Universitatea din Bucureşti — 29 mai 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Elemente de calcul ştiinţific
Verificare – Matematică, Anul I

INSTRUCŢIUNI

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se explicit numărul problemei şi subpunctul acesteia.
3. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
4. **TIMP DE LUCRU: 150 minute, i.e. 10:30–13:00.**
5. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui examen vor fi trimise prin email printr-un Reply simplu la emailul în care aţi primit subiectele ca fişier PDF, cu denumirea `NUME_PRENUME_GRUPA.pdf`.
6. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **29 mai 2021, orele 13:40.**

EX#1 Fie sistemul

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 56 \\ 33 \\ 36 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) Menţionaţi dacă matricea asociată sistemului (1):

(i) admite factorizarea LU fără pivotare;
(ii) admite factorizarea LU cu pivotare (factorizarea PLU);
(iii) admite metoda de eliminare Gauss fără pivotare;
(iv) admite metoda de eliminare Gauss cu pivotare (parţială, parţială scalată sau totală);
(v) admite factorizarea Cholesky.
(vi) este (strict) diagonal dominantă.

Justificaţi răspunsurile date.

(b) Determinaţi soluţia sistemului (1), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, folosind factorizarea Cholesky.

EX#2 Determinaţi ecuaţia *parabolei de regresie* asociată punctelor (i.e. parabola cea mai apropiată de punctele respective): $\mathrm{P}_1(-2;7)$, $\mathrm{P}_2(-1;6)$, $\mathrm{P}_3(1;0)$, $\mathrm{P}_4(2;5)$, rezolvând sistemul de ecuaţii normale asociat folosind metoda de eliminare Gauss cu pivotare parţială scalată. Explicaţi şi ilustraţi grafic rezultatul obţinut.

EX#3 Fie $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă cu $a_{11} \neq 0$ şi considerăm partiţionarea sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2a}$$

unde

$$\mathbf{A}_{12} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}), \tag{2b}$$

$$\mathbf{A}_{21} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2c}$$

$$\mathbf{A}_{12} \coloneqq \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}). \tag{2d}$$

Atunci complementul Schur asociat lui a_{11}, definit prin

$$\mathbf{S} \coloneqq \mathbf{A}_{22} - \frac{1}{a_{11}}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{12} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \tag{3}$$

este o matrice inversabilă.