SEMINAR 13

MULȚIMI MĂSURABILE JORDAN

- Fie $K \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime măsurabilă Jordan și o fct. $f: K \to \mathbb{R}$, f cont. Atunci $G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ este mulț. măsurabilă Jordan și $\lambda(G_f) = 0$

  ↳ vect.

  ↳ măsura Jordan

- Fie $K \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime măsurabilă Jordan și $g, h : K \to \mathbb{R}$, fct. cont.
Atunci mulțimea $\Gamma_{g,h} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R},\ g(x) \le y \le h(x)\}$ este măsurabilă Jordan.

  ↳ mulțimea sit. între graficele a 2 fct.

PROP:

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ - mulțime măs. Jordan $\Rightarrow \overline{A}, \mathring{A}$ sunt mulțimi măsurabile Jordan
  ↳ deschisul

  $\lambda(\overline{A}) = \lambda(\mathring{A}) = \lambda(A)$

- $A_1 \subseteq A_2$ mulț. măs. Jordan $\Rightarrow A_2 \setminus A_1$ mulțime măs. Jordan și
  $\lambda(A_2 \setminus A_1) = \lambda(A_2) - \lambda(A_1)$

- $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt mulțimi măsurabile Jordan $\Rightarrow A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2$ - m.m.J.
  și $\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2)$. (dacă sunt disjuncte) $\Rightarrow$
  $\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$

EX1: Să se dem. că urm. mulțimi sunt măsurabile Jordan și să se calculeze măsura lor

a) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \le 0\}$

b) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y \le 0\}$

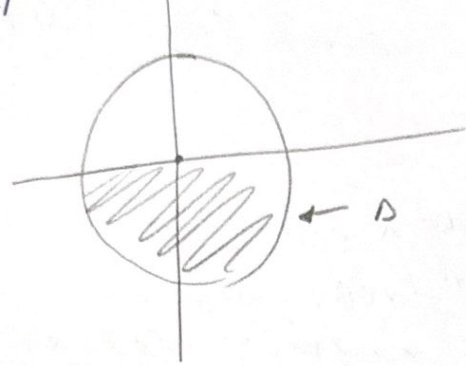
c) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y$ și $y < x\}$

Dacă ineg. sunt: $\leq$ sau $\geq$ -> închisă

$<$ sau $>$ -> deschisă

comb. nu e niciuna

a)



$\leftarrow D$

D = mulțime închisă ! nu poate fi Gf pt. că nu avem nicio egalitate!

Bănuim că e mulț. sit. între 2 Gf de fct.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} y^2 \leq x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y \in [-2,2] \\ y \leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y \in [-2,0]$$

$x^2+y^2 \leq 4$

$x^2 \leq 4-y^2$

$x \in [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}]$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-2,0], \underbrace{-\sqrt{4-y^2}}_{g(x)} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{4-y^2}}_{h(x)}\}$$

$g, h : [-2,0] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} g(y) = -\sqrt{4-y^2} \\ h(y) = +\sqrt{4-y^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{f. cont.}$$

$$\left.\begin{matrix} [-2,0] - \text{int. închis 1-dimensional} \\ \forall n\text{-dim.} = \text{m.m.J} \end{matrix}\right\} \Rightarrow [-2,0] \text{ m.m.J în } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow D = $ m.m. J în $\mathbb{R}^2$

Acum. calc. măsura

Vom calcula

$\lambda(\Delta) = \iint_\Delta 1\, dx\, dy$

Ca să ghicim ord integr! x depinde de y $\Rightarrow$ ord. de int. $dx\,dy$

$$\int_{-2}^{0}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}=g(y)}^{\sqrt{4-y^2}=h(y)} 1\, dx\right) dy = \int_{-2}^{0} 2\sqrt{4-y^2}\, dy$$

$y = 2\sin t$ $\quad$ $y=0 \Rightarrow t = 2\pi$

$dy = 2\cos t\, dt$ $\quad$ $y=-2 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$

$$2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\, dt = 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t}\cdot 2\cos t\, dt$$

$$= 8\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 8\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow 4\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 1+\cos 2t\, dt$$

$$= 4t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{4}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 8\pi - 6\pi + 2\sin 4\pi - 2\sin 3\pi$$

$$= 2\pi + 0 - 0$$

$$= 2\pi$$

b) $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y \le 0\}$

$= \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y\le 0\}}_{\Delta_1} \setminus \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4,\ y \le 0\}}_{\Delta_2}$

$x^2+y^2=4$

$$\begin{cases} x^2 = 4-y^2 \\ 4-y^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \le 4 \\ y \le 0 \end{cases} \Rightarrow y \in [-2, 0]$$

$x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2 = 4-y^2$

$x = \pm\sqrt{4-y^2} \rightarrow 2$ sol.

$\Delta_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-2,0],\ x = \underbrace{\sqrt{4-y^2}}_{h(y)} \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in$

$[-2,5],\ x = \underbrace{-\sqrt{4-y^2}}_{g(x)} \}$

$G_h \cup G_g$ - m.m.j G_h = m.m.j

G_g = m.m.j

$$\lambda \Delta_2 = \lambda(G_g \cup G_h) = \underbrace{\lambda(G_h) + \lambda(G_g) - \lambda(G_h \cap G_g)}_{0} \leq \lambda(G_h) + \lambda(G_g)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0 \quad =0$$

$\Delta = \Delta_1 \setminus \Delta_2$

Δ_1, Δ_2 - m.m.j $\Rightarrow$ Δ m.m.j $\Rightarrow$ $\Delta = 2\pi - 0 = 2\pi$

c) $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y,\ y < x \}$

Δ nu este mulțime închisă

$\Rightarrow \Delta = \overset{\Delta_a}{\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y,\ y \leq x \}} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y,\ y \leq x \} \setminus$

$\overset{\Delta_b}{\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y,\ y = x \}}$

Δ_a - m. închisă

$$\begin{cases} x^2 \leq y \\ y \leq x \end{cases}$$

$x^2 \leq y \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow x \in [0,1]$

$\Delta_a = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ \underbrace{x^2}_{g(x)} \leq y \leq \underbrace{x}_{h(x)} \}$

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2} 1\, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 - x\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{6}$$