# Disciplina: Matemática Computacional

## Aula 7: Implicação e equivalência lógicas

## Apresentação

A partir de agora, trataremos de um tema extremamente relevante: equivalência lógica. Traduzir sentenças descritas em uma linguagem natural, como o português, para expressões lógicas é uma parte importante da especificação de sistemas computacionais (hardware e software).

Essas expressões podem ser utilizadas em diversas áreas de interesse do profissional da área tecnológica, como inteligência artificial, projetos de circuito lógico, teoria de autômatos e computabilidade, bancos de dados relacionais e sistemas distribuídos, dentre outros.

Os profissionais que fazem a especificação de tais sistemas computacionais devem se preocupar em traduzir as sentenças expressas numa linguagem natural em uma especificação precisa e de forma não ambígua, como base para o desenvolvimento do sistema.

---

## Objetivos

- Definir implicação e equivalência lógicas;
- Identificar os conceitos de argumento e regras de inferência;
- Aplicar as principais leis de equivalência em situações-problema.

# Implicação e equivalência lógicas

As expressões matemáticas (numéricas e/ou algébricas) podem, muitas vezes, ser substituídas por sentenças equivalentes mais simples. Exemplo:

- **$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ é equivalente a $(x + 1)^3$**

De igual modo, as expressões lógicas podem ser substituídas por sentenças equivalentes mais simples, compostas por menos proposições e conectivos, o que traz grande facilidade não só na interpretação, mas principalmente em sua utilização.

**Conforme descrito em Brochi (2016), uma relação de equivalência é uma relação de bi-implicação, ou seja, duas proposições p e q são equivalentes se p implica q e se q implica p.**

No entanto, um engano comum é a confusão entre os conceitos de **equivalência e implicação**.

A relação de implicação entre duas sentenças significa que elas não são exatamente equivalentes, mas que a ocorrência de uma implica a ocorrência da outra.

Atenção

É importante que você consiga diferenciar as sentenças equivalentes daquelas que apresentam uma relação de implicação.

Para começar a entender esta diferença, vamos ver algumas definições (BROCHI, 2016):

## Proposições independentes

Duas proposições são denominadas independentes quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem as quatro alternativas: FF, FV, VF, VV.

## Proposições dependentes

Duas proposições são dependentes quando, em suas tabelas-verdade, uma ou mais alternativas não ocorrem.

## Exemplo

Duas proposições simples p e q quaisquer são **independentes**, pois as quatro combinações aparecem em sua tabela-verdade:

| p | q |
|---|---|
| V | F |
| V | V |
| F | F |
| F | V |

| p | q | q → p |
|---|---|---|
| V | F | V |
| V | V | V |
| F | F | V |
| F | V | F |

## Exemplo

Já as proposições p e q → p são **dependentes**, pois não acontece a opção "q é verdadeira e p é falsa". Em casos de dependência, essa relação pode ser de implicação ou de bi-implicação.

Exemplo

Nas relações de implicação, como p ⇒ q (lê-se: "p implica q"), se p é verdadeira, então q também é, ou seja, o condicional p → q é verdadeiro, o que significa dizer que não ocorre o caso VF.
Nesse caso, não podemos dizer que as proposições p e q são equivalentes, pois a ocorrência de p implica q, mas isso também não significa dizer que a ocorrência de q implica p.

- **Considere as sentenças abertas**
  p: "x + 3 = 5" e q: "x = 2"

Se considerarmos, nesse caso, o condicional p → q, podemos concluir que ele é verdadeiro. Quando isso ocorre, dizemos que p implica q, que representamos na forma p ⇒ q.

Por sua vez, dizer que p implica q (p ⇒ q) não significa que, necessariamente, q implica p (q ⇒ p), ou seja, não quer dizer que as duas proposições são equivalentes.

**Desse modo, uma equivalência lógica entre duas proposições p e q é uma bi-implicação entre tais proposições, isto é, p implica q e q implica p. Uma proposição p é equivalente a uma proposição q (isto é, p ⇔ q) quando não ocorre VF e nem FV na combinação das tabelas-verdade de ambas. Isso significa dizer que suas tabelas-verdade são iguais.**

Também podemos afirmar que p equivale a q se, e somente se, o bicondicional p ↔ q for uma tautologia.

# Exemplo

Vamos analisar a relação: $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow$ q.

| **p** | **q** | **p ∨ q** | **~p** | $(p \vee q) \wedge \neg p$ | $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow$ **q** |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F | V |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **p** | V | V | F | F |
| **q** | V | F | V | F |
| **p ∨ q** | V | V | V | F |
| **~p** | F | F | V | V |
| $(p \vee q) \wedge \neg p$ | F | F | V | F |
| $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow$ **q** | V | V | V | V |

Comentário

Note que quando as premissas p ∨ q e ~p são verdadeiras, a conclusão q também o é. Isso equivale a mostrar que o condicional (p∨q)∧¬p → q é uma tautologia (é sempre verdadeiro). Logo, as proposições e (p∨q)∧¬p q são equivalentes.

# Argumentos e regras de inferência

Estudante pensando | **Fonte:** Pixabay <https://pixabay.com/pt/photos/pensamento-pessoa-pessoa-que-pensa-2681494/>

Considere a seguinte proposição composta:

**Uma implicação é bastante utilizada na definição de argumentos válidos. No entanto, o que é um "argumento válido"?**

Um argumento válido é uma sequência de proposições

$p1, p2, ..., pn, pn + 1, n \in N,$

na qual sempre que as premissas p1, p2, ..., pn são verdadeiras, a conclusão pn+1 também é verdadeira, isto é, a conjunção das premissas implica a conclusão.

Também podemos afirmar que p equivale a q se, e somente se, o bicondicional $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia.

## Exemplo

Conforme descrito em Brochi (2016), um argumento válido pode ser representado por:

- $p1 \wedge p2 \wedge ... \wedge pn \Rightarrow pn+1$
- ou
- $p1, p2, ... , pn \Rightarrow pn+1$
- ou, ainda
- p1
- p2
- .
- .
- .
- pn____________
- pn+1

### Atenção

A verificação da validade de um argumento pode ser feita através do uso de tabela-verdade ou da utilização de regras de inferência. O último exemplo que vimos na seção anterior traz uma verificação da validade de um argumento com base no emprego de tabela-verdade. Embora seja uma ideia simples e eficaz, ela traz um problema embutido: o uso da tabela-verdade torna-se menos viável à medida que o número de proposições simples envolvidas na análise aumenta.

Imagine um argumento em que as premissas têm sete proposições simples envolvidas.

A tabela-verdade, nesse caso, terá $2^7$ = 128 linhas.

Desse modo, é importante que você utilize uma alternativa mais viável e apropriada para a análise da validade de argumentos: a utilização das regras de inferência.

Veja a lista de regras de inferência:

| Nome | Regra |
|---|---|
| União | $p,q \Rightarrow p \wedge q$ |
| Modus ponens | $p \to q, p \Rightarrow q$ |
| Modus tollens | $p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$ |
| Adição | $p \Rightarrow p \vee q$ |
| Simplificação | $p \wedge q \Rightarrow p$ |
| Silogismo hipotético | $p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r$ |
| Silogismo disjuntivo | $p \vee q, \neg p \Rightarrow q$ |
| Simplificação disjuntiva | $p \vee r, p \vee \neg r \Rightarrow p$ |
| Contrapositiva | $p \to q \Rightarrow \neg q \to \neg p$ |

Dessa forma, você pode aplicar um dos principais usos de um cálculo proposicional — a determinação de relações de implicação lógica entre fórmulas proposicionais.

Essas relações são determinadas em termos das regras de transformação disponíveis, descritas na tabela anterior, de modo que, com a correta aplicação de uma sequência de regras, você consegue facilmente alcançar o que chamamos de “derivação” ou “demonstração”.

No exemplo a seguir, você verá como uma demonstração em cálculo proposicional é apresentada como uma sequência de linhas enumeradas. Em cada linha, você verá uma única fórmula, seguida por uma razão ou justificativa para introduzir tal fórmula.

Assim, cada premissa do argumento, também conhecida como “hipótese do argumento”, é listada no começo da sequência, até que se chegue à conclusão na última linha. Desse modo, uma demonstração logicamente completa requer que cada linha seja uma consequência das anteriores, a partir de uma aplicação correta de uma ou mais regras de inferência.

## Exemplo

Considere as hipóteses:

- **H1:** “Se você fizer um suco de laranja,
- então terminarei o programa”;
- **H2:** “Se você não fizer um suco de laranja,
- então vou estudar”;
- **H3:** “Se eu estudar, então acordarei me sentindo bem.”

**Prove que essas hipóteses nos levam a esta conclusão: “Se eu não terminar o programa, então acordarei me sentindo bem.”**

## Comentário:

Transforme o texto em linguagem simbólica, de modo que:

- p: você fizer um suco de laranja;
- q: terminarei o programa
- r: vou estudar
- s: acordarei me sentindo bem
- $p \to q$, $\sim p \to r$, $r \to s$

## Solução:

- **1.** Dado que $p \to q$, então $\sim q \to \sim p$ (contrapositiva)
- **2.** Se $\sim q \to \sim p$ e $\sim p \to r$, então $\sim q \to r$ (silogismo hipotético)
- **3.** Se $\sim q \to r$ e $r \to s$, então $\sim q \to s$ (silogismo hipotético)

# Regras de equivalência

Regras de inferência, como visto anteriormente, não são equivalências lógicas, pois deve haver uma bi-implicação entre duas proposições para que se possa dizer que existe uma equivalência lógica.

No entanto, como nas regras de inferência, há regras de equivalência:

| Nome | Regra |
|---|---|
| Dupla negação | $\neg(\neg A) \Rightarrow A$ |
| Leis comutativas | $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ |
| | $A \vee B \Rightarrow B \vee A$ |
| Leis associativas | $A \wedge (B \wedge C) \Rightarrow (A \wedge B) \wedge C$ |
| | $A \vee (B \vee C) \Rightarrow (A \vee B) \vee C$ |
| Leis idempotentes | $A \wedge A \Rightarrow A$ |
| | $A \vee A \Rightarrow A$ |
| Leis distributivas | $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
| | $A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| Leis de De Morgan | $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ |
| | $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ |
| Eliminação de condicionais | $(A \rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ |
| | $\neg(A \rightarrow B) \Rightarrow A \vee \neg B$ |
| Eliminação de bicondicionais | $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ |
| | $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ |
| Tautologias e contradições | $A \wedge V \Leftrightarrow A$<br>$A \wedge F \Leftrightarrow F$<br>$A \wedge \sim A \Leftrightarrow F$ |
| | $A \vee V \Leftrightarrow V$<br>$A \vee F \Leftrightarrow A$<br>$A \vee \sim A \Leftrightarrow V$ |

**É possível aplicar, assim, um dos principais usos de um cálculo proposicional — a determinação de relações [1] de equivalência lógica entre fórmulas proposicionais.**

Nos dois exemplos a seguir, veremos como uma demonstração em cálculo proposicional é apresentada como uma sequência de linhas enumeradas. Em cada linha há uma única fórmula, seguida por uma razão ou justificativa para introduzir tal fórmula. Novamente, veremos demonstrações logicamente completas, em que cada linha é uma consequência das anteriores, a partir de uma aplicação correta de uma ou mais regras de equivalência.

# Exemplo 1

Mostre que $p \wedge (r \vee s \vee t) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge t)$

- $p \wedge (r \vee s \vee t) \Leftrightarrow$
- $p \wedge (r \vee (s \vee t)) \Leftrightarrow$ (associativa em $s \vee t$)
- $(p \wedge r) \vee (p \wedge (s \vee t)) \Leftrightarrow$ (distributiva)
- $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge t)$ (distributiva)

## Exemplo 2

Mostre que $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

- $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow$
- $\sim(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow$ (reescrita da condicional)
- $\sim p \vee \sim q \vee r \Leftrightarrow$ (De Morgan)
- $\sim p \vee (\sim q \vee r) \Leftrightarrow$ (associativa)
- $\sim p \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow$ (reescrita da condicional)
- $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (reescrita da condicional)

## Atividades

**1.** Considere as sentenças: p - “Juliana é bonita”; e q - “Juliana é charmosa”. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta, em linguagem simbólica, a proposição composta “Se Juliana é bonita, então ela é charmosa”.

a) $p \vee q$
b) $p \rightarrow q$
c) $p \wedge q$
d) $p \Leftrightarrow q$
e) $p \leftrightarrow q$

---

**2.** Considere as sentenças: p - “Juliana é bonita” e q - “Juliana é charmosa”. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta, em linguagem simbólica, a proposição composta “Juliana é bonita se e somente se é charmosa”.

a) $p \vee q$
b) $p \rightarrow q$
c) $p \wedge q$
d) $p \Leftrightarrow q$
e) $p \leftrightarrow q$

---

**3.** Dadas as proposições p - “Juliana joga basquete”, q - “Alice joga vôlei” e r - “Esther pratica natação”, escreva na linguagem usual a proposição $r \rightarrow q$:

a) Juliana joga basquete ou Esther pratica natação.
b) Juliana joga basquete e Esther pratica natação.
c) Juliana joga basquete se e somente se Esther pratica natação.
d) Se Esther pratica natação, então Juliana joga basquete.
e) Se Juliana joga basquete, então Esther pratica natação.

---

**4.** Apresente a negação da frase “Se Juliana passar em Física, então se formará” em linguagem natural:

a) Se Juliana não passar em Física, então não se formará.
b) Se Juliana não passar em Física, então se formará.
c) Se Juliana passar em Física, então não se formará.
d) Juliana passa em Física e não se forma.
e) Nenhuma das alternativas anteriores.

***DICA:*** *Faça a tabela-verdade.*

---

**5.** Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta uma proposição equivalente a p ∧ (p v q):

a) p
b) ~p
c) q
d) ~q
e) Nenhuma das alternativas anteriores.

***DICA:*** *Faça a tabela-verdade.*

---

## Notas

### Relações [1]

Essas relações também são determinadas em termos das regras de transformação disponíveis, descritas na tabela anterior, para você facilmente alcançar a “demonstração” desejada.

## Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à computação**. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2016.

## Próximos passos

- Aplicações das definições e tipos estudados nesta aula 7 no estudo de predicados e quantificadores;
- Conceitos como conjunto universo e conjunto verdade de sentenças abertas;
- Negação de proposições com quantificadores.

## Explore mais

Certamente, há materiais adicionais que podem complementar e ampliar seu conhecimento sobre regras de implicação e equivalência lógicas, motivando-o ainda mais para os novos desafios que virão. Assim, segue uma lista de sites na internet para que você os consulte depois:

- Regras de inferência <https://www.youtube.com/watch?v=2cWtiTy5Lwc>
- Implicação lógica <https://www.youtube.com/watch?v=fznE8CEZgD4>
- Implicação lógica 2 <https://www.youtube.com/watch?v=EFuKV66_Ogs>
- Raciocínio lógico: Equivalência lógica <https://www.youtube.com/watch?v=kEjTiK139fo>