Disciplina: Matemática Computacional

Aula 3: Relações

Apresentação

Nesta aula, veremos um tema de grande relevância para o futuro profissional da área da Tecnologia: Relações. Portanto, revisaremos, estudaremos e aplicaremos os principais conceitos relacionados em estudos de caso que lhe permitam vislumbrar aplicações e usos em sua vida profissional.

Dentre outros assuntos, estudaremos produto cartesiano, pares ordenados, relações binárias, propriedades e fechos, ordens parciais e relações de equivalência.

Objetivos

- Identificar e aplicar os conceitos de pares ordenados e ordens parciais;
- Reconhecer exemplos de relações binárias e de equivalência.

Produto cartesiano e pares ordenados

Uma forma muito utilizada de representação da relação entre dois conjuntos é o denominado produto cartesiano. Vamos ver uma definição de produto cartesiano, extraída de Brochi (2016).

> **Considere dois conjuntos A e B. O produto cartesiano A x B, nesta ordem, é formado por todas as possibilidades de associação entre elementos desses dois conjuntos.**

Como representar o produto cartesiano entre dois conjuntos? A melhor forma que você pode utilizar é o emprego dos denominados pares ordenados. Assim, considere a seguinte situação:

- Dois conjuntos A e B;
- Um elemento x pertencente ao conjunto A;
- Um elemento y pertencente ao conjunto B.

Assim, o produto cartesiano A x B é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A e y \in B$.

Exemplo

Entendeu a ideia? Vamos a um exemplo para ver se você compreendeu mesmo.

Exemplo 1:

Sejam os conjuntos A = {a, b, c} e B = {d, e}. O produto cartesiano A x B é representado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Deste modo, temos que o conjunto A x B é definido como {(a, d), (b, d), (c, d), (a, e), (b, e), (c, e)}.

Alguns comentários importantes:

1	A ordem dos elementos do conjunto A x B pode ser alterada, mas a alteração da ordem dos elementos do par ordenado acaba determinando um novo elemento do conjunto A x B;
2	O produto cartesiano pode ser representado com a notação algébrica de conjunto, ou seja, A x B = {(x, y)/ $x \in A e y \in B$}.

Podemos ter produtos cartesianos associando quaisquer tipos de elementos – cores, formas, frutas, flores, o que seja. Em particular, o produto cartesiano que se refere a conjuntos numéricos apresenta, como facilidade adicional, a possibilidade de uma representação gráfica.

Neste caso particular, cada um dos elementos do produto cartesiano pode ser representado como um ponto, e o conjunto de pontos obtido fornece o denominado *plano cartesiano*.

Você pode escolher qualquer forma de representação, mas é importante perceber que, tradicionalmente, os valores de x estão dispostos no eixo horizontal (eixo x), que é também conhecido como eixo das abscissas.

Por sua vez, os valores de y são usualmente localizados no eixo vertical (eixo y), denominado eixo das ordenadas.

Exemplo

Que tal ver a aplicação deste conceito em um novo exemplo, extraído de Brochi (2016)?

- Exemplo 2 <galeria/aula3/docs/exemplo_2.pdf> .

Com estas definições em mente, estamos preparados para conhecer (ou rever) outros conceitos: relações binárias, propriedades e fechos.

Relações binárias, propriedades e fechos

Vamos começar com a definição de relação binária entre dois conjuntos:

Uma relação entre dois conjuntos não vazios quaisquer A e B (ou *relação binária entre A e B*) é um subconjunto do produto cartesiano A x B, definido por uma propriedade específica.

Esta relação pode ser expressa de diversas formas. Dentre as formas algébricas, podemos utilizar:

- $\forall x \in A, \forall y \in B$: propriedade que define a relação entre x e y, de modo que $(x,y) \in R$;
- (x, y) / propriedade que define a relação entre x e y, de modo que $(x,y) \in R$;
- R = {$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$};
- x R y: x ~ y.
  (Aqui, o sinal "~" expressa qualquer sinal, fórmula ou propriedade matemática.)

Conforme exposto em Brochi (2016):

Em uma relação R de A em B, o conjunto dos valores x ∈ A que estão associados a valores y ∈ B é denominado domínio da relação e denotamos por D (R). E os valores y que estão associados a valores x compõem o conjunto que denominamos *imagem da relação* e denotamos por Im (R). O conjunto B, que contém a imagem da relação é denominado *contradomínio da relação* e é denotado por CD (R).

Brochi, 2016.

Exemplo 3

Considere os conjuntos A = {-1, 0, 2} e B = {1, 2, 3, 4}. Apresente a relação x R y: x = y.

Neste exemplo, temos que:

- D(R) = {-1, 0, 2};
- CD (R) = {1, 2, 3, 4};
- Im (R) = {2} → isto se dá pois é o único elemento y ∈ B que está associado a um elemento x ∈ A;
- Logo, temos que x R y = {(2, 2)}.

Podemos ainda utilizar outro tipo de representação gráfica de relações binárias, que é o de diagramas (conforme visto na aula 1), utilizando flechas que indicam os elementos que se relacionam e o "sentido" da relação.

Veja esta representação na Figura 2:

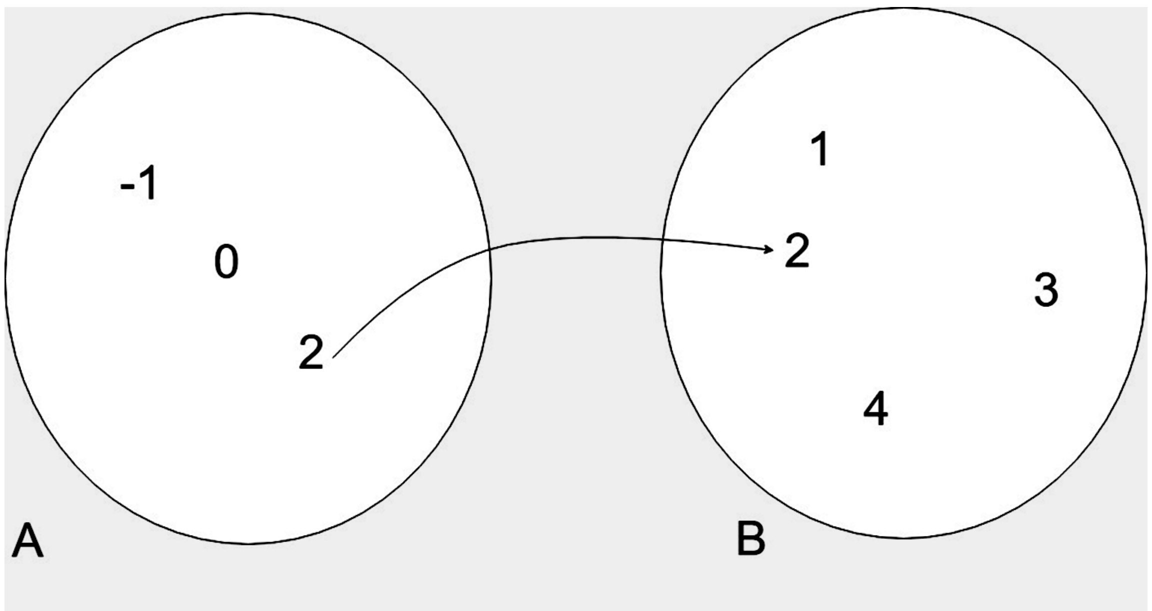

Figura 2 – Diagrama de representação da relação R = {(x,y)/ x = y}

Uma relação entre dois conjuntos pode atender a um rol de propriedades. A Tabela 1 indicada a seguir apresenta as principais propriedades e suas definições:

Tabela 1 – Propriedades das relações

Propriedade	Definição
Reflexiva	Para todo $x \in A$, conseguimos encontrar x R x, isto é, todo valor x relaciona-se com si próprio.
Simétrica	Para todo par ordenado (x, y) de uma relação R, tivemos também o par ordenado (y, x).
Antissimétrica	Para todos os elementos x e y do conjunto A, se os pares ordenados (x, y) e (y, x) pertencem à R, então concluímos que x = y.
Transitiva	Quando x, y e z são elementos do conjunto A, se (x, y) e (y, z) são elementos dessa relação, então (x, z) também o é.

Exemplo

Vamos ver alguns exemplos de relações? Será que elas atendem a algumas destas propriedades?

- Exemplo 4, 5 e 6 <galeria/aula3/docs/exemplos_4_5_6.pdf> .

Após você ter estudado e identificado as principais propriedades das relações, fica mais fácil compreender a definição de fecho ou fechamento de uma relação. É o que faremos agora.

Conforme expresso em Brochi (2016), dada uma relação R em um conjunto A, temos que uma relação R*, também em A, é um fecho de R em relação a uma propriedade P (que pode ser reflexiva, simétrica ou transitiva) se forem observadas as três condições seguintes:

1	R* tem a propriedade P.
2	$R \subseteq R^*$ (R é um subconjunto próprio de R*, isto é, R está contida em R*, mas não é igual a R).
3	R* é um subconjunto de qualquer outra relação em A que inclui R e tem a propriedade P (logo, R* é a "menor" relação possível com tais características).

Por exemplo, seja A = {1, 2, 3} e R a relação definida em A por {(1, 1), (1, 2), (2, 3)}. O *fecho reflexivo* é dado por R* = R È {(2, 2), (3, 3)} = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}.

Por fim, é tempo de tratar de duas definições relevantes no estudo de relações: a ordem parcial e a relação de equivalência. Vamos lá?

Uma *ordem parcial* de um conjunto não vazio A é qualquer relação R em A que seja reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Como exemplo de uma ordem parcial de A, considere R como a relação em A = {0, 1, 2} tal que x R y : $x \leq y$.

Podemos, então, escrever: R = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)}.

- Esta é uma relação reflexiva, pois para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in R$;
- É também antissimétrica, pois, para qualquer par ordenado (x, y) que considerarmos, com x diferente de y, não existe (y, x);
- A propriedade transitiva também se verifica, pois sempre que x relaciona-se com y e este relaciona-se com z, vemos que x relaciona-se com z. O exemplo em que isso acontece nesta relação é com os pares ordenados (0, 1), (1, 2) e (0, 2), nessa ordem;
- Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva em relação ao conjunto A, então dizemos que ela é uma *ordem parcial* em A.

Já a relação de equivalência tem sua definição apresentada a seguir:

Uma relação R em um conjunto A é considerada uma *relação de equivalência* se ela for reflexiva, simétrica e transitiva em A.

Conforme exposto em Brochi (2016), vemos o conjunto finito A = {1, 2, 3, 4} e a relação R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)} definida sobre A.

Neste caso, temos que:

1

R é uma relação reflexiva, pois para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in R$.

2

R é também uma relação simétrica, pois além dos pares ordenados com coordenadas iguais, temos: (1, 2) e (2, 1); (3, 4) e (4, 3).

3

R também é transitiva, pois sempre que se observa as relações x R y e y R z, temos também a relação x R z.

4

Portanto, R é uma relação de *equivalência* em A.

Exemplos práticos

Existem diversas situações do dia a dia que se referem à relação entre duas ou mais variáveis.

Por exemplo:

1. O preço pago em um posto de combustíveis tem relação com a quantidade solicitada no abastecimento.

2. O valor pago na tarifa

de energia elétrica tem relação com o consumo mensal de cada assinante, residencial ou comercial.

3. O valor pago de IPVA tem relação com o valor do carro.

Comentário

Existem também inúmeros casos em que a relação se dá entre mais de duas variáveis, como o valor de uma compra em um supermercado, que depende não só da quantidade de itens de um determinado produto mas também da escolha do consumidor, em casos nos quais há mais de uma marca em oferta para um mesmo produto.

No entanto, as situações em que elementos de dois conjuntos se relacionam já são bastante úteis e retratam uma boa quantidade de situações observadas na natureza e no dia a dia.

Deste modo, é necessário que você conheça os fundamentos de relações, para aplicá-los de modo conveniente nas diversas situações do cotidiano.

Atividade

1. Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {-2, -1, 0, 1, 2}, além da relação R = {(x, y) / x + y = 0, x ∈ A, y ∈ B}, indique o conjunto-imagem de R.

a) Im (R) = {-2, -1, 0, 1, 2}
b) Im (R) = {0, 1, 2}
c) Im (R) = {-2, -1}
d) Im (R) = {-2, -1, 0}
e) Im (R) = {0, 1}

2. Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {-2, -1, 0, 1, 2}, além da relação R = {(x, y) / x + y = 0, x ∈ A, y ∈ A, y ∈ A, y ∈ B}, indique o contradomínio de R:

a) CD (R) = {-2, -1, 0, 1, 2}
b) CD (R) = {0, 1, 2}
c) CD (R) = {-2, -1}
d) CD (R) = {-2, -1, 0}
e) CD (R) = {0, 1}

3. Dada a relação “x R y: x + y é par” sobre o conjunto dos números naturais, assinale a alternativa que lista TODAS as propriedades que ela satisfaz:

a) Reflexiva e simétrica
b) Reflexiva e antissimétrica
c) Simétrica e transitiva
d) Antissimétrica e transitiva
e) Reflexiva, simétrica e transitiva

---

4. Considere o conjunto A = {1, 2, 3} e a relação R = {(x, y) ∈ A/ x é múltiplo de y}. Assinale a alternativa que apresenta o fecho reflexivo de R:

a) R
b) R È {(1, 1)}
c) R È {(1, 1), (2, 2)}
d) R È {(3, 1)}
e) R È {(3, 3)}

---

5. Considere o conjunto A = {1, 2, 3} e a relação R = {(x, y) ∈ A/ x é múltiplo de y}. Assinale a alternativa que apresenta o fecho simétrico de R:

a) R
b) R È {(1, 1)}
c) R È {(1, 2), (1, 3)}
d) R È {(1, 2)}
e) R È {(1, 3)}

Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à Computação**. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

Próxima aula

- Funções;
- Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras;
- Funções compostas, funções inversas, funções do 1º e do 2º grau;
- Funções polinomiais: raízes e gráficos.

Explore mais

Assista aos seguintes vídeos:

- “Relações e funções” <https://www.youtube.com/watch?v=0TfH7xgcQ0I> ;
- “Relação de equivalência” <https://www.youtube.com/watch?v=RmxRgoef_C8> .