TUTORIAT LFA 3: PROPRIETĂȚI ALE LIMBAJELOR. DECIDABILITATE ÎN REG.

RADU COSTACHE, MARIA PREDA

1. Breviar Teoretic

1.1. Proprietăţi.

Propoziţie 1.1. *Fie L un limbaj. Avem următoarele proprietăţi:*

- $L \cup L = L$
- $L \cap L = L$
- *Dacă* $L \subset L'$, *avem că* $L \cap L' = L$ *şi* $L \cup L' = L$
- $L \cap \Sigma^* = L$ *şi* $L \cup \Sigma^* = \Sigma^*$
- *Dacă* $\lambda \in L$, *atunci avem că* $L \cdot \Sigma^* = \Sigma^*$ *şi* $\Sigma^* \cdot L = \Sigma^*$
- $L \setminus \Sigma^* = \emptyset$
- *Dacă* $L \notin \text{REG}$, *atunci avem că* $\overline{L} \notin \text{REG}$

  Demonstraţie. Să presupunem prin reducere la absurd că $\overline{L} \in \text{REG}$.
  Familia limbajelor regulate este închisă la complement, deci şi $\overline{\overline{L}} = L \in \text{REG}$. Contradicţie □

Observaţie 1.2. *Familia* REG *este închisa la următoarele operaţii:*

- *Reuniune*
- *Intersecţie*
- *Diferenţă*
- *Complementare*
- *Concatenare*
- *Stelare*
- *Plus*

1.2. Decidabilitate.

Definiţie 1.3. *Se numeşte problemă decidabilă, o problemă pentru care există un algoritm care să furnizeze răspunsul la aceasta.*

Propoziţie 1.4. *Fie M, M_1, M_2 DFA-uri şi w un cuvânt. Următoarele probleme sunt decidabile:*

- *Apartenenţa cuvântului w la DFA-ul m i.e. $w \in L(M)$?.*
  Algoritm:
  Putem folosi algoritmul de verificare a acceptării din Tutoriatul 1.
- *Dacă DFA-ul M este gol i.e. $L(M) = \emptyset$?.*
  Algoritm:
  Verificăm dacă toate stările finale sunt neaccesibile i.e. nu există niciun lanţ care începe în starea iniţială şi ajunge într-o stare finală.
- *Universalitatea DFA-ului M i.e. $L(M) = \Sigma^*$?*
  Algoritm:

  (1) *Determinăm automatul complementar, pentru* $\overline{L(M)}$
  (2) *Determinăm utilizând proprietatea de emptiness dacă DFA-ul obţinut este gol.*
- *Incluziunea DFA i.e. $L(M_1) \subset L(M_2)$?*
  Algoritm:

  (1) *Determinăm automatul complementar* $\overline{L(M_2)}$, *folosind algoritmul din Tutoriatul 2.*
  (2) *Determinăm automatul de intersecţie* $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$, *folosind algoritmul din Tutoriatul 2.*
  (3) *Putem folosi algoritmul de emptiness prezentat mai sus (intuitiv, dacă există cuvinte in L $L(M_1)$, care nu sunt în $L(M_2)$, atunci nu avem incluziunea $L(M_1) \subset L(M_2)$).*

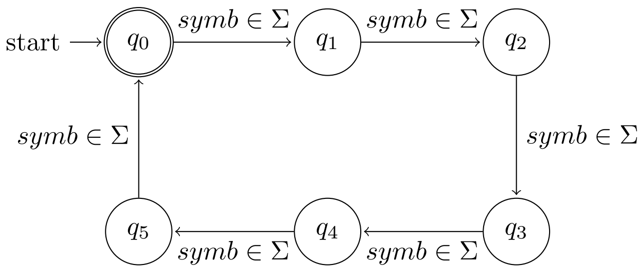
- *Egalitatea i.e. $L(M_1) = L(M_2)$?.*
  Algoritm:
  Vom testa dubla incluziune ($L(M_1) \subset L(M_2)$ şi $L(M_2) \subset L(M_1)$) cu algoritmul anterior. Dacă le obţinem pe amândouă, avem automate echivalente.

2. Exerciţii

(1) Este limbajul $L = \{ww^R\}$ regulat?
Soluţie:
NU, nu este regulat. Intuitiv, nu avem cum să reţinem ce caractere au fost puse în w ca să le repetă m invers. Se va demonstra în tutoriatul următor cu lema de pompare.

(2) E decidabil dacăun DFA acceptătoate cuvintele de lungime multiplu de 6? (Justificaţi răspunsul)

Demonstraţie. DA, este decidabil. Putem construi limbajul $\{w \mid |w| \equiv 0 (mod 6)\}$. Acest limbaj este regulat, deoarece putem construi următorul automat:



Şi DFA-ul pentru care trebuie să verificăm dacă acceptă cuvintele din L modelează tot un limbaj regulat. Trebuie săverificăm dacă L este inclus în limbajul acelui DFA. Ştim că problema incluziunii este decidabilă, astfel fiind decidabil dacă un automat acceptă toate cuvintele de lungime 6. □

(3) Fie $L \in$ REG şi w un cuvânt. Este decidabil dacă $\exists k > 0$ astfel încât $w^k \in L$.

Demonstraţie. DA, este decidabil. Construim limbajul $L_w = \{w^+ \mid w$ este cuvântul din enunţ$\}$. Acest limbaj este regulat (am arătat deja cum se poate construi un automat finit pentru un astfel de limbaj).

Dacă există k cu proprietatea din enunţ, atunci $L_w \cap L \neq \emptyset$. Limbajele regulate sunt închise la intersecţie, deci se poate construi DFA-ul de intersecţie. Problema *DFA emptiness* este decidabilă, deci putem decide dacă există k. □

(4) Este decidabil dacă limbajele acceptate de două automate finite nedeterministe cu lambda miscari sunt egale sau nu.

Demonstraţie. Automatele finite cu λ-mişcări modelează limbaje regulate. Vom converti ambele automate la câte un DFA echivalent. Problema egalităţii este decidabilă (dublă) incluziune. □

(5) Există limbaje finite care nu sunt regulate?

Demonstraţie. NU, orice limbaj finit este regulat. Putem lua fiecare cuvânt (sunt în număr finit, deci şi stările sunt tot în număr finit) şi să construim câte un lanţ de NFA pentru succesiunea sa de litere. □

(6) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cdot L_2 = L_3 \cdot L_4$ şi $L_2, L_3, L_4 \in$ REG Avem aşadar că $L_1 \in$ REG?

Demonstraţie. NU, nu este obligatoriu ca $L_1 \in$ REG. Putem considera:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin$ REG
- $L_2 = \Sigma^* \in$ REG
- $L_3 = \Sigma^* \in$ REG
- $L_4 = \Sigma^* \in$ REG

$\lambda = a^0 b^0 \in L_1 \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \Sigma^* = \Sigma^* \cdot \Sigma^* = L_3 \cdot L_4$. □

(7) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \cap \overline{L_2} = L_3$ şi $L_2, L_3 \in$ REG. Avem aşadar că $L_1 \in$ REG? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU, L_1, poate sănu fie regulat. Considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin$ REG

- $\overline{L_2} = \{aabb\} \in \text{REG}$ (limbaj finit), deci şi $\overline{\overline{L_2}} = L_2 \in \text{REG}$ (limbajele regulate sunt închise la complement).
- $L_3 = \{aabb\} \in \text{REG}$

Avem că: $L_1 \cap L_2 = \{aabb\} = L_3$. □

(8) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3$ şi $L_1, L_3 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_2 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU, L_2 poate să nu fie regulat. Considerăm:
- $L_1 = \{a\} \in \text{REG}$
- $L_2 = \{a^n \cdot b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
- $L_3 = \{a\} \in \text{REG}$

$L_1 \setminus L_2 = L_1 = L_3$, deoarece $L1 \cap L_2 = \emptyset$. □

(9) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cup \overline{L_2} = L_3 \cap L_4$ şi $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi).

Demonstraţie. NU, L_1 poate să nu fie regulat. Considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
- $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_3 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_4 = \Sigma^* \in \text{REG}$

□

(10) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_2 \setminus L_1 = L_4 \setminus L_3$ şi $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$ Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU, L_1 poate sănu fie regulat. Considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \text{REG}$
- $L_2 = \{b^n \mid n \geq 0\} \in \text{REG}$
- $L_3 = \emptyset$
- $L_4 = \{b^n \mid n \geq 0\} \in \text{REG}$

□

(11) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \cap \overline{L_2} = L_3 \cup L_4$ cu $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$?(Justificaţi)

Demonstraţie. NU, considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin REG$
- $\overline{L_2} = \{aabb\} \in REG \Rightarrow L_2 \in REG$
- $L_3 = L_4 = \{aabb\} \in REG$

□

(12) Fie limbajele L_1, L_2, L_3, L_4 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3 \setminus L_4$ şi $L_2, L_3, L_4 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU, considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin REG$
- $L_2 = \Sigma^* \in REG$
- $L_3 = L_4 = \Sigma^* \in REG$

□

(13) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \setminus L_2 = L_3$ şi $L_2, L_3 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU. Considerăm:
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \notin REG$
- $L_2 = \Sigma^* \in REG$
- $L_3 = \emptyset \in REG$

□

(14) Fie limbajele L_1, L_2, L_3 cu proprietatea că $L_1 \cup L_2 = L_3$ şi $L_2, L_3 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

(15) Fie limbajele L_1, L_2 cu proprietatea că $L_1 \subset L2$ şi $L2 \in \text{REG}$. Atunci $L_1 \in REG$?

Demonstraţie. NU. Spre exemplu $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subset \Sigma^*$, iar Σ^* este regulat, pe când $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nu este regulat. □

(16) Fie L_1, L_2 cu proprietatea că $L_1 \subset L_2$ şi $L_2 \in \text{REG}$. Avem aşadar că $L_2 \setminus L_1 \in \text{REG}$? (Justificaţi)

Demonstraţie. NU. Considerăm:
- $L_2 = \Sigma^* \in \text{REG}$
- $L_1 = \{ww^R \mid w \in Sigma^*\} \notin \text{REG}$

Evident, $L_1 \subset \Sigma^*$

Săpresupunem prin reducere la absurd că $L_2 \setminus L_1 \in REG$. Cum $L_2 = \Sigma^* \Rightarrow L_2 \setminus L_1 = \overline{L_1}$. Dacă $\overline{L_1} \in \text{REG}$, atunci $\overline{\overline{L_1}} = L_1 \in \text{REG}$, deoarece limbajele regulate sunt închise la complement. Dar $L_1 \notin \text{REG}$. Contradicţie.

□