1) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$f(x,y,z) = \varphi(xy, x^2+y^2-z^2)$ unde $\varphi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este

de clasă C^2 verifică relația

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - yz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y,z) = (\underset{u(x,y,z)}{\underset{\shortparallel}{xy}}, \underset{v(x,y,z)}{\underset{\shortparallel}{x^2+y^2-t^2}}), \qquad \varphi(u,v).$

$f = \varphi \circ g$

$f = \varphi(u(x,y,z), v(x,y,z))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot 2x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\,\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)}_{=0.} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\,\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot(-2z)$$

$$\Rightarrow\ xz\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - yz\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

2) Arătați că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită de

$f(x, y) = xy\, g(x^2 - y^2)$ unde $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ este soluție

a ecuației $\quad xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2) f$

$$h(x,y) = \varphi(u(x,y)) \qquad \varphi = \varphi(u)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{d\varphi}{du}(u(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{d\varphi}{du} = \varphi'$$

$$= \varphi'(u(x,y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

$$f(x,y) = xy\, g(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot g(x^2-y^2) + xy \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x^2-y^2)\right)$$

$$= y\, g(x^2-y^2) + xy \cdot g'(x^2-y^2) \cdot 2x \quad \Big| \cdot xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\, g(x^2-y^2) + xy \cdot g'(x^2-y^2) \cdot (-2y) \quad \Big| \cdot x^2 y$$

$$\Rightarrow xy^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x^2 y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xy^3 + x^3 y)\, g(x^2-y^2)$$

$$= (x^2+y^2)\, xy\, g(x^2-y^2) = (x^2+y^2) f(x,y)$$

3) Fie $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferențiabilă și omogenă de grad p (adică $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Arătați că

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = p f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(exercițiu).

4) Fie $a \in \mathbb{R}$ și $g, h \in C^2(\mathbb{R})$. Arătați că $f(x,y) = g(x-ay) + h(x+ay)$ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

$$f(x,y) = g(x-ay) + h(x+ay)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x-ay)\frac{\partial}{\partial x}(x-ay) + h'(x+ay)\frac{\partial}{\partial x}(x+ay)$$

$$= g'(x-ay) + h'(x+ay)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(x-ay)\cdot(-a) + h'(x+ay)\cdot a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = g''(x-ay) + h''(x+ay)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-a\,g'(x-ay) + a\,h'(x+ay)\right)$$

$$= a^2 g''(x-ay) + a^2 h''(x+ay)$$

Teoremă (Schwarz)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ și $(a,b) \in D$.

i) există $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pe D

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continuă în (a,b)

Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

4) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0. \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Arătați că 1) f este diferențiabilă în $(0,0)$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Pt $y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cancel{y^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x}{\cancel{y^2}} = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Pt $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) + y^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{(-2x^2 y)}{y^4}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(\frac{-2x}{y^3}\right)}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases}2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

Fie $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(u,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Daca f este diferentiabilă în $(0,0)$ atunci $df(0,0) = T \equiv 0$.

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2}{\cancel{y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |x| = 0 \qquad \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1\right).$$

Deci f este diferențiabilă în $(0,0)$ și $df(0,0) \equiv 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Pt $y \neq 0$..

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{2x \cdot 2y(x^2+y^2) - 2xy^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Pt $y \neq 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2y \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{2x}{y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2xt}{x^2+t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^4}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2} = 1 \neq 0.$$

Deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$

Observație. În T. Schwarz continuitatea lui $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ este o condiție suficientă dar nu și necesară.

Exerciții

1) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Arătați că

i) f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

ii) f are derivate parțiale mixte de ordinul 2 în orice punct și calculați $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

iii) Este f de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$?

2) Să se determine $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$ știind că funcția $u(x,y)=f(x^2-y^2)$ verifică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$. $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (adică u este armonică pe $\mathbb{R}^2$).

3*) Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice pct din D.

Să se arate că pentru orice $(a,b) \in D$ și orice $\varepsilon > 0$ există $(x,y), (u,v) \in D$ cu $\|(x,y)-(a,b)\| < \varepsilon$, $\|(u,v)-(a,b)\| < \varepsilon$ astfel încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,v)$$