Geometrische Konstruktionen mit einem Mira

Silas G

June 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Konstruktion von geometrischen Figuren ist uns allen aus der Schule bekannt. Zumeist wurden diese durch den Einsatz von Zirkel und Lineal eingeführt. Dass es dabei viele weitere Methoden oder Konstruktionswerkzeuge neben diesen zur Verfügung stehen ist eher unbekannt. Wir werden uns in dieser Arbeit um die Einführung und Analyse eines Mira bemühen. Dieser ist ein aufrechtstehender halbtransparenter Spiegel aus einfachen rot eingefärbten Plastik. So lassen sich virtuelle Bilder, also Reflxionen an der Stelle wo sie zu sein scheinen sichtbar machen. In Kapitel 2 widmen wir uns der genauen Definition eines Mira im mathematischen geometrischen Sinn und definieren was eine Mira Zahl ist. In Kapitel 3 wenden wir uns klassischen Konstruktionsproblemen zu und analysieren welche durch den Einsatz eines Mira möglich sind. In Kapitel 4 werden wir die Ergebnisse aus den vorigen Kapiteln denen aus anderen Arbeiten zu weiteren Konstruktionswerkzeugen gegenüber stellen.

2 Geometrie mit einem Mira

In diesem Abschnitt werden wir Prunkte die mit einem Mira konstruierbar sind studieren und den Zahlenkörper aller Mira Zahlen bestimmen. Die Notation und Grundlagen können gerne in [DV18] nachgelesen werden.

Zunächst werden wir eine einfache Beschreibung erarbeiten um Punkte mit einem Mira zu konstruieren. Dafür brauchen wir ein Verständnis für den Umgang mit einem Mira. Dieses Verständnis werden wir und nach und nach erarbeiten, um die Algebraisierung dieses Konstruktionswerkzeuges besser zu durchschauen.

Bemerkung 1. *Mit dem Zirkel und Lineal gibt es drei Arten neue Punkte zu konstruieren.*

1. *Bestimme den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden*
2. *Bestimme die Schnittpunkte zweier Kreise*
3. *Bestimme die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden*

Wir werden auch für den Mira die Arten neue Punkte zu konstruieren beschreiben.

Bemerkung 2. *Mit dem Mira gibt es fünf Arten neue Punkte zu konstruieren.*

1. *Bestimme die Gerade zwischen zweier Punkte*
2. *Bestimme den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden*
3. *Reflektiere einen Punkt an einer Geraden*
4. *Reflektiere eine Gerade an einer Geraden*

Wir identifizieren die ersten beiden Arten als die beiden Arten die ein Lineal zur Verfügung hat. Was sich alleine durch diese beiden Arten konstruieren lässt, können wir in [DV18] nachlesen. Im folgenden werden wir Ergebnisse studieren, die durch die beiden weiteren Arten zu konstruieren möglich sind.

Definition 1. *Sei g eine Gerade in $\mathbb{E}$. Die Reflexion an g, genannt r_g ist definiert als:*

$$r_g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r_g(P) \longmapsto \begin{cases} P & \text{wenn } P \in g \\ Q & \text{wobei } g \text{ Mittelsenkrechte von } \overline{PQ} \text{ ist, wenn } P \in g \end{cases}$$

Die Abbildung r_g ist wohldefiniert.

Definition 2. *Seien g,h Geraden in* $\mathbb{G}$ *und* P,Q *Punkte in* $\mathbb{E}$. *Wir definieren das Symbol I für einen Konstruktionschritt.*

1. *Um die Mittelsenkrechte zu beschreiben, die eine*

Bemerkung 3. *Wir führen Vereinfachungen für die Reflexion für Punkten und Geraden ein. Für einen Punkt* $P \in \mathbb{R}^2$ *sei* $P^g := r_g(P)$ *Für eine Gerade* $h \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ *sei* $h^g := r_g(h) = \{r_g(P) | P \in h\}$

Definition 3. *Seien* g, h *Geraden und* P, Q *Punkte. Wir nennen eine Gerade* m *eine Reflexionsgerade, falls*

- g *auf* h *reflektiert, also* $g^m = h$, *oder*
- P *auf* g *reflektiert, also* $P^m \in g$, *oder*
- P *auf* Q *reflektiert, also* $P^m = Q$

Definition 4. *Im Fall des geometrischen Konstruktionsproblems*
$(M, \mathcal{W}) = (\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}\}, \{W_M\})$
nennen wir $(M, \mathcal{W})$*-Punkte auch* $\mathbf{Mira-Punkte}$ *und* $(M, \mathcal{W})$*-Kurven* $\mathbf{Mira-Geraden}$.

Proposition 1. *Jede Reflexionsgerade ist eine Mira-Gerade.*

Proposition 2. *(a) Die Koordinatenachsen sind Mira-Geraden.*

(b) Ein Punkt $P = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}$ *ist genau dann ein Mira-Punkt, wenn seine Lotfußpunkte* $\binom{x}{0}$ *und* $\binom{0}{y}$ *auf den Koordinatenachsen Mira-Punkte sind.*

(c) Sei $x \neq 0$ *eine reelle Zahl. Genau dann sind die vier Punkte* $\binom{x}{0}$, $\binom{-x}{0}$, $\binom{0}{x}$, $\binom{0}{-x}$ *Mira-Punkte, wenn dies auf einen von diesen zutrifft.*

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Die x-Achse erhalten wir als die Mira-Gerade $W_M(\binom{0}{0}, \binom{1}{0})$. Für die y-Achse genügt es das Lot zur x-Achse in Punkt $\binom{0}{0}$ zu fällen. Um den zweiten Teil von (a) zu zeigen werden wir im folgenden Beiweis des Lemma 2.0.1 eine Konstruktion des Lots mit einem Mira entwickeln und so die y-Achse konstruieren zu können. Da die Koordinatenachsen nach (a) Mira-Geraden sind, genügt es zum Beweis von Behauptung (b) zu zeigen, dass wir mit einem Mira das Lot der Punkte $P, \binom{x}{0}$ und $\binom{0}{y}$ auf den Koordinatenachsen fällen können. Im Beweis des folgenden Lemmas 2.0.1 entwickeln wir eine Konstruktion des Lots mit einem Mira und beweisen so auch Behauptung (b). Zum Beweis von Behauptung (c) nehmen wir an, einer der genannten vier Punkte sei ein Mira-Punkt. Sei ohne Einschränkung $\binom{x}{0}$ ein Mira-Punkt. Dies lässt sich ohne Einschränkung annehmen, da sonst eine Drehung um den Nullpunkt in diesen Fall führt ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Da die y-Achse nach (a) eine Mira-Gerade ist, lässt sich daran der Punkt $\binom{x}{0}$ reflektieren und so der Punkt $\binom{x}{0}^{y-Achse} = \binom{-x}{0}$ konstruieren und ist damit auch nach Proposition 1 ein Mira-Punkt. Für die Punkte $\binom{0}{x}$ und $\binom{0}{-x}$ lassen sich Reflexionsgeraden für den Mira um den Punkt $\binom{0}{0}$ finden, so dass der Punkt $\binom{x}{0}$ auf die y-Achse reflektiert werden kann. Diese Art der Ausrichtung wird in folgender Proposition 3 entwickelt. Damit haben wir auch Behauptung (c) bewiesen. □

Lemma 2.0.1. *Seien A, B, P Mira-Punkte mit $A \neq B$.*
Dann ist das Lot $\updownarrow_{\overleftrightarrow{AB}} P$ von P auf $\overleftrightarrow{AB}$ eine Mira-Gerade.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall das P auf der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ liegt. Lege dazu den Mira durch den Punkt P, so dass die Gerade $\overleftrightarrow{AB} = r$ Behauptung: Es existiert eine Reflexionsgerade, so dass □

Definition 5. *Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt genau dann eine Mira-Zahl, wenn $\binom{x}{0} \in \mathbb{R}^2$ ein Mira-Punkt ist. Die Menge der Mira Zahlen bezeichnen wir mit K_M.*

Proposition 3. *(a) Die Menge der Mira-Punkte ist gegeben durch*

$$K_M^2 = \{P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in K_M\}$$

(b) $\mathbb{Z} \subseteq K_M$

(c) K_M bildet einen Teilkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$; insbesondere gilt $\mathbb{Q} \subseteq K_M$.

Beweis. Behauptung (a) folgt direkt aus den Teilen (b) und (c) von Proposition 2. Um die Behauptung (b) zu zeigen, genügt es $\mathbb{N}_0 \subseteq K_M$ zu zeigen nach Proposition 2 (c). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist offensichtlich der Punkt $\binom{n+2}{0}$ die Reflexion des Punkts $\binom{n}{0}$ an Punkt $\binom{n+1}{0}$.

□

3 Klassische Konstruktionsprobleme

4 Vergleich mit weiteren Konstruktionswerkzeugen

Literaturverzeichnis

[DV18] Denis Vogel, Hendrik K.: *Grundlagen der ebenen Geometrie*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018

Abbildungsverzeichnis