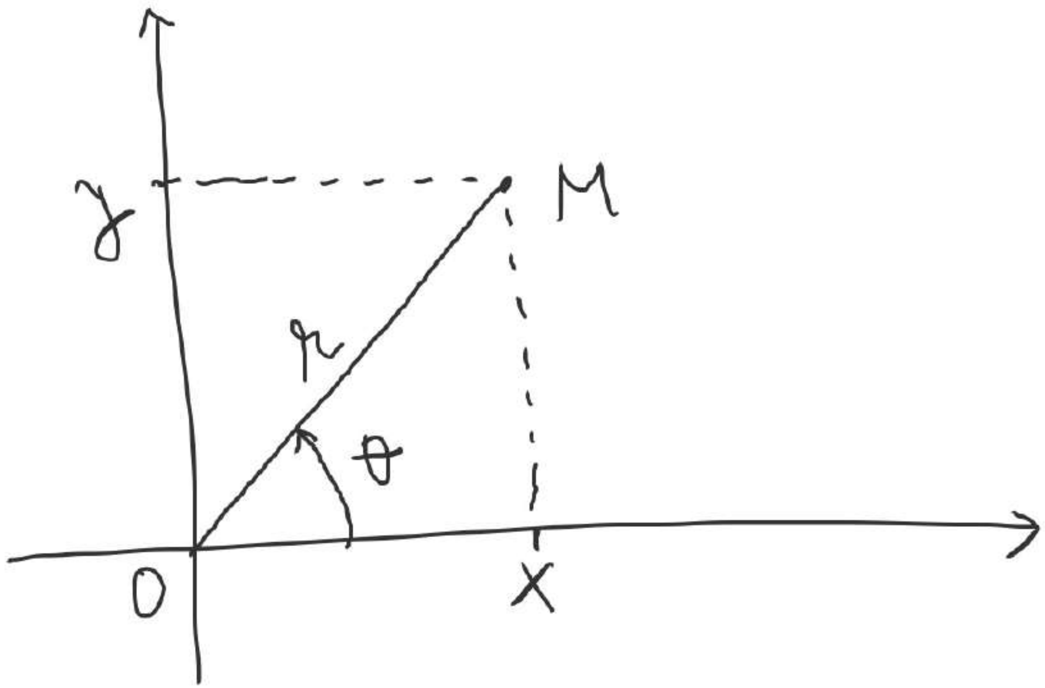
Coordonate polare



$M(x,y)$

x, y - coord. carteziene.

$r = OM = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (*)$$

Daca $M = O(0,0)$ atunci $r=0$ si relatiile $(*)$ sunt valabile $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Daca $M \neq O(0,0)$ daca θ se gaseste intr-un interval de lungime 2π, de obicei $[0, 2\pi)$ sau $[-\pi, \pi)$ atunci scrierea este unica.

(r,θ) – coordonatele polare ale lui M.

$\phi : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\left(\phi : \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \right)$

$(0,\infty) \times [0,2\pi) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bijecție

ϕ este diferențiabilă $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ și

$$J_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_\phi(r,\theta) = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r, \ \forall (r,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

$F : U \to V$, U, V deschiși în $\mathbb{R}^n$. Dacă

1) F bijectivă

2) F de clasă C^1

3) $J_F(x) \neq 0$, $\forall x \in U$

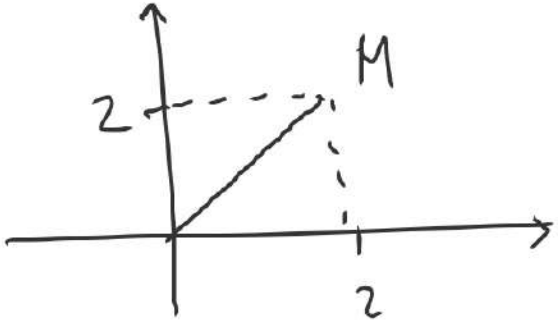
Atunci F este difeomorfism de clasă C^1.

$D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

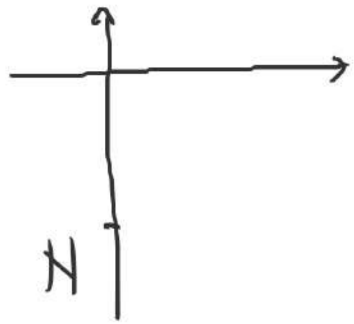
$\phi : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ este difeomorfism de clasă C^1 (sch. de coordonate) pt. că

1) ϕ bijectivă 2) ϕ de clasă C^1 3) $\det J_\phi(r, \theta) \neq 0$, $\forall (r, \theta) \in A$.

$M(2,2)$, $r = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$



$N(0,-2)$, $r = 2$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$



2) Pentru o valiză suma dintre lungime, lățime și înălțime trebuie să nu depășească 1 m. Ce dimensiuni trebuie să aibă bagajul pentru a avea volum maxim?

<u>Soluție</u> x, y, z - dimensiunile valizei, $x, y, z > 0$.

$x + y + z = 1$, $V = xyz$

$z = 1 - x - y$

$f(x,y) = xy(1-x-y)$, $D = \{(x,y) \mid x>0, y>0, x+y<1\}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 2xy - x^2 = x(1-2y-x) \end{cases} \xLeftrightarrow{x,y\neq 0} \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 1-2y-x=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}. \end{array}$$

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix} \quad H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ maxim local}$$

<u>Exercitiu</u>: De ce $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ care este pct de extrem este raspunsul la problemă?

3) Determinati punctele curbei $x^2+xy+y^2=1$ care sunt cele mai depărtate de origine

<u>Solutie</u> $f(x,y) = x^2+y^2 = d^2\big((x,y),(0,0)\big)$

Trebuie să $\sup\limits_A f$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+xy=1\}$.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g(x,y) = x^2 + xy + y^2$

$$\left.\begin{array}{l} A = g^{-1}(\{1\}) \\ \{1\} - \text{inchisă în } \mathbb{R} \\ g \text{ continuă} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \text{ inchisă}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } A \\ A \text{ compactă (pt că este inchisă și mărginită)} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ își atinge marginile pe } A.$$

Altfel Pt a arăta că A este închisă aplicăm următoarea Teoremă (Vezi Semestrul I).

Teoremă Fie (X,d) sp metric. O mulțime $F \subset X$ este închisă dacă și numai dacă pt orice șir convergent $(x_n)_{n\geq 1} \subset F$, $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.

Fie $(x_n, y_n)_{n\geq 1} \subset A$ a.î. $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b)$; deci $x_n \to a$, $y_n \to b$.

$(x_n, y_n)_{n\geq 1} \subset A \Longrightarrow x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 = 1, \ \forall n \geq 1.$

Deci $1 = \lim_{n\to\infty}(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow (a,b) \in A$ și atunci (din Teoremă), rezultă că A este închisă.

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$

$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1.$ $\qquad \mathbb{R}^2$ deschisa si f, g sunt de clasa C^1

$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0. \\ 2y + 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1. \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda)(x-y) = 0.$$

I $\lambda_1 = -2,$ $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -y$

$\Downarrow$

$x^2 - x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \; y = -1 \\ x = -1, \; y = 1. \end{cases}$

II) $x=y$ $\quad x^2+x^2+x^2=1 \longrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}=y$, $\lambda_2=-\frac{2}{3}$

$\searrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=y$

Pt $\lambda_1=-2$: $(1,-1)$, $(-1,1)$

Pt $\lambda_2=-\frac{2}{3}$: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Big\}$ punctele critice condiționate

$f(-1,1)=f(1,-1)=2$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$

Deci maximul distanței de la origine la curba este 2.
se obține pt pct $(1,-1)$ și $(-1,1)$

4) Arătați că $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este integrabilă Riemann și calc $\int_0^1 x\,dx$ folosind doar sume Darboux.

<u>Soluție</u>- Trebuie să arătăm că $\underline{\int_0^1} f\,dx = \overline{\int_0^1} f\,dx$

$\Delta_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots, \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\} = \frac{i-1}{n}$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\} = \frac{i}{n}$.

$$s_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} =$$

$$s_{\Delta_n}(f) = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{2n}{2n^2} = \frac{n^2-n}{2n^2} \quad \Bigg| \quad S_{\Delta_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$\sup_n s_{\Delta_n}(f) \leq \sup_\Delta s_\Delta(f) = \underline{\int} f(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx = \inf_\Delta S_\Delta(f)$$

$$\inf_\Delta S_\Delta(f) \leq \inf_n S_{\Delta_n}(f)$$

$$\sup_n s_{\Delta_n}(f) = \sup_n \frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\inf_n S_{\Delta_n}(f) = \inf_n \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Deci $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Deci f este int. Riemann

şi $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Exerciţiu. Rezolvaţi exerciţiul folosind doar sume Riemann.

5) Arătați că

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (y-2x, y+2x)$ este difeo. de clasă C^1

Folosind schimbarea de coordonate.

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + 2x \end{cases}$$

transformați ecuația $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ și găsiți sol generală

Soluție: F bijectivă, F de clasă

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J_F(x,y) = -4 \neq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deci F este difeomorfism.

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + 2x \end{cases} \qquad f(x,y)$$

$$y = \frac{u+v}{2}, \quad x = \frac{v-u}{4}$$

$$g(u,v) = f\left(\frac{v-u}{4}, \frac{u+v}{2}\right)$$

$$g(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 2 \frac{\partial g}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=1}$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}\right)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=-2}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(-2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}\right)\cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=2} = 4\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 8\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -16\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

? $g(u,v)$ a.î. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = h(v)$$

$\implies g(u,v) = H(v) + G(u)$, unde H este o primitivă a lui h.

$$f(x,y) = H(y+2x) + G(y-2x)$$