LABORATOR#9

EX#1 Fie matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{1}$$

Scrieţi o funcţie în Python care are ca date de intrare matricea $\mathbf{A}$ şi vectorul $\mathbf{b}$, iar ca date de ieşire soluţia sistemului (1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, obţinute prin rezolvarea *sistemului augmentat* asociat sistemului (1) folosind

(a) MEGPP;

(b) MEGPPS;

(c) factorizarea PLU a matricei sistemului augmentat.*

Testaţi funcţia pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,28 \\ 3,31 \end{bmatrix}; \tag{2a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{bmatrix}; \tag{2b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \epsilon = 10^{-k}, \quad k = \overline{1,10}. \tag{2c}$$

<u>*Indicaţii:*</u> Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga;

(iii) $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{b}$ sunt compatibili.

EX#2 Fie $\epsilon > 0$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

*Bonus#1

(a) Determinaţi analitic soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3) folosind sistemul augmentat asociat şi MEGPP.[†]

(b) Scrieţi o funcţie în Python care determină soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, folosind sistemul augmentat asociat şi MEGPP.

(c) Rulaţi funcţia de la punctul (b) pentru valori din ce în ce mai mici ale lui ϵ care să conţină inclusiv valorile $\epsilon = \epsilon_M$ şi $\epsilon = \sqrt{\epsilon_M}$, unde ϵ_M este precizia maşinii.

EX#3 Fie $\epsilon > 0$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare (3).

(a) Determinaţi analitic soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3) folosind sistemul de ecuaţii normale asociat şi MEGPP.[‡]

(b) Scrieţi o funcţie în Python care determină soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3) şi calculează vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, folosind sistemul de ecuaţii normale asociat şi MEGPP.

(c) Rulaţi funcţia de la punctul (b) pentru valori din ce în ce mai mici ale lui ϵ care să conţină inclusiv valorile $\epsilon = \epsilon_M$ şi $\epsilon = \sqrt{\epsilon_M}$, unde ϵ_M este precizia maşinii.

[†] Bonus#2

[‡] Bonus#3