[CV] Rotated IoU 计算旋转矩形之间的重叠面积

简介

在目标检测的领域，基于Anchor的方法需要对Anchor分配正负样本的标签。通常，对于axis-aligned的anchor和ground truth，可以直接通过`[top left right down]`四个值计算他们之间的重叠面积。但是针对于旋转的矩形框，这个问题就变得尤为复杂。

我参考了3D目标检测论文SECOND的源码，来尝试解释一下如何计算旋转包围盒的重叠面积。

代码全部来自second.pytorch这个项目的早期版本，去掉了numba/cuda加速的代码。

旋转包围盒的编码方式

作者代码使用了两种方式

1. 通过包围盒中心点位置，尺度以及角度来编码`rbbox`

```
rbbox = [x, y, x_d (w), y_d (h), angle]
```

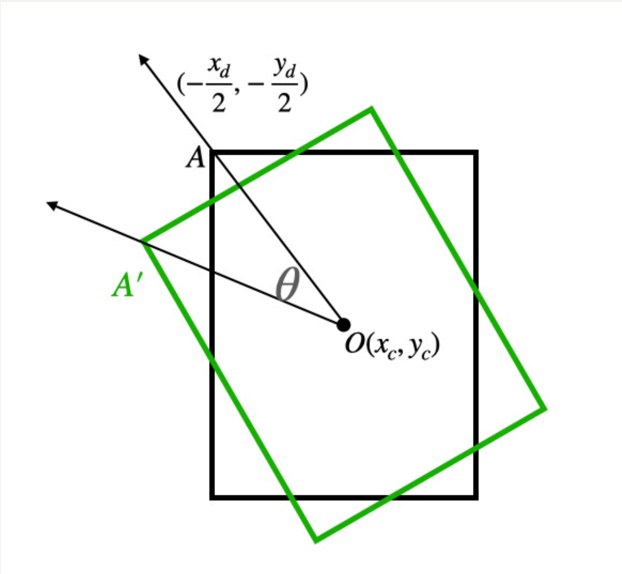
2. 通过包围盒的顶点`corners`来编码

矢量的旋转公式

将矢量看作列矢量$\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{2\times1}$，则将其逆时针旋转$\theta$之后的矢量为：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \vec{\alpha}$$

包围盒转化为角点



如图，`rbbox`为绿色的包围盒，是原始黑色包围盒通过逆时针旋转θ角度得到。分析 A' 的真实坐标：

首先向量 $\overrightarrow{OA}$ 被表示为

$$\overrightarrow{OA} = [-\frac{x_d}{2}, -\frac{y_d}{2}]^T$$

旋转后的向量可以被表示为

$$\overrightarrow{OA'} = T_\theta \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \frac{-x_d}{2} - \sin\theta \frac{-y_d}{2} \\ \sin\theta \frac{-x_d}{2} + \cos\theta \frac{-y_d}{2} \end{bmatrix}$$

通过 $A' = O + \overrightarrow{OA'}$ 恢复顶点的坐标即可。

代码表示

下段代码将`[x, y, x_d, y_d, angle]`转化为顺时针方方向表示的顶点坐标`[x0, y0, x1, y1, x2, y2, x3, y3]`

```
import math
def rbbox_to_corners(rbbox):
    # generate clockwise corners and rotate it clockwise
```

```python
    # 顺时针方向返回角点位置
    cx, cy, x_d, y_d, angle = rbbox
    a_cos = math.cos(angle)
    a_sin = math.sin(angle)
    corners_x = [-x_d / 2, -x_d / 2, x_d / 2, x_d / 2]
    corners_y = [-y_d / 2, y_d / 2, y_d / 2, -y_d / 2]
    corners = [0] * 8
    for i in range(4):
        corners[2 *
                i] = a_cos * corners_x[i] + \
                     a_sin * corners_y[i] + cx
        corners[2 * i +
                1] = -a_sin * corners_x[i] + \
                     a_cos * corners_y[i] + cy
    return corners
```

测试一下结果：

```python
rbbox = [0, 0, 2, 4, math.pi / 2]
corners = rbbox_to_corners(rbbox)
print([round(_) for _ in corners])
# [-2, 1, 2, 1, 2, -1, -2, -1]
```

相交区域的特点

两个四边形(矩形)，求交叠面积，可以先求出相交的多边形(Polygon)的顶点，构成多边形的顶点可由两种类型的点构成：

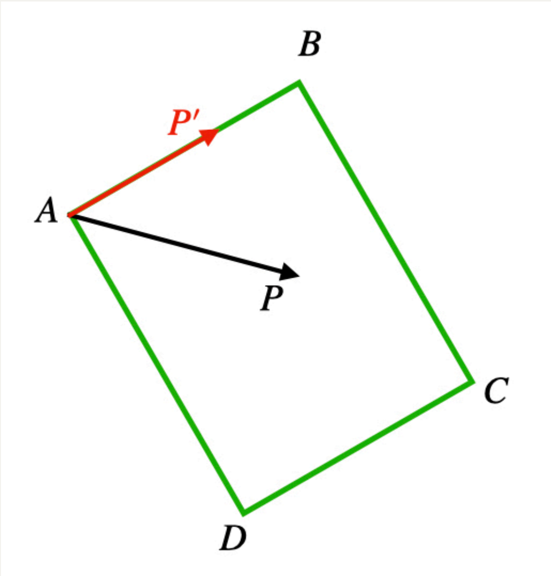
1. 原始四边形的顶点
2. 四边形的边相交产生的交点

对应问题为：

1. 判断点在四边形内
2. 判断线段的交点

点在四边形(矩形)内

如图所示，四边形(矩形)通过`ABCD`四个顶点表示，可以使用较强的规则判断`P`在矩形内，即`AP`在`AB` 的投影在线段`AB`上，在`AD`的投影在线段`AD`上。



点积的物理意义

两个矢量的点积是标量，点积满足交换律:

1. 矢量的模被定义为$|a| = \sqrt{a \cdot a}$
2. $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$ 实际表示为b在a上的投影的长度。如果投影与a方向相反，则为负值

所以代码的思路就是，通过点击得到投影长度，通过判断投影长度确定点在矩形框内。

代码

SECOND函数为 `point_in_quadrilateral`

```
def point_in_quadrilateral(pt_x, pt_y, corners):
    ab0 = corners[2] - corners[0]
    ab1 = corners[3] - corners[1]

    ad0 = corners[6] - corners[0]
    ad1 = corners[7] - corners[1]

    ap0 = pt_x - corners[0]
    ap1 = pt_y - corners[1]

    abab = ab0 * ab0 + ab1 * ab1
    abap = ab0 * ap0 + ab1 * ap1
    adad = ad0 * ad0 + ad1 * ad1
    adap = ad0 * ap0 + ad1 * ap1

```

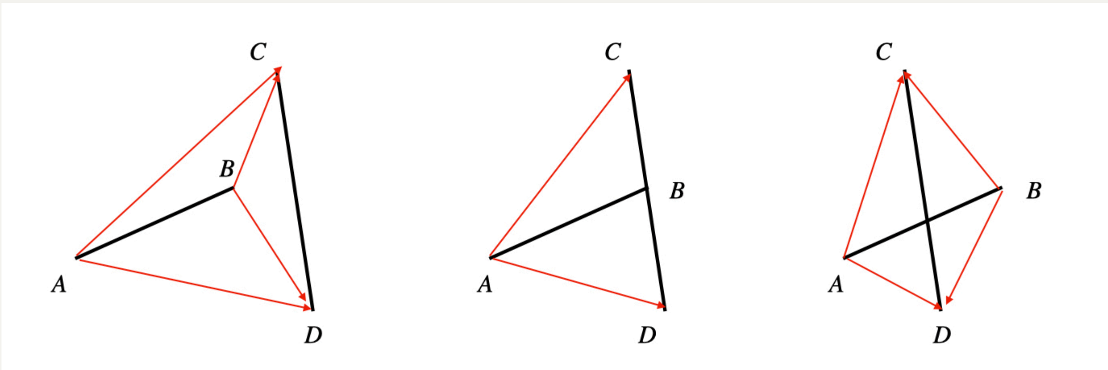
```
    return abab >= abap and abap >= 0 and adad >= adap and adap >= 0
```

线段交点

判断线段是否相交

> *参考：[判断线段相交的最简方法]*

对于两个直线是否相交，一种方法是计算线段斜率，首先确定不平行，然后联立方程，计算交点坐标，最后运用定比分点公式，判断交点是否在线段上。但是使用斜率和定比分点，可能会出现精度丢失的现象，同时浮点数运算耗时。



上图可以表示两个线段位置的所有可能情况。定义`direct(a, b)`为向量有序对的旋转方向。其旋转方向为 **使 a 能够旋转一个小于 180 度的角并与 b 重合的方向**，简记为`direct(a, b)`。若 `a` 和 `b` 反向共线，则旋转方向取任意值。

则上图三种情况可以概括为：

1. `direct(AC, AD)` 和 `direct(BC, BD)` 为顺时针，`direct(CA, CB)` 为逆时针，`direct(DA, DB)`为顺时针
2. `direct(AC, AD)`顺时针，`direct(BC, BD)`为任意方向，`direct(CA, CB)`为逆时针，`direct(DA, DB)` 为顺时针
3. `direct(AC, AD)` 和 `direct(DA, DB)` 为顺时针，`direct(BC, BD)` 和 `direct(CA, CB)` 为逆时针

可以得知，两条线段相交的充要条件是`direct(AC, AD) != direct(BC, BD)` 和 `direct(CA, CB) != direct(DA, DB)`

定义 $<\vec{a},\vec{b}>$ 为 $\vec{a}$ 逆时针旋转到与 $\vec{b}$ 重合的角度。有：

- `direct(a, b)` 顺时针, $0 \leq <\vec{a},\vec{b}> \leq 180, \sin <\vec{a},\vec{b}> \geq 0$
- `direct(a, b)` 逆时针, $180 \leq <\vec{a},\vec{b}> \leq 360, \sin <\vec{a},\vec{b}> \leq 0$

问题可以转化为有向角正弦值的问题。可以使用叉乘来做:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

叉乘表示 $\vec{a}, \vec{b}$ 构成平行四边行的有向面积

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$$

- 伸出右手，将四指由 $\vec{a}$沿小于平角转到 $\vec{b}$。若拇指指向纸面上方，则 $\vec{a} \times \vec{b}$ 为正，否则为负。
- 若向量共线，叉积为0

叉积的正负可以判断 $< \vec{a}, \vec{b} >$ 的角度范围。所以充要条件等价于叉积符号不同。

相交后转化为直线交点

> *Wiki Line–line intersection*
>
> *Using homogeneous coordinates*

直接用wiki的结论，两个点可以确定一条直线，因此定义两条直线$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ 和 $(x_3, y_3)(x_4, y_4)$ ，可以通过以下公式计算交点的坐标 (P_x, P_y)

$$P_x = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3y_4 - y_3x_4)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_4)}$$

$$P_y = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3y_4 - y_3x_4)}{(x_1 - x_2)(y_3 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_4)}$$

代码

代码如下

```
def line_segment_intersection(pts1, pts2, i, j):
    # pts1, pts2 为corners
    # i j 分别表示第几个交点，取其和其后一个点构成的线段
    # 返回为 tuple(bool, pts) bool=True pts为交点
    A, B, C, D, ret = [0, 0], [0, 0], [0, 0], [0, 0], [0, 0]
    A[0] = pts1[2 * i]
    A[1] = pts1[2 * i + 1]

    B[0] = pts1[2 * ((i + 1) % 4)]
    B[1] = pts1[2 * ((i + 1) % 4) + 1]

    C[0] = pts2[2 * j]
    C[1] = pts2[2 * j + 1]

    D[0] = pts2[2 * ((j + 1) % 4)]
    D[1] = pts2[2 * ((j + 1) % 4) + 1]
```

```
    BA0 = B[0] - A[0]
    BA1 = B[1] - A[1]
    DA0 = D[0] - A[0]
    CA0 = C[0] - A[0]
    DA1 = D[1] - A[1]
    CA1 = C[1] - A[1]
    # 叉乘判断方向
    acd = DA1 * CA0 > CA1 * DA0
    bcd = (D[1] - B[1]) * (C[0] - B[0]) > (C[1] - B[1]) * (D[0] - B[0])
    if acd != bcd:
        abc = CA1 * BA0 > BA1 * CA0
        abd = DA1 * BA0 > BA1 * DA0
        # 判断方向
        if abc != abd:
            DC0 = D[0] - C[0]
            DC1 = D[1] - C[1]
            ABBA = A[0] * B[1] - B[0] * A[1]
            CDDC = C[0] * D[1] - D[0] * C[1]
            DH = BA1 * DC0 - BA0 * DC1
            Dx = ABBA * DC0 - BA0 * CDDC
            Dy = ABBA * DC1 - BA1 * CDDC
            ret[0] = Dx / DH
            ret[1] = Dy / DH
            return True, ret
    return False, ret
```

测试结果:

```
if __name__ == '__main__':
    rbbox1 = [0, 0, 2, 4, 0]
    rbbox2 = [0, 0, 4, 2, 0]
    corners1 = rbbox_to_corners(rbbox1)
    corners2 = rbbox_to_corners(rbbox2)
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            ret, pts = line_segment_intersection(corners1, corners2, i, j)
            if ret:
                print('Px: {}, Py: {}'.format(*pts))
"""
Px: -1.0, Py: 1.0
Px: -1.0, Py: -1.0
Px: 1.0, Py: 1.0
Px: 1.0, Py: -1.0
"""
```

计算相交区域面积

当有了构成相交区域多边行的顶点后，可以通过以下两部分计算相交区域的面积：

1. 将顶点按照顺时针或者逆时针排序
2. 三角剖分计算面积

顶点排序

在凸多边形内部取一点，与顶点连线，可以通过连线与坐标轴构成的角度排序。操作如下

1. 计算所有顶点的横纵坐标均值，记作中心点
2. 计算中心点到每个单位向量[vx, vy]。
3. 以x轴正方向为其实遍，按照顺时针方向扫描360度，对扫描到的点进行排序

关于步骤3，具体操作为：对于已经归一化单位向量，先考虑从180度到360度，有$v_y \geq 0, -1 < v_x < 1$，v_x单增。对于从0到180度，有$v_y < 0, -1 < v_x < 1$, 其变化范围是由1到-1(单减)。则排序使用索引k可以为：

1. $v_y > 0, k = v_x$
2. $v_y < 0, k = -2 - v_x$

顶点排序代码

```python
def sort_vertex_in_convex_polygon(int_pts, num_of_inter):
    def _cmp(pt, center):
        vx = pt[0] - center[0]
        vy = pt[1] - center[1]
        d = math.sqrt(vx * vx + vy * vy)
        vx /= d
        vy /= d
        if vy < 0:
            vx = -2 - vx
        return vx

    if num_of_inter > 0:
        center = [0, 0]
        for i in range(num_of_inter):
            center[0] += int_pts[i][0]
            center[1] += int_pts[i][1]
        center[0] /= num_of_inter
        center[1] /= num_of_inter
        int_pts.sort(key=lambda x: _cmp(x, center))
```

简易版三角剖分

将多边形转化为多个三角形面积之和，具体操作为固定一个点，按照顺时针顺序依次选择剩下的2个点，计算三角形面积(利用叉积) 最后将三角形面积求和。

代码如下:

```python
def area(int_pts, num_of_inter):
    def _trangle_area(a, b, c):
        return ((a[0] - c[0]) * (b[1] - c[1]) - (a[1] - c[1]) *
                (b[0] - c[0])) / 2.0

    area_val = 0.0
    for i in range(num_of_inter - 2):
        area_val += abs(
            _trangle_area(int_pts[0], int_pts[i + 1],
                          int_pts[i + 2]))
    return area_val
```

所有代码

代码汇总如下

```python
import math


def rbbox_to_corners(rbbox):
    # generate clockwise corners and rotate it clockwise
    # 顺时针方向返回角点位置
    cx, cy, x_d, y_d, angle = rbbox
    a_cos = math.cos(angle)
    a_sin = math.sin(angle)
    corners_x = [-x_d / 2, -x_d / 2, x_d / 2, x_d / 2]
    corners_y = [-y_d / 2, y_d / 2, y_d / 2, -y_d / 2]
    corners = [0] * 8
    for i in range(4):
        corners[2 *
                i] = a_cos * corners_x[i] + \
                     a_sin * corners_y[i] + cx
        corners[2 * i +
                1] = -a_sin * corners_x[i] + \
```

```
                     a_cos * corners_y[i] + cy
    return corners


def point_in_quadrilateral(pt_x, pt_y, corners):
    ab0 = corners[2] - corners[0]
    ab1 = corners[3] - corners[1]

    ad0 = corners[6] - corners[0]
    ad1 = corners[7] - corners[1]

    ap0 = pt_x - corners[0]
    ap1 = pt_y - corners[1]

    abab = ab0 * ab0 + ab1 * ab1
    abap = ab0 * ap0 + ab1 * ap1
    adad = ad0 * ad0 + ad1 * ad1
    adap = ad0 * ap0 + ad1 * ap1

    return abab >= abap and abap >= 0 and adad >= adap and adap >= 0


def line_segment_intersection(pts1, pts2, i, j):
    # pts1, pts2 为corners
    # i j 分别表示第几个交点，取其和其后一个点构成的线段
    # 返回为 tuple(bool, pts) bool=True pts为交点
    A, B, C, D, ret = [0, 0], [0, 0], [0, 0], [0, 0], [0, 0]
    A[0] = pts1[2 * i]
    A[1] = pts1[2 * i + 1]

    B[0] = pts1[2 * ((i + 1) % 4)]
    B[1] = pts1[2 * ((i + 1) % 4) + 1]

    C[0] = pts2[2 * j]
    C[1] = pts2[2 * j + 1]

    D[0] = pts2[2 * ((j + 1) % 4)]
    D[1] = pts2[2 * ((j + 1) % 4) + 1]
    BA0 = B[0] - A[0]
    BA1 = B[1] - A[1]
    DA0 = D[0] - A[0]
    CA0 = C[0] - A[0]
    DA1 = D[1] - A[1]
    CA1 = C[1] - A[1]
    # 叉乘判断方向
```

```
    acd = DA1 * CA0 > CA1 * DA0
    bcd = (D[1] - B[1]) * (C[0] - B[0]) > (C[1] - B[1]) * (D[0] - B[0])
    if acd != bcd:
        abc = CA1 * BA0 > BA1 * CA0
        abd = DA1 * BA0 > BA1 * DA0
        # 判断方向
        if abc != abd:
            DC0 = D[0] - C[0]
            DC1 = D[1] - C[1]
            ABBA = A[0] * B[1] - B[0] * A[1]
            CDDC = C[0] * D[1] - D[0] * C[1]
            DH = BA1 * DC0 - BA0 * DC1
            Dx = ABBA * DC0 - BA0 * CDDC
            Dy = ABBA * DC1 - BA1 * CDDC
            ret[0] = Dx / DH
            ret[1] = Dy / DH
            return True, ret
    return False, ret


def sort_vertex_in_convex_polygon(int_pts, num_of_inter):
    def _cmp(pt, center):
        vx = pt[0] - center[0]
        vy = pt[1] - center[1]
        d = math.sqrt(vx * vx + vy * vy)
        vx /= d
        vy /= d
        if vy < 0:
            vx = -2 - vx
        return vx

    if num_of_inter > 0:
        center = [0, 0]
        for i in range(num_of_inter):
            center[0] += int_pts[i][0]
            center[1] += int_pts[i][1]
        center[0] /= num_of_inter
        center[1] /= num_of_inter
        int_pts.sort(key=lambda x: _cmp(x, center))


def area(int_pts, num_of_inter):
    def _trangle_area(a, b, c):
        return ((a[0] - c[0]) * (b[1] - c[1]) - (a[1] - c[1]) *
```

```
                 (b[0] - c[0])) / 2.0

    area_val = 0.0
    for i in range(num_of_inter - 2):
        area_val += abs(
            _trangle_area(int_pts[0], int_pts[i + 1],
                          int_pts[i + 2]))
    return area_val


if __name__ == '__main__':
    rbbox1 = [0, 0, 2, 4, 0]
    rbbox2 = [0, 0, 4, 2, 0]
    corners1 = rbbox_to_corners(rbbox1)
    corners2 = rbbox_to_corners(rbbox2)
    pts, num_pts = [], 0
    for i in range(4):
        point = [corners1[2 * i], corners1[2 * i + 1]]
        if point_in_quadrilateral(point[0], point[1],
                                  corners2):
            num_pts += 1
            pts.append(point)
    for i in range(4):
        point = [corners2[2 * i], corners2[2 * i + 1]]
        if point_in_quadrilateral(point[0], point[1],
                                  corners1):
            num_pts += 1
            pts.append(point)
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            ret, point = line_segment_intersection(corners1, corners2, i, j)
            if ret:
                num_pts += 1
                pts.append(point)
    sort_vertex_in_convex_polygon(pts, num_pts)
    polygon_area = area(pts, num_pts)
    print('area: {}'.format(polygon_area))
```