Cursul 4

- Problemă: Cum factorizăm matricile care nu au toți minorii principali nenuli? Folosim din nou pivotarea parțială, ca la Gauss.
- Definiție (Matrici permutare)

  O matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ în care fiecare element este sau 0 sau 1 și care are pe fiecare linie și pe fiecare coloană un singur element nenul se numește o matrice permutare.
- Exemple de matrici permutare în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} e_2 & e_1 & e_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} e_2 & e_3 & e_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots \text{ 3! în total}$$

- Teoremă (Factorizarea LU cu pivotare)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă. Atunci

$\exists\, L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară cu $l_{ii} = 1 \ \forall i = \overline{0, n-1}$

$\exists\, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară inversabilă

$\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice permutare

astfel încât $P \cdot A = L \cdot U$.

- Exemplu LU cu pivotare

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 3 & 3 \\ \hline 4 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline L_{10} & L_{11} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} u_{00} & U_{01} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & U_{11} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} u_{00} & U_{01} \\ \hline u_{00} L_{10} & L_{10} U_{01} + L_{11} \cdot U_{11} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow u_{00} = 0$! Problematic, nu mai obținem U inversabilă și L_{10} poate lua orice valoare

Permut liniile 0 și 1 ale matricii A:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_0} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} u_{00} & U_{01} \\ \hline u_{00} L_{10} & L_{10} \cdot U_{01} + L_{11} \cdot U_{11} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow u_{00} = 4, \; u_{01} = -2, \; u_{02} = 1$$

$$l_{10} = 0, \; l_{20} = -1$$

$$L_{11} \cdot U_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-2 \;\; 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21} u_{11} & l_{21} u_{12} + u_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$u_{11} = 3, \quad u_{12} = 3, \quad l_{21} = \frac{6}{3} = 2$ și

$u_{22} = 5 - l_{21} \cdot u_{12} = 5 - 6 = -1.$

Verificare:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = P \cdot A, \text{ unde } P = P_0$$

- Definiție

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește simetrică și pozitiv definită (SPD) dacă

i) $A^T = A$ (A simetrică)

ii) $x^T A x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (poz. definită)

- Proprietăți

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{0,n-1}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ SPD. Atunci

i) A inversabilă

ii) $a_{ii} > 0 \quad \forall i = \overline{0,n-1}$

iii) $A^{(k)} = (a_{ij})_{i,j=\overline{0,k-1}}$ sunt SPD

iv) Complementul Schur este SPD

Demonstrație:

i) Pp. absurd A nu este inversabilă

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a.î. $A x = 0 \Rightarrow$

$x^T A x = 0$ ↯

ii) Fie $x^i = (\delta_{ji})_{j=\overline{0,n-1}} \in \mathbb{R}^n, \ \forall i = \overline{0,n-1}$

$$(x^i)^T A x^i = a_{ii} > 0 \quad \forall i = \overline{0,n-1}$$

iii), iv) Temă bonus ...

- Teoremă (Cholesky)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice SPD. Atunci $\exists!\ L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară cu

$$l_{ii} > 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$$

astfel încât $A = L \cdot L^T$

- Observație: Factorizarea Cholesky se deduce folosind aceeași rescriere pe blocuri ca la factorizarea LU

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{00} & A_{01} \\ \hline A_{10} & A_{11} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} l_{00} & 0 \\ \hline L_{10} & L_{11} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} l_{00} & L_{10}^T \\ \hline 0 & L_{11}^T \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} l_{00}^2 & l_{00} L_{10}^T \\ \hline l_{00} L_{10} & L_{10} \cdot L_{10}^T + L_{11} \cdot L_{11}^T \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_{00}^2 = a_{00} \; (>0, \text{ deoarece } A \text{ SPD}) \\ l_{00} L_{10}^T = A_{10}^T \\ L_{10} L_{10}^T + L_{11} L_{11}^T = A_{11} \end{cases}$$

- Pentru unicitatea factorizării, aleg $l_{00} > 0$ și obțin astfel
$l_{00} = \sqrt{a_{00}}$, $L_{10} = \frac{1}{l_{00}} A_{10} = \frac{1}{\sqrt{a_{00}}} A_{10}$

$$L_{11} \cdot L_{11}^T = A_{11} - L_{10} L_{10}^T = \underbrace{A_{11} - \frac{1}{a_{00}} A_{10} A_{01}}_{S, \text{ Schur}}$$

- Cum A este SPD, complementul Schur este la rândul lui SPD și reducem astfel factorizarea unei matrici SPD de dimensiune n la factorizarea complementului ei Schur, tot SPD, de dimensiune $n-1$.

- Repetând acest procedeu de n ori ori, obținem unica factorizare Cholesky din enunțul teoremei.
- Observație:

Este imposibil de verificat în practică pozitiv definirea unei matrici conform definiției așa că avem nevoie de următorul criteriu:

- Propoziție

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $A = A^T$. U.A.S.E.:

i) A este pozitiv definită

ii) Toți minorii principali sunt strict pozitivi. (Criteriul lui Sylvester)

iii) A admite factorizarea Cholesky.

- Algoritmul de factorizare Cholesky

Input: $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ simetrică cu minorii principali strict pozitivi.

$L = O_n$

Pentru k de la 0 la $n-1$:

  $l_{kk} = \sqrt{a_{kk}}$

  Pentru i de la $k+1$ la $n-1$:

    $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{l_{kk}}$

  Pentru i de la $k+1$ la $n-1$:

    Pentru j de la $k+1$ la $n-1$:

      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} \cdot l_{jk}$

Output: L inferior triunghiulară