— CURS 7 —

$\boxed{OBS}$ $p: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$, $p(v) = p(v_1 + v_2) = v_1$
(p = proiecția pe V_1)

$s = 2p - id_V$

$s(v) = 2p(v) - id_V(v) = 2v_1 - (v_1 + v_2) = v_1 - v_2$

$s(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$ (simetria față de V_1)

$\boxed{OBS}$ $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1 = Im\, p$, $V_2 = Ker\, p$ $\quad p(v_1 + v_2) = v_1$

$\mathcal{R}_1 = \{e_1, .., e_k\}$ reper în V_1 $\quad p(e_i) = e_i$, $\forall i = \overline{1,k}$

$\mathcal{R}_2 = \{e_{k+1}, .., e_n\}$ reper în V_2. $\quad p(e_j) = 0$, $\forall j = \overline{k+1,n}$

- $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reper în V

$$A_p = [p]_{\mathcal{R},\mathcal{R}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$s(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$.

$s(e_i) = e_i$ $\quad \forall i = \overline{1,k}$

$s(e_j) = -e_j$ $\quad \forall j = \overline{k+1,n}$

$$A_s = [s]_{\mathcal{R},\mathcal{R}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$\boxed{OBS}$ $A_p \notin O(n)$, $A_s \in O(n)$

Teoremă (C_{10} ...) **Endomorfisme simetrice - completare**

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r., $f \in Sim(E)$

$\Rightarrow$ toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale

Dem. $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortonormat în E.

$A = [f]_{R,R}$ și $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. Fie λ rădăcină.

Fie $AX = \lambda X$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I_n) X = O_{n,1}$ este SLO

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Înmulțim la stânga cu matricea:

$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

Prin calcul obținem:

$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda)x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + (a_{nn}-\lambda) x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rezultă

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda) x_1 \overline{x_1} + a_{12} x_2 \overline{x_1} + \dots + a_{1n} x_n \overline{x_1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 \overline{x_n} + a_{n2} x_2 \overline{x_n} + \dots + (a_{nn}-\lambda) x_n \overline{x_n} = 0 \end{cases}$$

$\oplus$

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} x_k \overline{x_j} = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}}_{\in \mathbb{R}}$$

$\parallel$ $\qquad$ (Prop: $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{k<j} a_{kj} x_k \overline{x_j} + \sum_{k>j} a_{kj} x_k \overline{x_j} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k \overline{x_k}$$

$(A = A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

$$\sum_{k<j} a_{kj} \underbrace{(x_k \overline{x_j} + x_j \overline{x_k})}_{\in \mathbb{R}} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \underbrace{x_k \overline{x_k}}_{\in \mathbb{R}} = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Teorema de descompunere polară

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r

$\forall f \in Aut(E) \Rightarrow \exists h \in Sim(E)$, $\exists t \in O(E)$ a.î. $f = h \circ t$

OBS

$\forall A \in GL(n, \mathbb{R})$, $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = B^T$, $\exists C \in O(n)$ a.î. $A = B \cdot C$

Lemă

$f \in Sim(E)$, poz. def ($[f]_{R,R}$ poz. definită sau Q forma pătratică asociată poz. definită) $\Rightarrow$ $\exists h \in Sim(E)$ poz. def a.î. $f = h^2$

Dem (Lemă) $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortonorm. a.î. $A_f = [f]_{R,R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (f este diagonalizabil)

$Q_f : E \to \mathbb{R}$ f. pătratică asociată

$Q_f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (sign este $(n, 0)$)

Q_f este p. def $\Rightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$

Fie $h \in End(E)$, $[h]_{R,R} = A_h = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$h \in Sim(E)$

$A_{h^2} = A_h \cdot A_h = A_f$, $Q_h(x) = \sqrt{\lambda_1} x_1^2 + \dots + \sqrt{\lambda_n} x_n^2$ este poz. def $\Rightarrow h$ este poz. def. și

$f = h^2$

Scanat cu CamScanner

(C12)

Teoremă (def. unitară a conicelor nedegenerate)

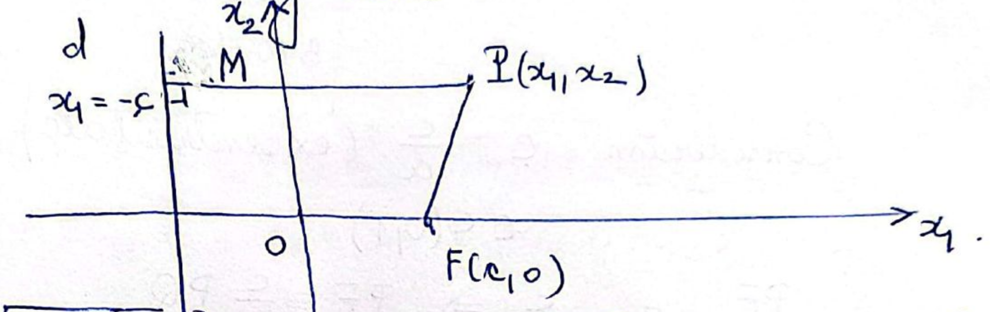
LG al punctelor P care verifică

$$\frac{dist(P, F)}{dist(P, d)} = e, \text{ unde } F = \text{pct fix (focar)}$$

d = dr. fixă (directoare), $F \notin d$

reprezintă o conică nedegenerată.

Dem:



$$\frac{PF}{PM} = e \Rightarrow \frac{\sqrt{(x_1-c)^2 + x_2^2}}{|x_1+c|} = e \Rightarrow \sqrt{(x_1-c)^2 + x_2^2} = e\,|x_1+c| \quad \uparrow^2$$

$$x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2 = e^2x_1^2 + 2ce^2x_1 + e^2c^2$$

$$x_1^2(1-e^2) + x_2^2 - 2c(1+e^2)x_1 + c^2(1-e^2) = 0$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$$

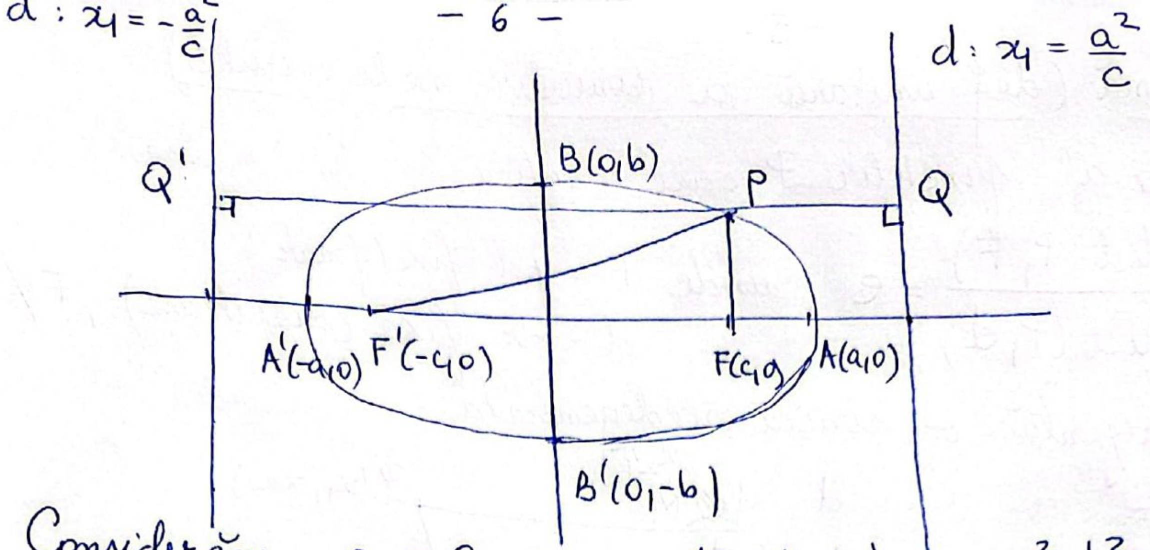
$$A = \begin{pmatrix} 1-e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1-e^2 & 0 & -c(1+e^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -c(1+e^2) & 0 & c^2(1-e^2) \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det \tilde{A} = \begin{vmatrix} 1-e^2 & -c(1+e^2) \\ -c(1+e^2) & c^2(1-e^2) \end{vmatrix} = c^2(1-e^2)^2 - c^2(1+e^2)^2$$

$$= c^2(1 - 2e^2 + e^4 - 1 - 2e^2 - e^4)$$

$$= -4c^2e^2 \neq 0 \Rightarrow \Gamma \text{ nedegenerată}$$

$\boxed{\text{OBS}}$ 1) Elipsa $\mathcal{E}: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$



Considerăm $e = \frac{c}{a}$ (excentricitate) $\quad a^2 = b^2 + c^2,\ a > c$

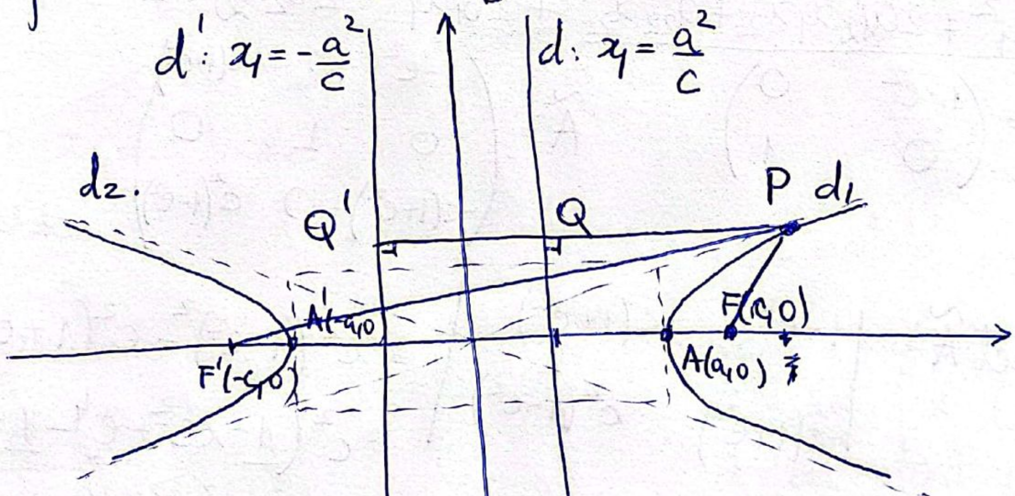
$e \in (0,1)$ $\quad \frac{a^2}{c} > a$

$$\frac{PF}{PQ} = e = \frac{c}{a} \Rightarrow PF = \frac{c}{a} PQ$$

$$\frac{PF'}{PQ'} = e = \frac{c}{a} \Rightarrow PF' = \frac{c}{a} PQ' \quad \oplus$$

$$PF + PF' = \frac{c}{a}(PQ + PQ') = \frac{c}{a} \cdot 2\frac{a^2}{c} = 2a$$

2) Hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$



$e = \frac{c}{a} > 1$ $\quad c^2 = a^2 + b^2,\ c > a.$

$$\frac{PF}{PQ} = e = \frac{c}{a} \Rightarrow PF = \frac{c}{a} PQ$$

$$\frac{PF'}{PQ'} = e = \frac{c}{a} \Rightarrow PF' = \frac{c}{a} PQ' \quad \ominus$$

$$|PF - PF'| = \frac{c}{a} \cdot \frac{2a^2}{c} = 2a.$$

3) Parabola: $\mathcal{P}: \ x_2^2 = 2p x_1 \quad e = 1$

C8

Teorema de inerție Sylvester

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală. Atunci nr de „+" din forma normală este un invariant la schimbarea de reper ($\Rightarrow$ nr „−" este invar, signatura este inv).

Dem.

(26) 6-8

Fie $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper in V ai Q are forma normală

- $Q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

(27) 8-10 10 1

Fie $\mathcal{R}'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ reper in V ai Q are forma normală

- $Q(x)=x_1'^2+\dots+x_{p'}'^2-x_{p'+1}'^2-\dots-x_r'^2$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$

Fie $U_1=\langle\{e_1,\dots,e_p, e_{r+1},\dots,e_n\}\rangle \subseteq V$ ssp vect, $\dim U_1=p+n-r$

$x\in U_1 \Rightarrow x_{p+1}=\dots=x_r=0$, $Q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2$ (1)

Fie $U_2=\langle\{e_{p'+1}',\dots,e_r'\}\rangle \subseteq V$ ssp vect, $\dim U_2=r-p'$

$x\in U_2 \Rightarrow x_1'=\dots=x_{p'}'=x_{r+1}'=\dots=x_n'=0$,

$Q(x)=-x_{p'+1}'^2-\dots-x_r'^2$ (2)

$$\dim(U_1+U_2)=\underbrace{\underbrace{\dim U_1}_{p+n-r}+\underbrace{\dim U_2}_{r-p'}}_{n+p-p'}-\dim(U_1\cap U_2)$$

Ip. abs $p>p'$

$\Rightarrow \dim(U_1\cap U_2)\geq 1 \Rightarrow \exists\, x \in U_1\cap U_2,\ x\neq 0_V \Rightarrow$

① $Q(x)\geq 0$. ⚡

② $Q(x)<0$

Analog că $p<p'$ nu convine.

Considerăm $\tilde{U}_1=\langle\{e_{p+1},\dots e_r\}\rangle$ $\dim\tilde{U}_1=r-p$.

$x\in\tilde{U}_1 \Rightarrow Q(x)=-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$ (1') ($x\in\tilde{U}_1 \Rightarrow x_1=\dots=x_p=x_{r+1}=\dots=x_n=0$)

Considerăm $\tilde{U}_2=\langle\{e_1',\dots,e_{p'}', e_{r+1}',\dots,e_n'\}\rangle$, $\dim\tilde{U}_2=p'+n-r$.

$x\in\tilde{U}_2 \Rightarrow Q(x)=x_1'^2+\dots+x_{p'}'^2$ (2') ($x\in\tilde{U}_2$: $x_{p'+1}'=\dots=x_r'$)

$$\dim(\tilde{U}_1+\tilde{U}_2)=\underbrace{\underbrace{\dim\tilde{U}_1}_{r-p}+\underbrace{\dim\tilde{U}_2}_{n+p'-r}}_{n+p'-p}-\dim(\tilde{U}_1\cap\tilde{U}_2)$$

Ip. abs. $p'>p \Rightarrow \exists\, x\in\tilde{U}_1\cap\tilde{U}_2,\ x\neq 0_V \Rightarrow Q(x)<0$ (1') ⚡ $Q(x)\geq 0$ (2')

Deci $p=p' \Rightarrow$ nr „+" este un invar
nr „−" — // — $\Rightarrow$ signatura este inv.

C13

6.1.3 Hiperboloidul cu o pânză

Definiţie 6.1.7. *Hiperbolidul cu o pânză este locul geometric al punctelor $P(x, y, z)$ care verifică (figura 6.4)*

$$\mathcal{H}_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0.$$

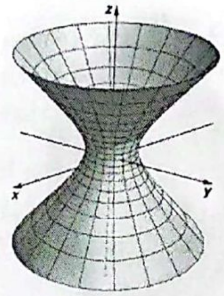


Figura 6.4: Hiperboloidul cu o pînză

Observaţie 6.1.12. Ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză $\mathcal{H}_1$ sunt a)

$$\begin{cases} x = a\frac{\cos t}{\cos\varphi} \\ y = b\frac{\sin t}{\cos\varphi} \\ z = c\, tg\varphi, \end{cases}$$

unde $t \in [0, 2\pi), \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b)

$$\begin{cases} x = a\cos t\, ch\,\varphi \\ y = b\sin t\, ch\,\varphi \\ z = c\, sh\,\varphi, \end{cases}$$

unde $t \in [0, 2\pi), \varphi \in \mathbf{R}$.

Observaţie 6.1.13. a)

$$\mathcal{H}_1 \cap Ox = \{A(a, 0, 0), A'(-a, 0, 0)\}.$$

$$\mathcal{H}_1 \cap Oy = \{B(0, b, 0), B'(0, -b, 0)\}.$$

b) Intersecţia cu planul $z = \gamma, \gamma \in \mathbf{R}$, paralel cu planul xOy, este o elipsă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}$. Dacă $a = b$, atunci intersecţia este un cerc.

Dacă $\gamma = 0$, atunci intersecţia este elipsa colier: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Intersecţia cu planul $y = \beta$, paralel cu planul xOz, reprezintă
1. o hiperbolă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}$, dacă $\beta \neq \pm b$,
2. două drepte concurente : $x = \pm\frac{a}{c}z$, dacă $\beta = b$ sau $\beta = -b$.

Analog, intersecţia cu planul $x = \alpha, \alpha \neq \pm a$, paralel cu planul zOy, este o hiperbolă, iar dacă $\alpha = \pm a$, atunci se obţin două drepte concurente.

c) Hiperboloidul cu o pânză este o mulţime nemărginită şi conexă .

Teoremă 6.1.1. *Hiperboloidul cu o pânză este o cuadrică dublu riglată i.e. există două familii de generatoare G_1, G_2 şi prin fiecare punct al cuadricei trece câte o dreaptă din fiecare familie.*

Demonstraţie. Fie hiperboloidul cu o pînză

$$\mathcal{H}_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Rezultă

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 = g_1 \cdot g_2.$$

Obţinem dreapta

$$\begin{cases} \alpha f_1 = \beta g_1 \\ \beta f_2 = \alpha g_2, \end{cases}$$

unde $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Dreapta se află pe hiperboloidul cu o pînză $\mathcal{H}_1$, deoarece $\alpha\beta(f_1 f_2 - g_1 g_2) = 0$.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $\begin{cases} g_1 = 0 \\ f_2 = 0, \end{cases}$ iar dacă $\alpha \neq 0$, atunci $\begin{cases} f_1 = \frac{\beta}{\alpha} g_1 \\ \frac{\beta}{\alpha} f_2 = g_2. \end{cases}$

Vom nota $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \in \mathbf{R}$.

Analog, pentru dreapta $\begin{cases} \gamma f_1 = \delta g_2 \\ \delta f_2 = \gamma g_1, \end{cases}$ unde $\gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Dacă $\gamma = 0$, atunci $\begin{cases} g_2 = 0 \\ f_2 = 0, \end{cases}$ iar dacă $\gamma \neq 0$, atunci $\begin{cases} f_1 = \frac{\delta}{\gamma} g_2 \\ \frac{\delta}{\gamma} f_2 = g_1. \end{cases}$

Vom nota $\frac{\delta}{\gamma} = \mu \in \mathbf{R}$.

Cele două familii de generatoare sunt

$$G_1 : d_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \lambda(1 - \frac{y}{b}) \\ \lambda(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) &= 1 + \frac{y}{b}, \end{cases} \lambda \in \mathbf{R}, \quad d_\infty : \begin{cases} 1 - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

$$G_2 : \bar{d}_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \mu(1 + \frac{y}{b}) \\ \mu(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) &= 1 - \frac{y}{b}, \end{cases} \mu \in \mathbf{R}. \quad \bar{d}_\infty : \begin{cases} 1 + \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii ale celor două familii deducem

$$\lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{y}{b} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}.$$

Rezultă că $1 + \dfrac{y}{b} = \dfrac{2\lambda}{\lambda+\mu}$ şi $1 - \dfrac{y}{b} = \dfrac{2\mu}{\lambda+\mu}$.

Aşadar,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{2}{\lambda+\mu}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

Prin urmare, $d_\lambda \cap d_\mu = \{P\}$, unde $P(a\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu}, b\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, c\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu})$.

De asemenea, $d_\infty \cap d_\mu = \{P'(a\mu, b, -c\mu)\}$, $\bar{d}_\infty \cap d_\lambda = \{P"(a\lambda, -b, -c\lambda)\}$, iar $\bar{d}_\infty \parallel d_\infty$.

Dreptele din aceeaşi familie nu sunt coplanare.

$\square$

zOy, este tot o parabolă.

6.1.6 Paraboloidul hiperbolic

Definiţie 6.1.10. *Paraboloidul hiperbolic este locul geometric al punctelor $P(x, y, z)$ care verifică (figura 6.7)*

$$\mathcal{P}_h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a > 0, b > 0.$$

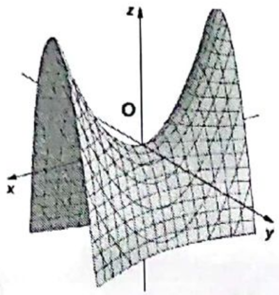


Figura 6.7: Paraboloidul hiperbolic

Observaţie 6.1.19. Ecuaţiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic sunt

$$\begin{cases} x = at \\ y = b\varphi \\ z = \frac{1}{2}(t^2 - \varphi^2), \end{cases}$$

unde $(t, \varphi) \in \mathbf{R}^2$.

Observaţie 6.1.20. Intersecţia cu plane paralele cu planele de coordonate.

a) Intersecţia cu planul $z = \gamma$, paralel cu xOy, este

1. o hiperbolă: $\frac{x^2}{2\gamma a^2} - \frac{y^2}{2\gamma b^2} = 1$, dacă $\gamma \neq 0$.

2. două drepte concurente: $y = \pm \frac{b}{a} x$, dacă $\gamma = 0$.

b) Intersecţia cu planul $y = \beta, \beta \in \mathbf{R}$, paralel cu planul xOz, este o parabolă: $x^2 = 2a^2(z + \frac{\beta}{b^2})$.

c) Intersecţia cu planul $x = \alpha$, paralel cu yOz, este tot o parabolă.

Teoremă 6.1.2. *Paraboloidul hiperbolic este o cuadrică dublu riglată i.e. există două familii de generatoare rectilinii şi prin fiecare punct al cuadricei trece câte o dreaptă din fiecare familie.*

Demonstraţie. Fie paraboloidul hiperbolic

$$\mathcal{P} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Rezultă

$$(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) \cdot (\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2 \cdot z \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 = g_1 \cdot g_2.$$

Obţinem dreapta $\begin{cases} \alpha f_1 = \beta g_1 \\ \beta f_2 = \alpha g_2, \end{cases}$ unde $\alpha^2+\beta^2 > 0$. Dreapta se află pe paraboloidul $\mathcal{P}_h$, deoarece $\alpha\beta(f_1 f_2 - g_1 g_2) = 0$.

Dacă $\beta = 0$, atunci $\begin{cases} g_2 = 0 \\ f_1 = 0, \end{cases}$ iar dacă $\beta \neq 0$, atunci $\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} f_1 = g_1 \\ f_2 = \frac{\alpha}{\beta} g_2. \end{cases}$

Vom nota $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \in \mathbf{R}^*$.

Analog, pentru dreapta $\begin{cases} \gamma f_1 = \delta g_2 \\ \delta f_2 = \gamma g_1, \end{cases}$ unde $\gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Dacă $\gamma = 0$, atunci $\begin{cases} g_2 = 0 \\ f_2 = 0, \end{cases}$ iar dacă $\gamma \neq 0$, atunci $\begin{cases} f_1 = \frac{\delta}{\gamma} g_2 \\ \frac{\delta}{\gamma} f_2 = g_1. \end{cases}$

Vom nota $\frac{\delta}{\gamma} = \mu \in \mathbf{R}^*$.

Cele două familii de generatoare sunt

$$G_1 : d_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} & = & \lambda z \\ \lambda(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) & = & 2, \end{cases} \lambda \in \mathbf{R}^*, \quad d_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

$$G_2 : \bar{d}_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} & = & \mu z \\ \mu(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) & = & 2, \end{cases} \mu \in \mathbf{R}^*, \quad \bar{d}_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

Deducem $\frac{2}{\mu} = \lambda z$.

Obţinem $z = \frac{2}{\lambda\mu}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2}{\lambda} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{\mu}. \end{cases}$ Rezultă

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}, \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}.$$

$$d_\lambda \cap d_\mu = \{P(a(\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}), b(\frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu}), \frac{2}{\mu\lambda})\}.$$

$$d_\infty \cap \bar{d}_\mu = \{P(\frac{a}{\mu}, \frac{b}{\mu}, 0)\}.$$

$$\bar{d}_\infty \cap d_\lambda = \{P(a\frac{1}{\lambda}, -b\frac{1}{\lambda}, 0)\}, d_\infty \cap \bar{d}_\infty = \{O\}.$$

$\square$