Seminarul 9 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Inele de polinoame

Exercițiul 1.1:

a) Câte monoame de grad d în n variabile există?

b) Precizaţi numărul de monoame de grad 8 din $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_5]$ strict mai mici lexicografic ca $X_1^3X_3X_4$.

Exercițiul 1.2: Fie K un corp comutativ şi $f, g \in K[X_1, ..., X_n]$.

a) Demonstraţi că, dacă K este infinit, atunci, dacă $f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$ pentru orice $x_1, ..., x_n \in K$, atunci $f = g$.

b) Rămâne adevărată afirmaţia dacă K este finit?

Exercițiul 1.3: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că

$$A \text{ este nilpotentă} \iff tr(A) = tr(A^2) = ... = tr(A^n) = 0.$$

2 Aritmetică în $\mathbb{Z}$ și $K[X]$

Exercițiul 2.1: Folosiți algoritmul lui Euclid pentru a afla c.m.m.d.c. d al numerelor $a, b \in \mathbb{Z}$ și o relație de forma $ax + by = d$, unde:

a) $a = 20, b = 13$;

b) $a = 69, b = 372$;

c) $a = 11391, b = 5673$;

d) $a = 507885, b = 60808$.

Exercițiul 2.2: Determinați cel mai mare divizor comun al P și $Q \in \mathbb{Q}[X]$ și scrieți-l ca o combinație a P și Q în $\mathbb{Q}[X]$, unde:

a) $P = X^3 - 2$ și $Q = X + 1$;

b) $P = X^5 + 2X^3 + X^2 + X + 1$ și $Q = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

c) $P = X^3 + 4X^2 + X - 6$ și $Q = X^5 - 6x + 5$.

Exercițiul 2.3: Folosiți algoritmul lui Euclid pentru a demonstra că a este inversabil modulo n și pentru a determina inversul lui $\hat{a}$ din $\mathbb{Z}_n$, unde:

a) $a = 13, n = 20$;

b) $a = 69, n = 89$;

c) $a = 1891, n = 3797$.

Exercițiul 2.4: Fie $R = \mathbb{Z}$ sau $K[X]$ cu K corp.

a) Fie $a, b, c \in R$. Demonstrați că, dacă $a \mid bc$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

b) Mai general, demonstrați că, dacă $a \mid bc$, atunci $\frac{a}{(a,b)} \mid c$.

c) Fie $a, b \in R$ și $n \in R$. Arătați că există $x, y \in R$ cu $ax + by = n \iff (a, b) \mid n$.

d) Fie $a, b \in R$ și $n \in R$. Arătați că, dacă (x_0, y_0) este o soluție în R a ecuației $ax + by = n$, atunci toate soluțiile sunt de forma

$$x = x_0 + m\frac{b}{(a,b)},\ y = y_0 - m\frac{a}{(a,b)},\ m \in R.$$

Exercițiul 2.5: Rezolvați ecuațiile diofantice (*i.e.* găsiți soluțiile întregi pentru):

a) $2x + 4y = 15$;

b) $17x + 29y = 31$;

c) $85x + 145y = 505$.

Exercițiul 2.6: Fie $I = (X^3 + 1)$ și $J = (X^5 + 1) \trianglelefteq \mathbb{R}[X]$. Calculați $I + J$ și $I \cap J$.

Exercițiul 2.7: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că

$$(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1.$$

Exercițiul 2.8: Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$. Arătați că, în $\mathbb{Q}[X]$,

$$(X^m - 1, X^n - 1) = X^{(m,n)} - 1.$$

Exercițiul 2.9: Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$. Arătați că

$$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1.$$

Exercițiul 2.10: Determinaţi toate numerele naturale $n < 10^{100}$ astfel încât $n \mid 2^n$, $n - 1 \mid 2^n - 1$ şi $n - 2 \mid 2^n - 2$.

Exercițiul 2.11: Calculaţi $(X^{23} + X^{22} + ... + 1,\ X^{53} + X^{52} + ... + 1)$.

Exercițiul 2.12: Fie $F_n = 2^{2^n} + 1$ pentru orice $n \geq 0$. Demonstraţi că $F_n = F_0F_1...F_{n-1} + 2$ pentru orice $n \geq 1$. Deduceţi că $(F_n, F_m) = 1$ pentru $n \neq m$.

Redemonstraţi faptul că există o infinitate de numere prime.