R}^4$ avem că $\operatorname{def} T = \dim\ \operatorname{Ker} T = 2$ şi deci T nu este izomorfism. Pe de altă parte, vom aplica teorema rang-defect pentru a calcula

$$\text{rang } T = \dim\mathbf{R}^4 - def\ T = 4 - 2 = 2.$$

c) Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0$, iar soluţiile ei (valorile proprii ale lui T) sunt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

Atunci subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 0$ este chiar S, iar subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$ este tocmai $S^{\perp}$.

Cum $\lambda = 0$ şi $\lambda = 2$ sunt rădăcini duble ale polinomului caracteristic ataşat lui T, iar $\dim S = \dim S^{\perp} = 2$ rezultă că transformarea liniară T este diagonalizabilă; forma diagonală cerută este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. a) Baza cerută este $B = \{\mathbf{1},\ \cos x,\ \sin x\ \}$ şi deci $\dim_{\mathbf{R}} V = 3$.

b) Deoarece avem

$$T\ (\mathbf{1}) = \cos x + \sin x\ ,\ T\ (\cos x) = 1 + \sin x\ ,\ T\ (\sin x) = 1 + \sin x$$

matricea asociată lui T în raport cu baza B este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Avem următoarea ecuaţie caracteristică ataşată:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$; soluţiile acestei ecuaţii (i.e. valorile proprii ale lui T) sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = -1$ este de forma

$$U_1 = \{\ a + b\cos x - (a+b)\sin x \mid a, b \in \mathbf{R}$$

iar cel corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$ este $U_2 = \{\ a + a\cos x + a\sin x \mid a \in \mathbf{R}$

Deoarece matricea A este simetrică rezultă că transformarea liniară T este diagonalizabilă; pentru a determina baza ortonormată cerută se alege întâi din subspaţiul U_2 funcţia $1 + \cos x + \sin x$ şi după normarea în raport cu produsul scalar dat se obţine $v_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}(1 + \cos x + \sin x)$.

In subspaţiul propriu U_1 vom alege funcţiile $g = \cos x - \sin x$, $h = 1 + \cos x - 2\sin x$ şi utilizând procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt avem

$$f = 1 + \cos x - 2\sin x + \lambda(\cos x - \sin x);$$

din condiţia $\langle f, g\rangle = 0$ se obţine $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ şi deci $k = 2f = 2 - \cos x - \sin x$.

După normarea funcţiilor g şi k în raport cu produsul scalar dat avem

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}}(\cos x - \sin x),\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{10\pi}}(2 - \cos x - \sin x).$$

10. a) Ecuaţia caracteristică ataşată matricei A este de forma:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$; soluţiile acestei ecuaţii (i.e. valorile proprii ale lui A) sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Subspaţiul propriu asociat lui $\lambda = 0$ este $V = \{(x, -x, 0)\}$, iar cel corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$ este de forma $U : \{(x, x, z)\,|x, z \in \mathbf{R}\}$

b) Cum $\lambda = 2$ este rădăcină dublă a polinomului caracteristic ataşat lui A şi $\dim U = 2$ rezultă că matricea A este diagonalizabilă.

In subspaţiile proprii de mai sus se pot alege următorii vectori ortogonali doi câte doi: $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, iar după normarea lor se obţine matricea ortogonală cerută şi anume

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Forma pătratică g este definită astfel:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy = (x + y)^2 + 2z^2$$

şi deci este pozitiv definită; forma canonică a lui g, obţinută prin metoda transformărilor ortogonale, este $g = 2X^2 + 2Y^2$.

11. a) Cum matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se obţine următoarea ecuaţie caracteristică:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii (i.e. valorile proprii ale lui T) sunt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$; subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 3$ este $\{(x, x, x)\}$, iar cel asociat lui $\lambda = 0$ este $\{(x, y, -x - y)\,|x, y \in \mathbf{R}\}$.

b) Deoarece transformarea liniară T este simetrică ea este diagonalizabilă.

In cele două subspaţii proprii determinate anterior se pot alege următorii vectori ortogonali doi câte doi:

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (1, -2, 1);$$

după normarea lor se obţine baza ortonormată cerută

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right\}.$$

c) Pentru ca matricea

$$\begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

să fie pozitiv definită este necesar şi suficient ca următorii determinanţi:

$$\Delta_1 = 1+m, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1+m \end{vmatrix} = m^2+2m,\ \Delta_3 = \det A = m^2(m+3)$$

să fie pozitivi; se obţin condiţiile: $m > -1$, $m \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ şi respectiv $m > -3$, de unde rezultă în final $m > 0$.

12. a) Vom scrie întâi ecuaţiile dreptei care trece prin $M(a, b, c)$ şi este perpendiculară pe planul $(P) x - a = y - b = z - c$; coordonatele proiecţiei punctului M pe planul (P) se obţin din sistemul:

$$\begin{cases} x - a = y - b = z - c \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

şi anume:

$$x = \frac{2a - b - c}{3}, \quad y = \frac{-a + 2b - c}{3}, \quad z = \frac{-a - b + 2c}{3}.$$

Deci expresia lui T este

$$T(a, b, c) = \left(\frac{2a - b - c}{3}, \frac{-a + 2b - c}{3}, \frac{-a - b + 2c}{3} \right)$$

şi se verifică imediat că este o transformare liniară (exerciţiu util pentru cititor).

b) Deoarece matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este de forma

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

rezultă următoarea ecuaţie caracteristică ataşată:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii (valorile proprii ale lui T) sunt: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$; subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 0$ este $\{(x, x, x)\}$, iar cel asociat lui $\lambda = 3$ este de forma $\{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

c) Deoarece avem

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

şi apoi

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

rezultă că $T^{2007}(3, 0, 6) = (0, -3, 3)$.

13. a) Dacă se notează

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix},$$

atunci avem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & x \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + y & x + v \\ x + v & y + u \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina nucleul lui T vom considera sistemul

$$\begin{cases} u + y = 0 \\ x + v = 0 \end{cases}$$

Se obţine imediat că

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \mid \quad x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

şi deci def $(T) = \dim \text{Ker } T = 2$ deoarece se poate alege o bază formată din matricile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina ImT vom aplica T elementelor bazei canonice a lui $M_2(\mathbf{R})$ şi anume:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

rezultă că ImT este generat de matricile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi deci rang $T \ = \dim\,(\mathrm{Im}T) = 2$.

b) Matricea asociată lui T este de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi se obţine următoarea ecuaţie caracteristică ataşată: $\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii (i.e. valorile proprii ale lui T) sunt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$; subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 0$ este $\{(x, y, -y, -x) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, cel asociat lui $\lambda = 2$ este $\{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$, iar cel corespunzător valorii proprii $\lambda = -2$ este de forma următoare: $\{(-x, x, x, -x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

c) Deoarece matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a este simetrică transformarea liniară T este diagonalizabilă, iar forma diagonală cerută este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

În subspaţiile proprii determinate anterior vom alege următorii vectori ortogonali doi câte doi:

$$v_1 = (1,0,0,-1),\ v_2 = (0,1,-1,0),\ v_3 = (1,1,1,1),\ v_4 = (-1,1,1,-1);$$

după normarea lor se obţine baza ortonormată căutată

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1),\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0),\quad \frac{1}{2}(1,1,1,1),\quad \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)\right\}.$$

14. a) Din ipoteză avem

$$T(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ T(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ T(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$

şi atunci obţinem

$$T(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 4\overrightarrow{i} + (3+m)\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$$

de unde rezultă $m = 7$.

b) Pentru $m = 1$ ecuaţia caracteristică ataşată lui T este

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii (valorile proprii ale lui T) sunt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$; subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 4$ este $\{(x,x,x)\}$, iar cel asociat lui $\lambda = 1$ este de forma $\{(x,y,-x-y) \mid x,y \in \mathbf{R}\}$.

c) Pentru $m = 1$ transformarea liniară T este diagonalizabilă deoarece matricea A este simetrică; ea are următoarea formă diagonală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

în cele două subspaţii proprii determinate anterior se pot alege următorii vectori ortogonali doi câte doi:

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,0,-1), \quad v_3 = (1,-2,1),$$

iar după normarea lor se obţine baza ortonormată cerută

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \right\}.$$

15. a) Din matricea asociată formei pătratice Q în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$

$$A_Q = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix},$$

se calculează determinanţii:

$$\Delta_1 = \lambda - 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

$$\Delta_3 = \det A_Q = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 11.$$

Pentru ca forma pătratică Q să fie pozitiv definită este necesar şi suficient ca $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$; se obţin condiţiile: $\lambda > 2$, $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ şi respectiv $\lambda \in (1-\sqrt{3}, 1) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$. In final rezultă $\lambda > 3$.

b) Pentru $\lambda = 3$ se obţine următoarea ecuaţie caracteristică:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & 2 \\ -1 & 1-\alpha & -2 \\ 2 & -2 & 4-\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\alpha^3 - 6\,\alpha^2 = 0$; avem $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 6$ şi deci forma canonică căutată este $Q = 6\,w^2$.

c) Subspaţiile proprii asociate lui $\alpha = 6$ şi $\alpha = 0$ sunt de forma $\{(x, -x, 2\ x)\}$ şi respectiv $\{(y - 2z, y, z)\}$; se pot alege vectorii $v_1 = (1, -1, 2)$ şi respectiv $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ care sunt ortogonali doi câte doi. După normarea acestor vectori se obţine baza ortonormată alcătuită din

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2),\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

16. a) $T(0, 1, 0) = T(1, 1, 0) - T(1, 0, 0) = (1, -1, 0)$. Avem de asemenea

$$T(0, 0, 1) = T(1, 1, 1) - T(1, 1, 0) = (-2, -3, 1)$$

şi atunci matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pentru a determina Ker T trebuie rezolvat sistemul

$$\begin{cases} 2\ x + \ y - 2\ z = 0 \\ 3\ x - y - 3\ z = 0 \\ -\ x + \qquad z = 0 \end{cases}$$

şi obţinem: $x = z$, $y = 0$. Aşadar $\text{Ker}\ T = \{(x, 0, x)\}$ şi deci T nu este injectivă.

c) O bază în Im T este formată din tripletele $(2, 3, -1)$ şi $(1, -1, 0)$; prin urmare rang T = dim (Im T) = 2. Vom obţine acelaşi rezultat folosind teorema rang-defect.

17. a) Folosind proprietăţile produsului mixt se verifică cu uşurinţă că T este o transformare liniară.

b) După calcule se obţine: $T(\overrightarrow{i}) = \alpha(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{i}$, $T(\overrightarrow{j}) = \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{j}$, $T(\overrightarrow{k}) = \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\ \overrightarrow{k}$.

c) Este suficient a arăta că transformarea liniară T este injectivă dacă şi numai dacă $\alpha\beta\gamma \neq 0$; dar din egalitatea vectorială

$$T(\overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} + \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

rezultă

$$\alpha(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{c}) = \gamma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}) = 0$$

deoarece vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ nu sunt coplanari. Dacă două dintre produsele mixte de mai sus sunt nule rezultă că vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{u}$ sunt coplanari ceea ce contrazice ipoteza; aşadar obţinem că $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha\beta\gamma \neq 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

18. a) Cu componentele tripletelor date se formează matricea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

deoarece rang $M = 3$ rezultă că v_1, v_2 şi v_3 sunt liniar independenţi. Cum $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ rezultă că v_1, v_2 şi v_3 formează o bază a lui $\mathbf{R}^3$.

b) Din egalitatea vectorială

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se obţine $a + a' = b + b' = c + c'$ (1); din egalităţile

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rezultă $b' = 1$, $a' + c' = 2$, respectiv $c = 1$, $a + b = 2$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem cu uşurinţă $a = a' = b = b' = c = c' = 1$, iar în continuare $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c) Avem

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

19. a) Matricea asociată lui T în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ este de forma:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}$$

şi atunci ecuaţia caracteristică asociată

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&2\\-1&3-\lambda&2\\2&2&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

are soluţiile $\lambda_1=\lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$.

Rezolvând sistemul următor

$$\begin{cases}5\,x-y+2z=0\\-x+5y+2z=0\\x+\ y+\ z=0\end{cases}$$

se obţine subspaţiul propriu asociat valorii $\lambda_3 = -2$ şi anume $\{(x,x,-2\ x)\ \ |x\in\mathbf{R}$. În mod analog pentru $\lambda=4$ rezultă subspaţiul propriu $\{(x,2\ z-x,z)\,|\ x,z\in\mathbf{R}$.

b) Deoarece matricea A este simetrică transformarea liniară T este diagonalizabilă; forma diagonală este

$$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Doi vectori ai bazei ortogonale de obţin cu uşurinţă şi anume $v_1 = (1,1,-2)$, $v_2=(1,1,1)$; pentru a determina al treilea vector se poate folosi procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt sau se alege $v_1 \times v_2 = (1,-1,0)$. Aşadar baza ortonormată cerută este

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right\}.$$

c) Vom nota cu B matricea

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

şi se observă imediat că $B^n = (-6)^n B$; atunci avem

$$(A - 4I_3)^n = (-6)^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

20. a) Pentru început vom scrie ecuaţia planului care conţine punctul M şi are ca normală dreapta $(d) : 3(x-3) + 2y + z - 1 = 0$; intersecţia acestui plan cu dreapta (d) este tocmai proiecţia lui M pe dreapta (d), iar coordonatele sale se obţin din următorul sistem:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x = 3z - 8 \\ y = 2z - 4 \end{cases}$$

şi anume $x = 1, y = 2, z = 3$.

Tinând seama că proiecţia lui M pe dreapta (d) este mijlocul segmentului MN, unde N este simetricul lui M faţă de dreapta (d), se obţin imediat coordonatele punctului $N : x = -1, y = 4, z = 5$.

b) Sistemul următor:

$$\begin{cases} y = z = x - 1 \\ y = 3x - 9 \\ z = 2 - x \end{cases}$$

este incompatibil, de unde rezultă că cele două drepte nu sunt concurente.

c) Se consideră planele (P_1) şi (P_2) determinate de punctul M şi dreapta (d_1), respectiv de punctul M şi dreapta (d_2); intersecţia planelor (P_1) şi (P_2) este tocmai dreapta căutată.

Ecuaţia planului (P_1) este dată de:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar cea a planului (P_2) este:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci ecuaţiile dreptei căutate sunt:

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 3x-y=9. \end{cases}$$

Altă soluţie. Fie $M_1(t, t-1, t-1)$ un punct arbitrar situat pe dreapta (d_1), respectiv $M_2(u, 3u-9, 2-u)$ situat pe (d_2); din condiţia de coliniaritate a punctelor M, M_1, M_2:

$$\frac{x_M - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y_M - y_{M_1}}{y_{M_2} - y_{M_1}} = \frac{z_M - z_{M_1}}{z_{M_2} - z_{M_1}}$$

se obţin $t = 4$ şi $u = \dfrac{7}{3}$, iar dreapta căutată trece prin punctele M, M_1, M_2.

Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

1. Din $A^k = 0$, rezulta ca matricea $A - xI_n$ este inversabilă pentru orice $x \neq 0$. Într-adevăr

$$(A - xI_n)(A^{k-1} + xA^{k-2} + \cdots + x^{k-1}I_n) = A^k - x^k I_n = -x^k I_n$$

deci

$$(A - xI_n)^{-1} = \frac{1}{-x^k}(A^k + xA^{k-1} + \cdots + x^k I_n)$$

Atunci $\det(A + xI_n) \neq 0,\ x \neq 0$. Dezvoltând determinantul obţinem:

$$f(x) = \det(A + xI_n) = x^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) x^{n-1} + \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ij} \\ a_{jj} & a_{jj} \end{vmatrix} x^{n-1} + \ldots$$

Dar singurul polinom de grad n cu unica rădăcină $x = 0$ este ax^n deci $\det(A + xI_n) = x^n$ şi identificând coeficienţii obţinem $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ şi

$$\sum_{i<j}(a_{ii} \cdot a_{jj} - a_{ij} \cdot a_{ji}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq j}(a_{ii} \cdot a_{jj} - a_{ij} \cdot a_{ji}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i,j} a_{ii} \cdot a_{jj} = \sum a_{ii}^2 - \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot a_{ji} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum a_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = 0.$$

2. a) $f(x) \geq 0, \forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = a_0 \prod\limits_{k=1}^{p}(x - x_k)(x - \overline{x}_k)$, cu $a_0 \geq 0$.

$$\det[f(A)] = a_0^n \prod_{k=1}^{p} \det(A - x_k I_n) \det \overline{(A - x_k I_n)} =$$

$$= a_0^n \prod_{k=1}^{p} |\det(A - x_k I_n)|^2 \geq 0$$

b) Fie $A = xI_n$, $f(A) = f(x)I_n$, $\det[f(A)] = (f(x))^n \geq 0$ deci $f(x) \geq 0$ pentru n impar.

Pentru n par, fie

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{bmatrix}$$

$$\det[f(A)] = (f(x))^{n-1}f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x)f(y) \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Din teorema Cayley-Hamilton avem:

$$A^n - s_1A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}A + (-1)^n(\det A)I_n = 0.$$

Egalând urmele matricelor din egalitate anterioara şi ţinând cont că $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$ obţinem:

$$Tr(A^n) - s_1Tr(A^{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1}s_{n-1}Tr(A) + (-1)^n \cdot n \det A = 0$$

şi din ipoteză rezultă $(-1)^n \cdot n \cdot \det A = 0$ sau $\det A = 0$.

4. Condiţiile date se scriu în funcţie de valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ale matricei A, astfel:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0,\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0, \dots, \lambda_1^{n-1} + \dots + \lambda_n^{n-1} = 0$$

şi

$$\lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = n,$$

sistem care datorită relaţiilor lui Newton, determină unic valorile proprii. Se observă că rădăcinile de ordin n ale unităţii $\lambda_1 = \varepsilon_1, \dots, \lambda_n = \varepsilon_n$ verifică sistemul, deci ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^n - 1 = 0$, care conform Teoremei Cayley-Hamilton, este anulată de A, deci $A^n - I_n = 0$.

5. Din condiţiile problemei rezultă că $rangA = n-1$, deci sistemul $A\cdot X = 0$ cu $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ are soluţiile de forma $X = \alpha X_0$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_0 \neq 0$. Din $A\cdot A_* = \det(A\cdot I_n) = 0$ rezultă că toate coloanele matricei reciproce sunt proporţionale cu vectorul X_0.

Vom arăta că sistemele $AY = 0$, $A^2Y = 0, \dots, A^kY = 0, \dots$ sunt echivalente şi atunci cum primul sistem are rangul $(n-1)$ rezultă că toate au rangul $(n-1)$.

Dacă $A^2Y = 0$ atunci $A\cdot(A\cdot Y) = 0$ deci $A\cdot Y = \alpha\cdot X_0$ care este un sistem neomogen compatibil, deci determinantul său caracteristic este nul. Dacă Δ_{nn} este minorul nenul din matricea A atunci determinantul caracteristic este $\Delta_c = \det[A_1, \dots, A_{n-1}, \alpha X_0]$ şi cum $X_0 = \beta A_{n*}$, $\beta \neq 0$ unde $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ sunt coloanele matricei A şi $A_{1*}, \dots, A_{n*}$ coloanele matricei reciproce A_*. Dezvoltând ultimul determinant după ultima coloană $\Delta_c = \alpha\beta(\Delta_{1n}^2 + \Delta_{2n}^2 + \dots + \Delta_{nn}^2)$, deci $\Delta_c = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow A\cdot Y = 0$.

Analog din $A^{k+1}\cdot Y = 0$ rezultă $A^k \cdot Y = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie şi X vector propriu, avem:

$$A\cdot X = \lambda\cdot X,\ X \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \lambda x_i,\ i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow |\lambda|\cdot|x_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}x_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \max|x_k| \leq \max|x_k| \Rightarrow |\lambda| \leq 1.$$

7. Să notăm $P_{A,B}(x) = \det(A + xB) \in \mathbb{C}[X]$. Avem

$$P_{A,B}(x) = P_{C,D}(x), \forall x \in \{a \in \mathbb{C}|\ a^{n+1} = 1\}$$

Cum egalitatea anterioara are loc in în $(n+1)$ puncte distincte, rezultă $P_{A,B} \equiv P_{C,D}$. Din $P_{A,B}(0) = P_{C,D}(0)$ rezultă $\det A = \det C$.

Avem:

$$P_{A,B}(x) = x^n det\left(\frac{1}{x}A + B\right)$$

pentru x nenul, deci

$$\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \det\left(\frac{1}{x}C + D\right)$$

şi trecând la limită când x tinde la infinit rezultă $\det B = \det D$.

8. Avem:

$$(I - A)(I + A + \cdots + A^{p-1}) = I - A^p = I$$

deci

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$$

Dacă p este impar, $p = 2k + 1$ avem:

$$(I + A)(I - A + A^2 - \cdots + A^{2k}) = I + A^{2k+1} = I$$

deci

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \cdots + A^{2k}$$

Dacă p este par $p = 2k$, $A^{2k} = 0 \Rightarrow A^{2k+1} = 0$ şi avem analog

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \cdots - A^{2k-1}.$$

9. Avem:

$$(A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + i(A \cdot B - B \cdot A) = \left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{k} + i\right)(A \cdot B - B \cdot A)$$

Dar $\det(A - iB)(A + iB) = |\det(A - iB)|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\det\left[\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{k} + i\right)(AB - BA)\right] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\mathrm{ctg}\frac{\pi}{k} + i\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{n\pi}{k} + i\sin\frac{n\pi}{k} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{k} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{k} \in \pi \cdot \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in k \cdot \mathbb{Z}$$

Pentru $n = 2$ luăm $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 + B^2 = 0, \quad AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ inversabilă.}$$

10. a) Rezultă din proprietăţile produsului vectorial.

b) Fie $\overline{u}, \overline{v}$ doi vectori ortogonali pe $\overline{a}$. Avem

$$\cos(A(\overline{u}), A(\overline{v})) = \frac{(\overline{a} \times \overline{u}) \cdot (\overline{a} \times \overline{v})}{\|\overline{a} \times \overline{u}\| \cdot \|\overline{a} \times \overline{v}\|} = \frac{[(\overline{a} \times \overline{u}) \times \overline{a}]\overline{v}}{a^2uv} =$$

$$= \frac{[a^2\overline{u} - (\overline{a}\,\overline{u})\overline{a}]\overline{v}}{a^2uv} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{uv} = \cos(\overline{u}, \overline{v}).$$

c) Dacă $\overline{u} \perp \overline{a}$ atunci $\|A(\overline{u})\| = \|\overline{a} \times \overline{u}\| = \|\overline{u}\|$.

d) Fie baza formată din $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Trebuie să avem $\overline{a} \times \overline{e_1} = \overline{0}$ de unde rezultă că $\overline{e_1}$ este coliniar cu $\overline{a}$. Luăm $\overline{e_1} = \overline{a}$. Mai trebuie să avem $\overline{a} \times \overline{e_2} = \overline{e_3}$, de unde rezultă că $\overline{e_2}$ este vector ortogonal pe $\overline{a}$ iar $\overline{e_3}$ un vector ortogonal pe $\overline{a}$ şi $\overline{e_2}$.

11. Din $\mathrm{Im}T \subset \mathrm{Ker}T$ rezultă $T \circ T = 0$. Dacă M_T este matricea lui T în baza canonică atunci $M_T^2 = 0$. Pentru $M_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ obţinem relaţiile $a^2 + bc = 0$, $b(a+d) = 0$, $c(a+d) = 0$, $d^2 + bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + bc = 0$, $b(a + d) = 0$, $c(a + d) = 0$, $(a - d)(a + d) = 0$. Dacă $a + d \neq 0$ atunci $b = c = 0$, $a = d = 0$. Pentru $a + d = 0$, $a^2 + bc = 0$, deci $d = -a$ şi dacă $b \neq 0$ rezultă $c = -\dfrac{a^2}{b}$, iar dacă $b = 0$, $a = 0$, $d = 0$, $c \in \mathbb{R}$. Am obţinut matricele

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \ c \in \mathbb{R}, \quad M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}^*$$

Pentru matricele M_c avem $\mathrm{Ker}T_c = \{(x, y)|\ c \cdot x = 0\}$ şi $\mathrm{Im}T_c = \{(0, cx)|\ x \in \mathbb{R}\}$. Condiţia $\mathrm{Ker}T_c = \mathrm{Im}T_c$ este îndeplinită pentru orice

$c \neq 0$ şi atunci $\mathrm{Ker}T_c = \mathrm{Im}T_c = \{(0,x)|\ x \in \mathbb{R}\}$ (axa Ox). Pentru matricele $M_{a,b}$ avem

$$\mathrm{Ker}T_{a,b} = \left\{(x,y)|\ ax+by=0,\ -\frac{a^2}{b}x - ay = 0\right\} =$$

$$= \{(x,y)|\ ax+by=0\} = \mathrm{I}T_{a,b}, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*.$$

În concluzie $T(x,y) = (0,cx)$, $c \neq 0$ sau

$$T(x,y) = \left(ax+by, -\frac{a}{b}(ax+by)\right), \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$$

sunt endomorfismele pentru care $\mathrm{Ker}\,T = \mathrm{Im}\,T$. În $\mathbb{R}^3$ nu există astfel de endomorfisme căci relatia $\dim \mathbb{R}^3 = \dim\ \mathrm{Ker}\,T + \dim\ \mathrm{Im}\,T$ nu poate avea loc.

12. a) Presupunem că T este un endomorfism al lui V care are aceeaşi matrice în orice bază a spaţiului. Să notăm cu A matricea lui T în bazele e şi f, iar cu B matricea schimbării de bază. Avem $AB = BA$. Obţinem:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in K.$$

Pentru orice $x \in V$ avem $T(x) = Ax = \lambda x$. Deci endomorfismele căutate sunt $T(x) = \lambda x$, $\lambda \in K$.

b) Fie $e, \overline{e}$ două baze în V; $g, \overline{g}$ două baze în W, B_1 matricea de trecere de la baza e la $\overline{e}$ şi B_2 matricea de trecere de la baza g la $\overline{g}$. Dacă T este o transformare liniară din V în W şi A este matricea transformării (în orice bază) atunci avem: $B_2A = AB_1$ de unde rezultă că A este matricea nulă, singurul endomorfism este $T = 0$.

13. a) Din $T^p = 0$ rezultă că $1_V - T^p = (1_V - T)(1_V + T + T^2 + \cdots + T^{p-1}) = 1_V$. Deci $S^{-1} = 1_V + T + T^2 + \cdots + T^{p-1}$.

b) Să considerăm combinaţia liniară

$$a_0x_0 + a_1T(x_0) + \cdots + a_{p-1}T^{p-1}(x_0) = 0$$

cu scalarii in K.

Aplicăm succesiv operatorul T acestei relaţii şi avem

$$\begin{cases} a_0T(x_0) + a_1T^2(x_0) + \cdots + a_{p-2}T^{p-1}(x_0) = 0 \\ \ldots \\ a_0T^{p-2}(x_0) + a_1T^{p-1}(x_0) = 0 \\ a_0T^{p-1}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Din ultima relaţie, deoarece $T^{p-1}(x_0) \neq 0$, rezultă $a_0 = 0$, din celelalte rezultă $a_1 = 0, \ldots, a_{p-1} = 0$.

14. Fie $T(f) = \lambda f,\ f \neq 0$. Rezulta $f \in \operatorname{Ker} T$ dacă $\lambda = 0$, respectiv $f \in \operatorname{Im} T$ dacă $\lambda \neq 0$.

Avem

$$T(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)dy + \sin(px)\int_0^{2\pi} \cos(qy)f(y)dy +$$

$$+\cos(px)\int_0^{2\pi} \sin(qy)f(y)dy \Rightarrow$$

$\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Span}\{1, \sin(px), \cos(px)\}$. Şirurile de funcţii $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq q$ şi $g_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq q$ liniar independente sunt în nucleul lui T (sunt vectorii proprii pentru valoarea proprie $\lambda = 0$).

Dacă $\lambda \neq 0$, $f \in \operatorname{Im} T$, fie $f(x) = a + b\sin(px) + c\cos(px)$.

Dacă $p \neq q$, $T(f)(x) = 2\pi a$ deci $T(f) = \lambda f \Leftrightarrow$

$$2\pi a = \lambda a + \lambda b\sin(px) + \lambda c\cos(px),\ \forall x \in [0, 2\pi]$$

$\Rightarrow \lambda = 2\pi$, $b = c = 0$, $a \in \mathbb{R}$ deci, vectorii proprii sunt funcţiile constante $f = a$ şi singura valoare proprie nenulă $\lambda = 2\pi$.

Dacă $p = q$, $T(f)(x) = 2\pi a + \pi c \sin(px) + \pi b \cos(px)$ şi din $T(f) = \lambda f$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2\pi a = \lambda a \\ \pi c = \lambda b \\ \pi b = \lambda c \end{cases}$$

în care cautam soluţiile nebanale.

Obţinem $\lambda_1 = 2\pi$, $b = c = 0$ deci $f(x) = a$, $\lambda_2 = \pi$, $a = 0$, $b = c$ deci $f(x) = b(\cos(px) + \sin(px))$, $\lambda_3 = -\pi$, $a = 0$, $b = -c$ deci

$$f(x) = b(\cos(px) - sin(px)).$$

15. Fie $f(x) = \det(A - xI)$ polinomul caracteristic al matricii A. Cum f are gradul 5 şi coeficienţi reali, rezultă că are cel puţin o rădăcină reală. Fie λ o rădăcină reală a lui f. Atunci $\lambda^5 = 1$, deci $\lambda = 1$. Prin urmare $f(1) = \det(A - I) = 0$.

16. Fie V_1, V_2 subspaţii de dimensiune p ale lui V. Avem $T(V_1) \subset V_1$, $T(V_2) \subset V_2$ şi $T(V_1 \cap V_2) \subset V_1 \cap V_2$, deci T invariază toate subspaţiile de $\dim q \leq p$, în particular subspaţiile de dimesiune 1.

Fie $V_1 = \{a \cdot x_1 |\ a \in K\}$, $V_2 = \{a \cdot x_2 |\ a \in K\}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.

$$T(V_1) \subset V_1 \Rightarrow T(x_1) = a_1 \cdot x_1,\ T(V_2) \subset V_2 \Rightarrow T(x_2) = a_2 \cdot x_2.$$

Fie $V_3 = \{a(x_1 + x_2) |\ a \in K\}$, $T(V_3) \subset V_3 \Rightarrow$

$$T(x_1 + x_2) = a_3(x_1 + x_2) \Leftrightarrow T(x_1) + T(x_2) = a_3 x_1 + a_3 x_2 \Leftrightarrow$$

$$(a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 = 0$$

şi dacă x_1, x_2 sunt independenţi $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Deci $T(x) = ax$, $x \in V$.

17. Notăm cu A mulţimea din enunţ şi fie $s = a_1 + \ldots + a_n$. Are loc relaţia

$$\frac{a_k}{s} \leq \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq 1 - \frac{a_{k+1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s}, \quad 1 \leq k \leq n$$

şi însumând relaţiile de mai sus obţinem

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n - 2.$$

Arătăm că $\inf A = 1$ şi $\sup A = n - 2$. Pentru aceasta fie $q > 0$, $a_k = q^k$, $1 \leq k \leq n$. Avem

$$f(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$

$$= \frac{q}{q + q^2 + q^3} + \ldots + \frac{q^{n-2}}{q^{n-2} + q^{n-1} + q^n} + \frac{q^{n-1}}{q^{n-1} + q^n + q} + \frac{q^n}{q^n + q + q^2}$$

$$= (n-2)\frac{1}{1 + q + q^2} + \frac{q^{n-2}}{q^{n-1} + q^{n-2} + 1} + \frac{q^{n-1}}{q^{n-1} + q + 1}.$$

Cum $\lim\limits_{q \to 0} f(q) = n - 2$ şi $\lim\limits_{q \to +\infty} f(q) = 1$ rezultă că $\sup A = n - 2$ şi $\inf A = 1$.

18. Considerăm funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = (t + x) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right), \quad t \geq 1.$$

Evident $a_n = e^{f(n)}$, $n \geq 1$. Avem

$$f'(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{t + x}{t(1 + t)},$$

$$f''(t) = \frac{t(2x - 1) + x}{t^2(1 + t)^2}.$$

Dacă $x \geq \dfrac{1}{2}$ rezultă $f''(t) \geq 0$ pentru orice $t \geq 1$, deci f' este strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Cum $\lim\limits_{t \to \infty} f'(t) = 0$ rezultă $f'(t) < 0$, $t \geq 1$, deci f este descrescătoare pe $[1, \infty)$. Rezultă că $(a_n)_{n \geq 1}$ este un şir descrescător pentru $x \geq \dfrac{1}{2}$. Dacă $x < \dfrac{1}{2}$, atunci ecuaţia $f''(t) = 0$ are rădăcina $t_0 = \dfrac{x}{1 - 2x}$ şi $f''(t) \leq 0$ pentru $t \geq t_0$. Rezultă că f' este descrescătoare pe $[t_0, +\infty)$ şi cum $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ avem $f'(t) > 0$ pentru $t \geq t_0$. Prin urmare şirul (a_n) este crescător pentru $n > t_0$. Cel mai mic număr pentru care $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător este $x = \dfrac{1}{2}$.

19. a) $E_{m+n} - E_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{1}{(n+m)!}$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right] < \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Fixând n şi făcând $m \to \infty$ obţinem

$$e - E_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

b) Să presupunem că $e = \dfrac{p}{q} \in Q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Avem $0 < e - E_q < \dfrac{1}{q\cdot q!}$ şi înmulţind cu $q!$ obţinem $0 < p(q-1)! - q!E_q < \dfrac{1}{q}$, contradicţie, pentru că $(p(q-1)! - q!E_q) \in \mathbb{Z}$.

c) Din punctul a) rezultă că pentru orice $n \geq 1$ există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$e = E_n + \frac{\theta_n}{n\cdot n!},$$

deci

$$[n!e] = \left[n!E_n + \frac{\theta_n}{n}\right] = n!E_n,$$

prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}(n!e - [n!e]) = 0.$$

20. Avem $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$,

$$\frac{1}{a_n(a_n-1)} = \frac{1}{a_{n+1}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

Suma parţială este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

Se arăta prin inducţie că şirul $(a_n)_n$ este crescător şi tinde la ∞. Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

21. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{x_{2n+2}}{x_{2n+1}}\right)^a - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nr}{x_1 + (2n+1)r} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{r}{x_1 + (2n+1)r}\right)^a - 1}{\dfrac{r}{x_1 + (2n+1)r}} = \frac{a}{2},$$

unde r este raţia progresiei.

Pentru $a > 2$ seria este convergentă, iar pentru $a < 2$ seria este divergentă.

Pentru $a = 2$ avem

$$a_n = \left(\frac{x_1 x_3 \ldots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \ldots x_{2n}}\right)^2.$$

Din inegalităţile evidente $\dfrac{x_{2k}}{x_{2k+1}} < \dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k+2}}$, $1 \le k \le n-1$, obţinem prin înmulţire

$$\frac{x_2 x_4 \ldots x_{2n-2}}{x_3 x_5 \ldots x_{2n-1}} < \frac{x_3 x_5 \ldots x_{2n-1}}{x_4 x_6 \ldots x_{2n+2}}.$$

Rezultă că $a_n > \dfrac{x_1^2}{x_2} \cdot \dfrac{1}{x_{2n}}$ şi cum $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_{2n}} = \infty$, deducem că seria este divergentă.

22. a) Prin inducţie se arată că $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din inegalitatea $\ln(1+x) \le x$ rezultă că şirul $(a_n)_n$ este descrescător şi, fiind mărginit inferior de zero, este convergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ din relaţia de recurenţă rezultă $l = \ln(1+l)$ cu singura soluţie $l = 0$.

b) Comparăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n \ln(1+a_n)}{a_n - \ln(1+a_n)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x - \ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \frac{\ln(1+x)}{x}}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 - \frac{1}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2(1+x) = 2 \in (0,\infty),$$

deci seriile au aceeaşi natură (divergente).

c) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (na_n)^2 = 4 \in (0,\infty)$$

deci ambele serii sunt convergente.

23. Din definiţia lui $f(n)$ avem:

$$S_{f(n)} \geq n \text{ şi } S_{f(n)} - \frac{1}{f(n)} < n$$

din care rezultă:

$$0 \leq S_{f(n)} - n < \frac{1}{f(n)}.$$

Se ştie că $\lim_{n\to\infty} (S_{f(n)} - \ln f(n)) = c$ (constanta lui Euler), deci

$$\lim_{n\to\infty} (n - \ln f(n)) = \lim_{n\to\infty} (n+1-\ln f(n+1)) = c,$$

prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \ln \frac{f(n+1)}{f(n)}\right) = 0,$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = e.$$

24. Fie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$. Avem $h(a) = f(a) - a > 0$ şi cum h este continuă există un interval $I \subseteq [a,b]$ astfel ca $h(x) > 0$ pentru orice $x \in I$. Fie $a_1, \ldots, a_n \in I$, în progresie aritmetică, astfel ca $h(a_i) > 0$. Analog $h(b) = f(b) - b < 0$, deci există un interval $J \subseteq [a,b]$ astfel ca $h(x) < 0$ pentru orice $x \in J$. Alegem $b_1, \ldots, b_n \in J$ în progresie aritmetică cu $h(b_i) < 0$, $1 \le i \le n$. Fie acum $g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} h((1-t)a_i + tb_i).$$

Avem $g(0) < 0$, $g(1) > 0$, şi cum g este continuă, există $t_0 \in (0,1)$ astfel ca $g(t_0) = 0$. Se arată că $c_i = (1-t_0)a_i + t_0 b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt în progresie aritmetică.

25. Pentru orice intreg pozitiv n rezulta ca există x_n, $\dfrac{1}{n+1} < x_n < \dfrac{1}{n}$ astfel încât $f'(x_n) = 0$, conform teoremei lui Rolle. Atunci

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0.$$

De asemenea există $y_n, x_{n+1} < y_n < x_n$ astfel încât $f''(y_n) = 0$. Rezultă $f''(0) = 0$. Se arată că $f^{(n)}(0) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Se presupune că există x astfel încât $f(x) \neq 0$. Din formula lui Mac Laurin obtinem

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

$\theta \in (0,1)$, deci

$$|f(x)| \le M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită pentru $n \to \infty$ se obţine $|f(x)| \le 0$ ceea ce contrazice $f(x) \neq 0$.

26. Să notăm

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Evident avem

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad 0 \le k \le n.$$

De asemenea avem:

$$\frac{c_x - a}{x-a} = \frac{c_x - a}{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{c_x - a}{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a)} \cdot \frac{\dfrac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}[f(x) - T_n(x)] - f^{(n+1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a)}{c_x - a}} \cdot \frac{(n+1)!(f(x) - T_n(x)) - f^{(n+1)}(a)(x-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+2}},$$

$x \neq a$.

Făcând $x \to a$ şi aplicând de $(n+1)$ ori regula lui l'Hospital avem:

$$\lim_{x\to a} \frac{c_x - a}{x-a} = \frac{1}{f^{(n+2)}(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{(n+1)! f^{(n+1)}(x) - (n+1)! f^{(n+1)}(a)}{(n+2)!(x-a)} = \frac{1}{n+2}.$$

27. a) $f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ şi analog

$$f'_y(0,0) = 0.$$

Demonstrăm că f este diferenţiabilă în $(0,0)$ şi $T = df(0,0) = 0$. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(xy) - g(0)}{xy} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= g'(0) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

deoarece

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \cdot |y| \leq |y|,$$

pentru $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Avem

$$f'_x(x, y) = yg'(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + g(xy)\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

şi

$$f'_y(x, y) = xg'(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - g(xy)\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Obţinem

$$f''_{xy}(0, 0) = (f'_x)'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-yg'(0)}{y} = -g'(0)$$

şi

$$f''_{yx}(0, 0) = (f'_y)'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xg'(0)}{x} = g'(0).$$

28. Fie $z(x, y) = w(x + \alpha y, x + \beta y)$. Avem

$$z'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + w'_v$$

$$z'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = \alpha w'_u + \beta w'_v$$

$$z''_{x^2} = w''_{u^2} u'_x + w''_{uv} v'_x + w''_{uv} u'_x + w''_{v^2} v'_x = w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2}$$

$$z''_{xy} = w''_{u^2} u'_y + w''_{uv} v'_y + w''_{uv} u'_y + w''_{v^2} v'_y = \alpha w''_{u^2} + (\alpha + \beta)w''_{uv} + \beta w''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = \alpha(w''_{u^2} u'_y + w''_{uv} v'_y) + \beta(w''_{uv} u'_y + w''_{v^2} v'_y) = \alpha^2 w''_{u^2} + 2\alpha\beta w''_{uv} + \beta^2 w''_{v^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia dată se obţine

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)w''_{u^2}+(2a+2b(\alpha+\beta)+c\alpha^2)w''_{uv}+(a+2b\beta+c\beta^2)w''_{v^2}=0.$$

Rezultă că α şi β trebuie să fie rădăcini ale ecuaţiei

$$c\gamma^2+2b\gamma+a=0.$$

Pentru aceste valori ecuaţia devine $w''_{uv}=0$ cu soluţia

$$w(u,v)=\varphi(u)+\psi(v)$$

unde φ,ψ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2. Soluţia ecuaţiei date este

$$z(x,y)=\varphi(x+\gamma_1 y)+\psi(x+\gamma_2 y).$$

29. În $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ facem substituţia $x=\dfrac{1}{t}$. Obţinem

$$I=\int_0^\infty \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^\infty \frac{(1+t^\alpha)-1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)},$$

deci

$$2I=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Rezultă $I=\dfrac{\pi}{4}$.

30. Fie $I=\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$, $I\in\mathbb{R}$. Avem:

$$I=\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x\displaystyle\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)'}{x'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(xf(x)+\int_0^x f(x)dx\right)=I+\lim_{x\to\infty}xf(x)$$

de unde obţinem $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

31. $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{1+x}dx = \int_0^1 \text{arctg}x \cdot (\ln(1+x))'dx$

$$= \text{arctg}x \cdot \ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

În $J := \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ facem substituţia $x = \text{tg}t$ obţinând

$$J = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\text{tg}t)dt.$$

Punând $\dfrac{\pi}{4} - t = u$ obţinem:

$$J = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)du = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{1-\text{tg}u}{1+\text{tg}u}\right)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - J.$$

Prin urmare $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ şi $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

32. Avem:

$$f(x,y,z,t) > \frac{x}{x+y+z+t} + \frac{y}{x+y+z+t} + \frac{z}{z+y+z+t} + \frac{t}{x+y+z+t} = 1$$

$$f(x,y,z,t) < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} = 2$$

pentru orice $x, y, z, t \in (0, \infty)$.

Arătăm în continuare că

$$\inf f = 1 \quad \text{şi} \quad \sup f = 2.$$

Într-adevăr

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y,z,t) = \frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} = 1$$

$$\lim_{x\to 0, z\to 0} f(x,y,z,t) = \frac{y}{y} + \frac{t}{t} = 2.$$

Cum f este continuă pe mulţimea conexă $(0, \infty)^4$ rezultă că mulţimea valorilor lui f este intervalul deschis $I = (1, 2)$.

33. Fie $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ versorii vectorilor VA, VB, VC şi

$$\overline{VA} = a \cdot \overline{u}_1, \quad \overline{VB} = b \cdot \overline{u}_2, \quad \overline{VC} = c \cdot \overline{u}_3.$$

Volumul tetraedrului $VABC$ se exprimă folosind produsul mixt

$$\mathcal{V}(VABC) = \frac{1}{6}|(a \cdot \overline{u}_1, b \cdot \overline{u}_2, c \cdot \overline{u}_3)| = \frac{1}{6}abc|(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)|.$$

Dacă $\overline{VM} = \alpha \cdot \overline{u}_1$, $\overline{VN} = \beta \cdot \overline{u}_2$, $\overline{VP} = \gamma \cdot \overline{u}_3$, ecuaţia planului (MNP) este

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

şi din $G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) \in (MNP)$ rezultă legătura

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 3$$

iar

$$\mathcal{V}(VMNP) = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma|(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)|.$$

Avem

$$\frac{\mathcal{V}(VABC)}{\mathcal{V}(VMNP)} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}.$$

Trebuie arătat că dacă $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ sunt pozitive şi

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 3$$

atunci

$$\frac{abc}{\alpha\beta\gamma} \leq 0.$$

Din

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{c}{\gamma}} \leq \frac{\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}}{3} = 1,$$

deci

$$\frac{abc}{\alpha\beta\gamma} \leq 1.$$

Observaţie. Dacă prin centrul de greutate al tetraedrului $VABC$ se duce un plan ce taie muchiile VA, VB, VC în A_1, B_1, C_2 atunci

$$\mathcal{V}(A_1B_1C_1) \leq \frac{27}{64}\mathcal{V}(VABC).$$

34. Dacă notăm

$$\overline{AB} = \overline{b}, \quad \overline{AC} = \overline{c}, \quad \overline{AD} = \overline{d},$$

$$\overline{AM} = \alpha\overline{b}, \quad \overline{BM} = \beta\overline{c}, \quad \overline{CM} = \gamma\overline{d}$$

un punct din planul (MNP) are vectorul de poziţie de forma:

$$\overline{r} = x\alpha\overline{b} + y\beta\overline{c} + z\gamma\overline{d} \quad \text{cu} \quad x + y + z = 1.$$

Condiţia din enunţ se scrie

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{1-\gamma}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 4.$$

Dacă luăm $x = \dfrac{1}{4\alpha}$, $y = \dfrac{1}{4\beta}$, $z = \dfrac{1}{4\gamma}$, $x+y+z = 1$ deci punctul de vector de poziţie:

$$\overline{r} = \frac{\overline{b} + \overline{c} + \overline{d}}{4}$$

se află în planul (MNP). Punctul fix este centrul de greutate al tetraedrului.

35. Alegem un reper cu originea în G, intersecţia medianelor din $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ şi notăm

$$\overline{GA_1} = \overline{a}_1,\ \overline{GA_2} = \overline{a}_2, \ldots, \overline{GA_{2n}} = \overline{a}_{2n} \text{ şi } \overline{GA_{2n+1}} = \overline{a}_{2n+1}$$

şi cu $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}, B_{2n+1}$ mijloacele laturilor opuse vârfurilor A_1, $A_2, \ldots$, A_{2n}, A_{2n+1}. Condiţia că punctele A_k, G, B_k sunt coliniare se scrie:

$$\overline{a}_k \times \frac{1}{2}(\overline{a}_{n+k} + \overline{a}_{n+k+1}) = \overline{0}, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Obţinem sistemul de relaţii:

$$\begin{aligned}(1):&\quad \overline{a}_1\times(\overline{a}_{n+1}+\overline{a}_{n+2})=\overline{0},\\ (2):&\quad \overline{a}_2\times(\overline{a}_{n+2}+\overline{a}_{n+3})=\overline{0},\ldots,\\ (n):&\quad \overline{a}_n\times(\overline{a}_{2n}+\overline{a}_{2n+1})=\overline{0},\\ (n+1):&\quad \overline{a}_{n+1}\times(\overline{a}_{2n+1}+\overline{a}_1)=\overline{0},\\ (n+2):&\quad \overline{a}_{n+2}\times(\overline{a}_1+\overline{a}_2)=\overline{0},\ldots,\\ (2n):&\quad \overline{a}_{2n}\times(\overline{a}_{n-1}+\overline{a}_n)=\overline{0}.\end{aligned}$$

Dacă adunăm toate aceste relaţii şi reducem doi câte doi termeni rămâne

$$\overline{a}_n\times\overline{a}_{2n+1}+\overline{a}_{n+1}\times\overline{a}_{2n+1}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{a}_{2n+1}\times(\overline{a}_n+\overline{a}_{n+1})=\overline{0},$$

deci punctele A_{2n+1}, G şi B_{2n+1} sunt coliniare.

36.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}a_k(MA_k^2-\overline{r}_k^2)=\sum_{k=1}^{n}a_k((\overline{r}_k-\overline{r})^2-\overline{r}_k^2)\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_k(\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{r}_k)=\overline{r}^2\sum_{k=1}^{n}a_k-2\overline{r}\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{r}_k\\ &=\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{r}_0=(\overline{r}-\overline{r}_0)^2-\overline{r}_0^2=MA_0^2-\overline{r}_0^2.\end{aligned}$$

b) Din a) rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot MA_k^2=\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{r}_k^2-\overline{r}_0^2+MA_0^2=a^2$$

$$\Rightarrow MA_0^2=a^2-\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{r}_k^2+\overline{r}_0^2=C=\text{constant}$$

În funcţie de valoarea lui C locul geometric este:

- sferă dacă $C>0$

• punct dacă $C = 0$

• mulţimea vidă dacă $C < 0$.

c) Minimul se atinge în $M = A_0$ şi este

$$S_{min} = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{r}_k^2 - \overline{r}_0^2.$$

37. a) Pentru a exista o astfel de sferă de centru $M(u, v, w)$ şi rază $\lambda > 0$ va trebui ca distanţa de la M la fiecare plan din familie să fie λ, deci

$$\frac{2u\cos t + 2v\sin t - w}{\sqrt{5}} = \pm\lambda, \text{ pentru orice } t \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow$$

$$2u\cos t + 2v\sin t + (-w \mp \sqrt{5}\lambda) = 0, \text{ pentru orice } t \in [0, 2\pi) \Rightarrow$$

$$u = v = 0 \text{ şi } w = \pm 5\lambda.$$

Deci o astfel de sferă este de exemplu de centru $M_0(0, 0, 5)$ şi rază $R_0 = \sqrt{5}$.

b) Pentru $\lambda \in [0, \infty) \Rightarrow M \in Oz$, deci locul geometric este axa Oz.

c) Fie sfera de la punctul a)

$$\sigma : x^2 + y^2 + (z - \sqrt{5}\lambda)^2 = \lambda^2.$$

şi o dreaptă ce trece prin origine de ecuaţii

$$d : \begin{cases} x = tX \\ y = tY \\ z = tZ \end{cases}$$

Punand conditia ca ca dreapta (d) sa taie sfera (σ) intr-un singur punct rezulta ca ecuaţia $(tX)^2 + (tY)^2 + (tZ - \sqrt{5})^2 = \lambda^2$ are o singură soluţie $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4X^2 + 4Y^2 - Z^2 = 0$.

Soluţii la Capitolul 2

1977- subiecte anul I

1. a) Banal.

b) Conform a), $\left|\frac{1}{n}\text{arctg}\frac{x}{n}\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$. Se aplică criteriul lui Weierstrass, apoi seria derivatelor $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ este UC pe $\mathbf{R}$, deci $S(x)$ este derivabilă, $\forall x \in \mathbf{R}$, $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = 0$.

2. Aplicăm formula creşterilor finite pentru $f(x) = 2\text{arctg}\sqrt{x}$ pe intervalul $[k, k+1]$; rezultă

$$\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 2(\text{arctg}\sqrt{k+1} - \text{arctg}\sqrt{k}) < \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$$

şi însumând aceste relaţii pentru $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 2\text{arctg}\sqrt{n+1} - \frac{\pi}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}.$$

Este suficient să facem $n \to \infty$.

3. Direct $f_0(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Apoi integrăm prin părţi şi $f_n(x) - f_{n-1}(x) = -\frac{x^{2n}}{2n!}e^{(-x^2)}$. Se dau valori $n = 1, 2, ...$ şi se adună relaţiile obţinute. În final, se observă că

$$|f_n(x)| = \frac{1}{2}e^{(-x^2)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} < \frac{1}{2}e^{(-x^2)}e^{(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

Folosind teorema de convergenţă dominată , limita din enunţ devine

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}.$$

1978-subiecte anul I

1. a) Conform ipotezei, pentru $n = N$, avem $a_N(1 - ca_N) \geq a_{N+1}$. Dacă am avea $a_{N+1} \geq \frac{1}{c}$, ar rezulta că $a_N(1 - ca_N) \geq \frac{1}{c}$, adică $ca_N(1 - ca_N) \geq 1$, absurd. Aşadar, $a_{N+1} < \frac{1}{c}$ şi afirmaţia din enunţ este demonstrată pentru $n = N$.

Folosim inducţia matematică. Avem de arătat că $a_{N+1} < \dfrac{N+1}{(n+1)^c}$, dacă $n \geq N$, $a_n(1-ca_n) \geq a_{n+1}$ şi $a_n < \dfrac{N+1}{nc}$. În caz contrar, ar rezulta că $a_{N+1} \geq \dfrac{N+1}{(n+1)^c}$, deci $ca_{n+1} \geq \dfrac{N+1}{n+1}$. Notând $x = ca_n$, ar rezulta că $x < \dfrac{N+1}{n}$ şi $x(1-x) \geq \dfrac{N+1}{n+1}$. Atunci $\dfrac{N+1}{n+1} \leq x - x^2 < x$, deci $1 - x \leq \dfrac{n-N}{n+1}$ şi ca atare , $x(1-x) \leq \dfrac{N+1}{n}\dfrac{n-N}{n+1} < \dfrac{N+1}{n+1}$; absurd.

b) Evident $t_n \geq 0$ pentru orice n. Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ este convergentă, atunci şirul (t_n) este evident mărginit.

Reciproc, presupunem că există $M > 0$ astfel încât $b_1 + b_2 + \ldots + b_n - nb_n \leq M$, pentru $n \geq 1$. Pentru m dat, cum $b_n \searrow 0$, putem alege n astfel încât $b_n \leq \dfrac{1}{2}b_m$, deci

$$M \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_m - mb_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots b_n - (n-m)b_n \geq$$

$$\geq m(b_m - b_n) \geq \frac{1}{2}mb_m.$$

Atunci $b_1 + b_2 + \ldots b_m \leq M + mb_m \leq 3M$, pentru $m = 1, 2, \ldots$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ este convergentă.

c) limita comută cu suma seriei (conform teoremei lui Lebesgue de convergenţă dominată).

2. a) Avem $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$ şi $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$. Se derivează această relaţie de $n-2$ ori, aplicând formula lui Leibnitz.

Pentru $n \geq 2$, rezultă că $f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$. Pentru n par, $f^{(n)}(0) = 0$; apoi $f'(0) = 1$ şi $f^{(2k+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots \cdot (2k+1)^2$.

b) Integrala are aceeaşi natură cu $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, deci este convergentă. Valoarea ei este $\dfrac{\pi^2}{8}$.

3. a) Proiecţia lui γ pe planul xOy are reprezentarea parametrică

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t;$$

se obţine o spirală. Curba este situată pe conul $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$

b) Punctul din enunţ se obţine pentru $t = \dfrac{\pi}{4}$ şi se consideră dreptele tangente respective.

c) Parametrizarea conului este $\overrightarrow{r} = u\cos t\,\overrightarrow{i} + u\sin t\,\overrightarrow{j} + u\,\overrightarrow{k}$ şi cele două generatoare corespund valorilor $t = \dfrac{\pi}{6}$ şi $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Pentru porţiunea cerută, parametrii parcurg mulţimea

$$M = \{(u,t) | \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq u \leq t\}.$$

Elementul de arie pe con este $d\sigma = \sqrt{2}dudt$ ($d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$), deci aria cerută va fi

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^t \sqrt{2}udu \quad \text{etc.}$$

1979-subiecte anul I

1. Rezultă $f(x) = -1$ dacă $x \leq 0$, $f(x) = 2x - 1$ pentru $0 < x < 1$ şi $f(x) = 1$ dacă $x \geq 1$ etc.

2. Integrala este dublu improprie şi se descompune în $\displaystyle\int_{(0,1]} + \int_{[1,\infty)}$. Cum $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, prima integrală are aceeaşi natură cu $\displaystyle\int_{(0,1]} \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ şi este convergentă pentru $\alpha - 1 < 1$. Cealaltă integrală este convergentă pentru $\alpha > 1$. Deci $1 < \alpha < 2$.

Pentru $\alpha = \dfrac{3}{2}$, folosim integrarea prin părţi şi determinăm valoarea 2π.

3. Notăm $\varphi(x) = (x+t)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, respectiv $a_n = \varphi(f(x))$; $t_{\min} = \dfrac{1}{2}$.

4. Valorile proprii ale matricei asociate formei pătratice sunt 2,5,8.

5. Avem

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{e^t + e^{-t}}(e^t\overrightarrow{i} - e^{-t}\overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}),$$

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})}(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \sqrt{2}(e^t - e^{-t})\overrightarrow{k}),$$

şi

$$\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\tau} \times \overrightarrow{\nu}.$$

Binormala în punctul curent are ecuaţiile

$$\frac{x - e^t}{-e^{-t}} = \frac{t - e^{-t}}{e^t} = \frac{z - t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

şi această dreaptă intersectează $Ox \leftrightarrow e^{-2t} = t$. Această ecuaţie are o singură soluţie $t_0 \in (0,1)$.

6. Exerciţiu standard.

1980-subiecte anul I

1. $M(r\cos t, r\sin t)$; dreapta CD are ecuaţia $2x\cos t + y\sin t = 2r$. Se derivează această ecuaţie în raport cu t şi se elimină parametrul t. Înfăşurătoarea cerută are ecuaţia $4x^2 + y^2 = 4r^2$ etc.

2. a) Folosind regula lui Laplace, $\det B = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\det A))^2$.

b) $B^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta A^{-1} & -\beta A^{-1} \\ -\gamma A^{-1} & \alpha A^{-1} \end{pmatrix}$.

c) Generalizarea se face pentru $A \in M_n(\mathbf{R})$ nesingulară şi B de ordin $2n$; $\det B = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\det A))^2$ etc.

3. a) Dezvoltarea Mac Laurin a funcţiei " arcsin " este

$$\arcsin t = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ...(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} t^{2n+1}, \quad t \in [-1, 1]$$

şi se integrează $\arcsin t - t$ pe intervalul $[0, 1/2]$.

b) Integrala este convergentă (căci $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$, finit) şi pentru $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x^\alpha \ln x}{1-x} = 0$. Pentru $0 < \alpha < \beta < 1$, avem

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta x^n \ln x dx;$$

integrând prin părţi şi ţinând cont că $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pentru $|x| < 1$, rezultă

$$I(\alpha, \beta) = -\ln x \ln(1-x)\Big|_\alpha^\beta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Atunci

$$I = \lim_{\alpha \to 0, \beta \to 1} I(\alpha, \beta) = \lim_{\alpha \searrow 0} \ln \alpha \ln(1-\alpha) - \lim_{\beta \nearrow 1} \ln \beta \ln(1-\beta) -$$

$$- \lim_{\beta \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)^2} + \lim_{\alpha \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Primele două limite sunt nule, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}$ este UC pe $[-1, 1]$; rezultă că $I = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Se ştie că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1980-subiecte anul II

1. Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{t}{2-t}$. Atunci

$$I = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\int_0^1 t^{2/3}(1-t)^{1/3}dt = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\mathrm{B}(\frac{5}{3},\frac{4}{3}) = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{18\sqrt{3}}.$$

2. a) Căutăm soluţii de forma $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; Identificând coeficienţii, obţinem $a_n(n^2-3n+2) = 0$, de unde $n = 1$ sau $n = 2$. Soluţia ecuaţiei este $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, iar $2a_0 + \pi a_1 + \pi^2 a_2 = 0$, rezultă soluţia generală $y(x) = a_2\left(x^2 - \dfrac{\pi^2}{2}\right) + a_1\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Soluţiile particulare care verifică cele două condiţii impuse sunt $y_{p_1}(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)$, $y_{p_2}(x) = -\dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\pi}{6}x + \dfrac{1}{6}x^2$.

c) $f(x) = \dfrac{\alpha}{\pi} + \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{2}{n\pi}\sin n\alpha\cos nx$, dacă $|x| \leq \alpha$ şi $f(x) = 0$, dacă $\alpha \leq |x| \leq \pi$.

d) Se foloseşte egalitatea lui Parseval.

e) Se ia $\alpha = x$ în egalitatea demonstrată la punctul d).

1981-subiecte anul I

1. Verificări directe. Apoi $f(e_1, e_1) = -A_{11}$ (complementul algebric al lui a_{11} în matricea $A = (a_{ij})$), $f(e_1, e_2) = -A_{12}$, etc.

Matricea cerută este tocmai $-A^*$, unde A^* este adjuncta lui A.

Se generalizează la $\mathbf{R}^*$.

2. Problemă standard.

3. Punând $\cos x = t$, rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\sin x dx = \frac{1}{n^3}.$$

Apoi, dacă $x \in [0, \pi]$, atunci $|u_n(x)\| \leq \frac{1}{n^2+1}$, etc.

4. a) Arătăm că f^{-1} nu este continuă în punctul $(1, 0)$. Fie

$$z_n = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n})) \to (1, 0).$$

Atunci $f^{-1}(z_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$ şi $f^{-1}(1, 0) = 0$.

b) f^{-1} întoarce închişii în închişi, închis în compact este compact, etc.

5. a) $\alpha > \frac{1}{4}$

b) În general,

$$\int_0^m \frac{x^m}{(1+x^n)^p} dx = \frac{1}{n} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right),$$

deci $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

1981-subiecte anul II

1. a) Notăm cu $Y(p)$ imaginea lui y prin transformarea Laplace şi aplicăm transformarea ecuaţiei diferenţiale. Obţinem $-2pY(p) - p^2Y'(p) + 2pY(p) = \frac{2}{p^3}$, de unde, separând variabilele şi integrând, găsim $Y(p) = \frac{1}{2p^4} + C$. Condiţia ca soluţia să fie mărginită în vecinătatea originii conduce la determinarea constantei $C = 0$. Funcţia original este imediată, $y(x) = \frac{x^3}{12}$.

b) Ecuaţia este de tip Euler, determinarea soluţiei este standard, iar soluţia este cea de la punctul a).

2. Cu schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$, integrala devine

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}(z^2-1)}{2(2z^2-5z+2)}.$$

Folosind teorema reziduurilor, rezultă

$$I = 2\pi i \text{Rez}(\frac{z^{n-1}(z^2-1)}{2(2z^2-5z+2)}, \frac{1}{2}) = \frac{\pi i}{2^{n+1}}.$$

3. a) Folosind rezultatul problemei **2**, rezultă imediat

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} \sin nx.$$

b) evident.

4. Coeficienţii seriei Laurent sunt daţi de formula

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{x}{2}(z-\sqrt{z})}}{z^{n+1}} dz,$$

unde $r > 0$, care este o integrală cu parametru. Derivând în raport cu variabila x, obţinem

$$2J_n'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{x}{2}(z-\sqrt{z})}}{z^n} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{x}{2}(z-\sqrt{z})}}{z^{n+1}} dz,$$

de unde relaţia 1) este verificată.

1982-subiecte anul I

1. $\dfrac{\mathrm{D}(u,v,w)}{\mathrm{D}(x,y,z)} = 0$. Apoi $\dfrac{x}{y} = f^{-1}(u)$, $\dfrac{y}{z} = g^{-1}(v)$, $\dfrac{z}{x} = h^{-1}(w)$, deci $f^{-1}(u)g^{-1}(v)h^{-1}(w) = 1$.

2. $I(r) = \displaystyle\int_{(0,1]} + \int_{[1,\infty)}$. Prima integrală este convergentă pentru orice $r > 0$, deoarece $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg} x}{x} = 1$.

Cea de-a doua integrală se compară cu $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ şi este de asemenea convergentă pentru $r > 0$.

Se calculează $I'(r)$ şi se deduce $I(r) = \dfrac{\pi}{2} \ln(1+r)$.

3. a) Introducând produsul scalar $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, funcţiile din B formează un sistem ortogonal, deci liniar independent.

b) Matricea cerută este ${M_p}^B \in M_5(\mathbf{R}) = \mathrm{diag}(C_1, C_2)$, unde

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Curba γ este intersecţia elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{2a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ cu planul $x + z = a$. Curbura minimă cerută este $\dfrac{1}{a\sqrt{2}}$.

5. Problemă standard. Valorile cerute sunt $m \leq 0$ (căci cuadrica este un hiperboloid cu o pânză sau un con).

1982-subiecte anul II

1. Impunem condiţia ca $u(x, y)$ să fie armonică. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot 2\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{y^2 - x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(t) \cdot 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \varphi'(t) \cdot 2 \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(t) \cdot \frac{\left(y^2 - x^2\right)^2}{y^4} + \varphi'(t) \cdot \frac{2x^2}{y^3},$$

unde $t = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$. Atunci

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \varphi''(t) \cdot \frac{(x^2 + y^2)^2}{y^4} + 2 \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{y^3} \cdot \varphi'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{y} \cdot \varphi''(t) + 2\varphi'(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \cdot \varphi''(t) + 2\varphi'(t) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2}{t}$$

deci $\ln(\varphi'(t)) = -2\ln(t) + \ln C_1 \to \ln(\varphi'(t)) = \ln\left(\frac{C_1}{t^2}\right) \to \varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2}$, aşadar $\varphi(t) = -\frac{C_1}{t} + C_2$.

Dacă $\varphi(t) \neq -\frac{C_1}{t} + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, atunci $u(x,y)$ nu este armonică, deci nu se poate construi f. Dacă $\varphi(t) = -\frac{C_1}{t} + C_2$, atunci $f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Pentru $y = 0$, avem $f'(x) = \frac{C_1}{x^2} \to f(x) = -\frac{C_1}{x} + C_3$; înlocuind x cu z, obţinem $f(z) = \frac{C_1}{z} + C_3$.

2. $z = 0$ este punct singular esenţial al funcţiei $f(z) = \frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}$. Dar

$$e^{\frac{1}{3z}} z\frac{1}{z+3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k!3^k}\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k!3^k}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{3^k},$$

de unde $\mathrm{Rez}(f,0) = 3\left(e^{-\frac{1}{3^2}} - 1 + \frac{1}{9}\right)$.

$z = -3$ este pol de ordinul întâi al funcţiei şi $\mathrm{Rez}(f,-3) = -3e^{-\frac{1}{3^2}}$. Integrala este egală cu $-16\pi i/3$.

3. $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\int_0^{\infty} e^{-nt}f(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}e^{-nt}dt.$

Dar $\sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-nt}$ este o serie geometrică convergentă, cu suma seriei $\frac{-1}{1+e^t}$, de unde rezultă imediat rezultatul cerut.

Pentru aplicaţie, $G(p) = \frac{1}{b^2(\frac{a}{b}+p)^2}$, de unde $g(t) = \frac{1}{b^2}te^{-\frac{a}{b}t}$. Folosind formula demonstrată anterior, rezultă rezultatul cerut.

4.Căutând soluţii de forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ şi impunând prima condiţie, se determină

$$u(x,t) = e^{-\frac{1}{2}a^2x^2}\sum_{n\geq 1}(A_n\cos nt + B_n\sin nt)e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}.$$

Din cea de-a doua condiţie,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos t}dt,$$

$$A_n + iB_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5-3\cos t}dt = \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Rezultă soluţia problemei

$$u(x,t) = e^{-\frac{1}{2}a^2x^2}\left[\frac{1}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\cdot 3^n}\cos nt \cdot e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}\right].$$

1983-subiecte anul I

1. Avem $g' = g$ şi $g(0) = 1$; $g(x) = e^x$, etc.

2. a) Şirul $(n\cos^2 nx)_{n\geq 1}$ este nemărginit (căci, dacă $n\cos^2 nx \leq M$, ar rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 nx = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 nx = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \cos 2nx = -1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 2nx = 1$, absurd).

b) Luăm $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$.

3. a) Se calculează $A^2, A^3, A^4 = I_4$, deci $A^{4k} = I_4, A^{4k+1} = A$, etc.

b) valorile proprii pentru A sunt : $1, -1, i, -i$ şi pentru B sunt $P(1), P(-1), P(i), P(-i)$; vectorii proprii sunt aceeaşi pentru A şi B.

4. Verificări directe

5. $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = \dfrac{1}{e(n+1)}$ şi $\inf\limits_{x\in I} |f_n(x)| = 0$.

Suma seriei este $f(x) = \dfrac{x}{1-x}\ln x$, pentru $x \in (0,1)$ şi $f(x) = 0$, pentru $x = 0$ sau $x = 1$.

Cum f nu este continuă, dar f_n sunt, rezultă o convergenţă neuniformă .

1983-subiecte anul II

1. a) Calculăm

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx = -\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{\lambda z^2 - (1+\lambda^2)z + \lambda}dz.$$

Folosim teorema reziduurilor pentru calculul integralei complexe.

Distingem două cazuri:

1) Dacă $|\lambda| < 1$, atunci $a_n + ib_n = \dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$;

2) Dacă $|\lambda| > 1$, atunci $a_n + ib_n = \dfrac{2}{\lambda^n(\lambda^2-1)}$.

Seria Fourier căutată este $f(x) = \dfrac{1}{\lambda^2-1} + = \dfrac{2}{\lambda^2-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\lambda^n}$.

2. Se vor analiza cele trei cazuri :

1) $1 - x^2 > 0$ (cazul hiperbolic); schimbarea de variabile este $\xi = y + \arcsin x$, $\eta = y - \arcsin x$; forma canonică este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$;

2) $1 - x^2 < 0$ (cazul eliptic); schimbarea de variabile este $\xi = y$, $\eta = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$; forma canonică este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0$;

3) $x = \pm 1$; ecuaţia este degenerată.

1984-subiecte anul I

1. Cum $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k = -1$, rezultă $K(x,t) = 1 + (2n+1)\sin x\cos t - \cos x \sin t$ şi $g(x) = A + B\cos x + C\sin x$, unde $A = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $B = -\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t dt$, $C = (2n+1)\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos t dt$. Evident g depinde liniar de A, B, C şi de f. ImT are baza $\{1, \cos x, \sin x\}$ şi dimensiunea 3. Evident $\lambda = 0$ nu este valoare proprie pentru T; să găsim $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$

astfel încât să existe $f \neq 0$ cu $Tf = \lambda f$, adică $f(x) = \frac{1}{\lambda}(A + B\cos x + C\sin x)$. Atunci $A = \int_0^{2\pi}(A + B\cos t + C\sin t)dt$, deci $A(1 - \frac{2\pi}{\lambda}) = 0$. Apoi $B = -\int_0^{2\pi}(A + B\cos t + C\sin t)\sin t dt$, deci $B = -\frac{C\pi}{\lambda}$ şi $C = (2n+1)\int_0^{2\pi}(A+B\cos t+C\sin t)\cos t dt$, de unde $C = \frac{2n+1}{\lambda}B\pi$. Singura valoare proprie este $\lambda = 2\pi$.

2. Un calcul uşor arată că

$$f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}, \quad \text{dacă } x \neq y \quad \text{şi } f(x, x) = e^x.$$

Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}^2$, etc.

3. a) Notăm $a_n = \frac{2n}{2n-1}$; raza de convergenţă este $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Pentru $x = \pm 1$, seria este divergentă (termenul general nu converge la 0). Aşadar, $M = (-1, 1)$.

Notăm suma cu $S(x)$, deci $S'(x) = \sum_{n\geq 1} 2nx^{2n-2} = \frac{2}{x^2}\sum_{n\geq 1} nx^{2n}$, pentru $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$. Dar $\sum_{n\geq 1} na^n = \frac{a}{(a-1)^2}$ pentru $a \in (-1, 1)$, etc.

b) Avem$f(x) = h(x) - \frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$, deci

$$f(x) - g(x) - h(x) = -\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt - \int_x^a \frac{f(t)}{t}dt$$

şi, ca atare,

$$f'(x) - g'(x) - h'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)dt - \frac{1}{x}h(x) + \frac{1}{x}f(x) = 0,$$

pentru orice $x \in (0, a]$.

4. a) Înlocuind $y = 0$, rezultă $x^2 = \alpha^2$ şi $z^2 = 4 - \alpha^2$.

Dacă $\alpha = 0$, punctele de intersecţie sunt $(0, 0, \pm 2)$.

Dacă $4-\alpha^2<0$, nu există puncte de intersecţie şi pentru $\alpha \in (-2,2)$ există 4 puncte de intersecţie.

b) Cilindrul proiectant al curbei Γ_α pe planul xOz este

$$C=\{M(x,y,z)\Big|\exists P(a,b,c)\in\Gamma_\alpha \text{ cu } \overrightarrow{MR}\|\overrightarrow{j}\}.$$

Aşadar,

$$a^2+b^2=\alpha^2,\quad \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{4}=1 \quad \text{şi} \quad \frac{a-x}{0}=\frac{b-y}{1}=\frac{c-z}{0}.$$

Se elimină b din relaţiile $x^2+b^2=\alpha^2$, $\frac{x^2}{4}+\frac{b^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ şi ecuaţia cilindrului este $\frac{x^2}{4}+\frac{\alpha^2-x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, etc.

c) Curba Γ_1 are ecuaţiile parametrice

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=2\Big(1-\frac{\cos^2 t}{4}-\frac{\sin^2 t}{9}\Big)^{1/2}$$

şi trebuie calculată curbura pentru $t=0$. Calcul direct.

2008-subiecte anul I, Profil mecanic

1. a) Sfera are centrul $O(0,0,0)$. Dreapta (D) care trece prin O şi este perpendiculară pe (H) taie planul în centrul P al cercului. Atunci

$$\{P\}=(S)\cap(H):\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\quad x+y+z-3=0\Leftrightarrow P=(1,1,1).$$

Raza sferei este $R=\sqrt{9}=3$, iar distanţa de la 0 la (H) este $d=\frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$, deci folosind teorema lui Pitagora, raza cercului de secţiune (C) este $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$.

b) O asemenea sferă are centrul pe drepta (D), deci centrul acesteia este un punct $M(t,t,t)\in(D)$. Condiţia $d(M,(H))^2+r^2=R^2$ se rescrie

$$\left(\frac{|t+t+t-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2+6=R^2\Leftrightarrow R=\sqrt{6+3(t-1)^2}.$$

Prin urmare, ecuaţiile sferelor din enunţ sunt:

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 3(t-1)^2 + 6, \ t \in \mathbf{R}.$$

c) Condiţia $R = 6$ se rescrie:

$$6 = \sqrt{6 + 3(t-1)^2} \Leftrightarrow 10 = (t-1)^2 \Leftrightarrow t \in \{t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{10}\}.$$

Exista două soluţii:

$$(x-t_k)^2 + (y-t_k)^2 + (z-t_k)^2 = 6, \ k = \overline{1,2}.$$

2. Alegem $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$; prin calcul direct, obţinem X^2.

Relaţia din enunţ conduce la sistemul

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + a\beta = 0, \quad \gamma^2 + a\gamma + b = 0,$$

$$\alpha \in \left\{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right\}, \quad \gamma \in \left\{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right\}, \quad \beta(\alpha + \gamma + a) = 0.$$

Alegem $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$; $\gamma = \gamma_0 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ şi obţinem $\alpha + \gamma + a = 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, deci familia infinită de soluţii $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$ | $\beta \in \mathbf{R}$.

3. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \neq 0$, deoarece alegând $x_n = y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = 1$, deci funcţia f nu este continuă în $(0, 0)$.

Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei în origine şi constatăm că ambele sunt 0.

Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(y^2 - x^2 y)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2(x^2 - y^2 x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nefiind continuă în origine, rezultă f nu este diferenţiabilă în origine.

b) Avem

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)\right]^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1}\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\, dt.$$

Dacă $n = 2k+1$, atunci

$$I_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k+1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^k \sin t\, dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $\cos t = y$, obţinem $I_{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^k\, dy$, iar cu schimbarea de variabilă $y^2 = u$, rezultă

$$I_{2k+1} = \int_0^1 (1-u)^k \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)\, du == \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, k+1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{k!}{\frac{2k+1}{2}\frac{2k-1}{2}\ldots\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{k!2^{k+1}}{(2k+1)!!} = \frac{k!2^k}{(2k+1)!!}.$$

Dacă $n = 2k$, atunci $I_{2k} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k}\, dt$. Cu schimbarea de variabilă $\sin t = y$ (deci $t = \arcsin y$ şi $dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$), obţinem $I_{2k} = \displaystyle\int_0^1 y^{2k}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy$, iar cu schimbarea de variabilă $y^2 = u$, rezultă

$$I_{2k} = \int_0^1 u^k (1-u)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\, du =$$

$$= \cdots = \frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(k-\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{k!} = \frac{1}{2^{k+3}}\frac{\pi(2k-1)!!}{k!}.$$

c) Obţinem $g_n(x) = \dfrac{1}{2n}\dfrac{2x^2 n}{x^4+n^2} = \dfrac{x^2}{x^4+n^2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{x^4+n^2} = 0$, de unde $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Notăm $h(x) = \dfrac{x^2}{x^4+n^2}$. Pentru a determina $\sup_{x\in\mathbf{R}} h(x)$, calculăm $h'(x) = \dfrac{2x(n^2-x^4)}{(x^4+n^2)^2}$ şi avem

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{n}\}$. Din tabelul de variaţie al funcţiei h rezultă: $\sup_{x\in\mathbf{R}} h(x) = h(-\sqrt{n}) = h(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, deci şirul de funcţii $\{g_n\}$ converge uniform la g.

4.Termenul general al seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ este $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Aplicând criteriul raportului, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\beta \sin\frac{1}{n+1}} \frac{n^\beta \sin\frac{1}{n}}{\alpha^n} \right| =$$

$$= |\alpha| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta-1} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n+1}} = |\alpha|.$$

Distingem urmatoarele cazuri:

i) Dacă $|\alpha| < 1 \to$ serie convergentă (absolut convergentă).

ii) Dacă $|\alpha| > 1 \to$ serie divergentă.

iii) Dacă $|\alpha| = 1 \to$ avem subcazurile:

iii.1) Pentru $\alpha = -1$ seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Dacă $\beta > 0 \to$ serie convergentă (criteriul lui Leibnitz); dacă $\beta < 0 \to$ serie divergentă, deoarece nu există limita $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$.

(criteriul de necesitate); iii.2) Pentru $\alpha = 1$, seria se rescrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Aplicăm criteriul logaritmic şi obţinem:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^\beta \sin\frac{1}{n})}{\ln n} = \beta + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\sin\frac{1}{n})}{\ln n}.$$

Dar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\sin\frac{1}{x})}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}} \left(-\cos\frac{1}{x}\right) = -1,$$

deci $l = \beta - 1$. Dacă $\beta - 1 > 1$ atunci seria este convergentă. Dacă $\beta - 1 < 1$ atunci seria este divergentă.

2008-subiecte anul I, Profil electric

1. a) Demonstrăm că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x], \ \forall x \in \mathbf{R}$. Distingem cazurile:

i) $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right]$ relaţia devine $k + k = 2k$, (adevărat).

ii) $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k+1\right]$ relaţia devine $k + (k+1) = 2k+1$ (adevărat). Rezultă $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Fie

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\left[2 \cdot \frac{x}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left[\frac{x}{2^k}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right),$$

deci $S_n(x) = [x] - \left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left([x] - \left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]\right)$. Cum f nu este funcţie continuă, seria $S_n(x)$ nu este uniform convergentă.

2. Avem

$$V = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid \exists A, \in M_n(\mathbf{C}),$$

$$M = AB - BA\} = \{[A, B] \mid A, B \in M_n(\mathbf{C})\}.$$

Dar $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ deci pentru orice matrice M de forma $M = AB - BA \in V$, avem $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$. Rezultă $V \subset W$, unde

$$W = \{A | \mathrm{Tr}(A) = 0\} = \{A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \mid a_{n,n} = -(a_{11} + \cdots + a_{n-1,n-1})\}.$$

Fiind descrisă de o ecuaţie omogenă, submulţimea $W \subset M_n(\mathbf{C})$ este subspaţiu vectorial, iar o bază a lui W este $B = \{E_{ij} \mid i \neq j; i, j \in \overline{1,n}\} \cup \{F_i \mid i = \overline{1, n-1}\}$ cu

$$E_{ij} = \{(m_{kl}) | m_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l\}, \ F_i = \{(m_{kl}) | m_{kl} = \delta^k_i \delta^k_i - \delta^i_n \delta^l_n\}.$$

Deci $\dim V = \dim W = \text{card} B = (n^2 - n) + n - 1 = n^2 - 1$.

3. a) Forma polară A asociată lui φ se obţine prin dedublare:

$$A(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) +$$

$$+\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$. Verificăm pentru A propietăţiile produsului scalar:

i) Pozitivitate:

$$A(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2) + x_2^2 + 2x_2^3 \geq 0;$$

$\Rightarrow A(x,x) = 0$;

ii) Simetrie: $A(x,y) = A(y,x)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$ (evident);

iii) Omogenitate în primul argument: $A(\lambda x, y) = \lambda A(x,y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ (evident);

iv) Aditivitate în primul argument:

$$A(x + \bar{x}, y) = (x_1 + \bar{x}_1)y_1 + 2(x_2 + \bar{x}_2)\bar{y}_2 + 3(x_3 + \bar{x}_3)\bar{y}_3 + \frac{1}{2}[(x_1 + \bar{x}_1)y_3 +$$

$$+(x_3+\bar{x}_3)y_1] + \frac{1}{2}[(x_1+x_1)y_2 + (x_2+\bar{x}_2)y_1] = A(x,y) + A(\bar{x},y), \ \forall x, \bar{x}, y \in \mathbf{R}^3.$$

În concluzie, A este un produs scalar, şi avem $||x|| = \sqrt{A(x,x)}$, $\forall x \in \mathbf{R}^3$. Prin urmare,

$$||e_1|| = \sqrt{A(e_1,e_1)} = 1, \ ||e_2|| = \sqrt{A(e_2,e_2)} = \sqrt{2},$$

$$||e_3|| = \sqrt{A(e_3,e_3)} = \sqrt{3},$$

iar $\cos(\widehat{e_1, e_2}) = \dfrac{A(e_1,e_2)}{||e_1|| \cdot ||e_2||} = \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Fie $g(x) = \int_0^x |f'(t)|dt$, deci $g(0) = 0$ şi $g'(x) = |f'(x)|$. Apoi

$$|f(x)| = |\int_0^x f'(t)dt| \leq \int_0^x |f'(t)|dt = g(x),$$

deci

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \int_0^a g(x)g'(x)dx = \frac{1}{2}g^2(a) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^a 1\cdot|f'(t)|dt\Big)^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(\int_0^a 1^2 dt\Big)\cdot\Big(\int_0^a |f'(t)|^2 dt\Big) = \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2 dx.$$

2008-subiecte anul II

1. a) $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. În concluzie u este aplicaţie armonică.

b) Funcţia căutată este de forma $f(x,y) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$. Notând $z = x + iy$ şi folosind faptul că f este olomorfă, obţinem:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2} + e^x\cos y - i\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - e^x \sin y\right).$$

Pentru $y = 0$, obţinem $f(x) = \dfrac{2}{x} + e^x$ deci $f(x) = 2\ln x + e^x + C$. Efectuând substituţia $x \to z$ rezultă $f(z) = 2\ln z + e^z + C$. Din condiţia $f(1) = e$, obţinem $e + C = e$ deci $C = 0$. Prin urmare funcţia olomorfă cerută este $f(z) = 2\ln z + e^z$.

c) Obţinem

$$I = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R} \frac{f(z) - 2\ln z}{z^2(z-i)}dz = \int_{|z-\frac{1}{2}|=R} \frac{e^z}{z^2(z+i)}dz.$$

Se observă că: $z = 0$ este pol de ordin 2 iar $z = -i$ este pol de gradul 1. Deoarece $\left|\dfrac{1}{2} - 0\right| = \dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{1}{2} - (-i)\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, avem $R \in (0,+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Distingem trei cazuri: $R < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$; $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Notând $g(z) = \frac{e^z}{z^2(z+i)}$, obţinem

i) Dacă $R < \frac{1}{2}$, conform teoremei fundamentale Cauchy, rezultă $I = 0$.

ii) Dacă $\frac{1}{2} < R < \frac{\sqrt{5}}{2}$, atunci $I = 2\pi i \mathrm{Rez}(g, 0)$. Obţinem

$$\mathrm{Rez}(g,0) = \lim_{z\to 0}\left(z^2 \frac{e^z}{z^2\,(z+i)}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z+i-i)}{z^2(z+i)^2} = 1-i \to I = 2\pi i(1-i).$$

iii) Dacă $R > \frac{\sqrt{5}}{2}$, atunci $I = 2\pi i(\mathrm{Rez}(g,0) + \mathrm{Rez}(g,-i))$. Avem

$$\mathrm{Rez}(g,0) = 1-i,$$

$$\mathrm{Rez}(g,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^z}{z^2(z+i)} = \frac{e^{-i}}{-1} = e^{-i} = -\cos 1 + i \sin 1.$$

Deci $I = 2\pi i(1 - i - \cos 1 + i\sin 1) = 2\pi i[1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)]$.

2. $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot e^{inx}}{(13 - 15\cos x)^2} dx$. Pentru $|z| = 1$, putem scrie $z = e^{ix}$, deci $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2z}$ şi $dz = zidx$. Obţinem

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2iz} z^n}{(13 - 15\cos x)^2}\frac{dz}{iz} = (-2)\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)z^n}{(5z^2-26z+5)^2}dz.$$

Fie $g(z) = \frac{(z^2-1)z^n}{(5z^2-26z+5)^2}$. Rezultă că $z_1 = 5$ şi $z_2 = \frac{1}{5}$ sunt sigularităţi pentru g. Cum doar $z_2 = \frac{1}{5}$ se află 'in interiorul drumului, calculăm doar reziduul lui g în $z_2 = \frac{1}{5}$ (pol de gradul 2). Rezultă

$$I = (-2)2\pi i \frac{-n}{24 \cdot 5^{n+1}} = \frac{+n\pi i}{6 \cdot 5^{n+1}}.$$

3. Aplicăm transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale şi obţinem

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p-1} \to X(p) = \frac{p}{(p-1)^3}.$$

Fie $G(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3}e^{pt}$. Dar $p = 1$ este pol de gradul 3 pentru G, deci

$$\text{Rez}(G, 1) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^3\frac{p\cdot e^{pt}}{(p-1)^3}\right]'' = \frac{1}{2}e^t(t^2+2t).$$

Rezultă $x(t) = \dfrac{1}{2}e^t(t^2+2t)$.

4. Folosim transformarea Laplace.

Avem $X(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-2)} = \dfrac{-1}{3}\cdot\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p-2}$, iar

$$x(t) = \text{Rez}(X(p)e^{tp}, 1) + \text{Rez}(X(p)e^{tp}, 2) =$$

$$= \lim_{p\to -1}(p+1)\,X(p)e^{tp} + \ di\lim_{p\to 2}(p+2)\,X(p)e^{tp} =$$

$$= \lim_{p\to 1} -\frac{1}{3}e^{tp} + \lim_{p\to 2}\frac{1}{3}e^{tp} = -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}$$

şi deci $x(t) = -\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}e^{2t}$, înmuţită cu treapta unitate.

Analog se obţine $y(t) = x(t)$, iar

$$Z(p) = \frac{1}{p^2-p-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-2} \to z(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

2009-subiecte anul I, Profil mecanic

1. a) Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\cos\frac{y}{x^2} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2\cdot\underbrace{\cos\frac{y}{x^2}}_{finit} = 0\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

b) Fie $y_0 \in \mathbf{R}$, arbitrar, fixat pentru demonstraţie. Fie

$$\alpha(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)\cdot x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)\cdot (y-y_0)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot \cos\dfrac{y}{x^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}} = \frac{x^3 \cdot \cos\dfrac{y}{x^3}}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}.$$

Cum

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \alpha(x,y) = 0,$$

rezultă că f este diferenţiabilă Frechét în punctul $(0,y_0)$.

c) Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\cos\dfrac{y}{x^2} + 2y\sin\dfrac{y}{x^2}, x \neq 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu există ($\sin(\infty)$ nu există). În concluzie $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(0,y)$. Dar $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\sin\dfrac{y}{x^2}$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{x\to 0} -x\underbrace{\sin\dfrac{y}{x^2}}_{\text{finit}} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$, deci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este funcţie continuă in $(0,y)$.

d) Obţinem succesiv grad $g = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)$; Prin calcul direct, rezultă

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = [3r^2\cos\frac{1}{r^2} - \sin\frac{1}{r^2}(-2)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x =$$

$$= [3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = [3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} +$$

$$+2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = [3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} +$$

$$+2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}]\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

în punctul $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Se observă uşor că $\text{grad}g(0,0,0)=(0,0,0)$.

2. a) Efectuăm schimbarea de variabilă $t=x+s$. Atunci

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(s+x)^2}{2}}\,ds=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{s^2}{2}-xs-\frac{x^2}{2}}\,ds=\int_0^{\infty}e^{\frac{-s^2}{2}-xs}\,ds.$$

Faptul că $0<xf(x)$ este trivial.

b) $f'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{\frac{-x^2}{2}}\right)=xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-1=$ $xf(x)-1$.

c) Evident, din a) şi b).

d) $f(0)=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

3. a) Evident $f(x,y,z)=(4x+6y,\ 3x-5y,\ 3x-6y+z)$.

b) Cum $f(x)=Ax,\ A=\begin{pmatrix}4&3&3\\6&-5&-6\\0&0&1\end{pmatrix}^T$, rezultă $f^n(x)=A^n\cdot x$, ceea ce conduce la determinarea numărului natural n şi a numerelor reale $a_1,...,a_n$ cu proprietatea

$$a_n\cdot A^n+a_{n-1}\cdot A^{n-1}+...+a_1\cdot A+a_0\cdot I_3=0.$$

Cum $P_A(x)=-\lambda^3+39\cdot\lambda-38$, rezultă, din teorema Cayley-Hamilton, $-A^3+39\cdot A-38\cdot I_3=0$. Deci $n=3$ şi $a_3=-1,a_2=0,a_1=39$ şi $a_0=-38$.

c) Din $f(u)=u$, dacă $u=(x,y,z)$, rezultă $x=y=0$. Atunci $U=\{(0,0,z)|z\in\mathbf{R}\}$.

4. $S_\lambda: x^2+y^2+z^2-4(\lambda+1)x-2(3\lambda-2)y+2(\lambda-5)z-14\lambda+33=0$.

a) $S_\lambda:(x-2\lambda-2)^2+(y-3\lambda+2)^2+(z-\lambda+5)^2-14\lambda^2=0$. Rezultă că, pentru $\lambda\neq0$, S_λ : (centru $(2\lambda+2,3\lambda-2,\lambda-5)$, raza $|\lambda|\sqrt{14}$). Pentru $\lambda=0$, avem $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=0\Rightarrow a$ este punctul $(2,-2,5)$.

b) Centrul sferelor este $(2\lambda + 2,\ 3\lambda - 2,\ \lambda - 5) = (x, y, z)$, de unde dreapta cerută este:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{1} = \lambda.$$

c) Punctul $(2, -2, 5)$ este punctul comun sferelor S_λ. Planul tangent la sferele S_λ este $2x + 3y - z + 7 = 0$.

2009-subiecte anul I, Profil electric

1. a) Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, x \in [0, 1)$. Atunci $f'(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$, $x \in [0, 1)$. Cum $a_n \geq 0$, rezultă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1)$. Pentru k fixat, $k \in \mathbf{N}$, avem că $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \leq f(x) \leq L, \forall x \in [0, 1)$, de unde $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{k} a_n x^k \leq L$. Rezultă că şirul sumelor parţiale $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n$ este mărginit, seria $\sum_{n=0} a_n$ este convergentă .

Pe de altă parte, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \leq \sum_{n\geq 0} a_n, \forall x \in [0, 1)$, de unde $\lim_{x\nearrow 1} \leq \sum_{n\geq 0} a_n$. Rezultă că $\sum_{n\geq 0} a_n = L$.

b) Exemplu: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

2. a) Observăm că $f_1(x) = \int_a^x f_0(t)dt$, iar

$$f_2(x) = \int_a^x f_1(t)dt = \int_a^x \left(\int_0^t f_0(y)dy\right) dt =$$

$$\int_a^x -\frac{\partial(x-t)}{\partial t} \left(\int_a^t f_0(y)dy\right) dt =$$

$$= -(x-t)\int_a^t f_0(y)dt\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f_0(t)dt = \int_a^x (x-t) f_0(t)dt.$$

Se poate demonstra prin inducţie că

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f_0(t)dt, n \geq 1.$$

Atunci

$$|f_n(x)| = \frac{1}{(n-1)!}\ |\int_a^x (x-t)^{n-1} f_0(t)dt| \leq \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\ |f_0(t)|dt.$$

Cum $f_0(t)$ este continuă pe compactul $[a,b]$, există $M > 0$, astfel încât $|f_0(t)| \leq M, \forall t \in [a,b]$. Deci

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{M}{(n-1)!}\left(\frac{-(x-t)^n}{n}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=x} =$$

$$= \frac{M}{n!}\ (x-a)^n \leq \frac{M}{n!}\ (b-a)^n.$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{M(b-a)^n}{n!}$ este evident convergentă, din Criteriul lui Weirstrass rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ este absolut şi uniform convergentă pe $[a,b]$.

b) Avem

$$\lim_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + ...f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} [\int_a^b f_0(t)dt +$$

$$+\int_a^b (x-t)f_0(t)dt + ... + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (x-t)^{n-1} f_0(t)dt] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b [1 + (x-t) + ... + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}] f_0(t)dt =$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty}\left[1 + (x-t) + ... + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] f_0(t)dt =$$

$$= \int_a^b e^{x-t} f_0(t)dt = e^x \int_a^b e^{-t} f_0(t)dt.$$

3. Cum P_i sunt sunt toate pe aceeaşi circumferinţă, presupunem că ele sunt toate pe un cerc. Atunci $P_1P_2P_iP_j$ $(i < j)$ este un patrulater inscriptibil şi din teorema lui Ptolemeu, rezultă că $a_{12}a_{ij}+a_{1j}a_{i2} = a_{1i}a_{2j}$, $i < j$.

Cum (a_{ij}) este matrice antisimetrică, putem scrie $a_{12}a_{ij} = [a_{2i}a_{1j} + a_{1i}a_{2j},]$ $i, j = \overline{1, n}$. Dacă A_i este linia i din matricea A, avem că $a_{12}A_i = a_{2i}A_1 + a_{1i}A_2$, $i = \overline{1, n}$, ceea ce conduce la concluzia că $\mathrm{rang}(A) \leq 2$. Întrucât A nu este matrice identic nulă şi este antisimetrică, rezultă că $\mathrm{rang}(A) \geq 2$, deci $\mathrm{rang}(A) = 2$.

Fie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, f(x) = ax$. Avem $\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = 0\}$, $\dim(\mathrm{Ker} f) = n - 2$. De asemenea, $\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbf{R}^n \mid Ax = y\}$, $\dim(\mathrm{Im\ f}) = 2$.

4. Din ipoteză $Ax = 0$ pentru $x \neq 0$; rezultă $\mathrm{rang}(A) < n$. Dacă $\mathrm{rang}(A) < n - 1$ atunci $\mathrm{rang}(A_i) \leq n - 1$, deci $\det A_i = 0$ pentru $i = \overline{1, n}$. Presupunem $\mathrm{rang}(A) = n - 1$. Fără a pierde generalitatea putem presupune că $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i$, cu $\alpha_i \in \mathbf{R}$ şi $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, -1)^T$, de unde $B_x = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i - b_n = A_y$, pentru $y \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. Scriind matricele pe coloane, calculăm

$$\det A_1 = \det\left(b_1|a_2 \ldots a_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(b_1|a_2 \ldots a_{n-1}|a_i\right) =$$

$$= \alpha_1 \det\left(b_1|a_2 \ldots a_{n-1}|a_1\right) = \det\left(a_1|a_2 \ldots a_{n-1}| - \alpha_1 b_1\right).$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{n-1} \det A_i = \det\left(a_1|a_2 \ldots a_{n-1}| - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i\right)$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} \det A_i = \det\left(a_1|a_2 v a_{n-1}|b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i\right).$$

Ultima coloană este $-A_y$, deci o combinaţie liniară a coloanelor $a_1, \ldots, a_{n-1}$, de unde concluzia: $\sum\limits_{i=1}^{n} \det A_i = 0$.

2009-subiecte anul II, Profil mecanic

1. a) Rescriem ecuaţia sub formă de sistem diferenţial de ordinul întâi,

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' + (2a-1)z + (a^2+3)y + (a^2+3a)x = 1.$$

Studiem stabilitatea sistemului $X' = AX$.

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(2a-1) - \lambda(a^2+3) - (a^2+3a),$$

iar ecuaţia caracteristică

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(2a-1) + \lambda(a^2+3) + a^2 + 3a = 0.$$

Observăm că $\lambda_1 = -a$ este soluţie, iar $\lambda_{2,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei $\lambda^2 + (a-1)\lambda + 3 + a = 0$. Condiţia de stabilitate impune $-a < 0$, $a - 1 > 0$, $3 + a > 0$, de unde $a > 1$.

b) Dacă $a = 1$, ecuaţia devine $x''' + x'' + 4x' + 4x = 1$. Aplicăm *transformarea Laplace* şi obţinem $(p+1)(p^2+4)\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p}$, de unde

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Aducem la acelaşi numitor şi identificând coeficienţii numărătorilor, rezultă $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{20}$, $D = -\frac{1}{5}$ rezultă

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t).$$

2. a) Folosind *formulele Euler*, ecuaţia devine $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{5}{4}$, de unde $e^{iz} + e^{-iz} = \frac{5}{2}$. Notăm $e^{iz} = t$ şi obţinem $2t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluţiile $t_1 = 2$ şi $t_2 = \frac{1}{2}$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{\pm i \ln 2 + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b)

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5-4\cos t} \cdot e^{int}dt = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{i(-2z^2+5z-2)}dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{2z^2-5z+2}dz.$$

$a_n = \dfrac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ şi $b_n = 0, n \geq 0$. Rezultă

$$f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cos(nt),\ \ t \in (-\pi, \pi).$$

c) Folosim *teorema reziduurilor* pentru calculul integralei complexe. Funcţia $g(z) = \dfrac{1}{5-4\cos z}$ admite ca puncte singulare toate soluţiile ecuaţiei $\cos z = \dfrac{5}{4}$, care au fost determinate la punctul a), şi anume $z = 2k\pi \pm i\ln 2,\ k \in \mathbf{Z}$ (poli de ordinul I).

Vom lua în calcul doar acele puncte singulare aflate în interiorul domeniului $|z-i| < 1$, şi anume $z = i\ln 2$. Atunci

$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{5-4\cos z} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. a) "$\Rightarrow$" Dacă (a, b) este punct de echilibru, atunci $\varphi(t) = (a, b)$ este soluţie a sistemului, de unde $0 = f(a, b)$ şi $0 = g(a, b)$.

"$\Leftarrow$" Dacă $f(a, b) = 0$ şi $g(a, b) = 0 \rightarrow (a, b)$ soluţie a sistemului, de unde (a, b) este echilibru.

b) Presupunem că există două orbite φ_1 şi φ_2 cu $\mathrm{Im}\varphi_1 = \mathrm{Im}\varphi_2$ care nu sunt disjuncte. Rezultă că există t_1, t_2 astfel înc'qt $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Fie $T = t_2 - t_1$. Atunci $\varphi(t) = \varphi_2(t + T)$ este o soluţie a sistemului şi cum $\varphi(t_1) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$, din *Teorema fundamentală Cauchy*, rezultă $\varphi \equiv \varphi_1$. Pe de altă parte, $\varphi_2(t + T) = \varphi_1(t), \forall t \rightarrow$ cele două orbite φ_1 şi φ_2 coincid.

c) Sistemul este echivalent cu $x'' + x = 0$. Polinomul caracteristic asociat $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r = \pm i$, deci soluţia ecuaţiei este

$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\ C_{1,2} \in \mathbf{R}$. Dar $x' = y$, deci $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ C_{1,2} \in \mathbf{R}$.

4. a) Vom calcula $I_k = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz$. Avem

$$\frac{f(z)}{z^k} = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{z^k} =$$

$$= a_0 \cdot \frac{1}{z^k} + a_1 \cdot \frac{1}{z^{k-1}} + ... + a_{k-1} \cdot \frac{1}{z} + a_k + ... + a_n \cdot z^{n-k},$$

de unde, din *Teorema reziduurilor*, $I_k = 2\pi i \cdot a_{k-1}$. Calculăm

$$J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt;$$

folosind substituţia $e^{it} = z$, rezultă

$$J_k = \int_{|z|=1} f(z) \cdot z^{-k} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{i} \cdot I_{k+1} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot a_k = 2\pi a_k.$$

b) Demonstrăm întâi că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt$. Fie $\gamma : |z| = 1,\ \mathrm{Im} z > 0$. Atunci, conform *teoremei fundamentale Cauchy*, avem $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)^2 dz + \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = 0$, de unde

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -\int_{\gamma} f(z)^2 dz \overset{z=e^{it}}{=} -\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 \cdot i e^{it} dt = -i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 \cdot e^{it} dt.$$

Demonstrăm că $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx \le 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. Observăm că

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt.$$

Atunci $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx\right| \le \left|-i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt\right|$ şi obţinem

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \left|\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt\right| \le \int_0^{\pi} |f(e^{it})^2 e^{it}| dt =$$

$$= \int_0^{\pi} |f(e^{it})^2| dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Deoarece

$$|f(e^{it})|^2 = f(e^{it}) \cdot f(e^{it}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt} \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{n} a_p e^{ipt} \right) = \sum_{k,p=0}^{\infty} a_k a_p e^{it(k-p)},$$

rezultă

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k,p=0}^{\infty} a_k a_p e^{it(k-p)} \right) dt = \sum_{k,p=0}^{\infty} a_k a_p \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)} dt.$$

Dacă $k = p$, atunci $\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$. Dacă $k \neq p$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)} dt = \left. \frac{e^{it(k-p)}}{i(k-p)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi i(k-p)} - e^{-\pi i(k-p)}}{i(k-p)} =$$

$$= \frac{2}{k-p} \cdot \sin(\pi(k-p)) = 0.$$

În concluzie, $\int_0^1 f(x)^2 dx \le 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

2009-subiecte anul II, Profil electric

1. Identic cu subiectul 1) de la profil mecanic.

2. a) Dacă $f : D \to \mathbf{C}$ este olomorfă şi D este disc deschis în $\mathbf{C}$, rezultă f analitică. Fie z_0 centrul discului D şi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ dezvoltarea lui f in jurul lui z_0. Fie $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$; cum $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z)$, rezultă că F este o primitivă a lui f. Fie F şi G două primitive a lui f pe discul $D \to F'(z) = f(z)$ şi $G'(z) = f(z), \forall z \in D \to (F-G)'(z) = 0, \forall z \in D$. Cum D este conex, avem $F - G = constant$.

b) Fie $\gamma : [a, b] \to D, \gamma(a) = z_1$ şi $\gamma(b) = z_2$ arc simplu orientat în D. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\ \gamma\prime(t)dt = F(\gamma(t))|_a^b =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1).$$

c) Avem

$$a + ib = -\cos z\ |_0^{\frac{\pi}{2}+i} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) + 1 =$$

$$-\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)} + +e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2} + 1 = -\frac{e^{-1+i\frac{\pi}{2}} + e^{1-i\frac{\pi}{2}}}{2} + 1 =$$

$$= -\frac{-e^{-1}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) + e^{1}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})}{2} + 1 =$$

$$= \frac{i(e^1 - e^{-1})}{2} + 1 = 1 + i\text{sh}1,$$

de unde $a = 1, b = \text{sh}1$.

3. Seria Fourier ataşată funcţiei f este determinată la profilul mecanic - punctul 2b), $f(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos(nx), x \in [-\pi, \pi]$.

Cum

$$\left|\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos(nx)\right| = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}|\cos(nx)| \leq \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$$

şi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ este convergentă, din criteriul Weierstrass, rezultă că seria Fourier este uniform şi absolut convergentă pe $\mathbf{R}$. Obţinem

$$\int_{|z|=3} \frac{dx}{5 - 4\cos z} = 2\pi i\left(\frac{1}{4\sin(i\ln 2)} + \frac{1}{4\sin(-i\ln 2)}\right) = 0.$$

Notă. Ecuaţia $5 - 4\cos z = 0$ este rezolvată la punctul 2a) - profilul mecanic.

2010-subiecte anul I, Profil mecanic

1.a) $\sqrt{2|xy|} \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 2|xy| \le x^2+y^2 \Rightarrow (|x|+|y|)^2 \ge 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)(A)$.

b) Avem $\dfrac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \dfrac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{2|xy|}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot |x|^{a-\frac{1}{2}} \cdot |y|^{b-\frac{1}{2}} \lim\limits_{x,y\to 0} \longrightarrow 0$. Rezultă că $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, deci f este continuă în origine.

c) Obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

d) Pentru $a = 4$ şi $b = 1$, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}, n\right)(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}(x+1)^n.$$

Notăm $a_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}$. Să observăm că $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, de unde raza de convergenţă este 1, deci $x+1 \in (-1,1), x \in (-2,0)$. Dacă $x = -2$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}(-1)^n$ (convergentă cu criteriul Leibnitz).

Dacă $x = 0$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}} < \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ convergentă, şi din criteriul comparaţiei, rezultă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}$ convergentă. În concluzie mulţimea de convergenţă este $[-2,0]$.

2. Considerăm integrala $I(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}dx,\ y \ge 0$.

a) Avem $I(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (cu funcţia Γ), deci $I(y)$ este convergentă, pentru orice $y \in [0,+\infty)$.

b) Derivând în raport cu parametrul y, rezultă

$$I'(y) = \int_0^\infty e^{-(x+\frac{y}{x})^2} \cdot \left[-2\left(x + \frac{y}{x}\right)\right] \cdot \frac{1}{x} dx,$$

de unde

$$I'(y)+4I(y) = \int_0^\infty e^{-(x+\frac{y}{x})^2} \left(2 - \frac{2y}{x^2}\right) dx = 2\int_0^\infty e^{-(x+\frac{y}{x})^2} \left(1 + \frac{y}{x}\right)'_x dx =$$

$$= 2\int_0^a e^{-(x+\frac{y}{x})^2} \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)'_x dx + 2\int_a^\infty e^{-(x+\frac{y}{x})^2} \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)'_x dx =$$

$$= -2\int_{a+\frac{y}{a}}^\infty e^{-u^2} du + 2\int_{a+\frac{y}{a}}^\infty e^{-u^2} du = 0,$$

unde s-a folosit substituţia $x + \dfrac{y}{x} = u$. Rezultă că $I'(y) = -4I(y),\ \forall y \geq 0$.

c) Deoarece $\dfrac{I'(y)}{I(y)} = -4$, rezultă $\displaystyle\int \frac{I'(y)}{I(y)} dy = -4\int dy \Rightarrow \ln I(y) = -4y + \ln C$, deci $I(y) = C \cdot e^{-4y}$, $(\forall) y \geq 0$. Dar $I(0) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, deci $I(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-4y}$.

3. a) Verificarea că T este lineară este trivială.

$$\text{Ker}T = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid T(x) = 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbf{R}^3; \mid (2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_1 - 2x_2) = 0\} =$$

$$= \{(2\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$$

$\text{Im}T = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid T(x) = y\} = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3; \mid 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0\}$.

b) Proprietatea cerută reprezintă un caz particular al problemei omologe de la profilul electric, pentru vectorul $a = -2i - j - 2k \equiv (-2, -1, -2)$. În acest caz, matricea asociată lui $T : V_3 \to V_3, T(v) = a \times v$ relativ la baza canonică $\{i, j, k\}$, coincide cu cea din enunţul problemei date.

c) Avem $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci

$$I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii Q sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$\det(Q - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -5\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0,$$

deci $(1 - \lambda)(5\lambda^2 + 8\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} \in \mathbf{C}$. Deci singura valoare proprie reală este $\lambda = 1$. Fie $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$, deci

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c = a, \ b = \frac{a}{2},$$

$$a \in \mathbf{R}, \ v = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{C}.$$

4. $\pi : (2m+1)x + (3-4m)y + 3z - 2 = 0$.

a) Vectorul normal la plan are componentele $n \equiv (2m+1, 3-4m, 3)$.

Condiţia ca planul π_1 să conţină Ox şi să fie perpendicular pe π este echivalentă cu condiţiile $O(0,0,0) \in \pi_1$, $\pi_1 || i \equiv (1,0,0)$, $\pi_1 || n$, deci

$$\pi_1 : 3y - z(3-4m) = 0.$$

Analog obţinem $\pi_2 : 3x - z(2m+1) = 0$, $\pi_3 : (3-4m)x - y(2m+1) = 0$.

b) Se observă că vectorii $n_1 \equiv (0, 3, 4m-3)$ şi $n_2 \equiv (3, 0, -2m-1)$ care sunt normali respectiv la planele π_1 şi π_2, sunt necoliniari, deci planele π_1 şi π_2 sunt concurente după o dreaptă Δ. De asemenea, notând cu e_1, e_2, e_3 expresiile care anulate dau respectiv ecuaţiile planelor π_1, π_2, π_3, se observă că $e_1 \cdot \dfrac{-(2m+1)}{3} + e_2 \cdot \dfrac{3-4m}{3} = e_3$, deci π_3 aparţine fasciculului de plane determinat de π_1 şi π_2, deci conţine dreapta Δ,. Rezultă ca π_1, π_2 şi π_3 sunt plane concurente după dreapta Δ.

c) Eliminând parametrul m din ecuaţiile dreptei Δ (ecuaţiile planelor π_1 şi π_2), rezultă ecuaţia planului în care se află conţinută această dreaptă, atunci când m variază:

$$m = \frac{3y - 3z}{-4z} = \frac{3x - z}{2z} \Rightarrow 6x - 3y - 5z = 0.$$

2010-subiecte anul I, Profil electric

1. Dacă f este şi derivabilă, atunci

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{f(x)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} = 1 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = (x+c)^2.$$

Dar $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$, deci toate soluţiile problemei sunt

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ x^2, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0] \\ 0, & x \in (0, \infty), \end{cases} \qquad f_4(x) = 0.$$

2. Are loc dezvoltarea în serie Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

a) Notăm $I_n = \int_0^x e^{-t} t^n dt$. Integrăm prin părţi şi obţinem relaţia de recurenţă $I_n = -e^{-x} x^n + nI_{n-1}$, de unde

$$I_n = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + ... + n!) + n!$$

Alegerea lui $f(x)$ este determinată de $\int_0^x e^{x-t} f(t)dt = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, deci $\int_0^x e^{-t} f(t)dt = \frac{1 - e^{2x}}{2}$ şi derivând, $e^{-x} f(x) = e^{-2x}$, de unde $f(x) = e^{-x}$.

b) Se alege $f(x) = e^{-x}$ şi înlocuind în relaţia de la punctul a) se obţine imediat relaţia cerută.

3. a) Folosind proprietăţile produsului vectorial, avem

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{a} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{a} \times \vec{v}_1 + \vec{a} \times \vec{v}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2),$$

$$T(k\vec{v}) = \vec{a} \times (k\vec{v}) = k(\vec{a} \times \vec{v}) = kT(\vec{v}), \ \forall k \in \mathbf{R},$$

de unde T este aplicaţie liniară.

Ker $T = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ (mulţimea vectorilor colieari cu $\vec{a}$). Fie $\vec{y} = T(\vec{v})$. Atunci $\vec{y} = \vec{a} \times \vec{v}$, deci Im$T = \{\vec{y} \mid \vec{y} \perp \vec{a}\}$.

b) Fie $\theta_1 = (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$, $\theta_2 = (\widehat{T\vec{v}_1, T\vec{v}_2})$, unde $\vec{v}_k = T\vec{u}_k = \vec{a} \times \vec{u}_k$, $k \in \{1, 2\}$. Folosind faptul că unghiul format de doi vectori nu depinde de lungimile vectorilor, că T este aplicţie liniară şi că produsul vectorial este biliniar, putem presupune că vectorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sunt versori.

În plus, deoarece avem $T\vec{w} = ||\vec{a}|| \left(\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \times \vec{w} \right)$ şi transformarea liniară de scalare omogenă de factor $||\vec{a}||$ conservă unghiurile, putem presupune că $\vec{a}$ este versor. În aceste condiţii, not'qnd $c_k = \cos(\widehat{\vec{u}_k, \vec{a}})$, $k \in$

$\{1, 2\}$, folosind bilinearitatea produsului scalar şi egalitatea $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{w}) = \langle \vec{a}, \vec{w} \rangle \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{w}$, avem

$$\langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2 \rangle = \langle c_1\vec{a} - \vec{u}_1, c_2\vec{a} - \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle - c_1c_2.$$

Analog, folosind proprietatea de rulare a produsului mixt şi antisimetria produsului vectorial, avem

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{u}_1, \vec{a} \times \vec{u}_2 \rangle = -\langle \vec{u}_1, c_2\vec{a} - \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle - c_1, c_2,$$

şi deci $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2 \rangle$. Folosind relaţia $\langle \vec{a}, T\vec{w} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \widehat{\vec{a}, T\vec{w}} = \frac{\pi}{2}, \forall \vec{w} \in V_3$, rezultă $||T\vec{v}_k|| = ||\vec{a} \times \vec{v}_k|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{v}_k|| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, T\vec{u}_k}) = ||\vec{v}_k||$. Deci

$$\cos\theta_2 = \frac{\langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2 \rangle}{||T\vec{v}_1|| \cdot ||T\vec{v}_2||} = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{v}_1|| \cdot ||\vec{v}_2||} = \cos\theta_1,$$

deci transformarea T conservă unghiurile (este conformă).

c) Fie $S(\vec{v})$ liniară cu proprietatea $S(\vec{v}) \perp \vec{v}$, deci $S(\vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}$, $\forall \vec{v} \in V_3$. Fie A matricea unică, $A \in M_3(\mathbf{R})$ cu proprietatea $S(\vec{v}) = A\vec{v}$. Notăm $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$. Impunând condiţia de ortogonalitate, obţinem

$$a_{21}v_1v_3 + a_{22}v_2v_3 + a_{23}v_3^2 - a_{31}v_1v_2 - a_{32}v_2^2 - a_{33}v_2v_3 = 0,$$

$$a_{11}v_1v_3 + a_{12}v_2v_3 + a_{13}v_3^2 - a_{31}v_1^2 - a_{32}v_1v_2 - a_{33}v_1v_3 = 0,$$

$$a_{11}v_1v_2 + a_{12}v_2^2 + a_{13}v_2v_3 - a_{21}v_1^2 - a_{22}v_1v_2 - a_{23}v_1v_3 = 0, \ \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3.$$

Alegând $\vec{v} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 0, 1), \vec{v} = (0, 1, 0)$, obţinem

$$a_{21} = a_{31} = 0, \ \ a_{12} = a_{32} = 0, \ \ a_{13} = a_{23} = 0$$

şi înlocuind, obţine $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda \in \mathbf{R}$. Deci $S(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbf{R}$.

4. Fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ vectori proprii. Cum oricare n dintre ei sunt liniari independenţi, rezultă că al $(n+1)$-lea vector este liniar dependent de ceilalţi n aleşi.

Există deci $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, nu toţi nuli, a.î. $v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Presupunem că $\alpha_1 \neq 0$. Pe de altă parte, $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, T(v_{n+1}) = \lambda_{n+1} v_{n+1}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ sunt valori proprii, deci

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0, \quad \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = 0, \quad \ldots \quad \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0.$$

Dar $\alpha_1 \neq 0$, deci $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$. Cum acelaşi raţionament se poate repeta pe orice combinaţie a celor $n+1$ vectori, rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = \lambda$. Deci $T = \lambda I$, unde I este aplicaţia identică.

2010-subiecte anul II

1. a) Înmulţim ecuaţia diferenţială cu t. Obţinem ecuaţia Bessel

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + t^2 x(t) = 0,$$

cu $\nu = 0$, a cărei soluţie este $x(t) = C \cdot J_0(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{t}{2}^{2n}$.

Impunând condiţia iniţială $x(0) = 1$, rezultă $C = 1$, de unde soluţia unică $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{t}{2}^{2n}$.

b) Folosim transformarea Laplace. $Ł[x] = -Ł[y] = \dfrac{2}{(p-2)(p-1)}$ şi $Ł[z] = \dfrac{1}{p-2}$. Rezultă soluţia $x = 2(e^{2t} - e^t)$, $y = 2(e^t - e^2 t)$ şi $z = e^{2t}$.

2. Notăm $\dfrac{y}{x} = t(x, y)$.

Cum u şi v sunt funcţii armonice, impunem $\Delta u + \Delta v = 0 \rightarrow$

$$\varphi''(t) \frac{1}{x^2} \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) + 2 \frac{1}{x^2} \frac{y}{x} \varphi'(t) = 0.$$

Împărţinând la $\frac{1}{x^2}$, obţinem $(t^2 + 1)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$, de unde $\varphi(t) = C_1 \mathrm{arctg}(t) + C_2,\ C_{1,2} \in \mathbf{R}$. Folosind relaţiile Cauchy-Riemann, obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = C_1 \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = C_1 \frac{x}{x^2 + y^2},$$

de unde $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{C_1}{2}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{C_1}{2}\dfrac{-x-y}{x^2+y^2}$. Atunci

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C_1}{2}\frac{x+y}{x^2+y^2} - i\frac{C_1}{2}\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Pentru $y = 0$ avem $f'(x) = \dfrac{-C_1}{2}\dfrac{1}{x} - i\dfrac{C_1}{2}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{C_1}{2}(1+i)\dfrac{1}{x}$, de unde $f(x) = -\dfrac{C_1}{2}(1+i)\ln x + C_3$, $C_3 \in \mathbf{R}$, deci $f(z) = -\dfrac{C_1}{2}(1+i)\ln(z) + C_3$, $C_3 \in \mathbf{C}$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem $C_3 = 0$ şi $C_1 = 2i$. Rezultă $f(z) = (1-i)\ln(z)$.

3. Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale; obţinem

$$p\text{Ł}[x] - 2\text{Ł}[x]\text{Ł}[\cos t] = \text{Ł}[t]\text{Ł}[\sin t],$$

de unde $\text{Ł}[x] = \dfrac{1}{p^3(p^2-1)}$. Considerăm funcţia $G(p) = \dfrac{e^{-pt}}{p^3(p^2-1)}$.

Pentru G, $p = 0$ este pol triplu, iar $p = \pm 1$ sunt poli simpli. Atunci

$$x = \text{Rez}(G,0) + \text{Rez}(G,1) + \text{Rez}(G,-1) = \text{ch}t - \frac{t^2+2}{2}.$$

4. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$. Seria Fourier trigonometrică a lui f este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

Calculăm $a_n + ib_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x} \cdot e^{inx}\, dx$. Folosind schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$, obţinem $a_n + ib_n = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{(z^2+1)^2 \cdot z^{n-2}}{2z^2 + 5iz - 2}\, dz$.

Cazul I. Dacă $n \geq 2$, atunci funcţia $g(z) = \dfrac{(z^2+1)^2 \cdot z^{n-2}}{2z^2+5iz-2}$ admite două puncte singulare: $z_1 = \dfrac{-i}{2}$ şi $z_2 = -2i$.

Cum $|z_2| = 2 > 1$, rezultă că

$$a_n + ib_n = \frac{(-1)^{n-2}\cdot 3}{2^{n+3}} \cdot \left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

de unde, pentru $n \geq 2$, avem

$$a_n = \frac{(-1)^{n-2} \cdot 3}{2^{n+3}} \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{2}, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n-2} \cdot 3}{2^{n+3}} \cdot \sin \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

Cazul II. Pentru $n = 1$, avem funcţia $g(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z(2z^2+5iz-2)}$, iar $z_1 = 0$, $z_2 = \dfrac{-i}{2}$, $z_3 = -2i$ sunt poli simpli ai functiei g.

Cum z_3 nu este în interiorul domeniului $|z| < 1$, rezultă că

$$a_1 + ib_1 = \frac{i}{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{8}\right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{-1}{8} = \frac{-i}{16},$$

de unde $a_1 = 0$ şi $b_1 = \dfrac{-1}{16}$.

Cazul III. Pentru $n = 0$ avem $g(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(2z^2+5iz-2)}$, pentru care $z_1 = 0$ este pol dublu, iar $z_2 = \dfrac{-i}{2}$, $z_3 = -2i$ sunt poli simpli. Atunci

$$a_0 + ib_0 = \frac{i}{2}\left(\frac{-5i}{4} + \frac{3i}{4}\right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{-i}{2} = \frac{1}{4},$$

de unde $a_0 = \dfrac{1}{4}$. Rezultă seria Fourier trigonometrică cerută.

2011 - subiecte anul I, Profil mecanic

1. a) Avem $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ \dfrac{a^2}{2} & a & 1 \end{pmatrix}$, de unde $\operatorname{Ker}(T_a) = 0$ şi $\operatorname{Im}(T_a) = \mathbf{R}^3$.

b) $\lambda = 1$ triplă. Pentru $a \neq 0$, matricea M_a nu este diagonalizabilă.

c) $\left(M_a\right)^{-1} = M_{-a}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \exp\left(M_a\right)$, etc.

2. Standard.

3. Standard.

4. a) Raza de convergenţă este $\frac{1}{3}$ şi mulţimea de convergenţă $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Derivata sumei $S(x)$ este o progresie geometrică, având primul termen $6x$ şi raţia $-3x^2$, deci $S'(x) = \frac{6x}{1+3x^2}$, de unde $S(x) = \frac{6}{\sqrt{3}}\text{arctg}(x\sqrt{3})$.

b) Seria este uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $0 \le r < \frac{1}{3}$.

2011- subiecte anul I, Profil electric

1. a) Pentru orice $t \in \mathbf{R}$, avem

$$g(t) = g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}g''(\xi),$$

cu ξ situat între t_0 şi t.

b) Deoarece $|f(x)| \le 1$ şi $|f''(x)| \le 1$, pentru orice x, rezultă $g(t) \ge 0$, deci

$$0 \le g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2},$$

pentru orice t. rezultă $g'(t_0)^2 - 2g(t_0) \le 0$, deci $g'(t_0)^2 \le 2$, pentru orice t_0 fixat.

Aşadar,$|g'(t_0)| \le \sqrt{2}$ şi ca atare, $|f'(x)| \le \sqrt{2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea asociată lui T în baza canonică a lui $\mathbf{R}^2$, deci $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

În primul caz, rezultă că $x(ax + by) + y(cx + dy) = 0$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$. În particular şi pentru $x = 1, y = 0$ (respectiv $x = 0, y = 1$) şi rezultă $a = 0, d = 0$, deci $(b + c)xy = 0$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, adică $b + c = 0$. Aşadar $T(x, y) = (by, -bx)$, cu $b \in \mathbf{R}$, arbitrar.

În cazul secund, rezultă $(ax + by)\overline{x} + (cx + dy)\overline{y} = 0$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Punând $x = 1, y = 0$ (respectiv $x = 0, y = 1$) ca mai sus, rezultă $b\overline{x}y + cx\overline{y} = 0$, pentru orice $x, y \in \mathbf{C}$, deci $b = 0, c = 0$.

Ca atare, $S = 0$.

2011- subiecte anul II

1. a) Funcţia u este armonică, deci $\Delta u = 0$. dar $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ în fiecarec punct, deci $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$. Notăm $t = \mathrm{tg}\theta$, deci $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = u'(t)\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u''(t)\dfrac{1}{\cos^2 4\theta} + u'(t)\dfrac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}$. Rezultă $u''(t)(t^2+1) + u'(t)2t = 0$ şi integrând de două ori, $u(t) = \dfrac{C}{1+t^2}$; ca atare, $u(t) = C\mathrm{arctg}t + C_1$, deci $u = C\theta + C_1$. Folosind relaţiile Cauchy-Riemann, obţinem $v = -C\ln\rho + C_2$ şi $f(z) = u + iv$ cu C_1, C_2 constante reale arbitrare).

b) Integrandul, pentru $a \neq 0$, are $z = 0$ pol simplu şi $z = a$ punct esenţial izolat;

$$r_1 = \text{ Rez}(f, 0) = \frac{1}{a^2}\exp\left(-\frac{1}{a}\right) \text{ şi } r_2 = \text{ Rez}(f, a) = -\frac{1}{a^2}\exp\left(-\frac{1}{a}\right)$$

folosind dezvoltarea în serie Laurent.

Dacă $r < a$, atunci $I = 2\pi i\dfrac{1}{a^2}\exp\left(-\dfrac{1}{a}\right)$, iar dacă $r > a$, $I = 0$.

Dacă $a = 0$, atunci $I = \displaystyle\int_{|z|=r} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^3}dz = 0$.

2. Problemă standard.

3. Folosind inversa Transformatei Fourier prin sinus, se obţine

$$\varphi(t) = \frac{2te^{-at}}{a^2}.$$

4. a) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}$ se calculează separat. Se calculează apoi

$$a_n + ib_n = \frac{(-1)^n(1 - in)}{\pi(1 + n^2)},$$

de unde, pentru $n \geq 1$, rezultă a_n şi b_n.

b) Pentru calcularea sumei S_1 se ia $x = 0$ în dezvoltarea de la punctul a) şi se obţine $S_1 = \frac{\pi}{2\text{sh}\pi} - 1$.

Folosind formula Parseval, se obţine $S_2 = \pi\text{ch}\pi - \frac{1}{2}$.

Soluţii la Capitolul 3

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. a) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)(2n+2)} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

b) $a_n = \dfrac{n\cdot 2^n}{(n+2)!} = \dfrac{(n+2-2)\cdot 2^n}{(n+2)!} = \dfrac{2^n}{(n+1)!} - \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!} =$
$= f(n) - f(n+1)$, unde $f(n) = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Avem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = f(1) - f(n+1) = \frac{2}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

c) Avem

$$a_n = \frac{(a+1)\ldots(a+n)}{(b+1)\ldots(b+n)} = a_{n-1}\frac{a+n}{b+n},$$

din care rezultă

$$a_{n-1}(a+n) = a_n(b+n)$$

sau

$$a_{n-1}(a+n) = a_n[(a+n+1) + (b-a-1)],$$

deci

$$a_{n-1}(a+n) - a_n(a+n+1) = (b-a-1)a_n.$$

Suma primilor termeni ai seriei este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{b-a-1} \sum_{k=1}^{n} (f(n-1) - f(n)) =$$

$$= \frac{1}{b-a-1}(f(0) - f(n)) = \frac{1}{b-a-1}(a_0 \cdot a - a_n(a+n+1)) =$$

$$= \frac{1}{b-a-1} \left(\frac{a^2}{b} - (a+1)\frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)} \right).$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^2}{b(b-a-1)} - (a+1) \lim_{n\to\infty} \frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)}.$$

Ultima limită o determinăm astfel:

$$\frac{(a+2)\dots(a+n+1)}{(b+1)\dots(b+n)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{b-a-1}{a+2}\right)\left(1+\frac{b-a-1}{a+2}\right)\dots\left(1+\frac{b-a-1}{a+n+1}\right)} <$$

$$< \frac{1}{\frac{b-a-1}{a+2} + \frac{b-a-1}{a+3} + \dots + \frac{b-a-1}{a+n+1}} =$$

$$= \frac{1}{b-a-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \dots + \frac{1}{a+n+1}}$$

care are limita zero căci seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a+n}$ este divergentă (comparând-o cu seria armonică). Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a^2}{b(b-a-1)}.$$

d) Este cunoscută identitatea:

$$\left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a] - [a], \quad a \in \mathbf{R}.$$

Avem

$$a_n = \left[\frac{a+2^n}{2^{n+1}}\right] = \left[\frac{a}{2^n}\right] - \left[\frac{a}{2^{n+1}}\right],$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = [a] - \left[\frac{a}{2^{n+1}}\right]$$

şi

$$S_n = \begin{cases} [a], & \text{dacă} \quad a \geq 0 \\ [a]+1, & \text{dacă} \quad a < 0. \end{cases}$$

e) Avem identitatea $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x - 2\mathrm{ctg}2x$ şi

$$a_n = \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(\mathrm{ctg}\frac{a}{2^n} - 2\mathrm{ctg}\frac{a}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{ctg}\frac{a}{2^{n-1}}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{a}{2^n} - \mathrm{ctg}a,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\mathrm{ctg}a + \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\mathrm{tg}\frac{a}{2^n}} = -\mathrm{ctg}a + \frac{1}{a}.$$

f) Avem identitatea

$$\mathrm{arctg}2x = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}\frac{x}{1+2x^2},$$

din care

$$\mathrm{arctg}\frac{2^n}{1+2^{2n+1}} = \mathrm{arctg}2^{n+1} - \mathrm{arctg}2^n.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{arctg}2^{k+1} - \mathrm{arctg}2^k) = \mathrm{arctg}2^{n+1} - \mathrm{arctg}1 = \mathrm{arctg}2^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

g) Avem identitatea:

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{dacă} \quad ab < 1 \\ \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{dacă} \quad ab > 1 \end{cases}$$

$$a_n = \operatorname{arctg}\frac{3}{n^2-n-1} = \operatorname{arctg}\frac{3}{1+n^2-n-2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(n+1)-(n-2)}{1+(n+1)(n-2)} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n-2).$$

$$S_n = \sum_{k=3}^{n}(\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}(k-2)) =$$

$$= \operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg}(n-1) - \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}3.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3) =$$

$$= 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{2+3}{1-2\cdot 3}\right) = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

h) Considerăm seria de puteri

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+1}}{4k+1} + \frac{x^{4k+2}}{4k+2} - \frac{x^{4k+3}}{4k+3} - \frac{x^{4k+4}}{4k+4}\right)$$

care are raza de convergenţă $R = 1$. Avem

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^{4k} + x^{4k+1} - x^{4k+2} - x^{4k+3}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(1+x)(x^{4k} - x^{4k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty}(1+x)((x^2)^{2k} - (x^2)^{2k+1}) =$$

$$= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Integrând relaţia de mai sus rezultă:

$$f(x) = \int \frac{1+x}{1+x^2}dx \text{ şi } f(0) = 0.$$

Avem

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \text{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

şi din $f(0) = 0$ rezultă $c = 0$, deci

$$f(x) = \text{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Seria de puteri este convergentă şi în $x = 1$, deci suma seriei date este

$$S = f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

i) Şirul cu termenul general

$$x_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2}$$

este convergent şi notăm limita sa cu l. Avem:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{\ln k}{k} =$$

$$= -\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \cdots - \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + \frac{\ln 2n}{2n} =$$

$$= -\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln(2n-1)}{2n-1} + \frac{\ln(2n)}{2n}\right) +$$

$$+2\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln(2n)}{2n}\right) =$$

$$= -x_{2n} + x_n + \ln 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = -l + l + \ln 2 \cdot c - \frac{(\ln 2)^2}{2} = \ln 2\left(c - \frac{\ln 2}{2}\right)$$

unde $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ este constanta lui Euler.

j) Arătăm că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ este produsul Cauchy al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ cu ea însăşi. Termenul general al produsului este

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right)$$

dar

$$\frac{1}{k(n+1-k)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right),$$

deci

$$c_n = (-1)^n\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Deoarece seria produs este o serie alternantă iar şirul $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n+1}$ este descrescător spre zero, conform criteriului lui Leibniz, seria produs este convergentă şi atunci suma ei este

$$S = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)^2 = (\ln 2)^2.$$

k) Avem

$$an^2+bn+c = \alpha n(n-1)+\beta n+\gamma, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Prin identificare găsim $\alpha = a$, $\beta = a+b$, $\gamma = c$ şi atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{an^2+bn+c}{n!} = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} =$$

$$= a\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} =$$

$$= ae + (a+b)e + ce = (2a+b+c)e$$

l) Avem

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}.$$

Rămâne să studiem convergenţa şirului S_n dat de recurenţa:

$$S_{n+1} = f(S_n),\ n \geq 1 \text{ şi } S_1 = 1,$$

unde $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$.

Dacă şirul este convergent, limita sa l verifică ecuaţia: $l = f(l)$ care are unica soluţie $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funcţia f este descrescătoare pe $]0,1[$, iar funcţia $f \circ f$ este descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ şi $(f \circ f)(x) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ pentru $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, termenii impari ai şirului $(S_n)_n$ sunt monotoni descrescători iar cei pari sunt monotoni crescători, ambele subşiruri fiind convergente la $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a)

Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{a+n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

deci criteriul raportului este ineficient. Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a\,n}{n+1} = a.$$

Pentru $a > 1$ seria este convergentă, iar pentru $a < 1$ seria este divergentă. Pentru $a = 1$ seria este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ care este divergentă (seria armonică).

b) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a}{2(2n+1)} = \frac{a}{4}$$

Pentru $a < 4$ seria este convergentă, iar pentru $a > 4$ seria este divergentă (criteriul raportului). Pentru $a = 4$ aplicăm criteriul Raabe-Duhamel.

Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+2} - 1\right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

deci seria este divergentă. (Pentru $a = 4$ şirul $(a_n)_n$ este crescător, deci nu este convergent la zero.)

c) Aplicăm criteriul condensării

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n\ln 2)\ln n \ln(\ln 2)} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2 \ln\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}.$$

Acum aplicăm din nou criteriul condensării

$$\sum \frac{1}{n\ln n} \sim \sum \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \sum \frac{1}{n\ln 2}$$

care este divergentă.

d) Pentru diferenţa $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pe intervalul $[n, n+1]$ şi obţinem

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{c_n}\right) - \frac{1}{c_n+1}\right),$$

cu $c_n \to \infty$.

Avem:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2(1+t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1+\ln(1+t)-1}{2t} = \frac{1}{2}$$

Aplicăm criteriul de comparaţie folosind seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right) = \frac{e}{2},$$

deci cele două serii au aceeaşi natură (divergente).

e) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^a + 2^a + \cdots + n^a}{n^{a+1}} = \frac{1}{a+1}.$$

Aplicăm criteriul comparaţiei, comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ şi atunci seriile au aceeaşi natură. Pentru $a > 0$ seria este convergentă, iar pentru $a \leq 0$ seria este divergentă.

f) $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+n\pi) =$

$$= (-1)^n \sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$$

Şirul $\sqrt{n^2+1}-n$ este descrescător spre zero, deci $\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n) > 0$. Seria este alternantă iar şirul $\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$ este descrescător la zero. Conform criteriului lui Leibniz , seria este convergentă.

g) Fie $a_n = a\sin n + b\cos n$ şi $b_n = \frac{1}{n}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este mărginită iar şirul b_n este descrescător la zero, conform criteriului lui Abel rezultă că seria dată este convergentă.

3. (G. Polya) Definim numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ prin relaţiile $c_1c_2\ldots c_n = (n+1)^n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1c_1\cdot a_2c_2\ldots a_nc_n}}{n+1} \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_kc_k) \right) \overset{(**)}{\leq}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_kc_k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_kc_k) \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_kc_k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \overset{(***)}{<}$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} a_k e = e \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

În $(*)$ s-a folosit inegalitatea mediilor.

În $(**)$ s-a folosit egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \right)$$

În $(***)$ s-a folosit faptul că şirul $e_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ este crescător cu limita e, deci $e_k < e$, $k \in \mathbf{N}$.

4. Putem presupune că $\varepsilon_1 = 1$ şi arătăm prin inducţie că:

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k}{2^k} \right)$$

Notăm $a_n = \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n \sqrt{2}}}$ şi avem:

$$a_1 = \varepsilon_1 \sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$a_n^2 = 2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \varepsilon_3 \sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} =$$

$$= 2 + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_k}{2^{k-1}} \right) =$$

$$= 2 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) =$$

$$= 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) =$$

$$= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k}}\right),$$

deci

$$a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k}}\right)$$

Trecând la limită rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k}}\right)$$

Observaţie. În particular pentru $\varepsilon_n = 1$, $n \in \mathbf{N}^*$ rezultă

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

5. a) Prin inducţie se arată că $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi din inegalitatea $\ln(1+x) \le x$ rezultă că şirul $(a_n)_n$ este descrescător (şi mărginit de zero) deci convergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ atunci din relaţia de recurenţă rezultă $l = \ln(1+l)$ cu singura soluţie $l = 0$.

b) Comparăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln(1+a_n)}{a_n-\ln(1+a_n)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \dfrac{\ln(1+x)}{x}}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 - \dfrac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2(1+x) = 2 \in (0,\infty),$$

deci seriile au aceeaşi natură (divergente).

c) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (na_n)^2 = 4 \in (0,\infty)$$

deci ambele serii sunt convergente.

6. Fie $l = \lim_{n\to\infty} na_n$, $l \geq 0$. Dacă presupunem $l > 0$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\dfrac{1}{a_n}} = l > 0$$

deci seriile $\sum a_n$ şi $\sum \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură, deci ambele divergente.

7. Dacă luăm $a_n = \cos n$ şi $b_n = \frac{1}{n}$, şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este mărginit, iar şirul $(b_n)_n$ este descrescător la zero, deci conform criteriului lui Abel seria este convergentă.

Pentru seria valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$, considerăm funcţia

$$f(x) = |\cos x| + |\cos(x+1)|, \quad f : \mathbf{R} \to [0,\infty),$$

care este continuă şi are un minim diferit de zero, deci $f(x) \geq m > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ (îşi atinge minimul pe intervalul $[0, 2\pi]$). Avem:

$$\frac{|\cos 1|}{1} + \frac{|\cos 2|}{2} + \frac{|\cos 3|}{3} + \frac{|\cos 4|}{4} + \cdots + \frac{|\cos(2n-1)|}{2n-1} + \frac{|\cos 2n|}{2n} \geq$$

$$\geq \frac{|\cos 1| + |\cos 2|}{2} + \frac{|\cos 3| + |\cos 4|}{4} + \cdots + \frac{|\cos(2n-1)| + |\cos 2n|}{2n} \geq$$

$$\geq \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \cdots + \frac{m}{2n} = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

deci şirul sumelor parţiale are limita $+\infty$.

8. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} S_n a^n$ este produsul Cauchy al seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$, ambele convergente, iar suma primei serii este $\frac{1}{1-a}$.

9. Avemm inegalităţile

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$$

şi

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leq e^{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

$(e^x \geq 1 + x,\ x \geq 0)$.

10. Prin absurd presupunem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Înmulţim cu $q!$ şi obţinem

$$(q-1)! \cdot p = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$$

Cum prima sumă este număr întreg rezultă că $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ ar fi număr întreg.

Avem:

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(a+2)^2} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Rămâne de arătat doar că suma nu poate fi egală cu zero.

Dar:

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n q!}{n!} \right| \geq \left| \frac{1}{q+1} - \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} \right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} \geq 0.$$

Observaţie. În particular rezultă că $e \notin \mathbf{Q}$.

11. Funcţia f este diferenţiabilă în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ şi în plus

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Funcţia f are derivate parţiale continue pe mulţimea $\mathbf{R}^2 - \{(0,b) |\, b \in \mathbf{R}\}$, deci este diferenţiabilă în aceste puncte. Rămâne de studiat diferenţiabilitatea în punctele de forma $(0,b)$, $b \in \mathbf{R}$.

În $(0,0)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

şi $|f(x,y)| \leq |x|^a$, deci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} |x|^{a-1} \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{a-1} = 0,$$

deci există diferenţiala în $(0,0)$ şi este egală cu zero.

În $(0, b)$ cu $b \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} \sin\frac{b}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0,$$

iar

$$\left| f(x,y) - f(0,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,b)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,b)(y-b) \right| = |f(x,y)| \le |x|^a$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}} |x|^{a-1} \le$$

$$\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{a-1} = 0, \text{ deci } df(0,b) = 0.$$

12. Să presupunem că f'_x este continuă în (x_0, y_0). Pentru orice $(x, y) \in V \cap D$ avem:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0).$$

Conform teoremei lui Lagrange există c_1 între x_0 şi x astfel ca

$$f(x,y) - f(x_0,y) = (x-x_0) f'_x(c_1, y).$$

Cum $f'_y(x_0, y_0)$ există rezultă că

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x_0,y_0) = 0$$

deci

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = (y-y_0)(f'_y(x_0,y_0) + \omega_2(x_0,y))$$

cu $\lim\limits_{y\to y_0} \omega_2(x_0, y) = 0$.

Din continuitatea lui f'_x în (x_0, y_0) rezultă că

$$f'_x(c_1, y) = f'_x(x_0, y_0) + \omega_1(x, y)$$

cu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_1(x, y) = 0.$

Rezultă că are loc relaţia

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)+$$

$$+\omega_1(x, y)(x - x_0) + \omega_2(x_0, y)(y - y_0)$$

pentru $(x, y) \in V \cap D$, ceea ce arată că f este diferenţiabilă în (x_0, y_0).

13. a) $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ şi analog $f'_y(0, 0) = 0$. Demonstrăm că f este diferenţiabilă în $(0, 0)$ şi $T = df(0, 0) = 0$. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - T(x - 0, y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(xy) - g(0)}{xy} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= g'(0) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

deoarece

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1} |y| \leq |y|,$$

pentru $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Avem

$$f'_x(x, y) = yg'(xy)\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + g(xy)\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

şi

$$f'_y(x,y) = xg'(xy)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - g(xy)\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Obţinem

$$f''_{xy}(0,0) = (f'_x)'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y) - f'(0,0)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-yg'(0)}{y} = -g'(0)$$

şi

$$f''_{yx}(0,0) = (f'_y)'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xg'(0)}{x} = g'(0).$$

14. Fie $z(x,y) = w(x+\alpha y, x+\beta y)$. Avem

$$z'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + w'_v$$

$$z'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = \alpha w'_u + \beta w'_v$$

$$z''_{x^2} = w''_{u^2}u'_x + w''_{uv}v'_x + w''_{uv}u'_x + w''_{v^2}v'_x = w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2}$$

$$z''_{xy} = w''_{u^2}u'_y + w''_{uv}v'_y + w''_{uv}u'_y + w''_{v^2}v'_y = \alpha w''_{u^2} + (\alpha+\beta)w''_{uv} + \beta w''_{v^2}$$

$$z''_{y^2} = \alpha(w''_{u^2}u'_y + w''_{uv}v'_y) + \beta(w''_{uv}u'_y + w''_{v^2}v'_y) = \alpha^2 w''_{u^2} + 2\alpha\beta w''_{uv} + \beta^2 w''_{v^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia dată se obţine

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)w''_{u^2} + (2a+2b(\alpha+\beta)+c\alpha^2)w''_{uv} + (a+2b\beta+c\beta^2)w''_{v^2} = 0.$$

Rezultă că α şi β trebuie să fie rădăcini ale ecuaţiei

$$c\gamma^2 + 2b\gamma + a = 0.$$

Pentru aceste valori ecuaţia devine $w''_{uv} = 0$ cu soluţia

$$w(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

unde φ, ψ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2. Soluţie ecuaţiei date este

$$z(x, y) = \varphi(x + \gamma_1 y) + \psi(x + \gamma_2 y).$$

15. a) Se obţine $\Delta f = 4u\varphi''(u) + 4\varphi'(u)$, $u(x, y) = x^2 + y^2$. Notând $\varphi'(u) = \psi(u)$ se obţine $u\psi'(u) + \psi(u) = 0$ ceea ce se scrie $(u\psi(u))' = 0$ de unde rezultă că $u\psi(u) = C_1$, $C_1 \in \mathbf{R}$. Deci $\varphi'(u) = \dfrac{C_1}{u}$ cu soluţia

$$\varphi(u) = C_1 \ln|u| + C_2, \quad C_2 \in \mathbf{R}.$$

Prin urmare

$$f(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

b) Procedeu analog. Se obţine $f(x, y) = C_1(y^2 - x^2) + C_2$.

c) $\Delta f = \dfrac{x^2 + y^2}{x^4}\varphi''(u) + 2\dfrac{y}{x^3}\varphi'(u) = 0$, $u(x, y) = \dfrac{y}{x}$.

Se obţine ecuaţia

$$(1 + u^2)\psi'(u) + 2u\psi(u) = 0,\ \psi(u) = \varphi'(u) \Rightarrow$$

$$((1 + u^2)\psi(u))' = 0 \Rightarrow \psi(u) = \frac{C_1}{1 + u^2} \Rightarrow$$

$$\varphi(u) = C_1 \mathrm{arctg} u + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Deci $f(x, y) = C_1 \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + C_2$, $x \neq 0$.

16.(Berkeley, 1991)

Din continuitata lui f şi din relaţia $\|f(x)\| < \|x\|$, $x \in B$, $x \neq 0_n$, rezultă că $f(0_n) = 0_n$. Dacă există $k \in \mathbf{N}$ astfel ca $x_k = 0_n$ rezultă că $x_m = 0_n$ pentru orice $m \geq k$, deci $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = 0_n$. Să presupunem că $x_k \neq 0_n$ pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

Fie $(t_m)_{m \geq 0}$ şirul de numere reale dat prin $t_m = \|x_m\|$, $m \geq 0$. Din relaţia $\|f(x_m)\| < \|x_m\|$ rezultă că $(t_m)_{m \geq 0}$ este strict descrescător şi fiind mărginit inferior de 0 este convergent.

Fie $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = t$. Vom arăta că $t = 0$. Să presupunem că $t > 0$. Şirul $(x_m)_{m\geq 0}$ fiind mărginit are un subşir convergent $(x_{m_j})_{j\geq 0}$,

$$\lim_{j\to\infty} x_{m_j} = x, \quad x \in \overline{B}.$$

Avem $\|x\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|x_{m_j}\| = t$, deci $\|f(x)\| < t$. Din continuitatea lui f obţinem $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{m_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j+1}$ şi $\|x_{m_j+1}\| \geq t$ pentru orice $j \in \mathbf{N}$, contradicţie.

17. (Berkeley, 1993)

Fie $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r \geq 0$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{r^2}{4} \leq e^{r(\cos t+\sin t)-2}.$$

Fie în continuare r fixat. Avem

$$e^{r(\cos t+\sin t)-2} = e^{r\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-2} \geq e^{r-2}.$$

Inegalitatea are loc dacă arătăm că $e^{r-2} \geq \dfrac{r^2}{4}$.

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(r) = e^{r-2} - \dfrac{r^2}{4}$. Avem

$$f'(r) = e^{r-2} - \frac{r}{2} \quad \text{şi} \quad f''(r) = e^{r-2} - \frac{1}{2}.$$

Ecuaţia $f''(r) = 0$ are soluţia unică $r_0 = 2 - \ln 2$. Cum f' este strict descrescătoare pe $[0, r_0]$ şi strict crescătoare pe $[r_0, +\infty)$,

$$f'(0) = e^{-2} > 0, \quad f'(r_0) = \frac{\ln 2 - 1}{2} < 0, \quad \lim_{r\to\infty} f'(r) = +\infty$$

rezultă că ecuaţia $f'(r) = 0$ are două rădăcini $r_1 \in [0, r_0)$ şi $r_2 = 2 \in (r_0, +\infty)$. Ţinând seama de semnul lui f' rezultă că $\min f(r) = 0 = f(2)$. În inegalitatea iniţială egalitatea are loc în punctele $(0,2)$, $(2,0)$.

18. (Putnam, 1967)

Fie $g : B \to \mathbf{R}$, $g(x,y) = f(x,y) + 2(x^2+y^2)$ pentru orice $(x,y) \in B$. Pentru (x,y) cu proprietatea $x^2+y^2 = 1$ avem $g(x,y) \geq 1$ iar $g(0,0) = f(0,0) \leq 1$. Cum g este continuă pe compactul B ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe B. Atunci g este constantă sau îşi atinge minimul într-un punct interior (x_0,y_0) a lui B. Dacă g este constantă atunci evident

$$f(x,y) = 1 - 2(x^2+y^2)$$

şi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 = 16(x^2+y^2) \leq 16.$$

Dacă g îşi atinge minimul în (x_0,y_0) atunci

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

iar

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) - 4x_0 = -4x_0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) - 4y_0 = -4y_0.\end{aligned}$$

Obţinem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 = 4(x_0^2+y_0^2) < 16.$$

19. Fie $M(x,y,z)$ un punct variabil pe elipsoid. Distanţa de la punctul M la planul (P) se determină din relaţia

$$d^2(M,(P)) = \frac{(3x+4y+12z-288)^2}{3^2+4^2+12^2} = \frac{(3x+4y+12z-288)^2}{169}.$$

Avem de determinat minimul global al funcţiei $f(x,y,z) = (3x+4y+12z-288)^2$ cu legătura $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Fie lagrangeanul

$$L(x,y,z) = (3x+4y+12z-288)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1\right).$$

Cum (E) este compactă, f îşi atinge minimul şi maximul pe (E) iar punctele de minim sau maxim ale lui f sunt puncte staţionare ale lui L.

$$\begin{cases} L'_x = 6(3x + 4y + 12z - 288) + \dfrac{2\lambda x}{96} = 0 \\ L'_y = 8(3x + 4y + 12z - 288) + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 24(3x + 4y + 12z - 288) + 2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda = \dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Din primele trei ecuaţii obţinem $\dfrac{x}{72} = y = \dfrac{z}{3}$. Înlocuind în ultima ecuaţie avem soluţiile $\left(9, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ şi $\left(-9, -\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$. Deoarece cunoaştem că valoarea minimă este atinsă în unul dintre acestea, este suficient să comparăm cele două valori $f\left(9, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right) = 251^2$ şi $f\left(-9, -\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right) = 325^2$, deci $\left(9, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ este punctul de minim.

20. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 1\}$ este o mulţime compactă, $f \in C(D)$, deci există $\max f$, $\min f$, conform Teoremei lui Weierstrass.

Pe $\mathrm{int}D$ funcţia f are punctul staţionar $(0, 0)$ care este evident punct de minim local.

Determinăm extremele pe frontiera lui D, deci pentru punctele de pe cercul $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$. Lagrangeanul lui f este

$$L(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x-3)^2 + (y-4)^2 - 1).$$

Punctele staţionare ale lui L se obţin din sistemul

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x-3) = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda(y-4) = 0 \\ L'_\lambda = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\lambda}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{4\lambda}{1+\lambda} \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1. \end{cases}$$

Rezultă, înlocuind x, y în ultima ecuaţie a sistemului,

$$\lambda_1 = 4,\ x = \frac{12}{5},\ y = \frac{16}{5}, \quad \text{şi} \quad \lambda_2 = -6,\ x = \frac{18}{5},\ y = \frac{24}{5}.$$

Comparând valorile $f(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}) = 16$, $f(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}) = 36$, $f(0,0) = 0$ se vede că $(\frac{18}{5}, \frac{24}{5})$ este un punct de maxim global iar $(0,0)$ unul de minim global.

21. Avem $f'_x(x,y) = 4x^3 - 4y$, $f'_y(x,y) = 4y^3 - 4x$. Punctele staţionare se obţin din sistemul $x^3 - y = 0$, $y^3 - x = 0$, cu soluţiile $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Diferenţiala de ordinul al doilea este

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = 12x^2 \mathrm{d}x^2 - 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 12y^2 \mathrm{d}y^2.$$

Avem $\mathrm{d}^2 f(0,0) = -8\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, care este o formă pătratică nedefinită, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

Pe de altă parte $\mathrm{d}^2 f(1,1) = \mathrm{d}^2 f(-1,-1) = 12\mathrm{d}x^2 - 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 12\mathrm{d}y^2$ este o formă pătratică pozitiv definită, deci $(1,1)$ şi $(-1,-1)$ sunt puncte de minim local.

Extreme globale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,x) = \lim\limits_{x\to\infty} (2x^4 - 4x^2) = \infty$ rezultă că f nu admite maxim global. Vom arăta că $(1,1)$ şi $(-1,-1)$ sunt puncte de minim global şi $\min f = f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

Considerăm familia de mulţimi compacte $(D_r)_{r>1}$,

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq r\}.$$

D_r este un pătrat cu centrul în $(0,0)$, cu laturile de lungime $2r$, paralel cu axele de coordonate. Determinăm extremele lui f pe D_r. Cum D_r este compactă şi f este continuă pe D_r, există $\max f$ şi $\min f$ pe D_r, conform Teoremei lui Weierstrass. Pe $\mathrm{int} D_r$ se obţin punctele staţionare $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, dintre care $(1,1)$, $(-1,-1)$ sunt puncte de minim local.

Determinăm extremele pe frontiera lui D_r, deci pentru punctele (x, y) cu proprietatea $|x| = r$, $-r \leq y \leq r$ sau $|y| = r$, $-r \leq x \leq r$.

Considerăm doar cazul $y = r$, $-r \leq x \leq r$. Atunci $f(x, r) = x^4 + r^4 - 4xr =: g(x)$, $x \in [-r, r]$ este privita ca o funcţie de o variabilă reală. Avem $g'(x) = 4x^3 - 4r$, rădăcina ecuaţiei $g'(x) = 0$ fiind $x = \sqrt[3]{r}$. Avem $g(\sqrt[3]{r}) = r^4 - 3r\sqrt[3]{r}$, $g(r) = 2r^4 - 4r^2$, $g(-r) = 2r^4 + 4r^2$.

Inegalităţile $g(r) > f(1, 1) = -2$ şi $g(-r) > f(1, 1) = -2$ sunt evidente. Arătăm că avem de asemenea $g(\sqrt[3]{r}) > f(1, 1)$. Inegalitatea este echivalentă cu $r^4 - 3r\sqrt[3]{r} + 2 > 0$. Notând $\sqrt[3]{r^4} = s$, $s > 1$ obţinem $s^3 - 3s + 2 > 0$, adică $(s - 1)^2(s + 2) > 0$ care este evident pentru $s > 1$.

Analog se tratează cazurile $y = -r$, $|x| = r$. În concluzie avem $\min f = f(1, 1) = -2$.

22. Scriem ecuaţiile parametrice ale elipsei: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Pătratul distanţei dintre punctul M şi un punct arbitrar $P(3\cos t, 2\sin t)$ de pe elipsă este

$$f(t) = (3\cos t - 4)^2 + (2\sin t - 6)^2.$$

Pentru a minimiza această funcţie, trebuie să rezolvăm ecuaţia $f'(t) = 0$, adică

$$-5\cos t \sin t + 12\sin t - 12\cos t. \tag{4}$$

Notând $z = \sin t - \cos t$, avem $\sin t \cos t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2$. Inlocuind aceasta în (4), obţinem ecuaţia $5(z^2 - 1) + 24z = 0$, cu soluţiile $z_1 = \frac{1}{5}$, $z_2 = -5$. Valoarea -5 nu este convenabilă, deoarece $\cos t, \sin t \in [-1, 1]$. Din $\sin t = \frac{1}{5} + \cos t$ şi (4) rezultă ecuaţia $25\cos^2 t + 5\cos t - 12 = 0$. Soluţiile sunt: $\begin{cases} \cos t = -\frac{4}{5} \\ \sin t = -\frac{3}{5} \end{cases}$, cu punctul corespunzător $A(-\frac{12}{5}, -\frac{6}{5})$ pe elipsă, şi $\begin{cases} \cos t = \dfrac{3}{5} \\ \sin t = \dfrac{4}{5} \end{cases}$, cu punctul $B(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$. Derivata a doua

$$f''(t) = -5\cos^2 t + 5\sin^2 t + 12\cos t + 12\sin t$$

este negativă pentru punctul A şi pozitivă pentru B. De aici rezultă că punctul de pe elipsă situat la distanţa minimă de M este B.

23. Evident $M \neq \emptyset$ deoarece $(0,0) \in M$. Fie

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3$$

pentru $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Vom arăta că F admite un extrem local în punctul $(0,0)$. Avem

$$F'_x(x,y) = 2ax + by + 3dx^2 + 2exy + fy^2$$

$$F'_y(x,y) = bx + 2cy + ex^2 + 2fxy + 3gy^2.$$

Evident $(0,0)$ este punct staţionar al lui F.

Pe de altă parte $f''_{x^2}(0,0) = 2a$, $f''_{xy}(0,0) = b$ şi $f''_{y^2}(0,0) = 2c$, deci:

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)(h,k) = 2ah^2 + bhk + 2ck^2, \quad (h,k) \in \mathbf{R}^2.$$

Condiţia $b^2 - 4ac < 0$ implică şi $a \neq 0$, deci $(0,0)$ este punct de extrem local al lui F. Atunci există o bilă $B(0,r)$ astfel ca

$$F(x,y) > 0 \text{ sau } F(x,y) < 0 \text{ în } B(a,r) \setminus \{(0,0)\}.$$

În concluzie $D = B(a,r) \setminus \{(0,0)\}$.

24. *a*) Aplicăm a doua teoremă de medie funcţiilor $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$. Avem $\int\limits_0^1 x\ln(1+x)dx = \big(\ln 1\big)\int\limits_0^\xi xdx + \big(\ln 2\big)\int\limits_\xi^1 xdx = \dfrac{\ln 2}{2}(1-\xi^2) < \dfrac{\ln 2}{2}$.

$b)$ Fie $f(x) = -\sin x,\ g(x) = -\dfrac{1}{1+x^2},\ f, g; [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$. Atunci $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = g(0)\int_0^{\xi}(-\sin x)dx + g(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}(-\sin x)dx = \int_0^{\xi}\sin x dx +$ $\displaystyle\frac{1}{1+4\pi^2}\int_{\xi}^{2\pi}\sin x dx = \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2}(1-\cos\xi)$, de unde $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\right| < 2$.

25. a) Pentru $n = 0$ obţinem $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Pentru $n = 1$ obţinem $I_1 = 1$. Fie $n \geq 2$. Luând $f(x) = \sin^{n-1} x$ şi $g'(x) = \sin x$ cu formula de integrare prin părţi obţinem formula de recurenţă $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Folosind formula mai sus obţinută găsim $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ şi $I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

b) Avem evident inegalităţile

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,\ \forall c \in]0, \pi/2[$$

de unde rezultă imediat

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad \Leftrightarrow \quad a_n < \frac{\pi}{2} < b_n.$$

c) Şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este crescător, iar şirul $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este descrescător. Din punctul $b)$ avem

$$0 < b_n - a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{\pi}{4n}.$$

Rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\big(b_n - a_n\big) = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.

d) Inegalităţile de la punctul d) se deduc imediat din inegalităţile punctului b).

e) Fie

$$u_n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{şi} \quad v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n(2n+1)}}.$$

Din punctul d) avem că $u_n \geq v_n$.

Deoarece seria $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ este divergentă.

26. a) Avem

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+g(x)}dx = \int_{0}^{a} \left[\frac{f(x)}{1+g)x)} + \frac{f(-x)}{1+g(-x)}\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\left[\frac{1}{1+g(x)} + \frac{g(x)}{1+g(x)}\right]dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{2013x}}dx = \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$

Altă formulare

Dacă $g(x) \cdot g(-x) = 1$ atunci $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+g(x)}dx$ nu depinde de g.

27. a) Avem

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

În integrala $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$ dacă facem schimbarea de variabilă $x = -t$ obţinem $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{a} f(-t)dt.$

b) Afirmaţia rezultă uşor din i) dacă se ţine seama caă

$$f(-x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f \text{ este funcţie pară} \\ -f(x), & \text{dacă } f \text{ este funcţie impară} \end{cases}$$

c) Folosind punctul i) obţinem:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{(1+e^x)\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{(1+e^x)\cos x} + \frac{1}{(1+e^{-x})\cos x}\right] dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/4} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

d) Dacă facem schimbarea de variabilă $x = t + \dfrac{3}{2}$ obţinem

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}\,e^{2x-3}}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}-t}}{\sqrt{\frac{1}{2}-t}+\sqrt{\frac{1}{2}+t}\,e^{2t}}\,dt.$$

Folosind acum punctul a) al problemei obţinem

$$I = \int_0^{1/2} dt = \frac{1}{2}.$$

Observaţie

Putem propune şi alte integrale $\Bigg($ca de exemplu

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+e^x)(x^2+1)}\,dx \ \text{ sau } \int_{-a}^{a} \arccos\left(\frac{1}{2}(x^3-3x)\right)dx, \ \text{ unde } \ a \in]0,2].\Bigg)$$

28. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, $n \geq 1$. Demonstrăm că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Avem

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Din dezvoltările în serie de puteri

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned} \quad , \quad |x| < 1$$

obţinem

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\dots\right), \quad |x|<1.$$

Punând $x = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, în relaţia de mai sus avem

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots$$

de unde deducem

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right),$$

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}},$$

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \tag{1}$$

Rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi fiind mărginit inferior este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Din relaţia (1) obţinem

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}, \quad n \geq 1,$$

deci şirul $(a_n e^{-\frac{1}{12n}})_{n\geq 1}$ este crescător şi are limita a.

Prin urmare are loc relaţia

$$a < a_n < a^{\frac{1}{12n}}, \ \forall\, n \geq 1$$

deci există $\theta_n \in (0,1)$ astfel ca

$$a_n = ae^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Demonstrăm în continuare că $a = \sqrt{2\pi}$.

Din formula lui Wallis rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \tag{3}$$

este convergent şi are limita $\sqrt{\pi}$.

Din relaţia (2) obţinem

$$n! = a\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1) \tag{4}$$

$$(2n)! = a\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} \cdot e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}, \quad \theta_{2n} \in (0,1)$$

care înlocuite în (3) conduc la

$$b_n = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\frac{\theta_n}{6n} - \frac{\theta_{2n}}{24n}}.$$

Rezultă că $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2} b_n = \sqrt{2\pi}$. Înlocuind în (4) obţinem

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\theta_n}{12n}.$$

29. Fie $h(x) = f(x) - f(b)$, $x \in [a,b]$. Funcţia h este monoton descrescătoare şi $h(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. Atunci rezultă că există $c \in [a,b]$ astfel ca

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = h(a)\int_a^c g(x)dx$$

sau

$$\int_a^b g(x)(f(x) - f(b))dx = (f(a) - f(b))\int_a^c g(x)dx.$$

Prin urmare

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(x)dx + (f(a) - f(b))\int_a^c g(x)dx =$$

$$= f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

30. Fie $f(x) = \ln(x^2 - 2a\cos x + 1)$, $x \in [0,\pi]$ şi fie

$$I_n(a) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Avem evident $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a) = I(a)$.
Pe de altă parte avem

$$I_n(a) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = \frac{\pi}{n}\ln(a-1)^2 + \frac{\pi}{n}\ln\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}$$

Dacă $|a| < 1$ avem $\lim a^{2n} = 0$, deci $I(a) = 0$. Dacă $|a| > 1$ avem

$$I_n(a) = \frac{\pi}{n}\ln(a-1)^2 + \frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{-2n}}{1-a^{-2}} + \frac{2n-2}{n}\pi\ln|a|$$

de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a) = 2\pi\ln|a|$.

31. Se caută o funcţie de forma $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, care verifică relaţiile din enunţ. Prin identificare se obţine $f(x) = 6x - 2$. Avem

$$\int_0^1 (f(x) - (6x-2))^2 dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 4 \geq 0.$$

Egalitatea se obţine pentru $f(x) = 6x - 2$.

32. a) Integrând prin părţi avem

$$I_n = -\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(\cos nx)'dx$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^n x\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^{n-1} x\sin x\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin x\cos nx dx.$$

Adunând această relaţie cu cea iniţială obţinem

$$2I_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x - \cos nx \sin x) dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x dx = \frac{1}{n} + I_{n-1}.$$

b) Relaţia $2I_n = \dfrac{1}{n} + I_{n-1}$ se scrie sub forma echivalentă

$$2^n I_n = 2^{n-1} I_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Însumând relaţiile anterioare de la 1 la n se obţine relaţia cerută.

33. Integrând prin părţi obţinem:

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' f(x)dx = \frac{x^2}{2} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx.$$

Eliminând $f(1)$ din relaţiile anterioare rezultă

$$1 = \int_0^1 (x - x^2) f'(x)dx.$$

Inegalitatea Cauchy-Schwartz conduce la

$$1 = \left(\int_0^1 (x - x^2) f'(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (x - x^2)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Cum $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \frac{1}{30}$ rezultă $\displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 30.$

Egalitatea are loc pentru $f'(x) = \lambda(x - x^2)$, de unde obţinem

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Înlocuind în relaţiile din enunţ obţinem $\lambda = 30$, $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

34. Considerăm funcţia

$$F(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - 2\int_0^t xf(x)dx.$$

Avem

$$F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx - 2tf(t) = 2f(t)\int_0^t \underbrace{(f(x)-1)}_{\leq 0}dx \leq 0.$$

Rezultă că F este descrescătoare, deci

$$F(1) \leq F(0) = 0,$$

adică

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq 2\int_0^1 xf(x)dx.$$

35. $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2 dx$

$$= \int_0^1 (f'(x))^2dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx + \int_0^1 \frac{dx}{(f(x))^2}$$

$$\leq 2 - 2\ln f(x)\Big|_0^1 = 2 - 2\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 0$$

Rezultă

$$f'(x) - \frac{1}{f(x)} = 0, \ \forall\, x \in [0,1],$$

$$(f^2(x))' = 2; \quad f^2(x) = 2x + c; \quad f(x) = \sqrt{2x+c}, \ c > 0$$

şi revenind la $f(1) = f(0) \cdot e$ rezultă $c = \dfrac{2}{e^2-1}$ şi

$$f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}}, \quad x \in [0,1].$$

36. Fie $f \in M$. Are loc relaţia

$$\int_0^1 (1-x)f''(x)dx = (1-x)f'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = -1.$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwartz obţinem:

$$\left(\int_0^1 (1-x)f''(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x)^2 dx \cdot \int_0^1 (f''(x))^2 dx \qquad (1)$$

de unde rezultă că

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 3.$$

În (1) egalitatea are loc pentru $f''(x) = \lambda(1-x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Punând condiţia ca $f \in M$ rezultă

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x), \quad x \in [0,1].$$

37. a) Avem $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$ de unde obţinem

$$b_0 < b_1 < a_1 < a_0$$

Prin inducţie se demonstrează că

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_n < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_0$$

de unde rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt monotone şi mărginite.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$. Din relaţia $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, prin trecere la limită, obţinem $l_1 = l_2 =: \mu(a,b)$.

b) Facem schimbarea de variabilă

$$\sin x = \frac{2a \sin t}{a + b + (a-b)\sin^2 t}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (1)$$

obţinem

$$\cos x dx = 2a\frac{a+b-(a-b)\sin^2 t}{[a+b+(a-b)\sin^2 t]^2}\cos t dt.$$

Din relaţia (1) se obţine

$$\cos x = \frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 t}}{a+b+(a-b)\sin^2 t}\cos t$$

de unde rezultă

$$dx = 2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2 t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 t}}$$

Avem de asemenea

$$\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = a\frac{a+b-(a-b)\sin^2 t}{a+b+(a-b)\sin^2 t}$$

şi în continuare

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}} == \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2 t+ab\sin^2 t}}$$

Ţinând seama că $a_1 = \frac{a+b}{2}$ şi $b_1 = \sqrt{ab}$ rezultă

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a_1^2\cos^2 t+b_1^2\sin^2 t}}$$

Aplicând în mod repetat raţionamentul anterior, obţinem:

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t+b_n^2\sin^2 t}},\ \forall\ n\geq 0.$$

c) Au loc relaţiile

$$\frac{\pi}{2a_n}\leq G(a,b)\leq\frac{\pi}{2b_n},\quad n\geq 1$$

de unde făcând $n \to \infty$ obţinem

$$G(a,b) = \frac{\pi}{2\mu(a,b)}.$$

38. Fie $x_n = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $0 \le k \le n$. Avem

$$u_n = \sum_{k=0}^{k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) - \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

$$= F(x_1) - F(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k) - (x_{k+1} - x_k) F'(x_k)) - \frac{b-a}{n} f(b).$$

Aplicând formula lui Taylor funcţiei F pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$ rezultă că există $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ astfel ca

$$u_n = F(x_1) - F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} f'(\xi_k) - \frac{b-a}{n} f(b)$$

Ţinând seama că $n = \dfrac{b-a}{x_{k+1} - x_k}$ avem

$$nu_n = (b-a)\frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k) - (b-a) f(b).$$

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = F'(x_0) = f(x_0) = f(a)$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k) = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = (b-a)f(a) + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - (b-a)f(b) =$$

$$= \frac{a-b}{2}(f(b)-f(a)).$$

39. Integrând prin părţi se găseşte $a=-1$, $b=\dfrac{1}{2\pi}$. Rezultă că

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}x^2 - x\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kx dx.$$

Avem

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(nx+\dfrac{x}{2}\right) - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin nx\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + \cos nx - 1\right)$$

Fie funcţiile $f, g : [0,\pi] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}x^2 - x$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}, & x\in(0,\pi] \\ -2, & x = 0 \end{cases}$$

Se arată uşor că g este de clasă $C^1[0,\pi]$. Se obţine

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx - \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}x^2 - x\right)dx\right) \tag{1}$$

Pentru funcţia $h\in C^1[a,b]$ avem

$$\int_a^b h(x)\sin nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b h(x)\cos nx dx = 0.$$

40.

a) Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(a) = \displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$. Avem $g'(a) = 0$ de unde rezultă $g(a) = g(0)$.

b) $$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \dots$$

$$+ \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx = n\int_a^{a+T} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$$

Aplicaţie. $\displaystyle\int_0^{2003\pi} \arcsin(\sin x)dx$

$$= \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx + \int_{\pi}^{2003\pi} \arcsin(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx + \int_{\pi}^{\pi+1001\cdot 2\pi} \arcsin(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx + 1001\int_0^{2\pi} \arcsin(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx + 1001\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

41. Pentru început presupunem $g \geq 0$. Notăm:

$$m_k = \inf_{x\in\left[k\frac{T}{n},(k+1)\frac{T}{n}\right]} f(x), \quad M_k = \sup_{x\in\left[k\frac{T}{n},(k+1)\frac{T}{n}\right]} f(x),$$

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Avem:

$$\int_0^T f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{nT} f\left(\frac{t}{n}\right) g(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T} f\left(\frac{t}{n}\right) g(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \int_{kT}^{(k+1)T} g(t)dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \cdot \frac{T}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k$$

$$\to \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \int_0^T f(t)dt,$$

deoarece $f_k \in [m_k, M_k]$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

În cazul în care funcţia g nu este pozitivă, fiind integrabilă, există o constantă $M > 0$ astfel încât $g + M > 0$.

Conform celor deja demonstrate, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(t)(g(nt) + M)dx = \frac{1}{T}\int_0^T (g(t) + M)dt \int_0^T f(t)dt,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(t)g(nt)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt \int_0^T f(t)dt.$$

42. $F(1) = 0$,

$$F'(x) = f_1(x)f_3(x)\int_1^x f_2f_4dt + f_2(x)f_4(x)\int_1^x f_1f_3$$

$$-f_1(x)f_4(x)\int_1^x f_2f_3 - f_2(x)f_4(x)\int_1^x f_1f_4$$

$$F'(1) = 0$$

$$F''(1) = (f_1f_3)'\int_1^x + f_1f_2f_3f_4 + (f_2f_4)'\int_1^x + f_2f_4f_1f_3 - \ldots$$

$$= (f_1f_3)'\int_1^x f_2f_4 + (f_2f_4)'\int_1^x f_1f_3 - (f_1f_4)'\int_1^x f_2f_3 - (f_2f_3)'\int_1^x f_1f_4$$

$$F'''(x) = (f_1f_2)''\int_1^x f_2f_4 + (f_1f_2)'(f_2f_2) + \ldots =$$

$$(f_1f_3)'f_2f_4 + (f_2f_4)'(f_1f_3) - (f_1f_4)'(f_2f_3) - (f_1f_4)(f_2f_3)'$$

$$\Rightarrow [(f_1f_2)(f_3f_4)]' - [(f_1f_4)(f_2f_3)]' = 0$$

43. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (F(x,y,z,t))^2 dxdydzdt \geq 0$$

unde

$$F(x,y,z,t) = f(x,y) + f(z,t) - f(x,t) - f(z,y), \quad x,y,z,t \in [0,1].$$

44. Avem

$$f'(x) = \frac{1}{xf\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad x \in (0,\infty)$$

$$f''(x) = -\frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 f^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3 f^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{f'(x)}{x} + \frac{\frac{x}{f(x)}}{x}(f'(x))^2 = -\frac{f'(x)}{x} + \frac{(f'(x))^2}{f(x)};$$

$$xf(x)f''(x) + f(x)f'(x) = x(f'(x))^2 \mid : (f(x))^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{xf''(x)}{f(x)} - \frac{x(f'(x))^2}{(f(x))^2};$$

$$\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{xf'(x)}{f(x)} = c \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c}{x} \Rightarrow f(x) = dx^c$$

Revenind: $d^2c = 1$, deci $f(x) = dx^{\frac{1}{d^2}}$, $d \in (0,\infty)$.

45. Fie $G(t) = 2\int_0^t f(x)dx - (f(t))^2$

$$G(0) = 0, \quad G'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0$$

$$\Rightarrow G(t) \geq 0 \quad \text{şi} \quad f(t)G(t) \geq 0.$$

Fie $H(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t (f(x))^3 dx$, $t \in [0,1]$. Avem:

$$H(0) = 0, \quad H'(t) = f(t)G(t) \geq 0.$$

Rezultă $H(t) \geq 0$, deci $H(1) \geq 0$, q.e.d.

Egalitatea are loc numai pentru $f(t)G(t) = H'(t) = 0$, $\forall\, t \in [0,1]$.

Obţinem $f(x) = x$.

46. Vom calcula

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 f(tx)dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to\infty} f(t) = 1,$$

unde

$$F(t) = \int_0^t f(u)du, \quad t \in [0,1].$$

47. Să observăm că

$$B(a,a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx.$$

Făcând substituţia $1 - 2x = \sqrt{u}$ obţinem

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int\limits_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{a-1}du = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Deci

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\Gamma(a)}{2^{2a-1}\Gamma(a+1/2)}.$$

48. Cum

$$\frac{\Gamma(r)}{(x+\beta)^r} = \int\limits_0^\infty y^{r-1}e^{-y(x+\beta)}dy$$

şi $\dfrac{\Gamma(s)}{(y+\alpha)^s} = \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x(y+\alpha)}dx$ găsim

$$\Gamma(r)\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-\alpha x}}{(x+\beta)^r}dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty x^{s-1}y^{r-1}e^{-y(x+\beta)-\alpha x}dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{r-1}e^{-y\beta}\left(\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x(y+\alpha)}dx\right)dy = \Gamma(s)\int\limits_0^\infty \frac{y^{r-1}e^{-y\beta}}{(y+\alpha)^s}\,dy.$$

(Se arată în prealabil că permutarea integralelor este permisă).

49. Observăm că $\int\limits_0^1 \ln\big[\Gamma(1-x)\big]dx = \int\limits_0^1 \ln\big[\Gamma(x)\big]dx.$

Deci

$$2\int\limits_0^1 \ln\big[\Gamma(x)\big]dx = \int\limits_0^1 \ln\big[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\big]dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln\Big(\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\Big)dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

ALGEBRĂ

1. a) Indicăm o familie infinită de funcţii liniar independente din V, anume $f_k(x) = x^k(x-1)(x-e)$ pentru $k \geq 0$. Apoi $B = \{x^k(x-1)(x-e) | 0 \leq k \leq n-2\}$ formează o bază pentru W.

b) Fâcând o schimbare de variabilă independentă $x = e^t$, rezultă că $y'(x) = \dot{y}(t)e^{-t}$ şi $y''(t) = (\ddot{y}(t) - \dot{y}(t))e^{-2t}$. Ecuaţia devine $\ddot{y} + \lambda y = 0$ şi după discuţie, rezultă $\lambda = n^2\pi^2$, cu $n \in \mathbf{N}^*$. Nu există soluţii nenule în W.

2. $\det(A + xB) = \det(A) + \cdots + x^n \det B = P(x)$.

Avem

$$P(1) + P(\varepsilon) + \cdots + P(\varepsilon^{n-1}) = n[\det A + \det B]$$

deoarece sumele $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k}$ sunt 0, $k = \overline{1, n-1}$.

3. a) Dacă $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{1k} + \cdots + a_{nk}|^2 = 0$ atunci $a_{1k} + \cdots + a_{nk} = 0$ pentru orice $k = \overline{1, n}$, deci suma elementelor de pe fiecare coloană a matricei A este zero. Dacă adunăm toate liniile matricei A la prima linie, obţinem o linie egală cu zero, deci $\det A = 0$.

b) $b_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik} \cdot a_{ik} \right) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2$

$\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 = 0 \Rightarrow a_{ik} = 0$, $i, k = \overline{1, n}$, deci $A = 0$.

4. Avem:

$$(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2 + i(B \cdot A - A \cdot B) = (\pi - i)(A \cdot B - B \cdot A)$$

Trecând la determinanţi avem:

$$|\det(A + iB)|^2 = (\pi - i)^n \det(A \cdot B - B \cdot A)$$

deci

$$(\pi - i)^n \det(A \cdot B - B \cdot A) \in \mathbf{R}; (\pi - i)^n \in \mathbf{R} \text{ sau } \det(A \cdot B - B \cdot A) = 0$$

Dar $(\pi - i)^n \in \mathbf{R} \Leftrightarrow C_n^1 \pi - C_n^3 \pi^3 + C_n^5 \pi^5 - \cdots = 0$ dar π fiind transcendent, el nu este soluţie a unei ecuaţii cu coeficienţi întregi, deci

$$(\pi - i)^n \notin \mathbf{R} \Rightarrow \det(A^2 + B^2) = \pi^n \det(A \cdot B - B \cdot A) = 0.$$

5. Din teorema lui Hamilton rezultă

$$A^n - s_1 A^{n-1} + \cdots + (-1)^n (\det A) I = 0$$

Egalitatea de pe poziţia (i, i) dă

$$a_{ii}^{(n)} - s_1 a_{ii}^{(n-1)} + \cdots + s_{n-1} a_{ii}^{(1)} + (-1)^n \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

6. Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ sunt valorile proprii ale matricei A^2, $\ldots, \lambda_1^{n-1}, \lambda_2^{n-1}, \ldots, \lambda_n^{n-1}$ sunt valorile proprii ale matricei A^{n-1} şi atunci condiţiile devin:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1} + \cdots + \lambda_n^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sunt valorile proprii distincte, de multiplicităţi $k_1, k_2, \ldots, k_p$ atunci primele p relaţii din sistem devin:

$$\begin{cases} k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \cdots + k_p \lambda_p = 0 \\ k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + \cdots + k_p \lambda_p^2 = 0 \\ \ldots \\ k_1 \lambda_1^p + k_2 \lambda_2^p + \cdots + k_p \lambda_p^p = 0 \end{cases}$$

Relaţiile arată că $(k_1\lambda_1, k_2\lambda_2, \dots, k_p\lambda_p)$ este soluţie a unui sistem de ecuaţii liniare omogen, al cărui determinant este un determinant Vandermonde

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq 0,$$

deci $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = \dots = k_p\lambda_p = 0$ sau $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

În concluzie matricea A are toate valorile proprii nule. Polinomul caracteristic al matricei A este $f_A(x) = x^n$ şi din teorema Cayley-Hamilton rezultă $A^n = 0$.

7. Dacă prin absurd ar exista $k \in \mathbf{N}^*$ astfel ca $A^k = 0$ atunci $k > n$ şi alegem k minim cu această proprietate, deci $A^{k-1} \neq 0$.

Scriem teorema Cayley-Hamilton sub forma

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0 \tag{1}$$

Înmulţimd cu A^{k-1} şi rezultă $a_0 A^{k-1} = 0$ cu $A^{k-1} \neq 0$ deci $a_0 = 0$.

Înmulţim cu A^{k-2} şi rezultă $a_1 A^{k-1} = 0$ deci $a_1 = 0$.

Continuăm înmulţind succesiv cu $A^{k-3}, A^{k-4}, \dots, A^{k-n}$ şi obţinem pe rând $a_2 = 0$, $a_3 = 0, \dots,$ $a_{n-1} = 0$. Recitind relaţia (1) rezultă $A^n = 0$ (contradicţie).

8. Dacă $A^k = 0$, matricea $A - xI_n$ este inversabilă pentru orice $x \neq 0$. Într-adevăr

$$(A - xI_n)(A^{k-1} + xA^{k-2} + \dots + x^k I_n) = A^k - x^k I_n = -x^k I_n$$

deci

$$(A - xI_n)^{-1} = \frac{1}{(-x)^k}(A^k + xA^{k-1} + \dots + x^k I_n)$$

Atunci $\det(A + xI_n) \neq 0,\ x \neq 0$. Dar dezvoltând determinantul obţinem:

$$f(x) = \det(A + xI_n) = x^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) x^{n-1} + \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ij} \\ a_{jj} & a_{jj} \end{vmatrix} x^{n-1} + \dots$$

Dar singurul polinom de grad n cu singura rădăcină $x = 0$ este ax^n deci $\det(A + xI_n) = x^n$ şi identificând coeficienţii obţinem $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ şi

$$\sum_{i<j}(a_{ii}\cdot a_{jj} - a_{ij}\cdot a_{ji}) = 0 \Rightarrow \sum_{i\neq j}(a_{ii}\cdot a_{jj} - a_{ij}\cdot a_{ji}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j} a_{ii}\cdot a_{jj} = \sum a_{ii}^2 - \sum_{i\neq j} a_{ij}\cdot a_{ji} = 0 \Rightarrow \left(\sum a_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot a_{ji} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot a_{ji} = 0.$$

9. Vom demonstra prin inducţie după $n \in \mathbf{N}$.

Pentru $n = 1$ avem $\det A_1 + \det(-A_1) = \det A_1 + (-1)^2 \det A_1 = 2\det A_1$.

Presupunem relaţia adevărată pentru $n = \overline{1,p}$ şi demonstrăm pentru $n = p + 1$.

$$\sum \det(\pm A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_p \pm A_{p+1}) =$$
$$= \sum \det[(\pm A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_p) + A_{p+1}] +$$
$$+ \sum \det[(\pm A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_p) - A_{p+1}] =$$
$$= 2\sum[\det(\pm A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_p) + \det A_{p+1}] =$$
$$= 2\left(2^p \sum_{k=1}^{p} \det A_k + 2^p \det A_{p+1}\right) = 2^{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\det A_k.$$

Observaţie. Am folosit faptul că dacă $A, B \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbf{C})$ atunci:

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2[\det A + \det B].$$

$$\left(\det\begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{12} \pm b_{12} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm\right.$$

$$\pm\left(\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} b_{11} & a_{12}\\ b_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right)+\det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\Bigg).$$

10. Avem:

$$(A-iB)(A+iB)=A^2+B^2+i(A\cdot B-B\cdot A)=\left(\text{ctg}\frac{\pi}{k}+i\right)(A\cdot B-B\cdot A)$$

Dar $\det(A-iB)(A+iB)=|\det(A-iB)|^2\in\mathbf{R}$

$$\det\left[\left(\text{ctg}\frac{\pi}{k}+i\right)(AB-BA)\right]\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\left(\text{ctg}\frac{\pi}{k}+i\right)^n\in\mathbf{R},$$

$$\cos\frac{n\pi}{k}+i\sin\frac{n\pi}{k}\in\mathbf{R}\sin\frac{n\pi}{k}=0\Leftrightarrow\frac{n\pi}{k}\in\pi\cdot\mathbf{Z}\Leftrightarrow n\in k\cdot\mathbf{Z}$$

Pentru $n=2$ luăm $A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$A^2+B^2=0,\quad AB-BA=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\text{ inversabilă.}$$

11. a) $A^p=a^t\cdot b-I\Rightarrow A^p\cdot a^t=a^t\cdot b\cdot a^t-a^t=a^t\cdot 1-a^t=0$.

Dar rangul matricei $A^p=a^t\cdot b-I$ este $(n-1)$ şi atunci toate soluţiile sistemului $A^p\cdot X=0$ sunt de forma $X=\alpha\cdot a^t$. Dar rangul matricei A este pe de o parte $\leq n-1$ ($\det A^p=0\Rightarrow\det A=0$) şi pe de altă parte $\text{rang}A\geq\text{rang}A^p=n-1$. Deci $\text{rang}A=n-1$ şi sistemul $A\cdot X=0$ are soluţiile $X=\alpha\cdot a^t$, deci $A\cdot a^t=0$. Din $A^p=a^t\cdot b-I$ rezultă $(A^t)^p=b^t\cdot a-I$ şi în acelaşi mod rezultă $A^t\cdot b^t=0$ sau $b\cdot A=0$.

b) Se verifică $(A^k+a^t\cdot b)(a^t\cdot b-A^{p-k})=I_n$.

12. Fie $A=\begin{bmatrix} x_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & x_n\end{bmatrix}$. Avem:

$$f(x_1+\cdots+x_n)=f(x_1)+\cdots+f(x_n)$$

Luând $x_1=\cdots=x_n=0$, $f(0)=0$.

Luând $x_3 = \cdots = x_n = 0$, $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, deci $f(x) = ax$, $a \in \mathbf{C}$.

13. $f \equiv 0$ verifică relaţia. Dacă există $a \in \mathbf{C}$ astfel ca $f(a) \neq 0$, fie:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{bmatrix}$$

Avem:

$$\det f(A) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) = f(\det A) = f(x_1x_2\dots x_n)$$

Luând $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $x_2 = x$, $x_3 = \cdots = x_n = a$,

$$f(a^{n-2}) = f\left(\frac{1}{x}\right) f(x)(f(a))^{n-2}$$

Dacă $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ obţinem $f(x) = a_kx^k$ şi revenind la prima relaţie: $f(x) = \alpha x^k$, $\alpha^n = \alpha$ care verifică:

$$\det(\alpha A^k) = \alpha^n(\det A)^k = \alpha(\det A)^k.$$

Deci polinoamele au forma: $f(x) = \alpha x^k$, cu $\alpha^n = \alpha$.

14. Se calculează produsul elementelor matricei A în două moduri:

$$\prod_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} = \prod_{i=\overline{1,m}}\left(\prod_{j=\overline{1,n}} a_{ij}\right) = \prod_{i=\overline{1,m}}(-1) = (-1)^m$$

$$\prod_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} a_{ij} = \prod_{j=\overline{1,n}}\left(\prod_{i=\overline{1,m}} a_{ij}\right) = \prod_{i=\overline{1,m}}(-1) = (-1)^n$$

rezultă $(-1)^m = (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^{m+n} = 1 \Leftrightarrow m+n$ este par.

Deci dacă $m+n$ este impar nu există matrice cu proprietatea din enunţ.

Dacă $m+n$ este par vom arăta că există o bijecţie între mulţimea matricelor de tip $(m-1,n-1)$ cu elemente din $\{\pm 1\}$ şi mulţimea matricelor de tip (m,n) cu proprietatea cerută.

Fie $B=[b_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}}$, $b_{ij}\in\{\pm 1\}$.

Definim matricea $A=[a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ astfel

$a_{ij}=b_{ij}$, pentru $i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{1,n-1}$

$a_{in}=-\prod\limits_{j=1}^{n-1}a_{ij}$, pentru $i=\overline{1,m-1}$

$a_{mj}=-\prod\limits_{i=1}^{m-1}a_{ij}$, pentru $j=\overline{1,n-1}$

$a_{mn}=-\prod\limits_{j=\overline{1,n-1}}a_{mj}=(-1)^n\prod\limits_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}}a_{ij}=-\prod\limits_{i=\overline{1,m-1}}a_{in}=(-1)^n\prod\limits_{\substack{i=\overline{1,m-1}\\ j=\overline{1,n-1}}}a_{ij}$

care verifică proprietatea cerută.

Evident şi invers, dintr-o matrice A de tip (m,n) cu proprietatea cerută, prin eliminarea unei linii şi coloane obţinem o matrice A.

Deci numărul elementelor este $2^{(m-1)(n-1)}$ (numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu $(m-1)(n-1)$ elemente cu valori în mulţimea $\{\pm 1\}$

15. a) $f(x)\geq 0,\ x\in\mathbf{R}, f(x)=a_0\prod\limits_{k=1}^{p}(x-x_k)(x-\overline{x}_k)$

$$a_0\geq 0\Rightarrow \det[f(A)]=a_0^n\prod_{k=1}^{p}\det(A-x_kI_n)\det\overline{(A-x_kI_n)}=$$

$$=a_0^n\prod_{k=1}^{p}|\det(A-x_kI_n)|^2\geq 0$$

b) Fie $A=xI_n$, $f(A)=f(x)I_n$, $\det[f(A)]=(f(x))^n\geq 0$ deci $f(x)\geq 0$ pentru n impar.

Pentru n par, fie

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y \end{bmatrix}$$

$$\det[f(A)] = (f(x))^{n-1} f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x)f(y) \geq 0,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

16. Condiţiile date se scriu în funcţie de valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ale matricei A, astfel:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0,\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0, \dots, \lambda_1^{n-1} + \dots + \lambda_n^{n-1} = 0$$

şi

$$\lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 1,$$

sistem care datorită relaţiilor lui Newton, determină unic valorile proprii. Se observă că rădăcinile de ordin n ale unităţii $\lambda_1 = \varepsilon_1, \dots, \lambda_n = \varepsilon_n$ verifică sistemul, deci ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^n - 1 = 0$, care datorită Teoremei Cayley-Hamilton, este anulată de A, deci $A^n - I_n = 0$.

17. Condiţia ca suma elementelor de pe fiecare linie să fie egală cu 1 este $A \cdot E = E$, unde $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) E este vector propriu pentru A şi $\lambda = 1$ este valoare proprie, deci $\det(A - I) = 0$.

b) $A \cdot E = E \overset{\text{inducţie}}{\Rightarrow} A^k \cdot E = E$.

c) $A \cdot E = E \Rightarrow A^{-1} \cdot E = E$.

d) $A \cdot E = E \Rightarrow P(A) \cdot E = P(1) \cdot E \Rightarrow$ suma elementelor de pe fiecare linie a matricei $P(A)$ este $P(1)$.

Observaţie.

$\circ$ Dacă şi suma elementelor de pe fiecare coloană este 1 atunci $E^t \cdot A = E^t$ şi are loc a), b), c), d).

$\circ$ Dacă sumele pe linii şi coloane sunt 1 atunci acelaşi lucru se întâmplă pentru A^k şi A^{-1}, iar în $P(A)$ sumele sunt $P(1)$.

$\circ$ Dacă sumele pe linii şi coloane sunt 1 atunci suma tuturor elementelor matricei A^k este n pentru orice k.

18. Dacă $\lambda \in \mathbf{C}$ este valoare proprie şi X vector propriu, avem:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \ X \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \lambda x_i, \ i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot |x_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}x_k| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\pm x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \max_{k=\overline{1,n}} |x_k| = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \max |x_k| \leq \max |x_k| \Rightarrow |\lambda| \leq 1.$$

Observaţie. $A \cdot [1] = [1]$, $\lambda = 1$ este valoare proprie, iar $X = [1, \ldots, 1]^t$ este vector propriu.

19. Polinomul minimal al matricei A divide polinomul $P \in \mathbf{Q}[X]$,

$$P(x) = x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1).$$

Dacă $A^4 \neq I_3$ atunci polinomul caracteristic al matricei A ar avea ca rădăcină una din rădăcinile ecuaţiei $x^4 + 1 = 0$, iar polinomul $x^4 + 1$ este ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$ deci am avea divizibilitatea $(x^4+1)|m_A$, ceea ce este imposibil căci $grm_A \leq 3$ şi $gr(x^4+1) = 4$.

20. Dacă X este soluţie a ecuaţiei $AX = XB$, atunci

$$A^k X = XB^k, \text{ pentru orice } k \in \mathbf{N}$$

rezultă

$$P(A) \cdot X = X \cdot P(B) \text{ pentru orice polinom } P \in \mathbf{C}[x]$$

Dacă luăm $P = f_A$ atunci $X f_A(B) = 0 \Leftrightarrow$

$$X \cdot (B - \lambda_{A1} I_m) \dots (B - \lambda_{An} I_m) = 0$$

Dar matricele $(B - \lambda_{Ai} I_n)$ sunt nesingulare deci $f_A(B)$ este nesingulară, rezultă

$$X \cdot f_A(B)(f_A(B))^{-1} = 0 \text{ sau } X = 0.$$

Pentru punctul b) observăm că ecuaţia $AX - XB = 0$ reprezintă un sistem omogen de $(m+n)$ ecuaţii liniare cu $(m+n)$ necunoscute ce are doar solţia banală, deci determinantul sistemului este nenul şi atunci şi sistemele neomogene au soluţie unică.

Altă soluţie. Considerăm aplicaţiile $T_{1,2} : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$

$$T_1(X) = A \cdot X, \quad T_2(X) = X \cdot B$$

şi avem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ (comută) rezultă că valorile proprii pentru $T_1 - T_2$ sunt diferenţe de valori proprii $\lambda_A - \mu_B$, adică toate nenule. Observăm că λ_1 este valoare proprie pentru T_1 dacă şi numai dacă λ_1 este valoare proprie pentru A (coloanele matricei X sunt vectori proprii pentru matricea A). Dacă $T = T_1 - T_2$ nu are valoare proprie pe $\lambda = 0$ atunci T este injectiv deci $T(X) = 0 \Rightarrow X = 0$.

21. $|\lambda_A| < 1$, pentru orice $\lambda_A \in Spec(A) \Rightarrow A^k \to 0$. Analog $B^k \to 0 \Rightarrow A^k \cdot B^k \to 0 \Leftrightarrow (AB)^k \to 0 \Rightarrow |\lambda_{A \cdot B}| < 1$.

22. Avem

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji} \right) = \mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Observaţie. Suma $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ji}$ nu se modifică la schimbarea matricei A cu o matrice asemenea.

23. Forma Jordan verifică aceeaşi relaţie $J_A^2 = -I_n$, la fel şi fiecare celulă Jordan. Valorile proprii verifică relaţia $\lambda^2 = -1$ deci $\lambda \in \{-i, i\}$ şi polinomul caracteristic fiind real, ele se cuplează în perechi, deci sunt în număr par. Dacă forma Jordan nu ar fi diagonală atunci $J_A^2 \neq -I_n$, deci forma Jordan este

$$J_A = \left[\begin{array}{c|c} -iI_k & 0 \\ \hline 0 & iI_k \end{array}\right]$$

a cărei formă reală este

$$J_A^{(\mathbf{R})} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right].$$

24. Dacă prin absurd $\det(A - I) \neq 0$ atunci din $A^5 - I = 0 \Leftrightarrow (A-I)(A^4+A^3+A^2+A+I) = 0$ rezultă $A^4+A^3+A^2+A+I = 0$. Dacă λ este o valoare proprie atunci ea verifică ecuaţia $x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$ care are doar rădăcini complexe $x_1, \overline{x}_1$ şi $x_2, \overline{x}_2$. Polinomul caracteristic fiind cu coeficienţi reali de grad impar trebuie să aibă cel puţin o rădăcină reală (aceasta nu poate fi decât $\lambda = 1$).

25. Soluţia 1. Privită în $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, A este antihermitiană şi are valori proprii imaginare, de forma b_i, $b \in \mathbf{R}$. Valorile proprii nenule se cuplează în perechi b_i şi $-b_i$, se obţin un număr par de valori proprii nenule, iar matricea A în $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ are forma canonică diagonală, rangul fiind numărul elementelor nenule de pe diagonală, adică un număr par.

Observaţie. Forma canonică reală este

$$J_A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{matrix}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Soluţia 2. Dacă rang$A = n$ şi $\Delta_r = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,r}}$ este minorul nenul care dă rangul atunci $\det(\Delta_r^t) = \det(\Delta_r) \Leftrightarrow \det(-\Delta_r) = \det(\Delta_r) \Leftrightarrow (-1)^r \det\Delta_r = \det\Delta_r$ şi $\det\Delta_r \neq 0 \Rightarrow (-1)^2 = 1 \Rightarrow r =$ par.

26. Avem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Singura valoare proprie este $\lambda = 0$ şi pentru vectorii proprii avem sistemul:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

cu soluţia generală $X = [\alpha, \beta, 0, \dots, 0]^t$.

Cu vectorul $X_1 = [1, 0, \dots, 0]^t$ construim vectorul principal X_2' verificând sistemul:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Deci $X_2' = [0, 0, 1, \dots, 0]^t$.

Cu acestea construim vectorul $X_3' = [0, 0, 0, 0, 1, \dots, 0]^t$ (vectorii construiţi au câte un 1 pe poziţii impare). Analog pornind de la vectorul propriu $X = [0, 1, 0, \dots, 0]^t$ construim vectorii principali care vor avea câte un 1 pe poziţiile pare. Deci matricea de pasaj va fi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

şi

$$J_{J_n} = \left[\begin{array}{c|c} J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & \\ \hline & J_{\left[\frac{n}{2}\right]} \end{array}\right]$$

care are două celule Jordan de dimensiuni $\dfrac{n}{2}$ fiecare dacă n este par sau una de dimensiuni $k + 1$ şi alta de dimensiuni k dacă $n = 2k + 1$.

Observaţie. J_n^3 va avea în forma canonică Jordan 3 celule de dimensiune k dacă $n = 3k$, două de dimensiune k şi una de dimensiune $k + 1$ dacă $n = 3k+1$ şi două de dimensiune $k+1$ şi una de dimensiune k dacă $n = 2k + 2$.

27. Valorile proprii ale lui A sunt rădăcini ale ecuaţiei $\lambda^2+2\lambda+5=0$, $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Dar polinomul caracteristic $f_A(\lambda) \in \mathbf{R}[\lambda]$, deci dacă λ_1 este valoare proprie pentru A atunci şi λ_2 este valoare proprie, de acelaşi ordin de multiplicitate rezultă

$$f_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^2+2\lambda+5)^k \Rightarrow grf_A = 2k = n = \text{par}.$$

Exemplu de matrice:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -13 \\ 1 & -4 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & -13 \\ 1 & -4 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Observaţie. Altă soluţie:

$$(A+2I)^2 = -I \Rightarrow (\det(A+2I))^2 = (-1)^n \Rightarrow (-1)^n \geq 0 \Rightarrow n \text{ par}.$$

28. a) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale lui A şi $X_1, \ldots, X_n$ vectorii proprii corespunzători. Subspaţiile $V_k = \{X|\ A \cdot X = \lambda_k X\} = \{a \cdot X_k|\ a \in C\}$ sunt de dimensiune 1. Dacă $B \in C(A)$ atunci $A(BX_k) = B(AX_k) = \lambda_k(BX_k)$ deci $BX_k \in V_k$ sau $BX_k = \alpha_k X_k$, $\alpha_k \in C$, deci X_k este vector propriu pentru B.

Observaţie. În baza $X_1, \ldots, X_n$ matricele din $C(A)$ au formă diagonală.

b) Din observaţia anterioară $C(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$, $\lambda_k \in C$ deci $C(A)$ este spaţiu vectorial de dimensiune n. E suficient să arătăm că matricele $I, A, \ldots, A^{n-1}$ sunt liniar independente.

Dacă $a_1 I + a_2 A + \cdots + a_n A^{n-1} = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ atunci $P(A) \cdot X_k =$

$P(\lambda_k)X_k = 0$ deci $P(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1,n} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi cum matricea din dreapta este o matrice Vandermonde de numere distincte rezultă $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

29. Fie λ o valoare proprie pentru A şi $V_\lambda = \{x|\ Ax = \lambda x\}$ subspaţiu propriu corespunzător valorii proprii λ. A fiind diagonalizabilă, ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ coincide cu $\dim V_\lambda$. Fie $x \neq 0$, vector propriu din V_λ. Avem $A(BX) = BAX = \lambda(BX)$ deci $BX \in V_\lambda$. Prin urmare subspaţiul V_λ este invariant al lui B. Considerând $B|_{V_\lambda}$ restricţia lui B la V_λ din faptul că B este diagonalizabil rezultă că există o bază formată din vectori proprii pentru B în V_λ. Aceşti vectori evident, că sunt vectori proprii şi pentru A. Se procedează în acest mod pentru toate valorile proprii ale matricei A, rezultând o bază a lui V formată din vectorii proprii ai lui A şi B.

Observaţie. Matricea P care are pe coloane aceşti vectori proprii reduce matricele A şi B la formele diagonale $J_A = P^{-1}AP$ şi $J_B = P^{-1}BP$.

30. a) $P(x) = \det(B + xI_n) = x^n - s_1x^{n-1} + \cdots + ({}_1)^n s_n$ unde $s_1, \dots, s_n$ sunt sumele Viete ale rădăcinilor polinomului $P \in \mathbf{R}[X]$. E suficient să arătăm că P nu are rădăcini strict pozitive.

Prin absurd fie $x_0 > 0$ o rădăcină $\Leftrightarrow \det(B + x_0I) = 0 \Leftrightarrow$ sistemul $(B + x_0I_n)X = 0$ are o soluţie nebanală $X \neq 0$ deci

$$BX = -x_0X \Rightarrow X^tBX = -x_0X^tX \Leftrightarrow$$

$$\sum b_{ij}x_ix_j = -x_0\left(\sum x_i^2\right) < 0.$$

b) Fie $B = A^t \cdot A$. Avem

$$\left(\sum b_{ij}x_ix_j\right) = X^tA^tAX = (AX)^t(AX) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

şi din a $\Rightarrow \det(B + xI_n) \geq 0,\ \forall\ x \in [0, \infty)$ şi pentru $x = 0 \Rightarrow \det B \geq 0 \Leftrightarrow \det A^tA \geq 0$.

31. a) $X \cdot X^t = Y = [y_{ij}]$, $y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk}$, $b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{jl}$

$$f_A(X \cdot X^t) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_{ij} = \sum_{k,l}\left(\sum_{i,j}(x_{ik}a_{il})(x_{jk}a_{jl})\right)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n}(a_{1l}x_{1k} + \cdots + a_{nl}x_{nk})^2 \geq 0$$

$$f_A(X \cdot X^t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{il}x_{ik} = 0,\ \forall\ k, l = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{li}^t x_{ik} = 0,\ \forall\ k, l = \overline{1, n} \Leftrightarrow A^t \cdot X = 0$$

$$\det A^t \neq 0 \Rightarrow A^tX = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

b) Avem:

$$f_A(aX + bY) = af_A(X) + bf_A(Y)$$

şi

$$f_A(X^t) = f_A(X), \quad f_A(Z \cdot Z^t) \geq 0$$

şi luăm $Z = X + zY^t$, $z \in \mathbf{R} \Rightarrow$

$$f_A(X \cdot X^t + z(X \cdot Y + (X \cdot Y)^t) + z^2Y^t \cdot Y)$$

$$= f_A(X \cdot X^t) + 2zf_A(X \cdot Y) + z^2f_A(Y^t \cdot Y) \geq 0,\ \forall\ z \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow [f_A(X \cdot Y)]^2 - f_A(X \cdot X^t)f_A(Y^t \cdot Y) \leq 0$$

Observaţie. În cazurile particulare $A = I_n$ şi $A = \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se obţine $f_A(X) = TrX$ şi $f_A(X) = S(X)$ (suma tuturor elementelor matricei X) care deci verifică b).

Observaţie. $f_A(X) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2, \quad C = A^t \cdot X.$

31. $\det[M - \lambda I_{2n}] = \left|\begin{array}{c|c} A-\lambda I_n & B \\ \hline B & A-\lambda I_n \end{array}\right| =$

$$= \left|\begin{array}{c|c} A-B-\lambda I_n & B-A-\lambda I_n \\ \hline B & A-\lambda I_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} (A-B)-\lambda I_n & 0 \\ \hline B & (A+B)-\lambda I_n \end{array}\right| =$$

$$= |(A-B) - \lambda I_n| \cdot |(A+B) - \lambda I_n| = f_{A-B}(\lambda) f_{A+B}(\lambda).$$

32. a) $A(X+iY) = (a+ib)(X+iY)$, $b \neq 0$, $X+iY \neq 0$. Dacă presupunem $X = cY$, $c \in \mathbf{R}$, rezultă

$$A(c+i)Y = (a+ib)(c+i)Y \Rightarrow$$

$$A \cdot c \cdot Y = (ac-b)Y \text{ şi } A \cdot Y = (a+bc)Y,$$

deci $ac - b = ac + bc^2$ sau $c^2 = -1$, contradicţie cu $c \in \mathbf{R}$.

b) $f(A)(X+iY) = f(a+ib)(X+iY) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(A) \cdot X = f(\lambda) \cdot X \\ f(A) \cdot Y = f(\lambda) \cdot Y \end{cases}, \quad X, Y \neq 0.$$

33. $A^k = P \cdot J_A^k \cdot P^{-1} = P \cdot J_A \cdot P^{-1} \Rightarrow J_A^k = J_A$ şi aceasta pentru orice celulă Jordan, relaţie posibilă doar pentru celule de dimensiuni 1.

34. a) Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii distincte ale lui A şi $X_1, \ldots, X_n$ vectorii proprii corespunzători. Subspaţiile $V_k = \{X | \ A \cdot X = \lambda_k X\} = \{a \cdot X_k | \ a \in C\}$ sunt de dimensiune 1. Dacă $B \in C(A)$ atunci $A(BX_k) = B(AX_k) = \lambda_k(BX_k)$ deci $BX_k \in V_k$ sau $BX_k = \alpha_k X_k$, $\alpha_k \in C$, deci X_k este vector propriu pentru B.

Observaţie. În baza $X_1, \dots, X_n$ matricele din $C(A)$ au formă diagonală.

b) Din observaţia anterioară $C(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$, $\lambda_k \in C$ deci $C(A)$ este spaţiu vectorial de dimensiune n. E suficient să arătăm că matricele $I, A, \dots, A^{n-1}$ sunt liniar independente.

Dacă $a_1 I + a_2 A + \cdots + a_n A^{n-1} = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ atunci $P(A) \cdot X_k = P(\lambda_k) X_k = 0$ deci $P(\lambda_k) = 0$, $k = \overline{1, n} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi cum matricea din dreapta este o matrice Vandermonde de numere distincte rezultă $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

35. Polinomul $P(x) = x^p - 1$ anulează pe A ($P(A) = 0$), deci valorile proprii verifică ecuaţia $\lambda^p - 1 = 0$. Din $\det(A - I_n) \neq 0$ rezultă $\lambda \neq 1$ deci fiecare valoare proprie este rădăcină a polinomului $g(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ care este ireductibil peste $\mathbf{Q}$. Dacă polinomul caracteristic are ca valoare proprie o rădăcină a lui g, le are pe toate (de acelaşi ordin de multiplicitate), şi nu mai are altele, deci $f_A(x) = \pm(g(x))^k$, deci $n = k(p-1)$.

36. a) Verificarea identităţii: $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$cu $u, v \in \mathbf{R}^3$ o lăsăm pe seama cititorului, iar $T(1, 1, 1) = (0, 4, 1)$.

b) Pentru a determina nucleul transformării liniare T trebuie rezolvat următorul sistem omogen:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

şi se obţine cu uşurinţă că x = y = z = 0. Atunci Ker$T$ = $\{(0,0,0)\}$ şi deci transformarea liniară T este injectivă ceea ce implică: T este izomorfism.

c) Transformarea liniară inversă T^{-1} are ca matrice asociată (în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$) tocmai inversa matricei asociate lui T:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

şi se obţine (folosind, de exemplu, metoda lui Gauss)

$$A_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aşadar expresia lui T^{-1}este dată de:

$$T(t,u,v) = (-8t - u + 5v, 5t + u - 3v, -2t + v).$$

37. a) Deoarece se poate scrie

$$g\ (x,y,z) = (x + y - z)^2 + (\ y + z)^2 + z^2$$

rezultă că g este o formă pătratică pozitiv definită şi deci o putem folosi pentru a înzestra $\mathbf{R}^3$ cu următorul produs scalar:

$$\langle X,Y\rangle_g = x_1y_1 + 2\ x_2y_2 + 3\ x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1$$

unde $X = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, $Y = (y_1,\ y_2,\ y_3)$.

b) Se alege $B = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbf{R}^3$ (relativ la produsul scalar definit anterior) în raport cu care forma pătratică g are forma canonică normală

$$g\ (X) = (x_1)^2 + (\ x_2)^2 + (x_3)^2$$

iar forma pătratică f are următoarea formă canonică:

$$f\ (X) = \lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(\ x_2)^2 + \lambda_3(x_3)^2$$

unde $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, iar coeficienţii lui f sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\det(A_f - \lambda A_g) = 0. \tag{1}$$

Deoarece în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{R}^3$ matricele asociate lui f şi g sunt de forma

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ -1 & \dfrac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se obţin următoarele soluţii pentru ecuaţia (1): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$, $\lambda_3 = -\dfrac{9}{2}$ (verificările sunt lăsate în seama cititorului silitor !). Prin urmare rezultă următoarea formă canonică pentru forma pătratică f

$$f\ (X) = (x_1)^2 + \frac{5}{2}(\ x_2)^2 - \frac{9}{2}(x_3)^2.$$

In continuare, se găseşte pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 1$ vectorul propriu asociat $v_1 = (1, 0, 0)$ şi similar se obţin vectorii $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (3, -2, 1)$; după normarea acestor vectori rezultă următoarea transformare ortogonală:

$$x = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ x_2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\ x_3$$

$$y = -\sqrt{2}x_3$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\ x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ x_3$$

GEOMETRIE

1. Deoarece:

$$x_u = \cos v\ ;\quad y_u = \sin v\ ;\quad z_u = 1x_v = -u\sin v\ ;\ y_v = u\cos v\ ;\ z_v = 1,$$

se obţine: $E = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$; $F = 1$, $G = u^2 + 1$ şi deci

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 2du^2 + 2dudv + (u^2+1)dv^2.$$

b) Coordonatele curbilinii ale punctului M se determină din sistemul:

$$\begin{cases} u\cos v \ = 1 \\ u\sin v = 0 \\ u + v = 1 \end{cases}$$

obţinându-se: $u = 1$, $v = 0$.

Atunci ecuaţia planului tangent este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică: $x + y - z = 0$.

c) Pentru curba $(C_1) : u = e^v$ avem $du = e^v dv = udv$, iar pentru curba (C_2) se obţine $(2u+1)\delta u + e^{-v}\delta v = 0$; ţinând seama de $u^2 + u + 1 = e^{-v}$ rezultă:

$$\delta v = -\frac{2u+1}{u^2+u+1}\ \delta u.$$

Vom folosi formula:

$$\cos(C_1, C_2) = \frac{E\ du\ \delta u\ +\ F(du\ \delta v\ +\ dv\ \delta u)\ +\ G\ dv\ \delta v}{\sqrt{Edu^2\ + 2Fdudv\ + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2\ + 2F\delta u\delta v\ + G\delta v^2}}$$

şi vom evalua numărătorul în condiţiile problemei:

$$E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G\ dv\ \delta v\ =$$

$$= 2u\ \delta u\ dv\ + [1 - \frac{u(2u+1)}{u^2+u+1}]\ \delta u\ dv\ - \frac{(u^2+1)(2u+1)}{u^2+u+1}\delta u\ dv =$$

$$= \frac{2u(u^2+u+1) - u(2u+1) + u^2+u+1 - (u^2+1)(2u+1)}{u^2+u+1}\ \delta u\ dv\ = 0.$$

Aşadar cele două curbe de pe suprafaţa (S) sunt ortogonale.

2. a) Deoarece avem:

$$x' = 1,\ y' = t,\ z' = \frac{t^2}{2}$$

ecuaţiile tangentei la curbă în punctul $M\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ sunt de forma

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{z+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}.$$

b) Deoarece $x'' = 0,\ y'' = 1;\ z'' = t$ ecuaţia planului osculator într-un punct curent al curbei este:

$$\begin{vmatrix} x-t & y-\dfrac{t^2}{2} & z-\dfrac{t^3}{6} \\ 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

adică $t^2x - 2ty + 2z - \dfrac{t^3}{3} = 0.$

Atunci condiţia ca planele osculatoare în puncte de abscise t_1 şi t_2 să fie perpendiculare este

$$(t_1t_2)^2 + 4\ t_1t_2\ + 4 = 0$$

sau $(t_1t_2+2)^2 = 0$ adică ceea ce trebuia demonstrat.

c) Din (1) se obţin imediat: $A = \frac{t^2}{2}$, $B = -t$, $C = 1$ ş i aplicând formula curburii

$$k = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^{\ 2} + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

în condiţiile problemei ($t = -1$) rezultă:

$$k = \frac{(\frac{1}{4} + 1 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(1 + 1 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{9}.$$

3. a) Introducând în formula torsiunii unei curbe

$$T = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

datele problemei:

$$x' = 6t^2 + 2t \ , \quad y' = 2t \ - 2 \ , \quad z' = 3t^2 + 1$$

$$x^{''} = 12 \ t + 2 \ , \quad y^{''} = 2 \ , \quad z' = 6t$$

$$x''' = 12 \ , \quad y'' = 0 \ , \quad z' = 6$$

se obţine $T = 0$, ceea ce înseamnă că (C) este o curbă plană.

b) Se pune condiţia ca $x, \ y, \ z$ să verifice ecuaţia generală a planului$A \ x + B \ y + C \ z + D = 0$ şi se obţine identitatea:$(2A + C) \ t^3 + (A + B) \ t^2 + (C - 2B) \ t + D - C = 0$ din care rezultă relaţiile

$$B = -A, \ C = D = -2 \ A.$$

Aşadar ecuaţia planului curbei este $x - y - 2z - 2 = 0$.

4. a) Vom nota cu α unghiul format de tangenta într-un punct oarecare al curbei (C) cu axa Oz şi ţinând seama că

$$x' = e^{at} \ (a \ \cos t \ - \sin t), \quad y' = e^{at} \ (a \ \sin t \ + \cos t) \ , \quad z' = a \ e^{at}$$

se obţine:

$$\cos\ \alpha = \frac{a\ e^{at}}{e^{at}\ \sqrt{2a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}.$$

b) Se observă că $x^2+y^2 = e^{2at} = z^2$; aşadar curba (C) este situată pe conul de ecuaţie $x^2+y^2=z^2$.

c) Deoarece avem:

$$x'' = e^{at}\ (a^2\ \cos t\ - 2a \sin t - \cos t),$$

$$y'' = e^{at}\ (a^2\ \sin t\ + 2a \cos t - \sin t)\ ,\ z' = a^2\ e^{at}$$

se obţine cu uşurinţă în $t=0$: $A = -\ a^2$; $B = -\ a$; $C =\ a^2+1$.

Atunci curbura în $t=0$ este dată de

$$k = \frac{(a^4+a^2+a^4+2\ a^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a^2+1}(2a^2+1)} = \frac{(2\ a^4+3\ a^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a^2+1}(2a^2+1)}.$$

5. a) Distanţa cerută se calculează astfel:

$$d^2 = \frac{4(t-1)^2+(2t+1)^2+(t+2)^2}{(t^2+1)^2} = \frac{9}{t^2+1}$$

şi este maximă pentru $t=0$, respectiv minimă pentru $t=\infty$; deci se obţin punctele $M\ (-2,1,2)$ şi respectiv originea O a sistemului de coordonate.

b) Deoarece

$$x' = -2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}\ ,\quad y' = -2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}\ ,\quad z' = \frac{-t^2-4t+1}{(t^2+1)^2}$$

ecuaţiile tangentei la curbă în punctul $M\ (-2,1,2)$ sunt

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

c) Pentru ca tangenta la curbă să fie perpendiculară pe vectorul $\overrightarrow{v}$ trebuie ca $2\ x'+2\ y'+z'=0$, adică

$$-4(t^2-2t-1)-4(t^2+t-1)-t^2-4t+1=0$$

sau $9 - 9\ t^2 = 0$, de unde $t = \pm 1$. Deci punctele căutate pe curba (C) sunt $A\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ şi $B\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. a) Avem

$$x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = \cos(u+v) x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = \cos(u+v)$$

şi atunci forma întâi fundamentală asociată lui (S) este:

$I\ (du, dv) = (1+\cos^2(u+v))\ du^2 + 2\cos^2(u+v)\ du\, dv + (1+\cos^2(u+v))\ dv^2$.

Ecuaţia planului tangent în punctul O este dată de

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{adica} \quad x + y - z = 0.$$

b) Ecuaţiile normalei la (S) în punctul O sunt

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

şi notând cu α unghiul cerut se obţine $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

c) Pe curba (C_1) avem $du = -\ dv$, iar pe (C_2): $\delta u = \delta v$; înlocuind în formula

$$\cos(C_1, C_2) = \frac{E\ du\ \delta u\ +\ F(du\ \delta v\ +\ dv\ \delta u)\ +\ G\ dv\ \delta v}{\sqrt{Edu^2\ + 2Fdudv\ + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2\ + 2F\delta u \delta v\ + G\delta v^2}}$$

se obţine la numărător:

$$(1 + \cos^2(u+v))\ du\ \delta u + \cos^2(u+v)\ (du\ \delta u - du\ \delta u) -$$

$$-(1 + \cos^2(u+v))\ du\ \delta u = 0$$

şi deci curbele sunt ortogonale.

7. a) Deoarece avem:

$$x_u = 2(u{-}v),\ \ y_u = 2\,u,\ \ z_u = \frac{1}{2}v x_v = -2(u{-}v),\ \ y_v = -6\,v,\ \ z_v = \frac{1}{2}u{-}2v$$

se obţin cu uşurinţă parametri directori ai normalei la (S) într-un punct oarecare al său

$$l = 2u\,(\frac{1}{2}u - 2v) + 3v^2 = (u-v)(u-3v),$$

$$m = -(u-v)(u-3v),\ \ n = 4(u-v)(u-3v).$$

Atunci versorul normalei este:

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{k}).$$

b) Pentru că normala suprafeţei are direcţia constantă rezultă că (S) este un plan perpendicular pe $\overrightarrow{n}$; ţinând seama că originea O aparţine suprafeţei ecuaţia cerută este de forma $x - y + 4\ z = 0$.

c) Avem

$$x_{u\ u} = 2\ ,\ \ y_{u\ u} = 2\ ,\ \ z_{u\ u} = 0\ ,$$

$$x_{u\ v} = -2\ ,\ \ y_{u\ v} = 0,\ \ z_{u\ v} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$x_{v\ v} = 2,\ \ y_{v\ v} = -6,\ \ z_{v\ v} = -2$$

şi folosind formula:

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{u\ u} & y_{u\ u} & z_{u\ u} \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

rezultă

$$L = \frac{\begin{vmatrix} 2(u-v) & 2u & \frac{v}{2} \\ -2(u-v) & -6v & \frac{u}{2} - 2v \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2} = 0\ ;$$

analog se obţine $M = N = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

8. a) Introducând $z = 0$ în ecuaţiile curbei (C) se obţin imediat ecuaţiile proiecţiei sale pe planul xOy:

$$\begin{cases} x^2 + 2\,y^2 - 8\,y = 0 \\ z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

b) Tinând seama că (C) este intersecţia unei sfere cu un plan vom indica următoarea parametrizare:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2 - 2\,\sin t \\ z = 2 + 2\,\sin t. \end{cases}$$

c) Folosind parametrizarea dată anterior se obţine:

$$\frac{d\,\overrightarrow{r}}{d\,t} = (-\,2\sqrt{2}\sin t\ ,\ -2\cos t\ , 2\cos t)$$

şi $t = \dfrac{\pi}{2}$ pentru punctul $M\ (0, 0, 4)$. Atunci versorul tangentei la curba (C) în punctul M este $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{i}$.

Deoarece

$$\frac{d\,^2\overrightarrow{r}}{d\,t^2} = (-\,2\sqrt{2}\cos t\ ,\ 2\sin t\ , -2\sin t),$$

versorul normalei principale la curba (C) în punctul M este $\overrightarrow{\nu} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$; în sfârşit, versorul binormalei în M este $\overrightarrow{\beta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.

Pe de altă parte avem $A = 0$, $B = C = -4\sqrt{2}$ şi deci curbura în punctul M este egală cu

$$k = \frac{(64)^{\frac{1}{2}}}{8\,\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Dacă nu beneficiem de parametrizarea curbei (C) se poate aplica teorema funcţiilor implicite sistemului (1) şi anume:

$$\begin{cases} 2\,x + 2\,y\,y' + 2\,z\,z' = 0 \\ y' + z' = 0; \end{cases}$$

se obţine cu uşurinţă $y'(0) = z'(0) = 0$, de unde $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{i}$, etc.

9. a) Se consideră punctul mobil $B\ (0, \beta, 0)$ şi punctele fixe $I\ (a, b, 0)$, $J\ (0, c, d)$; atunci dreapta care conţine punctele B şi I are următoarele ecuaţii:

$$\begin{cases} z = 0 \\ (b - \beta)\ x - a\ y + a\ \beta = 0, \end{cases}$$

iar dreapta determinată de B şi J este dată de

$$\begin{cases} x = 0 \\ (c - \beta)\ z - d\ y + d\ \beta = 0. \end{cases}$$

b) Dreapta (BI) intersectează axa Ox în punctul A de coordonate $x = \dfrac{a\ \beta}{\beta - b}$, $y = z = 0$, iar dreapta (BJ) se intersectează cu axa Oz în punctul $C\ \left(0, 0, \dfrac{d\ \beta}{\beta - c}\right)$; atunci dreapta determinată de A şi C are ecuaţiile:

$$\begin{cases} y = 0 \\ d\ x\ (\beta - b) + a\ z\ (\beta - c) - a\ d\ \beta = 0. \end{cases}$$

Dacă scriem a doua ecuaţie de mai sus sub forma

$$bd\ x + ac\ z - \beta(d\ x + a\ z - a\ d) = 0 \text{ , unde } \beta \text{ este arbitrar}$$

se obţin cu uşurinţă coordonatele punctului fix K şi anume:

$$x = \frac{ac}{c - b}\ ,\ y = 0\ ,\ z = \frac{bd}{b - c}.$$

c) Verificarea faptului că punctele I, J, K sunt coliniare o lăsăm ca exerciţiu .

10. a) Deoarece parametrii directori ai dreptei (d) sunt $l = 0$, $m = 1$, $n = -1$ ecuaţia planului cerut este $y - z = 0$.

b) Pentru început vom determina coordonatele proiecţiei punctului M pe dreapta (d) rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 2\,x - y - z = 2 \\ x + 2\,y + 2\,z = -1 \\ y - z = 0; \end{cases}$$

se obţin: $x = \dfrac{3}{5}$, $y = z = -\dfrac{2}{5}$. Atunci coordonatele simetricului lui M faţă de dreapta (d) sunt: $x = \dfrac{1}{5}$, $y = z = -\dfrac{4}{5}$.

c) Condiţia geometrică ca cele trei plane să se intersecteze după o dreaptă este echivalentă cu condiţia ca următorul sistem

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 2\,y + 2\,z = -1 \\ x + 7\,y + 7\,z = -m; \end{cases}$$

să fie compatibil nedeterminat; atunci se impune ca:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -m \end{vmatrix} = 0$$

şi se obţine $m = 5$.

11. a) Dreptele (d_1) şi (d_2) nu sunt concurente deoarece sistemul

$$\begin{cases} x = y - 1 = z - 2 \\ x = y\ ,\ z = 1 \end{cases}$$

este incompatibil; ele nu sunt nici paralele căci au parametri directori $(1,1,0)$, respectiv $(1,1,1)$.

b) $\cos(\,(d_1),(d_2)) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

c) Se consideră $M_1(t, t+1, t+2)$ şi $M_2(u, u, 1)$ două puncte arbitrare situate pe (d_1), respectiv pe (d_2); atunci parametrii directori ai dreptei determinate de aceste puncte sunt

$$l = t - u,\ m = t - u + 1,\ n = t + 1.$$

Vom determina t şi u din condiţia de perpendicularitate pe planul (P):

$$\frac{t-u}{2} = t - u + 1 = \frac{t+1}{-1}$$

obţinând $t = 0$, $u = 2$. Aşadar dreapta căutată $(M_1\ M_2)$ are următoarele ecuaţii:

$$\frac{x-2}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{-1}.$$

12. a) Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt oarecare în spaţiu; lăsăm verificarea în seama cititorului.

b) Se consideră $M_1(t, 2\,t+3, 3\,t+5)$ şi $M_2(u\ , u+1, 4\,u+8)$ două puncte arbitrare situate pe (d_1), respectiv pe (d_2); atunci parametri directori ai dreptei determinate de aceste puncte sunt:

$$l = t - u,\ m = 2\,t - u + 2,\ n = 3\,t - 4\,u - 3.$$

Ei sunt proporţionali cu parametri directori ai dreptei (d):

$$\frac{t-u}{1} = \frac{2\,t-u+2}{2} = \frac{3\,t-4\,u-3}{2}$$

relaţii din care obţinem $t = -1$, $u = -2$. Prin urmare dreapta determinată de punctele $M_1\ (-1, 1, 2)$ şi

$M_2\ (-2, -1, 0)$ are următoarele ecuaţii:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}.$$

c) Cum punctele de intersecţie ale acestei drepte cu (d_1) şi (d_2) sunt M_1 şi M_2 distanţa dintre ele este:

$$d = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

13. a) Planele (P_1) şi (P_2) nu sunt paralele deoarece vectorii lor normali sunt $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, respectiv $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

b) Din sistemul

$$\begin{cases} x + 2\,y - z = 6 \\ y = 2\,x \ + 1 \\ z = 2\,x - 1 \end{cases}$$

se obţin coordonatele punctului $M = (d) \cap (P_1)$: $x = 1,\ y = 3,\ z = 1$.

c) Dreapta căutată este paralelă cu $(P_1) \cap (P_2)$ şi are deci ca vector director $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$; pe de altă parte această dreaptă trece prin punctul $M(1, 3, 1)$ şi de aceea are următoarele ecuaţii:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

14. a) Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt oarecare; lăsăm verificarea în seama cititorului.

b) Dreapta căutată este paralelă cu $(D) = (P) \cap (yOz)$ şi deci are ca parametri directori $0,\ 2, -1$; se consideră în continuare $M_1(t,\ t-7, 3\ -t)$ şi $M_2(u\ , 3\,u+1, 3\,u-1)$ două puncte arbitrare situate pe (d_1), respectiv pe (d_2) şi din condiţiile ca dreapta (M_1M_2) să fie paralelă cu (D)

$$t = u\ , \frac{t - 3\,u - 8}{2} = \frac{4 - 3\,u - t}{-1}$$

se obţine imediat că $t = u = 0$.

Aşadar, $M_1(0,\ -7, 3\ )$ şi $M_2(0\ , 1, -1)$, iar ecuaţiile dreptei căutate sunt

$$x = 0,\ y + 2\ z + 1 = 0.$$

c) Distanţele de la punctele M_1 şi M_2 la planul (P) sunt date de

$$d\ (M_1,(P)) = \frac{|-7+6-5|}{\sqrt{4+1+4}} = 2, \quad d\ (M_2,(P)) = \frac{|1-2-5|}{3} = 2.$$

15. a) Dreptele (d_1) şi (d_2) sunt oarecare; lăsăm verificarea în seama cititorului.

b) Dreapta (d_3) este inclusă în planul (P) deoarece $x + x - 1 - 2\,x + 1 = 0$.

c) Fie $M_1(t\ , t+1, t-1)$ un punct arbitrar situat pe dreapta (d_1); atunci planul determinat de M_1 şi (d_2) este dat de ecuaţia:

$$x\ (11t-4) - 5t\ y - 2(3t-4)\ z - 5t + 8 = 0$$

şi se intersectează cu dreapta (d_2) în punctul M_3 de coordonate $x = \frac{t}{t-2}$, $y = \dfrac{2}{t-2}$, $z = \dfrac{t+2}{t-2}$. Prin urmare dreapta determinată de punctele M_1 şi M_3 se sprijină de dreptele (d_1), (d_2) şi (d_3); pentru ca să fie paralelă cu planul (P) trebuie ca parametri ei directori

$$l = \frac{t^2-3t}{t-2},\ m = \frac{t^2-t-4}{t-2},\ n = \frac{t^2-4t}{t-2}$$

să satisfacă relaţiei:

$$\frac{t^2-3t}{t-2} + \frac{t^2-t-4}{t-2} - \frac{t^2-4t}{t-2} = 0$$

de unde se obţine $t = -2$.

Atunci ecuaţiile dreptei căutate sunt

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{6}.$$

MATEMATICI SPECIALE

1. a) Fie $Y_n(s) = \mathcal{L}\{y_n(t)\}$. Atunci $sY_1(s) - 1 + \alpha Y_1(s) = 0$, de unde $Y_1(s) = \dfrac{1}{s+\alpha}$. soluţia este $y_1(t) = e^{-st}u(t)$, unde $u(t)$ este treapta unitate.

b) $sY_n(s) = \alpha Y_{n-1}(s) - \alpha Y_n(s) \Rightarrow Y_n = \frac{\alpha}{s+\alpha}Y_{n-1}$, deci $Y_n = \dfrac{\alpha^{n-1}}{(s+\alpha)^{n-1}}Y_1 = \dfrac{\alpha^{n-1}}{(s+\alpha)^n}$, de unde $y_n(t) = \dfrac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}u(t)$.

c) Se recomandă schimbarea de variabilă independentă $\sqrt{t} = \tau$, $t = \tau^2$. se va obţine soluţia $y_0(t) = \sin(2\sqrt{t})$.

2. a) Dacă $f(z_1) = f(z_2)$, pentru $z_1, z_2 \in \Delta_r$, atunci $\dfrac{z_1}{(z_1+1)^2} = \dfrac{z_2}{(z_2+1)^2}$, deci $(z_1 - z_2)(z_1z_2 - 1) = 0$. Dar relaţia $z_1z_2 = 1$ nu poate avea loc deoarece ar rezulta $|z_1||z_2| = 1$, adică produsul a două numere pozitive subunitare ar fi egal cu 1. Aşadar, $z_1 = z_2$.

Apoi, dacă $|z| = 1$, atunci $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, deci

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}}{1 + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta}} = \frac{1}{2 + 2\cos(\theta)} = \frac{1}{4\cos^2(\frac{\theta}{2})},$$

adică $f(z)$ este real şi mai mare sau egal cu $\dfrac{1}{4}$. Atunci imaginea discului unitate este $\mathbf{C}\backslash[\frac{1}{4}, \infty]$.

b) În general,

$$\overline{z}dz = (x - iy)(dx + idy) = xdx + ydy + i(xdy - ydx)$$

şi pentru o curbă jordaniană (C) de clasă $\mathbf{C}^1$, avem

$$\int_{(C)} \overline{z}dz = 0 + i\int_{(C)} xdy - ydx = 2i\text{Aria}(\text{Int}C).$$

Aplicând acest rezultat, avem

$$2i\text{Aria} f(\Delta_r) = \int_{f(\partial\Delta_r)} \overline{w} dw \overbrace{=}^{w=f(z)} \int_{f(\partial\Delta_r)} \overline{f(z)} f'(z) dz.$$

3. a) Aşadar, $A^T = -A$ şi

$$\frac{d\psi}{dt} = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' + 2x_3x_3' = 2x^Tx' = 2x^TAx,$$

unde x este vectorul soluţie coloană.

Dar x^TAx este un vector 1-dimensional, deci

$$x^TAx = (x^TAx)^T = x^TA^Tx = -x^TAx$$

şi ca atare, $x^TAx = 0$.

În concluzie, $\dfrac{d\psi}{dt} = 0$, deci $\psi(x_1, x_2, x_3) = C$, constant în lungul oricărei soluţii.

În plus, reţinem că orice soluţie $x(t)$ se identifică prin punctul $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ care verifică relaţia $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 = C$, adică este situat pe o sferă din $\mathbf{R}^3$. Curbele-soluţii fiind situate pe sfere, sunt mărginite.

b) Se observă că dacă $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ este o soluţie, atunci

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) = 0,$$

deci soluţia este situată într-un plan de ecuaţie $x_1 + x_2 + x_3 =$ const..

4. a) Singularităţile sunt 0 şi ∞, esenţiale, izolate. Apoi

$$f(z) = e^z e^{1/z} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n)(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (\sum_{n \geq max(s,0)} \frac{1}{n!(n-s)!} z^s).$$

Reziduul în $z = 0$ este coeficientul lui z^{-1}, deci $r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$, iar reziduul la infinit va fi $-r$.

b) $\varphi(t) = \exp(e^{it} + e^{-it}) = \exp(2\cos(t))$ etc. Apoi $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ şi $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|u|=R} \frac{e^{u+\frac{1}{u}}}{u^{n+1}} du$ etc.

5. Funcţia are un punct singular esenţial izolat, anume $z = 1$($z = \infty$ este punct ordinar, deoarece punând $z = \dfrac{1}{u}$, rezultă $f(z) = \cos\Big(\dfrac{1}{u-1}\Big)$ şi $u = 0$ este punct ordinar). Apoi,

$$f(z) = \cos(1 + \frac{1}{z-1}) = \cos 1 \cos(\frac{1}{z-1}) - \sin 1 \sin(\frac{1}{z-1})$$

$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

6. a) $e^{ix} = z$; $dx = \dfrac{dz}{iz}$. Se obţine $I_n = \dfrac{\pi i}{2^{n+1}}$.

b) $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ şi rezultă $a_0 = 0$, $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, folosind rezultatul punctului a). Convergenţa este uniformă datorită criteriului lui Weierstrass.

7. a) Notăm $\alpha = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}\varphi'(\alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{x^2 - y^2}{x^2})^2 \varphi''(\alpha) + \frac{2y^2}{x^3}\varphi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x}\varphi'(\alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4y^2}{x^2}\varphi''(\alpha) + \frac{2}{x}\varphi'(\alpha).$$

Se pune condiţia ca u să fie armonică şi rezultă $\alpha^2\varphi''(\alpha) + 2\alpha\varphi'(\alpha) = 0$, deci $(\alpha^2\varphi'(\alpha))' = 0$, de unde $\alpha^2\varphi'(\alpha) = C$, C constant, deci $\varphi(\alpha) = -\dfrac{C}{\alpha} + C_1$, adică $u(x, y) = \dfrac{-Cx}{x^2 + y^2}$. Se obţine $f(z) = -\dfrac{C}{z} + D$.

b) $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_{|z|=1} \Big(\frac{C}{z} + D\Big)dz = 2\pi C i.$

8. Căutăm soluţii nenule de forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Va rezulta

$$u(x,t) = e^{(-\frac{1}{2}x^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}.$$

Din condiţia secundară, rezultă că

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) = \frac{1}{5 - 3\cos(t)} \quad \text{etc.}$$

9. a) $f(x) = \dfrac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $-1 < a < 1$. Coeficienţii seriei Fourier trigonometrice a funcţiei f sunt daţi de:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} e^{inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{a\frac{z^2+1}{2z} - a^2}{1 - 2a\cos\frac{z^2+1}{2z} + a^2} \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{a}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2 - 2za + 1)z^{n-1}}{-az^2 + z(a^2+1) - a}\,dz.$$

Rezultă $a_n + ib_n = \dfrac{a}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot a^{n-1} = a^n$, deci $a_n = a^n$ şi $b_n = 0$ pentru $n \geq 1$. Pentru $n = 0$ se observă că funcţia $h(z) = \dfrac{z^2 - 2za + 1}{-az\left(z - \dfrac{1}{a}\right)(z-a)}$

are polii $z_1 = 0$, $z_2 = \dfrac{1}{a}$ si $z_3 = a$ (pol de ordinul 1). Rezultă

$$\int_{|z|=1} h(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow a_0 + ib_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

În final obţinem $f(x) = \sum_{n\geq 1} a^n \cos(nx)$.

b) Aplicăm formula Parseval:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

care se rescrie

$$\sum_{n\geq 1} a^{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a^2 \left(\frac{\cos x - a}{1-2a\cos x + a^2}\right)^2 dx.$$

Dar pentru $a \in (-1, 1)$ avem

$$\sum_{n\geq 1}(a^2)^n = \sum_{n\geq 0}(a^2)^n - 1 = \frac{1}{1-a^2} - 1 = \frac{a^2}{1-a^2},$$

deci înlocuind în membrul stâng , rezultă:

$$\frac{a^2}{1-a^2} = \frac{a^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos x - a}{1-2a\cos x + a^2}\right)^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos x - a}{1-2a\cos x + a^2}\right)^2 = \frac{\pi}{1-a^2}.$$

10. Pentru a obţine rezultatul corect vom folosi definiţia Transformatei Fourier prin sin, $\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\, dx$.

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}e^{i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2/2})' e^{i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}(e^{-x^2/2}e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} i\xi e^{i\xi x}\, dx) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x^2}{2}-i\xi x)}\, dx = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-i\xi}{\sqrt{2}})^2 - \frac{\xi}{2}^2}\, dx =$$

$$= \frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x-i\xi}{\sqrt{2}})^2}\, dx = \frac{\xi e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \xi e^{-\xi^2/2}.$$

11. Avem

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{n^2}\cdot \mathrm{sh}(a\pi)\cdot(-1)^n - \frac{a^2}{n^2}\cdot a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{2a\cdot \mathrm{sh}(a\pi)\cdot(-1)^n}{\pi(n^2+a^2)};$$

de asemenea, $a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\text{sh}(a\pi)}{a}$. Atunci f are seria trigonometrică Fourier asociată

$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \cdot \text{sh}(a\pi) + \sum_{n \geq 1} \frac{2a(-1)^n}{\pi(n^2 + a^2)} \cdot \text{sh}(a\pi) \cdot \cos(nx)$$

Coeficientul c_{-n} din dezvoltarea funcţiei f în serie Fourier complexă este

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2\text{sh}(a\pi)} \cdot e^{ax+inx} dx = \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{a - in}{a^2 + n^2},$$

deci $a_n = \frac{(-1)^n \cdot a}{a^2 + n^2}$; $b_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{a^2 + n^2}$; $a_0 = \frac{1}{a}$.

Aplicând formula Parseval, rezultă

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \cdot \text{ch}(a\pi)}{2a \cdot \text{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi a \cdot \text{ch}(a\pi) - \text{sh}(a\pi)}{2a^2 \cdot \text{sh}(a\pi)}.$$

12. Se observă că $f(t) = \frac{\sin t}{5 + 3\cos t}$ este periodică cu perioada principală 2π. Considerăm restricţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, care se dezvoltă în serie Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),\ t \in [-\pi, \pi].$$

Calculăm

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{5 + \frac{3(z^2+1)}{2z}} \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}(z^2 - 1)}{3z^2 + 10z + 3} dz.$$

Se observă că integrandul, funcţia $g(z) = \frac{z^{n-1}(z^1 - 1)}{3z^2 + 10z + 3}$, $n \geq 1$ are două singularităţi, $z_1 = -\frac{1}{3}$ şi $z_2 = -3$, deci $\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$ şi deci $a_n + ib_n = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi i}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} i$, de unde obţinem coeficienţii seriei Fourier.

b) Pentru a găsi acea funcţie complexă ataşată funcţiei f pe care să o putem dezvolta in serie Laurent, folosind relaţia $e^{it} = z$ şi relaţiile $\sin t = \dfrac{z^2-1}{2iz}$, $\cos t = \dfrac{z^2+1}{2z}$, observăm că f se rescrie

$$f(z) = \frac{z^2-1}{2iz} \cdot \frac{2z}{10z+3z^2+3} = \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2-1}{3z^2+10z+3} = \frac{1}{3i}\left(1 - \frac{\frac{10}{3}z+2}{z^2+\frac{10}{3}z+1}\right).$$

Descompunem funcţia din paranteză în fracţii simple:

$$\frac{\frac{10}{3}z+2}{z^2+\frac{10}{3}z+1} = \frac{A}{z+\frac{1}{3}} + \frac{B}{z+3} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = 3$$

şi deci

$$f(z) = \frac{1}{3i}\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} - \frac{3}{z+3}\right).$$

Singura coroană pe care putem dezvolta funcţia f în serie Laurent este $\dfrac{1}{3} < |z| < 3$. Pentru $|z| > \dfrac{1}{3}$ (deci $\left|\dfrac{1}{3z}\right| < 1$), avem

$$\frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3z+1} = \frac{1}{3z(1+\frac{1}{3z})} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n \cdot z^n},$$

iar pentru $|z| < 3$ avem

$$\frac{3}{z+3} = \frac{1}{\frac{z}{3}+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n},$$

şi deci pentru $|z| \in (\frac{1}{3}, 3)$, obţinem

$$f(z) = \frac{1}{3i}\left(1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n \cdot 2^n} - 1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{(z^n - \frac{1}{z^n})}{2i} \cdot 2.$$

Folosind egalitatea $\frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) = \sin(nt)$, rezultă $f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot 2\sin(nt)$, $\forall z \in \left\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)\right\}$.

13. Aplicând transformarea Laplace, obţinem

$$L[x(t)](p) = L[\cos t](p) + L[te^t * x(t)](p).$$

Notăm $L[x(t)](p) = X(p)$ şi obţinem $X(p)\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \frac{p}{p^2+1}$ şi prin urmare

$$X(p) = \frac{(p-1)^2}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{\frac{1}{5}}{p-2} + \frac{\frac{4}{5}p - \frac{2}{5}}{p^2+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

Aplicând transformarea Laplace inversă, rezultă

$$x(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t,$$

înmulţită cu treapta unitate.

14. $f(z) = \dfrac{1}{z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\right)} = \dfrac{1}{z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)$, de unde

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...)\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\right) = 1.$$

Înmulţind cele două paranteze şi identificând, obţinem $a_{2k+1} = 0$ şi $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{7}{360}$, ...

15. $f(z) = \cos z$ şi rezultatul integralei este $\dfrac{(-1)^n \pi}{2^{n-1}}$.

16. Dacă $0 < r < 3$, atunci integrala este 0. Dacă $r > 3$, toţi polii funcţiei $z_k = 3e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$(poli simpli) sunt situaţi în interiorul domeniului ce mărgineşte curba $|z| = r$. Reziduul funcţiei în polul z_k este $\dfrac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \dfrac{z_k^2}{nz_k^n} = -\dfrac{z_k^2}{n3^n}$ şi folosind relaţiile lui Vietè, găsim $\sum_{k=0}^{n-1} z_k^2 = 0$, de unde rezultă imediat valoarea integralei egală cu 0.

Soluţii la Capitolul 5

Algebră

1. Deoarece n este liber de pătrate, putem scrie $n = p_1 p_2 \dots p_m$, unde p_i sunt numere prime distincte. Orice număr $d \in D_n$ se scrie sub forma $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ cu $\alpha_i \in \{0,1\}$ şi deci mulţimea D_n se identifică cu $\mathbb{Z}_2^m$ prin bijecţia

$$f : D_n \to \mathbb{Z}_2^m,\ f(d) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Dacă notăm $A = f(D)$, atunci cele trei condiţii asupra mulţimii D se rescriu astfel: a) $0 \in A$, b) dacă $a \in A$ atunci $1 - a \in A$ şi c) dacă $a, b \in A$ atunci $ab \in A$. Vom arăta acum că $(A, +)$ este subgrup al grupului aditiv $(\mathbb{Z}_2^m, +)$ şi deci conform Teoremei lui Lagrange, cardinalul lui A (şi implicit al lui D) va fi de forma 2^k cu $k \in \mathbb{N}$. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că dacă $a, b \in A$ atunci $a + b \in A$.

Observăm că $a + b = a + b + ab + ab = a(1 + b) + b(1 + a) = x + y$ unde $x = a(1 - b) \in A$ şi $y = b(1 - a) \in A$ pentru orice $a, b \in A$. Pe de altă parte, $x + y = (1 + x)(1 + y) + 1 + xy$. Dar $xy = ab + a^2b + ab^2 + a^2b^2$ $= ab + ab + ab + ab = 0$ şi deci $x + y \in A$.

2. Vezi soluţia problemei anterioare.

3. Numărul de soluţii al ecuaţiei din enunţ este 0, 2, 4 sau infinit. Notăm cu A, B, C, D elementele matricii M şi cu a, b, c, d elementele matricii necunoscute X. Dacă $AD - BC < 0$ ecuaţia din enunţ nu are soluţii. În continuare presupunem că $AD - BC \geq 0$.

Avem un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute: $a^2 + bc = A, d^2 + bc = D, b(a + d) = B, c(a + d) = C$. Analizăm diferitele cazuri posibile. Dacă $B = C = 0$ şi $A \neq D$ avem soluţii doar dacă $A \geq 0$ şi dacă $D \geq 0$. Dacă $A = 0$ sau $D = 0$ avem două soluţii iar dacă $A > 0$ şi $D > 0$ avem patru soluţii.

Dacă $B = C = 0$ şi $A = D$ avem o infinitate de soluţii.

Analizăm acum subcazul $C = 0$ şi $B \neq 0$. Dacă $A < 0$ sau $D < 0$ sau $A = D = 0$ nu avem nicio soluţie. Dacă $A = 0, D > 0$ sau $D = 0, A > 0$ sau $A = D > 0$ avem două soluţii. Dacă $A > 0, D > 0, A \neq D$ avem 4 soluţii. Analog se analizează cazul $B = 0, C \neq 0$

Analizăm în continuare cazul $B \neq 0, C \neq 0$ şi $AD - BC \geq 0$. Notăm $x = \dfrac{C}{c} = \dfrac{B}{b} = a + d$. Obţinem $a = \dfrac{x}{2} + \dfrac{A-D}{2x}$ şi $d = \dfrac{x}{2} + \dfrac{D-A}{2x}$. Rezultă că x este rădăcină nenulă a ecuaţiei de grad patru:

$$x^4 - 2(A+D)x^2 + (A-D)^2 + 4BC = 0.$$

Rezultă că $x^2 = A + D \pm 2\sqrt{AD - BC}$ (radicalul are sens deoarece $AD - BC \geq 0$). Ultima ecuaţie are zero, două sau patru soluţii nenule. O astfel de soluţie furnizează o soluţie a ecuaţiei matriceale din enunţ.

Pentru $A = D = 1, B = C = 0$ obţinem soluţiile $b = c = 0$,$a = \pm 1, d = \pm 1$ şi $d = -a$, unde a, b, c sunt soluţii pentru ecuaţia $a^2 + bc = 1$ (evident că există o infinitate de soluţii în acest caz).

Pentru $A = D = -1, B = C = 0$ obţinem soluţiile $d = -a$, unde a, b, c sunt soluţii pentru ecuaţia $a^2 + bc = -1$ (evident că există o infinitate de soluţii în acest caz).

4a. Fie $\sigma \in S_n$ şi fie d un număr natural prim cu $|S_n| = n!$. Descompunem pe σ în cicli disjuncţi şi fie τ un astfel de ciclu de lungime $k \leq n$. Evident că k este prim cu d deoarece d este prim cu $n!$. De aici rezultă că τ^d este tot un ciclu de lungime k. De aici deducem că σ^d are acelaşi tip de descompunere cu σ, ceea ce înseamnă că σ şi σ^d sunt permutări conjugate. Am demonstrat că S_n este grup raţional.

4b. Fie G un grup finit raţional şi comutativ. Notăm $m = |G|$. Fie g un element arbitrar al lui G. Deoarece $m - 1$ este prim cu m, deducem că g^{m-1} este conjugat cu g. Cum G este comutativ, aceasta înseamnă că $g^{m-1} = g$. Înmulţim cu g ultima egalitate şi obţinem (folosind şi teorema lui Lagrange) că $e = g^m = g^2$ pentru orice $g \in G$ (am notat cu

e elementul neutru al lui G). Din egalitatea $g^2 = e$, valabilă pentru orice element g al grupului G, rezultă că $m = 2^k$ şi că G este izomorf cu grupul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$.

4c. Fie p un număr prim care divide $m = |G|$. Ştim că $\mathbb{Z}_p^*$ este grup ciclic şi considerăm v un număr natural $1 \leq v \leq p-1$ astfel încât $\overline{v}$ să fie generator pentru grupul mutiplicativ $\mathbb{Z}_p^*$. Fie acum $d = pk + v$ ($k \in \mathbb{N}$) un număr prim mai mare strict ca m. Existenţa lui d este asigurată de teorema lui Dirichlet privitoare la numerele prime dintr-o progresie aritmetică în care raţia şi termenul iniţial sunt prime între ele. Din teorema lui Cauchy ştim că există un $g \in G$ care să aibe ordinul p. Cum d este prim cu m deducem că g^d este conjugat cu g şi obţinem egalitatea $g = xg^dx^{-1}$, pentru un anume $x \in G$. Se arată imediat prin inducţie că

$$x^t g^{d^t} x^{-t} = g$$

pentru orice număr natural nenul t. În particular alegem t să fie ordinul lui x în G. Din ultima egalitate rezultă că $g^{d^t} = g$. Cum ordinul lui g este p deducem că $d^t \equiv 1 \pmod{p}$. De aici rezulă că $v^t \equiv 1 \pmod{p}$ şi că $p-1$ divide t deoarece $\overline{v}$ este un generator pentru grupul mutiplicativ $\mathbb{Z}_p^*$. Enunţul este demonstrat în acest moment deoarece $p-1|t|m$ (faptul că t divide m este o consecinţă a teoremei lui Lagrange; a nu se uita că t este ordinul lui x).

5. Fie G un grup finit cu proprietatea din enunţ şi $x \in G$ arbitrar; vom nota cu $\langle x \rangle$ =subgrupul generat de x. Dacă există $x \in G$ astfel încât $\langle x \rangle = G$, G rezultă ciclic, deci abelian. Altfel, dacă $\langle x \rangle$ este subgrup propriu pentru orice x, deducem din ipoteză că exista $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $card(\langle x \rangle) = n$ pentru orice $x \neq e$. Mai mult, avem că neapărat $n = p$ prim: altfel, $\langle x \rangle$ ar avea subgrupuri proprii, ceea ce contrazice ipoteza. Deci G este un $p-$grup. Din ecuaţia claselor de elemente conjugate, deducem că centrul lui G, $Z(G)$, este netrivial. Dacă $Z(G) = G$ am terminat din nou. Altfel, $Z(G)$ având cardinalul p deducem că este ciclic, şi fie g un generator pentru el. Fie de asemeni $h \in G \setminus Z(G)$; atunci subgrupul generat de g şi h are cardinalul strict mai mare decât p deci este egal cu G. Deci G este generat de g şi h, şi cum g comută cu h, deducem că G este abelian.

Algebra liniară şi geometrie

1. Pentru implicaţia: A nilpotentă rezultă $tr(A^k) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, este suficient să arătăm că toate valorile proprii ale lui A sunt nule. Fie λ o valoare proprie a lui A şi v un vector propriu asociat lui λ (adică $Av = \lambda v$). Fie p cel mai mic număr natural pentru care $A^p = 0$. Atunci $A^p v = \lambda^p v = 0$. Cum $v \neq 0$ rezultă $\lambda = 0$ şi deci $tr(A^k) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru afirmaţia reciprocă vom arăta din nou că valorile proprii ale matricei A sunt toate nule. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valorile proprii nenule distincte ale matricei A iar $a_1, a_2, \dots, a_m$ multiplicităţile acestora. Deoarece $tr(A^k) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, obţinem $\sum_{i=1}^{m} a_i \lambda_i^k = 0$ pentru orice $k = 1, 2, \dots, m$. Am obţinut astfel un sistem de ecuaţii liniar omogen cu necunoscutele a_i toate nenule. Atunci determinantul sistemului trebuie să fie nul. Acesta fiind un determinant de tip Vandermonde, iar λ_i fiind distincte două câte două, rezultă că cel puţin una din valorile proprii este nulă. Contradicţie. Rezultă că toate valorile proprii sunt nule. Dar atunci polinomul caracteristic al lui A este de forma $p(x) = x^l$ şi deci matricea A este nilpotentă.

2. Să observăm mai întâi că funcţia f este continuă (e suficient să scriem expresia lui f folosind coordonate, presupunând că dreptunghiul are centrul în origine iar laturile sunt paralele cu axele de coordonate). Deoarece Δ este conexă iar f continuă, rezultă că imaginea funcţiei este un interval (mulţime conexă în $\mathbb{R}$). Folosind acum inegalitatea triunghiului rezultă uşor că

$$f(P) \geq f(O) = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pe de altă parte, folosind inegalitatea lui Minkowski, nu este greu de arătat că funcţia f este si convexă. Atunci

$$f(P) \leq \max\{f(A).f(B), f(C), f(D)\} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

În concluzie $f(\Delta) = [2\sqrt{a^2+b^2}, a+b+\sqrt{a^2+b^2}]$.

3. Considerăm forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care în raport cu baza canonică în care este dată ecuaţia hiperboloidului, are expresia

$$h(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Definim vectorii $u = \frac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$, $v = \frac{1}{ON}\overrightarrow{ON}$ şi $w = \frac{1}{OP}\overrightarrow{OP}$. Este clar că $\{u, v, w\}$ este un reper ortonormat al lui $\mathbb{R}^3$. Dacă notăm cu A' matricea formei pătratice h în raport cu acest reper, atunci

$$\mathrm{Tr}A' = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM^2} > 0.$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathrm{Tr}A' = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2},$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.

4. a). **Soluţia 1.** Notăm cu $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ matricea pătrată având 1 pe poziţia (i,j) şi 0 în rest. Orice matrice $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ se reprezintă ca o combinaţie liniară de matricele E_{ij} prin $X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ şi deci, datorită liniarităţii lui f, vom avea $f(X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}f(E_{ij})$. Definim acum matricea $A = (a_{ij})$ prin $a_{ij} = f(E_{ji})$. Nu este greu de văzut acum că $\mathrm{Tr}(AX) = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ik}x_{ki}$ şi deci $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

Soluţia 2. Deoarece $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ rezultă că

$$dim_{\mathbb{R}}Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = n^2.$$

Definim aplicaţia $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ prin

$$T(A)(X) = Tr(AX).$$

Evident, T este liniară. Deoarece $T(A)(A^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ deducem că T este injectivă. Cum domeniul şi codomeniul lui T au aceeaşi dimensiune, rezultă T surjectivă. Deci pentru orice f ca în enunţ există A astfel încât $f(X) = T(A)(X)$, Q.E.D.

b) Dacă $f(E_{ij}) = 0$ pentru orice (i, j) atunci $f \equiv 0$ şi nu avem nimic de demonstrat.

Dacă există $i \neq j$ astfel încât $f(E_{ij}) \neq 0$ definim matricea $B_\alpha = I_n - \alpha E_{ij}$. Nu este greu de verificat că matricea B este inversabilă pentru orice α. Pentru $\alpha = \frac{f(I_n)}{a_{ji}}$ este clar că $f(B_\alpha) = 0$.

Dacă $f(E_{ij}) = 0$ pentru orice $i \neq j$, atunci e suficient să considerăm matricea $B = (b_{ij})$ definită prin: $b_{ii+1} = 1$ pentru orice $i = \overline{1, n-1}$, $b_{n1} = 1$ şi $b_{ij} = 0$ în rest. Este clar că matricea B verifică condiţiile cerute.

5. Remarcăm mai întâi că putem rezolva problema privind-o dintr-un alt punct de vedere. Vom considera elipsa fixă iar reperul variabil, demonstrând că locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendicupare la elipsă este un cerc.

Considerăm elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi două tangente perpendiculare ce trec prin punctul (x_0, y_0), date de ecuaţiile

$$\begin{cases} y &= y_0 + m_1(x - x_0) \\ y &= y_0 + m_2(x - x_0) \end{cases}$$

pantele m_1 şi m_2 satisfăcând condiţia $m_1 m_2 = -1$.

Condiţia ca o dreaptă să fie tangentă este dată de unicitatea soluţiei sistemului

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = y_0 + m(x - x_0). \end{cases}$$

Echivalent, ecuaţia

$$b^2x^2 + a^2(y_0 + m(x - x_0))^2 = a^2b^2,$$

are soluţie unică. Aceasta revine la

$$a^4m^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2((y_0 - mx_0)^2 - b^2)(b^2 + m^2a^2) = 0.$$

Astfel m_1 şi m_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$(a^2 - x_0^2)m^2 + 2x_0y_0m + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Scriind condiţia de ortogonalitate, obţinem :

$$-1 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2},$$

care se rescrie

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

În final, locul geometric căutat este arcul de cerc $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, situat în primul cadran, între punctele (a, b) şi (b, a).

6. **Soluţia 1.** Este cunoscută inegalitatea lui Frobenius

$$\mathrm{rang}(AB) + \mathrm{rang}(BC) \leq \mathrm{rang}(ABC) + \mathrm{rang}(B),$$

pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Folosind această inegalitate pentru $B = A^{k-1}$ şi $C = A$, vom obţine

$$\mathrm{rang}(A^k) + \mathrm{rang}(A^k) \leq \mathrm{rang}(A^{k+1}) + \mathrm{rang}(A^{k-1}),$$

adică $a_k \geq a_{k-1}$.

Vom da acum o demonstraţie a inegalităţii lui Frobenius. Considerăm identitatea

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ABC & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}.$$

Prima şi a treia matrice din partea stângă sunt evident nesingulare şi deci

$$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} 0_n & AB \\ BC & B \end{pmatrix} = \mathrm{rang}(ABC) + \mathrm{rang}(B).$$

Pe de altă parte avem

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0_n & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rang}(AB) + \operatorname{rang}(BC).$$

Soluţia 2. Putem presupune că A este în forma canonică Jordan. Mai mult, observăm ca este suficient să demonstrăm afirmaţia în cazul în care A este chiar o celulă Jordan.

În cazul în care A este celula nulă ($A = (0)$) sau A este asociată unei valori proprii nenulă, avem că $rang(A^k)$ este constant, deci şirul este identic nul.

În cazul in care A este o celulă $n-$dimensională asociată valorii proprii zero,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avem că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $rang(A^k) = \max\{n-1-k, 0\}$, de unde rezultă imediat afirmaţia din enunţ.

7. a). Verificare imediată prin calcul.

b). Pentru acest punct trebuie să calculăm $f_b^a(x^j) = (aX+b)^j$ pentru orice $j = \overline{0,n}$. Folosind binomul lui Newton deducem că coeficientul lui x^k (pentru $0 \leq k \leq j$) este egal cu $a^k b^{j-k} C_j^k$.

c). f_b^a este automorfism dacă şi numai dacă $a \neq 0$. În acest moment este evident că F este grup. Dacă $a \neq 0$, atunci $(f_b^a)^{-1} = f_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1}{a}}$ şi de aici deducem matricea cerută folosind punctul b).

d). Este evident că F_1 este subgrup al lui F. Avem că

$$f_b^a(f_c^1((f_b^a)^{-1})) = f_b^a(f_c^1(f_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1}{a}})) = f_{ac}^1$$

şi enunţul este demonstrat.

8. a). Polinomul caracteristic $\det(XI_3 - A)$ are grad 3 şi cum orice polinom de grad impar cu coeficienţi reali are o rădăcină reală, deducem enunţul.

b). Fie λ valoare proprie complexă pentru A şi u un vector propriu coloană cu coeficienţi complecşi corespunzător valorii λ. Avem $Au = \lambda u$. Transpunem această egalitate şi obţinem (deoarece A este simetrică) $u^t A = \lambda u^t$. Conjugăm această egalitate şi deducem (ţinând cont că A este matrice cu coeficienţi reali) $\overline{u}^t A = \overline{\lambda}\overline{u}^t$. Înmulţim la dreapta cu vectorul coloană u şi obţinem $\overline{u}^t A u = \overline{\lambda}\overline{u}^t u$. Notând cu a, b, c componentele lui u deducem (deoarece $Au = \lambda u$) că $\lambda(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) = \overline{\lambda}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$. Cum u este vector nenul deducem din ultima egalitate (deoarece $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 \neq 0$) că $\lambda = \overline{\lambda}$. Am demonstrat că orice valoare proprie a unei matrici reale simetrice este număr real.

c). Dacă matricea A este antisimetrică, polinomul caracteristic al lui A este $\det(XI_3 - A) = X^3 + (a^2 + b^2 + c^2)X$ (am notat $a_{12} = a, a_{13} = b, a_{23} = c$). Dacă $a = b = c = 0$, atunci 0 este valoare proprie triplă pentru A şi orice vector nenul u este vector propriu pentru A. Dacă măcar unul din numerele a, b, c este nenul atunci 0 este valoare proprie simplă pentru A (şi este singura valoare proprie reală a lui A). Deoarece măcar unul din numerele a, b, c este nenul pot presupune că $c \neq 0$. Atunci vectorii proprii u corespunzător acestei valori proprii au forma $u^t = x(1, -\frac{b}{c}, \frac{a}{c})$, unde x este un număr real nenul.

d). În condiţiile enunţului avem $A^2 = I_3$. De aici deducem că f, polinomul minimal al matricii A, este fie $f(X) = X - 1$ sau $f(X) = X + 1$ sau $f(X) = X^2 - 1$. Ţinând cont şi de teorema lui Frobenius, deducem că polinomul caracteristic al lui A este $(X - 1)^3$, $(X + 1)^3$, $(X - 1)^2(X + 1)$ sau $(X - 1)(X + 1)^2$. În primele două cazuri 1 (respectiv -1) este valoare proprie triplă a lui A şi orice vector nenul este vector propriu corespunzător acestei valori proprii. În ultimele două cazuri 1 este valoare proprie dublă a lui A şi -1 este valoare proprie simplă a lui

A (respectiv -1 este valoare proprie dublă a lui A şi 1 este valoare proprie simplă a lui A) iar vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii sunt combinaţii nenule de coloanele matricii $A + I_3$ (respectiv $A - I_3$).

9. a). Se verifică imediat că $A = (1, -1, 1) \in d_a$ pentru orice a.

b). Evident, distanţa dintre dreptele d şi d_a este cel mult egală cu distanţa de la A la dreapta d. Pe de altă parte, fie $B \in d$ astfel încât $AB \perp d$. Atunci orice dreaptă d_a (ce trece prin punctul A) şi perpendiculară pe AB are distanţa maximă faţă de d. După un calcul simplu, punctul B are coordonatele $(1/3, 5/3, 1/3)$. Căutăm acum $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\langle \overrightarrow{AB}, v\rangle = 0$ unde $v = (1, 2, a)$ este vector director al dreptei d_a. Obţinem în final $a = 7$.

Observaţie Este interesant de văzut ce se întâmplă dacă studiem minimul distanţei şi nu maximul. Punctul anterior ne sugerează că familia de drepte d_a este conţinută într-un plan. Aceasta este adevărat, de exemplu luând

$$\pi : 2x - y - 3 = 0$$

vedem că $d_a \subset \pi$ pentru orice a. Ne punem problema dacă

$$\pi = \bigcup_a d_a.$$

Pentru aceasta, fie $P = (\alpha, 2\alpha - 3, \beta)$ un punct arbitrar din π. Dacă P ar aparţine unei drepte d_a atunci ar avea loc relaţia

$$a(\alpha - 1) = \beta - 1.$$

De aici vedem că

$$\bigcup_a d_a = \pi \setminus \{(1, -1, \beta) | \beta \neq 1\}.$$

Pe de altă parte, din calcul direct obţinem

$$d \cap \pi = \{(1, -1, 5)\};$$

deducem că nu există o dreaptă d_a aflată la distanţă minimă faţă de d.

10. Fie a lungimea laturii pătratelor şi fie (i, j, k) versorii unui reper având originea în punctul A cu axele AD, AB şi AF. Atunci

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Pe de altă parte avem $\overrightarrow{MA} = -\lambda(ai + aj)$, $\overrightarrow{AB} = aj$ şi $\overrightarrow{BN} = \lambda(ak - aj)$ şi deci

$$\overrightarrow{MN} = a[-\lambda i + (1 - 2\lambda)j + \lambda k],$$

de unde rezultă

$$\|\overrightarrow{MN}\| = a\sqrt{6\lambda^2 - 4\lambda + 1}.$$

Punând condiţia de minimalitate, găsim $\lambda_{\min} = \frac{1}{3}$ şi deci

$$\overrightarrow{MN} = \frac{a}{3}(-1 + j + k).$$

În sfârşit, deoarece $\overrightarrow{AC} = a(i+j)$, $\overrightarrow{BF} = a(-j+k)$ şi $\overrightarrow{DE} = a(-i+j+k)$ se verifică uşor că $MN \perp AC$, $MN \perp BF$ şi $MN \| DE$.

Analiză şi ecuaţii diferenţiale

1. Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem mai întâi

$$k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right).$$

Dacă $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{1+k(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2)}$, atunci

$$S \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+(x_1+x_2+\ldots+x_k)^2}.$$

Considerăm acum diviziunea intervalului $[0,1]$

$$\Delta = (0, x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+\cdots+x_n = 1)$$

şi funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Suma Darboux inferioară asociată funcţiei f şi diviziunii Δ este

$$s(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})f(t_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+(x_1+x_2+\ldots+x_k)^2},$$

unde $t_0 = 0$ şi $t_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$. Deoarece $\int\limits_0^1 f(x)dx = \dfrac{\pi}{4}$ rezultă

$$S < s(f,\Delta) < \frac{\pi}{4}.$$

Din inegalitatea de mai sus, trecând la limită pentru $n \to \infty$, rezultă uşor că $\dfrac{\pi}{4}$ este cea mai mică constantă cu această proprietate.

2. a). Pentru primul punct, putem defini mulţimea $E = \{a > 0 | y^2 \in \mathbb{Q}\}$. Verificarea condiţiilor (i) şi (ii) este imediată. Este clar că $E \neq (0,\infty)$.

b). Evident 0 este în închiderea topologică a mulţimii E căci dacă $x \in E$ atunci $\dfrac{x}{2^k} \in E$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Pe de altă parte, nu este greu să arătăm că dacă $x \in E$ atunci şi $nx \in E$, căci mai întâi $x\sqrt{n} \in E$, iar mai apoi $xn = x\sqrt{n}\sqrt{n} \in E$. Folosind axioma lui Arhimede precum şi faptul că $\dfrac{nx}{2^k} \in E$ pentru orice n şi k numere naturale, se poate arăta că pentru orice $y > 0$ există un şir de numere din E convergent la y.

3. Folosind o teoremă de medie pentru funcţii de două variabile, rezultă că pentru orice două puncte $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in D$ există un punct C pe segmentul $[AB]$ astfel încât

$$f(A) - f(B) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)(a_1 - b_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(C)(a_2 - b_2).$$

Utilizând condiţia din ipoteză, rezultă că pentru orice două puncte $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \in D$ avem

$$|f(A) - f(B)| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Fie acum $P(x, y) \in D$ un punct oarecare şi n puncte $M_n(x_1, y_1), \ldots,$ $M_n(x_n, y_n) \in D$ având centrul de greutate în origine, adică $x_1 + \cdots + x_n = 0$ şi $y_1 + \cdots + y_n = 0$. Folosind inegalitatea obţinută mai sus, avem

$$|f(P) - f(M_k)| \leq |x - x_k| + |y - y_k|,$$

pentru orice $k = 1, \ldots n$. Făcând sumarea după k obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} |f(P) - f(M_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y - y_k|.$$

Ţinând seama că $x_k, y_k \in [-1, 1]$ şi că $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$, nu este greu de arătat că $\sum_{k=1}^{n} |x - x_k| \leq n$ şi $\sum_{k=1}^{n} |y - y_k| \leq n$. În sfârşit, combinând inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\left| nf(P) - \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(P) - f(M_k)| \leq 2n,$$

adică chiar inegalitatea cerută.

4. a). Deoarece

$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

rezultă că seria este uniform convergentă şi deci suma acesteia defineşte o funcţie continuă pe $(0, 1)$.

b). Nu este greu să arătăm că $F(0) = F(1)$. Intr-adevăr, dacă punem în relaţia dată $x = 0$, obţinem $F(0) + F\left(\frac{1}{2}\right) = 2F(0)$, adică $F(0) = F\left(\frac{1}{2}\right)$, iar dacă facem $x = 1$ obţinem $F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1) = 2F(1)$, adică $F\left(\frac{1}{2}\right) = F(1)$. Vom presupune fără a restrînge generalitatea că $F(0) = 0$.

Deoarece funcţia F este continuă iar domeniul de definiţie $[0, 1]$ este compact, există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $F(x_0) = M$ este punct de maxim al funcţiei. Inlocuind pe x cu x_0, relaţia dată se rescrie prin:

$$F\left(\frac{x_0}{2}\right) - F(x_0) = F(x_0) - F\left(\frac{x_0 + 1}{2}\right).$$

Deoarece x_0 este punct de maxim rezultă acelaşi lucru şi pentru $\frac{x_0}{2}$ sau $\frac{x_0 + 1}{2}$. Iterând, obţinem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $F\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = M$. Cum F este continuă iar $\frac{x_0}{2^n} \to 0$ rezultă că $M = 0$. Analog se arată şi pentru punctul de minim că este $m = 0$ şi deci funcţia este constantă egală cu 0.

c). Să observăm mai întâi că

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{x}{2} - n} + \frac{1}{\frac{x}{2} + n} \right) + \frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{x+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2} + n} \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - 2n} + \frac{1}{x + 2n} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - (2n-1)} + \frac{1}{x + (2n+1)} \right) \right] = 2f(x).$$

Pe de altă parte, nu este greu de arătat că şi funcţia $g(x) = \pi \text{cotg}(\pi x)$ verifică o relaţie similară. Definim acum funcţia $F(x) = f(x) - g(x)$ care se extinde prin continuitate la intervalul $[0, 1]$. Folosind punctul precedent, rezultă că funcţia F este constantă. Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ obţinem egalitatea pe intervalul deschis $(0, 1)$, care se extinde la $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ prin periodicitate.

5). Deoarece (f_n) converge simplu la 0, rezultă că pentru orice $\epsilon > 0$ există $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(0)| < \epsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi $|f_n(1)| < \epsilon$ pentru orice $n \geq n_1$.

Fie acum $n_\epsilon \geq \max\{n_0, n_1\}$. Deoarece f_n sunt funcţii concave rezultă că pentru orice $\epsilon > 0$ şi orice $n \geq n_\epsilon$ avem

$$|f_n(x)| = |f_n(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0)| \leq |x \cdot f_n(1) + (1-x) \cdot f_n(0)| \leq$$

$$\leq x \cdot |f_n(1)| + (1-x) \cdot |f_n(0)| \leq x \cdot \epsilon + (1-x) \cdot \epsilon = \epsilon,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$, adică şirul converge uniform pe $[0, 1]$.

6. a). Presupunem prin absurd că f nu este mărginită. Atunci există un şir (x_n) astfel încât $f(x_n) > n$ pentru orice n. Evident şirul nu este mărginit şi deci putem face $x_n \to \infty$ şi $x_{n+1} - x_n > 1$. Deoarece f este uniform continuă, există $\delta \in (0, 1)$ astfel încât

$$|f(x) - f(y)| < 1 \text{ dacă } |x - y| \leq \delta.$$

Atunci, pentru orice $x \in [x_n, x_n + \delta]$ avem

$$f(x) > f(x_n) - |f(x) - f(x_n)| > n - 1.$$

Atunci $\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx > (n-1)\delta$ şi deci

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \geq \sum_n (n-1)\delta = \infty,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

b). Definim pentru orice $(n \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \begin{cases} 2^n(x-n+2^{-n}) & \text{dacă} \quad x \in [n-2^{-n}, n] \\ 2^n(n-x+2^{-n}) & \text{dacă} \quad x \in [n, n+2^{-n}] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$f(x) = 2^n(x-n+2^{-n})$ pentru $x \in [n-2^{-n}, n]$, $f(x) = 2^n(n-x+2^{-n})$ pentru $x \in [n, n+2^{-n}]$, $(n \in \mathbb{N})$ şi $f(x) = 0$ în rest. Atunci f este continuă, mărginită $(0 \leq f \leq 1)$, integrabilă $(\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_n 2^{-n} = 1)$ dar nu este uniform continuă deoarece $f(n+2^{-n}) - f(n) = 1$.

7. a). Demonstraţia implicaţiei de la dreapta la stânga se face prin calcul direct.

Reciproc, pentru $(x, y) \in D$ fixat, definim funcţia $f(t) = u(tx, ty), t \in (0, \infty)$. Atunci

$$f'(t) = x\frac{\partial u}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty) = \frac{1}{t}u(tx, ty) = \frac{f(t)}{t}.$$

Obţinem astfel că $f(t) = ct$, unde c este o constantă (în raport cu t) dar care depinde evident de x şi de y. Aşadar există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(t) = tF(x, y)$.

Pentru $t = 1$ avem $F(x, y) = u(x, y)$ şi deci $u(tx, ty) = tu(x, y)$.

Pentru $t = 1/x$ obţinem $u(x, y) = xu(1, y/x)$ şi deci putem alege $\varphi(t) = u(1, t)$.

b). Unicitatea este foarte uşor de arătat: fie ψ o altă funcţie ce verifică inegalitatea din enunţ. Atunci este clar că

$$|x\varphi(y/x) - x\psi(y/x)| \leq 2\epsilon, \forall (x, y) \in D.$$

Înlocuind pe y cu tx (pentru $t > 0$) obţinem $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq 2\epsilon/x$. Acum, pentru $x \to \infty$ obţinem $\varphi(t) = \psi(t)$.

Rămâne să dovedim existenţa unei astfel de funcţii φ. Folosind din nou funcţia $f(t) = u(tx, ty)$ (f depinde x şi y considerate fixe), avem $|tf'(t) - f(t)| \leq \epsilon$. Notând $tf'(t) - f(t) = g(t)$ şi rezolvând ecuaţia diferenţială ordinară în necunoscuta f vom obţine

$$f(t) = t\left(-\int_t^\infty \frac{g(s)}{s^2}ds + C\right),$$

unde $C = C(x, y)$ este constantă în raport cu t.

Astfel,

$$|f(t) - Kt| = t\left|-\int_t^\infty \frac{g(s)}{s^2}ds\right| \leq t\int_t^\infty \frac{\epsilon}{s^2}ds = \frac{t\epsilon}{t} = \epsilon.$$

Rezultă $|f(t) - Kt| \leq \epsilon$ adică $|u(tx, ty) - Kt| \leq \epsilon$ şi pentru $t = 1$ obţinem $|u(x, y) - Kt| \leq \epsilon$.

Rămâne să arătăm că funcţia K este omogenă şi continuă.

Folosind expresia lui f de mai sus rezultă că $K \in \mathcal{C}(D)$ (deoarece F şi g sunt continue în raport cu x şi y) şi pentru $t \to \infty$ avem

$$K = K(x, y) = \lim_{t\to\infty} f(t)/t = \lim_{t\to\infty} \frac{u(tx, ty)}{t}.$$

Limita de mai înainte există deoarece

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \frac{g(s)}{s^2}ds = 0.$$

Acum se poate arăta uşor că K este 1-omogenă. Pentru $a > 0$ avem:

$$K(ax, ay) = \lim_{t\to\infty} \frac{u(tax, tay)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{u(tax, tay)}{at} \cdot a =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{u(sx, sy)}{s} \cdot a = K(x, y) \cdot a.$$

În final $K(x, y) = xK(1, y/x)$, adică $\varphi(t) = K(1, t)$.

8. O implicaţie este evidentă. Pentru cealalată, prespunem prin absurd că $\{s_n\}$ este şir convergent, dar seria nu este convergentă. Cum $s_n > 0$ aceasta este echivalent cu $\lim_{n\to\infty}[s_n] = \infty$ (am notat cu $[x]$ funcţia parte întreagă).

Fără să restrângem generalitatea, renunţând eventual la un număr finit de termeni din şirul $\{x_n\}$ putem presupune că $x_n < \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $n \in N$ arbitrar; definim $k_1(n)$ prin proprietatea ca $s_{k_1(n)} \geq n$ si $k_1(n)$ este minim cu aceasta proprietate

Deoarece $\lim_{n\to\infty}[s_n] = \infty$, deducem că $\{k_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ este infinită. Din definitia lui $k_1(n)$ avem ca $s_{k_1(n)-1} < n$ deci, cum $s_{k_1(n)} = s_{k_1(n)-1} + x_{k_1(n)}$ şi $x_{k_1(n)} < \frac{1}{3}$, vedem că $\{s_{k_1(n)}\} < \frac{1}{3}$.

Fie de asemeni mulţimea $\{k_2(n) = k_1(n+1) - 1 | n \in \mathbb{N}\}$; raţionând ca mai sus deducem $\{s_{k_2(n)}\} > \frac{2}{3}$.

Ca atare, şirul $\{s_n\}$ are două subşiruri, $a_n = s_{k_1(n)}$ şi $b_n = s_{k_2(n)}$ astfel încât $a_n < \frac{1}{3}, b_n > \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice ipoteza ca s_n este un şir convergent.