ȘTEFAN ALEXANDRA-MARIA

GRUPA 103

LUCRARE ANALIZĂ 1.

I.

1.2. $a=1, b=2, c=1$; $\sup B = ?$ $\inf B = ?$ $\min B = ?$ $\max B = ?$ $(\mathbb{R})$

$$B = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{an+bn+1}{n+c} \mid n, n \in \mathbb{N} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n+2n+1}{n+1} \mid n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Știut că $\nexists \inf B \neq \sup B \in \mathbb{R}$.

Presupunem prin reducere la absurd că

$(\exists)\ \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \geq \alpha, \forall\ b \in B \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{n+2n+1}{n+1} \geq \alpha, \forall\ n, n \in \mathbb{N}.$$

$$n = 1 \Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{2n+2}{2} \geq \alpha, (\forall)\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot (n+1) \geq \alpha, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Pentru n - impar $\Rightarrow -(n+1) \geq \alpha, (\forall)\ n \in 2\mathbb{N}+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1 \leq -\alpha, \forall\ n \in 2\mathbb{N}+1$, contradicție.

Deci $\nexists \inf B \in \mathbb{R}$ (pentru că B nu are minoranți în $\mathbb{R}$).

Presupunem prin reducere la absurd că

$(\exists)\ \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \leq \beta, \forall\ b \in B \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{n+2n+1}{n+1} \leq \beta, \forall\ n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

Dacă $n = 1 \Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{2n+2}{2} \leq \beta, \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot (n+1) \leq \beta, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Pentru n - par $\Rightarrow n+1 \leq \beta, \forall\ n \in 2\mathbb{N}$, contradicție

Deci $\nexists \sup B \in \mathbb{R}$ (pentru că B nu are majoranți în $\mathbb{R}$).

Din cele de mai sus, avem și că mulțimea B este nemărginită inferior și superior $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \min B, \nexists \max B \in \mathbb{R}$.

II.

2.1. $x_n = 2^n - \frac{1}{n^2} + 4$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(2^n - \frac{1}{n^2} + 4\right) = \infty - 0 + 4 = \infty$.

Arăt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n| > \varepsilon$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \underbrace{2^n - \frac{1}{n^2} + 4}_{>0} \right| > \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

Alegem $n_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \varepsilon < 1. \\ [\log_2 \varepsilon] + 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$

Pentru $\varepsilon < 1$, este evident că $2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall n \geq 0$.

Pentru $\varepsilon \geq 1$, vrăt că $2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall n \geq [\log_2 \varepsilon] + 1$.

$n \geq [\log_2 \varepsilon] + 1 > \log_2 \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \varepsilon$

$4 > \frac{1}{n^2} \left(n^2 > \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 4 - \frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n + 4 - \frac{1}{n^2} > \varepsilon$, ceea ce trebuia demonstrat.

În concluzie, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

III.

a) $a=-3$.

$\underline{\lim} x_n = ?$, $\overline{\lim} x_n = ?$

$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(-\frac{1}{3a}\right)^n + \cos n\pi$, $n \in \mathbb{N}$

$a=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cos n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

$\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{\vdots 2} \vdots 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (este divizibil cu 2 și cu 3, deoarece este produs de 3 numere consecutive) $\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \vdots 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cos n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

I: $n = 2k \Rightarrow x_{2k} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{k\to\infty}$

$\rightarrow 2+0=2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 2$.

II: $n = 2k+1 \Rightarrow x_{2k+1} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} + \underbrace{\cos((2k+1)\cdot\pi)}_{=-1} \xrightarrow{k\to\infty}$

$\rightarrow 1+0-1=0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = 0$.

Deci $\alpha((x_n)_n) = \{0, 2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 2$.