

Disciplina: Matemática Computacional

Aula 5: Fundamentos de cálculo proposicional

Apresentação

Estudaremos as diferenças entre as lógicas natural e simbólica. Em seguida, serão identificadas e representadas as proposições simples e compostas. Por fim, veremos os principais conectivos empregados em proposições compostas, verificando como se dá a aplicação destes conceitos em casos típicos da área de Tecnologia.

Objetivos

- Diferenciar as lógicas natural e simbólica;
- Identificar e representar proposições simples e compostas;
- Listar os principais conectivos empregados em proposições compostas.

Lógica

De acordo com o dicionário Aurélio, a palavra lógica apresenta vários significados, dentre os quais se destacam:



Naturalmente, todas essas definições são válidas, mas a última é a que mais se alinha ao sentido de nosso estudo, não só nesta aula, mas até o final do curso de Matemática Computacional. Em particular, ficaremos com a seguinte definição de lógica matemática:

O estudo de lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto.

Fonte: [Portal UFV <ftp://ftp.ufv.br/dma/Listas%20Antigas/logica.PDF> .](ftp://ftp.ufv.br/dma/Listas%20Antigas/logica.PDF)



© O conceito do cérebro humano. O hemisfério criativo direito versus o hemisfério lógico esquerdo. Fonte: Shutterstock Por Triff.

Conforme descrito em Brochi (2016), **a lógica matemática permite expressar a forma do pensamento com base em proposições que dão suporte a demonstrações e argumentos**. Assim, é possível não só procurar, mas também demonstrar a verdade.

Vemos que as proposições são o elemento básico para procurar a verdade e se chegar a conclusões. Não são construídas de qualquer forma — na verdade, deve-se seguir um conjunto de regras (**ou formalismos**) para se demonstrar a verdade (as chamadas **deduções**), conforme previsto na área da lógica matemática denominada **cálculo proposicional**.

Raciocínio e lógica: linguagem natural e linguagem simbólica

Muitas vezes, as pessoas estão interessadas somente nos resultados obtidos, sem se preocupar com os processos para obtenção dos resultados, não é mesmo? No entanto, é fundamental que o processo de raciocínio esteja correto.

Por isso, é preciso sempre se perguntar: será que a conclusão alcançada realmente deriva das premissas usadas ou pressupostas? Tudo bem se as premissas fornecem base ou boas provas para a conclusão.

Raciocínio Correto

Logo, o raciocínio é correto se a afirmação da verdade das premissas garante a afirmação de que a conclusão também é verdadeira.



Raciocínio Incorreto

No entanto, se não há como dar essa garantia a partir das premissas, o raciocínio é incorreto.

E justamente a questão principal da lógica matemática e, em particular, do cálculo proposicional é a distinção entre o raciocínio correto e o incorreto.

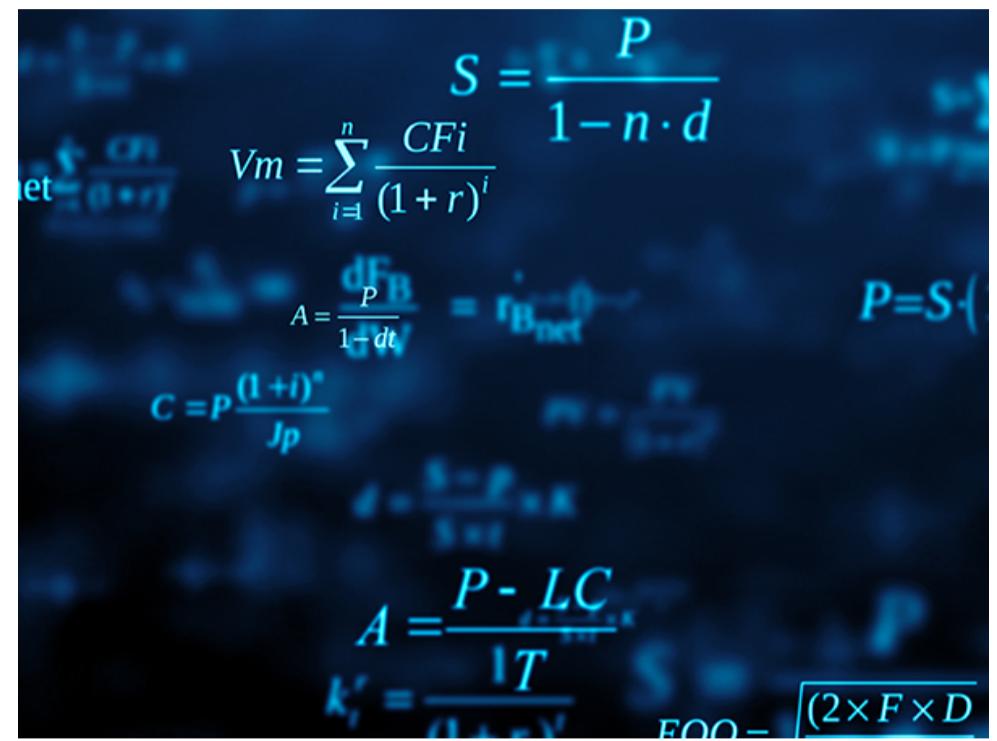
Chamamos de inferência o processo pelo qual se chega a uma conclusão. Em lógica, o importante é examinar a forma da inferência, a fim de verificar se é justificável chegar à determinada conclusão.

Dica

Estratégias como divagação, associações de ideias e imaginação são recursos válidos para o pensamento, mas inadequadas para apresentar conclusões corretas sob a ótica da lógica matemática. Para se atender a esse rigor matemático no processo de inferência, é importante identificar a forma correta de expressar o raciocínio — premissas ou conclusões.

Como descrito em Brochi (2016), utilizamos uma linguagem diferente da que estamos acostumados no dia a dia — a dita linguagem natural. Isso acontece porque, na linguagem natural, há muitos casos de ambiguidade em que uma mesma sentença pode conter mais do que um significado. Isso não pode ocorrer com as sentenças utilizadas na lógica matemática.

Por esse motivo, utilizamos uma linguagem simbólica para representar o raciocínio que analisaremos ao longo do restante do curso. O objetivo aqui é fazer com que apenas uma interpretação seja permitida e considerada, para que não haja dúvida sobre o que está sendo afirmado.



© Fórmulas Matemáticas. Fonte: Shutterstock por Erik Svoboda.

Diferença entre estas as formas de linguagem

Vamos ver a diferença entre estas as formas de linguagem; **Linguagem Natural, Linguagem Simbólica, Linguagem Formal e Sílogismos:**



© Fonte: Shutterstock.

Linguagem Natural



Ao comer sua papinha, Juliana deixou cair um pouco no babador. Suas primas, vendo tudo, disseram: "Cuidado, Juju! Você deixou cair quase tudo!". Naturalmente, trata-se de um exagero — embora isso possa ocorrer com alguns bebês.

O objetivo das primas de Juliana não foi o de chegar a uma conclusão lógica após avaliar a massa de papinha que caiu na roupa de Juliana (indicando que superou um limiar de, digamos, 90% do que estava no prato de comida). Trata-se apenas de uma forma de dizer que a quantidade de papinha que Juliana deixou escorrer não foi pouca.

Linguagem Simbólica



Por sua vez, na lógica matemática, não há exageros ou possibilidades. Aqui, só se pode apresentar uma conclusão quando se tem certeza. Vamos ver uma apresentação de raciocínio empregando a linguagem simbólica:

Se Juliana não comer sua papinha, então não poderá passear na praça.

De acordo com a lógica matemática, podemos utilizar a linguagem simbólica para representar a frase anterior "se p , então q ", onde p representa a proposição "Se Juliana não comer sua papinha" e q representa a proposição "então não poderá passear na praça".

Repare que só podemos chegar a uma conclusão: se Juliana não comer, então não poderá passear na praça. E se ela comer a papinha? Não sabemos, pois o exemplo não discrimina o que vai acontecer — passear na praça ou não. Em outras palavras, o raciocínio descrito somente será falso se Juliana não comer sua papinha e, ainda assim, passear na praça. Esse exemplo ilustra que a lógica matemática é considerada dedutiva (BROCHI, 2016).

ATENÇÃO: O argumento dedutivo é aquele cuja conclusão é inferida necessariamente a partir de suas premissas. Nele, existe uma ligação entre as premissas e a conclusão, de modo que só se pode chegar a determinada conclusão, não a outras, sem que se diga mais na conclusão do que foi dito nas premissas.

Linguagem Formal



Além disso, a lógica matemática é formal. Vejamos.

Juliana é um bebê.

Todo bebê come papinha.

Então, Juliana come papinha.

Se considerarmos que as duas primeiras frases ("Juliana é um bebê" e "Todo bebê come papinha") são verdadeiras, não há como negar que a terceira frase ("Juliana come papinha") também é verdadeira, mesmo que não sejamos pediatras para confirmar as duas frases iniciais.

ATENÇÃO: É por isso que dizemos que a linguagem é formal: ela se preocupa com a forma do pensamento, e não com o conteúdo.



Podemos substituir os termos “Juliana”, “bebê” e “come papinha” por A, B e C, respectivamente, e ainda assim chegar à mesma conclusão. Veja:

A é B.

Todo B faz C.

Então, A faz C.

Conforme descrito em Brochi (2016), raciocínios como o apresentado no último exemplo são conhecidos por silogismos.

ATENÇÃO: Um silogismo tem as seguintes propriedades:

- Possui duas sentenças (premissas), que servem como ponto de partida para a dedução – ou seja, dessas sentenças decorre outra, que é a conclusão.
- Tanto as premissas como a conclusão são sentenças com sujeito e predicado. A vinculação se dá por certas palavras que chamamos palavras lógicas. Exemplos de palavras lógicas são: todos, existe algum, ou, se...então, não, é. Outros são chamados de conectivos, outros de quantificadores.

Proposições simples e compostas

Em primeiro lugar, precisamos definir o que é uma proposição.

Proposição é um conceito primitivo que apresenta as seguintes características:

1. **Deve ser afirmativa;**
2. **Apresentar pensamento de sentido completo;**
3. **Pode ser escrita tanto na forma simbólica como na linguagem natural;**
4. **Pode ser classificada em verdadeira ou falsa.**

Há diversas sentenças que não podem ser classificadas como proposições. E outras inúmeras sentenças que podem ser classificadas como proposições, pois atendem aos quatro requisitos listados na definição anterior.

Vejamos a seguir exemplos daquilo que pode ou não ser uma proposição:

Não Proposição



“Você estudou?” – trata-se de uma sentença interrogativa, e não afirmativa.

“O quadrado de x é igual a 9” – trata-se de uma sentença aberta; não é possível obter seu sentido completo sem a informação do valor de x, de modo que não se pode determinar se é verdadeira ou falsa.

“Que assunto interessante!” – é uma sentença exclamativa, que não pode ser descrita em linguagem simbólica.

Proposição



Por outro lado, inúmeras sentenças podem ser classificadas como proposições, pois atendem aos quatro requisitos listados na definição anterior:

S1 – “Campinas é uma cidade de São Paulo.”

S2 – “O Brasil é um país europeu.”

S3 – “Se João é aluno de Exatas, então está matriculado no curso de Tecnologia de Redes de Computadores ou é aluno de Engenharia Elétrica.”

ATENÇÃO: Podemos perceber diversos aspectos interessantes nestas três últimas sentenças:

Todas são declarativas (ou afirmativas) e apresentam sentido completo.

Todas podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas (ou “1” e “0”, respectivamente). Por exemplo, S1 é verdadeira (“1”) e S2 é falsa (“0”). A sentença S3 só pode ser avaliada por alguém que conheça João.

Todas podem ser escritas na forma simbólica.

S1 e S2 apresentam uma única proposição – logo, são denominadas proposições simples, representadas por letras minúsculas.

S3 é uma *proposição composta*, visto que pode ser separada em três proposições simples interligadas com o emprego de conectivos:

- p: João é aluno de Exatas.
- q: João está matriculado no curso de Tecnologia de Redes de Computadores.
- r: João é aluno de Engenharia Elétrica.

Desse modo, S3 pode ser expressa de forma simbólica como $p \rightarrow (q \vee r)$ (leia-se: “se p, então q ou r”).

Conforme descrito em Brochi (2016), no cálculo proposicional, cada proposição simples é também chamada de átomo. Por sua vez, uma sentença em que são combinadas proposições simples (átomos) através do uso de conectivos é denominada de sentença atômica.

Para finalizar essa investigação sobre a definição e os tipos de proposições, é importante saber que existem dois princípios que consideramos no estudo da lógica matemática. Eles são bastante simples, mas relevantes no estudo e de aplicação geral.

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.



Princípio do terceiro excluído

Toda proposição ou é só verdadeira, ou só falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

Atenção

Com esses dois princípios, esteja certo de que toda proposição que consideramos será sempre verdadeira ou falsa. Não há espaço para “talvez”. Além disso, nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Conectivos



Na gramática das linguagens naturais, duas sentenças (mais precisamente, duas orações) podem ser unidas por uma conjunção para formar uma sentença composta (o dito período composto), trazendo, dentre outros conceitos, ideias:

- adversativas (mas, porém, contudo),
- aditivas (e),
- alternativas (ou),
- conclusivas (então),
- explicativas (pois),

Pensando agora em lógica matemática, vemos que algumas dessas conjunções gramaticais também são aplicadas. Veja a seguir dois exemplos:

Exemplo 1



Considere as seguintes sentenças:

- S1: Juliana estuda Matemática.
- S2: Rafaela estuda Matemática.
- S3: Juliana estuda Matemática e Rafaela estuda Matemática.
- S4: Juliana estuda Matemática, então Rafaela estuda Matemática.

Em linguagem natural, vemos que as palavras "e" e "então" nas sentenças S3 e S4 são conjunções que unem as sentenças (S1) e (S2) para formar as sentenças compostas (S3) e (S4).

Já em linguagem simbólica, temos que o "e" utilizado em (S3) é um conectivo lógico, pois o valor verdade de (S3) é determinado por (S1) e (S2): não faria sentido afirmar (S1) e (S2) e negar (S3).

No entanto, a palavra "então" em (S4) não pode ser considerada um conectivo lógico, pois é possível que (S1) e (S2) sejam verdadeiras e, mesmo assim, negar (S4).

Exemplo 2



Rafaela pode ter estudado matemática porque deseja aprender cálculo proposicional, e não porque Juliana estuda matemática. Desse modo, vemos que várias palavras e expressões representam conectivos lógicos. A lista a seguir apresenta os mais usados:

- "ou" (disjunção) (\vee)
- "ou...ou" (disjunção exclusiva) ($\vee\!\vee$)
- "se...então" (condicional) (\rightarrow)
- "se e somente se" (bicondicional) (\leftrightarrow)
- "não" (negação), que também expressa um conectivo lógico, mesmo sendo aplicada a uma única sentença (\sim)

Como estamos tratando de linguagem simbólica, você deve ter percebido que cada um desses conectivos é representado por um símbolo. Esses símbolos são chamados conectivos ou operadores lógicos.

Por ora, é importante que você já saiba disso, pois podemos chegar a conclusões muito interessantes a partir das regras de comportamento (as denominadas tabelas-verdade) de cada um desses conectivos. Eles permitem que novas fórmulas bem-formadas sejam construídas ao juntar outras fórmulas bem-formadas usando conectivos lógicas – um assunto para uma próxima aula.

Atividade

1. Assinale a ÚNICA alternativa que NÃO representa uma característica de proposições:

- a) Deve ser afirmativa.
 - b) Apresenta pensamento de sentido completo.
 - c) Pode ser escrita na forma simbólica.
 - d) Pode ser classificada como verdadeira ou falsa.
 - e) Somente pode ser escrita em linguagem natural.
-

2. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta corretamente as características da lógica matemática:

- a) Dedutiva e formal
 - b) Indutiva e formal
 - c) Dedutiva e informal
 - d) Indutiva e informal
 - e) Nenhuma das alternativas anteriores
-

3. Assinale a ÚNICA alternativa INCORRETA:

- a) De acordo com o princípio da não contradição, uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.
 - b) De acordo com o princípio do terceiro excluído, toda proposição ou é só verdadeira, ou só falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.
 - c) Cada proposição simples é também denominada de átomo.
 - d) A proposição composta é constituída de proposições simples, as quais são interligadas com o emprego de conectivos.
 - e) Uma sentença em que são combinadas proposições simples (átomos) através do uso de conectivos é denominada de sentença composta.
-

4. Assinale a ÚNICA correlação CORRETA na lista apresentada a seguir:

- a) "e" (disjunção) (\wedge)
 - b) "ou" (disjunção exclusiva) (\vee)
 - c) "ou...ou" (conjunção) (\wedge)
 - d) "se...então" (condicional) (\rightarrow)
 - e) "se e somente se" (bicondicional) (\leftrightarrow)
-

5. Assinale a ÚNICA interpretação CORRETA da proposição composta $p \rightarrow (q \wedge r)$:

- a) Se p , então q
 - b) q e r se e somente se p
 - c) Se p , então nem q nem r
 - d) Se p , então q ou r
 - e) Se p , então q e r
-

Notas

Função Composta ¹

É interessante notar que a função composta não é comutativa.

Referências

Dicionário Aurélio. **Verbete “lógica”**. Disponível em: <<https://dicionariodoaurelio.com/logica> <<https://dicionariodoaurelio.com/logica>>>. Acesso em: 18 jan. 2019.

Universidade Federal de Viçosa. Introdução à lógica matemática. Disponível em: <<ftp://ftp.ufv.br/dma/Listas%20Antigas/logica.PDF>> <<ftp://ftp.ufv.br/dma/Listas%20Antigas/logica.PDF>>>. Acesso em: 18 jan. 2019.

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à Computação**. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

Próxima aula

- Construção de tabelas-verdade;
- Ordem de precedência dos conectivos;
- Álgebra de Boole aplicada à construção de tabelas-verdade;
- Conceitos de tautologia, contradição, contingência e implicação lógica.

Explore mais

Certamente, há materiais adicionais que podem complementar e ampliar seu conhecimento sobre cálculo proposicional, motivando-o ainda mais para os novos desafios que virão. Veja algumas sugestões:

“Noções de lógica matemática”: [<https://www.pucsp.br/~logica/Proposicional.htm>](https://www.pucsp.br/~logica/Proposicional.htm).

“Cálculo proposicional”: [<https://www.conhecimentogeral.inf.br/calcu.../>](https://www.conhecimentogeral.inf.br/calcu.../)

“Fundamentos matemáticos da computação”: [<https://www.youtube.com/watch?v=THieoMyTrLs>](https://www.youtube.com/watch?v=THieoMyTrLs)

<https://www.youtube.com/watch?v=11ne0V11LS2>.

“Lógica e matemática discreta: Aula 2 – Lógica”: <https://www.youtube.com/watch?v=EElh5FJ7Fhl>
<https://www.youtube.com/watch?v=EElh5FJ7Fhl>.