

# **Geometrische Konstruktionen mit einem Mira**

Silas G

Dezember 2021



# Inhaltsverzeichnis

1	Geometrie mit einem Mira	1
2	Analytische Geometrie	3
3	Klassische Konstruktionsprobleme	5
4	Vergleich mit weiteren Konstruktionswerkzeugen	7



# 1 Geometrie mit einem Mira

In diesem Abschnitt werden wir Punkte die mit einem Mira konstruierbar sind studieren und den Zahlenkörper aller Mira Zahlen bestimmen. Die Notation und Grundlagen können gerne in [DV18] nachgelesen werden.

Zunächst werden wir eine einfache Beschreibung erarbeiten um Punkte mit einem Mira zu konstruieren. Dafür brauchen wir ein Verständnis für den Umgang mit einem Mira. Dieses Verständnis werden wir und nach und nach erarbeiten, um die Algebraisierung dieses Konstruktionswerkzeuges besser zu durchschauen.

**Bemerkung 1.** *Mit dem Zirkel und Lineal gibt es drei Arten neue Punkte zu konstruieren.*

1. *Bestimme den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden*
2. *Bestimme die Schnittpunkte zweier Kreise*
3. *Bestimme die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden*

*Wir werden auch für den Mira die Arten neue Punkte zu konstruieren beschreiben.*

**Bemerkung 2.** *Mit dem Mira gibt es viele Arten neue Punkte und neue Geraden zu konstruieren.*

- i. *Konstruiere die Gerade, die zwei verschiedene gegebene Punkte schneidet.*
- ii. *Konstruiere den Punkt, der zwei nichtparallele Geraden schneidet.*
- iii. *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt auf einen anderen gegebenen Punkt reflektiert.*
- iv. *Konstruiere den Punkt, der eine Reflexion von einem gegebenen Punkt an einer gegebenen Geraden ist.*
- v. *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt schneidet und einen anderen gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*
- vi. *Konstruiere die Gerade, die zwei verschiedene gegebene Punkte gleichzeitig auf gegebene Geraden reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*
- vii. *Konstruiere die Gerade, die einen gegebenen Punkt schneidet und eine gegebene Gerade auf eine gegebene Gerade reflektiert, falls so eine Gerade existiert.*

## 1 Geometrie mit einem Mira

*Wir identifizieren die ersten beiden Arten als die beiden Arten die ein Lineal zur Verfügung hat. Was sich alleine durch diese beiden Arten konstruieren lässt, können wir in [DV18] nachlesen. Auch wenn wir eine intuitives Verständnis von Reflexion haben, werden wir im Folgenden etwas genauer definieren was wir unter einer Reflexion. Zudem werden wir etwas Notation einführen um praktische Abkürzungen für die Mira Basiskonstruktionen zu haben. Außerdem beschäftigen wir uns mit den Mira Basiskonstruktionen, die gegebenenfalls mehrere Geraden als Lösung haben.*

**Definition 1.** Sei  $g$  eine Gerade in  $\mathbb{E}$ . Die Reflexion an  $g$ , genannt  $r_g$  ist definiert als:

$$r_g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r_g(P) \longmapsto \begin{cases} P & \text{wenn } P \in g \\ Q & \text{wobei } g \text{ Mittelsenkrechte von } \overline{PQ} \text{ ist, wenn } P \in g \end{cases}$$

Die Abbildung  $r_g$  ist wohldefiniert.

**Notation.** Sei  $m, n \in \mathbb{G}$  und  $P, Q \in \mathbb{R}^2, P \neq Q$  Dann schreiben wir für die Mira Basiskonstruktionen:

- i.  ${}_{P,Q}\mathbb{I} = \{l \in \mathbb{G} | P, Q \in l\} = \overleftrightarrow{PQ}$
- ii.  ${}_{m,n}\mathbb{I} = \{S \in \mathbb{R}^2, m \nparallel n | S \in m, S \in n\}$
- iii.  ${}^P\mathbb{I}^Q = \{l \in \mathbb{G} | r_l(P) = Q\} = m_{PQ}$
- iv.  ${}_P^m\mathbb{I} = \{S \in \mathbb{R}^2 | S = r_m(P)\} = r_m(P)$
- v.  ${}_Q^P\mathbb{I}^m = \{l \in \mathbb{G} | Q \in l, r_l(P) \in m\}$
- vi.  ${}^{P,Q}\mathbb{I}^{m,n} = \{l \in \mathbb{G} | r_l(P) \in m, r_l(Q) \in n\}$
- vii.  ${}_P^m\mathbb{I}^n = \{l \in \mathbb{G} | P \in l, \forall S \in m : r_l(S) \in n\}$

**Anmerkung.** Jedes dieser Symbole hilft uns eine Mira Basiskonstruktion darzustellen. Dabei soll das Symbol  $\mathbb{I}$  einen aufrechtstehenden Mira von oben gesehen darstellen. Die Mengenschreibweise ergibt Sinn in diesem Zusammenhang, da nicht für jede Mira Basiskonstruktion eine einelementige Menge gefunden werden kann. Wir werden im Folgenden auf diese Fälle eingehen.

## 2 Analytische Geometrie

**Definition 2.** Im Fall des geometrischen Konstruktionsproblems

$$(M, \mathcal{W}) = (\{\binom{0}{0}, \binom{1}{0}\}, \{W_M\})$$

nennen wir  $(M, \mathcal{W})$ -Punkte auch **Mira-Punkte** und  $(M, \mathcal{W})$ -Kurven **Mira-Geraden**.

**Definition 3.** 1. Eine **Mira Gerade** ist eine Gerade in der kartesischen Ebene, die durch eine der Mira Basiskonstruktionen konstruiert wurde, wobei die

**Lemma 2.0.1.** Seien  $A, B, P$  Mira-Punkte mit  $A \neq B$ .

Dann ist das Lot  $\downarrow_{\overleftrightarrow{AB}} P$  von  $P$  auf  $\overleftrightarrow{AB}$  eine Mira-Gerade.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall das  $P$  auf der Geraden  $\overleftrightarrow{AB}$  liegt. Lege dazu den Mira durch den Punkt  $P$ , so dass die Gerade  $\overleftrightarrow{AB} = r$  Behauptung: Es existiert eine Reflexionsgerade, so dass  $\square$

**Definition 4.** Eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt genau dann eine Mira-Zahl, wenn  $\binom{x}{0} \in \mathbb{R}^2$  ein Mira-Punkt ist. Die Menge der Mira Zahlen bezeichnen wir mit  $K_M$ .

**Proposition 1.** (a) Die Menge der Mira-Punkte ist gegeben durch

$$K_M^2 = \{P = \binom{x}{y} \mid x, y \in K_M\}$$

(b)  $\mathbb{Z} \subseteq K_M$

(c)  $K_M$  bildet einen Teilkörper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ ; insbesondere gilt  $\mathbb{Q} \subseteq K_M$ .

*Beweis.* Behauptung (a) folgt direkt aus den Teilen (b) und (c) von Proposition ?? . Um die Behauptung (b) zu zeigen, genügt es  $\mathbb{N}_0 \subseteq K_M$  zu zeigen nach Proposition ?? (c). Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist offensichtlich der Punkt  $\binom{n+2}{0}$  die Reflexion des Punkts  $\binom{n}{0}$  an Punkt  $\binom{n+1}{0}$ .  $\square$





### **3 Klassische Konstruktionsprobleme**



## **4 Vergleich mit weiteren Konstruktionswerkzeugen**



# Literaturverzeichnis

- [DV18] DENIS VOGEL, Hendrik K.: *Grundlagen der ebenen Geometrie*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018



# **Abbildungsverzeichnis**