组合数学常用公式

参考 WiKi:

Permutation

Multinomial theorem

组合数学常用公式

Multinomial theorem

Combination

Multinomial theorem

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} inom{n}{k1,k_2,\cdots,k_m} \prod_{t=1}^m x_t^{k_t}$$

e.g. $(x+y+z)^6 = M(1,2,3) \cdot x^1 y^2 z^3$

$$M(1,2,3)=rac{(1+2+3)!}{1!2!3!}$$

multinomial coefficients 多项式系数

$$egin{pmatrix} n \ k_1, k_2, \cdots, k_m \end{pmatrix} = rac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

与 binomial coefficients 二项式系数的关系

$$egin{pmatrix} n \ k_1,k_2,\cdots,k_m \end{pmatrix} = egin{pmatrix} k_1 \ k_1 \end{pmatrix} egin{pmatrix} k_1+k_2 \ k_2 \end{pmatrix} \cdots egin{pmatrix} k_1+k_2+\cdots+k_m \ k_m \end{pmatrix}$$

Permutations of multisets

例如 n个球,一共有 m 种,每种数量是 k_1, k_2, \ldots, k_m 个,排列总数为多项式系数

Combination

注意这里的符号与多项式的符号相同,但对应公式不同,表示为 C_n^k

$$C_n^k=inom{n}{k}=rac{n!}{k!(n-k)!}=rac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

$$k>n$$
 , $C_n^k=0$, $k==0 || k==n, C_n^k=1$

组合数存在递推公式

$$egin{pmatrix} n \ k \end{pmatrix} = egin{pmatrix} n-1 \ k-1 \end{pmatrix} + egin{pmatrix} n-1 \ k \end{pmatrix}$$

解释: n 个元素中取 k 个数, 假设有 1 个元素为特殊元素, 那么结果分为包含特殊元素和没有特殊元素的两部分之和, 前者是 n-1 中取 k-1, 后者是 n-1 中取 k