LABORATOR#11

EX#1 (a) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare vectorul $\mathbf{x} \coloneqq \begin{bmatrix} x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_m \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}_m\}$ şi ca date de ieşire vectorul $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ care defineşte transformarea Householder $\mathbf{H}_\mathbf{v} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ care anulează componentele x_i, $i = \overline{2, m}$, ale vectorului $\mathbf{x}$ şi valoarea nenulă a vectorului $\mathbf{H}_\mathbf{v}\,\mathbf{x}$, i.e. $\alpha \coloneqq \left(\mathbf{e}^{(1)}\right)^\mathsf{T} \left(\mathbf{H}_\mathbf{v}\,\mathbf{x}\right)$, unde $\mathbf{e}^{(1)} \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \; 0 \; \ldots \; 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1, n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind *metoda reflexiilor* (*Householder*).

(c) Testaţi funcţia pentru matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}; \tag{1a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}; \tag{1b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, 8}; \tag{1c}$$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{H}_n = \left(h_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad h_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \; i, j = \overline{1, n}; \quad n = \overline{2, 12}; \tag{1d}$$

şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

(d) Pentru matricele Hilbert de ordin n date de relaţia (1d), reprezentaţi grafic mărimea $-\log_{10} \|\mathbf{I}_m - \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\|_F$, obţinută prin factorizarea QR folosind metoda reflexiilor (Householder), ca funcţie de $n = \overline{2, 12}$.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#2 Fie matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

Scrieţi o funcţie în Python are ca date de intrare matricea $\mathbf{A}$ şi vectorul $\mathbf{b}$, iar ca date de ieşire soluţia sistemului (2), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, obţinute prin *factorizarea QR* a matricei sistemului (2) folosind *metoda reflexiilor* (*Householder*).

Testaţi funcţia pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,28 \\ 3,31 \end{bmatrix}; \tag{3a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{bmatrix}; \tag{3b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{3c}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-k}, \quad k = \overline{1,10}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3d}$$

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga;

(iii) $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{b}$ sunt compatibili.

EX#3 (a) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare vectorul $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$ şi ca date de ieşire unghiul $\theta \in [0, 2\pi)$ care defineşte rotaţia (plană) Givens, $\mathbf{G}(\theta) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, care anulează componenta x_2 a vectorului $\mathbf{x}$, precum şi valoarea nenulă a vectorului $\mathbf{G}(\theta)\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, i.e. $\alpha := \left(\mathbf{e}^{(1)}\right)^\mathsf{T} \left(\mathbf{G}(\theta)\,\mathbf{x}\right)$, unde $\mathbf{e}^{(1)} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Scrieţi o funcţie în Python care are ca dată de intrare matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, şi ca date de ieşire matricea ortogonală $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ şi matricea superior triunghiulară $\mathbf{R} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu $r_{kk} > 0$, $k = \overline{1,n}$, obţinute prin factorizarea QR a matricei $\mathbf{A}$ folosind *metoda rotaţiilor* (*Givens*).

(c) Testaţi funcţia pentru matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}; \tag{4a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 26 \\ 12 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}; \tag{4b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,8}; \tag{4c}$$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{H}_n = \left(h_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \; i,j = \overline{1,n}; \quad n = \overline{2,12}; \tag{4d}$$

şi verificaţi identitatea $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$.

(d) Pentru matricele Hilbert de ordin n date de relaţia (4d), reprezentaţi grafic mărimea $-\log_{10} \|\mathbf{I}_m - \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\|_F$, obţinută prin factorizarea QR folosind metoda rotaţiilor (Givens), ca funcţie de $n = \overline{2,12}$.

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga.

EX#4 Fie matricea inversabilă la stânga $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ şi sistemul supraabundent/supradeterminat de ecuaţii liniare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{5}$$

Scrieţi o funcţie în Python are ca date de intrare matricea $\mathbf{A}$ şi vectorul $\mathbf{b}$, iar ca date de ieşire soluţia sistemului (5), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul eroare reziduală, $\mathbf{r} \coloneqq \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, şi norma sa euclidiană, $\|\mathbf{r}\|_2$, obţinute prin *factorizarea QR* a matricei sistemului (5) folosind *metoda rotaţiilor* (*Givens*).

Testaţi funcţia pentru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,26 \\ 0,28 \\ 3,31 \end{bmatrix}; \tag{6a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 \\ 0,17 & 0,11 \\ 2,02 & 1,29 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,27 \\ 0,25 \\ 3,33 \end{bmatrix}; \tag{6b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6c}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-k}, \quad k = \overline{1,10}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6d}$$

Indicaţii: Trebuie verificate următoarele condiţii:

(i) $\mathbf{A}$ este o matrice $m \times n$, cu $m \geq n$;

(ii) $\mathbf{A}$ este o matrice inversabilă la stânga;

(iii) $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{b}$ sunt compatibili.