1) Găsiți punctele de extrem local ale funcției

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6-4x-3y$

cu legătura $x^2+y^2=1$.

<u>Soluție</u> $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6-4x-3y$

$g(x,y) = x^2+y^2-1$.

f și g sunt de clasă C^2 pe mulțimea deschisă $\mathbb{R}^2$

I) $\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \text{rang}(2x, 2y) = 1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

a.î. $x^2+y^2=1$

II Considerăm funcția lui Lagrange $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y),$$
$$= 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2+y^2-1)$$

și sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0. \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$; $x = \frac{4}{2\lambda} = \frac{2}{\lambda}$, $y = \frac{3}{2\lambda}$, $\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 = 25.$

$\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $x_1 = -\frac{4}{5}$, $y_1 = -\frac{3}{5}$

$\lambda_2 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$.

Pt $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, avem pct critic condiționat $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$$L(x,y) = 6 - 4x - 3y - \frac{5}{2}(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4 - 5x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -3 - 5y,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -5 = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \forall (x,y).$$

$$d^2L\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -5\,dx^2 - 5\,dy^2, \quad H_L\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

negativ definită.

$\Delta_1 = -5 < 0$, $\Delta_2 = 25 > 0$.

Deci $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ pct de maxim local pt f cu legătură $x^2+y^2=1$

Pt $\lambda = \frac{5}{2}$. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$$L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \frac{5}{2}(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 5, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$d^2L\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 5\,dx^2 + 5\,dy^2 \quad \left(d^2L\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)(a,b) = 5a^2 + 5b^2\right)$$

este pozitiv def și deci $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ pct de min local pt f cu legătura $x^2+y^2=1$.

Obs: Nu trebuie să diferențiem legătura.

2) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

Sa se determine punctele de extrem local ale funcţiei f cu legăturile $-x+y+z=1$, $x-z=0$.

Soluţie: $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g_1(x,y,z) = -x+y+z-1, \quad g_2(x,y,z) = x-z$$

$\mathbb{R}^3$ este mulţime deschisa si f, g_1, g_2 sunt de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$

$\Big(A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=0,\ g_2(x,y,z)=0 \}$

Trebuie sa gasim pct de extrem local ale funcţiei $f\big|_A$ $\Big)$

I)
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

II) Fie $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \beta g_2(x,y,z)$$

$$= xy + xz + yz + \lambda(-x+y+z-1) + \beta(x-z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z-\lambda+\beta=0. \\ x+z+\lambda \quad =0 \\ x+y+\lambda-\beta=0. \\ -x+y+z=1 \\ x-z=0. \end{cases}$$

$-x+y+z-1=0$

$x-z=0$

$x-z=0 \iff z=x$

$x+z+\lambda=0 \iff 2x+\lambda \iff \lambda=-2x$

$-x+y+z=0 \implies \boxed{y=1}$

$(1)(3) \overset{x=z}{\implies} \lambda=\beta.$

$1+x=0. \implies x=-1.$

$\Downarrow$

$z=-1.$

$\beta=\lambda=-2x=2.$

Sol. sist. $\lambda = \mu = 2, \quad x = -1, \; y = 1, \; z = -1$

Avem un singur pct critic conditionat $(-1,1,-1)$

$$L(x,y,z) = xy + xz + yz + 2(-x+y+z-1) + 2(x-z)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 1 = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z).$$

$$d^2L(-1,1,-1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)\,dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)\,dz^2$$

$$+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(-1,1,-1)\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(-1,1,-1)\,dx\,dz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(-1,1,-1)\,dy\,dz$$

$$d^2L(-1,1,-1) = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 < 0 \\ \Delta_3 = 2 > 0. \end{array}$$

deoarece cautam pct de extrem cu legaturi nu putem trage concl. că $(-1,1,-1)$ nu este pct de extrem !

Trebuie să diferentiem legaturile

$$\begin{cases} -x+y+z-1=0 \\ x-z=0. \end{cases}$$

!

$$\left(d^2L(-1,1,-1)(u,v,w) = 2(uv+uw+vw) \right.$$

Atunci

$$\begin{cases} -dx+dy+dz=0. \\ dx-dz \quad = 0. \end{cases} \Rightarrow dz = dx \Rightarrow dy = 0.$$

$$d^2L(-1,1,-1)_{leg} = 2(dx\cdot 0 + 0\cdot dz + dx\,dx$$

$$= 2\,dx^2$$

$$H_{L_{leg}}(-1,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

mat 1×1.

$$\left(d^2L(-1,1,-1)(u) = 2u^2 \right)$$

$u \in \mathbb{R}$

deci $d^2L(-1,1,-1)_{leg}$ este pozitiv definită.

În concluzie $(-1,1,-1)$ este pct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z) = 0$ și $g_2(x,y,z) = 0$

3) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy$. Determinați valorile extreme ale funcției f pe mulțimea $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ (adică determinați $\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in K\}$ și $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in K\}$.

<u>Soluție</u>: $\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă} \\ K \text{ compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ își atinge marginile pe K.

$$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$$

$$\partial B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$$

I) Căutăm posibile pct de extrem global ale lui f în $B((0,0), 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0. \\ x = 0. \end{cases}$$

Singurul posibil pct de extrem global al lui f pe K din $B((0,0), 1)$ este $(0,0)$

II) Căutam posibilele puncte de extrem global ale lui $f\big|_K$ din $\partial B((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad g(x,y) = x^2+y^2-1$ este de clasa C^2

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = \operatorname{rang}(2x\ 2y) = 1, \ \forall (x,y) \in \partial B((0,0),1)$$

$$L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$L(x,y) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \Rightarrow y = -2\lambda x \\ x + 2\lambda y = 0 \qquad x - 4\lambda^2 x = 0 \quad \underline{x(1-4\lambda^2) = 0} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Dacă $x = 0 \Rightarrow y = -2\lambda x = 0$ absurd pt ca $x^2+y^2 = 1$

Deci $x \neq 0$.

$$1-4\lambda^2=0 \quad \begin{cases} \lambda_1=\frac{1}{2} \\ \lambda_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=\frac{1}{2}, \quad y=-2\lambda x=-x \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2=1 \quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1'=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2=-\frac{1}{2} \quad y=-2\lambda x=x \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2=1 \quad \begin{cases} x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=y_2 \\ x_2'=-\frac{1}{\sqrt{2}}=y_2' \end{cases}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ Pct critice condiționate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ Pct critice condiționate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(0,0) = 0.$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$

$\inf\limits_{(x,y)\in K} f = -\frac{1}{2}$

$\sup\limits_{(x,y)\in K} f = \frac{1}{2}$