Compunerea oscilatiilor paralele - Fenomenul de bătăi

https://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

Considerăm că un punct oscilează sub acţiunea simultană a două oscilaţii armonice paralele

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right), \\ x_2(t) &= A_2 \cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right), \text{cu } \alpha_1,\, \alpha_2 \in [0,\, \pi/2] \end{aligned}, \qquad (1)$$

$\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ frecventa unghiulara, ν frecventa, α faza initiala.

Aplicând principiul superpoziţiei, putem scrie că oscilaţia rezultantă este suma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \qquad (2)$$

Amplitudinea rezultantă se poate obţine prin *adunare fazorială* (vezi Fig. 1). Oscilaţia rezultantă, $x(t)$, este dată de proiecţia vectorului $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ pe axa x (conform ec. (1)); s-a notat $A_1 = |\mathbf{A}_1|,\ A_2 = |\mathbf{A}_2|$.

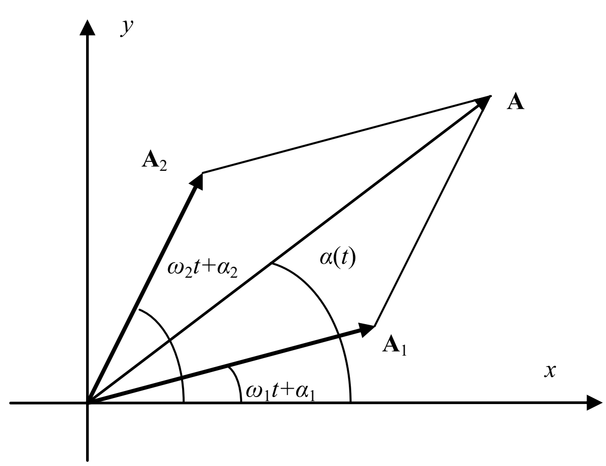


Fig. 1 Compunere fazorială a două oscilaţii paralele.

Amplitudinea fazorului rezultant se poate obtine prin calculul produsului scalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\alpha$, unde $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ si α este unghiul dintre vectorii $\mathbf{a}$ si $\mathbf{b}$. Astfel

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 &= \left(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\right) \cdot \left(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\right) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 \\ &= A_1^2 + A_1^2 + 2 A_1 A_1 \cos\alpha \end{aligned}.$$

In consecinta, fazorul rezultant are amplitudinea

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t + \alpha_1 - \alpha_2]}, \qquad (3)$$

lent variabilă în timp dacă $\omega_1 \approx \omega_2$. $A(t)$ variază între valorile minimă şi maximă

$$|A_1 - A_2| \le A(t) \le A_1 + A_2. \qquad (4)$$

Se observă că

$$A(t) = A(t + T_b), \tag{5}$$

unde

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega'_b} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \text{ cu } \omega'_b = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}. \tag{6}$$

Fenomenul de variaţie a amplitudinii oscilaţiei rezultante este cunoscut sub numele de *bătăi*. Intervalul de timp dintre două momente la care amplitudinea este aceeasi (de exemplu, minimă) defineşte *perioada bătăii*, T_b. *Faza* oscilaţiei rezultante se poate obţine geometric din Fig. 1, observând că, de exemplu,

$$\alpha(t) = \arccos\frac{A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)}{A(t)} \tag{7a}$$

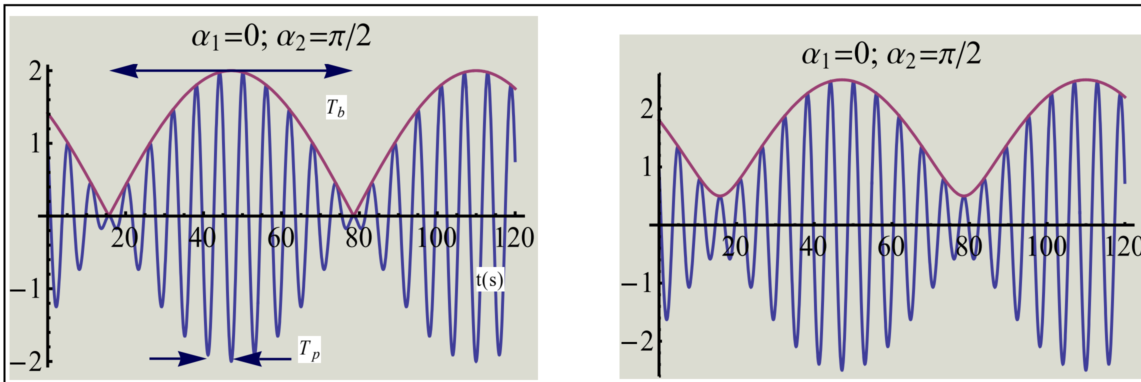
sau

$$\alpha(t) = \arctan\frac{A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)} \tag{7b}$$

Astfel, oscilaţia rezultantă se scrie

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A(t)\cos[\alpha(t)]}. \tag{8}$$

Simularea bătăilor este reprezentată in Fig. 2, unde sunt reprezentate grafic $x(t)$ şi $A(t)$ pentru cazul $\omega_2 \approx \omega_1$.



a) b)

Fig. 2 Compunerea oscilaţiilor paralele. $x(t)$ - albastru şi $A(t)$ - violet pentru $\omega_1 = 1s^{-1}$, $\omega_2 = 1.1s^{-1}$ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ şi: a) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$; b) $A_1 = 1$, $A_2 = 1.5$. Semnalul modulator (violet) se obtine cu ec. (3) iar intregul semnal (albastru) cu ec. (8). Pentru cazul a), graficul se poate obtine deasemeni cu ec. (9) sau cu ec. (11) si (12) utilizand $x(t) = A(t)\cos[\alpha(t)]$.

Discuţie

Caz a) $A_1 = A_2 = A$ <=> oscilaţii armonice paralele cu *amplitudini egale*. Aplicând principiul superpoziţiei putem scrie că oscilaţia rezultantă este suma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + \cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right)\right]$$
$$= \underbrace{2A\cos\left[\frac{\left(\omega_1+\omega_2\right)t}{2} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]}_{\text{purtator}}\underbrace{\cos\left[\frac{\left(\omega_1-\omega_2\right)t}{2} + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]}_{\text{modulator}}, \qquad (9)$$
$$= 2A\cos\left[\omega'_b\, t + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\omega_p t + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]$$

unde,

$$\omega'_b = \left(\omega_1 - \omega_2\right)/2\,;\ \omega_p = \left(\omega_1 + \omega_2\right)/2 \qquad (10)$$

si s-a presupus ca $\omega_1 > \omega_2$. Ecuaţia (9) arată că oscilaţia rezultantă este o oscilaţie 'purtătoare' de frecvenţă ω_p 'modulată' de un semnal cu frecvenţă unghiulară (mică) ω'_b.

Observaţie a)

Cu ec. (3) putem regăsi rezultatul din ec. (9) observând că ec. (7a) genereaza

$$\cos\alpha(t) = \frac{A\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + A\cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right)}{A(t)} \qquad (11)$$

iar ec. (8) si (11) genereaza ec. (9):

$$x(t) = A(t)\cos[\alpha(t)]$$
$$= A(t)\frac{A\cos\left(\omega_1 t + \alpha_1\right) + A\cos\left(\omega_2 t + \alpha_2\right)}{A(t)}, \qquad (12)$$
$$= 2A\cos\left[\frac{\left(\omega_1-\omega_2\right)t}{2} + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(\omega_1+\omega_2\right)t}{2} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]$$

Conform ec. (10) (vezi şi Fig. 2), perioada oscilaţiei purtătoare este

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}\ . \qquad (13)$$

Numărul de oscilaţii efectuate în perioada bătăilor este

$$N = \frac{T_b}{T_p} \Rightarrow N = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2\left|\nu_1 - \nu_2\right|}, \qquad (14)$$

unde $\nu = \omega/(2\pi)$ este frecvenţa.

Caz b) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ <=> oscilaţii armonice paralele cu *frecvenţe unghiulare egale.* In acest caz amplitudinea oscilatiei este constanta, egala cu (vezi ec. (3))

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)} \qquad (15)$$

si paralelogramul din Fig. 1 se roteste cu viteza unghiulara constanta ω. Faza initiala α este exprimata (vezi ec. (7a)) prin

$$\cos\alpha = \frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A} \tag{16}$$

sau similar (cu ec. (7b))

$$\tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \, . \tag{17}$$

Observaţie b)
Se poate arata ca utilizand ec. (7a) adaptată acestui caz,

$$\cos[\alpha(t)] = \frac{A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2)}{A} \tag{18}$$

se obţine

$$\cos[\alpha(t)] = \cos\left(\omega t + \arctan\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}\right) \quad , \tag{19}$$

ceea ce conduce la concluzia că unghiul vectorului **A** cu axa *x* creste in timp dupa legea

$$\alpha(t) = \omega t + \arctan\left[\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}\right]. \tag{20}$$

Ecuatia (19) se poate obtine astfel. Cu ec. (18) rezulta

$$\begin{aligned}\cos[\alpha(t)] &= \frac{A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2)}{A} \\ &= \cos\omega t\,\frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A} - \sin\omega t\,\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A} \\ &= \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha = \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

daca $\cos\alpha = \frac{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}{A}$ si $\sin\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A}$, ceea ce este echivalent cu $\alpha = \arctan\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$.

Superposition of perpendicular harmonic oscillations – Lissajous figures

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=kv_lissajousovy_obrazce&l=en

O figură Lissajous este traiectoria unui punct ale cărui coordonate rectangulare (x, y) sunt oscilaţii armonice, sau analog, rezultanta a două oscilaţii armonice în direcţii perpendiculare:

$$x = a\cos(\omega_x t + \alpha) = a\cos(m\omega t + \alpha)$$
$$y = b\cos(\omega_y t + \beta) = b\cos(n\omega t + \beta) \quad (1)$$

unde ω, a, b, m, n sunt, în general numere reale pozitive.

Versiunea opto-mecanică a unui experiment de compunere a două oscilaţii armonice perpendiculare este descrisă în Fig. 1. O rază de lumină este trimisă pe o mică oglindă ataşată unui braţ al unui diapazon şi reflectată pe oglinda mică ataşată unui alt diapazon. În continuare raza de lumină este trimisă pe o lentilă optică care focalizează raza pe un ecran. Braţele celor două diapazoane sunt aşezate în plane perpendiculare. Când frecvenţele celor două diapazoane sunt rapoarte de numere prime, pe ecran apar curbe caracteristice, numite figuri Lissajous.

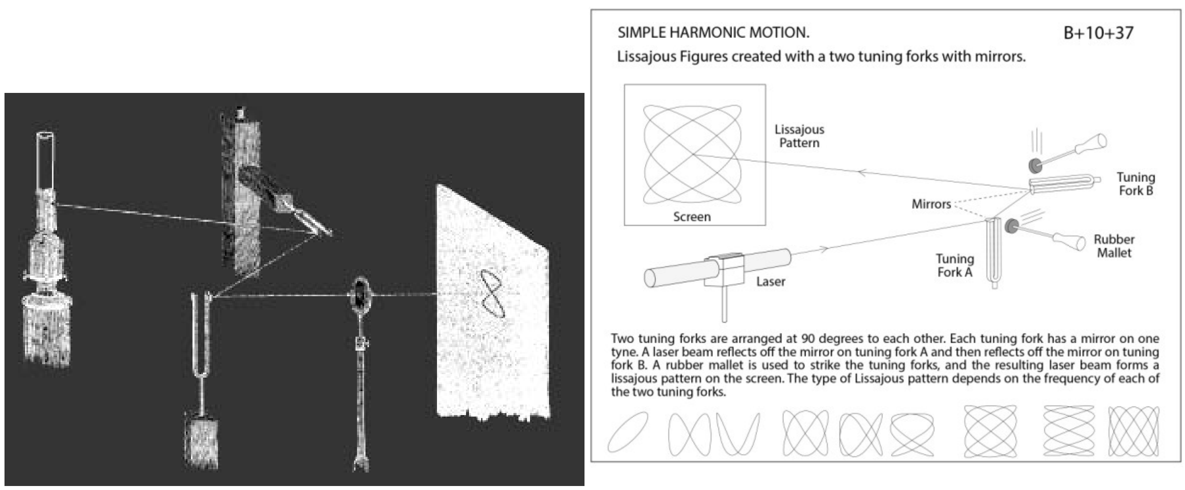


Fig. 1a Figuri Lissajous - versiune opto-mecanică
http://berkeleyphysicsdemos.net/sites/default/files/B%2B10%2B37.jpg

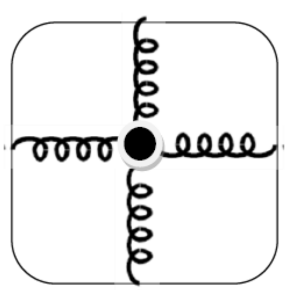


Fig. 1b Analog mecanic pentru obtinerea figurilor Lissajous

Se poate arăta că: dacă $\omega_x / \omega_y = m / n$ şi m şi n sunt numere prime, traiectoriile obţinute sunt închise şi deschise (punctul acoperă o arie) în caz contrar.

A. De exemplu, pentru oscilaţii cu *aceeaşi frecvenţă*,

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) = a\left[\cos(\omega t)\cos(\alpha) - \sin(\omega t)\sin(\alpha)\right]$$
$$y = b\cos(\omega t + \beta) = b\left[\cos(\omega t)\cos(\beta) - \sin(\omega t)\sin(\beta)\right] \quad (2)$$

pentru a elimina parametrul timp t se calculează $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ din sistemul (2) şi se utilizează $\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2 = 1$. Se obţine ecuaţia generală a unei elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) . \quad (3)$$

Se poate proceda si calculand radacinile ec. (2), astfel.

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) => \omega t = \pm\arccos(x / a) - \alpha + 2k\pi$$
$$y = b\cos(\omega t + \beta) => \omega t = \pm\arccos(y / b) - \beta + 2n\pi \quad (4)$$

unde k si n sunt numere intregi; prin scadere, se obtine

$$\pm\left[\arccos(x / a) - \arccos(y / b)\right] = \alpha - \beta + 2(n - k)\pi . \quad (5)$$

Se aplica cosinus ec. (5) si se obtine din nou ec. (3).

Q2. Efectuati calculele cu ec. (2) si (4) pentru a obtine ec. (3).

In functie de defazajul $\alpha - \beta$ traiectoria rezultată este (vezi Fig. 2):

$\alpha - \beta = 0, \pi$ => dreapta $y = \frac{b}{a}x$, respectiv $y = -\frac{b}{a}x$;

$\alpha - \beta = \pi/2, 3\pi/2$ => in general elipsă şi cerc dacă $a = b$.

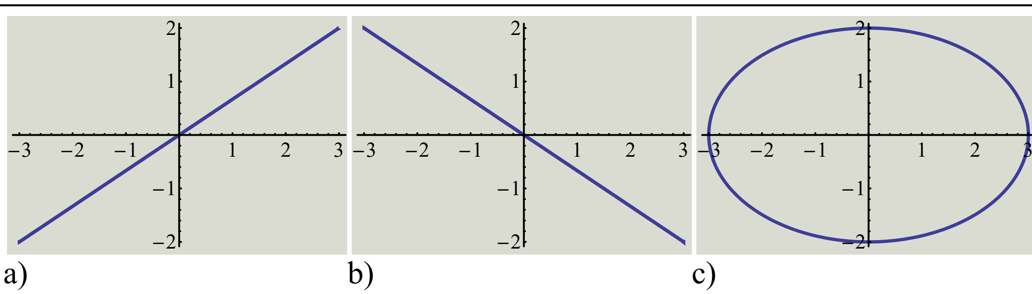


Fig. 2 Figuri Lissajous pentru oscilaţii cu frecvenţe egale cu defazajul $\alpha - \beta$: a) 0; b) π; c) $\pi/2, 3\pi/2$.

B. Pentru oscilaţii cu o *frecvenţe* multipli de numere naturale m si n prime intre ele,

$$x = a\cos(m\omega t + \alpha) = a\cos(\omega_x t + \alpha)$$
$$y = b\cos(n\omega t + \beta) = b\cos(\omega_y t + \beta) \tag{6}$$

Solutiile ec. (6) sunt

$$m\omega t = \pm\arccos(x/a) + 2k\pi - \alpha$$
$$n\omega t = \pm\arccos(y/b) + 2p\pi - \beta$$

de unde

$$\pm n\arccos(x/a) + 2kn\pi - \alpha n = \pm m\arccos(y/b) + 2pm\pi - \beta m. \tag{7}$$

Se aplica functia cosinus ec. (7) si rezulta

$$\cos\left[n\arccos(x/a) - m\arccos(y/b)\right] = \cos(\alpha n - \beta m) \tag{8a}$$

sau

$$\cos\left[\pm n\arccos(x/a) - \alpha n\right] = \cos\left[\pm m\arccos(y/b) - \beta m\right] \tag{8b}$$

Exemplul 1

Pentru m=1, n=2, $\alpha = \beta = 0$, cu ec. (8b) se obtine

$$\cos\left[2\arccos(x/a)\right] = (y/b) \tag{9}$$

sau

$$\cos^2\left[\arccos(x/a)\right] - \sin^2\left[2\arccos(x/a)\right] = (y/b), \tag{10}$$

sau

$$(x/a)^2 - 1 + \cos^2\left[\arccos(x/a)\right] = (y/b), \tag{11}$$

sau

$$2(x/a)^2 - 1 = (y/b). \tag{12}$$

Graficul ec. (12) (figura Lissajous) este reprezentat in Fig. 3, pentru $a = 1$, $b = 2$ (conform ec. (6), $x \in [-1, 1]$, $y \in [-2, 2]$).

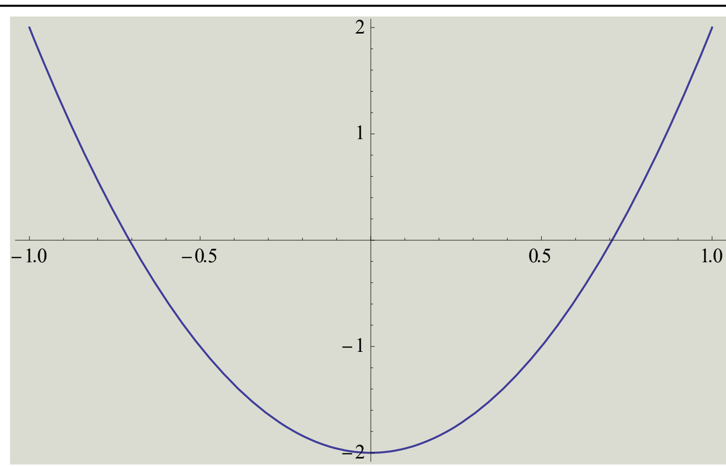


Fig.3 $\omega_x / \omega_y = m / n = 1/2$

Exemplul 2

$$x = \cos 2t$$
$$y = \sin(3t + \pi / 2) \qquad (13)$$

Cu ec. 8(b) se obtine

$$y = \pm\sqrt{\frac{4x^3 - 3x + 1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{(x+1)(2x-1)^2}{2}} = \pm|2x-1|\sqrt{\frac{x+1}{2}}\,, \qquad (14)$$

cu $x \in [-1,1]$. Graficul ec. (14) este reprezentat in Fig. 4.

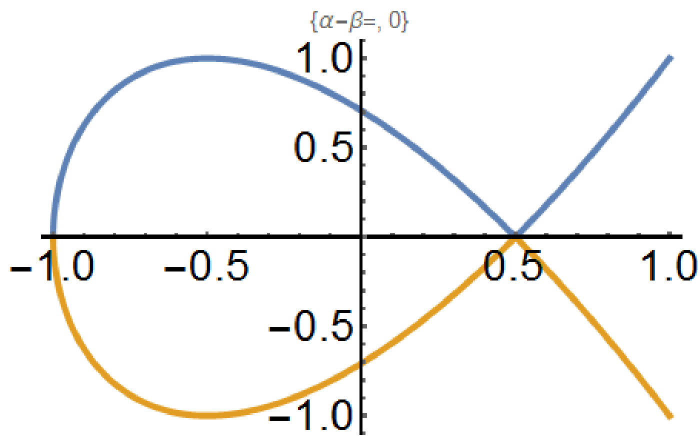
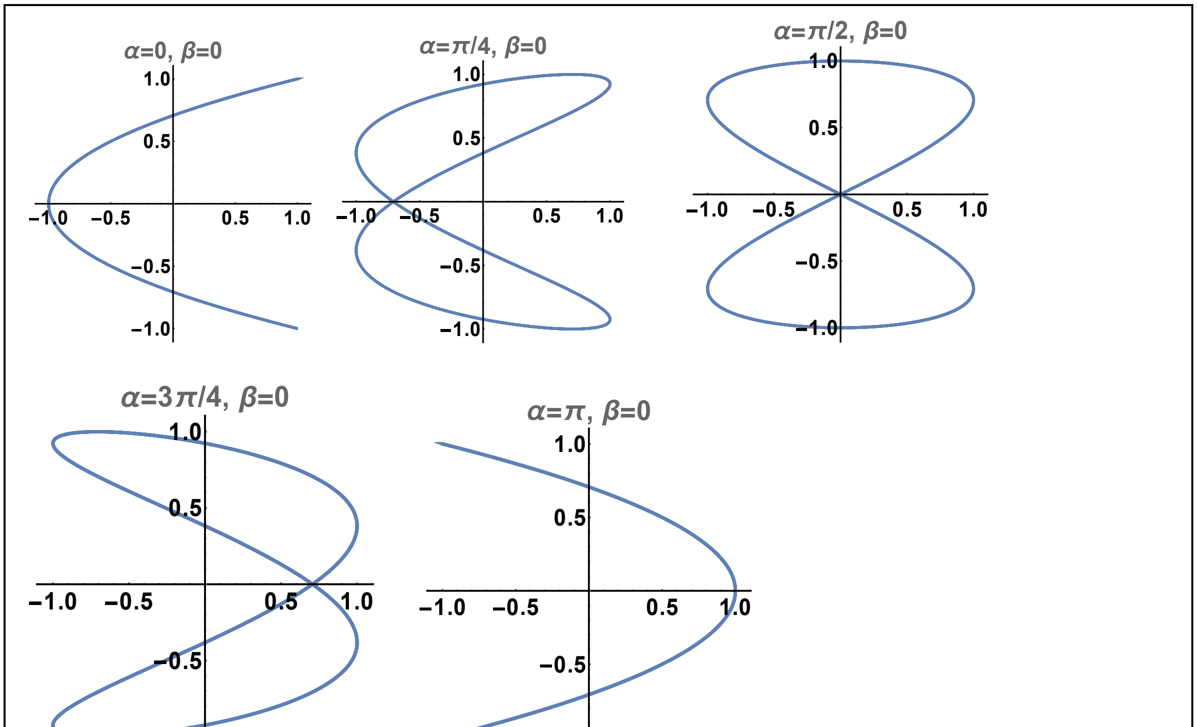


Fig.4 $\omega_x / \omega_y = m / n = 2/3$

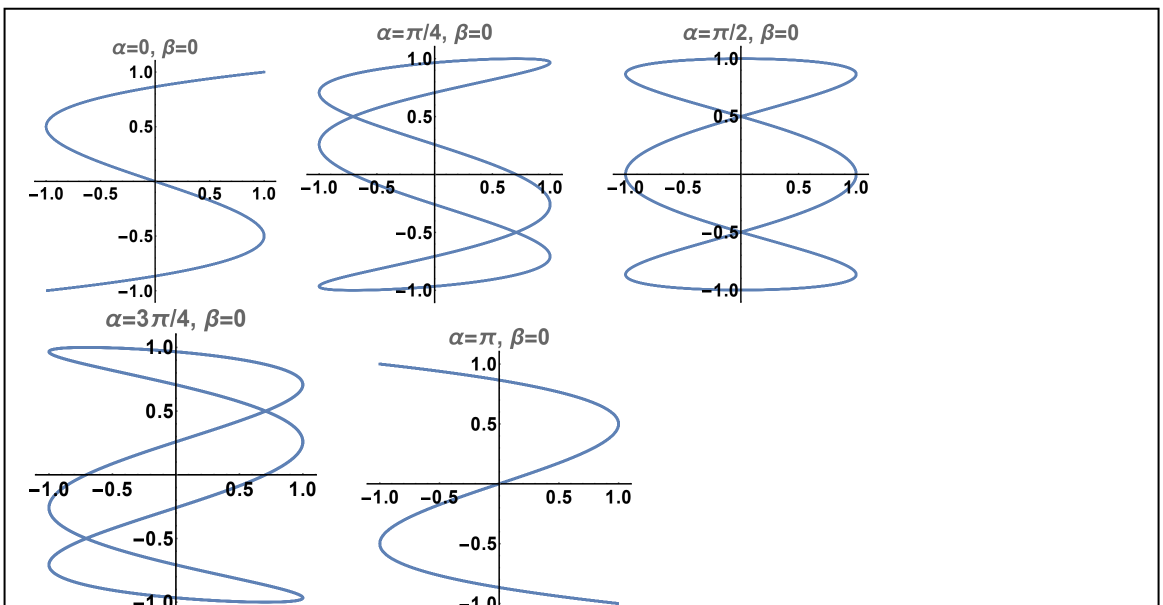
Ec. (13) are 3 radacini reale (2 identice), deci intersecteaza axa *x* de 3 ori si are 2 ramuri, una in cadranul superior si cealalta in cadranul inferior (daca graficul se intersecteaza cu o dreapta paralela cu ordonata, se obtin 2 intersectii). Raportul intersectiilor axelor verticale si orizontale este egal cu raportul frecventelor celor doua oscilatii.

Se poate arăta ca in general, în cazul traiectoriilor închise, raportul dintre numărul de intersecţii ale figurii Lissajous cu o dreaptă orizontală şi o alta verticală este egal cu raportul frecvenţelor celor două oscilaţii armonice perpendiculare.

În Fig. 5 sunt reprezentate câteva exemple de figuri Lissajous, pentru oscilaţii cu amplitudini egale la diferite defazaje, unde m / n reprezinta raportul frecvenelor.



$m/n = 2$



$m/n = 3$

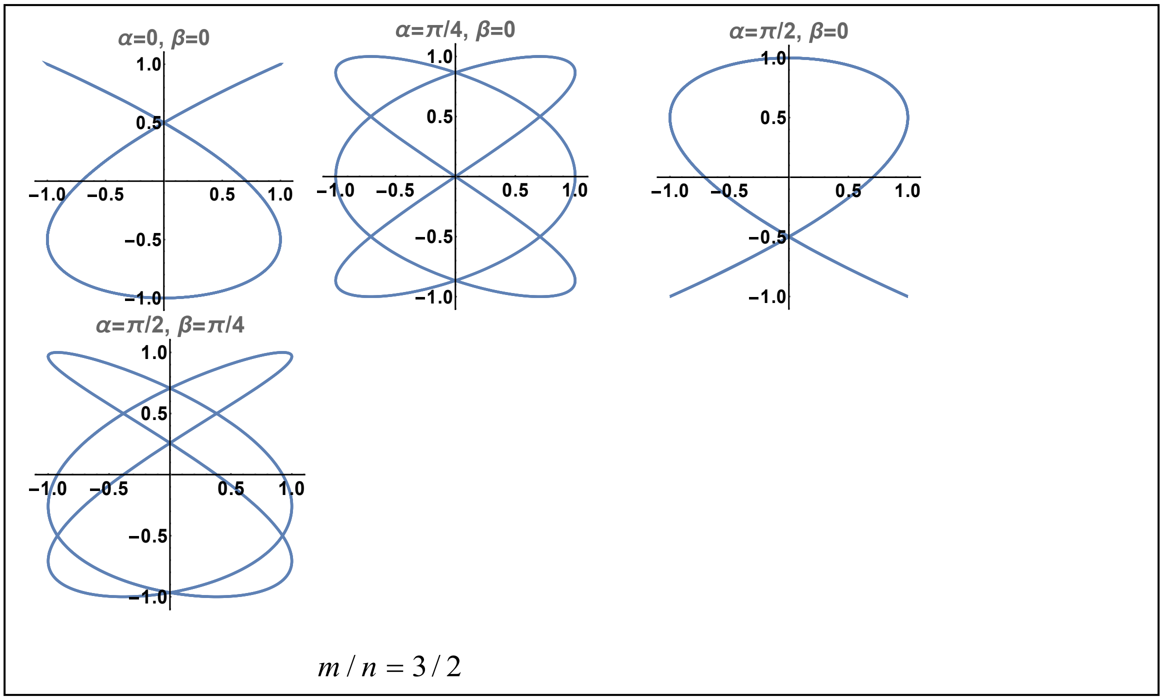


Fig.5 Figuri Lissajous

Referinte

http://egyankosh.ac.in/bitstream/123456789/18876/1/Unit-2.pdf