Cursul 7

• Definiție

Matricea $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, se numește ortogonală dacă $Q^T Q = I_n$.

• Proprietăți

Fie $Q = [q_0 \dots q_{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ortogonală.

i) Q e inversabilă la stânga

ii) $(Qx)^T Qy = x^T y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(Unghiul a doi vectori se păstrează prin transformări ortogonale)

iii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(Lungimea se păstrează prin transf. ortog.)

iv) Coloanele lui Q formează un sistem ortonormal, i.e.

$$q_i^T q_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{0, n-1}$$

- Factorizarea QR

Dacă am putea factoriza o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang$(A) = n$ astfel $A = Q \cdot R$, unde $Q \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ ortogonală

$R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triung.

cu $r_{ii} > 0 \ \forall i = \overline{0, n-1}$

putem rescrie sistemul de ecuații normale $A^T A x = A^T b$ astfel:

$$(QR)^T QR x = (QR)^T b$$

$$\Leftrightarrow R^T Q^T Q R x = R^T Q^T b$$

$$\Leftrightarrow R^T R x = R^T Q^T b$$

$$\Leftrightarrow R x = Q^T b$$

ce poate fi rezolvat cu metoda substituției descendente în $O(n^2)$ pași!

• Factorizarea QR: Metoda Gram-Schmidt

Notăm cu $a_0, a_1 \dots a_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ coloanele lui A și cu $q_0, q_1 \dots q_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ coloanele lui Q. Rescriem factorizarea astfel:

$$[a_0 \; a_1 \dots a_{n-1}] = [q_0 \; q_1 \dots q_{n-1}] \cdot \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0n-1} \\ 0 & r_{11} & \dots & r_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = r_{00} q_0 \\ a_1 = r_{01} q_0 + r_{11} q_1 \\ \dots \\ a_{n-1} = r_{0n-1} q_0 + r_{1n-1} q_1 + \dots + r_{n-1n-1} q_{n-1} \end{cases}$$

• Pasul $k=0$: Determinăm prima coloană din R și prima coloană din Q

$$\|a_0\|_2^2 = a_0^T a_0 = r_{00} q_0^T q_0 r_{00} = r_{00}^2$$

Fixez $r_{00} > 0$ pentru unicitate $\Rightarrow r_{00} = \|a_0\|_2$

și $q_0 = \frac{a_0}{\|a_0\|_2}$

• Pasul $k=1$: Determin a doua coloană din R și a doua coloană din Q

$\cdot q_0^T /\ a_1 = r_{01} q_0 + r_{11} q_1$

$\Rightarrow q_0^T a_1 = r_{01} q_0^T q_0 + r_{11} q_0^T q_1 = r_{01}$

$\Rightarrow r_{01} = q_0^T a_1$

Rămâne de determinat q_1 și r_{11} din

$a_1 - r_{01} q_0 = r_{11} q_1$

Idem ca la pasul $k=0$, obținem

$r_{11} = \| a_1 - r_{01} q_0 \|_2$ și $q_1 = \dfrac{a_1 - r_{01} q_0}{\| a_1 - r_{01} q_0 \|_2}$

. . . .

• Pasul $k=\overline{0, n-1}$ general: Determin coloana k din R și coloana k din Q

$r_{jk} = q_j^T a_k \ , \ \forall j = \overline{0, k-1}$

$r_{kk} = \| a_k - r_{0k} q_0 - \dots r_{k-1\,k} q_{k-1} \|_2$

$$q_k = \frac{a_k - \sum_{j=0}^{k-1} r_{jk} q_j}{\| a_k - \sum_{j=0}^{k-1} r_{jk} q_j \|_2}$$

- Algoritmul de factorizare QR prin metoda Gram-Schmidt clasică

Input: $A = [a_0, a_1 \dots a_{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $rang(A) = n$

$Q = copie(A)$, $R = O_n$

Pentru k de la 0 la $n-1$:

  Pentru i de la 0 la $k-1$:

    $r_{ik} = q_i^T q_k$ [Coloana k din R]

    $q_k = q_k - r_{ik} q_i$

  $r_{kk} = \| q_k \|_2$

  $q_k = q_k / r_{kk}$ [Coloana k din Q]

Output: $Q = [q_0, q_1 \dots q_{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ortog.

$R = (r_{i,j})_{i,j=\overline{0,n-1}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sup. triung.

cu $r_{ii} > 0 \ \forall i = \overline{0, n-1}$

• Factorizarea Gram-Schmidt modificată

Pentru stabilitate numerică (vom vedea la laborator), modificăm metoda Gram-Schmidt pentru a calcula la fiecare pas coloanele din Q și <u>liniile din R</u>! Rescriem factorizarea astfel:

$$[a_0 \mid \underbrace{a_1 \ldots a_{n-1}}_{A_1 \in \mathcal{M}_{m,n-1}(\mathbb{R})}] = [q_0 \mid \underbrace{q_1 \ldots q_{n-1}}_{Q_1 \in \mathcal{M}_{m,n-1}(\mathbb{R})}] \cdot \left[\begin{array}{c|c} r_{00} & R_{01} \\ \hline O & \underbrace{R_{11}}_{\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})} \end{array}\right]$$

$$= [r_{00} q_0 \mid \underset{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{q_0}} \underset{\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{R_{01}}} + Q_1 R_{11}] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = r_{00} q_0 \\ A_1 = q_0 R_{01} + Q_1 R_{11} \end{cases}$$

• Pasul $k=0$: Determinăm prima coloană din Q și prima linie din R

Idem metoda clasică, $r_{00} = \|a_0\|_2$

$$q_0 = \frac{a_0}{\|a_0\|_2}$$

$\cdot\ q_0^T \,/\, A_1 = q_0 R_{01} + Q_1 R_{11}$

$\Rightarrow q_0^T A_1 = R_{01}$, i.e. $r_{0j} = q_0^T a_j, \forall j = \overline{1, n-1}$

(Prima linie din R)

Obținem $\underbrace{A_1 - q_0 R_{01}}_{\mathcal{M}_{m,n-1}(\mathbb{R})} = \underbrace{Q_1}_{\mathcal{M}_{m,n-1}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{R_{11}}_{\mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})}$

- Repetăm procedeul de n ori pentru a determina cele n coloane din Q și cele n linii din R, obținând o factorizare QR mai stabilă.

- Algoritmul de factorizare QR prin metoda Gram-Schmidt modificată

Input: $A = [a_0, a_1 \dots a_{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $rang(A) = n$

$Q = copie(A)$, $R = O_n$

Pentru k de la 0 la $n-1$:

$r_{kk} = \| q_k \|_2$

$q_k = q_k / r_{kk}$ [Coloana k din Q]

Pentru i de la $k+1$ la $n-1$:

$r_{ki} = q_k^T q_i$ [Linia k din R]

$q_i = q_i - r_{ki} q_k$

■

■

Output: $Q = [q_0, q_1 \dots q_{n-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ortog.

$R = (r_{i,j})_{i,j = \overline{0,n-1}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sup. triung.

cu $r_{ii} > 0 \ \forall i = \overline{0, n-1}$