Disciplina: Matemática Computacional

Aula 6: Cálculo proposicional - tabelas-verdade

Apresentação

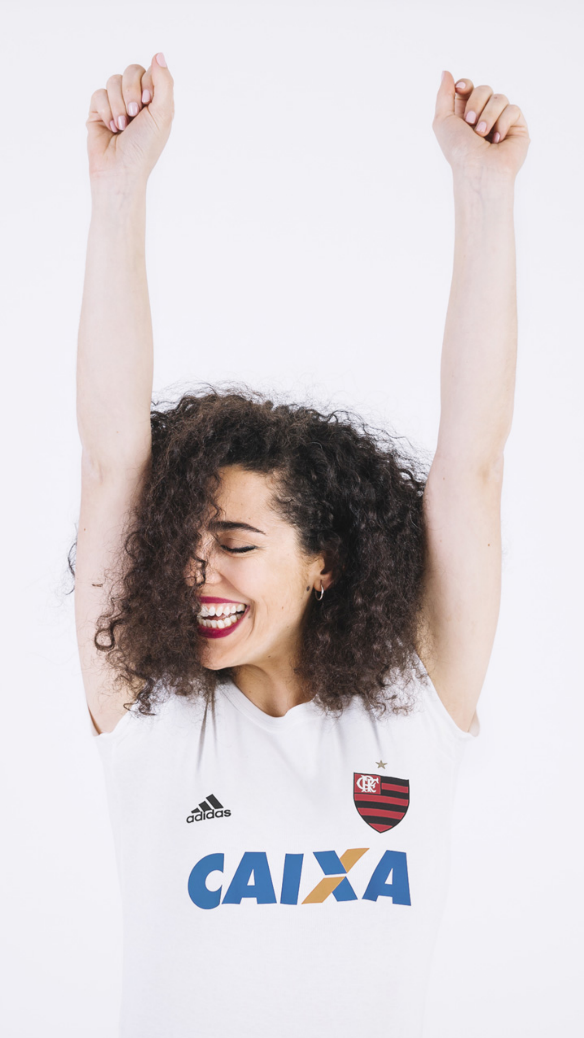
Hoje continuaremos nosso aprendizado de lógica matemática a partir de um tema de grande importância: tabelas-verdade.

- Dentre outros assuntos, você terá a oportunidade de estudar temas como:
- Tabelas-verdade; interpretação; ordem de precedência dos conectivos;
- Álgebra de Boole aplicada à construção de tabelas verdade; e
- Tautologia, Contradição e contingência.

Objetivos

- Rever os principais conceitos de tabelas-verdade;
- Descrever os métodos para resolução de problemas envolvendo interpretação e ordem de precedência de conectivos;
- Aplicar a álgebra de Boole na construção de tabelas-verdade e na identificação de tautologias, contradições e contingências.

Por que este tema é importante?



Torcedora do Flamengo | **Fonte:** Freepik <https://br.freepik.com/fotos-gratis/mulher-alegre-com-bracos-levantados_1977081.htm>

Considere a seguinte proposição composta:

Juliana tem menos de 20 anos de idade e é torcedora do Flamengo.

Como vimos na Aula 5, nós nos deparamos aqui com uma proposição composta que contém duas proposições simples:

p – Juliana tem menos de 20 anos de idade.
q – Juliana é torcedora do Flamengo.

Com base no princípio do terceiro excluído, estudado na aula passada, temos que cada uma das proposições simples apresentadas (aqui, p e q) só pode ser verdadeira ou falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

No entanto, e a proposição composta $p \wedge q$ aqui apresentada? Como saber se é verdadeira ou falsa?

Para fazer essa análise (também conhecida como análise veritativa), devemos analisar todas as situações possíveis, a partir das opções de cada uma das proposições simples.

Verifique as combinações existentes na Tabela 1 apresentada a seguir:

Tabela 1 – Tabela-verdade da proposição composta $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Podemos extrair informações importantes de uma tabela-verdade:

- 1. A tabela-verdade é importante para avaliar o caráter veritativo de proposições compostas.
- 2. Como são duas proposições e cada uma delas tem duas opções, pelo princípio do terceiro excluído, a tabela-verdade apresenta 2^2 = 4 opções. Uma proposição composta de n proposições simples distintas apresenta, assim, 2^n opções.
- 3. A terceira coluna apresenta o valor da proposição composta $p \wedge q$. Assim, vemos que a proposição estudada só é verdadeira se as duas proposições simples (p: Juliana tem menos de 20 anos de idade e q: Juliana é torcedora do Flamengo) forem verdadeiras. Em qualquer outro caso, a proposição é falsa.

Há inúmeros exemplos adicionais de situações que envolvem o emprego do conceito de tabela-verdade. No entanto, as ilustrações mostradas no parágrafo anterior são suficientes para que se possa identificar a importância de conhecer e aplicar os fundamentos de lógica matemática nas diversas situações do cotidiano.

Tabelas-verdade, interpretação e ordem de precedência dos conectivos

Veremos agora a interpretação e a tabela-verdade dos principais conectivos do cálculo proposicional, de acordo com a lista proposta em Brochi (2016).

Negação | Conjunção | Disjunção | Disjunção Exclusiva | Condicional | Bicondicional

Negação

O conectivo "não é verdade que" serve de prefixo a uma proposição para formar uma nova, chamada de negação da primeira. Sua notação é dada por ~p ou ¬p (lê-se: "não é verdade que p" ou "é falso que p"). Dentre os principais conectivos, é o único que não conecta duas proposições, mas modifica uma proposição, obtendo outra proposição.

Exemplo

Considere a proposição p: "Juliana é torcedora do Flamengo". Logo, ~p indica que "Juliana não é torcedora do Flamengo".

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**~p**
V	F
F	V

Conjunção

A conjunção de duas proposições p e q é uma proposição que só é verdadeira quando V(p) = V(q) = 1, ou seja, ambas as proposições simples são verdadeiras. Nos demais casos, ela é falsa. Sua notação é p ∧ q (lê-se: "p e q").

Exemplo

Considere as proposições: p: "O número 4 é natural" e q: "O número 4 é racional". A conjunção de p e q, nesse caso, será dada por p ∧ q: "O número 4 é natural e racional". Observe que p ∧ q é considerada verdadeira, pois o número 4 é um número natural e também é racional (todo número natural é também racional).

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

A disjunção (ou disjunção inclusiva) de duas proposições p e q é uma proposição que somente é falsa se V(p) = V(q) = 0, ou seja, se as proposições p e q forem falsas. Caso contrário, a disjunção é verdadeira. Sua notação é expressa por p **Ú** q (lê-se: "p ou q").

Exemplo

Considere as proposições: p: "O número 4 é natural" e q: "O número 4 é irracional". A disjunção de p e q, nesse caso, será dada por p **Ú** q: "O número 4 é natural ou irracional". Observe que p **Ú** q é considerada verdadeira, pois o número 4 é um número natural, embora não seja irracional (todo número natural é também racional; logo, a segunda proposição é falsa).

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**q**	**p Ú q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção Exclusiva

A disjunção exclusiva entre duas proposições p e q é uma proposição verdadeira somente quando seus valores lógicos forem diferentes (ou seja, V (p) ≠ V (q)) e falsa quando seus valores lógicos forem iguais (isto é, V (p) = V (q)). Sua notação é dada por p $\underline{\vee}$ q (lê-se: "p ou q, mas não ambos").

A única diferença entre a disjunção inclusiva e a disjunção exclusiva é que a primeira é considerada verdadeira também quando as duas proposições que a compõem são verdadeiras, e a segunda, nesse caso, é considerada falsa. Na linguagem natural, geralmente, diferenciamos uma da outra com a repetição do termo "ou".

Exemplo

Considere as proposições **p**: "Juliana estudou Matemática" e **q**: "Juliana estudou Física". A disjunção exclusiva de p e q, nesse caso, será dada por p $\underline{\vee}$ q: "Ou Juliana estudou Matemática ou Juliana estudou Física".

Observe que p $\underline{\vee}$ q é considerada verdadeira se Juliana tiver estudado uma das duas disciplinas, Física ou Matemática, pois, se ela estudou as duas, a proposição é falsa.

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**q**	**p $\underline{\vee}$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

Quando duas proposições estão conectadas de tal forma que há uma relação de implicação entre elas, dizemos que elas formam uma terceira proposição que tem a forma de um condicional. Dadas as proposições p e q, o condicional $p \rightarrow q$ é falso somente quando V (p) = 1 e V (q) = 0, e é verdadeiro nos demais casos. Sua notação é dada por $p \rightarrow q$ (lê-se: "Se p então q").

Nesse conectivo, a proposição **p** recebe o nome de antecedente e **q** de consequente. A proposição composta por duas proposições simples conectadas pelo condicional indica que se o antecedente ocorre (é verdadeiro), então o consequente também tem que ocorrer.

Exemplo

Considere as proposições **p**: "Juliana estudou Matemática" e **q**: "Juliana entendeu o conceito de Lógica Matemática". A condicional de p e q, nesse caso, será dada por $p \rightarrow q$: "Se Juliana estudou Matemática, então entendeu o conceito de Lógica Matemática".

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**~p**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Dadas duas proposições p e q, o bicondicional $p \leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira quando V (p) = V (q) e falsa quando V (p) ≠ V (q). Notação: $p \leftrightarrow q$ (lê-se: "p se, e somente se, q").

Assim, considere "p se, e somente se, q" como sendo uma conjunção dos condicionais "se p então q" e "se q então p". Dessa forma, o bicondicional será verdadeiro somente quando p e q forem ambos verdadeiros.

Exemplo

Considere as proposições **p**: "Juliana estudou Matemática" e **q**: "Juliana entendeu o conceito de Lógica Matemática". A bicondicional de p e q, nesse caso, será dada por $p \leftrightarrow q$: "Juliana entendeu o conceito de Lógica Matemática se e somente se estudou Matemática".

Nesse caso, só se dirá a verdade em duas situações: (I) se Juliana tiver estudado Matemática e entendido o conceito de Lógica Matemática e (II) se não tiver estudado Matemática e não tiver entendido o conceito de Lógica Matemática. A diferença agora é que não é possível o cenário "ela não estudar Matemática e entender Lógica Matemática" (ao contrário do que ocorria no caso do condicional).

Sua tabela-verdade é dada por:

p	**q**	**p ↔ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Comentário

Em todos os casos anteriores, por uma questão de simplicidade, vimos proposições com apenas um conectivo. No entanto, no mundo real, há proposições compostas com diversas proposições simples, o que pode trazer dúvidas acerca da ordem correta de leitura e resolução.

É importante que você saiba, desde já, a ordem de precedência dos conectivos, indicada a seguir:

1. Negação;
2. Conjunção e disjunção (a que aparecer primeiro);
3. Condicional;
4. Bicondicional.

Essa ordem só não será seguida quando, na composição da proposição, ocorrer o uso de parênteses, colchetes e/ou chaves.

Exemplo

Veja que em $\sim q \wedge r$ a negação de q é a primeira operação a ser executada. O seu resultado é um elemento da disjunção com a proposição r. Já se tivermos a proposição $\sim(q \wedge r)$, vemos que a negação é de toda a conjunção "$q \wedge r$". Logo, executamos primeiramente a disjunção $(q \wedge r)$; em seguida, aplicamos o operador de negação ao resultado anterior.

Tautologia, contradição e contingência

É possível fazer inúmeras combinações de proposições simples e, com isso, gerar novas proposições compostas.

No entanto, curiosamente, há proposições compostas que sempre assumem o valor verdadeiro ou falso (V ou F, 1 ou 0), independentemente da veracidade de suas proposições simples componentes.

Conforme descrito em Brochi (2016), as proposições compostas podem ser classificadas em:

1

Tautologia

Quando é sempre verdadeira.

2

Contradição

Quando é sempre falsa.

3

Contingência

Quando seu valor depende dos valores das proposições que a compõem.

Vamos identificar esses conceitos por meio de exemplos?

Exemplo 1

Considere a proposição $\mathbf{(p \wedge q) \vee (\sim p) \vee (\sim q)}$:

p	q	(p ∧ q)	(~p)	(p ∧ q) v (~p)	(~q)	(p ∧ q) v (~p) v (~q)
V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Pelos resultados da coluna da direita, trata-se de uma tautologia, pois, independentemente dos valores lógicos das proposições p e q, a proposição $\mathbf{(p \wedge q) \vee (\sim p) \vee (\sim q)}$ é sempre verdadeira.

Exemplo 2

Considere a proposição **(p ∨ q) ∧ ((~p) ∧ (~q))**:

p	q	(p v q)	(~p)	(~q)	((~p) ∧ (~q))	(p v q) ∧ ((~p) ∧ (~q)))
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Trata-se de uma contradição, pois, independentemente dos valores lógicos das proposições p e q, a proposição **(p Ú q) ∧ ((~p) ∧ (~q))** é sempre falsa.

Todas as tabelas-verdade apresentadas para os conectivos fundamentais apresentam valores verdadeiros ou falsos, dependendo das proposições simples *p* e *q*. Dessa forma, podemos dizer que todas elas são contingências.

Álgebra de Boole aplicada à construção de tabelas-verdade

Conforme descrito por Güntzel (2018), em 1854, George Boole introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático da lógica, a chamada álgebra booleana. Diferentemente da álgebra ordinária dos reais, onde as variáveis podem assumir quaisquer valores em um conjunto infinito, as variáveis booleanas só podem assumir um número finito de valores.

Atenção

Em particular, na álgebra booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V] (falso ou verdadeiro), também indicados como 0 e 1, respectivamente.

Assim, podemos descrever completamente as funções booleanas utilizando tabelas, indicando todas as combinações de valores que as variáveis de entrada podem assumir, bem como as saídas que lhes são correspondentes.

Na álgebra de Boole, há três operações ou funções básicas.

Vejamos na Tabela 2 as principais operações:

Tabela 2 – Operações da Álgebra Booleana

Operação	Adição	Multiplicação	Complementação
Símbolo	+	·	---
Equivalência	OU lógico	E lógico	NÃO lógico
Exemplo	p + q	p · q	$\overline{p}$ ou p′

Operação	Adição
Símbolo	+
Equivalência	OU lógico
Exemplo	p + q

Operação	Multiplicação
Símbolo	·
Equivalência	E lógico
Exemplo	p · q

Operação	Complementação
Símbolo	---
Equivalência	NÃO lógico
Exemplo	$\overline{p}$ ou p′

Essa compatibilidade entre as aplicações da álgebra booleana no estudo dos interruptores e os conectivos lógicos nos permite estender os resultados obtidos na lógica matemática aos operadores que acabamos de ver (soma lógica, multiplicação lógica e complementação). Desse modo, é possível "reescrever" as regras de equivalência apresentadas nesta aula para os operadores da álgebra booleana.

Tabela 3 – Propriedades dos Operadores da Álgebra Booleana

Identificador	**Propriedade**
P1	$(x')' = x$ (complementar do complementar)
P2	$x + y = y + x$ (comutativa)
P3	$x \cdot y = y \cdot x$ (comutativa)
P4	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativa)
P5	$x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativa)
P6	$x + x = x$ (idempotência)
P7	$x \cdot x = x$ (idempotência)
P8	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (distributiva)
P9	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ (distributiva)
P10	$(x + y)' = x' \cdot y'$ (complementar da soma)
P11	$(x \cdot y)' = x' + y'$ (complementar da multiplicação)
P12	$x + 1 = 1$
P13	$x + 0 = x$
P14	$x + x' = 1$
P15	$x \cdot 1 = x$
P16	$x \cdot 0 = 0$
P17	$x \cdot x' = 0$

A Tabela 3 apresenta as propriedades dos operadores da álgebra booleana.

Exemplo

Resolva a expressão **$x \cdot y + x \cdot y' + z$**:

- **Aplicando a propriedade distributiva (P8), temos:**
- $x \cdot (y + y') + z$
- **No entanto, de acordo com P14, temos que:**
- $y + y' = 1$
- **Logo, a expressão se torna:**
- $x \cdot 1 + z$
- **De acordo com P15,**
- $x \cdot 1 = x$
- **Logo, a expressão se torna:**
- $\underline{x + z}$

Atividades

1. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta a denominação CORRETA de uma proposição composta que é sempre verdadeira:

a) Tautologia
b) Contradição
c) Contingência
d) Implicação
e) Condicional

2. "Se Rafaela ler dez páginas por dia de um livro, então ela completará a leitura em 30 dias." Essa proposição é um exemplo de qual operador lógico?

a) Negação
b) Conjunção
c) Disjunção
d) Condicional
e) Bicondicional

3. A proposição **(p v ~ (p ∧ q))** é um exemplo de:

a) Tautologia
b) Contradição
c) Contingência
d) Implicação
e) Condicional

4. A proposição **(p ∨ q)** ∧ **(~p ∧ ~q)** é um exemplo de:

a) Tautologia
b) Contradição
c) Contingência
d) Implicação
e) Condicional

5. Apresente o resultado da simplificação da expressão **(p + q) · (p + r)**:

a) p · q
b) p + q · r
c) p · q + r
d) p · r + q
e) nenhuma das opções anteriores

Notas
Referências

BROCHI, A. L. C. Matemática aplicada à computação. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

GÜNTZEL, J. L. A. Álgebra booleana e circuitos lógicos. Disponível em: //www.inf.ufsc.br/~j.guntzel/isd/isd2.pdf <//www.inf.ufsc.br/~j.guntzel/isd/isd2.pdf> . Acesso em: 18 Jan. 2019.

Próximos passos

- Equivalência lógica;
- Conceitos fundamentais das leis de equivalência;
- Principais definições associadas a argumentos e a regras de inferência.

Explore mais

- Conectivos e tabelas verdade <https://www.youtube.com/watch?v=qx2jGsfawhY> ;
- Tautologia, contradição e contingência <https://www.youtube.com/watch?v=YgZMLuF9hNo> ;
- Primeiros passos: Álgebra booleana <https://www.youtube.com/watch?v=mYv71G-lpZw> ;
- Tautologia contradição <https://www.youtube.com/watch?v=HQMGYa8zQJw> ;

- Fundamentos matemáticos da computação: Lógica proposicional <https://www.youtube.com/watch?v=THieoMyTrLs&t=51s> .