I. LUCRARE ANALIZA 1.

1.2. $a=1, b=2, c=1$; $\sup B=?$ $\inf B=?$ $\min B=?$ $\max B=?$ $(\mathbb{R})$

$B=\left\{(-1)^n \cdot \frac{am+bn+1}{m+c} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B=\left\{(-1)^n \cdot \frac{m+2n+1}{m+1} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

Arăt că $\nexists \inf B, \nexists \sup B \in \mathbb{R}$.

Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists)\ \alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $b\geq\alpha, \forall\ b\in B \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{m+2n+1}{m+1} \geq \alpha, \forall\ m,n\in\mathbb{N}$.

$m=1 \Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{2n+2}{2} \geq \alpha, (\forall)\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot (n+1) \geq \alpha, \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Pentru n - impar $\Rightarrow -(n+1)\geq\alpha, (\forall)\ n\in 2\mathbb{N}+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1\leq -\alpha, \forall\ n\in 2\mathbb{N}+1$, contradicție.

Deci $\nexists \inf B\in\mathbb{R}$ (pentru că B nu are minoranți în $\mathbb{R}$)

Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists)\ \beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $b\leq\beta, \forall\ b\in B \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{m+2n+1}{m+1} \leq \beta, \forall\ m,n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

Dacă $m=1 \Rightarrow (-1)^n \cdot \frac{2n+2}{2} \leq \beta, \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \cdot (n+1)\leq\beta, \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Pentru n - par $\Rightarrow n+1\leq\beta, \forall\ n\in 2\mathbb{N}$, contradicție

Deci $\nexists \sup B\in\mathbb{R}$ (pentru că B nu are majoranți în $\mathbb{R}$).

Din cele de mai sus, avem și că mulțimea B este nemărginită inferior și superior $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \min B, \nexists \max B\in\mathbb{R}$.

$x_n = 2^n - \frac{1}{n^2} + 4.$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2^n - \frac{1}{n^2} + 4\right) = \infty - 0 + 4 = \infty.$

Arăt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n| > \varepsilon$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left|2^n - \frac{1}{n^2} + 4\right|}_{>0} > \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_\varepsilon$

Aleg $n_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \varepsilon < 1. \\ [\log_2 \varepsilon] + 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$

Pentru $\varepsilon < 1$, este evident că $2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall\, n \geq 0$.

Pentru $\varepsilon \geq 1$, arăt că $2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall\, n \geq [\log_2 \varepsilon] + 1$.

$n \geq [\log_2 \varepsilon] + 1 > \log_2 \varepsilon \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^n > \varepsilon \\ 4 > \frac{1}{n^2} \left(n^2 > \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 4 - \frac{1}{n^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n + 4 - \frac{1}{n^2} > \varepsilon$, ceea ce trebuia demonstrat.

În concluzie, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Scanned with CamScanner

$\underline{\lim}\, x_n = ?, \ \overline{\lim}\, x_n = ?$

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(-\frac{1}{a}\right)^n + \cos n\pi, \ n \in \mathbb{N}$$

$a = -3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cos n\pi, \ n \in \mathbb{N}.$$

$\underbrace{n(n+1)}_{\vdots\, 2}(n+2) \ \vdots\ 6, \ \forall n \in \mathbb{N}$. (este divizibil cu 2 și cu 3, deoarece este produs de 3 numere consecutive) $\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ \vdots\ 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cos n\pi, \ n \in \mathbb{N}.$$

I : $n = 2k \Rightarrow x_{2k} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \xrightarrow{k \to \infty}$

$\longrightarrow 2 + 0 = 2 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k} = 2.$

II : $n = 2k+1 \Rightarrow x_{2k+1} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} + \underbrace{\cos((2k+1)\cdot\pi)}_{-1} \xrightarrow{k \to \infty}$

$\longrightarrow 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k+1} = 0.$

Deci $L((x_n)_n) = \{0, 2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = 0, \ \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n = 2.$