1) Fie $X$ spatiu vectorial peste $\mathbb{R}$ si $\|\cdot\|_1$ si $\|\cdot\|_2$ două norme echivalente pe $X$. Arătati că ele generează aceeasi topologie.

Rezolvare: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

$\exists\, \alpha, \beta > 0$ ai. $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$.

Fie $\tau_i$ topologia generata de $\tau_i$, $i = 1,2$.

$a \in X$, $r > 0$.

$B^i(a, r) = \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$

$D \in \tau_i$ dacă $\forall a \in D$, există $r_a > 0$ ai $B(a, r_a) \subset D$.

$\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$

(1) $B^1\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subset B^2(a, r)$ pt. că:

$x \in B^1\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \Longleftrightarrow \|x-a\|_1 < \frac{r}{\beta} \Longrightarrow \|x-a\|_2 \le \beta \|x-a\|_1 < \beta \cdot \frac{r}{\beta} = r$

$D \in \tau_2 \Longleftrightarrow \forall a \in D, \exists r_a > 0$ ai $B^2(a, r_a) \subset D$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \forall a \in D, \exists r_a > 0$ ai. $B^1\left(a, \frac{r_a}{\beta}\right) \subset D \Longleftrightarrow D \in \tau_1.$

Asemanator aratam că. daca $D \in \tau_1$ atunci $D \in \tau_2$

In concluzie $\tau_1 = \tau_2.$

2) Orice două norme pe $\mathbb{R}^n$ sunt echivalente.

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Fie $\|\cdot\|'$ o altă normă pe $\mathbb{R}^n$. Arătăm că $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$.

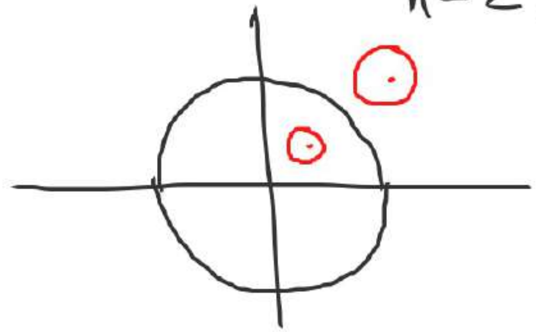
$$\|x\|' = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|' \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\|'$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}_{\|x\|} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\|e_i\|'\right)^2}}_{\alpha} \quad \text{Deci } \|x\|' \leq \alpha \|x\|.$$

Aplicația $x \longmapsto \|x\|'$ definită pe $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ cu valori în $\mathbb{R}$ este continuă.

Fie $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\big|\|x\|'-\|y\|'\big| \le \|x-y\|' \le \alpha\|x-y\|$.

$n=2$.



Fie $(x_n)_{n\ge 1}\subset\mathbb{R}^n$, $\|x_n-x\|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

$\Rightarrow \big|\|x_n\|'-\|x\|'\big| \le \|x_n-x\| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \|x_n\|' \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$ Deci $x\longmapsto\|x\|'$ este continuă.

$S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ este compactă fiind închisă și mărginită.

($f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x_1^2+\dots+x_n^2$, $f$ continuă.
$\{1\}$ este închisă $\Rightarrow f^{-1}(1)=S$ închisă).

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ compactă} \\ x \longmapsto \|x\|' \text{ continuă} \end{array}\right\} \Longrightarrow \inf_{x\in S} f \text{ este atins pe } S,$$

deci $\exists\, x_0 \in S$ a.î. $\|x\|' \geq \|x_0\|' > 0$ $\forall x \in S$

$\left( \|x_0\|' > 0 \text{ pt că } x_0 \in S \text{ și deci } x_0 \neq 0 \right)$

Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. $\quad \dfrac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow \left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\|' \geq \|x_0\|'$

$$\Longrightarrow \frac{\|x\|'}{\|x\|} \geq \|x_0\|' \Longrightarrow \|x\|' \geq \underbrace{\|x_0\|'}_{\beta} \cdot \|x\|$$

$\beta\|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Deci $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$.

$X$ sp topologic.

$K \subset X$ compactă dacă:

$\forall (D_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi deschise a.î.

$K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ există $J \subset I$ finită a.î. $K \subset \bigcup_{i \in J} D_i$.

<u>Exercițiu</u>. Arătați că $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ este închisă.

3) Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ și $a \in A$. UASE

1) $f$ continuă în $a$

2) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ a.i. $f(U \cap A) \subset V$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$, $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

4) $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subset A$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ și $a \in A$. UASE

(1) $f$ continuă în $a$

(2) $f_1, f_2, \dots, f_n$ continue în $a$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ a.i. $x_n \to a$.

$f$ cont $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

adică $\lim\limits_{n\to\infty} \left( f_1(x_n), f_2(x_n), \ldots, f_m(x_n) \right) = \left( f_1(a), \ldots, f_m(a) \right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(a)$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, m$. adică

$f_i$ sunt continue în $a$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$f_i$ continue $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (xy, e^{x+y})$

Arătați că $f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$

Soluție. Fie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Fie $(x_n, y_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2$

cu $\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a,b)$.

$$f(x_n, y_n) = (x_n y_n, e^{x_n + y_n}) \longrightarrow (ab, e^{a+b}) = f(a,b).$$

Deci $f$ continuă în $(a,b)$.

5) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Arătați că

1) $f$ continuă

2) $f$ are derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2$

3) $f$ are derivată după orice vector $v\neq 0$ în $(0,0)$

4) $f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$ și este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

<u>Soluție</u>: funcția $f$ este cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}$$

$x^2+y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \frac{|xy|\cdot|x|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|$ adică $\frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|$.

$|f(x,y)-f(0,0)| \leq \frac{1}{2}|x|$. Deci

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| = 0$. Deci $f$ cont pe $\mathbb{R}^2$.

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f$ are derivate parțiale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x\cdot x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - 2y\cdot x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

3) $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_1,v_2))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1^2 \cdot t v_2}{t^2(v_1^2+v_2^2)\cdot t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Asadar f are derivată după orice vector $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

4) Fie $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$T(u,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot v = 0.$$

(Dacă $f$ este diferențiabilă în $(0,0)$, diferențiala ei în $(0,0)$ ar trebui să fie $T$.) Verificăm dacă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$ există și este 0.

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = H(x,y).$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0), \quad H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-T\big((x,y)-(0,0)\big)}{\|(x,y)-(0,0)\|} \neq 0.$

În concluzie $f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

Cum $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este deschisă și derivatele parțiale sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ rezultă că $f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

## Exerciții

1*) Fie $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mulțimi închise și

$C = A + B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Arătați că

1) Mulțimea $C$ nu este în mod necesar închisă
2) Dacă $A$ închisă și $B$ compactă, atunci $C$ este închisă
3) Dacă $A$ și $B$ sunt compacte atunci $C$ este compactă.

2*) Fie $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ și $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Arătați că există $(x,y) \in S$ a.î. $f(x,y) = f(-x,-y)$.

3) Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$