组合数学常用公式

> *参考 WiKi:*
>
> *Permutation*
>
> *Multinomial theorem*

Multinomial theorem

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k1,k_2,\ldots,k_m}\prod_{t=1}^{m}x_t^{k_t}$$

e.g. $(x+y+z)^6=M(1,2,3)\cdot x^1y^2z^3$

$$M(1,2,3)=\frac{(1+2+3)!}{1!2!3!}$$

multinomial coefficients 多项式系数

$$\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

与 binomial coefficients 二项式系数的关系

$$\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_m}=\binom{k_1}{k_1}\binom{k_1+k_2}{k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_m}{k_m}$$

Permutations of multisets

例如 n个球,一共有 m 种,每种数量是$k_1,k_2,\ldots,k_m$个, 排列总数为多项式系数

Combination

注意这里的符号与多项式的符号相同, 但对应公式不同, 表示为C_n^k

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

$k > n$, $C_n^k = 0, k == 0 || k == n, C_n^k = 1$

组合数存在递推公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

解释: n 个元素中取 k 个数, 假设有 1 个元素为特殊元素, 那么结果分为包含特殊元素和没有特殊元素的两部分之和, 前者是 n-1 中取 k-1, 后者是 n-1 中取 k