Cursul 1

- Nota = 70% Examen + 30% Activitate + Bonus
  - Activitate: Prezențe, răspunsuri și teme la seminar și la laborator;
  - Bonus: Răspunsuri date la curs și probleme suplimentare rezolvate;
- Promovare: Nota rotunjită ≥ 5
- Punctajul pentru activitate și bonusul se păstrează și în sesiunile de restanță

- Scopul cursului: Rezolvarea problemelor de matematică ce apar în inginerie și industria IT folosind puterea computațională a calculatorului.

Q_1: Cum reprezintă calculatorul numerele?

- Reprezentarea „desfășurată" a numerelor foarte mari sau foarte mici:
  - Numărul lui Avogadro

    602.200.000.000.000.000.000.000

  - Puterile lui 10 pot fi scrise astfel

    $1000 = 10^3$, $1000000 = 10^6$

    $1\underbrace{000\ldots00}_{100} = 10^{100}$ (Gogol)

  - Numărul lui Avogadro scris compact

    $6 \cdot 10^{23} = 6\underbrace{00\ldots0}_{23}$

    $6{,}022 \cdot 10^{23} = 602200\ldots0$ (Nr. Avogadro)

  - O eroare de 2 microni în dimensiunea telescopului Hubble a costat NASA $1.5 \cdot 10^9$ \$

    2 microni $= 0.000002\ m = 2 \cdot 10^{-6}\ m$

- **Definiție** (Formatul științific)

Orice $x \in \mathbb{R}^*$ se poate reprezenta în mod unic în baza de numerație $b \in \mathbb{N}$ în următorul <u>format științific</u>:

$$x = \sigma \cdot \overline{x} \cdot b^{e}, \text{ unde}$$

i) $\sigma \in \{\pm 1\}$ se numește <u>semnul</u> lui x.

ii) $\overline{x} \in [1, b)$ se numește <u>mantisa</u> lui x.

iii) $e \in \mathbb{Z}$ se numește <u>exponentul</u> lui x.

- **Exemplul 1**: Formatul științific în baza 10

i) $7345 = \underbrace{(+1)}_{\sigma} \cdot \underbrace{7.345}_{\overline{x}} \cdot \underbrace{10}_{b}^{\underset{e}{3}}$

ii) $-\frac{1}{4} = -0.25 = (-1) \cdot 2.5 \cdot 10^{-1}$

iii) $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = (+1) \cdot 3.33\ldots \cdot 10^{-1}$

- Exemplul 2: Formatul științific în baza 2

i) $13_{(10)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1101_{(2)}$

$= (+1) \cdot 1.101 \cdot 2^3$

ii) $\frac{1}{3} = 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + \dots$

$= 0.010101\dots = (+1) \cdot 1.0101\dots \cdot 2^{-2}$

- Observație: Nu orice număr real poate fi reprezentat în format științific folosind o mantisă cu un număr finit de cifre!
- Consecință: Reprezentarea unui număr real în memoria unui calculator (ce conține un număr finit de biți) poate produce <u>erori</u>!

Q_2: Cum cuantificăm erorile produse de reprezentarea numerelor în memoria calculatorului?

- Definiție (Erori absolute și relative)

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ o aproximare a sa.

i) $e_a(\tilde{x}) := |x - \tilde{x}|$ se numește eroarea absolută a aproximării $\tilde{x}$.

ii) $e_r(\tilde{x}) := \dfrac{e_a(\tilde{x})}{|x|}$ se numește eroarea relativă a aproximării $\tilde{x}$, pentru $x \neq 0$.

- Definiție (Reprezentarea în virgulă mobilă)

Fie $x = \pm\, 1.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \dots \cdot 2^e$,

unde $a_i \in \{0, 1\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ și $t \in \mathbb{N}$.

Reprezentarea lui x în virgulă mobilă (floating point) cu t cifre semnificative se obține prin considerarea a t cifre în mantisă astfel:

a) Prin trunchiere

$$fl(x) := \pm\, 1.a_1 a_2 \dots a_t \cdot 2^{e}$$

b) Prin rotunjire, trunchiind numărul

$$x + 2^{-(t+1)} = \pm\, 1.\delta_1 \delta_2 \dots \delta_t \delta_{t+1} \dots \cdot 2^{\tilde{e}}$$

$$fl(x) := \pm\, 1.\delta_1 \delta_2 \dots \delta_t \cdot 2^{\tilde{e}}$$

- Analogie cu trunchierea/rotunjirea notei

a) Trunchiere: $[4.1] = [4.5] = [4.9] = 4$

b) Rotunjire: Trunchiem nota $+\, 2^{-1}$

$$[4.1 + 0.5] = 4$$

$$[4.5 + 0.5] = [4.9 + 0.5] = 5$$

- Exemplu: Reprezentarea în virgulă mobilă pe 8 biți

$$\underbrace{\boxed{b_1}}_{\text{semn}}\underbrace{\boxed{b_2}\boxed{b_3}\boxed{b_4}}_{\text{exponent}}\underbrace{\boxed{b_5}\boxed{b_6}\boxed{b_7}\boxed{b_8}}_{\text{mantisă}} \quad : b_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = \overline{1,8}$$

i) Bitul semn: $b_1 = 0 \iff \sigma = +1$

$b_1 = 1 \iff \sigma = -1$

ii) Biții exponentului

- 3 biți: Numere de la 0 la 7
- Cum vrem și numere subunitare, scădem din exponent 3.
- Exponentul 000 e rezervat numerelor foarte mici (denormalizate) și lui 0 (reprezentat 00000000)
- Exponentul 111 e rezervat numerelor prea mari / mici pentru a fi reprezentate (considerate $\pm\infty$ de către calculator) și a rezultatelor operațiilor nedeterminate de tipul împărțirii la 0.
- Prin urmare, range-ul exponentului va fi de la -2 la 3

iii) Biții mantisei: Definesc partea fracționară a numărului în format științific în baza 2

$$fl(x) = (-1)^{b_1} \cdot 1.b_5 b_6 b_7 b_8 \cdot 2^{b_2 b_3 b_4 - 011}$$

• Numere speciale:

i) Cel mai mare număr:

$$0\ 110\ 1111 = +1.1111 \cdot 2^{110-011}$$
$$= 1.1111 \cdot 2^{011}$$
$$= 8 + 4 + 2 + 1 + 0.5 = 15.5$$

Orice număr mai mare ca acesta va fi reprezentat 0 111 0000 (Overflow)

ii) Cel mai mic număr pozitiv:

$$0\ 000\ 0001 = +0.0001 \cdot 2^{-10} = 2^{-6}$$

Orice număr mai mic ca acesta va fi reprezentat 0 000 0000 (Underflow)