Examen[1] la Geometrie II, seria 10, 22.06.2024

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: ______

1. Considerăm $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică.

a) Decideţi dacă punctele $M = (1, 1, 0), N = (0, -1, -4), P = (2, 1, -2), Q = (-1, 0, 1)$ formează un reper afin. **(0,5p)**

b) Scrieţi ecuaţia unei drepte perpendiculare pe planul $\pi : 2x - 3y + z + 1 = 0$. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

c) Folosind definiţia normei ($\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^3$), demonstraţi egalitatea paralelogramului: **(0,5p)**

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right),\ \forall v, w \in \mathbb{R}^3 \text{ vectori.}$$

d) Eventual folosind egalitatea paralelogramului şi formula cosinusului, determinaţi măsurile unghiurilor unui paralelogram $ABCD$ care respectă relaţia $\|AC\|^2 \cdot \|BD\|^2 = \|AB\|^4 + \|AD\|^4$. **(0,5p)**

2. Considerăm $\mathbb{R}^3$ cu structura afină canonică şi funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y - 2z + 3, -x + z, 2z - 3)$.

a) Demonstraţi că f este un izomorfism afin. **(0,5p)**

b) Determinaţi, dacă există, o dreaptă $d \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $f(d) = \{(2 - t, t, t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. **(0,5p)**

c) Demonstraţi că mulţimea $\{P \in \mathbb{R}^3 \mid f(P) = P\}$ formează un subspaţiu afin şi determinaţi dimensiunea sa. **(0,5p)**

d) Există vreun produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ în raport cu care f să devină izometrie? Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

3. Fie planul proiectiv $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, $f([X : Y : Z]) = [X + Z : Y - 2Z : 2Z]$.

a) Demonstraţi că f este un izomorfism proiectiv. **(0,25p)**

b) Determinaţi mulţimea punctelor fixe ale lui f. Formează ea o varietate liniară în $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$? **(0,75p)**

c) Fie dreapta proiectivă $d : Y - 2Z = 0$. Determinaţi mulţimea $d \cap f(d)$. **(0,5p)**

d) Determinaţi ecuaţia unei conice proiective nedegenerate $\Gamma \subset \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ tangentă simultan la d şi $f(d)$. **(0,5p)**

4. Citiţi enunţul şi demonstraţia următoarei teoreme, apoi răspundeţi **pe scurt** la cerinţele ce urmează.

Teoremă: *Dacă $Isom(\mathbb{R}^2)$ este grupul izometriilor spaţiului euclidian $\mathbb{R}^2$ şi $G \le Isom(\mathbb{R}^2)$ este un **subgrup finit** al său, atunci există $n \ge 1$ astfel încât $G \simeq \mathbb{Z}_n$ sau $G \simeq D_n$, unde D_n este grupul diedral cu $2n$ elemente.*

Demonstraţie. Fie $G \le \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ subgrup finit. Observăm întâi că G nu poate conţine translaţii. **(A)**

Fie $P \in \mathbb{R}^2$ arbitrar. Considerăm punctul $P_0 = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h(P)$. Atunci P_0 este un punct fix pentru orice $f \in G$ şi, conjugând cu o translaţie, putem presupune că $P_0 = 0$, originea lui $\mathbb{R}^2$.

Acum, de vreme ce $f(0) = 0$ pentru orice $f \in G$, rezultă că $G \le O(2)$. **(B)**

Considerăm $G^+ = G \cap SO(2)$; prin definiţie, G^+ este un subgrup al lui G format doar din rotaţii în jurul lui 0. Fie $|G^+| = n$. Atunci $G^+ \simeq \mathbb{Z}_n$. **(C)**

Dacă $G^+ = G$, demonstraţia s-a încheiat. Dacă $G^+ \ne G$, atunci $[G : G^+] = 2$, deci pentru orice $s \in G\backslash G^+$, avem $G = \langle G^+ \cup \{s\}\rangle$, de unde deducem că $G \simeq D_n$. **(D)**

a) Explicaţi afirmaţia **(A)** *i.e.* de ce G nu poate conţine translaţii. **(0,25p)**

b) Explicaţi de ce P_0 este un punct fix pentru orice $f \in G$. Depinde P_0 de alegerea punctului P arbitrar? **(0,25p)**

c) Explicaţi ce rezultate demonstrate la curs sunt folosite în afirmaţia **(B)**. **(0,5p)**

d) Explicaţi afirmaţiile **(C)** şi **(D)** *i.e.* de ce, în acele condiţii, $G^+ \simeq \mathbb{Z}_n$ şi, dacă $G^+ \ne G, G \simeq D_n$. **(0,5p)**

5. Definiţie. În spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$, dacă P este un punct neted (nesingular) al cuadricei Γ, atunci $v \in \mathbb{R}^3$ se numeşte *vector normal la* Γ *în* P dacă $\mathrm{Dir}(T_P\Gamma) = \langle v\rangle^\perp$.

Pentru orice cuadrică netedă Γ, considerăm aplicaţia

$$N_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{P}^2\mathbb{R},\ N_\Gamma(P) = [v], \text{ unde } v \text{ este un vector normal la } \Gamma \text{ în } P.$$

a) Determinaţi un vector normal la cuadrica $\Gamma : 2x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 4yz - 2x + 4 = 0$ în punctul $P = (1, 2, 0)$. **(0,25p)**

b) Explicaţi de ce aplicaţia N_Γ este corect definită în condiţiile din ipoteză. **(0,25p)**

c) Scrieţi ecuaţia unei cuadrice Γ pentru care N_Γ este surjectivă. Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

d) Descrieţi (din punct de vedere topologic) imaginea aplicaţiei N_Γ, în cazul în care $\Gamma = \mathcal{H}$ este un hiperboloid cu o pânză. **(0,5p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. **Justificaţi toate răspunsurile date**. Timp de lucru: 3 ore. Succes!