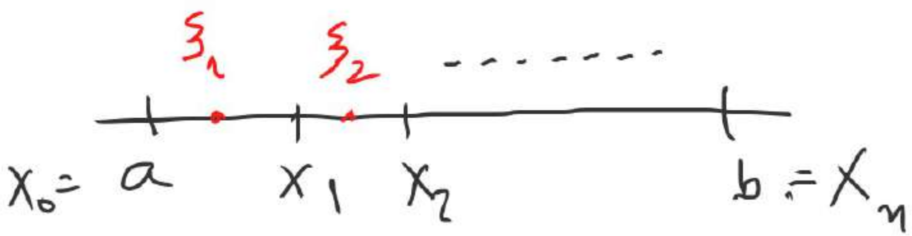
Integrala Riemann

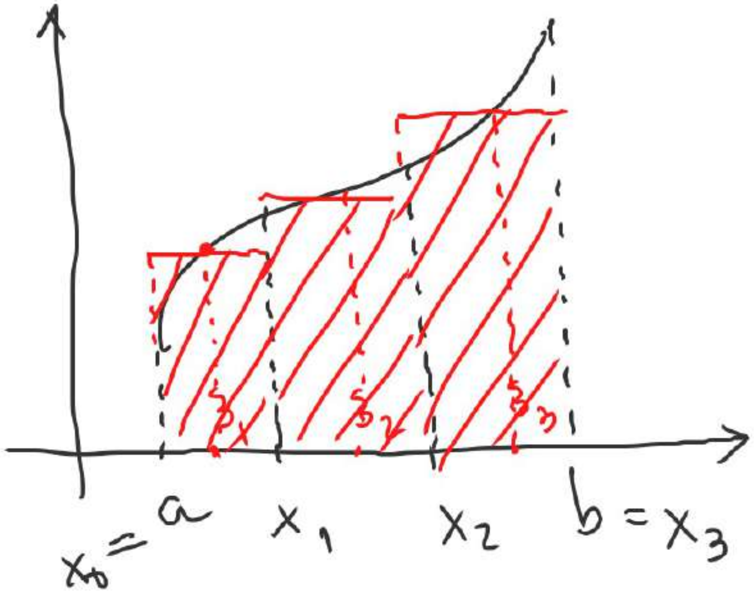
$\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$ diviziune a interv. $[a,b]$.

$\mathcal{D}([a,b]) = \{ \Delta \mid \Delta$ - diviziune a lui $[a,b] \}$

$\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$; $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ - sist. de puncte interm.
$1 \le i \le n$ asoc. div. Δ

Δ - div a lui $[a,b]$, $\xi(\Delta)$ - mulțimea sist de puncte intermediare asociate div Δ





$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)$$

Dacă Δ - div. a lui $[a,b]$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n} \in \xi(\Delta)$ și $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ - suma Riemann asoc.

funcției f, div. Δ și sist. $\xi \in \xi(\Delta)$

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

$$\|\Delta\| = \max \{(x_i - x_{i-1}) \mid 1 \le i \le n\}$$ norma div. Δ

Dacă Δ_1, Δ_2 - div. ale lui $[a,b]$ și $\Delta_1 \subset \Delta_2$ spunem că Δ_2 este mai fină decât Δ_1

<u>Definiție</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu prop. că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\, \Delta$ o diviziune a lui $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și $\forall\, \xi \in \xi(\Delta)$

$$\left| \sigma_\Delta(f, \xi) - I \right| < \varepsilon.$$

Numărul I (dacă există) este unic determinat se numește integrala fct. f pe $[a,b]$ și se not cu $\int_a^b f(x)\,dx$

Ex: 1) Folosind definiția arătați că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ este integrabilă Riemann

2) Arătați, cu definiția că $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$ nu este int. R.

<u>Propoziție</u> Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este int. R. atunci f este mărginită.

Dem. $I=\int_a^b f(x)dx$; Pt $\varepsilon=1$, există $\eta>0$ a.î

$\forall \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\eta$ și $\forall \xi\in\xi(\Delta)$, $|I-\sigma_\Delta(f,\xi)|<1$

Fixăm. $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ cu $\|\Delta\| < \eta$.

Să arătăm că f este mărg. pe $[x_{j-1}, x_j]$. Fie $x \in [x_{j-1}, x_j]$.

Fie $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$, $\xi_i = \begin{cases} x_i, & i \neq j \\ x, & i = j \end{cases}$

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(x)(x_j - x_{j-1})$$

$$I - 1 < \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(x)(x_j - x_{j-1}) < I + 1.$$

$$\frac{I - 1 - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{x_j - x_{j-1}} < f(x) < \frac{I + 1 - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

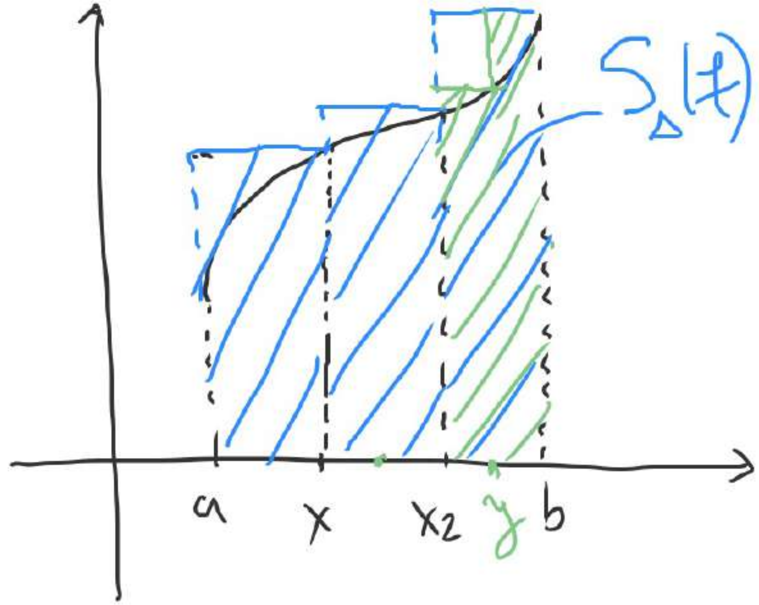
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

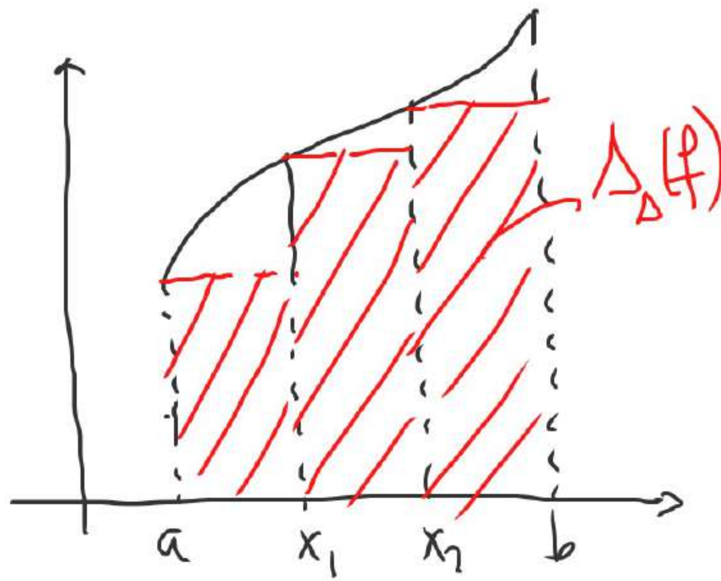
$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$





$s_\Delta(f) / S_\Delta(f)$ – suma Darboux inferioară / superioară asociată fct. f și div. Δ

$m = \inf\{f(x) \mid a \le x \le b\}$, $M = \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}$

$$m(b-a) \le s_\Delta(f) \le S_\Delta(f) \le M(b-a)$$

Propoziție. Fie Δ_1, Δ_2 div. ale lui $[a,b]$ cu Δ_2 mai fină decât Δ_1. Atunci:

1) $s_{\Delta_1}(f) \le s_{\Delta_2}(f)$

2) $S_{\Delta_1}(f) \geq S_{\Delta_2}(f)$

Propoziție. Dacă Δ_1, Δ_2 sunt diviziuni ale lui $[a,b]$ atunci

$$s_{\Delta_1}(f) \le S_{\Delta_2}(f).$$

Dem: $s_{\Delta_1}(f) \le s_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \le S_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \le S_{\Delta_2}(f)$

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\Delta} S_\Delta(f)$$ - integrala Darboux superioară a lui f

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\Delta} s_\Delta(f)$$ - integrala Darboux inferioară a lui f

<u>Obs:</u> $\underline{I} \leq \overline{I}$

<u>Propoziție</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. ~~Atunci~~

$\forall (\Delta_n)_{n\geq 1}$ șir de diviz. cu $\|\Delta_n\| \to 0$ și $\forall (\xi^{(n)})_{n\geq 1}$ cu $\xi^{(n)} \in \xi(\Delta_n)$ avem:

1) $$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2) $s_{\Delta_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, $S_{\Delta_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

3) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Teoremă</u> (Criteriul lui Darboux). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită

Urm. af. sunt echivalente:

1) f integrabilă Riemann

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$, a.î. $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$, $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

Exercitiu: Folosind Crit. lui Darboux arătați că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ este int. R. și calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

Definiție. Spunem că $A\subset\mathbb{R}$ este neglijabilă Lebesgue dacă $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,(I_n)_{n\geq 1}$ un șir de intervale deschise și mărginite a.î.

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon$$

(dacă $I=(a,b)$, $|I|=b-a$ $\longrightarrow$ lungimea interv. $[a,b]$)

Obs: 1) A - numărabilă $\Longrightarrow$ A neglijabilă Lebesgue.

2) Există mulțimi neglij. Lebesgue nenumărabile: Cantor set.

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci f integrabilă Riemann dacă și numai dacă f mărginită și mulțimea punctelor de disconti-nuitate ale lui f este neglijabilă Lebesgue.

Exemplu. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

D_f - mulțimea pct. de discontinuitate

$D_f = [0,1]$ - nu este neglijabilă Lebesgue $\Rightarrow$ f nu este int R

Ex. Arătați că f nu este int. R cu crit. Darboux.

Exercițiu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{altfel.} \end{cases}$$

Studiați integrabilitatea Riemann a fct f și g și în caz afirmativ calculați integralele.

Propoziție Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ int. R. Atunci $|f|$ este int. R și

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dem. f int R $\Rightarrow$ $|f|$ int R. (Crit. Lebesgue)

$$-|f| \leq f \leq |f| \Longrightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Propoziție: 1) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă atunci f este int. Riemann

2) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este monotonă atunci f este int. R.

Teoremă: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este continuă și

$$\left| F(y) - F(x) \right| \le \|f\|_\infty \cdot |y-x|, \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$$

Dacă f este continuă în $x_0 \in [a,b]$ atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$

Dem: $x<y$; $\left| F(y) - F(x) \right| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$

$$= \left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \cdot (y-x).$$

Să presupunem că f este cont. în $x_0 \in [a,b]$. Fie $\varepsilon > 0$.
Există $\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in [a,b]$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (*)$$

Dacă $x \in [a,b]$, $\underline{x < x_0}$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{x_0 - x} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_x^{x_0} f(t)\,dt - \int_x^{x_0} f(x_0)\,dt}{x_0 - x} \right| \leq \frac{\int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt}{x_0 - x} \leq \varepsilon \quad (*)$$

$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

La fel procedăm dacă $\underline{x > x_0}$.

Corolar.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci funcția f admite primitive.

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ – este o primitivă (adică F deriv., $F'=f$).

Teoremă (Leibniz – Newton)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fct. integrabilă Riemann care admite primitive. Atunci oricare ar fi F o primitivă a lui f,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \overset{\text{not}}{=\!=} F(x)\Big|_a^b.$$

Teoremă (teorema de medie)

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ int. R a.î. $g \geq 0$. Atunci

$$m \int_a^b g\,dx \leq \int_a^b f g\,dx \leq M \int_a^b g\,dx$$

$m = \inf \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$, $M = \sup \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$

Dacă în plus f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f g\,dx = f(\xi) \int_a^b g\,dx$$

Ideea dem: Pp. $\int_a^b g\,dx > 0$.

$$\underset{\underset{f(u)}{\parallel}}{m} \le \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \le \underset{\underset{f(v)}{\parallel}}{M}.$$

f cont. $\Rightarrow \exists\, u, v \in [a,b]$ a.i. $f(u) = m$, $f(v) = M$.

f cont $\Rightarrow \exists\, \xi$ între u și v a.i. $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx}$.

Teoremă (Permutarea limitei cu integrala)

Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un șir de funcții int. R, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci f este int. Riemann

și $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx$

Dem. Fie $\varepsilon > 0$. Pt că $f_n \xrightarrow{u} f$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î.

pt orice $n \geq n_\varepsilon$

$$(*) \quad -\frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) - f_n(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \ \forall x \in [a,b]$$

In particular

$$-\frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad (**)$$

f_{n_ε} int. Riemann $\Longrightarrow$ f_{n_ε} mărginită $\overset{(**)}{\Longrightarrow}$ f mărginită

f_{n_ε} int. Riemann $\Longrightarrow$ $\exists\, \Delta$ div. a lui $[a,b]$ a.î.

$$S_\Delta(f_{n_\varepsilon}) - s_\Delta(f_{n_\varepsilon})) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Din $(**)$ $\Rightarrow$ $S_\Delta(f) \le S_\Delta(f_{n_\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{4}$

$$s_\Delta(f) \geq s_\Delta(f_{n_\varepsilon}) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$\Longrightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le S_\Delta(f_{n_\varepsilon}) - s_\Delta(f_{n_\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(-\frac{\varepsilon}{4}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dem. Crit. Darboux $\Longrightarrow$ f int. Riemann

Dem (*) $\Longrightarrow$ $-\frac{\varepsilon}{4} \leq \int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\Longrightarrow \left| \int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \forall n \geq n_\varepsilon$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$.