CRITERII PENTRU CALCULUL LIMITELOR !cu termeni pozitivi!

1. CRITERIUL RAPORTULUI

Fie o serie $\sum x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Atunci:

a) dacă $l < 1$ atunci $\sum x_n$ este convergentă

b) dacă $l > 1$ atunci $\sum x_n$ este divergentă

c) dacă $l = 1$ atunci nu știm natura seriei

dacă unul dă 1, de obicei, nici celălalt nu ne ajută

2. CRITERIUL RADICALULUI

Fie seria $\sum x_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$. Atunci:

a) dacă $l < 1$ atunci $\sum x_n$ este convergentă

b) dacă $l > 1$ atunci $\sum x_n$ este divergentă

c) dacă $l = 1$ atunci nu știm natura seriei

3. CRITERIUL RABE - DUHAMEL

Fie seria $\sum x_n$, $x_n > 0$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l$. Atunci:

a) Dacă $l < 1$ atunci $\sum x_n$ este divergentă

b) Dacă $l > 1$ atunci $\sum x_n$ este convergentă

c) Dacă $l = 1$ atunci nu știm natura seriei

4. CRITERIUL DE DIVERGENȚĂ

Fie seria $\sum x_n$, dacă $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$ atunci $\sum x_n$ este divergentă. !Reciproca nu este adevărată!

5. COMP. CU LIM/INEG/SERII

lim:

$\sum\limits_n x_n$, $\sum\limits_n y_n$ cu $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$

$l \in (0, +\infty) \Rightarrow$ au ac. ~~serie~~ natură

$l = 0$, $\sum\limits_n y_n$ e conv. $\Rightarrow$ și $\sum\limits_n x_n$

$l = +\infty$, $\sum\limits_n y_n$ e div. $\Rightarrow$ și $\sum\limits_n x_n$

SERII REMARCABILE

1. armonică

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

→ convergentă pentru $\alpha > 1$

→ divergentă pentru $\alpha \leq 1$

α constant

2. putere

$\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ → natural; ↳ bază constantă

→ absolut conv. pt. $a \in (-1, 1)$

→ div. pentru $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

3. expon.

$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ → absolut convergentă $\forall a \in \mathbb{R}$

ineg.

$\sum\limits_n x_n$ și $\sum\limits_n y_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$, $\Rightarrow$ dacă $\sum\limits_n y_n$ e conv. și $\sum\limits_n x_n$; $\sum\limits_n x_n$ e div. $\Rightarrow \sum\limits_n y_n$

6. CR. DE CONDENSARE A LUI CAUCHY

Dacă $(x_n)_n \subset [0,\infty)$ este <u>descresc.</u> atunci seriile $\sum x_n$ şi $\sum 2^n x_{2^n}$ au ac. convergenţă (fie sunt ambele conv, fie ambele div.)

CRITERII PT. SERII ≠ TERM. POZITIVI (OARECARE)

1. CRITERIUL ABEL-DIRICHLET

- Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ şi $y_n \subset \mathbb{R}$ a.î:

  a) $(x_n)_n$ este <u>descresc</u> şi $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

  b) $\exists M>0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $|y_0+y_1+\ldots+y_n| \le M$. Atunci:

  $\sum x_n \cdot y_n$ este convergent

- Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ şi $y_n \subset \mathbb{R}$ a.î:

  a) $(x_n)_n$ este monoton şi mărginit

  b) $\sum y_n$ este convergent. Atunci: $\sum x_n \cdot y_n$ este convergent

2. CRITERIUL LUI LEIBNIZ

Fie $(x_n)_n \subset [0,+\infty)$ a.î. $(x_n)_n$ este <u>descresc</u> şi $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Atunci:

$\sum (-1)^n \cdot x_n$ este convergent