

Disciplina: Matemática Computacional

Aula 9: Cálculo de predicados

Apresentação

Nesta aula, prosseguiremos com o estudo de cálculo dos predicados, investigando outros temas de grande importância, como variáveis livres e ligadas, alcance do quantificador e negação de fórmulas quantificadas.

Objetivos

- Apontar as principais formas de negação de quantificadores;
- Identificar variáveis livres e ligadas e o alcance de quantificadores;
- Relacionar as principais regras de inferência no cálculo de predicados.

O profissional da área de tecnologia se depara com esses temas a todo instante.

De acordo com o cálculo proposicional, é possível afirmar que “2 é um número natural”. No entanto, não temos como avaliar a veracidade de uma sentença como “x é um número natural”, pois, nesse caso, nos referimos a um conjunto de números, não a um valor específico, dando origem ao denominado predicado.

No entanto, algumas perguntas persistem:

Essa variável x pode assumir qualquer valor?

Podemos aplicar expressões de quantificação a essa sentença (todo, existe ao menos um, ...)?

Podemos aplicar expressões de negação da quantificação (nenhum, existe ao menos um que não, ...)?

Negação de quantificadores

Na aula passada, vimos o conceito de quantificadores e seus tipos principais, sempre nos valendo de formas afirmativas de expressão por meio de sentenças abertas, os ditos predicados. No entanto, é importante que você saiba desde já que também é possível representar a negação de sentenças quantificadas.

Veja a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1



Considere que o conjunto universo de nosso estudo é o conjunto A de todos os alunos da Estácio. Agora, considere $x \in A$. A sentença quantificada “ $\forall x$, x é estudante de Direito” nos diz que “todo aluno da Estácio é estudante de Direito”. Já a sentença quantificada “ $\exists x$, x é estudante de Direito” significa que “existe pelo menos um aluno da Estácio que é estudante de Direito”.

Com base no que você estudou na Aula 8, percebe que aqui temos sentenças diferentes: a primeira só pode ser considerada verdadeira se seu conjunto verdade for igual ao conjunto universo, ou seja, se todo aluno da Estácio for estudante de Direito; já a segunda será verdadeira se, pelo menos, um aluno da Estácio for estudante de Direito.

Agora vamos considerar a negação da primeira sentença “todo aluno da Estácio é estudante de Direito”. Ela pode ser representada por $\sim(\forall x, x \text{ é estudante de Direito})$, e, na linguagem natural, pode ser expressa como “nem todo aluno da Estácio é estudante de Direito” ou “não é verdade que todo aluno da Estácio é estudante de Direito”.

Atenção

Um aspecto muito importante a ser observado é que negar uma sentença com quantificador universal (como é o caso de nosso primeiro exemplo) não é equivalente a negar simplesmente a sentença aberta.

Em outras palavras, utilizando a linguagem simbólica, perceba que a negação $\sim(\forall x, x \text{ é estudante de Direito})$ não é equivalente à $\forall x, \sim x \text{ é estudante de Direito}$.

Já com base na linguagem natural, não é difícil perceber que “não é verdade que todo aluno da Estácio é estudante de Direito” não significa que “todo aluno da Estácio não é estudante de Direito”. Essas sentenças têm sentidos bem diferentes.

Por outro lado, compare as sentenças abertas ou predicados “todo aluno da Estácio é estudante de Direito” e sua negação “nem todo aluno da Estácio é estudante de Direito” (ou “não é verdade que todo aluno da Estácio é estudante de Direito”). Note que a negação apresentada pode ser entendida como “existe pelo menos um aluno da Estácio que não é estudante de Direito”.

Este exemplo nos dá uma bela ilustração de que a negação de uma sentença quantificada com o quantificador universal corresponde, em verdade, a uma outra sentença aberta em que o quantificador existencial é aplicado em uma sentença em que a condição é negada.

Na linguagem simbólica, podemos escrever:

- $\sim(\forall x, x \text{ é estudante de Direito}) \Leftrightarrow \exists x, x \text{ não é estudante de Direito}$.

Se denotarmos por $P(x)$ a sentença “é estudante de Direito”, temos:

- $\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \sim P(x)$

Exemplo 2



Vejamos, agora, que quando negamos uma sentença quantificada como o quantificador existencial, algo semelhante ocorre.

Vamos considerar a sentença quantificada “ $\exists x$, x é estudante de Direito”, isto é, “existe pelo menos um aluno da Estácio que é estudante de Direito”.

Sua negação, na linguagem natural, pode ser dada por “não existe nenhum aluno da Estácio que seja estudante de Direito” ou, de forma equivalente, “qualquer que seja o aluno da Estácio, ele não é estudante de Direito”.

Veja que, agora, podemos concluir que:

- $\sim(\exists x, x \text{ é estudante de Direito}) \Leftrightarrow \forall x, x \text{ não é estudante de Direito}$ ou $\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim P(x)$.

Outro aspecto muito interessante dos dois exemplos apresentados aqui é que eles nos ajudam a comprovar as propriedades referentes às negações de sentenças quantificadas com base na aplicação de certas leis de equivalência.

Exemplo 3



Considere a sentença aberta $P(x)$ e o seu conjunto universo $U = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. A sentença quantificada “ $\forall x, P(x)$ ” equivale, como já vimos, à conjunção $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$. Podemos, então, escrever que:

- $\forall x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$

Dessa forma, podemos expressar sua negação na forma:

- $\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \sim(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n))$

Aplicando uma das leis de De Morgan (que refere-se à negação de uma conjunção), podemos escrever:

- $\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_n)$

Atenção

Observe que a disjunção $\sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_n)$ é verdadeira se a condição $P(x)$ não ocorrer pelo menos para um elemento do conjunto universo, ou seja, se não existe nem ao menos um elemento do universo em que ocorre $P(x)$.

Isso nos leva a concluir que essa disjunção equivale a $\forall x, \sim P(x)$. Logo, colocando essa equivalência de forma geral, saiba que podemos escrever:

- $\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \sim P(x)$

Exemplo 4



Considere x como “morador do Rio de Janeiro” e $P(x)$ como “torcedor do Flamengo”. Assim, uma expressão como:

- “Todo morador do Rio de Janeiro é torcedor do Flamengo”

tem sua forma negada como:

- “Existe morador do Rio de Janeiro que não é torcedor do Flamengo”.

De igual modo, podemos analisar um exemplo que apresente a negação de uma sentença quantificada com o quantificador existencial.

Exemplo 5



Considere a sentença aberta $P(x)$ e o seu conjunto universo $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Como vimos na aula passada, a sentença quantificada $\exists x, P(x)$ equivale à disjunção $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$. Logo, podemos escrever que:

- $\exists x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$

Assim, podemos expressar a negação desta equivalência lógica na forma:

- $\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \sim(P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n))$

Com base no que aprendemos na Aula 7, vamos aplicar uma das leis de De Morgan, a qual trata da negação de uma conjunção.

Nós podemos reescrever a sentença aberta, indicando que $\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \sim P(a_1) \wedge \sim P(a_2) \wedge \dots \wedge \sim P(a_n)$.

Vê-se, portanto, que a conjunção $\sim P(a_1) \wedge \sim P(a_2) \wedge \dots \wedge \sim P(a_n)$ é verdadeira se a condição $P(x)$ não ocorrer para nenhum elemento do conjunto universo, ou seja, qualquer que seja o elemento considerado do conjunto universo, $P(x)$ não ocorre. Isso nos leva a concluir que essa conjunção equivale à $\forall x, \sim P(x)$.

Portanto, de forma geral, podemos representar a negação do quantificador existencial como:

- $\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim P(x)$

Exemplo 6



Considere x como “morador do Rio de Janeiro” e $P(x)$ como “torcedor do Flamengo”. Assim, uma expressão como:

- “Existe morador do Rio de Janeiro que é torcedor do Flamengo”

tem sua forma negada como:

- “Todo morador do Rio de Janeiro não é torcedor do Flamengo”.

Alcance do quantificador

Os exemplos 5 e 6 do tópico anterior nos permitem entender alguns conceitos adicionais associados.

Um deles é o de alcance de um quantificador, condição $P(x)$ que se associa ao quantificador.

Exemplo:

Considere as sentenças:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 4 < 0$;

b) $\exists x, \forall y, (x - y) \in \mathbb{R}$

No item (a), o alcance do quantificador universal é “ $x + 4 < 0$ ”. Já no item (b), há dois quantificadores — o primeiro é universal, enquanto o segundo é existencial.

Desse modo, podemos ler a sentença “ $\exists x, \forall y, (x - y) \in \mathbb{R}$ ” como “existe x , tal que para todo y , a diferença $x - y$ é um valor real”. Nesse caso, o alcance do quantificador existencial é “ $\forall y, (x - y) \in \mathbb{R}$ ”. Já o alcance do quantificador universal é “ $(x - y) \in \mathbb{R}$ ”.

Variáveis livres e ligadas

Outro conceito bastante relevante é o de variáveis livres e ligadas. Veja a seguir alguns exemplos:

Exemplo 1



Considere as seguintes sentenças abertas:

1. Todo roedor é mamífero.
2. Existe um ser humano que é pigmeu.
3. Para todo ser humano x existe um ser humano y tal que y é pai de x .

Considerando todos os seres humanos como conjunto universo dos predicados descritos no parágrafo anterior, é possível definir os seguintes predicados em linguagem simbólica: $\text{roedor}(x)$, $\text{pigmeu}(x)$, $\text{mamífero}(x)$, $\text{pai}(x,y)$.

Valendo-se do cálculo de predicados, podemos descrever esses enunciados da seguinte forma:

1. $\forall x(\text{roedor}(x) \rightarrow \text{mamífero}(x))$
2. $\exists x, \text{pigmeu}(x)$
3. $\forall x, \exists y, \text{pai}(x,y)$

A partir desses exemplos, você pode entender que a variável ligada está associada a um quantificador e aparece dentro do escopo desse quantificador.

Exemplo 2



Em um o escopo de “ \forall ” é $x(\text{roedor}(x) \rightarrow \text{mamífero}(x))$. Em 3, o escopo de “ \forall ” é $\exists y, \text{pai}(x,y)$. Por sua vez, a variável é dita livre quando não está associada a nenhum quantificador. Por exemplo, em $\forall x, p(x,y)$, “ y ” é uma variável livre.

Conforme destacado por Bravo (2018), expressões podem ser construídas combinando-se predicados com quantificadores, símbolos de agrupamento (parênteses ou colchetes) e os conectivos lógicos da lógica proposicional.

Atenção

No entanto, tal combinação não pode ser feita de qualquer maneira, pois uma expressão tem de obedecer a regras de sintaxe para ser considerada uma fórmula bem-formulada (FBF). Assim, temos que fórmulas bem-formuladas contendo predicados e quantificadores são chamadas de FBFs predicadas.



Considere que a variável x pertence ao conjunto universo dos animais:

- Se H é fórmula, então $(\neg H)$ também é uma fórmula: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ é uma fórmula, então $(\neg \text{roedor}(x))$ também é uma fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ também é fórmula: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ e $\text{mamífero}(x)$ são fórmulas, então $\text{roedor}(x) \vee \text{mamífero}(x)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ também é fórmula: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ e $\text{mamífero}(x)$ são fórmulas, então $\text{roedor}(x) \wedge \text{mamífero}(x)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ também é fórmula: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ e $\text{mamífero}(x)$ são fórmulas, então $\text{roedor}(x) \rightarrow \text{mamífero}(x)$ também é fórmula;
- Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ também é fórmula: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ e $\text{mamífero}(x)$ são fórmulas, então $\text{roedor}(x) \leftrightarrow \text{mamífero}(x)$ também é fórmula;
- Se H é fórmula e x variável, então $\forall x, (H(x))$ e $\exists x, (H(x))$ são fórmulas: Por exemplo, se $\text{roedor}(x)$ é uma fórmula, então $\forall x, (\text{roedor}(x))$ e $\exists x, (\text{roedor}(x))$ também são fórmulas.

Sabemos que um argumento pode ser representado em forma simbólica como $P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \dots \wedge Pn \rightarrow Q$, no qual as FBFs são construídas a partir de predicados e quantificadores, assim como de conectivos lógicos e símbolos de agrupamento.

Portanto, para ser um argumento válido, Q tem de ser uma consequência lógica de $P1, P2, \dots, Pn$, baseada apenas na estrutura interna do argumento, não na veracidade ou falsidade de Q em qualquer interpretação particular.

Em outras palavras, a FBF $P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \dots \wedge Pn \rightarrow Q$ tem que ser válida (verdadeira) em todas as interpretações possíveis.

Atenção

É importante que você utilize o sistema de regras de dedução para construir uma sequência de demonstração que parta das hipóteses e chegue à conclusão. As regras devem preservar os valores lógicos, de modo que, se em alguma interpretação todas as hipóteses forem verdadeiras, então a conclusão também será verdadeira com aquela interpretação.

A abordagem geral para provar esses argumentos compreende três etapas, a saber:

_____ 1 _____

Retirar os quantificadores;

_____ 2 _____

Manipular as FBFS sem os quantificadores;

_____ 3 _____

Colocá-los no lugar.

Regras de inferência para cálculo de predicados

No entanto, você pode se perguntar: como retirar e inserir quantificadores? Utilize as novas regras de inferência para cálculo de predicados, conforme indicado a seguir:

De	Podemos deduzir	Nome da regra	Restrições sobre o uso
$\forall x$ ($P(x)$)	$P(t)$, onde t é uma variável ou um símbolo constante.	Particularização universal (PU)	Se t for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador para t .
$\exists x$ ($P(x)$)	$P(t)$, onde t é uma variável ou um símbolo constante não utilizado anteriormente na sequência de demonstração.	Particularização existencial (PE)	É necessário que seja a primeira regra a usar t .
$P(x)$	$\forall x$ ($P(x)$)	Generalização universal (GU)	$P(x)$ não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese na qual x é uma variável livre nem pode ter sido deduzida, através de PE, de uma FBF na qual x é uma variável livre.
$P(x)$ ou $P(a)$	$\exists x$ ($P(x)$)	Generalização existencial (GE)	Para ir de $P(a)$ a $\exists x$ ($P(x)$), x não pode aparecer em $P(a)$.
De	$\forall x$ ($P(x)$)		
Podemos deduzir	$P(t)$, onde t é uma variável ou um símbolo constante.		
Nome da regra	Particularização universal (PU)		
Restrições sobre o uso	Se t for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador para t .		
De	$\exists x$ ($P(x)$)		
Podemos deduzir	$P(t)$, onde t é uma variável ou um símbolo constante não utilizado anteriormente na sequência de demonstração.		
Nome da regra	Particularização existencial (PE)		
Restrições sobre o uso	É necessário que seja a primeira regra a usar t .		
De	$P(x)$		
Podemos deduzir	$\forall x$ ($P(x)$)		
Nome da regra	Generalização universal (GU)		
Restrições sobre o uso	$P(x)$ não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese na qual x é uma variável livre nem pode ter sido deduzida, através de PE, de uma FBF na qual x é uma variável livre.		
De	$P(x)$ ou $P(a)$		

Podemos deduzir	$\exists x (P(x))$
Nome da regra	Generalização existencial (GE)
Restrições sobre o uso	Para ir de $P(a)$ a $\exists x (P(x))$, x não pode aparecer em $P(a)$.

Exemplo

Como exemplo de aplicação das regras de inferência indicadas na tabela, veja a demonstração do argumento $\forall x [P(x) \rightarrow R(x)] \wedge \neg R(y) \rightarrow \neg P(y)$

- $\forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$ (por hipótese do enunciado).
- $\neg R(y)$ (por hipótese do enunciado).
- $P(y) \rightarrow R(y)$ (aplicação da regra de inferência da particularização universal na sentença 1).
- $\neg P(y)$ (aplicação da regra modus tollens nas sentenças 2 e 3).

Atividades

1. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta a NEGAÇÃO da sentença “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$ ”:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$
- e) Nenhuma das alternativas anteriores.

2. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta a NEGAÇÃO da sentença “ $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 > 0$ ”:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 < 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 \leq 0$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \geq 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0$
- e) Nenhuma das alternativas anteriores.

3. (SEGEPI-MA) Sabe-se que um executivo é honesto se, e somente se, pratica exercícios físicos. João é um executivo, e é sedentário. Pode-se, então, concluir que:

- a) Todo executivo é desonesto.
 - b) Todo executivo pratica exercícios físicos.
 - c) João não é um executivo honesto.
 - d) Todo executivo é honesto.
 - e) Nenhuma das alternativas anteriores.
-

4. (EMSERH) Uma escola de dança oferece aulas de zumba, samba, sapateado, forró e frevo. Todas as professoras de zumba são, também, professoras de samba, mas nenhuma professora de samba é professora de sapateado.

Todas as professoras de forró são, também, professoras de frevo, e algumas professoras de frevo são, também, professoras de sapateado.

Sabe-se que nenhuma professora de frevo é professora de samba, e, como as aulas de samba, forró e sapateado não têm nenhuma professora em comum, então:

- a) Todo executivo é desonesto.
 - b) Todo executivo pratica exercícios físicos.
 - c) João não é um executivo honesto.
 - d) Todo executivo é honesto.
 - e) Nenhuma das alternativas anteriores.
-

4. Preocupados em reestruturar as atividades oferecidas pelo centro esportivo da cidade, os dirigentes fizeram uma pesquisa sobre a preferência dos usuários aos esportes oferecidos.

Notou-se que todos os praticantes de caminhada também faziam ioga, mas nenhum dos alunos de ioga praticava natação.

Todos os alunos de spinning eram também praticantes de pilates e alguns dos que praticavam pilates faziam natação.

Como nenhum dos alunos de pilates praticava ioga e nenhum dos que faziam spinning praticava natação, conclui-se que:

- a) Pelo menos um praticante de spinning faz ioga.
 - b) Pelo menos um praticante de caminhada faz natação.
 - c) Nenhum praticante de spinning faz caminhada.
 - d) Todos os praticantes de pilates também praticam spinning.
 - e) Todos os frequentadores de ioga também fazem pilates.
-

Notas Referências

BRAVO, Raquel S. F. **Lógica de predicados**. Disponível em: [//www2.ic.uff.br/~ueverton/files/aulasFMC/Aula%2014.pdf](http://www2.ic.uff.br/~ueverton/files/aulasFMC/Aula%2014.pdf)
<[//www2.ic.uff.br/~ueverton/files/aulasFMC/Aula%2014.pdf](http://www2.ic.uff.br/~ueverton/files/aulasFMC/Aula%2014.pdf)>. Acesso em: 25 Jan. 2019.

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à computação**. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2016.

Próximos passos

- Erro permanente para sistemas com realimentação unitária;
- Tipo de um sistema;
- Erro permanente para sistemas com realimentação não unitária.

Explore mais

Certamente, há materiais adicionais que podem complementar e ampliar seu conhecimento sobre predicados e quantificadores, motivando-o ainda mais para os novos desafios que virão. Assim, segue uma lista de sites na internet para que você os consulte depois:

- Leia o texto “[Lógica de proposições quantificadas: cálculo de predicados](https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_2ProposicoesQuantificadas.pdf) <https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_2ProposicoesQuantificadas.pdf>”.
- Assista também ao vídeo “[Lógica e matemática discreta \(Aula 7\): quantificadores e funções](https://www.youtube.com/watch?v=ENptMNeiDTQ&t=24s) <<https://www.youtube.com/watch?v=ENptMNeiDTQ&t=24s>>”.