Seminarul 7 de Algebră II

Grupele 103 şi 104 - 2020-2021

1 Rezultate folositoare din cursurile și seminariile trecute

Definiția 1.1: Fie R un inel și $n \geq 1$. Pentru un $\sigma \in S_n$, notăm cu

$$\sigma^* : R[X_1, ..., X_n] \to R[X_1, ..., X_n],\ \sigma^*(X_i) = X_{\sigma(i)}$$

(morfism de inele definit cu ajutorul proprietății de universalitate a inelului de polinoame).

i) Un polinom $P \in R[X_1, ..., X_n]$ se numește *simetric* dacă $\sigma^*(P) = P$ pentru orice $\sigma \in S_n$.

ii) Pentru orice $1 \leq k \leq n$, notăm cu

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}$$

i.e.

$$\begin{aligned} &s_1 = X_1 + ... + X_n \\ &s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_{n-1}X_n \\ &... \\ &s_n = X_1X_2...X_n. \end{aligned}$$

Atunci s_k sunt polinoame simetrice și se numesc *polinoamele simetrice fundamentale.*

Definiția 1.2: Fie R un inel și $n \geq 1$.

a) Pe mulțimea monoamelor din $R[X_1, ..., X_n]$ introducem *ordinea lexicografică*:

$$X_1^{a_1}X_2^{a_2}...X_n^{a_n} \geq_{lex} X_1^{b_1}X_2^{b_2}...X_n^{b_n} \iff \begin{array}{c} a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...a_n = b_n \\ \text{sau} \\ \text{primul termen nenul din} \\ (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n) \text{ este pozitiv.} \end{array}$$

Este imediat că $\geq_{lex}$ este ordine totală.

b) Fie $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Notăm cu $LT_{lex}(f) = LT(f)$ termenul din f al cărui monom este cel mai mare în sensul ordinii lexicografice și îl numim *termenul principal al lui* f.

Teorema 1.3: *(fundamentală a polinoamelor simetrice)*

Fie R un inel, $n \geq 1$ și $f \in R[X_1, ..., X_n]$. Atunci există un unic polinom $g \in R[X_1, ..., X_n]$ astfel încât

$$f = g(s_1, ..., s_n).$$

2 Inele de polinoame (cont.)

Exercițiul 2.1: Fie $P \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$,

$$P = 3X_1^2X_2^2X_3 + 7X_1^3X_2^2X_3 + 5X_1^6 - 3X_1X_2X_3 - 25X_3^3 + 1.$$

Scrieți P ca polinom în $\mathbb{Z}[X_2, X_3][X_1]$, ca polinom în $\mathbb{Z}[X_1, X_3][X_2]$ și ca suma de componente omogene (*i.e.* de același grad).

Exercițiul 2.2: Scrieți în ordine lexicografică descrescătoare monoamele de grad 2 din $R[X_1, X_2, X_3]$.

Exercițiul 2.3: Fie R un inel. Scrieți polinoamele de mai jos în ordine lexicografică descrescătoare a monoamelor:

a) $2X_1^2 + 3X_1X_2X_3 - 2X_1^2X_2^2 + X_3^3 + 1 + X_1^2X_3^2 + X_2^4 \in R[X_1, X_2, X_3]$.

b) $3X_1^2X_2^2X_3 + 7X_1^3X_2^2X_3 + 5X_1^6 - 3X_1X_2X_3 - 25X_3^3 + 1 \in R[X_1, X_2, X_3]$.

c) $X_1^4 - X_3^4 - 5X_2X_4^3 + X_2X_3 + 3X_1X_3^2X_4 - X_2 - X_1X_4^7 + 6 \in R[X_1, X_2, X_3, X_4]$.

Exercițiul 2.4: Fie R un inel comutativ. Demonstraţi că

$$R[X,Y]/(X-Y) \simeq R[X].$$

Generalizaţi.

Exercițiul 2.5: Demonstrați că $K[X,Y]/(Y^2 - X)$ și $K[X,Y]/(Y^2 - X^2)$ nu sunt izomorfe, pentru orice corp K.

Exercițiul 2.6:

a) Fie K un corp și $a_1, ..., a_n \in K$. Demonstrați că idealul

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) \trianglelefteq K[X_1, ..., X_n]$$

este maximal.

b) Daţi exemplu de corp K pentru care $K[X_1, ..., X_n]$ are şi alte ideale maximale.

Exercițiul 2.7:

a) Fie D un domeniu de integritate, $a \in D$ şi $P, Q \in R[X]$ astfel încât a este rădăcină de ordinul n pentru P şi $Q(a) \neq 0$. Atunci a este rădăcină de ordinul n şi pentru PQ.

b) Daţi un contraexemplu pentru cazul în care inelul nu este domeniu de integritate.

Exercițiul 2.8: (Derivata formală a unui polinom) Fie K un corp comutativ.

a) Fie $n \geq 2$ şi $f_1, ..., f_n \in K[X]$. Demonstraţi că

$$D(f_1f_2...f_n) = D(f_1)f_2...f_n + f_1D(f_2)f_3...f_n + ... + f_1f_2...f_{n-1}D(f_n).$$

b) Dacă $f = (X-a)^n$ pentru un $a \in K$ şi $n \geq 1$, demonstraţi că:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= n(X-a)^{n-1}, \\ f^{(2)} &= n(n-1)(X-a)^{n-2}, \\ &... \\ f^{(k)} &= n(n-1)...(n-k+1)(X-a)^{n-k}, \\ &... \\ f^{(n)} &= n!\ 1_K \\ f^{(n+1)} &= f^{(n+2)} = ... = 0. \end{aligned}$$

c) Demonstraţi că, dacă p este prim şi $\operatorname{char} K = p$, atunci $f^{(p)} = 0$ pentru orice polinom $f \in K[X]$.

d) Pentru $f, g \in K[X]$, demonstraţi formula

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

3 Polinoame simetrice

Exercițiul 3.1: Scrieți următoarele polinoame simetrice ca polinoame în polinoamele simetrice fundamentale:

a) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^3 X_2 = X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1 X_2^3 + X_1 X_3^3 + X_2^3 X_3 + X_2 X_3^3$.

b) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^2 X_2^2$.

c) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_2^2 X_3^3$.

d) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^3 X_2^3$.

e) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^4 X_2 X_3$.

f) $f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{sym} X_1^4 X_2^3$.

Exercițiul 3.2: Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

Exercițiul 3.3: Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5.$$

Exercițiul 3.4:

a) Fie K un corp cu $\operatorname{char} K \neq 2$ și $A \subset K[X,Y]$ subinelul polinoamelor simetrice din $K[X,Y]$. Demonstrați că
$$A/(X^2+Y^2) \simeq K[X].$$

b) Demonstrați că
$$\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{C}[X].$$

c) Demonstrați că
$$\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2) \not\simeq \mathbb{R}[X].$$