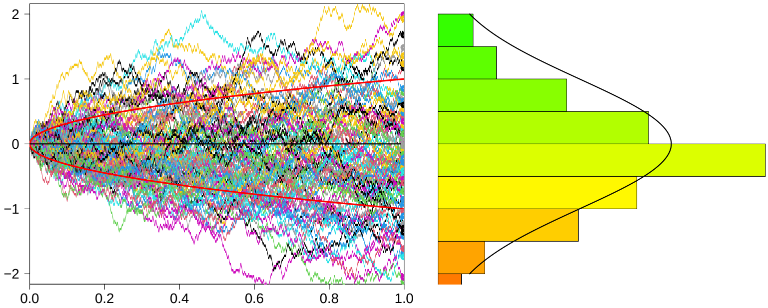
随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

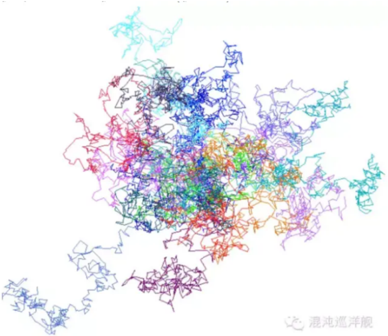
March 4, 2024



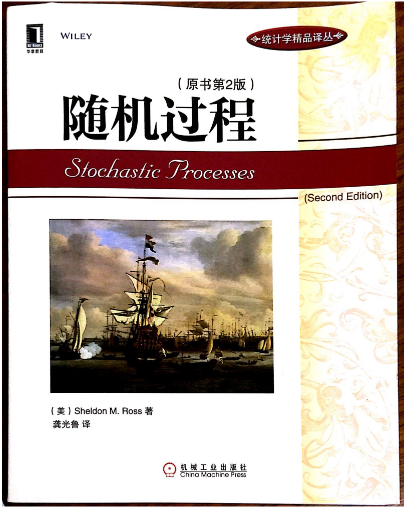
2
1
0
−1
−2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

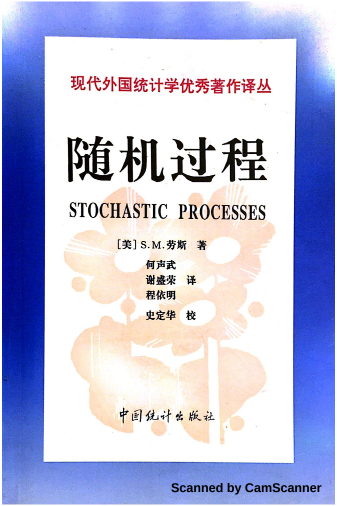
教材


中国科学院考研指定参考书
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
中国科学技术大学数学教学丛书
随机过程
（第三版）
方兆本 缪柏其 编著
科学出版社
Scanned by CamScanner


混沌巡洋舰

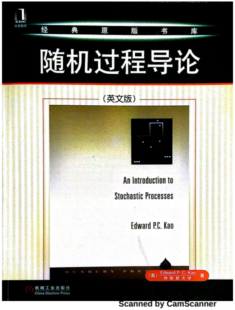
参考书


WILEY
统计学精品译丛
（原书第2版）
随机过程
Stochastic Processes
(Second Edition)
（美）Sheldon M. Ross 著
龚光鲁 译
机械工业出版社
China Machine Press


现代外国统计学优秀著作译丛
随机过程
STOCHASTIC PROCESSES
[美] S.M.劳斯 著
何声武
谢盛荣 译
程依明
史定华 校
中国统计出版社
Scanned by CamScanner

参考书


图灵数学·统计学丛书
北美精算师考试指定参考书
Introduction to Probability Models
11th Edition
应用
随机过程
概率模型导论
[美] Sheldon M. Ross◎著
龚光鲁◎译
（第11版）
应用随机过程经典教材，
学习精算学、人工智能、机器学习的必备参考书！
中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS
Scanned by CamScanner


经 典 原 版 书 库
随机过程导论
（英文版）
An Introduction to
Stochastic Processes
Edward P.C. Kao
机械工业出版社
China Machine Press
Scanned by CamScanner


郑坚坚／编著
随机过程
Stochastic Processes
中国科学技术大学出版社

参考书

1. Ross, S.M. (2016). *Introduction to Probability Models* (11th Edition), Elsevier Ltd.

   [龚光鲁译，《应用随机过程概率模型导论》（第 11 版），人民邮电出版社, 北京]

2. Kao, E. (1997). *An Introduction to Stochastic Processes*, Wadsworth Publishing Company & China Machine Press.

3. Ross, S.M.(2002) 《随机过程》, 何声武等译，中国统计出版社，北京

4. 郑坚坚，《随机过程》，中国科学技术大学出版社，2016 年.

随机过程分级教学

中国科大本科随机过程课程根据难易程度分为 3 档：

- 统计学专业：《实用随机过程》（80 学时，4 学分）
- 金融学专业：《随机过程（A）》（60 学时，3 学分）
- 西区工科院系：《随机过程（B）》（40 学时，2 学分）

研究生阶段的《随机过程》课程基于测度论

成绩计算

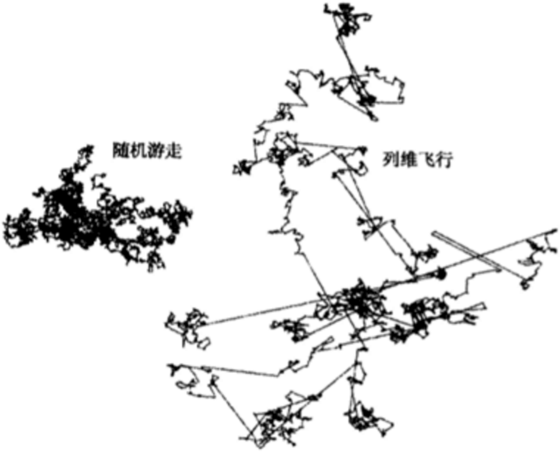
平时作业（30%）+机动（5%）+ 期末考试（65%）

习题课的重要性

课程目的

- 掌握常见几类随机过程的基本性质
  1. Poisson 过程
  2. Poisson 过程推广
  3. Markov 过程
  4. 平稳过程
  5. Brown 运动（扩展，穿插于其他章节）
- 培养解决实际问题的概率直观和洞察力（方法、思路和技巧）
- 激发对随机过程课程学习的兴趣

无处不在的随机游走

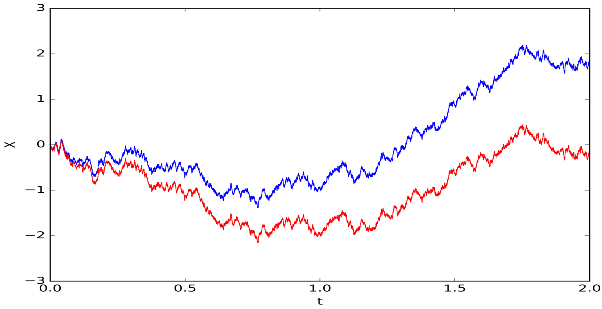


- **定义1 (随机过程)**：在对某些随机现象的变化过程进行研究时，需要考虑无穷多个随机变量，必须用一簇随机变量才能刻画这种随机现象的全部统计特征，这样的随机变量族通常称为随机过程.

$$Y(t,\omega): \textit{Stochastic} \quad \textit{Process}$$

  - 固定t： $Y(t,\omega)$是一个随机变量.
  - 固定ω： $Y(t,\omega)$看成是t的函数，是一条样本路径(一个实现).

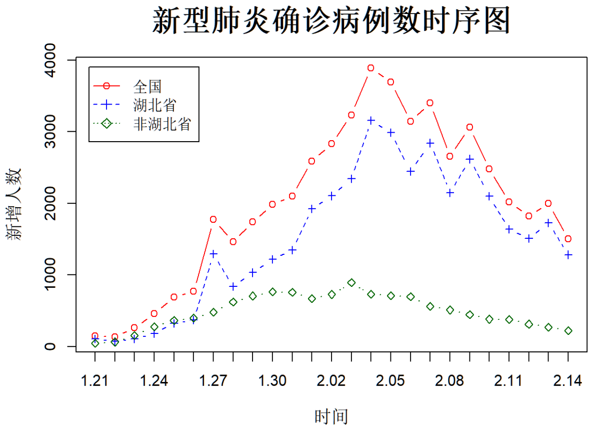
From Wiki:
In probability theory and related fields, a stochastic or random process is a mathematical object usually defined as **a family of random variables**.



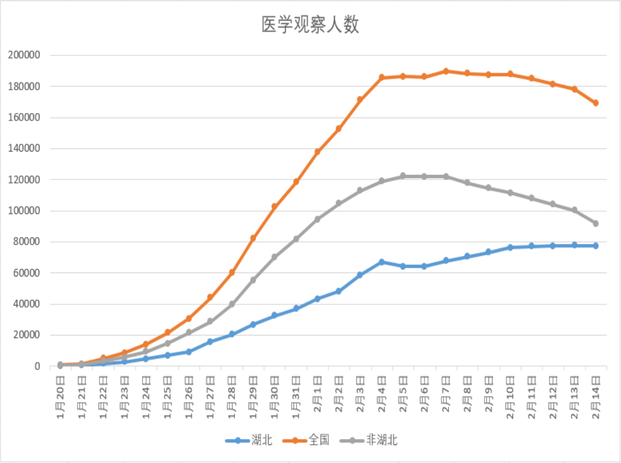
Brown运动的一次实现：带漂移(蓝色),不带漂移(红色)

- Louis Bachelier, Mathematician, PhD 1900
  Bachelier (1900) used Brownian motion for the modeling of stock prices in his PhD thesis "Theorie de la speculation", Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure $3(17) : 21 - 86, 1900$.
- Albert Einstein, physicist, 1905
  Einstein received his 1921 Nobel Prize in part for investigations on the theory of Brownian motion
- Norbert Wiener, Mathematician, founder of cybernetics, 1908
  Wiener is credited, among other fundamental contributions, for the mathematical foundation of Brownian motion, published in 1923. .
- Paul Samuelson, Economist, Nobel Prize 1970, 1965
  Samuelson (1965) rediscovered Bachelier's ideas and proposed geometric Brownian motion as a model for stock prices.
- Kiyoshi Ito (伊藤清), Mathematician, C.F. Gauss Prize 2006
  Ito constructed the Ito integral with respect to Brownian motion

对于新型冠状病毒，确诊人数

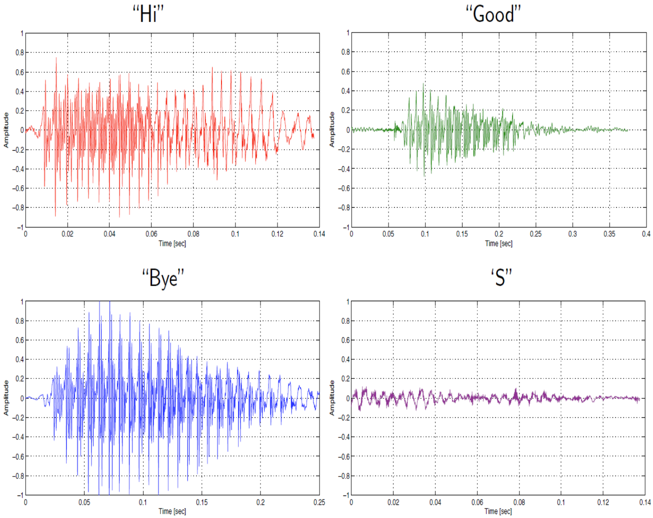


对于新型冠状病毒，我们特别关注全国正在接受医学观察的人数

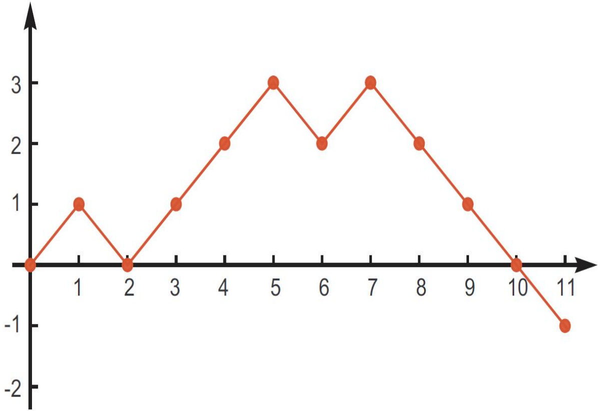


随机过程实际例子

语音识别系统



无限制的随机游走. 设有一质点在数轴上随机游动, 每单位时间向左或向右移动一个单位. 向左的概率为q, 向右的概率为p, Y_j表示向左或者向右, 1表示向右, -1表示向左. X_n表示n时刻质点的位置, $X_0 = 0$, 则$X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.



- **例子(随机游走, Random Walk)**: 设$X_1, X_2, \ldots$是一列独立同分布的随机变量序列，令

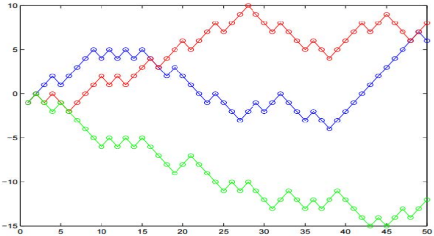
$$S_n = S_0 + X_1 + \ldots + X_n$$

则称随机变量序列$\{S_n, n = 0, 1, \ldots\}$为随机游动. 其中假定$S_0$与$X_1, X_2, \ldots$独立，更一般地假定$S_0 = 0$. 如果

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2,$$

则$\{S_n\}$ 就是简单对称随机游动.

Random walk



随机过程研究背景

- 生活中的随机过程：
  - 银行排队：队列长度、等候时间
  - 网络系统：流量、响应时间、延迟
  - 股票交易：股票行情、盈亏
  - 等等...
- 课本上的举例：
  - 电话呼叫的次数
  - 流行病学中受到感染的人数
  - 振荡器输出的随机相位正弦波过程
  - 等等...

特点：不确定性；不能用一个确定性函数来描述，不能使用确定性函数分析方法

随机过程历史

1931年，柯尔莫果洛夫(Kolmogorov)《概率论的解析方法》

1934年，辛钦(Khintchine)《平稳过程的相关理论》

奠定了马尔可夫过程与平稳过程理论

1953年，杜布(Doob)《随机过程论》

《随机过程》的奠基人

1827年布朗—1905年爱恩斯坦—1907年马尔可夫—1923—维纳

- 随机过程定义及例子
- 有限维分布和数字特征
- 条件期望与矩母函数
- 收敛性

随机过程的概念:

1. 随机过程是概率论的继续和发展. 被认为是概率论的"动力学"部分. 它的研究对象是随时间演变的随机现象.
2. 在客观世界中，有许多随机现象表现为带随机性的变化过程，它不能用一个或几个随机变量来刻画，而要用一族无穷多个随机变量来描绘，这就是随机过程.
3. 事物变化的过程不能用一个（或几个）时间t 的确定的函数来加以描述.

为给出随机过程的数学定义，下面先复习一下概率论的基本知识:

随机过程的概念：

1. 随机过程是概率论的继续和发展. 被认为是概率论的“动力学”部分. 它的研究对象是随时间演变的随机现象.
2. 在客观世界中，有许多随机现象表现为带随机性的变化过程，它不能用一个或几个随机变量来刻画，而要用一族无穷多个随机变量来描绘，这就是随机过程.
3. 事物变化的过程不能用一个（或几个）时间t 的确定的函数来加以描述.

为给出随机过程的数学定义，下面先复习一下概率论的基本知识：

概率的公理化定义

定义 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间. 称 $\mathbb{P}(\cdot): \mathcal{F} \to [0,1]$ 为一概率, 若

(i) 设 A 是随机事件, 则 $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$

(ii) 设 Ω 为必然事件, 则 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \ldots$ 为两两不相容的事件序列, 则

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 是一个概率空间.

§1.1 随机过程的定义—概率空间

概率的公理化定义是基于下述概率三元组，其中Ω是概率空间，随机试验所有可能结果的集合，$\mathcal{F}$ 为 Ω 的某些子集组成集合族，是**集函数概率$\mathbb{P}$的“定义域”**.

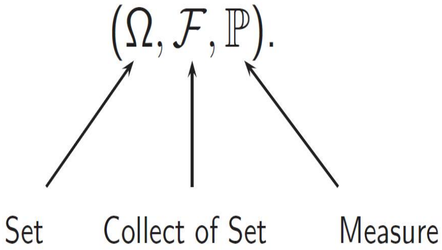


图. 概率三元组

随机变量

定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 是一个概率空间. 映射 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

则称 X 是 $\mathcal{F}$ 上的随机变量.

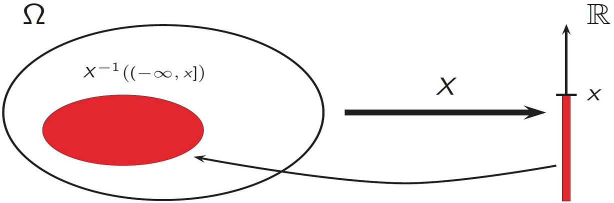


图. 随机变量的定义

随机过程定义

所谓一族随机变量，首先是随机变量，从而是该试验样本空间上的函数；其次形成一族，因而它还取决于另一个变量，即还是另一参数集上的函数. 所以，随机过程就是一族二元函数.

定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为一概率空间. T和S为指标集, $T, S \in \mathbb{R}$, 若对每一个$t \in T$, 均有定义在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上一个取值在$S$上的随机变量$X(\omega, t), \omega \in \Omega$ 与之对应，则称随机变量族

$$\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$$

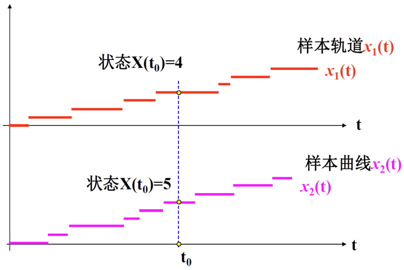
为$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上的一个随机过程, 简记为$\{X(t), t \in T\}$.

---

§1.1 随机过程的定义

随机过程$\{X(t), t \in T\}$的理解

- 这里对每一$t_0 \in T$，$X(t_0, \omega)$是一随机变量，T叫做参数集，或时间指标集。
- 把t 看作为时间，对固定的$\omega_0 \in \Omega$，称$X(t, \omega_0)$为时刻t 时过程的状态．而对于一切$t \in T$，$X(t)$所有可能取值得全体S称为随机过程的状态空间。
- 对随机过程$\{X(t), t \in T\}$进行一次实验，其结果是t的函数，称为一个样本函数或样本曲线，记为$\{x(t), t \in T\}$。

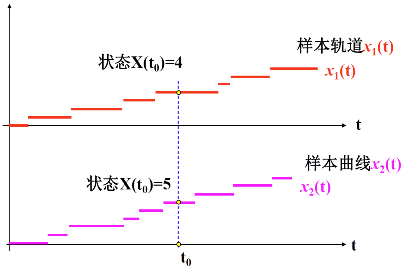


状态空间$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$，
$T = [0, \infty)$.

图．某网站到时刻t为止的访问人数

随机过程$\{X(t), t \in T\}$的理解

- 这里对每一$t_0 \in T$, $X(t_0, \omega)$是一随机变量，T叫做参数集，或时间指标集。
- 把t 看作为时间，对固定的$\omega_0 \in \Omega$, 称$X(t, \omega_0)$为时刻t 时过程的状态. 而对于一切$t \in T$, $X(t)$所有可能取值得全体S称为随机过程的状态空间。
- 对随机过程$\{X(t), t \in T\}$进行一次实验，其结果是t的函数，称为一个样本函数或样本曲线，记为$\{x(t), t \in T\}$。



状态空间$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
$T = [0, \infty)$.

图. 某网站到时刻t为止的访问人数

例：初始相位为随机的简谐波

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi), A, \omega \text{为常数}, \Phi \sim U[0, 2\pi]$$

是一个随机过程.

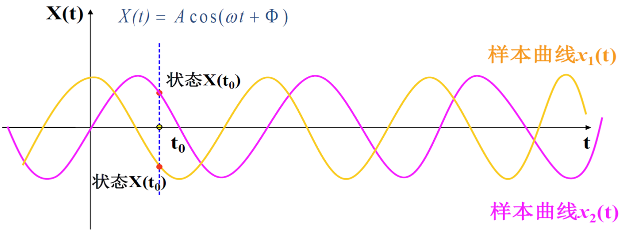


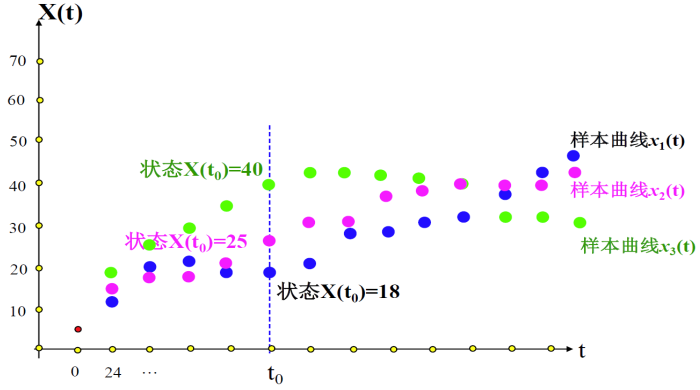
图. 随机相位简谐波的样本路径

状态空间$S = [-A, A]$, $T = [-\infty, +\infty]$.

例： 生物群体增长问题，以$X(t)$ 表示在时刻t某种生物群体的个数．从$t = 0$开始，每隔24小时对群体的个数观察一次，则

$$\{X(t), t = 0, 24, 48, \ldots\}$$

是随机过程，也称为随机序列，记为$\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个随机过程．



图．群体增长过程的样本路径

- 问题：怎样理解随机过程？它与函数及随机变量有何不同？
  - 随机过程将普通函数的概念从实数与实数的对应关系推广到实数与随机变量的对应关系。
  - 随机过程将随机变量概念从ω与实数对应推广到ω与实函数的对应。
  - 随机过程是一族随机变量，又是一族样本函数.（由样本二重性）。

§1.1 如何理解随机过程？

- 随机过程定义的进一步解释：
  - $X(t,\omega)$的两个特点：随机性与函数性. 因此，$X(t,\omega)$实质上为定义在$T \times \Omega$上的二元单值函数.
  - 对每一个固定的t, $X(t)$ 为一随机变量. 随机变量$X(t), t \in T$所有可能取值的集合，称为随机过程$X(t,\omega)$的状态空间，记为S. S中的元素称为过程状态.
  - 对每一个ω_0, $X(t,\omega_0)$是定义在T上的普通函数. 记为$x(\omega_0, t)$, 称为随机过程的一个样本函数或样本轨道. 样本函数的图形称为样本曲线。

- 随机过程可以根据参数集T和状态空间S是否离散集分为四大类.
  - 离散时间+离散状态的随机过程(群体生长模型, Bernoulli过程)
  - 离散时间+连续状态的随机过程(时间序列模型, Gauss序列模型)
  - 连续时间+离散状态的随机过程(网站访问人数, Poisson过程)
  - 连续时间+连续状态的随机过程(随机相位波, 高斯过程, Brown运动)

- 随机过程分类： 根据指标集合 T 和状态空间S来划分.
  - 离散时间 SP 记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP 记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场 (时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史： 早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础： Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展！

- 随机过程分类： 根据指标集合 T 和状态空间S来划分.
  - 离散时间 SP 记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP 记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场 (时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史： 早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础： Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展！

- 随机过程分类： 根据指标集合 T 和状态空间S来划分.
  - 离散时间 SP　　记为 $\{X_n, n \in T\}$
  - 连续时间 SP　　记为 $\{X(t), t \in T\}$
  - 离散状态 SP
  - 连续状态 SP
  - 随机场　　(时间 t 为向量)
- 随机过程发展历史： 早期的发展历史属于物理学科领域，可追溯到 Gibbs, Poincaré 等人在统计力学中所做的研究，以及后来的 Einstein, Wiener, Levy 等人对布朗运动所作的开创性工作.
- 随机过程理论基础： Kolmogorov 和 Doob 奠定的.

这门学科仍在理论与应用两个方面以空前的深度和广度在迅速发展！

如何来研究随机过程?

研究随机过程有两种途径:

- 侧重于研究随机过程的概率结构
- 侧重于研究随机过程的统计平均性质

如何来研究随机过程？

研究随机过程有两种途径：

- 侧重于研究随机过程的概率结构
- 侧重于研究随机过程的统计平均性质

- 随机过程定义及例子
- 有限维分布和数字特征
- 条件期望与矩母函数
- 收敛性

先复习概率论中随机变量及其分布：

- 随机变量X, 对任意的$x \in \mathbb{R}$, 称

$$F(x) = \mathrm{P}\left(\omega : X(\omega) \le x\right)$$

  为随机变量X的分布函数.
- 分布函数的性质
  - 单调性: 若$x < y$, 则$F(x) \le F(y)$.
  - 规范性:
    $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$
  - 右连续性: $F(x_0+) = \lim_{x\downarrow x_0} F(x) = F(x)$.
- 随机变量分为离散型，连续型，混合型三种。

先复习概率论中随机向量及其分布:

- 随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$是$n$维随机向量，对任意的$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，称

$$F(\boldsymbol{x})=\mathrm{P}\left(\boldsymbol{X}\leq\boldsymbol{x}\right)=\mathrm{P}\left(\omega:X_1(\omega)\leq x_1,\ldots,X_n(\omega)\leq x_n\right)$$

为随机向量$\boldsymbol{X}$的分布函数.

- 分布函数的性质
  - 单调性: 对每个变元x_i, $F(x_1,\ldots,x_n)$都是非降函数.
  - 规范性: $\lim_{x_i\to-\infty}F\left(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n\right)=0, i=1,\ldots,n$

$$\lim_{x_j\to+\infty,1\leq j\leq n}F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=1$$

  - 右连续性: 对每个变元x_i, $F(x_1,\ldots,x_n)$都是右连续的.
  - n维递增: 对$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\prod_{j=1}^{d}[a_j,b_j]$, 有

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{X}\in[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\right)\geq0.$$

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$,

- 过程的一维分布函数为

$$F_t(x) = \mathrm{P}\left(X(t) \leq x\right), \forall t \in T.$$

- 过程的一维均值函数为

$$\mu_X(t) = EX(t).$$

- 过程的方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = Var[X(t)].$$

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$,

- $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = \mathrm{P}\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\right), \forall t_1, t_2 \in T.$$

这也就是过程在 t_1, t_2 两不同时刻值的联合二维分布，记作 $F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$

- 过程的自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)].$$

- 过程的协方差函数为

$$R_X(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2)) = E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\}$$

对随机过程$\{X(t), t \in T\}$的$R_X(t_1, t_2)$ 和 $C_X(t_1, t_2)$, 有

- 对称性:

$$R_X(s,t) = R_X(t,s) \qquad C_X(s,t) = C_X(t,s)$$

- 非负定性, 任何 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 及任意实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 我们恒有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j C_X(t_i, t_j) \geq 0$$

因为协方差运算有线性性质, 由

$$\begin{aligned} 0 \leq Var\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X(t_j)\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} b_i X(t_i), \sum_{j=1}^{n} b_j X(t_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \end{aligned}$$

如何来刻画随机过程?

定义: 随机过程的有限维分布族, 它是 $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 的全体, 记为$\mathfrak{F}$即

$$\mathfrak{F}=\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\quad \forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots,t_n\in T\},$$

其中

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}$$

有限维分布族的性质:

- **对称性**: 对 $\{1,\cdots,n\}$ 的任一置换 $(i_1,\cdots,i_n)$ 有

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).$$

- **相容性**: 对 $m<n$ 有

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots\infty)\quad=F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

如何来刻画随机过程?

定义: 随机过程的有限维分布族，它是 $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 的全体，记为$\mathfrak{F}$即

$$\mathfrak{F}=\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\quad \forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots,t_n\in T\},$$

其中

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}$$

有限维分布族的性质:

- **对称性**: 对 $\{1,\cdots,n\}$ 的任一置换 $(i_1,\cdots,i_n)$ 有

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).$$

- **相容性**: 对 $m<n$ 有

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots\infty)\quad =F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

如何来刻画随机过程?

定义: 随机过程的有限维分布族, 它是 $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 的全体, 记为$\mathfrak{F}$即

$$\mathfrak{F}=\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\quad \forall n\geq 1,\forall t_1,\cdots,t_n\in T\},$$

其中

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}$$

有限维分布族的性质:

- **对称性**: 对 $\{1,\cdots,n\}$ 的任一置换 $(i_1,\cdots,i_n)$ 有

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).$$

- **相容性**: 对 $m<n$ 有

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots\infty)\quad =F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

- **定理(柯尔莫哥洛夫相容性定理)**: 设分布函数族

$$\mathcal{F} = \{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) : \forall t_1,\dots t_n \in T, \forall n = 1,2,\dots\}$$

满足上述的对称性和相容性, 则必存在一个随机过程$\{X(t)\}$使得上述分布族恰好是它的有限维分布族.

如何来研究随机过程？

研究随机过程有两种途径：

- 侧重于研究随机过程的概率结构
- 侧重于研究随机过程的统计平均性质

- 随机过程常见的几条性质: 设 T 为实数集或其子集.
  - 独立增量性: 对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall n > 2$,
  $$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$
  相互独立.
  - 平稳增量性: 对任意 $t, t+h \in T$, $h > 0$, $X(t+h) - X(t)$ 的分布跟 t 无关, 只依赖于 h.
  - Markov 性: 对任意 $n \geq 2$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_1) = x_1,\ X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\right) \\ &\quad = \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right). \end{aligned}$$

并非任意过程都具有如上的几条性质, 有些过程只具备其中的一条或两条性质!

- 随机过程常见的几条性质：设 T 为实数集或其子集.
    - 独立增量性：对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \forall n > 2,$

      $$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

      相互独立.
    - 平稳增量性：对任意 $t, t+h \in T$, $h > 0$, $X(t+h) - X(t)$ 的分布跟 t 无关，只依赖于 h.
    - Markov 性：对任意 $n \geq 2$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$,

      $$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_1) = x_1,\ X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\right) \\ &= \mathrm{P}\left(X(t) \in B | X(t_n) = x_n\right). \end{aligned}$$

并非任意过程都具有如上的几条性质，有些过程只具备其中的一条或两条性质！

平稳过程

有一类重要的随机过程，它处于某种概率平衡状态，其主要性质只与变量 $X(t)$ 之间的时间间隔有关，而与我们考查的起始点无关，这类过程叫做平稳过程。

定义： 如果随机过程 $X(t)$ 对任意的$n \geq$, 任意 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和任何 h 有

$$(X(t_1+h), \cdots, X(t_n+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \cdots, X(t_n)) \qquad (1)$$

则称作是**严平稳的**。

- $n=1$, $X(t+h) \stackrel{d}{=} X(t)$, 即$X(t)$分布与$t$无关。
- $n=2$, 任意 $t_1, t_2 \in T$,
  $(X(t_1+h), X(t_2+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), X(t_2)) \stackrel{d}{=} (X(0), X(t_2-t_1))$.

有一类重要的随机过程，它处于某种概率平衡状态，其主要性质只与变量 $X(t)$ 之间的时间间隔有关，而与我们考查的起始点无关，这类过程叫做平稳过程。

定义： 如果随机过程 $X(t)$ 对任意的$n \geq$, 任意 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和任何 h 有

$$(X(t_1+h), \cdots, X(t_n+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \cdots, X(t_n)) \quad (1)$$

则称作是**严平稳的**。

- $n=1$, $X(t+h) \stackrel{d}{=} X(t)$, 即$X(t)$分布与$t$无关。
- $n=2$, 任意 $t_1, t_2 \in T$,
  $(X(t_1+h), X(t_2+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), X(t_2)) \stackrel{d}{=} (X(0), X(t_2-t_1))$.

条件 (1) 很强也不易验证，所以退而求其次有所谓宽平稳或二阶平稳过程。引入

定义： 如果随机过程 $X(t)$满足

(1) $E|X(t)|^2 < \infty$, 所有二阶矩存在

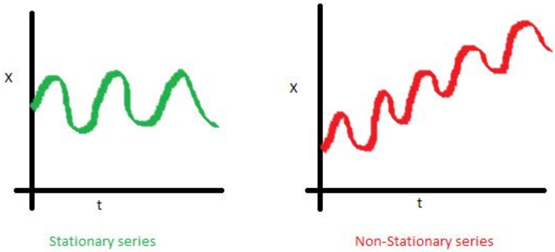
(2) $EX(t) = m$, 均值函数为常值

(3) $R_X(t,s)$ 只与时间差 $t-s$ 有关

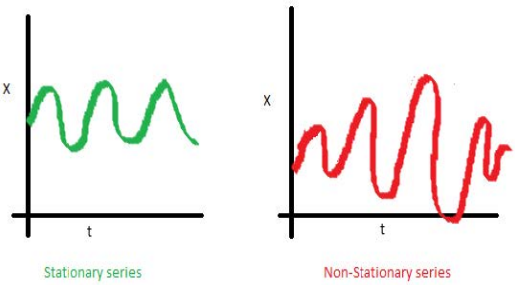
则称作是宽平稳的或二阶矩平稳的。

1. 期望、方差与t无关
2. 时间平移不影响两时刻的相关系数
3. 又称平稳过程为二阶矩平稳过程，还称为宽平稳过程或弱平稳过程

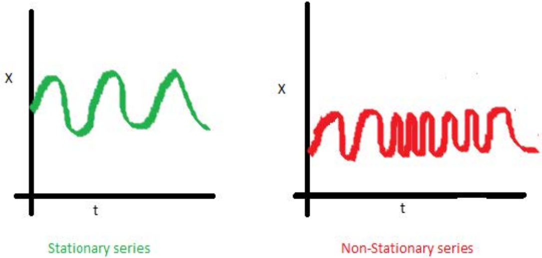
平稳过程图



平稳过程方差齐性



平稳过程协方差



- 随机过程定义及例子
- 有限维分布和数字特征
- 条件期望与矩母函数
- 收敛性

给了随机变量 Y 的取值后另一随机变量 X 的条件期望是什么？

离散型随机变量 X 和 Y ：一般对所有使 $\mathrm{P}\{Y=y\}>0$ 的 y，定义给定 $Y=y$ 时 X 取 x 的条件概率为

$$\mathrm{P}\{X=x \mid Y=y\}=\frac{\mathrm{P}\{X=x, Y=y\}}{\mathrm{P}\{Y=y\}}.$$

而给定 $Y=y, X$ 的条件分布函数则定义为

$$F(x \mid y)=\mathrm{P}\{X \leq x \mid Y=y\}.$$

相应的，给定 $Y=y, X$ 的条件期望定义为

$$E(X \mid Y=y)=\sum_x x\mathrm{P}\{X=x \mid Y=y\}.$$

对一般的连续型随机变量 Y, $\mathrm{P}(Y=y)$ 往往为 0，比式没有意义。我们怎么来定义条件期望呢？

常用的办法是如果对任何包含 y 的小区间 Δy 总有 $\mathrm{P}(Y\in\Delta y)=0$，则定义 $\mathrm{P}(X\in A\mid Y=y)=0$。否则，若 $\mathrm{P}(Y\in\Delta y)>0$，就可以定义

$$\mathrm{P}(X\in A\mid Y=y)=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\mathrm{P}(X\in A\mid Y\in\Delta y),$$

这里 $\Delta y\downarrow 0$ 的意思是使包含 y 的小区间的长度缩小为 0。除了个别例外的 y 值这一极限总是存在。相应地，定义给定 $Y=y$ 时，X 的条件分布函数为

$$\mathrm{P}(X\le x\mid Y=y)=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\mathrm{P}(X\le x\mid Y\in\Delta y),$$

记作 $F(x\mid y)$。

对一般的连续型随机变量 Y, $\mathrm{P}(Y=y)$ 往往为 0，比式没有意义。我们怎么来定义条件期望呢？

常用的办法是如果对任何包含 y 的小区间 Δy 总有 $\mathrm{P}(Y\in\Delta y)=0$，则定义 $\mathrm{P}(X\in A\mid Y=y)=0$。否则，若 $\mathrm{P}(Y\in\Delta y)>0$，就可以定义

$$\mathrm{P}(X\in A\mid Y=y)=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\mathrm{P}(X\in A\mid Y\in\Delta y),$$

这里 $\Delta y\downarrow 0$ 的意思是使包含 y 的小区间的长度缩小为 0。除了个别例外的 y 值这一极限总是存在。相应地，定义给定 $Y=y$ 时，X 的条件分布函数为

$$\mathrm{P}(X\le x\mid Y=y)=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\mathrm{P}(X\le x\mid Y\in\Delta y),$$

记作 $F(x\mid y)$。

进一步，如果存在一非负函数（记为）$f(x \mid y)$ 使得对任何集合 A 恒有

$$\mathrm{P}(X \in A \mid Y = y) = \int_A f(x \mid y) dx,$$

且 $\int f(x \mid y) dx = 1$，则 $f(x \mid y)$ 称为是在给定 $Y = y$ 时 X 的条件密度。不难看出条件分布函数是关于条件密度对变量 x 从 $-\infty$ 到 x 的积分，即

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(x \mid y) dx.$$

如果把 X 与 Y 的联合密度 $f(x, y)$ 看作质量为 1 的平板的密度（面密度），则条件密度 $f(x \mid y)$ 就是固定 $Y = y$ 时的线密度。它们之间的关系是

$$f(x, y) = f(x \mid y) f(y)$$

其中 $f(y)$ 为随机变量 Y 的边缘密度。

此时，给定 $Y=y$, X 的条件期望定义为

$$E(X \mid Y=y)=\int xf(x \mid y)dx.$$

连续与离散本质上是一回事，在更深一点的课程中人们把它们统一记为

$$E(X \mid Y=y)=\int xdF(x \mid y).$$

在行文不发生混淆时，也常记为 $E(X \mid Y)$ 。严格地讲上式表示一个数值（与 y 有关），而 $E(X \mid Y)$ 则为随机变量。

- $E(X \mid Y=y)$ 表示一个与y有关的函数，不具有随机性
- $E(X \mid Y)$是个随机变量，是随机变量Y的函数.

此时，给定 $Y=y$, X 的条件期望定义为

$$E(X \mid Y=y)=\int xf(x \mid y)dx.$$

连续与离散本质上是一回事，在更深一点的课程中人们把它们统一记为

$$E(X \mid Y=y)=\int xdF(x \mid y).$$

在行文不发生混淆时，也常记为 $E(X \mid Y)$ 。严格地讲上式表示一个数值（与 y 有关），而 $E(X \mid Y)$ 则为随机变量。

- $E(X \mid Y=y)$ 表示一个与y有关的函数，不具有随机性
- $E(X \mid Y)$是个随机变量，是随机变量Y的函数.

条件期望有些重要的性质我们总结如下：

(a) 若 X 与 Y 独立，则 $E(X \mid Y = y) = EX$,

(b) 条件期望有所谓的平滑性：

$$EX = \int E(X \mid Y = y) dF_Y(y) = E[E(X \mid Y)].$$

(c) 对随机变量 X, Y 的函数 $\phi(X, Y)$ 恒有

$$E[\phi(X, Y) \mid Y = y] = E[\phi(X, y) \mid Y = y].$$

(b) 告诉我们计算 X 的期望可以分两步走，先计算给定 $Y = y$ 时 X 的条件期望，再对这条件期望作加权平均就是总的平均或期望。这是一个很有用的思想。

条件期望有些重要的性质我们总结如下:

(a) 若 X 与 Y 独立，则 $E(X \mid Y=y)=EX$,

(b) 条件期望有所谓的平滑性:

$$EX=\int E(X \mid Y=y) dF_Y(y)=E[E(X \mid Y)].$$

(c) 对随机变量 X, Y 的函数 $\phi(X, Y)$ 恒有

$$E[\phi(X, Y) \mid Y=y]=E[\phi(X, y) \mid Y=y].$$

(b) 告诉我们计算 X 的期望可以分两步走，先计算给定 $Y=y$ 时 X 的条件期望，再对这条件期望作加权平均就是总的平均或期望。这是一个很有用的思想。

证 注意到当 X 与 Y 独立时，给定 $Y=y$ 时 X 的条件分布与无条件分布是一样的. (a) 由此不难得证。对于 (b) 仅证明离散随机变量的情形：

$$EX=\sum_{k} E(X \mid Y=y_k)\mathrm{P}\left(Y=y_k\right) \tag{2}$$

由定义，$E(X|Y=y_k)=\sum_j x_j \mathrm{P}\left(X=x_j|Y=y_k\right)$，再由条件概率的定义，(2) 式右边为 $\sum_k \sum_j x_j \mathrm{P}\left(X=x_j, Y=y_k\right)$, 先对 k 求和即得 $\sum_j x_j \mathrm{P}\left(X=x_j\right)$, 由定义正是 EX。

下面证(c), 仅证明离散情形. 假设(X,Y)为离散型随机变量, 则

$$
\begin{aligned}
E[\phi(X,Y)|Y=y] &= \sum_i \sum_j \phi(x_i, y_j)\,\mathrm{P}\,(X=x_i, Y=y_j|Y=y) \\
&= \sum_i \phi(x_i, y)\,\mathrm{P}\,(X=x_i, Y=y|Y=y) \\
&= \sum_i \phi(x_i, y)\,\mathrm{P}\,(X=x_i|Y=y) \\
&= E[\phi(X,y)|Y=y]
\end{aligned}
$$

定义：随机变量 X 的**矩母函数**定义为随机变量 $\exp\{tX\}$ 的期望，记作 $g(t)$ 即

$$g(t) = E(\exp\{tX\}) = \int \exp\{tx\}dF(x),$$

矩母函数的性质：

- 当矩母函数存在时它唯一地确定了X的分布;
- $E[X^n] = g^{(n)}(0), \quad n \geq 1;$
- 对于相互独立的随机变量X与Y, 则

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t).$$

- 由于随机变量的矩母函数不一定存在，因此现在常用特征函数$E[e^{itX}]$代替矩母函数.

§1.3 常见分布的矩母函数

分布名称	概率分布或密度	矩母函数
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+q)^n$
Poisson分布 $\Pi(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\omega^2}}$	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布 $P(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$(1-\dfrac{t}{\lambda})^{-1}$
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

例题： 随机和的矩母函致。记 $X_1, X_2, \cdots$ 为一串独立同分布的随机变量，N 为非负整数值随机变量且与 X 序列相独立。Y 为随机和 $\sum_{i=1}^{N} X_i$。求 Y 的矩母函数 $g_Y(t)$。

解 为求 g_Y 先算条件期望

$$\begin{aligned} E[e^{tY} \mid N = n] &= E[\exp\{t\sum_{i=1}^{N} X_i\} \mid N = n] \\ &= E[\exp\{t\sum_{i=1}^{n} X_i\} \mid N = n] \\ &= E[\exp\{t\sum_{i=1}^{n} X_i\}] = [g_X(t)]^n. \end{aligned}$$

于是有

$$g_Y(t) = E[\exp\{tY\}] = E\{E[\exp\{tY\}|N]\} = E[(g_X(t))^N].$$

对 $g_Y(t)$ 关于 t 求导即有

$$\begin{aligned} g_Y'(t) &= E[N(g_X(t))^{N-1}g_X'(t)], \\ g_Y''(t) &= E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2}(g_X'(t))^2 + N(g_X(t))^{N-1}g_X''(t)]. \end{aligned}$$

将 $t=0$ 代入上面两式得

$$\begin{aligned} EY &= E[NE(X)] = EN \cdot EX, \\ EY^2 &= EN \cdot VarX + EN^2 \cdot E^2X, \\ VarY &= EN \cdot VarX + E^2X \cdot VarN, \end{aligned}$$

注意$g(0)=1$.

方差=条件期望的方差+条件方差的期望

$$Var(Y) = Var(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}[Var(Y|X)],$$

其中 $Var(Y|X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2|X]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))^2 \mid X\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[Y^2 + [\mathbb{E}(Y \mid X)]^2 - 2Y\mathbb{E}(Y \mid X)\right] \mid X\right\} \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2 \mid X\right) + \mathbb{E}\left\{[\mathbb{E}(Y \mid X)]^2 \mid X\right\} - 2\mathbb{E}[Y\mathbb{E}(Y \mid X) \mid X] \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2 \mid X\right) + [\mathbb{E}(Y \mid X)]^2 - 2\mathbb{E}(Y \mid X)\mathbb{E}[Y \mid X] \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2 \mid X\right) - [\mathbb{E}(Y \mid X)]^2 = Var(Y|X).
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}Y]^2 = \mathbb{E}[\underbrace{Y-\mathbb{E}[Y|X]}_{\text{与任何X有关的函数正交}} + \underbrace{\mathbb{E}[Y|X]-\mathbb{E}Y}_{\text{只与X有关}}]^2$$

$$= \mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y|X]]^2 + \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]-\mathbb{E}Y]^2}_{\text{条件期望的方差}} + \underbrace{0}_{\text{交叉项为0}}$$

$$\overset{\text{全期望公式}}{=} \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[[Y-\mathbb{E}[Y|X]]^2 \mid X]}_{\text{条件方差}}] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$$

全方差公式:

$$Var(Y) = Var(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}[Var(Y|X)]$$

表明Y的方差由两部分组成，一部分可以由条件期望(回归)解释的部分，另一部分则是条件方差的平均。

记 $X_1, X_2, \cdots$ 为一串独立同分布的随机变量，N 为非负整数值随机变量且与 X 序列相独立。Y 为随机和 $\sum_{i=1}^{N} X_i$，则

$$VarY = EN \cdot VarX + E^2X \cdot VarN.$$

解：利用全方差公式

$$\begin{aligned} Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) &= Var(\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]) + \mathbb{E}[Var(\sum_{i=1}^{N} X_i|X)] \\ &= Var(N\mathbb{E}[X]) + \mathbb{E}[NVar(X)] \\ &= (\mathbb{E}[X])^2 Var(N) + EN \cdot Var(X). \end{aligned}$$

由于随机变量的矩母函数不一定存在，因此现在常用特征函数$E[e^{jtX}]$代替矩母函数．而对于随机过程，一维特征函数定义为（假设存在密度函数）

$$\phi_X(\omega,t) = E\left[e^{j\omega X(t)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f_X(x,t)dx$$

一维特征函数与对应的概率密度函数有类似的Fourier变换对关系：

$$f_X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(\omega,t)e^{-j\omega x}d\omega$$

二维特征函数：对任意的t_1和t_2，二维随机变量$X(t_1)$与$X(t_1)$的联合特征函数（假设存在密度函数）

$$\phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)=E\left[e^{j\omega_1 X(t_1)+j\omega_2 X(t_2)}\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_1 x_1+j\omega_2 x_2}f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$$

与一元类似

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=$$
$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)\,e^{-j\omega_1 x_1-j\omega_2 x_2}d\omega_1 d\omega_2$$

相关函数与二维特征函数之间的关系

$$C_X(t_1, t_2) = -\left.\frac{\partial^2 \phi_X(\omega_1, \omega_2; t_1, t_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}\right|_{\omega_1=\omega_2=0}$$

相关函数与二维矩母函数有类似的关系。

相关函数与二维特征函数之间的关系

$$C_X(t_1,t_2) = -\left.\frac{\partial^2 \phi_X(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\right|_{\omega_1=\omega_2=0}$$

相关函数与二维矩母函数有类似的关系。

离散随机信号是一种很重要的信号形式。如果把 $\exp\{tX\}$ 的数学期望改为 s^X 的期望就可定义生成函数或概率生成函数。

定义：若 X 为离散随机变量则期望 $E(s^X)$ 为其概率生成函数，记作 $\phi_X(s)$。即

$$\phi_X(s) = E[s^X].$$

特别若 $P(X=k)=p_k,\ k=0,1,2,\cdots$ 则

$$\phi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

生成函数的性质：

- 当生成函数与离散随机变量是一一对应的;
- $E\{X(X-1)\cdots(X-r+1)\} = \frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)|_{s=1}$;
- 对于相互独立的随机变量X与Y，则

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

性质： 若离散随机变量分布为：

$$\mathrm{P}(X=k)=p_k,\ k=0,1,2,\cdots$$

则

$$p_k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)\Big|_{s=0},\quad k=0,1,2,\cdots$$

例题： 在随机和的情形，若 X_i 为离散随机变量，其概率生成函数为 $\phi_X(s)$，则对 $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 有

$$\begin{aligned}\phi_Y(s) &= E(s^Y)=E\{E[s^Y\mid N]\}\\ &= E\{(\phi_X(s))^N\}=\phi_N(\phi_X(s)).\end{aligned}\tag{3}$$

也即 Y 的生成函数是由 N 与 X 的概率生成函数复合而成的。

- 随机过程定义及例子
- 有限维分布和数字特征
- 条件期望与矩母函数
- 收敛性

在随机过程的研究中，还经常会遇到各种意义下的随机变量序列的收敛性问题。下面简要介绍几种收敛性及它们之间的关系。

定义： 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列随机变量，若存在随机变量 X,,

- 依概率收敛：使对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 以概率收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{p} X$.

- 几乎必然收敛：使得

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty}(X_n - X) = 0\right) = 1$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 几乎必然 (almost sure) 收敛于 X，记为 $X_n \to X$, a.s., 也称随机变量序列以概率 1 收敛于 X。

- 均方收敛： X_n与X都有有限的二阶矩, 若

$$\lim_{n\to\infty} E\left(X_n - X\right)^2 = 0$$

则称随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$ 均方收敛于X, 记为$X_n \xrightarrow{m.s.} X$.

三种收敛的关系：

- 几乎必然收敛$\Longrightarrow$依概率收敛
- 均方收敛$\Longrightarrow$依概率收敛
- 几乎必然收敛$\nLeftrightarrow$均方收敛

极限limits

- 随机变量序列$X_{\mathrm{N}} = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$
  $\Rightarrow$ 区分随机过程X_{N} 和一样本路径（realizations）x_{N}.

Q1) 如果n很大时, X_n的极限是什么？ $\Rightarrow$ 不明确, 因为X_n 是RV

Q2) 如果n很大时, x_n的极限是什么？ $\Rightarrow$ 明确, 看$\lim_{n\to\infty} x_n$存在？

Q3) 如果n很大时, $\mathrm{P}(X_n \in \mathcal{X})$的极限是什么？ $\Rightarrow$ Yes, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n \in \mathcal{X})$ 是否存在？

- 我们关心的是如何来定义随机变量列的极限？
- 能否从每一条样本路径出发考虑收敛性：$\lim_{n\to\infty} x_n$？
  $\Rightarrow$ 每一条都收敛和几乎处处收敛(去掉一个零概集）
- 或者从概率收敛的角度：$\mathrm{P}(X_n \in \mathcal{X})$?
  $\Rightarrow$ 依概率收敛，均方收敛，以及依分布收敛

- 数列$x_{\mathbb{N}} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
- 定义: 数列x_n收敛到x, 若对任给的$\epsilon > 0$
  $\Leftrightarrow$ 存在n_0 使得对所有的$n > n_0$, 都有$|x_n - x| < \epsilon$
- 随机列RVs $X_{\mathbb{N}} = X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \Leftrightarrow X_{\mathbb{N}}$ 所有实现列记为$x_{\mathbb{N}}$.

定义: 称随机序列X_n 收敛到随机变量X, 若对随机序列X_n的每个实现列x_n, 都有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

即, 对每个$\omega \in \Omega$, 都有$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

定义： 称随机序列X_n 几乎处处收敛到随机变量X，若

$$\mathrm{P}\Big(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1.$$

例1. $X_0 \sim N(0,1)$, $Z_n \sim B(1,p)$, 定义

$$X_n = X_0 - \frac{Z_n}{n}, \quad 其中 Z_n/n \to 0,$$

则

$$X_n \to X_0 \ as \ n \to \infty.$$

例2. $X_n(\omega) = \omega^n + \omega, X(\omega) = \omega, \omega \in [0,1]$. 则$X_n \to X \quad a.s.$.

$$\omega \in [0,1), X_n \to X, \quad X_n(1) = 2, \ X(1) = 1$$

- **定义(依概率收敛)**：如果对任取$\epsilon > 0$ 有

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0,$$

则称ξ_n依概率收敛到ξ，或称ξ_n相合于ξ，或ξ_n弱收敛到ξ，记做$\xi_n \xrightarrow{\text{P}} \xi$。

例. $X_0 \sim N(0,1)$, $Z_n \sim B(1, \frac{1}{n})$, 则

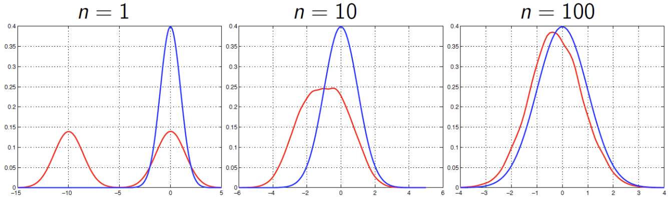
$$X_n = X_0 - Z_n \xrightarrow{p} X_0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|X_n - X_0| < \epsilon\right) &= \mathrm{P}\left(|Z_n| < \epsilon\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z_n = 1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \to 1 \end{aligned}$$

- **定义(依分布收敛)**：设$\xi_n \sim F_n(x)$, $\xi \sim F(x)$。如果在F的每个连续点x有$F_n(x) \to F(x)$, 则称ξ_n依分布收敛到ξ, 记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$。

例. $Y \sim N(0,1), Z_n \sim B(1,p)$. 定义$X_n = Y - 10Z_n/n$, 则

$$X_n \xrightarrow{d} Y$$



连续性定理:

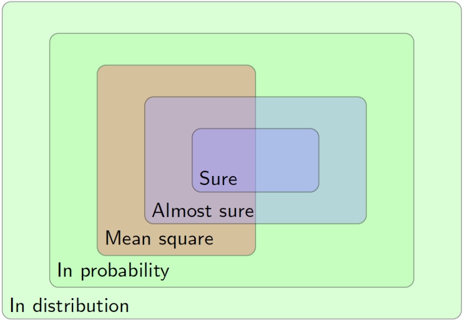
1. 设分布函数列$F_n(x) \to F(x)$, $F(x)$也是分布函数, 则相应的特征函数列也收敛, $p_n(x) \to p(x)$ 且这个收敛关于t是一致的
2. 特征函数列$p_n(x)$收敛于某个函数$p(t)$, 且$p(t)$在$t=0$连续, 则相应的分布函数列$F_n(x)$弱收敛于某一个分布函数$F(x)$, 且$p(t)$是$F(x)$的特征函数.

L^r收敛

- **定义(L^1收敛)**：如果$E|\xi_n-\xi|\to 0$，则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用)。记做$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$
- **定义(L^2收敛)** 如果$E|\xi_n-\xi|^2\to 0$，则称ξ_n L^2收敛到ξ，或称ξ_n均方收敛到ξ，记做$\xi_n \to \xi$ (L^2)或$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$或$\xi_n \xrightarrow{m.s} \xi$。

Implications

- Sure $\Rightarrow$ almost sure $\Rightarrow$ in probability $\Rightarrow$ in distribution
- Mean square $\Rightarrow$ in probability $\Rightarrow$ in distribution
- In probability $\Rightarrow$ in distribution



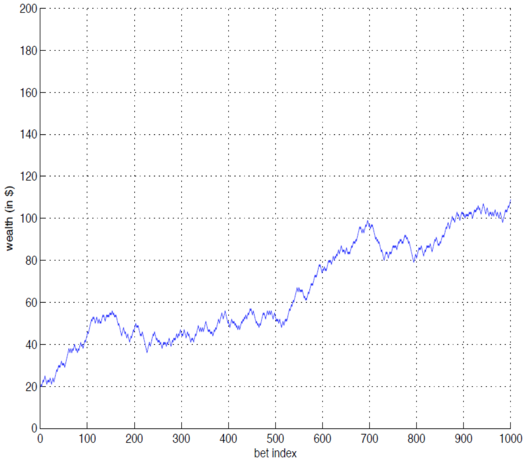
一个简单的赌博（简单随机游走），没钱就不再进行下去

1. 初始资本$W(0) = w_0$,
2. 每次输赢1元钱，赢的概率为$p > 1/2$
3. X_t表示t时刻的赌博的结果，赢记为1，输记为0，$X(t) \sim B(1, p)$.
4. 于是t时刻的资本有如下递推式：

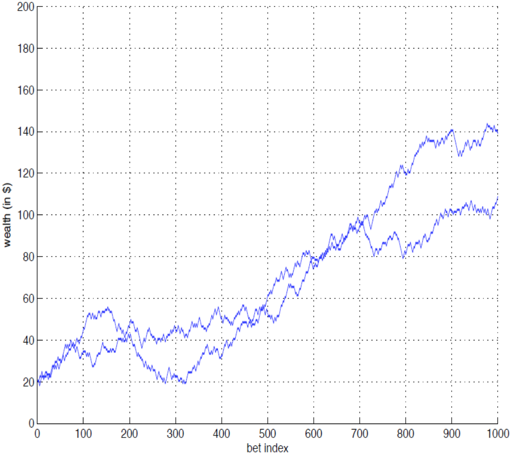
$$W(t+1) = W(t) + 2X(t) - 1$$

5. 模拟：$t = 0$, $w_0 = 20$, $p = 0.55$,

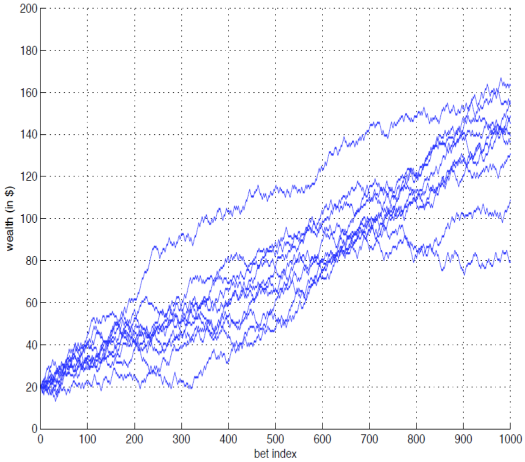
1000次都没有破产，$W(1000)=109$. $W(t)$的一次观测为



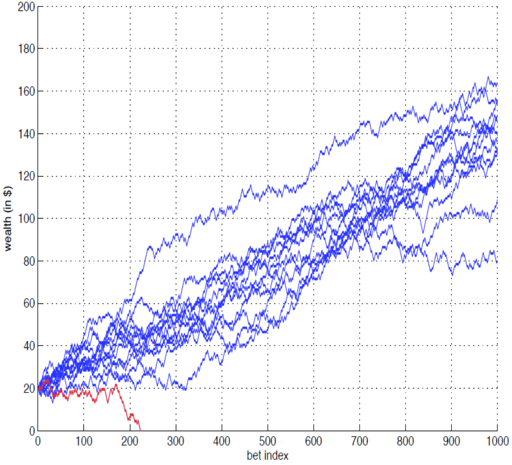
1000次都没有破产，$W_2(1000) = 139$. $W(t)$的一次观测为



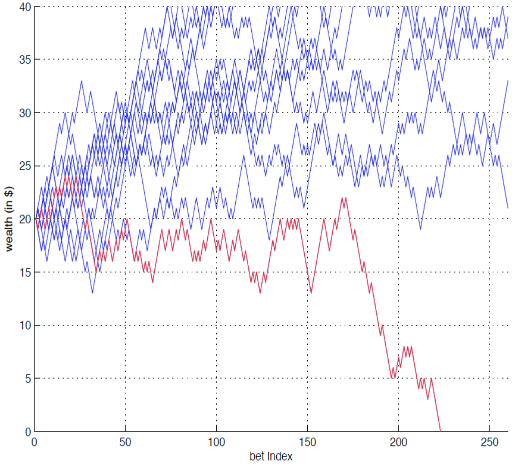
1000次都没有破产，重复观测可得到多条样本路径，明显有个上升的趋势



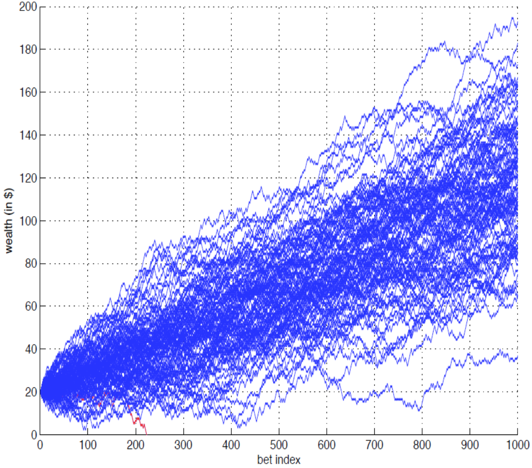
第12次重复模拟，发现破产了



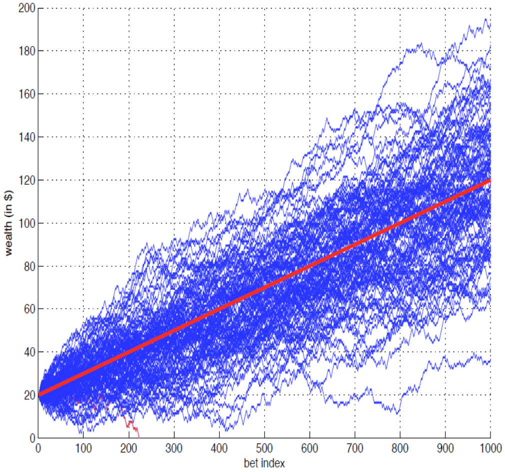
这样我们仅看前面250次的样本路径图



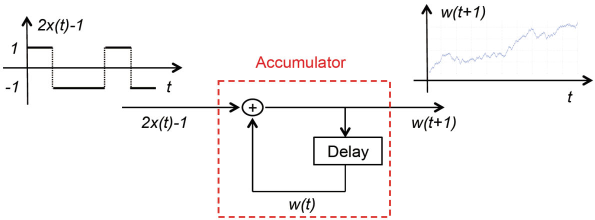
去掉12次，多次重复模拟图为



不难计算，可以得到均值函数为$w_0 + 0.1t$.



注意到$W(t+1) = W(t) + 2X(t) - 1$



1. 把$W(t+1)$视为LTI系统（线性时不变系统）的输出
2. 输入为$2X(t) - 1$
3. Recognize accumulator识别累加器

$$W(t+1) = w_0 + \sum_{\tau=0}^{t}(2X(\tau) - 1)$$