Examen[1] la Geometrie I, seria 10, 06.02.2023

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: ______

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. În planul $\mathbb{R}^2$, dreptele $d_1 : x = 5$ şi $d_2 = \{(-1, 3-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sunt paralele. **(0,5p)**

2. În planul $\mathbb{R}^2$, dacă $A = (2,1), B = (-4,0)$ şi $C = (0,3)$, atunci $\triangle ABC$ este ascuţitunghic. **(0,5p)**

3. Pentru orice puncte $A \neq B$ şi orice dreaptă d din plan, există $C \in d$ astfel încât $\triangle ABC$ este dreptunghic. **(0,5p)**

4. Dacă în spaţiul real $\mathbb{R}^3$ avem $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$ şi $d_\alpha = \{(2 + \alpha t, t-1, 2t+3) \mid t \in \mathbb{R}\}$, atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $d_\alpha \perp \pi$. **(0,5p)**

5. Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f \neq id_{\mathbb{R}^2}$, este o izometrie şi $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$, atunci f este o simetrie (centrală sau axială). **(0,5p)**

6. Pentru două conice Γ_1 şi Γ_2, există o izometrie a planului care duce Γ_1 în Γ_2 dacă şi numai dacă există două repere (ortonormale pozitiv orientate) $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$ astfel încât Γ_1 şi Γ_2 au aceeaşi ecuaţie în raport cu $\mathcal{R}_1$, respectiv $\mathcal{R}_2$. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie dreptele $d_1 : x + 3y - 2 = 0$ şi $d_2 : -2x + 6y + 16 = 0$.

a) Demonstraţi că d_1 şi d_2 se intersectează şi determinaţi punctul de intersecţie. **(0,25p)**

b) Demonstraţi că $\angle(d_1, d_2) < 45°$. **(0,5p)**

c) Daţi exemplu de izometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât $f(d_1) = d_2$. Scrieţi expresia lui f în coordonate. **(0,5p)**

d) Daţi exemplu de conică nedegenerată Γ tangentă simultan la d_1 şi d_2. **(0,25p)**

2. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie conica $\mathcal{H} : xy + 3x - 2y - 2 = 0$ şi dreapta $d : x - y - 9 = 0$.

a) Demonstraţi că $\mathcal{H}$ este o hiperbolă. **(0,25p)**

b) Determinaţi centrul şi axele de simetrie ale lui $\mathcal{H}$. **(0,75p)**

c) Demonstraţi că d este tangentă la $\mathcal{H}$ şi determinaţi punctul de tangenţă. **(0,5p)**

d) Determinaţi ecuaţia conicei $S_d(\mathcal{H})$, unde S_d este simetria axială faţă de d. **(0,5p)**

3. Fie triunghiurile nedegenerate $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ în planul euclidian $\mathbb{R}^2$.

a) Demonstraţi că $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (sunt asemenea) dacă şi numai dacă există $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, compunere dintr-o omotetie şi o izometrie, care duce $\triangle ABC$ în $\triangle A'B'C'$ *i.e.* $f(A) = A', f(B) = B'$ şi $f(C) = C'$. **(0,75p)**

b) Demonstraţi că, dacă ipotezele punctului precedent sunt satisfăcute, funcţia f cu proprietăţile cerute este unică. **(0,5p)**

c) Descrieţi poziţia relativă a triunghiurilor $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ pentru care f din ipoteză este o omotetie. **(0,25p)**

4. În planul euclidian $\mathbb{R}^2$, fie elipsa în formă canonică $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Pentru orice punct $P = (x_P, y_P) \neq (0,0)$, considerăm dreapta $d_P : \frac{x_P x}{a^2} + \frac{y_P y}{b^2} = 1$.

a) Demonstraţi că asocierea $P \mapsto d_P$ este o funcţie bijectivă între $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi mulţimea dreptelor care nu trec prin origine. **(0,2p)**

b) Demonstraţi că dacă $P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{E})$, atunci d_P este dreapta determinată de punctele de tangenţă ale tangentelor din P la $\mathcal{E}$. **(0,4p)**

c) Demonstraţi că dacă $P \in \mathrm{Int}(\mathcal{E})$, atunci d_P este o dreaptă exterioară elipsei, paralelă cu diametrul conjugat diametrului determinat de P. **(0,4p)**

[1] Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!