Seminar 9

① Fie K un corp comutativ și $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$, definim funcția polinomială $\tilde{f}$ asociată lui f astfel: $\tilde{f} : K^n \to K$, $\tilde{f}(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$ pt. orice $a_1, \ldots, a_n \in K$ [unde $f(a_1, \ldots, a_n)$ este evaluarea lui f în $a_1, \ldots, a_n$; altfel spus, dacă $\varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \to K$ este unicul morfism de inele pt. care $\varphi(\alpha) = \alpha$ pt. orice $\alpha \in K$, iar $\varphi(X_1) = a_1, \ldots, \varphi(X_n) = a_n$ (existența lui φ rezultă din proprietatea de universalitate a inelelor de polinoame), atunci $f(a_1, \ldots, a_n)$ este chiar $\varphi(f)$].

Să se arate că dacă K este infinit și $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ pentru care $\tilde{f} = \tilde{g}$, atunci $f = g$.
Rămâne afirmația adevărată pt. K finit?

② Să se determine c.m.m.d.c al numerelor întregi 625873 și 540053 și să se scrie acesta ca o combinație liniară a celor două numere.

③ Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$.

④ Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $(n! + 1, (n+1)! + 1) = 1$.

⑤ Fie $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ și $d = (a, b)$. Fie $c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că ecuația $ax + by = c$ are soluții $x, y \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $d \mid c$. În acest caz, cum se determină toate soluțiile ecuației?

(6) Să se rezolve ecuația $4x+14y=6$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

(7) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu m impar. Să se arate că $(2^m-1, 2^n+1)=1$.

(8) Fie $F_n = 2^{2^n}+1$ pentru $n \geq 0$. Să se arate că $F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deduceți că $(F_n, F_m)=1$ pentru orice $n \neq m$.

(9) Fie $f = X^4+3X^3+2X^2+X-1$, $g = X^4+3X^2+2X+3 \in \mathbb{Q}[X]$. Să se determine c.m.m.d.c și c.m.m.m.c ale lui f și g în $\mathbb{Q}[X]$ și să se scrie (f,g) ca o combinație liniară de f și g cu coeficienți în $\mathbb{Q}[X]$.

(10) Să se determine c.m.m.d.c al polinoamelor $f = X^4-4X^3+1$ și $g = X^3-3X^2+1$ în $\mathbb{R}[X]$.

(11) Să se determine suma și intersecția idealelor (X^3+1) și (X^5+1) în $\mathbb{R}[X]$.