27-01-2021 NUME ....GRUPA.........

EXAMEN LA ANALIZA MATEMATICA I

I. Fie

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\} \cup \left\{ \left(0, 2^{-n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinati interiorul, aderenta si multimea punctelor de acumulare ale multimii A. Decideti daca A este inchisa, deschisa sau compacta. Decideti daca aderenta multimii A este compacta. Justificati raspunsurile!

II. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{daca } x < 0 \\ 2x, & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Studiati continuitatea si derivabilitatea lui f.

2) Studiati uniform continuitatea functiei f pe $\mathbb{R}$ si pe $(-\infty, 0)$.

III. Pentru $n \geq 1$, fie $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3}$$

Sa se studieze convergenta simpla si convergenta uniforma a sirului $(f_n)_{n \geq 1}$ pe $[0, 2]$ si $[2, \infty)$.

IV. Cu ajutorul sumelor Darboux si criteriului de integrabilitate al lui Darboux aratati ca functia

$$f : \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \cos x$$

este integrabila Riemann si calculati

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x)dx.$$

Atentie: Este obligatoriu sa folositi sume Darboux si criteriul lui Darboux! Mentionez ca rezolvarea **nu se puncteaza** in cazul in care folositi alte teoreme precum: orice functie monotona sau continua este integrabila Riemann, formula Leibniz-Newton sau Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

V. Studiati convergenta seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \right)$$

Nota. Timpul de lucru este de 2 ore. Fiecare subiect se noteaza cu note de la 1 la 10. Nota obtinuta la aceasta lucrare este media aritmetica a celor 5 note. Toate raspunsurile trebuie justificate!

Rezolvarile trebuie scanate si trimise impreuna cu lista de subiecte sub forma unui **singur** fisier pdf la adresele radu-bogdan.munteanu@g.unibuc.ro si radu.munteanu@unibuc.ro.

Examen analiza 27.01.2021.

I $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 4\}\cup\{(0,2^{-n}) \mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}^2$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 4\}\cup\{(0,1),(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{4}),\dots,(0,\frac{1}{2^n})\}\subset\mathbb{R}^2$

$\mathring{A}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid (\exists)\, r>0$ a.î. $(x-r,x+r)\subset A\}$

$\mathring{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>4\}$

$(\exists)\, r>0$ a.î. $(x-r,x+r)\subset A \quad (\forall)\, x\in\mathring{A}$

$\bar{A}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid (\forall)\, V\in\mathcal{V}(x) \quad V\cap A\neq\emptyset\}$

$\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 4\}\cup B_1(0,0)$

$A'=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid (\forall)\, V\in\mathcal{V}(x) \quad V\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset\}$

$A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>4\}\cup\{0,0\}$

A nu este nici deschisă nici închisă

A nu este deschisă deoarece $A\neq\mathring{A}$

A nu este închisă deoarece $A\neq\bar{A} \Rightarrow$ A nu este compactă

$\bar{A}$ nu este închisă $\Rightarrow \bar{A}$ nu este compactă

II $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x<0 \\ 2x & \text{dacă } x\geq 0\end{cases}$

1) Studiați continuitatea și derivabilitatea lui f.
2) Studiați uniform continuitatea lui f pe $\mathbb{R}$ și pe $(-\infty,0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{mărginită}}=0=f(0) \Rightarrow f$ continuă în $x=0$ (1)

$f(0)=2\cdot 0=0$

f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$ deoarece f se obține prin operații algebrice de compunere cu funcții elementare continue (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ f continuă pe $\mathbb{R}$

1

$$f'(x) = \begin{cases} \left(x\sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{x} & x<0 \\ (2x)' = 2 & x>0 \end{cases}$$

$$\left(x\sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ - nu există această limită, și deci, f nu este derivabilă în $x=0$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} [-1,0] \text{ - interval compact} \\ f \text{ continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ uniform continuă pe } [-1,0] \\ \text{Pe } (-\infty,-1] \text{ avem:} \\ |f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right| \le \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right| \le 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow f' \text{ - mărginită, deci } f \text{ este uniform continuă pe } (-\infty,-1] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ uniform continuă pe } (-\infty,0] \\ f \text{ uniform continuă și pentru } x\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

III $m\ge 1$ $f_m : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f_m(x) = \frac{6-2mx+2m^3x^3}{3+m^3x^3}$

Studiați convergența simplă și uniformă a șirului $(f_n)_{n\ge 1}$ pe $[0,2]$ și $[2,\infty)$

- convergența simplă

Fie $x\in[0,2]$ - fixat

$\lim\limits_{m\to\infty} f(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{6-2mx+2m^3x^3}{3+m^3x^3} = \frac{2x^3}{x^3} = 2 \Rightarrow f_m \xrightarrow{\Delta} f$, unde

$f : [0,2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2$

- convergența uniformă

Calculez $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,2]}|f_m(x) - f(x)|$

$\sup\limits_{x\in[0,2]}|f_m(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,2]}\left|\frac{6-2mx+2m^3x^3}{3+m^3x^3} \overset{3+m^3x^3)}{-2}\right| =$

$= \sup\limits_{x\in[0,2]}\left|\frac{\cancel{6}-2mx+\cancel{2m^3x^3}-\cancel{6}-\cancel{2m^3x^3}}{3+m^3x^3}\right| = \sup\limits_{x\in[0,2]}\left|\frac{-2mx}{3+m^3x^3}\right| = \sup\limits_{x\in[0,2]}\frac{2mx}{3+m^3x^3}$

Aleg $x \to x_0 = \frac{1}{m} \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,2]}\frac{2m\cdot x}{3+m^3x^3} \ge \sup\limits_{x\in[0,2]}\frac{2m\cdot\frac{1}{m}}{3+m^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^3} = \sup\limits_{x\in[0,2]}\frac{2}{3+1} = \frac{1}{2} \ne 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_m \overset{u}{\not\to} f$

- convergența simplă

Fie $x \in [2, \infty)$ - fixat

$\lim_{n \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{6 - 2nx + 2n^3x^3}{3 + n^3x^3} = \frac{2x^3}{x^3} = 2 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\Delta} f$, unde

$f : [2, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2$

- convergența uniformă

$\sup_{x \in [2,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [2,\infty)} \frac{2nx}{3 + n^3x^3} \to 0 \quad (\forall) x \in [2, \infty)$ gradul numitorului > decât gradul numărătorului

deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $x \in [2, \infty)$

$\underline{\text{IV}}$ $f : [-\frac{\pi}{3}, 0] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x$

Fie $\Delta_n = (-\frac{\pi}{3} = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 0)$ - diviziune a lui $[-\frac{\pi}{3}, 0]$

Din crit. Darboux $\Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0 \; (\exists) \eta(\varepsilon)$ a.î. $(\forall) \Delta$ cu $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \varepsilon$

și f mărg $\Rightarrow f$ integrabilă.

$-1 \leq \cos x < 1 \quad (\forall) x \in [-\frac{\pi}{3}, 0] \Rightarrow f(x) = \cos x$ - mărginită

$m_i = \inf \{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = -1$

$M_i = \sup \{f(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1$

$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)$

$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$

cos - funcție pară $\Rightarrow s_\Delta(f) = S_\Delta(f) \Rightarrow \underline{\int}_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x)\,dx = \overline{\int}_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \sin 0 - \sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

V Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln(\sqrt{n^2+1}+1) - \ln(\sqrt{n^2+1})\right) =$$

Fie $x_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\to 0}\right) = \ln 1 = 0$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 1+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{2}}\right)$$