Extreme cu legături

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y=2\}$

Vrem să găsim punctele de extrem pt $f\big|_A : A \to \mathbb{R}$.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+2xy+z^2 = 4\}$

Vrem să determinăm pct de extrem pt $f\big|_A$

Definiție. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ și

$g_1, g_2, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$.

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid g_i(x) = 0,\ \forall i = 1, 2, \dots, m \}$$

Spunem că punctul $a \in A$ este punct de extrem local al funcției f cu legăturile $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ dacă a este punct de extrem pentru restricția lui f la A.

Adică $a \in A$ este punct de minim (maxim) al funcției f cu legăturile $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$) pt orice $x \in A \cap V$

<u>Teoremă</u> Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1; $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 și $a \in D$ a.î. $g(a) = 0$, rang $J_g(a) = m$, $J_g(a) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n+m}}$

Dacă pct a este punct de extrem al fct f cu legăturile $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots$, $g_m(x) = 0$ atunci există numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ numite <u>multiplicatori ai lui Lagrange</u> a.î.

dacă $L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$

atunci

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a) = 0, \text{ pt orice } i \in \{1, 2, \ldots, n+m\}$$

Dem: Pt cazul $m=1$, $n=2$.

$f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^{2+1} = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

$g : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0 \}$

$a = (x_0, y_0, z_0)$ este pct de extrem pt $f\big|_A$.

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a), \frac{\partial g}{\partial y}(a), \frac{\partial g}{\partial z}(a)\right) = 1 \quad , \quad a = (x_0, y_0, z_0)$$

Fără a restrânge generalitatea pres. că $\frac{\partial g}{\partial z}(a) \neq 0$.

Putem aplica T. funcțiilor implicite pt că

$$g \in C^1(D), \quad g(a) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(a) \neq 0$$

Atunci există $U \in \mathcal{V}((x_0, y_0))$ deschisă, $\exists\, V \in \mathcal{V}(z_0)$ deschisă și o unică funcție $z : U \longrightarrow V$ a.î.

$z(x_0, y_0) = z_0$ și $g(x, y, z(x, y)) = 0, \ \forall (x, y) \in U$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a)+\frac{\partial g}{\partial z}(a)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a)+\frac{\partial g}{\partial z}(a)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \qquad (2)$$

$$H: U\to\mathbb{R},\ H(x,y)=f(x,y,z(x,y))$$

Deoarece $a=(x_0,y_0,z_0)$ este pct de extrem pt $f|_A$ rezultă (x_0,y_0) este pct de extrem local pt $H \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial x}(a)=\frac{\partial H}{\partial y}(a)=0$.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)+\frac{\partial f}{\partial z}(a)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\overset{(1)}{=}\frac{\partial f}{\partial x}(a)-\frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{\frac{\partial g}{\partial z}(a)}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(a) - \frac{\partial f}{\partial z}(a) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(a)}{\frac{\partial g}{\partial z}(a)} = 0 . \qquad (4)$$

Fie $\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}{\frac{\partial g}{\partial z}(a)}$ și $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

Atunci din (3) și (4) avem $\frac{\partial L}{\partial x}(a) = \frac{\partial L}{\partial y}(a) = 0$.

$\frac{\partial L}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(a) = 0$ (din modul în care a fost definit λ)

Pentru a determina punctele de extrem ale funcției $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, cu legăturile

$g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, unde f și g_i sunt de clasă C^2 pe D procedăm astfel.

1) Considerăm funcția lui Lagrange.

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$$

2) Considerăm sistemul cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, & 1 \le i \le n+m \\ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}) = 0, & 1 \le j \le m \end{cases}$$

$n+2m$ ecuații / necunoscute.

3) Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ o soluție a sistemului

cu prop că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m+n}} = m.$

Notație: dacă $g : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, $g(u) = \sum_{i,j=1}^{K} a_{ij} u_i u_j$

$u = (u_1 \ldots u_K) \in \mathbb{R}^K$

scriem $g = \sum_{i,j=1}^{K} a_{ij}\, dx_i dx_j$

$$f(x) - f(a) = L(x) - L(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \omega(x) \|x - a\|^2$$

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0.$$

4) $$d^2L(a) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$$

Dacă $d^2L(a)$ este pozitiv (resp. negativ) definită atunci a este pct de minim (resp. maxim) a lui $f|_A$

In caz contrar procedăm după cum urmează. Fie sistemul

$$\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m})=0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m})=0 \end{cases} \qquad g_i(a)=0,\ 1\le i\le m.$$

Știm că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)=m$. și fără a restrânge generalit. presupunem că mat. formată cu ultimele m coloane are determinantul nenul. Atunci sistemul definește într-o vecinătate a lui $a=(a_1,\dots a_{n+m})$ funcțiile implicite $x_{n+1}, x_{n+2},\dots, x_{n+m}$ în funcție de $x_1, x_2,\dots, x_n$.

$$g_j(x_1,\dots x_n, x_{n+1}(x_1,\dots,x_n), x_{n+2}(x_1,\dots,x_n),\dots x_{n+m}(x_1,\dots,x_n))=0,\quad 1\le j\le m$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial g_j}{\partial x_{n+1}}(a)\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i}(a_1,a_2\dots,a_n)+\frac{\partial g_j}{\partial x_{n+m}}(a)\frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(a)dx_n+\frac{\partial g_j}{\partial x_{n+1}}(a)dx_{n+1}+\frac{\partial g_j}{\partial x_{n+m}}(a)dx_{n+m}=0.$$

pt $1\le j\le m$. unde $dx_{n+1}, dx_{n+2},\dots, dx_{n+m}$ sunt diferențialele fct. $x_{n+1},\dots, x_{n+m}$ în $(a_1, a_2,\dots, a_n)$

Exprimăm $dx_{n+1}, dx_{n+2}, \dots, dx_{n+m}$ în funcție de $dx_1, \dots, dx_n$ și le înlocuim în

$$d^2L(a) = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$$

Obținem forma pătratică

$$d^2L(a)_{leg} = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

<u>Obs</u>: $d^2L(a)_{leg}$ este forma patratica coresp diferentialei de ordin 2

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m}(x_1, \dots, x_n))$$

Analizăm $d^2L(a)_{leg}$ ptr a vedea natura punctului a.

Algoritm $f, g : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2. Ptr a găsi punctele de extrem ale funcției f cu legătura $g(x,y,z) = 0$ procedăm astfel

1) Det. punctele din mulțimea

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$$

pt care $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) = 1$. $\quad (*)$

2.) Considerăm funcția lui Lagrange $L : D \to \mathbb{R}$

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$$

3) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$

4) Considerăm $(\lambda_0, x_0, y_0, z_0)$ o soluție a sistemului care satisface (*). Ptr. funcția

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_0 g(x,y,z)$$ determinăm

diferențiala de ordinul 2 în $a=(x_0, y_0, z_0)$,

$$d^2L(a) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a)\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)\,dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(a)\,dz^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(a)\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(a)\,dx\,dz$$
$$+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(a)\,dy\,dz$$

Cazul 1 Dacă $d^2L(a)$ este pozitiv (resp negativ) definită at. $a=(x_0,y_0,z_0)$ este punct de minim (resp maxim). Dacă nu,

Cazul 2 Diferențiem legătura $g(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(a)\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}(a)\,dz=0.$$

Exprimăm una dintre dx, dy, dz în funcție de celelalte două, înlocuim în $d^2L(a)$ și studiem dacă forma pătratică astfel obținută, notată $d^2L(a)_{leg}$ este pozitiv def, negativ definită sau nedefinită și deducem natura pct. (x_0,y_0,z_0).

Exemplu Să se găsească punctele de extrem ale fct.

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$

cu legătura $xyz = 1$ în domeniul $x>0, y>0, z>0$.

Soluție. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$ deschisă.

$g(x,y,z) = xyz - 1$, f și g sunt de clasă C^2

1) $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \operatorname{rang}(yz, xz, xy) = 1, \ \forall (x,y,z) \in D$

2) $L : D \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$$= xy + xz + yz + \lambda(xyz - 1).$$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z+\lambda yz=0 & \Big| \cdot x \\ x+z+\lambda xz=0 & \Big| \cdot y \\ x+y+\lambda xy=0 & \Big| \cdot z \\ xyz=1 \end{cases}$

Solutia este $x=1,\ y=1,\ z=1$ si $\lambda=-2$

4) $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)=0$.

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1)=-1$.

$d^2L(1,1,1) = -2\,dx\,dy - 2\,dx\,dz - 2\,dy\,dz$

$$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 < 0 \\ \Delta_3 = -2 < 0 \end{array}$$

Nu putem trage nicio concluzie! Diferențiem legătura

$xyz - 1 = 0.$

$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$ Pt $x=y=z=1$ avem.

$dx + dy + dz = 0 \implies dz = -dx - dy$

$d^2L_{leg}(1,1,1) = -2\,dx\,dy - 2\,dx(-dx-dy) - 2\,dy(-dx-dy) =$

$$d^2 L_{leg}(1,1,1) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy$$

$$d^2 L_{leg}(1,1,1)(u,v) = 2u^2 + 2v^2 + 2uv = 2u^2 + 2uv + \frac{v^2}{2} + \frac{3v^2}{2}$$

$$= 2\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}v^2 \text{ - pozitiv definită}$$

<u>Altfel</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 3 > 0 \end{matrix}\right| \Longrightarrow d^2 L_{leg}(1,1,1) \text{ poz def}$$

$\Longrightarrow (1,1,1)$ punct de minim local al funcției f cu legătura $xyz = 1$.