Restanţă la analiză matematică[1]
an I, sem. I
04.06.2020

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. **a)** Fie $A = \left\{ \frac{n+\sqrt{2}}{3n+\sqrt{3}} : \quad n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-3, 0]$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+5} + \dots \frac{1}{3n+(3n-1)} \right).$$

Subiectul 2. Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{xn^2+7n+8}{n^2+5n+2} \right)^n$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2\sin x}{x}, & \text{dacă } \ x \in (0, \infty), \\ -2 + \sin 1, & \text{dacă } \ x = 0. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : [5, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{(x+n)^3}{(n+2)^4},$$

pentru orice $x \in [5, 6]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă care verifică relaţia $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$.

i) Daţi exemplu de funcţie f ca mai sus.

ii) Demonstraţi că $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4$.

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**