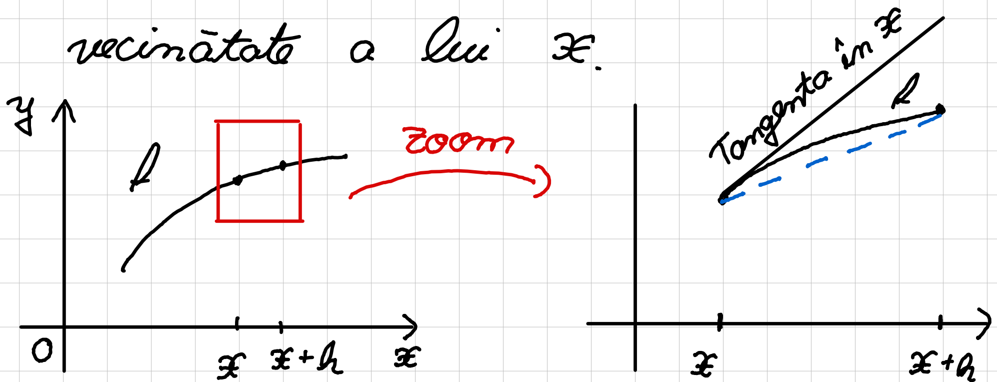
Cursul 10

IV) Derivarea și integrarea numerică

• Problemă (Derivarea numerică)

Vrem să aproximăm $f'(x)$ folosind doar valori ale funcției f într-o vecinătate a lui x.



Panta dreptei tangente $\simeq$ Panta dreptei punctate

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

(Aproximarea cu <u>diferențe finite ascendente</u>)

• Q_1: Cât de bună este această aproximare?

Fie $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ și $h > 0$ oarecare.

Din teorema restului Taylor, $\exists \alpha$ între x și $x+h$ a. î.

$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + f'(x)h}_{T_1(x)} + f''(\alpha)\cdot\frac{h^2}{2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\alpha)}{2}h$$

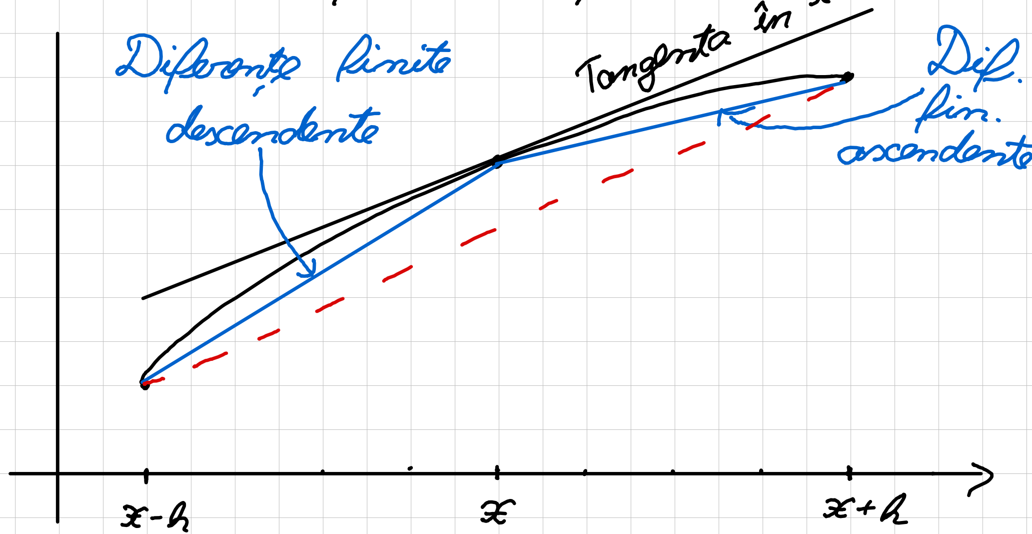
• Eroarea absolută a aproximării cu diferențe finite ascendente

$$e_a(f'(x)) = \left| f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| = \frac{|f''(\alpha)|}{2}h$$

$$\le \underbrace{\frac{\max|f''(x)|}{2}h}_{O(h)}$$

• În mod analog se obține același ordin al erorii pentru diferențe finite descendente, $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$.

• Q_2: Cum putem obține o aproximare mai bună pentru $f'(x)$?



Panta dreptei tangente $\simeq$ Panta dreptei punctate

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}$$

(Aproximarea cu diferențe finite centrale)

• Analiza erorii diferențelor finite centrale

Fie $f \in C^3[a, b]$ și $h > 0$. Din Taylor, $\exists\, \xi_+$ între x și $x+h$ și $\exists\, \xi_-$ între $x-h$ și x a.î.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \frac{f'''(\xi_+)}{6} h^3 \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2} h^2 - \frac{f'''(\xi_-)}{6} h^3 \quad (2)$$

Scăzând din ecuația (1) ecuația (2),

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + [f'''(\xi_+) - f'''(\xi_-)]\frac{h^3}{6}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \underbrace{\frac{f'''(\xi_-) - f'''(\xi_+)}{12} h^2}_{O(h^2)}$$

• Observație:

Dacă rescriem relațiile (1) și (2) pentru o funcție $f \in C^4[a, b]$ și polinoamele Taylor de grad 3, obținem

$\exists\ \alpha_+$ între x și $x+h$ și $\exists\ \alpha_-$ între $x-h$ și x a.î.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(\alpha_+)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(\alpha_-)$$

Adunând cele două relații, obținem

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \left[f^{IV}(\alpha_+) + f^{IV}(\alpha_-)\right]\frac{h^4}{24}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \underbrace{\frac{f^{IV}(\alpha_-) + f^{IV}(\alpha_+)}{24} h^2}_{O(h^2)}$$

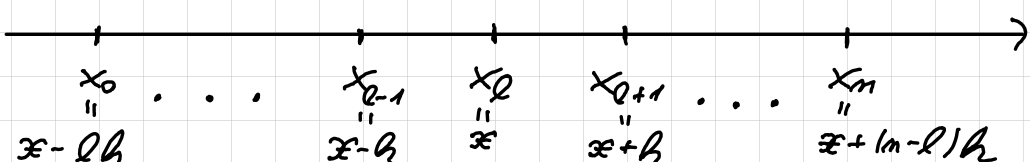
(Aproximarea derivatei de ordin 2)

Q_3: Cum determinăm o aproximare de ordin $O(h^n)$, $n \in \mathbb{N}$ oarecare, pentru $f'(x)$?

Idee: Polinomul de interpolare Lagrange de gradul n.

① Considerăm $n+1$ noduri echidistante $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$ cu $h := x_{i+1} - x_i$ $\forall i = \overline{0, n-1}$

② Fixez punctul în care vreau să aproximez derivata într-unul dintre noduri: $x = x_l$, $l \in \{0, 1 \dots n\}$



③ Interpolez f cu polinomul de interpolare Lagrange asociat nodurilor $x_0 \dots x_n$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) f(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

Derivăm:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} L'_{n,k}(x) f(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)$$

Pentru $x = x_e$, obținem

$$\boxed{f'(x_e) = \sum_{k=0}^{n} L'_{n,k}(x_e) f(x_k) + O(h^n)}$$

(Aproximarea de ordin $O(h^n)$ a lui $f'(x)$)

- Exemplu: $n = 2$: $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,2}$

Vreau să aproximez $f'(x_1)$ folosind $f(x_0)$, $f(x_1)$ și $f(x_2)$:

$$f'(x_1) = \sum_{k=0}^{2} L'_{2,k}(x_1) \cdot f(x_k) + O(h^2)$$

Continuarea în seminarul 7.