Lista 2 de probleme[1]

Grupele 103 & 104 - 2020-2021

Toate inelele se consideră unitare și comutative în cele ce urmează.

Exercițiul 2.1: Fie $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ şi $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că dacă niciunul dintre $f(m), f(m+1), ..., f(m+n)$ nu se divide cu $n+1$, atunci $f(X)$ nu are rădăcini întregi.

Exercițiul 2.2: Rezolvați pentru $P(X), Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ecuația

$$(X^5+2X^3+X^2+X+1)P(X)+(X^5+X^4+2X^3+2X^2+2X+1)Q(X) = 2(X^3+X+1).$$

Exercițiul 2.3: Descompuneţi în factori ireductibili polinomul $f(X) = X^4 - 2X^2 + 4$ peste fiecare din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ şi $\mathbb{Z}_5$.

Exercițiul 2.4: Fie R un inel şi $f(X,Y) \in R[X,Y]$.

a) Demonstraţi că dacă $f(X,Y) = -f(Y,X)$, atunci există $g(X,Y) \in R[X,Y]$ *simetric* astfel încât $f(X,Y) = (X-Y)g(X,Y)$.

b) Demonstraţi că dacă $f(X,Y)$ este simetric şi $(X-Y) \mid f(X,Y)$, atunci $(X-Y)^2 \mid f(X,Y)$.

Exercițiul 2.5: Fie R un inel și $n \geq 1$. Definim aplicația

$$S : R[X_1, ..., X_n] \to R[X_1, ..., X_n], \quad S(P) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma^*(P).$$

a) Fie $P = 2X_1 + X_1X_2^2 \in R[X_1, X_2]$ și $Q = 2X_1 + X_1X_2^2 \in R[X_1, X_2, X_3]$. Calculați $S(P)$ și $S(Q)$.

b) Demonstrați că S este morfism de grupuri. Este și morfism de inele?

c) Arătați că, pentru orice $P \in R[X_1, ..., X_n]$, $S(P)$ este polinom simetric.

d) Demonstrați că $P = S(P) \iff$ P este polinom simetric.

Exercițiul 2.6: Fie $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg f > 1$, monic. Demonstraţi că există un polinom $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(g(X))$ este polinom reductibil.

Exercițiul 2.7: Demonstraţi că polinomul $f(X) = X^{101} + 101X^{100} + 102$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Exercițiul 2.8: Fie $n > 1$ natural. Demonstraţi că polinomul $X^n + 5X^{n-1} + 3$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

[1]**Termen de predare: 28 mai 2021.**
Trimiteţi rezolvările în format pdf la miron.stanciu@fmi.unibuc.ro.
Exercițiul cu * valorează 0.2 puncte, iar celelalte 0.1 puncte. Nota maximă pe această listă este de 1p. **Puteți colabora, dar redactarea trebuie să fie individuală.** Îmi rezerv dreptul de a avea discuții individuale cu voi pentru a verifica înțelegerea problemelor redactate.

Exercițiul 2.9*: Fie $n \geq 1$ și $\mathrm{Mon}(n) = \{X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_n^{i_n} \mid i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}\}$ mulțimea monoamelor în n variabile.

Pe $\mathrm{Mon}(n)$ considerăm relația de ordine dată de divizibilitate *i.e.*

$$\begin{aligned} X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_n^{i_n} \leq X_1^{j_1} X_2^{j_2} ... X_n^{j_n} &\iff X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_n^{i_n} \mid X_1^{j_1} X_2^{j_2} ... X_n^{j_n} \\ &\iff i_1 \leq j_1, i_2 \leq j_2, ..., i_n \leq j_n. \end{aligned}$$

Demonstrați că, în raport cu această relație, orice submulțime nevidă a $\mathrm{Mon}(n)$ are un număr finit de elemente minimale.