ȘTEFAN ALEXANDRA-MARIA
GRUPA 103

06.01.2021

LUCRARE ANALIZA 1

S.I. I.4 $\boxed{\alpha=-2}$

Stabiliți în funcție de a și b natura seriei:
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha n+a}{\alpha n+b}\right)^{\alpha n}.$$

SOLUȚIE:

$$\alpha=-2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}.$$

Fie $a_n=\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{\frac{-2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2}=1^{-2}=1$$

I caz: $a\neq b \Rightarrow b-a\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+b}{-2n+a}\right)^{2n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b-a}{-2n+a}\right)^{2n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{b-a}{-2n+a}\right)^{\frac{-2n+a}{b-a}}\right]^{\frac{b-a}{-2n+a}\cdot 2n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n(b-a)}{-2n+a}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n(b-a)}{-2n+a}}=e^{a-b}.$$

Deoarece $e^{a-b}\neq 0,\ \forall a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n$ este divergentă (din criteriul suficient de divergență).

al II-lea caz: $a=b$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n=\sum_{n\geq 1}(1)^{-2n}=\sum_{n\geq 1}1$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n$ este divergentă (din criteriul suficient de divergență)

Scanned with CamScanner

ȘTEFAN ALEXANDRA-MARIA
GRUPA 103

Sa II 5 $\boxed{a=0}$

$A=\left\{\frac{(-1)^n}{n+a} \mid n\in\mathbb{N}\right\} \Rightarrow A=\left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

$\overset{\circ}{A}, \bar{A}, A', \mathrm{Fr}A$
A - mărginită
A - compactă
A - conexă

SOLUȚIE:

$A=\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right\}$.

I. $\overset{\circ}{A}=\emptyset$

Pp. (RA) : $\overset{\circ}{A}\neq\emptyset \Rightarrow \exists x\in\overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists x\in A, \exists r>0$ a.î.
$(x-r, x+r)\subseteq A\subseteq\mathbb{Q}$
Dar în $(x-r, x+r)$ se găsesc o infinitate de termeni iraționali $\Rightarrow$ contradicție
Deci $\overset{\circ}{A}=\emptyset$

II. $A'=\{0\}$.

1) Arăt $0\in A'$, adică $\forall V\in\mathcal{V}_0$, $V\cap A$ are o infinitate de elemente.
Fie $V\in\mathcal{V}_0 \Rightarrow V=(-r, r)$.
~~Dacă $\left[\frac{1}{r}\right]$ este impară $\Rightarrow V\cap A=\left\{\frac{1}{n}\right| n$~~
Deci $V\cap A=\left\{\frac{1}{n} \mid n\geq\left[\frac{1}{r}\right]+1, n-\text{par}\right\}$ - o infinitate de elemente.

2). Arăt $\forall x\neq 0 \Rightarrow x\notin A'$.
Presupunem că $\exists x\in A', x\neq 0. \Rightarrow \forall V\in\mathcal{V}_x$, $V\cap A$ are o ∞ de elemente.
$x\neq 0 \Rightarrow x>0$ sau $x<0$.
a) $x>0$.
Dacă $\exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $x=\frac{1}{n_0} \Rightarrow$ Aleg $r=\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+2}$
n_0 - par
$\Rightarrow V=\left(\frac{1}{n_0+2}, \frac{2}{n_0}-\frac{1}{n_0+2}\right) \Rightarrow V\cap A=\emptyset$

Dacă $\nexists\, m_0 \in \mathbb{N}$, m_0 - par a.î. $x = \frac{1}{m_0} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \exists\, m_1 \in \mathbb{N},\ m_1 \text{ - par a.î. } x \in \left(\frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1}\right)} \Rightarrow$

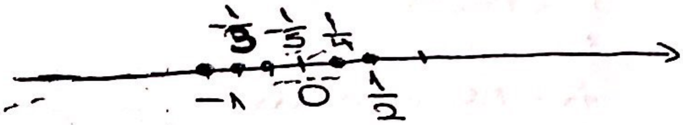
$\cancel{\Rightarrow V \cap A = \emptyset}$. (*)

~~Dacă $x<0$, procedăm analog.~~

III. $\overline{A} = A \cup A' = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

IV. $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A}$

V. A - mărginită DA $(A \subseteq B(0,2))$



VI. A - compactă

$A \subseteq \mathbb{R}$ compactă $\Leftrightarrow$ A este interval

A nu este interval $\Rightarrow$ A NU este compactă

VII. A - conexă

$A \subseteq \mathbb{R}$ conexă $\Leftrightarrow$ A este închisă și mărginită

A nu este închisă $\Rightarrow$ A nu este conexă

(*) Dacă $x > \frac{1}{2} \Rightarrow V = (x - r, x + r)$

Aleg $r = x - \frac{1}{2} \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2}, 2x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $x < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, m_1 \in \mathbb{N}$, m_1 - par a.î.

$x \in \left(\frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1}\right)$. Aleg $r = \min\left\{x - \frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1} - x\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = (x - r, x + r)$, $V \cap A = \emptyset$.

Procedez analog pentru $x < 0$.

Dacă $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$, m_0 - impar a.î. $x = -\frac{1}{m_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Aleg $r = -\frac{1}{m_0+2} + \frac{1}{m_0}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = \left(-\frac{2}{m_0} - \frac{1}{m_0+2}, -\frac{1}{m_0+2}\right) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $\nexists\, m_0 \in \mathbb{N}$, m_0 - impar a.î. $x = -\frac{1}{m_0}$:

Dacă $x < -1$. Aleg $r = -1 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow V = (2x - 1, -1) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $x > -1$. $\Rightarrow \exists\, m_0 \in \mathbb{N}$, impar a.î.

$x \in \left(-\frac{1}{m_0}, -\frac{1}{m_0+2}\right)$. Aleg $r = \min\left\{x + \frac{1}{m_0}, x + \frac{1}{m_0+2}\right\}$

$\Rightarrow V \cap A = \emptyset$.

Scanned with CamScanner

ȘTEFAN ALEXANDRA-MARIA
GRUPA 103

S_{III}. 1. b)
2. $a=3$

1. Studiați uniform continuitatea funcției:
b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2+3x}$.

SOLUȚIE:

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2+3x}$.

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 1$. Șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este descrescător și mărginit, deci convergent.

Avem $f(x_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{3}{n}}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n)=\frac{2n^2}{1+3n}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1+3n}=\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow$ șirul $(f(x_n))_{n\geq1}$ nu este convergent.

Aplic următoarea proprietate:

„O funcție $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniform continuă „duce" un șir Cauchy într-un șir Cauchy".

Deoarece $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent și $(f(x_n))_{n\geq1}$ nu este convergent $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu este uniform continuă.

$a=3$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+a}$.

2. Dem. că $f(x+1)-f(x)\leq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

SOLUȚIE:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

Fie $x\in\mathbb{R}$. Aplic Teorema lui Lagrange pe $[x,x+1]$:

1) f - continuă pe $[x,x+1]$

2) f - derivabilă pe $(x,x+1)$

$\Rightarrow \exists\, c_x\in(x,x+1)$ a.î. $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c_x)\Rightarrow$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Deci $f(x+1) - f(x) = \dfrac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}}$.

~~Dar~~ $\cancel{c_x^2+3 \geq c_x^2 \Rightarrow \sqrt{c_x^2+3} \geq |c_x| \geq c_x \Rightarrow}$

$\Rightarrow \cancel{\dfrac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}}}$

Dar $x^2+3 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} \geq |x| \geq x \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Deci $f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.