

Disciplina: Matemática Computacional

Aula 8: Predicados e quantificadores

Apresentação

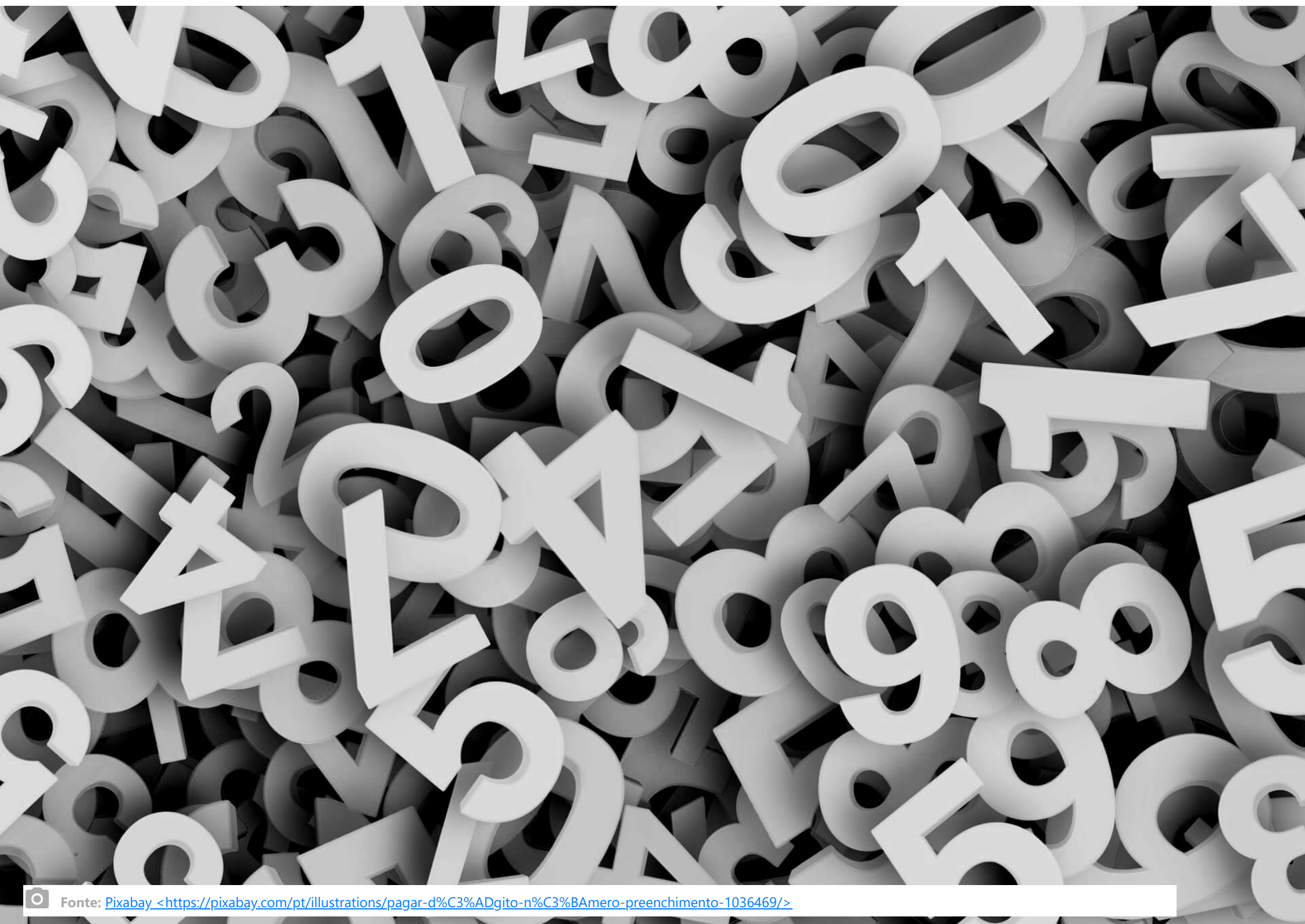
Como visto na aula anterior, o profissional de engenharia se depara com vetores em várias situações do dia a dia, calculando esforços sobre corpos, forças e campos eletromagnéticos ou mesmo simulando situações que envolvam otimizações de recursos, dentre outros exemplos.

No entanto, veremos nesta aula que tais conceitos não são suficientes para ilustrar todas as situações-problema existentes em lógica matemática e que, por seu caráter aplicado, se mostram relevantes na representação de eventos e raciocínios do dia a dia.

Objetivos

- Conceituar predicados e quantificadores;
- Identificar as formas de representação de predicados e quantificadores;
- Aplicar os conceitos de predicados e quantificadores em situações-problema de lógica matemática.

Sentença aberta, o denominado predicado



Fonte: Pixabay <<https://pixabay.com/pt/illustrations/pagar-d%C3%ADgito-n%C3%BAmero-preenchimento-1036469/>>

Uma proposição é afirmativa, apresenta um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como verdadeira ou falsa: “Juliana é linda” é um exemplo de proposição. No entanto, além disso, há outros conceitos de largo emprego em engenharia e que envolvem sentenças abertas, as quais não contemplam essas características.

Por exemplo, “ x é par” não apresenta um raciocínio de sentido completo, tampouco pode ser descrita como verdadeira ou falsa, enquanto não sabemos o valor de x : 2, 3, $\frac{3}{4}$ ou o que seja. Aqui, vemos um exemplo de sentença aberta, o denominado predicado.

Assim, começaremos o estudo do cálculo de predicados na modelagem e resolução de operações com sentenças abertas. Abordaremos a definição de predicados, sua diferenciação quanto a proposições, as definições de conjunto universo e conjunto verdade, bem como a definição e exemplos de quantificadores.

Definição de predicados

Qual é a diferença entre os conceitos de proposição e predicado?

Proposições

Vimos na Aula 5 que proposição é toda sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

Quando se afirma, por exemplo, que “ -7 é um número inteiro”, é possível verificar que se trata de uma afirmação verdadeira.

Mesmo em proposições como “Rafaela é atleta”, ainda que não a conheçamos, pode-se supor que alguém, em algum lugar, a conheça e possa dizer se ela é realmente atleta ou não.

Então, as sentenças “ -7 é um número inteiro” e “Rafaela é atleta” são proposições.

No entanto, há sentenças que, inicialmente, não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Isso ocorre quando nos referimos a um conjunto de números ou coleção de pessoas ou elementos, e não a um valor ou a alguém especificamente.

Predicados

Reformulando as duas sentenças apresentadas anteriormente, não é possível afirmar se “ x é um número natural” ou se “ x é atleta”, pois não temos como avaliar a veracidade dessas sentenças.

Assim, as sentenças “ x é um número natural” e “ x é atleta” são denominadas sentenças abertas, as quais também denominamos de predicados. Nesses dois predicados, vemos que a letra x (pode ser utilizada qualquer outra) representa a variável do predicado.

Também representamos, de forma geral, um predicado por qualquer letra maiúscula do nosso alfabeto. Se a variável envolvida é representada por x , então o predicado pode ser indicado por $P(x)$.

Além disso, é crucial contar com mais dois conceitos, muito úteis no estudo de cálculo de predicados:

———— 1 ————

Conjunto universo

Representa o conjunto de possibilidades lógicas que a variável x pode assumir em uma sentença aberta. O conjunto universo é representado como U_x ou, simplesmente, U .

———— 2 ————

Conjunto verdade

Representa o conjunto que contém o(s) elemento(s) que, ao substituir(em) a variável x , torna(m) a sentença verdadeira. Por sua vez, a notação utilizada para representar este conjunto é V_x ou V .

Exemplo

Em primeiro lugar, considere a sentença “ $x + 4 < 6$ ”. Trata-se de uma sentença aberta ou predicado, pois envolve a variável x . Assim, a determinação de seu valor lógico depende dos valores que são atribuídos a x . Podemos representá-la na forma: $P(x)$: $x + 4 < 6$.

Possibilidade 1

Considerando $U = \mathbb{N}$, o conjunto verdade será dado por $V = \{0,1\}$, pois dentre os números naturais somente o “0” e o “1” satisfazem $P(x)$.

Agora que você já identificou que se trata de um predicado, precisamos definir o conjunto de valores que o tornam verdadeiro, ou seja, seu conjunto verdade V . No entanto, para determinar seu conjunto verdade é preciso, antes, definir o conjunto universo U . Vamos analisar duas possibilidades:

Possibilidade 2

Considerando $U = \mathbb{N}$, o conjunto verdade será dado por $V = \{0,1\}$, pois dentre os números naturais somente o “0” e o “1” satisfazem $P(x)$.

Temos a sentença $x^2 + 5x + 6$. Se o conjunto universo for $U = \mathbb{R}$, temos que $V = \{-2, -3\}$. No entanto, se U for o conjunto dos números naturais, temos que V é o conjunto vazio, pois não haverá elementos do conjunto universo que satisfaçam à sentença.

Quantificadores

É comum encontrar expressões tais como “tudo”, “todo”, “para todo”, “qualquer que seja”, “existe”, “existe um único”, dentre outras, para indicar a extensão do emprego de um predicado, expressando uma ideia da quantidade de valores que pertencem ao conjunto-verdade de uma sentença aberta. Essas expressões são denominadas de quantificadores.

Atenção

Dentre os diferentes tipos que existem, é importante conhecer os dois tipos mais utilizados de quantificadores, que são:

- Universal (para todo, todo, qualquer que seja);
- Existencial (existe, existe um único).

O quantificador universal é expresso pelo símbolo “ \forall ”. É utilizado para exprimir o fato de que, para todo x em um dado conjunto-universo, a sentença $P(x)$ é verdadeira. Simbolicamente, temos “ $\forall x, P(x)$ ”.

Exemplo

A sentença “Todo número inteiro é racional” pode ser escrita, na linguagem simbólica, como $\forall x, x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Q}$ (lê-se: “para todo x pertencente a Z, temos x pertencente a Q” ou “qualquer que seja x pertencente a Z, temos x pertencente a Q”).

Outras formas de expressar esse predicado são:

$P(x): x \in \mathbb{Q}$
 $(\forall x \in \mathbb{Z})(P(x))$

O conjunto universo dessa sentença é o conjunto dos números inteiros ($U = \mathbb{Z}$). Essa sentença aberta é verdadeira para todos os valores do conjunto universo, pois para qualquer valor inteiro que atribuirmos a x, teremos satisfeita a condição $P(x): x \in \mathbb{Q}$. Sabemos que os números inteiros são também números racionais.

Assim, concluímos que o conjunto verdade dessa sentença quantificada é $V = \mathbb{Z}$. Daí, você pode já observar um ponto interessante: as sentenças quantificadas com o quantificador universal são verdadeiras somente quando o conjunto universo e o conjunto verdade são iguais.

Exemplo

O quantificador universal é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto. Se afirmarmos que “todo número natural ímpar não é múltiplo de 2”, podemos reescrever essa afirmação de outra forma:

- Seja a um número natural ímpar;
- Logo, a pode ser escrito na forma $2n + 1$, sendo que n é natural, isto é, para todo a pertencente aos naturais, $a = 2n + 1$.

Para simplificar a notação, podemos substituir o termo todo por \forall , o qual possui o mesmo significado, podendo ainda ser lido como “qualquer que seja” ou “para cada”. Logo, podemos expressar essa afirmação como $n \in \mathbb{N}, \forall a, a \text{ ímpar}, a = 2 \cdot n + 1$.

Exemplo

Seja n um número natural qualquer. Podemos afirmar que $\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$. A afirmação apresentada em linguagem simbólica ilustra que, independentemente do número natural que escolhermos, o seu produto com zero resultará em zero.

Já o quantificador existencial é utilizado para expressar que a proposição $P(x)$ é verdadeira não para todos, mas para um ou mais elementos de um dado conjunto.

Atenção

O quantificador universal é expresso pelo símbolo “ \forall ”, que pode ser lido como “existe pelo menos um”.

Sentenças abertas como “existe x tal que $P(x)$ ”, “existe pelo menos um x tal que $P(x)$ ” ou, ainda, “para algum x ocorre $P(x)$ ” podem ser escritas, na forma simbólica, como: $\exists x, P(x)$. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considere a sentença: “ $\exists x, 5x + 15 = 0$ ”, com $U = \mathbb{Z}$. Ela é verdadeira, pois, para $x = -3$, a equação “ $5x + 15 = 0$ ” é verdadeira. Portanto, existe um valor de x que satisfaz a condição apresentada, isto é, que faz a sentença quantificada ser verdadeira.

Neste exemplo, em particular, o conjunto verdade é $V = \{-3\}$. Por sinal, se o conjunto verdade fosse vazio, nós teríamos uma sentença quantificada falsa.

Por outro lado, considere novamente a sentença: “ $\exists x, 5x + 15 = 0$ ”, mas com $U = \mathbb{N}$.

Observe que, nesse caso, a sentença quantificada é falsa, pois o único valor real que satisfaz a condição apresentada é o “ -3 ”, que não é um elemento pertencente ao universo, pois não é um número natural. Temos, portanto, $V = \emptyset$.

Atenção

Quando a condição $P(x)$ refere-se a valores numéricos e o conjunto universo não é explicitado, deve-se considerar o conjunto universo U como o conjunto dos números reais \mathbb{R} .

Exemplo

Seja $P(x) = x + 8 \geq 10$. Vamos determinar o conjunto verdade de cada uma das sentenças apresentadas a seguir:

- **a)** $\exists x, P(x)$
- **b)** $\forall x, P(x)$

No caso da letra a), como não foi definido o conjunto universo, consideramos $U = \mathbb{R}$. Dessa forma, a sentença $P(x)$ tem como conjunto verdade $V = [2, \infty[$. Como V é um conjunto não vazio, concluímos que a sentença quantificada do item (a) é verdadeira, pois existe pelo menos um valor (na verdade, um conjunto infinito de valores) que faz a sentença aberta ser verdadeira.

Já no caso da letra b), como $V \neq U$, concluímos que a sentença quantificada é falsa, pois nem todos os elementos do universo satisfazem a condição $P(x)$ indicada no exemplo.

Exemplo 2

Existe pelo menos um número natural n que, subtraído de seu cubo, resulta em 0, isto é, $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n = 0$.

Será que a afirmação anterior é válida para qualquer valor de n ? A resposta é: não. Se escolhermos o valor de 2 para n , teremos $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$. Logo, vemos que nem todos os valores de n fazem com que a sentença resulte em zero.

Os únicos valores básicos para que a igualdade seja verdadeira são $n = 1$ e $n = 0$. Por sinal, existe ainda o valor de $n = -1$, mas nós não o consideramos parte do conjunto verdade porque -1 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Representação de quantificadores como conjunções ou disjunções

Para finalizar esta aula, é importante saber que sentenças quantificadas também podem ser expressas através da disjunção ou conjunção de proposições:

A sentença quantificada universal “ $\forall x, P(x)$ ”, considerando como conjunto universo $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é equivalente à conjunção $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$.

Em linguagem simbólica, escrevemos:

$$\forall x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

A sentença quantificada existencial “ $\exists x, P(x)$ ”, considerando como conjunto universo $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é equivalente à disjunção $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$.

Em linguagem simbólica, escrevemos:

$$\exists x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Atividades

1. A definição “conjunto de possibilidades lógicas que a variável x pode assumir em uma sentença aberta” se refere ao conceito de:

- a) Conjunto verdade
 - b) Conjunto universo
 - c) Conjunto variável
 - d) Conjunto aberto
 - e) Nenhuma das alternativas anteriores.
-

2. Veja as seguintes sentenças abertas:

- $P(x): x^2 - 5x + 6 = 0$
- $Q(x): x + 4 \leq 0$
- $U = \mathbb{R}$

Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta corretamente a sequência de valores lógicos para:

- $\forall x, P(x)$
 - $\exists x, P(x)$
 - $\forall x, Q(x)$
- a) F – F – F
b) V – V – V
c) F – V – F
d) V – V – F
e) F – V – V

3. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta a negação da sentença “Para todo y, existe x tal que $x + y = 1$ ”:

- a) Existe ao menos um valor de y, tal que, para ao menos um valor de x, o valor de $x + y$ é diferente de 1.
b) Existe ao menos um valor de y, tal que, para todo x, o valor de $x + y$ é diferente de 1.
c) Existe ao menos um valor de y, tal que, para todo x, o valor de $x + y$ é igual a 1.
d) Para todos os valores de x e y, o valor de $x + y$ é diferente de 1.
e) Nenhuma das alternativas anteriores

4. A definição “conjunto que contém o(s) elemento(s) que, ao substituir(em) a variável x, torna(m) a sentença verdadeira” se refere ao conceito de:

- a) Conjunto verdade
b) Conjunto universo
c) Conjunto variável
d) Conjunto aberto
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Notas

Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à computação**. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2016. 200p.

Próximos passos

- Variáveis livres e ligadas;
- Negação e alcance do escopo de quantificadores, enfatizando suas principais definições e representação;
- Representação de situações do cotidiano;
- Informações relevantes expressas por meio de quantificadores.

Explore mais

Certamente, há materiais adicionais que podem complementar e ampliar seu conhecimento sobre predicados e quantificadores, motivando-o ainda mais para os novos desafios que virão. Assim, segue uma lista de sites na internet para que você os consulte depois:

- [Lógica e matemática discreta: Aula 7 - Quantificadores e funções <https://www.youtube.com/watch?v=ENptMNeiDTQ>](https://www.youtube.com/watch?v=ENptMNeiDTQ);
- [Matemática discreta – 03 <http://www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/Mat_Disc_Parte03.pdf>](http://www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/Mat_Disc_Parte03.pdf);
- [Lógica de proposições quantificadas: cálculo de predicados <https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_2ProposicoesQuantificadas.pdf>](https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_2ProposicoesQuantificadas.pdf);