SEMINAR 3:

S3.1

$C := \{\neg v_0, v_2\}$

$\varphi := ((v_0 \land v_1 \to v_2) \land (v_0 \to v_1))$

aducem φ la forma FNC

$\sim \neg(v_0 \land v_1) \lor v_2 \land (\neg v_0 \lor v_1)$ (înlocuirea implicațiilor)

$\sim (\neg v_0 \lor \neg v_1 \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1)$ (de Morgan) FNC

$S = \{ C_1 = \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 = \{\neg v_0, v_1\}\}$

$L = v_1$ ← luăm literalul v_1

$S = \{ C_3 = \{\neg v_0, v_2, \neg v_0\} \Leftrightarrow C_3 = \{\neg v_0, v_2\} \}$ (rezolvent C_1, C_2)

S3.2

EXEMPLU DE EX. CU DAVIS-PUTNAM (pentru a vedea dacă o mulțime S este sau nu satisfiabilă)

$S = \{ \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\} \}$

aici punem toate mul. care conțin v_0

P1.1 $i=1$, $S_1 = S$, $x_1 := v_0$, $T^1_{P_1} = \{\{v_0\}\}$

$T^0_{P_1} = \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$

aici punem toate mul. care conțin $\neg v_0$

P1.2 $U_1 = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$ ← aici "unific" ce e în $T^1_{P_1}$ pe rând cu ce e în $T^0_{P_1}$ (și v_0 cu $\neg v_0$ vor dispărea)

adaug cei care au rămas în S + ce mai formați în U

P1.3 $S_2' = \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$

$S_2 = S_2'$

P1.4 $i=2$

P2.1 $x_2 := v_1$, $T^1_{P_2} = \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$ "combinăm"

$T^0_{P_2} = \{\{\neg v_1, v_2\}\}$

P2.2 $U_2 = \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

P2.3 $S_3' = \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$S_3 = S_3'$

P2.4 $i=3$

P3.1 $X_3 := v_2$ $\quad T^1_{P_3} = \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$T^0_{P_3} = \{\{\neg v_2, v_6\}\}$

P3.2 $U_3 = \{\{v_4, \neg v_3, v_6\}\}$

P3.3 $S_4' = \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_6, v_4\}\}$

↳ niciodată nu trebuie să apară var x curentă sau de la pașii ant., în caz contrar, am greșit undeva

$S_4 = S_4'$

P3.4 $i=4$

P4.1 $X_4 := v_3$ $\quad T^1_{P_4} = \{\{v_3\}\}$

$T^0_{P_4} = \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}$

P4.2 $U_4 = \{\{v_4, v_6\}\}$

P4.3 $S_5' = \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$

$S_5 = S_5'$

P4.4 $i=5$

P5.1 $x := v_4$, $\quad T^1_{P_5} = \{\{v_4, v_6\}\}$

$T^0_{P_5} = \{\{\neg v_4, v_5\}\}$

P5.2 $U_5 = \{\{v_6, v_5\}\}$

P5.3 $S_6' = \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_6, v_5\}$

$S_6 = S_6'$

P5.4 $i=6$

P6.1 $x := v_5$ $\quad T^1_{P_6} = \{\{v_6, v_5\}\}$

$T^0_{P_6} = \{\{\neg v_5, v_6\}\}$

P6.2 $U_6 = \{\{v_6\}\}$

P6.3 $S_7' = \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$

$S_7 = S_7'$

P6.4 $i=7$

P7.1 $x := v_6$ $\quad T^1_{P_7} = \{\{v_6\}\}$

$T^0_{P_7} = \{\{\neg v_6\}\}$

P7.2 $U_7 = \{\square\}$

P7.3 $S_8' = \emptyset \cup \{\square\} = \{\square\} = S_8$

P7.4 $\square \in S_8 \Rightarrow$ <u>S nesatisfiabilă</u>

Axioma 1 $a \to (b \to a)$

Axioma 2 $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$! Neap.

Axioma 3 $(\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$

MP $\left.\begin{array}{l} a \\ a \to b \end{array}\right\} b$

Th. ded. $\Gamma \cup \{a\} \underset{\text{deduce}}{\vdash} b \Leftrightarrow \Gamma \vdash a \underset{\text{implică}}{\to} b$ se poate aplica în ambele sensuri

RA (P.2.66) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

implică fals

Ss.3 Să se arate (1) $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$ (DEM. SINTACTICĂ PT. RED. LA ABS.)

se deduce

gama = mulțime de formule

(2) $\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$

(3) $\Gamma \vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$ Axioma3 + P.2.54 (i)

(4) $\Gamma \vdash \underbrace{(\varphi \to \varphi)}_{\text{teoremă}} \to \psi$ MP(2)+(3)

(5) $\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi)$ ← pt. că e teoremă, mulț. form o implică P.2.61 + P.2.55 (ii)

(6) $\Gamma \vdash \psi$ MP (4)+(5)

Ss.4 Orice form. φ, ψ și orice $\Gamma \subseteq Form$

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$ (la asta trebuie să ajungem așa că trebuie să găsim de la ce să plecăm a.î. să aplicăm teoria de sus și să iasă prod. final)

(1) $\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ Axioma 1

(2) $\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$ Th ded. aplicată de la dr. → st. Γ era $\emptyset$ acum e $\{\neg\psi\}$

(3) $\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ Axioma 3 + P.2.54 (i)

(4) $\{\neg\psi\} \vdash \psi \to \varphi$ MP (2)+(3)

(6) $\{\neg\psi, \psi\} \vdash \varphi$ Th. ded. aplicată de la dr. → st

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$
↳ zice mulț. Γ implică asta?
Ne folosim de punctul ant. (i)

(1) $\{\neg\psi, \psi\} \vdash \varphi$ S3.4 (ii)
(2) $\{\neg\psi\} \vdash \psi \to \varphi$ Th. ded. aplicată de la st la dreapta)
(3) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$ Th ded

(iii) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$ ← trebuie să ajung la asta folosindu-mă de cele două ipoteze

(1) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ (ipoteză)
(2) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ (ipoteză)
(3) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$ S.3.4 (ii) + P.2.55 (ii)
↳ fals
putem pune orice aici
(4) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi \to \bot$ MP (1)+(3)
(5) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$ MP (2)+(4)
(6) $\Gamma \vdash \varphi$ RA. P.266
$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \to \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

(iv) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ ← trb. să ajung la asta

(1) $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \bot$ S.34 (i)
(2) $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ considerăm negat φ și Γ devine $\{\neg\neg\varphi\}$
↳ RA. ~~P.2.66~~
(3) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
↳ mutăm din „Γ" cu implicație

(V) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ ← trebuie să ajung la asta

(1) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ S3.4 (iv)
(2) $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ Axioma 3
$(\neg b \to \neg a) \to (a \to b)$
$b = \neg\neg\varphi$ $a = \varphi$
(3) $\varphi \to \neg\neg\varphi$ MP (1)+(2)

S 3.5 Să se arate că pt. orice formulă φ :

$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ de dem. că e teoremă

Schiță: cum să ajungem de la ce trebuie să primim pentru a dem. teorema

$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ ← la asta trebuie să ajungem

în gama $\Gamma = \emptyset$ mutăm

$\{\neg\varphi \to \varphi\} \vdash \varphi$

Γ

$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash \perp$ ← aducem sub forma RA

(1) $\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ P. 2.54 (ii)

(2) $\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \varphi)$ P. 2.54 (ii)

(3) $\{\underbrace{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi}_{\Gamma}\} \vdash \varphi$ MP (1)+(2)

(4) $\Gamma = \{\neg\varphi \to \varphi\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ și φ

Din (1)+(3) + S.3.4 (iii)

$\{\neg\varphi \to \varphi\} \vdash \varphi$

(5) $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ Th. ded.

S3.6 Să se arate că pentru orice formule φ, ψ : $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi)$

(1) $\{\psi, \neg\varphi, \underbrace{\neg\neg(\psi \to \varphi)}_{\text{negarea}}\} \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$ P. 2.54 (ii)

(2) $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\} \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$ S.3.4 (iv) + P. 2.55(ii)

↳ $\varphi \to \neg\neg\varphi$

deci $\varphi = \neg\neg(\psi \to \varphi)$

și $\neg\neg\varphi = \neg\neg\neg\neg(\psi \to \varphi)$

$= (\psi \to \varphi)$

(3) $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\} \vdash \psi \to \varphi$ MP (1)+(2)

(4) $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\} \vdash \psi$

(5) $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\} \vdash \varphi$ MP (3)+(4) > contradicție

(6) $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\} \vdash \neg\varphi$ P. 2.54 (ii)

(7) $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi)$

(a imp. fals) deci scoatem

$\neg\neg(\psi \to \varphi)$ fără neg.

S3.7 Să se arate că pentru orice formule φ, ψ : $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

RECIPROCA AXIOMEI 3

Schiță pt. a afla cum să pornesc demonstrația

$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi)$ Th ded.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ Th ded.

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \bot$ (am făcut inv. RA deși nu e voie doar ca trec să obținem mulțimea)

(1) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ P. 2.54

(2) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \underline{\neg\neg\varphi \to \varphi}$ S. 3.4 (iv) + P2.55 iii)

teoremă

DACĂ AVEM O TEOREMĂ PUTEM SĂ-I PUNEM ORICE MULȚIME GAMA ÎN FAȚĂ

(3) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ MP (1)+(2)

(4) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ P.2.54

(5) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$ MP (3)+(4)

(6) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ P. 2.54 (ii)

(7) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \to \neg\varphi$ S.3.4. (iii) → dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$

$\Gamma \vdash \varphi$ și dispare $\neg\varphi$

(8) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ Th ded de la st. la dr.

(5)+(6) implică $\psi, \neg\psi$ și

(9) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ —"—

$\neg(\neg\varphi) \to \neg\varphi$