1) Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aratati că f nu este continuă în origine dar f are derivate partiale în acest punct.

Soluție $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} (0,0)$; $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Deci f nu este continuă

Obs: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$; $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Cum $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$ și $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

rezultă că f <u>nu</u> <u>are limită</u> în $(0,0)$.

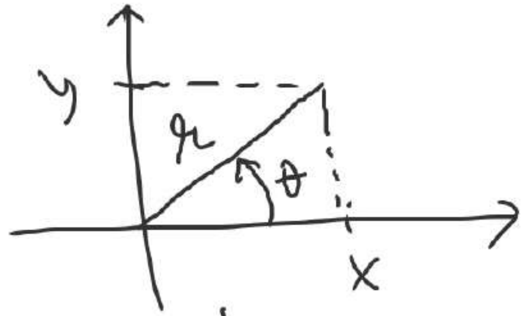
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

2) Studiati continuitatea functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Solutie: f continua pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$(x,y) \to (0,0) \iff x^2+y^2 \to 0$.

$(x_n, y_n) \to (0,0)$, $\quad x_n = r_n \cos\theta_n \quad r_n > 0$

$\quad y_n = r_n \sin\theta_n \quad \theta_n \in [0, 2\pi)$.

$(x_n, y_n) \to (0,0) \iff r_n \to 0$. $\quad r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Fie $y\in\mathbb{R}$, $\quad y\neq 0$. $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=0.$

$y=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0.$

Deci $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=0.$

La fel $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=0.$

} Limite iterate.

<u>Obs.</u> Existența și egalitatea limitelor iterate nu asigură existența limitei $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}}}{x_n^4+y_n^4} = \frac{e^{-\frac{1}{r_n^2}}}{r_n^4(\cos^4\theta_n+\sin^4\theta_n)} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos^4\theta_n + \sin^4\theta_n \leq \cos^2\theta_n + \sin^2\theta_n = 1.$$

$$\cos^4 t + \sin^4 t = (1-v)^2 + v^2 = 2v^2 - 2v + 1 = 2v^2 - 2v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$v = \sin^2 t$

$$= 2\left(v-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{r_n^2}}}{r_n^4} = \frac{\frac{1}{r_n^4}}{e^{\frac{1}{r_n^2}}} \; ; \quad \frac{1}{r_n} \longrightarrow \infty . \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} = 0 .$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{r_n^2}}}{r_n^4} = 0.$ (2)

$\frac{1}{2} \leq \cos^4\theta_n + \sin^4\theta_n \leq 1$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x_n^2+y_n^2}}}{x_n^4+y_n^4} = 0.$

Așadar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

și deci f este continuă în $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}, \quad f: A \to \mathbb{R}, \quad (0,0) \in A'$$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $\underset{\sqrt{x^2+y^2}}{\underset{\|}{\|(x,y)\|}} < \delta_\varepsilon$

avem $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

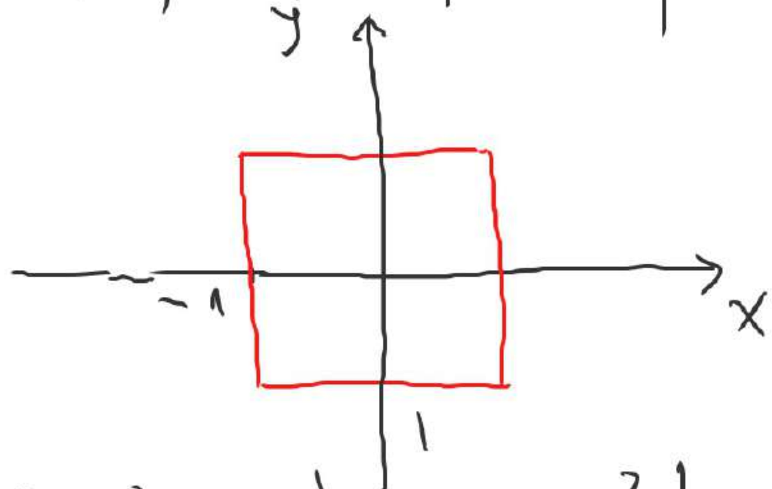
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $\underbrace{|x| < \eta_\varepsilon \text{ și } |y| < \eta_\varepsilon}_{\|(x,y)\|_\infty < \eta_\varepsilon}$

avem $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$.

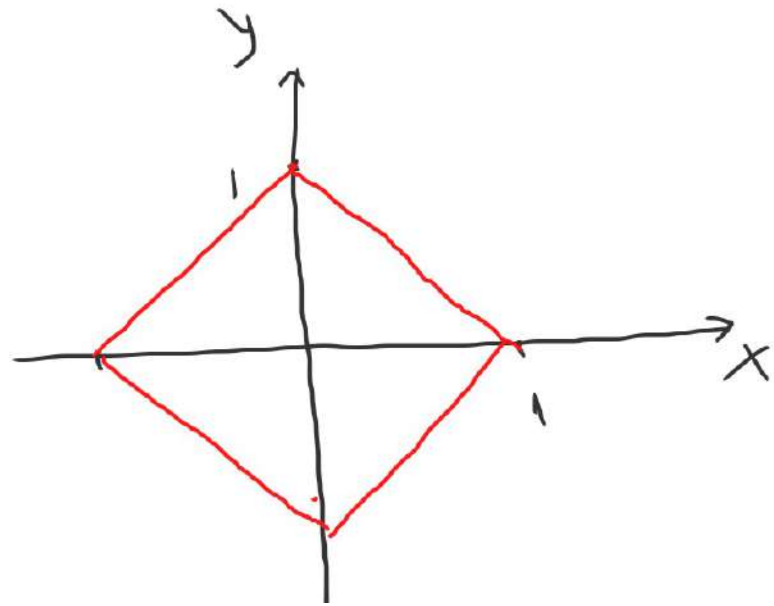
$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$, $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

$B^\infty((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty < 1\}$



$\|(x,y)\|_\infty < 1 \iff |x|<1$ și $|y|<1$



$B^1((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<1\}$

$x,y \geq 0.$ $x+y<1$

3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) f continuă

2) f are derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2$

3) derivatele parțiale nu sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

4) f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Soluție: f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1) $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| \leq |x^2+y^2|$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0. \Rightarrow f$ continuă și în $(0,0)$.

2) f are derivate partiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pt $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{(-2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y^2}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Consider. șirul $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},0\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0}-\frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}}{\frac{1}{2\pi n}}\cdot\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\pi n}{\sqrt{2\pi n}} = +\infty$$

Deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fel se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în origine.

4) Teoremă. Dacă $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale pe D și acestea sunt continue în $a \in D$ atunci f este diferențiabilă în a. (Nu putem aplica teorema)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Fie $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$$T(u,v)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=(0\quad 0)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0.$$

(Dacă f este diferențiabilă în $(0,0)$ atunci $df(0,0)=T$)

$(x,y)\neq(0,0)$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}\right|=\frac{\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Deci f este diferențiabilă în $(0,0)$ și $df(0,0) \equiv 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ deschisă} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ continue pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Așadar f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = x^2 + xy + e^{xy}, \quad v = (1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = ? \qquad df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + xe^{xy}$$

f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$ și deci este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$$df(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,dy$$

$$df(1,1)(u,w) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,w = (e+3)\cdot u + (e+1)\cdot w.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = df(1,1)(\underset{v}{\underbrace{1,2}}) = (e+3)\cdot 1 + (e+1)\cdot 2$$

Exerciții

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Pentru fiecare funcție studiați continuitatea, calculați derivatele parțiale și studiați diferențiabilitatea.