~~Teoria elementară a grupurilor~~

Grupul factor

Fie un grup G și $H \leq G$ un subgrup al său. Atunci
$$x \sim y \overset{def.}{\iff} x^{-1}y \in H$$ este o relație de echivalență, pe care o notăm R_H^s

De fel, definim:
$$x \sim y \overset{def.}{\iff} xy^{-1} \in H \quad -\text{"}- \quad R_H^d$$

Obs În general, cele două relații de echivalență sunt diferite.

$$[x]_{R_H^s} = \{ y \in G \mid x \equiv_{R_H^s} y \} = \{ y \in G \mid x^{-1}y \in H \} := \{ y \in G \mid \exists h \in H \text{ a.î. } x^{-1}y = h \} = \{ y \in G \mid \exists h \in H \text{ a.î. } y = xh \}$$
$$= \{ xh \mid h \in H \} \overset{\text{notație}}{:=} xH \rightsquigarrow \text{clasa lui } x \text{ în rap. cu } R$$

Analog $[x]_{R_H^d} = \{ hx \mid h \in H \} \overset{not}{:=} Hx$

Deci în general, $xH \neq Hx$ (vezi exemplu în suportul de curs)

~~Dar dacă grupul e abelian, atunci~~

Un subgrup ptr. care $xH = Hx$ $\forall x \in G$ (clasa lui x în rap. cu relația stângă e aceeași cu clasa lui x în rap. cu relația dreaptă) se numește **normal**.

Prop.: $H \trianglelefteq G \iff xHx^{-1} \subseteq H \quad \forall x \in G$

$\trianglelefteq$ → notație ptr. subgrup normal

$xHx^{-1} = \{ xhx^{-1} \mid h \in H \}$

Obs.: Dacă grupul G e abelian, atunci orice subgrup al lui e normal. (deci dacă lucrăm cu grupuri comutative, ~~cu~~ ceea ce vom face în general, nu o să ne punem pb. dacă subgrupurile sunt sau nu ~~...~~ normale și vom ști că $xH = Hx$ $\forall x \in G$ ptr. orice subgrup H (au).

Grup factor

G grup și $H \trianglelefteq G$ subgrup normal) $\to$ mulțimea factor

Considerăm mulțimea claselor G/R_H^s, care știm că e aceeași cu G/R_H^d ptr. că H normal, așa că vom nota mulțimea aste doar ca G/H.

Pe această mulțime care are ca elemente clase de echivalență se poate defini o operație care face mulțimea G/H să fie grup.

$(aH \cdot bH = (a \cdot b)H)$

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$ $\to$ clasa lui $a \cdot b$

clasa lui a; clasa lui b

Exemplu: $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 5\mathbb{Z}$ $\to$ fiind grup abelian, H e normal deci ~~...~~ putem alege oricare dintre def. ptr. R_H^s și R_H^d

$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in 5\mathbb{Z}$

$a \sim b \overset{(\Leftrightarrow)}{\Leftrightarrow} a - b \,\vdots\, 5$ $\to$ Exact definiție congruenței modulo 5

Deci relația aceasta e exact congruența modulo 5:

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{$mulțimea claselor date de rel. $\sim\} =$

$= \{$ -- " -- congr. modulo $5\} = \mathbb{Z}_5$ $\to$ de fapt, de acum încolo, o să considerăm că asta e def. lui $\mathbb{Z}_5$ ($\mathbb{Z}_n$ în general)

$\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

unde $\hat{0} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$\boxed{\hat{1} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}}$

$\hat{2} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$\hat{3} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

$\hat{4} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

Definim adunarea claselor

$\hat{2} + \hat{4} = \hat{6}$ $\to$ nu depinde de reprezentant, indiferent ce element luăm din clasele lui 2 și lui 4, suma se află întotdeauna în clasa lui 6.

$-8 + 14 = 6$ $\qquad -3 + 4 = 1$

$-3 + 14 = 11$

$7 + 4 = 11$

Acest fenomen se întâmplă indiferent ce doi reprezentanți alegem pentru orice două clase. Spunem că operația definită pe clase e bine definită.

(*) Obs.: $\hat{0} = H$. Adică clasa elementului neutru în ~~raport cu~~ G/H este de fapt tot subgrupul H.

De fapt, de multe ori putem să ne gândim la G/H ca fiind grupul G în care toate elementele din H devin egale cu 0.

~~Teorema fundamentală de izomorfism~~

(Obs.: De acum, o să notăm $x \sim y$ ca $x \equiv_H y$ când H e normal în G și considerăm ~ relația dată ~~de~~ R_H^s / R_H^d)

(Altă obs.: Când avem $f: G \to G'$ morfism de grupuri atunci $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = 0_{G'}\} \trianglelefteq G$ subgrup normal ~~în~~ G, deci are sens $G/\operatorname{Ker} f$)

Exemplu: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Să vedem cum „arată" elementele din $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(*) $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = \ldots = \widehat{-1} = \widehat{-2} = \widehat{-3} = \ldots = \hat{0}$

$\widehat{\frac{1}{3}} + \widehat{\frac{1}{3}} = \widehat{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \widehat{\frac{2}{3}}$

$\widehat{\frac{2}{3}} + \widehat{\frac{1}{3}} = \cancel{\widehat{\frac{3}{3}}} = \widehat{\frac{2+1}{3}} = \widehat{\frac{3}{3}} = \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow \operatorname{ord}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

$\widehat{\frac{2}{3}} + \widehat{\frac{3}{3}} = \widehat{\frac{5}{3}}$

$\widehat{\frac{5}{3}} + \widehat{\frac{2}{3}} = \widehat{\frac{6}{3}} = \hat{2} = \hat{0} \Rightarrow \operatorname{ord}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\left(\widehat{\frac{2}{3}}\right) = 3$

Fie $\widehat{\frac{m}{n}}$ cu $(m,n) = 1$. Fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $k\frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\frac{m}{n} = a \Rightarrow km = na$, $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n \mid km \\ (n,m) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid k$

$\Rightarrow k \in \mathcal{M}_n$. (multipli de n)

Se observă și că $\forall k \in \mathcal{M}_n \quad k \cdot \frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$

Deci numerele $k \in \mathbb{N}^*$ ptr. care $k\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ sunt exact $\mathcal{M}_n$.

~~Deci~~ conform (*) $k\frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \widehat{k\cdot\frac{m}{n}} = \hat{0} \Rightarrow ord_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\left(\frac{m}{n}\right) =$

$= \min(\mathcal{M}_n \cap \mathbb{N}^*) = n.$

~~divizori~~ ~~minimi~~

multiplin nat. minimi ai lui n. $\Rightarrow ord_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}\left(\frac{m}{n}\right) = n$ când un $(m,n)=1$.

Deci orice element din $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ are ordin finit.

$ord\left(\widehat{\frac{6}{4}}\right) = 3 \quad ord\left(\widehat{\frac{1}{4}}\right) = 4 \quad ord\left(\widehat{\frac{7}{5}}\right) = 5$

$\widehat{\frac{6}{4}} = \widehat{\frac{2}{3}}$

$ord\left(\widehat{\frac{16}{15}}\right) = 15.$

6,

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle(3,5)\rangle$

$\langle(3,5)\rangle = \{(-3,-5), (0,0), (3,5), (6,10), (9,15), (-6,-10), (-9,-15), \dots\}$ → ~~toți~~ clasele tuturor devin egale cu deci clasă de $(0,0)$

$\widehat{(1,1)}$ ~~$=$~~

$3\cdot\widehat{(1,1)} = \widehat{(3,3)} = \widehat{(3,5)-(0,2)} = \widehat{(3,5)} - \widehat{(0,2)}$
$= \widehat{(0,0)} - \widehat{(0,2)} = \widehat{(0,-2)}$

adunare repetată

(*)

$-\widehat{(1,1)} = \widehat{(-1,-1)} = \widehat{(0,0)} + \widehat{(-1,-1)} = \widehat{(3,5)} + \widehat{(-1,-1)} =$
$= \widehat{(2,4)}$

(*) $= \widehat{(2,4)} + \widehat{(9,15)} = \widehat{(11,19)}$

~~$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/(3,0)$ este c~~

- Este grupul $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\langle(12,15)\rangle$ ciclic?

Reminder: Un grup G este ciclic dacă $\exists\, x \in G$ a.î. $G = \langle x \rangle$
adică

adică $G = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplu: • în $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ subgrupul generat de $\frac{\hat{1}}{5}$ e ciclic:

$$<\frac{\hat{1}}{5}> = \{\hat{0}, \frac{\hat{1}}{5}, \frac{\hat{6}}{5}, \frac{\hat{12}}{5}, \frac{\hat{16}}{5}\} = \{n \cdot \frac{\hat{1}}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$\hat{0} = \hat{4}$, $\frac{\hat{20}}{5} = \hat{4}$

evident e suficient $n \in \{0, 1, \dots\}$ dar vom pune ca $n \in \mathbb{Z}$

• în ~~subgrupul gener.~~ grupul $\mathbb{Z}_{20}$, subgrupul $<\hat{6}>$

$$<\hat{6}> = \{\hat{0}, \hat{6}, \hat{12}, \hat{18}, \hat{4}, \hat{10}, \hat{16}, \hat{2}, \hat{8}, \hat{13}\} = \{n\hat{6} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$\hat{0} = \hat{20}$, $n\hat{6} = \widehat{6n}$

la fel, e suf $n = \overline{0,9}$ dar lăsăm așa să se vadă că $<\hat{6}>$ e ciclic

• în $\mathbb{R}$, subgrupul generat de π (nu are nicio relevanță că l-am dat pe π, doar voiam să arăt că pot face asta)

$$<\pi> = \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots\}$$

• de fapt orice subgrup generat e ciclic prin definiție, voiam doar să accentuez treaba asta.

Obs.: $<\frac{\hat{1}}{5}>_{\text{în } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_5$ (izomorf cu $\mathbb{Z}_5$)

izomorfismul e dat de $f: <\frac{\hat{1}}{5}> \to \mathbb{Z}_5$

$$f\left(\frac{\hat{1}}{5} \cdot n\right) = \overline{n}$$

$\overline{n}$ clasa mod 5

$<\pi>_{\text{în } \mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}$ prin $f: <\pi> \to \mathbb{Z}$

$$f(n\pi) = n$$

• de fapt mai general avem Th. de structură a grupurilor ciclice:

Orice grup ciclic e izomorf cu $\mathbb{Z}$ (dacă generatorul nu are ordin finit) sau cu $\mathbb{Z}/_{m}$ (dacă ord generatorului este m)

prin morfismul $f: G = \langle x \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}_n$
$\{mx \mid m \in \mathbb{Z}\}$

$$f(mx) = m \quad (\text{sau } \hat{m} \text{ în } \mathbb{Z}_n)$$

Revenim la ultima întrebare, dacă $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle (12, 15) \rangle$ e ciclic.

Conform Teoremei, G e ciclic dacă e izomorf cu $\mathbb{Z}$ sau cu $\mathbb{Z}_n$.

- vom arăta că G nu e ciclic pentru că nu e izomorf nici cu $\mathbb{Z}$, nici cu $\mathbb{Z}_n$ pentru niciun n.

Cum arătăm că două grupuri NU sunt izomorfe?

Găsind o proprietate de grup care le diferențiază. De exemplu, un nr. diferit de elemente de un anumit ordin.

- în G, $3 \cdot \widehat{(4,5)} = \widehat{(12,15)} = \widehat{(0,0)}$ deci $ord(\widehat{(4,5)}) = 3$

deci G are un element de ordin 3, în timp ce în $\mathbb{Z}$, toate elementele au ordin infinit, deci G nu e izom. cu $\mathbb{Z}$.

- de asemenea, ptr. a arăta că G nu e izom. cu niciun $\mathbb{Z}_n$ e suf. să arătăm că G are un elem de ordin ∞. ($\mathbb{Z}_n$ e grup finit, deci orice element al lui e de ordin finit)

Luăm $\widehat{(1,0)}$ și arătăm că are ordin infinit.

Pp. prin absurd că $ord_G(\widehat{(1,0)}) = n < \infty$.
$n \in \mathbb{N}^*$

Deci $\widehat{n \cdot (1,0)} = \widehat{(0,0)} \Leftrightarrow \widehat{(n,0)} = \widehat{(0,0)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n,0) \in \langle (12,15) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(n,0) = k \cdot (12,15) \Leftrightarrow (n,0) = (12k, 15k)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 12k \\ 0 = 15k \Rightarrow k = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 12 \cdot 0 = 0$$

dar $n \in \mathbb{N}^*$ (fiind ordinul unui element)

CONTRADICȚIE!

Deci $ord_G(\widehat{(1,0)}) = \infty$.

Teorema fundamentală de izomorfism

Fie $f: G \longrightarrow G'$ un morfism de grupuri.

Atunci $G/Ker f \simeq Im f$

$G/Ker f$ → grup factor (Ker f e subgrup normal în G întotdeauna)

$Im f$ → subgrup în G'

Exemplu de cum folosim teorema:

① $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $S \trianglelefteq \mathbb{C}^*$, $S = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$

- $\mathbb{C}^*/S \simeq (0, \infty)$ – grup cu înmulțirea
- $\mathbb{C}^*/(0,\infty) \simeq S$

Trebuie să găsim un morfism surjectiv (a.î. $Im f = (0,\infty)$) de la $\mathbb{C}^*$ la $(0,\infty)$ care să aibă nucleul S ($Ker f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) = 1\} =$

$S = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$) atunci conform Teoremei

am avea $\mathbb{C}^*/S \simeq (0,\infty)$

{ Ne amintim că ∀ orice nr. complex nenul $z \in \mathbb{C}^*$ se poate scrie sub forma trig.: $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $R \in (0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Alegem morfismul

$f: \mathbb{C}^* \longrightarrow (0,\infty)$ dat prin

$$f(z) = f(R(\cos\theta + i\sin\theta)) = R$$

- f e într-adevăr morfism

$$f(z_1 \cdot z_2) = f(r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)) =$$
$$= f(r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))) = r_1 r_2 = f(z_1)\cdot f(z_2)$$

- e surjectiv Ptr. $r > 0$ ~~avem ∃ z = r(cos +~~ avem $z = r$ cu $f(r) = r$.

Și $\ker f = S$. Obs. că $f(z) = |z|$

$\ker f = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \} = S$

Th.

$\Rightarrow$ concluzia.

La a doua luăm morfismul $f(z) = f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = \cos\theta + i\sin\theta$

$= \dfrac{z}{|z|}$

Și se verifică aceleași 3 cerințe

De ex. $\ker f = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid \dfrac{z}{|z|} = 1 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C}^* \mid z = |z| \} = (0, \infty)$

$\hookrightarrow$ dar $|z| \in (0,\infty)$ deci z trebuie să fie din $(0,\infty)$

<u>Alt exercițiu</u>: $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$

$\langle (\hat{3}, \bar{5}), (\hat{4}, \bar{3}) \rangle = \{ n(\hat{3}, \bar{5}) + m(\hat{4}, \bar{3}) \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$

- Formează $(\hat{3}, \bar{4})$ și $(\hat{5}, \bar{3})$ un sistem de generatori?

$\Updownarrow$

$G = \langle (\hat{3}, \bar{4}), (\hat{5}, \bar{3}) \rangle$?

Este suficient să vedem dacă îi putem obține pe $(\hat{0}, \bar{1})$ și $(\hat{1}, \bar{0})$ din combinații de $(\hat{3}, \bar{5})$ și $(\hat{4}, \bar{3})$, pentru că ~~mai apoi pe~~ $(\hat{0}, \bar{1})$ și $(\hat{1}, \bar{0})$ formează în mod evident un sistem de generatori.

~~$-3 \cdot (3,4) + 2(5,3) = (-9,$~~

$2 \cdot (\hat{5}, \bar{3}) = (\hat{10}, \bar{6}) = (\hat{1}, \bar{6})$

$3 \cdot (\hat{3}, \bar{4}) = (\hat{9}, \bar{12}) = (\hat{0}, \bar{12})$

$(\hat{1}, \bar{6}) + (\hat{0}, \bar{12}) = (\hat{1}, \bar{18}) = \boxed{(\hat{1}, \bar{0})}$

$8.$

$-(\hat{3}, \bar{5}) + (\hat{4}, \bar{3}) = (\hat{1}, \bar{8})$

$2(\hat{3}, \bar{5}) - 3(\hat{4}, \bar{3}) = (\hat{6}, \bar{10}) - (\hat{12}, \bar{9}) = (\hat{3}, \bar{1})$

$3 \cdot (3,5) = (\hat{0}, \bar{15}) = (\hat{0}, \overline{-3})$

$6 \cdot (4,3) = (\bar{6}, \hat{0})$

$f(r) = r$

$2\cdot(\hat{4},\bar{3}) = (\hat{8},\bar{6}) = (-\hat{1},\bar{6})$

$-1\cdot(-\hat{1},\bar{6}) = (\hat{1},-\bar{6}) = (\hat{1},\overline{12})$

$(\hat{1},\overline{-6}) + 2\cdot(\hat{0},\overline{-3}) = \boxed{(\hat{1},\bar{0})}$

$(\hat{6},\bar{0}) + (\hat{3},\bar{1}) = (\hat{9},\bar{1}) = \boxed{(\hat{0},\bar{1})}$

Deci $G = \langle(\hat{4},\bar{3}),(\hat{3},\bar{5})\rangle$.

- Este $G/\langle(\hat{4},\bar{3})\rangle$ ciclic?

Deoarece $G = \langle(\hat{4},\bar{3}),(\hat{3},\bar{5})\rangle$

Atunci $\forall g \in G,\ g = m(\hat{4},\bar{3}) + n(\hat{3},\bar{5})$ pentru un m și un n din $\mathbb{Z}$.

~~Când~~ Deoarece $\pi: G \to G/\langle(4,3)\rangle$ e morfism avem că

$g \longmapsto \hat{g} \ (\mathrm{mod}\ (4,3))$

$\hat{g} = \widehat{m(\hat{4},\bar{3}) + n(\hat{3},\bar{5})} \quad \forall g \in G$

$\hat{g} = \underbrace{\widehat{m(\hat{4},\bar{3})}}_{=0 \ \mathrm{mod}\ (\hat{4},\bar{3})} + \widehat{n(\hat{3},\bar{5})}$

$\hat{g} = n\cdot\widehat{(\hat{3},\bar{5})} \quad \forall \hat{g} \in G/\langle(4,3)\rangle$

$\Rightarrow G/\langle(4,3)\rangle = \langle\widehat{(\hat{3},\bar{5})}\rangle$ deci e ciclic.

$\hat{}$ mod 9

$\bar{}$ mod 5

$\wedge$ mod $(4,3)$