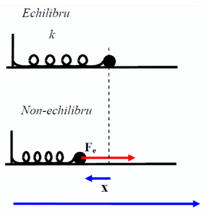


Damped harmonic oscillator

https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator

Oscilații amortizate

Risipirea de energie duce la amortizarea oscilațiilor unui oscilator liniar.

Considerăm cazul oscilațiilor liniare în care forța de rezistență este proporțională cu viteza. Aceasta se întâmplă în cazul mișcării într-un mediu vâscos, în regim laminar de curgere. laminar flow-low Reynolds number

Legea a 2-a a mecanicii se scrie:

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{R} & (1a) \\ \vec{F}_e = -k\vec{x} \rightarrow \text{forța elastică} & (1b) \\ \vec{R} = -r\dot{\vec{x}} \rightarrow \text{forța de rezistență} & (1c) \end{cases}$$

k >0 elastic constant

$k>0 \rightarrow$ constanta elastică a resortului

$r>0 \rightarrow$ coeficient de rezistență r >0 resistance coefficient

$\vec{x} \rightarrow$ vector deformare

$\dot{\vec{x}} \rightarrow$ vector viteză

$\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator

Mișcarea descrisă de ec.(1) este unidimensională. Proiecția pe axa de mișcare se scrie:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad | : m \\ \ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2b}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0 \end{cases}$$

b -> damping coefficient

; $b \to$ coeficient de amortizare

$\to \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$

Rezolvăm ec. (2) căutând soluții de forma $x = Ce^{qt} \Rightarrow$

$q^2 + 2bq + \omega^2 = 0 \to$ ecuația caracteristică

characteristic equation

$q_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$

Soluția generală este combinația liniară:

General solution: $x(t) = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t} \quad (3)$

C_1 și C_2 se găsesc din condițiile inițiale: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$ initial conditions

Cazul 1: $b < \omega \to$ oscilații amortizate pseudo-periodice

underdamped oscillations

$$\sqrt{b^2 - \omega^2} = \sqrt{i^2 \underbrace{(\omega^2 - b^2)}_{\omega'^2}} = \pm i\omega' \quad (4)$$

Ec. (3) se scrie:

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right) \quad (5)$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_1 = C_2^* = \frac{A_0}{2} e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-bt}\left[e^{i(\omega' t+\alpha)} + e^{-i(\omega' t+\alpha)}\right]$$

$$= A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) \quad (6)$$

A_0 și α se obțin din condițiile inițiale: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$

$T' = \frac{2\pi}{\omega'} \rightarrow$ perioada oscilațiilor

$$(7) \quad \frac{x(t)}{x(t+T')} = \frac{A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha)}{A_0 e^{-b(t+T)} \cos[\omega'(t+T') + \alpha]} = e^{bT'}$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+T')} \stackrel{\Delta}{=} D = bT' \rightarrow \text{decrement logaritmic}$$

D=logarithmic decrement

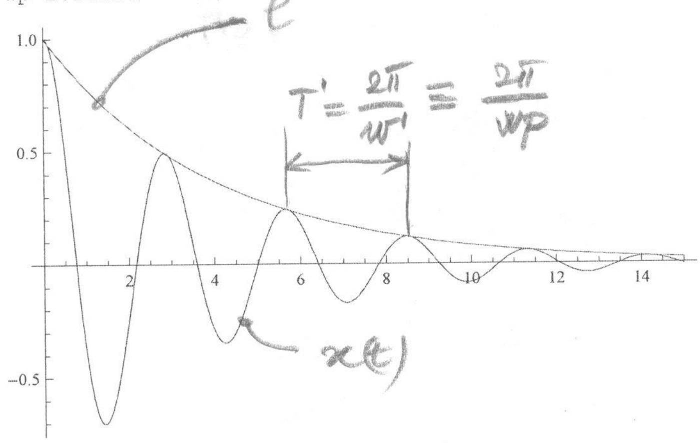
$$(8) \quad bT' = \frac{2\pi b}{\omega'} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

$$(9) \quad A(t) = A_0 e^{-bt}$$

```
Clear[b, wp, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b*t]*(c1*Exp[ⅈ*wp*t] + c2*Exp[-ⅈ*wp*t]);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0]==xo&&V[0]==vo,{c1,c2}]*)
c1 = -(ⅈ vo + ⅈ b xo - wp xo)/(2 wp); c2 = (ⅈ vo)/(2 wp) + xo/2 + (ⅈ b xo)/(2 wp); (**)
b = r/(2*m);
wp = √(k/m - b^2);
xo = 1; vo = 0; m = 1; r = .5; k = 5;
Print["wp=", wp];
Plot[{x[t], Exp[-b*t]}, {t, 0, 15}, PlotRange → All]
Clear[b, wp, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```

wp=2.22205



τ is the relaxation time

τ = timp de relaxare → timpul după care A(t) scade de "e" ori:

$$e = \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{b\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{b} \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{1}{bT'} = \frac{\tau}{T'} = N$$ → nr. de oscilații care se efectuează în timpul de relaxare

The *half-life* $T_{1/2}$ is the time it takes for the amplitude of the motion to decay to one half of some initial value.

$T_{1/2}$ = timp de înjumătățire → timpul după care $A(t)$ scade la jumătate:

$$\frac{A(t)}{A(t+T_{1/2})} = e^{bT_{1/2}} = 2 \Rightarrow$$

$$(11) \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} \simeq \frac{0.693}{b}$$

This leads to a practical method of measuring the damping coefficient *b* for a damped oscillator.

(2) <u>Mișcarea amortizată aperiodică:</u>

overdamped oscillations

$b > \omega$

Soluția cu ec. (2) este:

$$(12) \quad x(t) = e^{-bt}\left[C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right]$$

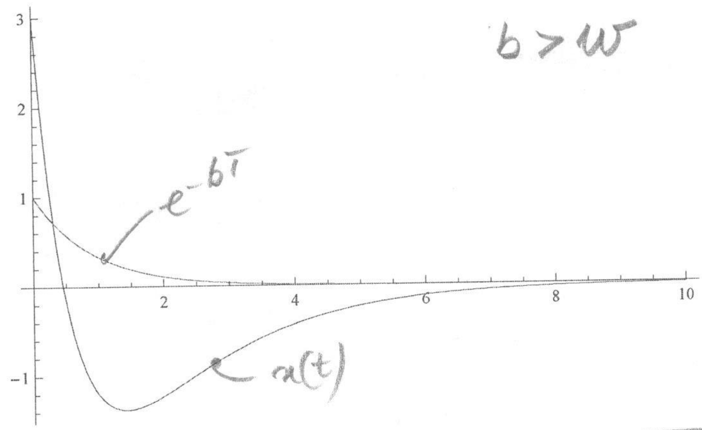
(5)

```
Clear[b, ws, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b * t] * (c1 * Exp[ws * t] + c2 * Exp[-ws * t]);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0]==xo&&V[0]==vo,{c1,c2}]*)
c1 = -(-vo - b xo - ws xo)/(2 ws); c2 = -vo/(2 ws) + xo/2 - (b xo)/(2 ws); (**)
b = r / (2 * m);
ws = Sqrt[-k / m + b^2];
(*xo = 3; vo = 10; m = 1; r = 2.2; k = 1;*)
xo = 3; vo = -10; m = 1; r = 2.2; k = 1;
Print["ws=", ws];
Plot[{x[t], Exp[-b * t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Clear[b, ws, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```

ws=0.458258

$b > w$



---

(3) **Mişcarea aperiodică critică:**

Critically damped oscillations

$w = b$

Soluţia ec. (2) este:

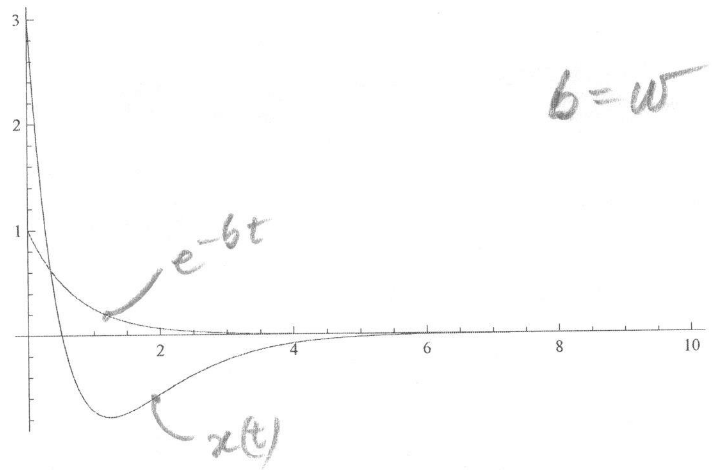
$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

7

```
Clear[xo, vo, c1, c2, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b * t] * (c1 + c2 * t);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0] ==xo&&V[0] ==vo,{c1,c2}]*)
c1 = xo; c2 = vo + b xo; (**)
b = r / (2 * m);
(* xo = 3; vo = 10; m = 0.8; r = 2.2; k = 1; *)
xo = 3; vo = -10; m = 0.8; r = 2.2; k = 1;

Plot[{x[t], Exp[-b * t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Clear[xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```



References:
https://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/Notes/vibrations_free_damped/vibrations_free_damped.htm
https://www.slideshare.net/chinkitkit/topic-2-damped-oscillation