CH3 HOMEWORK

庞骏翔　ZY2417209

一. 2 群的性质

1、$\mathbb{Z}$ 对于加法封闭，且都符合群的性质

2、$\mathbb{N}$ 对于加法封闭，但其不符合群的性质中逆元的性质

二. 3 验证向量叉乘的李代数性质

略

封闭性：设三维向量，, 按照叉乘的定义进行运算得到结果仍属于 $\mathbb{R}^3$ 即可

双线性：设向量 a、b、c，将李括号替换为叉乘进行运算即可

自反性：按照叉乘计算自己叉乘自己即可

雅可比等价：设向量 a、b、c，将李括号替换为叉乘进行运算即可

三. 4 推导 SE(3) 的指数映射

利用反对称矩阵乘幂的性质，将高次幂转为低次幂，注意 $\phi = \theta a$，θ 为常数，a 为单位向量，利用 $\phi^\wedge = \theta a^\wedge$，展开即可

四. 5 伴随

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^T \in \mathbb{R}^3$，$\boldsymbol{R} \in SO(3)$，$\boldsymbol{a}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 对应的反对称矩阵。

对于任意向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$，有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}^\wedge(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{v})) \quad (1) \\ &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{v})) \quad (2) \end{aligned}$$

根据向量叉乘的性质 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$ 和旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的性质（保持向量叉乘关系），$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{b})$，则：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{v})) &= (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{v}) && (3) \\
&= (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{v} && (4) \\
&= (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^{\wedge} \boldsymbol{v} && (5)
\end{aligned}
$$

因为对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ 都成立，所以 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{R}^T = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^{\wedge}$。

五． 6 轨迹的描绘

见 GenetaSLAM Project homework ch3