关于开题的一些想法

庞骏翔　ZY2417209

一. 2 熟悉 Eigen 矩阵运算

3、任意复（实）矩阵 A 分解为正交（酉）矩阵 Q 和上三角阵 R，解 $Ax = b$，分解 A，则 $QRx = b$，解得 $x = R^{-1}Q^Tb$，Householder 方法稳定且被广泛使用（还有经典的 Gram-Schmidt 正交化方法）

4、对于对称正定矩阵 A 分解为 $A = LL^T$，L 的对角线元素均为正数，L 是下三角矩阵，解 $Ax = b$，分解 A，解 $Ly = b$，解 $L^Tx = y$

5、见 GenetaSLAM Project homework ch2 涉及到 Eigen 库的使用，求解方程

二. 3 几何运算练习

见 GenetaSLAM Project homework ch2 涉及到 Eigen 库，基本的旋转以及平移的坐标变换

三. 4 旋转的表达

1、略，旋转矩阵 DCM 必为正交阵，可以从 DCM 定义出发（那个坐标乘单位向量的坐标变换形式，转置求变换系下的坐标导出）

2、虚部 3d，实部 1d

3、1. 首先回顾四元数的基本形式：

- 一个四元数 $q = \eta + \epsilon_x i + \epsilon_y j + \epsilon_z k$，可以写成 $q = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon \end{bmatrix}$，其中 $\eta \in R$，$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]^T \in R^3$。对于单位四元数，有 $\eta^2 + \epsilon^T\epsilon = 1$。

- 设 $q_1 = \eta_1 + \epsilon_1$，$q_2 = \eta_2 + \epsilon_2$，根据四元数乘法规则：

- $q_1 \cdot q_2 = (\eta_1 + \epsilon_1)(\eta_2 + \epsilon_2) = \eta_1\eta_2 - \epsilon_1^T\epsilon_2 + \eta_1\epsilon_2 + \eta_2\epsilon_1 + \epsilon_1 \times \epsilon_2$。

2. 然后计算 $q_1^+ q_2$：

- 已知 $q_1^+ = \begin{bmatrix} \eta_1 - \epsilon_1^\times & \epsilon_1 \\ -\epsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix}$，$q_2 = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$。

- 根据矩阵乘法：

- $q_1^{+}q_2=\begin{bmatrix}\eta_1-\epsilon_1^{\times} & \epsilon_1\\ -\epsilon_1^T & \eta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_2\\ \epsilon_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\eta_1-\epsilon_1^{\times})\eta_2+\epsilon_1\epsilon_2\\ -\epsilon_1^T\eta_2+\eta_1\epsilon_2\end{bmatrix}$。

- 其中 $\epsilon_1^{\times}$ 是 ϵ_1 对应的反对 - 称矩阵，$(\epsilon_1^{\times})_{ij}=-\epsilon_{1k}$（$(i,j,k)$ 是 $(1,2,3)$ 的循环排列）。

- $(\eta_1-\epsilon_1^{\times})\eta_2+\epsilon_1\epsilon_2=\eta_1\eta_2-\epsilon_1^{\times}\eta_2+\epsilon_1\epsilon_2=\eta_1\eta_2-\epsilon_1^T\epsilon_2+\eta_1\epsilon_2+\eta_2\epsilon_1+\epsilon_1\times\epsilon_2$（利用反对称矩阵与向量乘法和叉乘的关系：$\epsilon_1^{\times}\eta_2=-\eta_2\epsilon_1-\epsilon_1\times\epsilon_2$），$-\epsilon_1^T\eta_2+\eta_1\epsilon_2$ 也符合四元数乘法结果的向量部分形式，所以 $q_1\cdot q_2=q_1^{+}q_2$。

3. 接着计算 $q_2^{\oplus}q_1$：

- 已知 $q_2^{\oplus}=\begin{bmatrix}\eta_2+\epsilon_2^{\times} & \epsilon_2\\ -\epsilon_2^T & \eta_2\end{bmatrix}$，$q_1=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \epsilon_1\end{bmatrix}$。

- 根据矩阵乘法：- $q_2^{\oplus}q_1=\begin{bmatrix}\eta_2+\epsilon_2^{\times} & \epsilon_2\\ -\epsilon_2^T & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \epsilon_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\eta_2+\epsilon_2^{\times})\eta_1+\epsilon_2\epsilon_1\\ -\epsilon_2^T\eta_1+\eta_2\epsilon_1\end{bmatrix}$。

- 利用反对称矩阵与向量乘法和叉乘的关系 $\epsilon_2^{\times}\eta_1=-\eta_1\epsilon_2-\epsilon_2\times\epsilon_1$，可得 $(\eta_2+\epsilon_2^{\times})\eta_1+\epsilon_2\epsilon_1=\eta_1\eta_2-\epsilon_1^T\epsilon_2+\eta_1\epsilon_2+\eta_2\epsilon_1+\epsilon_1\times\epsilon_2$，$-\epsilon_2^T\eta_1+\eta_2\epsilon_1$ 也符合四元数乘法结果的向量部分形式，所以 $q_1\cdot q_2=q_2^{\oplus}q_1$。

综上，通过利用四元数乘法规则以及反对称矩阵与向量乘法和叉乘的关系，证明了对任意单位四元数 q_1,q_2，$q_1\cdot q_2=q_1^{+}q_2$ 和 $q_1\cdot q_2=q_2^{\oplus}q_1$ 成立。

四． 5 罗德里格斯公式的证明

略

五． 6 四元数运算性质的验证

用第 4 题的结论，结合四元数的实部虚部既能得到结论