Complement: Inelul de fracții al unui inel comutativ în raport cu un sistem multiplicativ închis.

Dacă A este un domeniu de integritate, s-a construit corpul de fracții K al lui A.

Ce putem face dacă A nu mai este integru?

Fie A inel comutativ.

Fie $S \subset A$ cu proprietățile $\begin{cases} \cdot\ 1 \in S,\ 0 \notin S \\ \cdot\ a, b \in S \Rightarrow ab \in S \end{cases}$

(un astfel de S s.n. sistem multiplicativ închis).

Pe mulțimea $A \times S$ considerăm relația $\sim$ definită astfel: dacă $a, b \in A$, $s, t \in S$, atunci

$$(a, s) \sim (b, t) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{există } z \in S \text{ cu } z(at - bs) = 0.$$

Se arată că $\sim$ este o relație de echivalență pe $A \times S$ (exercițiu!).

Mulțimea factor $\frac{A \times S}{\sim}$ se notează cu $S^{-1}A$, iar clasa de echivalență a lui (a, s) se notează $\frac{a}{s}$.

Așadar $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow \exists\, z \in S$ cu $z(at - bs) = 0$.

Pe $S^{-1}A$ se definesc două operații, $+$ și $\cdot$, astfel:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Exercițiu: Verificați că cele două operații sunt corect definite, adică dacă $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ și $\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$, atunci $\frac{at+bs}{st} = \frac{a't'+b's'}{s't'}$ și $\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}$.

În plus, $S^{-1}A$ este inel comutativ împreună cu $+$ și $\cdot$ definite mai sus (verificare: exercițiu!).
$S^{-1}A$ s.n. inelul de fracții al lui A relativ la S.

Aplicația $\varphi: A \to S^{-1}A$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ pt. orice $a \in A$, este un morfism de inele (exercițiu: verificați!) și evident, $\varphi(s) \in U(S^{-1}A)$ pt. orice $s \in S$, deoarece $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1}$ (iar $\frac{1}{1}$ este el. neutru la înmulțire în $S^{-1}A$).

Teoremă (Proprietatea de universalitate a inelului de fracții).

Fie A un inel comutativ, S un sistem multiplicativ închis în A și $\varphi : A \to S^{-1}A$ morfismul canonic construit mai sus. Atunci

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

pt. orice inel comutativ B și orice morfism de inele $f : A \to B$ cu proprietatea că $f(s) \in U(B)$ pt. orice $s \in S$, există un unic morfism de inele $\overline{f} : S^{-1}A \to B$ pt. care $\overline{f}\varphi = f$.

Demonstrație. Indicație: se definește $\overline{f} : S^{-1}A \to B$ prin

$$\overline{f}\left(\frac{a}{s}\right) = f(s)^{-1} f(a) \text{ pt. orice } \frac{a}{s} \in S^{-1}A.$$

Se arată că $\overline{f}$ e corect definită, este morfism de inele și $\overline{f}\varphi = f$.

Apoi, dacă $\tilde{f} : S^{-1}A \to B$ este un alt morfism de inele cu $\tilde{f}\varphi = f$, atunci $\tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \tilde{f}\left(\frac{s}{1}\right) = \tilde{f}\left(\frac{s}{s}\right) = \tilde{f}\left(\frac{1}{1}\right) = 1_B$, deci $\tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) \in U(B)$ și $\tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\tilde{f}\left(\frac{s}{1}\right)\right)^{-1} = \left((\tilde{f}\varphi)(s)\right)^{-1} = (f(s))^{-1}$.

Atunci $\tilde{f}\left(\frac{a}{s}\right) = \tilde{f}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1}\right) = \tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) \tilde{f}\left(\frac{a}{1}\right) =$

$= (f(s))^{-1} \cdot f(a) = \overline{f}\left(\frac{a}{s}\right)$, deci $\tilde{f} = \overline{f}$.

Cazuri particulare.

(1) Dacă A este domeniu de integritate și $S = A\setminus\{0\}$, care este sistem multiplicativ închis, atunci $S^{-1}A$ este chiar corpul de fracții al lui A, pe care-l notăm cu $K(A)$.

(2) Dacă A este domeniu de integritate și S este un sistem multiplicativ închis în A, atunci $S^{-1}A$ se scufundă în $K(A)$ (adică este izomorf cu un subinel al lui $K(A)$).

(3) Dacă $A = \mathbb{Z}$, atunci $K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. Din (2) știm că pt. orice sist. mult. închis S al lui $\mathbb{Z}$, inelul $S^{-1}\mathbb{Z}$ e izo cu un subinel al lui $\mathbb{Q}$.

<u>Exercițiu</u>. Arătați că orice subinel al lui $\mathbb{Q}$ e izomorf cu un inel de forma $S^{-1}\mathbb{Z}$, cu S sist. mult. închis în $\mathbb{Z}$.

(4) Dacă A inel comutativ și S sist. multiplicativ închis cu $S \subset U(A)$, [de exemplu $S=\{1\}$ sau $S=U(A)$], atunci $S^{-1}A \simeq A$ (exercițiu!).

(5) Fie A inel comutativ și P un ideal prim al lui A (adică $P \neq A$ și pt. orice $a, b \in A$ cu $ab \in P$, avem $a \in P$ sau $b \in P$). Fie $S = A\setminus P$. Atunci S este sist. mult. închis în A, iar $S^{-1}A$ este inel local, (numit localizatul lui A în P și notat cu A_P)