Geometrische Konstruktionen mit einem Mira

Silas G

Dezember 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Geometrie mit einem Mira

In diesem Abschnitt werden wir Prunkte die mit einem Mira konstruierbar sind studieren und den Zahlenkörper aller Mira Zahlen bestimmen. Die Notation und Grundlagen können gerne in [DV18] nachgelesen werden.

Zunächst werden wir eine einfache Beschreibung erarbeiten um Punkte mit einem Mira zu konstruieren. Dafür brauchen wir ein Verständnis für den Umgang mit einem Mira. Dieses Verständnis werden wir und nach und nach erarbeiten, um die Algebraisierung dieses Konstruktionswerkzeuges besser zu durchschauen.

Bemerkung 1. *Mit dem Zirkel und Lineal gibt es drei Arten neue Punkte zu konstruieren.*

(*1.*) *Bestimme den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden*

(*2.*) *Bestimme die Schnittpunkte zweier Kreise*

(*3.*) *Bestimme die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden*

Wir werden auch für den Mira die Arten neue Punkte zu konstruieren beschreiben.

Bemerkung 2. *Mit dem Mira gibt es viele Arten neue Punkte und neue Geraden zu konstruieren.*

(*i.*) *Konstriere die Gerade, die zwei verschiedene gegebene Punkte schneidet.*

(*ii.*) *Konstruiere den Punkt, der zwei nichtparallele Geraden schneidet.*

(*iii.*) *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt reflektiert.*

(*iv.*) *Konstruiere den Punkt, der eine Reflexion von einem gegebenen Punkt an einer gegebenen Geraden ist.*

(*v.*) *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt schneidet und einen anderen gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*

(*vi.*) *Konstruiere die Gerade, die zwei verschiedene gegebene Punkte gleichzeitig auf gegebene Geraden reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*

(*vii.*) *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt schneidet und eine gegebene Gerade auf eine gegebene Gerade reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*

Wir identifizieren die ersten beiden Arten als die beiden Arten die ein Lineal zur Verfügung hat. Was sich alleine durch diese beiden Arten konstruieren lässt, können wir in [DV18] nachlesen. Auch wenn wir eine intuitives Verständnis von Reflexion haben, werden wir im Folgenden etwas genauer definieren was wir unter einer Reflexion. Zudem werden wir etwas Notation einführen um praktische Abkürzungen für die Mira Basiskonstruktionen zu haben. Außerdem beschäftigen wir uns mit den Mira Basiskonstruktionen, die gegbenfalls mehrere Geraden als Lösung haben.

Definition 1. *(Reflexion)*
Sei g eine Gerade in $\mathbb{E}$. Die Reflexion an g, genannt r_g ist definiert als:

$$r_g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r_g(P) \longmapsto \begin{cases} P & \textit{wenn } P \in g \\ Q & \textit{wobei } g \textit{ Mittelsenkrechte von } \overline{PQ} \textit{ ist, wenn } P \in g \end{cases}$$

Die Abbildung r_g ist wohldefiniert.

Notation. *(Mira Symbol)*
Sei $m, n \in \mathbb{G}$ und $P, Q \in \mathbb{R}^2, P \neq Q$ Dann schreiben wir für die Mira Basiskonstruktionen:

(i.) ${}_{P,Q}\text{⌶} = \{l \in \mathbb{G} | P, Q \in l\} = \overleftrightarrow{PQ}$ (*Verbindungsgerade*)

(ii.) ${}_{m,n}\text{⌶} = \{S \in \mathbb{R}^2, m \nparallel n | S \in m, S \in n\}$ (*Schnittpunkt*)

(iii.) ${}^{P}\text{⌶}^{Q} = \{l \in \mathbb{G} | r_l(P) = Q\} = m_{PQ}$ (*Mittelsenkrechte*)

(iv.) ${}^{m}_{P}\text{⌶} = \{S \in \mathbb{R}^2 | S = r_m(P)\} = r_m(P)$ (*Punkt an Geraden Reflexion*)

(v.) ${}^{P}_{Q}\text{⌶}^{m} = \{l \in \mathbb{G} | Q \in l, r_l(P) \in m\}$ (*Punkt auf Geraden Reflexion*)

(vi.) ${}^{P,Q}\text{⌶}^{m,n} = \{l \in \mathbb{G} | r_l(P) \in m, r_l(Q) \in n\}$ (*Simultanreflexion*)

(vii.) ${}^{m}_{P}\text{⌶}^{n} = \{l \in \mathbb{G} | P \in l, \forall S \in m : r_l(S) \in n\}$ (*Geradenreflexion*)

Anmerkung. *Jedes dieser Symbole hilft uns eine Mira Basiskonstruktion darzustellen. Dabei soll das Symobl ⌶ einen aufrechtstehenden Mira von oben gesehen darstellen. Die Mengenschreibweise ergibt Sinn in diesem Zusammenhang, da nicht für jede Mira Basiskonstruktion eine einelementige Menge gefunden werden kann. Wir werden im Folgenden auf diese Fälle eingehen.*

Bemerkung 3. *(Zusammenhang der Mira Basiskonstruktionen)*
Sei $P, Q \in \mathbb{R}^2$ mit $P \neq Q$ und $m, n \in \mathbb{G}$. Dann gilt:

(a.) Love

Beweis. (a)

${}^{P}\text{⌶}^{Q}$	${}^{Q}_{P}\text{⌶}^{l}$	${}^{Q}_{t_1}\text{⌶}$	${}^{P}_{t_2}\text{⌶}$	${}^{T}\text{⌶}^{T'}$
l	t_1, t_2	T	T'	g

□

2 Analytische Geometrie

Definition 2. *(Mira Gerade, Mira Zahl, Mira Punkt)*

1. *Eine* ***Mira Gerade*** *ist eine Gerade in der kartesischen Ebene, die durch eine der Mira Basiskonstruktionen konstruiert wurde, wobei die gegbenen Punkte und Geraden jeweils Mira Punkte und Mira Geraden sind.*

2. *Ein* ***Mira Punkt*** *ist ein Punkt in der kartesischen Ebene, der als letzter Punkt in einer endlichen Folge $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von Punkten vorkommt, wobei jeder Punkt in der Menge $\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}\}$ liegt oder durch eine Mira Basiskonstruktion nach Definition 2 konstruiert wurde.*

3. *Eine* ***Mira Zahl*** *ist eine reelle Zahl x, wenn $\binom{x}{0}$ ein Mira Punkt ist.*

Lemma 2.0.1. *Seien A, B, P Mira-Punkte mit $A \neq B$.*
Dann ist das Lot $\updownarrow_{\overleftrightarrow{AB}} P$ von P auf $\overleftrightarrow{AB}$ eine Mira-Gerade.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall das P auf der Geraden $\overleftrightarrow{AB}$ liegt. Lege dazu den Mira durch den Punkt P, so dass die Gerade $\overleftrightarrow{AB} = r$ Behauptung: Es existiert eine Reflexionsgerade, so dass □

Definition 3. *Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt genau dann eine Mira-Zahl, wenn $\binom{x}{0} \in \mathbb{R}^2$ ein Mira-Punkt ist. Die Menge der Mira Zahlen bezeichnen wir mit K_M.*

Proposition 1. *(a) Die Menge der Mira-Punkte ist gegeben durch*

$$K_M^2 = \{P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in K_M\}$$

(b) $\mathbb{Z} \subseteq K_M$

(c) K_M bildet einen Teilkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$; insbesondere gilt $\mathbb{Q} \subseteq K_M$.

Beweis. Behauptung (a) folgt direkt aus den Teilen (b) und (c) von Proposition **??**. Um die Behauptung (b) zu zeigen, genügt es $\mathbb{N}_0 \subseteq K_M$ zu zeigen nach Proposition **??** (c). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist offensichtlich der Punkt $\binom{n+2}{0}$ die Reflexion des Punkts $\binom{n}{0}$ an Punkt $\binom{n+1}{0}$.

□

3 Klassische Konstruktionsprobleme

4 Vergleich mit weiteren Konstruktionswerkzeugen

Literaturverzeichnis

[DV18] Denis Vogel, Hendrik K.: *Grundlagen der ebenen Geometrie.* Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018

Abbildungsverzeichnis