1) Să se arate că ecuația

$$z^3 + z + 20(x^2+y^2) - 8(xy+x+y) = 0$$

definește implicit funcția $z = z(x,y)$ într-o vecinătate a pct. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right)$ și calculați $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ și $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Este $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ punct de extrem local al funcției $z = z(x,y)$?

<u>Soluție</u> $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = z^3 + z + 20(x^2+y^2) - 8(xy+x+y)$

(i) F de clasă C^2

(ii) $F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) = 2 + 20 \cdot \frac{1}{8} - 8\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = 0$

iii) $\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \neq 0.$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 40x - 8y - 8 \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} = 40y - 8x - 8, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 1.$$

Atunci, există U o vecinătate deschisă a lui $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

există V o vecinătate deschisă a lui 1 și o unică

funcție $z = z(x,y)$, $z : U \to V$ cu propriet.:

$z\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1$, z de clasă C^2

$F(x,y,z(x,y)) = 0, \forall (x,y) \in U$ adică,

$$z^3(x,y) + z(x,y) + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0 \ , \ \forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{40x-8y-8}{3z^2+1} \quad \text{adică} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{40x-8y-8}{3z^2(x,y)+1}, \ \forall (x,y)\in U$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{40\cdot\frac{1}{4}-8\cdot\frac{1}{4}-8}{3z^2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)+1} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{40y-8x-8}{3z^2(x,y)+1}, \ \forall (x,y)\in U \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=0$$

În loc să aplicam formulele pt a calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$ derivam în raport cu x egalitatea

$$z^3(x,y)+z(x,y)+20(x^2+y^2)-8(xy+x+y)=0, \ \forall (x,y)\in U.$$

$$3z^2(x,y)\cdot\underline{\frac{\partial z}{\partial x}}(x,y)+\underline{\frac{\partial z}{\partial x}}(x,y)+40x-8y-8=0, \ \forall (x,y)\in U.$$

de unde $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{40x-8y-8}{3z^2(x,y)+1}$, $\forall (x,y)\in U$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x,y) = -\frac{40\left(3z^2(x,y)+1\right)-\left(40x-8y-8\right)\cdot 6z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{\left(3z^2(x,y)+1\right)^2}$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\dfrac{40\cdot 4}{16} = -10$ (pt că $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=0$ și $z\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=1$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{40y-8x-8}{3z^2(x,y)+1}\right)$$

$$= -\frac{40\left(3z^2(x,y)+1\right)-\left(40y-8x-8\right)\cdot 6z(x,y)\,\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{\left(3z^2(x,y)+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -10$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{40x-8y-8}{3z^2(x,y)+1}\right)$$

$$= -\frac{-8\left(3z^2(x,y)+1\right) - 6z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\left(40x-8y-8\right)}{\left(3z^2(x,y)+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{-8\cdot 4}{16} = 2$$

$$H_z\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} ; \quad \Delta_1 = -10 < 0, \quad \Delta_2 = 96 > 0$$

Deci $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ este pct de maxim pt fcț. implicită $z = z(x,y)$

2) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Să se determine punctele de extrem ale funcției f cu legătura

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

<u>Soluție</u> $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}$ deschisă

$$g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1.$$

Funcțiile f și g sunt de clasă C^2 pe D.

I) $$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \text{rang}\left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}, -\frac{1}{y^2}\right) = 1, \ \forall (x,y,z) \in D$$

II) $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$

$$L(x,y,z) = x+y+z+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\frac{\lambda}{x^2}=0 \\ 1-\frac{\lambda}{y^2}=0 \\ 1-\frac{\lambda}{z^2}=0. \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (4). \end{cases}$$

$\lambda, x, y, z \neq 0.$

$x^2 = y^2 = z^2 = \lambda > 0.$

din (4) rezultă că cel mult una dintre x, y și z poate fi $-\sqrt{\lambda}$

1) $x=y=z=\sqrt{\lambda} \underset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{3}{\sqrt{\lambda}}=1 \Rightarrow \lambda_1=9$, $x_1=y_1=z_1=\sqrt{\lambda_1}=3$.

2) $x=y=\sqrt{\lambda}$, $z=-\sqrt{\lambda} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1 \Rightarrow \lambda_2=1$, $x_2=y_2=1$, $z_2=-1$.

3) $x=z=\sqrt{\lambda}$, $y=-\sqrt{\lambda} \Rightarrow \lambda_3=1$, $x_3=z_3=1$, $y_3=-1$

4) $y=z=\sqrt{\lambda}$, $x=-\sqrt{\lambda} \Rightarrow \lambda_4=1$, $x_4=-1$, $y_4=z_4=1$.

Punctele critice condiționate coresp. lui λ sunt:

$(3,3,3)$, $\lambda_1=9$.

$(1,1,-1)$, $\lambda_2=1$

$(1,-1,1)$, $\lambda_3=1$

$(-1,1,1)$, $\lambda_4=1$

Pt $(3,3,3)$ coresp $\lambda_1 = 9$.

$$L(x,y,z) = x+y+z+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{18}{x^3} \ ; \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{18}{y^3} \ ; \ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \frac{18}{z^3} \ , \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(3,3,3) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(3,3,3) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(3,3,3) = \frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d^2 L(3,3,3) = \frac{2}{3}(dx^2+dy^2+dz^2)$$ pozitiv definită

și deci $(3,3,3)$ este pct de minim condiționat

Pt $(1,1,-1)$ coresp. $\lambda_2 = 1$; $L(x,y,z) = x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \ , \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} \ , \ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \frac{2}{z^3}$$ derivatele mixte sunt zero.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,-1)=2,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,-1)=2,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,-1)=-2$$

$$d^2L(1,1,-1)=2\,dx^2+2\,dy^2-2\,dz^2 \quad \left(d^2L(1,1,-1)(u,v,w)=2u^2+2v^2-2w^2\right)$$

Diferențiem legătura $g(x,y,z)=0$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\,dz=0. \text{ adică}$$

$$-\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{1}{y^2}\,dy-\frac{1}{z^2}\,dz=0$$

$x=y=1$ și $z=-1$: $-dx-dy-dz=0 \Rightarrow dz=-dx-dy$

$dz = -dx - dy$

$d^2L(1,1,-1) = 2dx^2 + 2dy^2 - 2dz^2$

$d^2L_{leg}(1,1,-1) = 2dx^2 + 2dy^2 - 2(-dx-dy)^2$

$= 2dx^2 + 2dy^2 - 2(dx^2 + dy^2 + 2dxdy)$

$= -4dxdy$.

$d^2L_{leg}(1,1,-1)$ ia atât val. pozitive cât și val. negative și deci $(1,1,-1)$ nu este pct de extrem condiționat

Obs: Puteți considera matricea asociată lui $d^2L_{leg}(1,1,-1)$ notata $H_{L_{leg}}(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = -4 < 0$. și deci $(1,1,-1)$ nu este pct de extrem cond.

$(1,-1,1), (-1,1,1)$ – nu sunt (exercițiu)

3) Să se arate că distanța de la pct $A(x_0,y_0,z_0)$ la planul P: $ax+by+cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$ este.

$$d\left((x_0,y_0,z_0),P\right)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

. $A(x_0,y_0,z_0)$

<u>Soluție</u> $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=d^2\left((x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\right)$$
$$=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

$$g(x,y,z)=ax+by+cz+d$$

Căutăm $(x,y,z)\in P$ (adică $ax+by+cz+d=0$) a.î.

$d\left((x,y,z),A\right)$ să fie minimă

(Trebuie să găsim minimul fct. f cu legătura $g(x,y,z)=0$)

f și g sunt de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \operatorname{rang}(a,b,c) = 1, \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

(pt că $a^2+b^2+c^2>0$)

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$$

$$= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \lambda(ax+by+cz+d)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2.$$

Soluția sist:

$$x_1 = x_0 - \frac{a}{a^2+b^2+c^2}(ax_0+by_0+cz_0+d)$$

$$y_1 = y_0 - \frac{b}{a^2+b^2+c^2}(ax_0+by_0+cz_0+d)$$

$$z_1 = z_0 - \frac{c}{a^2+b^2+c^2}(ax_0+by_0+cz_0+d)$$

$$f(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

$d^2L(x_1,y_1,z_1) = 2dx^2+2dy^2+2dz^2$ - pq definită.

Deci $d(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exerciții

1*) Dintr-o bară subțire de fier de lungime 20 m trebuie confecționat scheletul unui acvariu. Știind că dispunem de 16 m^2 de sticlă pentru fețele acvariului, determinați cum trebuie secționată bara de fier astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă.

2*) Să se afle dimensiunile unei cutii paralelipipedice de volum dat $V = a^3$ astfel încât aria acesteia fără capac să fie minimă.

3) Fie $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1;\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f\big|_K$.

4) Să se determine extremele globale ale funcției

$$f(x,y,z) = 2x^2+2y^2-xy+z^4-2z^2$$

pe mulțimea $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2z^2 \leq 8\}$

5) Să se determine extremele globale ale funcțiilor următoare pe mulțimile K indicate

a) $f(x,y) = x^2+y^2-4x-6y$; $K = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 6\}$

b) $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$; $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$