Seminarul 5 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Rezultate utile din curs

Teorema 1.1: *(de corespondenţă a idealelor)*

Fie R, S inele și $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele.

Atunci există o corespondență bijectivă între idealele lui S și idealele lui R care conțin $\operatorname{Ker} f$ i.e. *funcțiile*

$$\varphi : \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\} \to \{J \trianglelefteq S\},\ \varphi(I) = f(I),$$
$$\psi : \{J \trianglelefteq S\} \to \{I \trianglelefteq R \mid I \supset \operatorname{Ker} f\},\ \psi(J) = f^{-1}(J).$$

sunt mutual inverse: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}, \psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Teorema 1.2: *(fundamentală de izomorfism)*

Fie R, S inele comutative și $f : R \to S$ un morfism de inele.

Atunci

$$R/_{\operatorname{Ker} f} \simeq \operatorname{Im} f.$$

În plus, acest izomorfism este dat de $R/_{\operatorname{Ker} f} \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Im} f$, $\overline{f}(\hat{h}) = f(x)$.

Teorema 1.3: *(Lema chineză a resturilor)*

Fie R inel comutativ şi $I_1, ..., I_n \trianglelefteq R$ ideale astfel încât $I_i + I_j = R$, pentru orice $i \neq j$ (două câte două comaximale).

Atunci $I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_n = I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ şi

$$R/_{I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n} = R/_{I_1 \cdot I_2 \cdot ... \cdot I_n} \simeq R/_{I_1} \times R/_{I_2} \times ... \times R/_{I_n}.$$

2 Inele de serii formale

Exercițiul 2.1: Fie R un inel comutativ şi $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i \in R[[X]]$ (inelul de serii formale).

a) Demonstraţi că f este inversabil $\in R[[X]]$ dacă şi numai dacă a_0 este inversabil în R.

b) Demonstraţi că dacă f este nilpotent în $R[[X]]$, atunci a_i este nilpotent în R, $\forall i \geq 0$. Este adevărată şi reciproca?

c) Demonstraţi că f este idempotent în $R[[X]]$ dacă şi numai dacă a_0 este idempotent în R şi $a_i = 0,\ \forall i \geq 1$.

Exercițiul 2.2: Fie K un corp comutativ. Demonstraţi ca idealele proprii ale inelului de serii formale $K[[X]]$ sunt de forma (X^n) pentru un $n \geq 1$. Deduceţi că $K[[X]]$ este inel local.

3 Inele de polinoame & Inelul factor (cont.)

Exercițiul 3.1: Folosind Teorema fundamentală de izomorfism, demonstraţi că

a) ${}^{R[X]}\!\diagup_{(X-a)} \simeq R$ pentru R un inel comutativ şi $a \in R$;

b) ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(n)} \simeq \mathbb{Z}_n[X]$;

c) ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(X^2-2)} \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

d) ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{Z}[i]$;

e) ${}^{\mathbb{R}[X]}\!\diagup_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C}$;

f) ${}^{\mathbb{R}[X]}\!\diagup_{(X^2-1)} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

g) ${}^{\mathbb{C}[X]}\!\diagup_{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Exercițiul 3.2: Calculați ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(2X-1)}$.

Exercițiul 3.3: Fie R un inel comutativ. Demonstraţi că $R[X]$ nu este local.

Exercițiul 3.4:

a) Arătați că ${}^{\mathbb{Q}[X]}\!\diagup_{(X^2-1)} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

b) Determinați idempotenții lui ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(X^2-1)}$.

c) Arătați că ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(X^2-1)}$ este canonic inclus strict în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d) Arătați că ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(X^2-1)} \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercițiul 3.5: (Teorema I de izomorfism) Folosiți Teorema Fundamentală de Izomorfism pentru a demonstra:

Fie R un inel și $I \subset J$ ideale ale lui R. Atunci

$$\frac{{}^{R}\!\diagup_{I}}{{}^{J}\!\diagup_{I}} \simeq {}^{R}\!\diagup_{J}.$$

Observația 3.6: Dacă $\varphi : R \to S$ este un izomorfism de inele, $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq S$ astfel încât $\varphi(I) = J$, atunci ${}^{R}\!\diagup_{I} \simeq {}^{S}\!\diagup_{J}$.

Exercițiul 3.7: Calculați:

a) ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(2,X)}$

b) ${}^{\mathbb{Z}[X]}\!\diagup_{(7,X-2)}$

c) $\mathbb{Z}[X]/(X+5, X-2)$

d) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$

e) $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2+X+1)$

f) $\mathbb{Z}[i]/(7+i)$

g) $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$

Exercițiul 3.8:

a) Pentru p, q prime, demonstraţi că $\mathbb{Z}[X]/(X^2-p) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2-q)$ dacă şi numai dacă $p = q$.

b) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(6+\sqrt{7})$ este un corp cu 29 elemente.

Exercițiul 3.9: Fie idealul $I = (3, X^3 - X^2 + 2X + 1) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că I nu este ideal principal şi că $\mathbb{Z}[X]/I$ nu este corp.