LUCRARE ANALIZĂ 1

S.I. I.4 $\boxed{\alpha=-2}$

Stabiliți în funcție de a și b natura seriei:
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha n+a}{\alpha n+b}\right)^{\alpha n}.$$

SOLUȚIE:

$$\alpha=-2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}.$$

Fie $a_n=\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{\frac{-2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2}=1^{-2}=1$$

I caz: $a\neq b \Rightarrow b-a\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+a}{-2n+b}\right)^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n+b}{-2n+a}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b-a}{-2n+a}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{b-a}{-2n+a}\right)^{\frac{-2n+a}{b-a}}\right]^{\frac{b-a}{-2n+a}\cdot 2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n(b-a)}{-2n+a}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n(b-a)}{-2n+a}}=e^{a-b}.$$

Deoarece $e^{a-b}\neq 0,\ \forall a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n$ este divergentă (din criteriul suficient de divergență).

al II-lea caz: $a=b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n=\sum_{n\geq 1}(1)^{-2n}=\sum_{n\geq 1}1$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}a_n$ este divergentă (din criteriul suficient de divergență)

GRUPA 103

Sa II 5 $\boxed{a=0}$

$A = \{\frac{(-1)^n}{n+a} \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathring{A}, \bar{A}, A', Fr A$

A - mărginită

A - compactă

A - conexă

SOLUȚIE:

$A = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\}$.

I. $\mathring{A} = \emptyset$

Pp. (RA) : $\mathring{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists x \in A, \exists r > 0$ a.î.

$(x-r, x+r) \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$

Dar în $(x-r, x+r)$ se găsesc o infinitate de termeni iraționali $\Rightarrow$ contradicție

Deci $\mathring{A} = \emptyset$

II. $A' = \{0\}$.

1) Arăt $0 \in A'$, adică $\forall V \in \mathcal{V}_0$, $V \cap A$ are o infinitate de elemente.

Fie $V \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow V = (-r, r)$.

~~Dacă $[\frac{1}{r}]$ este impară $\Rightarrow V \cap A = \{\frac{1}{n} \mid n$~~

Deci $V \cap A = \{\frac{1}{n} \mid n \geq [\frac{1}{r}] + 1, n$ - par$\}$ - o infinitate de elemente.

2). Arăt $\forall x \neq 0 \Rightarrow x \notin A'$.

Presupunem că $\exists x \in A', x \neq 0 \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A$ are o ∞ de elemente.

$x \neq 0 \Rightarrow x > 0$ sau $x < 0$.

a) $x > 0$.

Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x = \frac{1}{n_0} \Rightarrow$ Aleg $r = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+2}$
n_0 - par

$\Rightarrow V = (\frac{1}{n_0+2}, \frac{2}{n_0} - \frac{1}{n_0+2}) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

~~$\Rightarrow \exists\, m_1 \in \mathbb{N}, m_1$ - par a.î. $x \in \left(\frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1}\right) \Rightarrow$~~

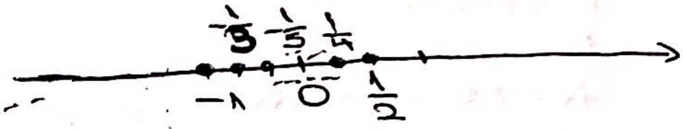
~~$\Rightarrow V \cap A = \emptyset$.~~ (*)

~~Dacă $x<0$, procedăm analog.~~

III. $\overline{A} = A \cup A' = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

IV. $\mathrm{Fr}\,A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A}$

V. A - mărginită DA ($A \subseteq B(0,2)$)



VI. A - compactă

$A \subseteq \mathbb{R}$ compactă $\Leftrightarrow$ A este interval

A nu este interval $\Rightarrow$ A NU este compactă

VII. A - conexă

$A \subseteq \mathbb{R}$ conexă $\Leftrightarrow$ A este închisă și mărginită

A nu este închisă $\Rightarrow$ A nu este conexă

(*) Dacă $x > \frac{1}{2} \Rightarrow V = (x-r, x+r)$

Aleg $r = x - \frac{1}{2} \Rightarrow V = \left(\frac{1}{2}, 2x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $x < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, m_1 \in \mathbb{N}, m_1$ - par a.î.

$x \in \left(\frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1}\right)$. Aleg $r = \min\left\{x - \frac{1}{m_1+2}, \frac{1}{m_1} - x\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = (x-r, x+r)$, $V \cap A = \emptyset$.

Procedez analog pentru $x<0$.

Dacă $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}, m_0$ - impar a.î. $x = -\frac{1}{m_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Aleg $r = -\frac{1}{m_0+2} + \frac{1}{m_0}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = \left(-\frac{2}{m_0} - \frac{1}{m_0+2}, -\frac{1}{m_0+2}\right) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $\nexists\, m_0 \in \mathbb{N}, m_0$ - impar a.î. $x = -\frac{1}{m_0}$:

Dacă $x < -1$. Aleg $r = -1 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow V = (2x-1, -1) \Rightarrow V \cap A = \emptyset$

Dacă $x > -1. \Rightarrow \exists\, m_0 \in \mathbb{N}$, impar a.î.

$x \in \left(-\frac{1}{m_0}, -\frac{1}{m_0+2}\right)$. Aleg $r = \min\left\{x + \frac{1}{m_0}, x + \frac{1}{m_0+2}\right\}$

$\Rightarrow V \cap A = \emptyset$.

S_{III}. 1. b)
2. $a=3$

1. Studiați uniform continuitatea funcției:
b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2+3x}$.

SOLUȚIE:
$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2+3x}$.

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{1}{n}$, $\forall\, n\geq 1$. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și mărginit, deci convergent.
Avem $f(x_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{3}{n}}\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_n)=\frac{2n^2}{1+3n}\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1+3n}=\infty\Rightarrow$
$\Rightarrow$ șirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ nu este convergent.
Aplic următoarea proprietate:
„O funcție $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniform continuă „duce" un șir Cauchy într-un șir Cauchy".
Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și $(f(x_n))_{n\geq 1}$ nu este convergent $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ nu este uniform continuă.

$a=3$
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+a}$.
2. Dem. că $f(x+1)-f(x)\leq 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

SOLUȚIE:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.
Fie $x\in\mathbb{R}$. Aplic Teorema lui Lagrange pe $[x,x+1]$:
1) f - continuă pe $[x,x+1]$
2) f - derivabilă pe $(x,x+1)$
$\Rightarrow \exists\, c_x\in(x,x+1)$ a.î. $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c_x)\Rightarrow$

$f'(x) = (\sqrt{x^2+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Deci $f(x+1) - f(x) = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}}$.

~~Dar~~ $\cancel{c_x^2+3 \geq c_x^2 \Rightarrow \sqrt{c_x^2+3} \geq |c_x| \geq c_x \Rightarrow}$

$\Rightarrow \cancel{\frac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}}}$

Dar $x^2+3 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+3} \geq |x| \geq x \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2+3}} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Deci $f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.