Business Intelligence for Financial Services

Leonardo Fraquelli

30 novembre 2018

Parte I

Concetti base di Finanza

Capitolo 1

Financial Instruments

Gli strumenti finanziari utilizzati in questo corso rientrano in una grossa categoria chiamata **Securities**
Securities: sono uno strumento negoziabile che **rappresenta un valore finanziario.**
Questi sono:

Debt : sono securities che sono considerate **risk-free** [1]

Equity : sono le **Stocks (Azioni)** di una compagnia

Derivatives : sono securities il cui valore dipende da più variabili.
Queste sono: **futures, forwards, swaps, options**

Le Securities sono, in genere, scambiate a un exchange market, un mercato finanziario.

[1] Queste sono lo standard(benchmark) di riferimento per considerare poi il guadagno di stocks rispetto ad altre securities

1.1 Computing profit

è bene definire un paio di termini:

Bond è un contratto a lungo termine tra due soggetti.

Issuer è il debitore: riceve X soldi dall' **Holder** ed è obbligato a ripagarli in seguito con degli **Interessi**.

Holder è il creditore: "Presta" X soldi all' **Issuer** e viene ripagato in seguito.

Principal è l'ammontare iniziale di soldi che **l'Holder** rilascia.

Coupons sono i successivi interessi sulla **Principal**.

Maturity Date è la data in cui il **Bond** termina.

Il valore di un bond dipende quindi da: **Il tempo di maturità, gli interessi e la frequenza di pagamento**.
Supponendo di avere un investitore che acquisisce un bond con:
Principal=100€
interesse annuale=10%
Allora il valore del bond dopo un anno sarà:
100€+(0.1*100 €)= 100 €*(1+0.1)=110 €

1.1.1 Compounding of Interest Rates

La seguente formula considera:

$$P = \text{principal (i-esima) con } P_0 = \text{principale}$$
$$n = \text{numero di anni}$$
$$r = \text{tasso di interesse annuale}$$

Ed è la **Formula generica per il compounding dei tassi di interesse**

$$P_n = P_0 * (1+r)^n \text{ t}$$

Aumentando la frequenza di pagamenti (e.g. con interessi semestrali) la formula diventa:

$$P_n = P_0 * (1 + \frac{r}{m})^{\frac{n}{m}}$$

Table 1.1 The effects of compounding frequency on €100 over 1 year at the interest rate of 10% per annum

Frequency	Number of payments (m)	Interest rate per period (r/m)	Value at the end of year
Annual	1	0.1	€110.00
Semiannual	2	0.05	€110.25
Quarterly	4	0.025	€110.381
Monthly	12	0.0083	€110.471
Weekly	52	0.1/52	€110.506
Daily	365	0.1/365	€110.516

Figura 1.1: Tabella raffigurante la crescita dei valori al crescere di m

1.2 Payoff e profit dei bond

il **Payoff** di una security è il suo valore al raggiungimento della **Maturity**
Per i **Bond** il payoff nient'altro è che **Principal + Interessi**
Il **Profitto** di una security è il **payoff aggiustato**, rimuovendo l'investimento iniziale,tasse ed altri costi di transazione.
Per I **Bond** non vi sono tasse o costi aggiuntivi, diciamo quindi che il rischio è **NULLO**
Formula per il calcolo del profitto ad un tempo τ

$$P_\tau - P_0 = P_0 * \left(\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*\tau} - 1\right)$$

1.2.1 Continous Compounding

Aumentando nelle precedenti formule **m** ad infinito otteniamo il **Continous Compounding**
Assumiamo quindi che il valore di una security aumenti continuamente in un periodo di tempo **t>0**
La nuova formula diventa:

$$P_\tau = P_0 * e^{r*\tau}$$

1.3 Stocks: Trade, Price, Indices

Le **Stocks** sono una parte dell'asset e dei guadagni di una compagnia
Possono Essere di due tipi

Common Generalmente concedono al proprietario uno share dei dividendi e il voto ai meeting degli shareholder

Preferred Consentono solamente una **priorità** nel ricevimento dei dividendi

Una compagnia vende Stocks(Shares) per aumentare il capitale attraverso degli Exchange market
Negli Exchange market un **broker** sarà il responsabile delle operazioni questo consente di calcolare la **capitalizzazione o MarketValue** di una compagnia

$$\textbf{MarketValue} = \text{numero di share * prezzo di una share}$$

Questo Valore varia nel tempo.

1.3.1 Compravendita di stocks

Negli Exchange market sono eseguiti ordini di **buy** e di **sell**
questi sono eseguiti attraverso **orders** di diverso tipo, che consentono di avere delle **trading strategies**
Tali orders sono detti:

Market Order: Sono ordini da eseguire IMMEDIATAMENTE al prezzo migliore

- Utilizzati se l'esecuzione dello scambio ha priorità sul prezzo
- Prendono il miglior prezzo possibile (fill price) al momento dell'esecuzione [2]

Limit Order Inviati al mercato per scambiare solo da un prezzo predefintio

- Lo scambio è eseguito solo se(quando) vi è un offerta valida
- Questo tipo di ordine da controllo sul prezzo ma non sul tempo

Stop Order Un ordine mantenuto dal broker e non inviato sul mercato finchè non viene raggiunto un certo prezzo

[2] Può variare quindi rispetto al prezzo mostrato

- Quando il prezzo è raggiunto lo stop-order può diventare un market o limit order [3]
- Può limitare le perdite
- A differenza del limit order lo stop order non è inviato al mercato immediatamente [4]

Utili provider di quote sulle azioni sono Yahoo Finance e Google Finance (Yahoo>Google)

[3] Specificato dall'investitore

[4] Come scegliere il prezzo dello stop order è topic di ricerche

1.4 Storico transazioni

Per questa sezione faremo riferimento a YahooFinance
Nella lettura delle quote di una Azienda particolare sono presenti i seguenti TAG

Ticker L'id dell'azienda (AAPL=> Apple Inc.)

Open Il prezzo delle share dell'azienda all'apertura del mercato

Close Il prezzo attuale, se il mercato è aperto, il prezzo di chiusura altrimenti

High Massimo prezzo raggiunto tra Open e Close

Low Minimo prezzo raggiunto tra Open e Close

Adjusted Close il prezzo di Close aggiustato includendo dividendi ed altre azioni che possono aver modificato il prezzo

Volume quantità di shares scambiate (non viene precisato se buy/sell)

Dividend un pagamento periodico che riflette i profitti in ritorno agli shareholder

è possibile che alla chiusura e all'apertura del mercato Open e Close del giorno precedente non coincidano
questo perchè alcuni scambi potrebbero alterare il valore in chiusura

1.5 Payoff e profit delle stocks

Verranno utilizzate le seguenti variabili: [5]

S = prezzo della stock S al tempo T con S_0= prezzo iniziale
T = tempo con S_T = tempo di vendita
r = tasso di interesse

$$S_\tau + D_\tau - C(S_0)e^{r*\tau}$$

1.6 Stock Indices

Un **indice** è una funzione matematica che misura i cambiamenti in un gruppo di **data points**
Negli Exchange market questi indici sono i cambiamenti nel valore di un gruppo selezionato di stocks
Sono un riferimento generale per il trend del mercato e dell'economia
Sono ovviamente non acquistabili
Gli indici possono essere di diversi tipi

Price weighted considerano il prezzo dei componenti delle stock che compongono l'indice

Capitalization weighted considerano il prodotto prezzo*quantita di ogni stock che compone l'indice

L'importanza degli indici sta nel poter misurare la performance degli investimenti in un determinato gruppo di azioni rispetto ad altri
In particolare il confronto tra i**rate of Benefit cumulati** che si ottengono durante l'investimento
Per una serie di prezzi P_t con t>=0 il **rate of benefit o ritorno** è

$$R_t = (\frac{P_t}{P_{t-1}}) - 1$$

i ritorni verranno analizzati più tardi

[5] this is not full, please send help

1.7 Opzioni e Derivate

Un **Opzione** è un contratto tra investitori nel quale si acquista **l'opportunità** ma non **l'obbligo** di scambiare un particolare asset in una data futura ad un prezzo prestabilito
Termini:

Exercise date o Maturity: data prestabilita in cui verrà svolto lo scambio

Exercise o Strike price: prezzo dell'asset che viene prestabilito

Call/Put: il tipo di **Opzione**, ovvero di **acquisto/vendita**

Esercitare l'opzione Effetturare lo scambio

Le opzioni possono essere di diversi tipi:

Vanilla Sono Opzioni classiche, caratterizzate solo da condizioni dirette di payoff

- **Europee** possono essere esercitate solamente alla maturity
- **Americane** possono essere esercitate qualunque giorno prima della maturity

Exotic Hanno condizioni più complesse

- **Bermudane** possono essere esercitate in date predeterminate

Path-dependent hanno un payoff che dipende dalla loro price history

- **Asiatiche** hanno un payoff determinato dalla media del prezzo durante la vita dell'opzione
- **A Barriera** posono essere esercitate solo se il prezzo sorpassa un certo livello in un periodo di tempo

Il prezzo di una opzione è chiamato **premio** ed è dato per **ogni** azione [6]
Le opzioni sono organizzate in "serie" di differenti premi, per una maturity date e quotate agli exchange market nel seguente modo

$$\text{SecuritySymbol} + \text{ExpirationDate} + \text{Type(Call/Put)} + \text{StrikePrice}$$

[6] questo vuol dire che comprando un premio di 1.00 € ad un predeterminato prezzo X per N azioni pagherò $N * (X + 1.00)$

1.8 Payoff e Profit delle opzioni

Il payoff di una opzione dipende dalla possibilità di esercitarla o meno

$$P_T = \text{Prezzo di un asset alla data T}$$
$$K = \text{Strike Price alla data T}$$

il payoff di un contratto call generico sarà

$$\max(P_T \text{ - K, 0})$$ [7]

il payoff di un contratto put generico sarà

$$\max(\text{K - } P_T \text{ , 0})$$ [8]

il payoff delle opzioni path dependent è dipendente dalle diverse condizioni sullo strike price

1.8.1 Profit delle opzioni

Per computare il profitto delle opzioni dobbiamo considerare la commissione data [9]

$$P_0 = \text{prezzo dell'asset al tempo } T_0$$
$$T = \text{tempo settato per la maturity}$$
$$\text{C}(P_0\text{,T}) = \text{il prezzo ottenuto dalla coppia P,T}$$

in questo caso sottraiamo il prezzo dell'opzione dal payoff, ma considerato che questi valori sono ricevuti a un diverso periodo T dobbiamo includere i possibili guadagni che avremmo ricevuto con un asset risk-free con in tasso di investimento r[10]

$$max(P_T - K, 0) - C(P_0, T)e^{r*\tau}$$

1.8.2 Perchè le opzioni

utilizzare delle opzioni dà 2 vantaggi rispetto all'acquisto diretto di azioni

1. Possiamo riservare un acquisto di più azioni pagando solo il premio
2. Questo, di per se pone un limite sulle perdite

[7] esercitiamo solo se $P_T >$ K
[8] esercitiamo solo se $P_T <$ K
[9] il prezzo della opzione
[10] τ = T-T_0

1.8.3 Prezzatura delle opzioni

In un contratto opzione entrambi i partiti assumono un rischio:

1. **L'Holder** assume un rischio pagando il premio, che sarà una perdita se non esercita la opzione
2. **L'Issuer** assume un rischio, in quanto se l'opzione viene esercitatà sarà a un prezzo minore del prezzo di mercato

1.9 Futures and Forwards

I **Futures ed I Forwards** sono **Derivate**, differiscono dalle opzioni per l'essere un **OBBLIGO**
Due gruppi creano un contratto con l'obbligo di scambio di uno specifico asset, per un prezzo **delivery price** e una data specifica (**Forwards**) o periodo di tempo (**Futures**).
L'asset scambiato può essere una **commodity**(qualsiasi cosa)
I contratti forward non sono scambiati negli exchange market

1.9.1 Payoff e Profit di Futures and Forwards

Profit e payoff sono uguali in quanto questi contratti non includono fee, siano:

$$K = \text{prezzo del delivery price dell'asset}$$
$$P_T = \text{Prezzo dell'asset al tempo T}$$

allora il profit/payoff è

P_T-K per l'acquisto
K-P_T per la vendita

1.10 Portfolio

Portfolio: collezione di una o più securities da un investitore, o da una compagnia

Positions: gli elementi di un portfolio

Valore di un Portfolio: la somma dei valori delle posizioni ad un dato periodo di tempo

Profit di un Portfolio: la somma dei profit delle posizioni ad un dato periodo di tempo

Un portfolio è designato e aggiornato per adeguarsi agli obbiettivi di un investitore, ai suoi risultati attesi, in continuo confronto con la sua tolleranza al rischio.
Il management di un portfolio richiede due operazioni di base

Apertura di una posizione aumenta i risultati attesi aggiungendo una nuova posizione

Chiusura di una posizione riduce il rischio di decrescere il valore del portfolio vendendo una posizione

Allocare degli asset: sono le dinamiche dell'apertura e della chiusura al fine di minimizzare il rischio e massimizzare i profitti

1.10.1 ETF e Fondi mutuali

Invece di gestire personalmente un portfolio è possibile investire su un portfolio collettivo di una compagnia professionale
La compagnia decide le securities, le loro performance, e esegue allocazioni di asset al posto dell'individuo.
I **Fondi mutuali (?)** sono lo strumento di investimento collettivo più comuni:

1. Sono regolati e registrati ad un exchange market
2. Sono pubblici
3. possono essere **Closed-end** ovvero con un numero fisso di azioni
4. oppure **Open-end** senza limiti al numero di share, che l'investitore può vendere ad ogni momento, uscendo dal fondo

Un altro tipo di investimento collettivo è un **ETF**, Exchange-traded Fund simile a un fondo closed-end ma gestito da uno stock exchange
Molti ETF sono costruiti per tracciare uno specifico indice

Capitolo 2

Trading

2.1 Posizioni di Trading

Posizioni lunghe e corte Un investitore che possiede una security è detto **long** nella security
Un investitore che "presta" una security è detto **short** nella security
L'atto di acquisto/vendita è detto assumere una **long/short** position
Per trovarsi in short un broker deve decidere di prestarci la security, per poi venir ripagato in seguito
Queste operazioni sono dette **short selling** e sono molto spesso illegali

2.2 Trading Attitudes

consideriamo tre tipi particolari di traders:

Hedgers eseguono scambi riducendo o eliminando il rischio quando prendono una posizione su una security [1]

Speculators eseguono scambi rischiosi, scommettendo sul futuro prezzo di una security

Arbitrageurs eseguono scambi [2] che sono avvantaggiati su più mercati

2.2.1 Hedgers

scambi **risk-free**,
Loro scopo è proteggere il portfolio dalla perdita di valore, con un compromesso sui benefit possibili.
Una strategia di Hedging generalmente acquista share con posizioni inverse[3] in modo tale da compensare la decrescita di una con la crescita dell'altra.

2.2.2 Speculators

scambi **basati su speculazione**, sono una scommessa sul futuro prezzo della security.

2.2.3 Arbitrageurs

scambi **fra diversi mercati**, scambiano su mercati vantaggiosi e riscambiano gli acquisti su mercati a prezzi più alti
cercano degli sbilanci fra i prezzi di due mercati.

L'arbitraggio

generalmente parlando, i costi di transazioni riducono considerabilmente il profitto, e nel caso di grosse disparanze nei prezzi altri trader se ne accorgeranno subito, diciamo quindi che le possibilità di arbitraggio sono praticamente nulle.

[1] Si mantengono sul "bordo" del mercato"
[2] legali?
[3] Quando una sale, l'altra scende

2.3 Bulls/Bears

Quando il trend del mercato è in crescita[4], si dice che è "bullish"
Quando il trend del mercato è in decrescita, si dice che è "bearish"
un **Bull, o Toro,** è un investitore che prende una posizione di long quando il prezzo è in crescita
un **Bear, o Orso,** è un investitore che prende una posizione di short quando il prezzo è in decrescita.
"When the market is bullish assume long positions, when bearish assume short positions."

2.3.1 Determining bull or bear

Determinare se il mercato è bullish/bearish nient'altro è che determinare la crescita futura e la sua sostenibilità,
Questo richiede moltissime variabili.
Una defінzione accettabile di un mercato bearish è:

"While there's no agreed-upon definition of a bear market, one generally accepted measure is a price decline of 20% or more over at least ***a two-month period****"*

2.4 Market Timing

un **atteggiamento passivo** è quello che la maggioranza degli investitori segue, consiste in una strategia detta **buy and hold** nella quale le securities sono mantenute in un portfolio per un lungo periodo di tempo.

La motivazione è che in genere ogni security tende ad aumentare di prezzo con il passare del tempo.

D'altro canto se osserviamo il trend di crescita/decrescita viene naturale chiedersi se non sarebbe meglio vendere ai massimi e comprare ai minimi.

2.4.1 Strategie di Timing

Esistono diversi metodi per sviluppare delle strategie, queste includono l'utilizzo di modelli per prevedere i ritorni analisi strutturali dei prezzi e fondamenti dell'economia di mercato...

Per una qualunque strategia, ci si aspetta che possa battere i risultati ottenuti di chi effettua trading senza alcuna strategia

2.5 Prezzo vs Valore

Non vi è più interesse oggi alla compagnia dietro una security, quanto il suo valore sul mercato per la maggior parte degli investitori,

[4] vedi indici

Il prezzo di un'azione riflette oggi le forze di **supply and demand**

2.5.1 Modello Discounted Cash Flow

Il valore di una stock per un investitore dipende dai **possibili guadagni** futuri
I guadagni futuri derivano da i **dividendi** e l'eventuale **prezzo di vendita** quindi per ottenere una stima del valore di S_0 nel periodo, per esempio, di un anno vanno considerati

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{Dividendi ottenuti in un anno} \\ S_1 &= \text{Valore della stock in un anno} \\ r &= \text{discount rate (?)} \end{aligned}$$

$$S_0 = \tfrac{D_1+S_1}{1+r}$$

ripetendo questo per un numero arbitrario T di anni otteniamo la seguente formula

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \tfrac{D_t}{(1+r)^t} + \tfrac{S_T}{(1+r)^T}$$

possiamo assumere che dopo T anni il valore di S_T tenda a 0
per questo inroduciamo il **DCF, discounted cash flow model** che rappresenta il valore di un'azione attraverso i suoi dividendi

$$S_0 = \sum_{t=1}^{T} \tfrac{D_t}{(1+r)^t}$$

Prima di fare delle stime con **DCF** dobbiamo precisare la natura di r
possiamo considerarlo come il tasso di interesse di un bond risk-free
possiamo vedere r come:

$$r = \tfrac{D_1+S_1}{S_0} - 1$$

questo ci dice che r è il ritorno atteso della stock, oppure potrebbe essere il ritorno di un asset simile, ma risk-free
in questo modo definiamo r come **il rate della capitalizzazione del mercato** oppure **il capitale del costo di equità** come interpretazioni precise di r

2.6 Arbitraggio

There is no such a thing as free lunch

Milton Freedman

Un assuzione economica sotto ogni modello matematico è che è **impossibile** avere dei profitti senza rischio

Questa assunzione è detta **Principle of No Arbitrage**: there are no arbitrage opportunities.
Si può espandere questo principio con altre assunzioni

2.6.1 Extended no arbitrage

- Non è possibile **fare** arbitraggio
- Nello short-selling non ci sono tasse,costi di transazione o restrizioni
- è possibile prestare e farsi prestare a rate d'interese risk-free
- Ogni security è perfettamente divisibile (?)

2.6.2 Consequenze

Conseq. 1 Assumendo niente arbitraggio, due portfolio con valore uguale ad un tempo T avranno valore uguale $\forall$ t tali che t $\leq$ T

Conseq. 2 Assumendo niente arbitraggio, siano A,B due portfolio
con v(A,T)$\geq$ v(B,T) allora $\forall$ t $\leq$T questa proposizione sarà vera

2.7 Valutazione Risk-neutral

Un semplice metodo di valorizzare un opzione deriva dall'assunzione che gli investitori sono indifferenti al rischio,
la neutralità al rischio è un ipotesi **forte**, ma è ottima per valorizzare un opzione
Ipotizzando un mondo neutrale al rischio le securities si comportano esattamente come un bond, quindi il beneficio di una stock sarà uguale a un investimento risk-free. il valore di una derivata può essere ottenuto calcolando il valore atteso, e rimuovendo la "spesa del rischio":

$$S_T + D_\tau - C(S_0)e^{r\tau}$$

2.8 Ipotesi di mercato efficiente EMH*

Efficient Market Hypothesys*

Un altro paradigma interessante per valutare l'equilibrio del mercato nasce dall'assunzione che un mercato è "information efficient":

Le informazioni disponibili al momento dell'investimento si riflettono gia nel prezzo della security, di consequenza i partecipanti al mercato non possono avvantaggiarsi delle informazioni attuali per aumentare il proprio profitto

2.8.1 Test di EMH

L'efficienza di **EMH** è argomento di diversi studi;
il metodo generico per testare EMH consiste di

1. Designare una strategia basata su un insieme di informazioni,
2. Misurare i ritorni rispetto un insieme senza queste informazioni

Per la prima parte, dobbiamo specificare l'insieme di informazioni e l'efficienza di tale **informazione**:

Debole l'informazione riguarda lo storico di prezzi della security

Semi-Forte ogni informazione pubblica è disponibile [5]

Forte ogni informazione pubblica **e privata** è disponibile [6]

Diverse ricerche hanno dimostrato che la presenza di informazioni Forti,Semiforti forniscono un vantaggio per i trader che utilizzano solamente informazioni deboli.

EMH e la computabilità

Studi recenti hanno dimostrato che un mercato può essere definito rispetot a delle risorse di computazione R questo vuol dire che si possono migliorare i profitti assegnando R risorse (tempo,memoria...) alla nostra strategia questo vuole anche dire che un vantaggio può derivare da grosse facilities, vicinanza al mercato...[7]

[5] e.g ciò che una compagnia rilascia

[6] in genere, queste informazioni hanno un prezzo, dobbiamo verificare che il costo di queste informazioni sia minore del nostro profitto

[7] Per approfondire: Michael Lewis, Flash Boys. un libro sull'HighFrequency Trading

Capitolo 3

Electronic Market, Limit Order Book

3.1 Trading nel mercato elettronico

Gli ordini sono gestiti da un **engine** e dal **Limit Order Book(LOB)**.
Il LOB gestisce ogni order, in entrata e in uscita

L'engine utilizza degli algoritmi per definire quando uno scambio può avvenire e in tal caso, quale criterio usare per eseguire degli ordini

La maggior parte dei mercati favorisce **Market Order** ai **Limit Order**, e utilizzano una priorità prezzo/tempo dove:

1. L'ordine viene assegnato al miglior LO e viene eseguito(e.g compra 100 stocks a 20$)

2. Se l'ordine non è finito ma l'offerta di LO si, il rimanente ordine viene eseguito al prossimo migliore LO(e.g compra le rimanenti stocks a $25)

3. ripeti se necessario

I limit order che sono più "a fondo" nel **LOB** sono detti a fondo
un MO che viene eseguito ai LO "in fondo" è detto **walking the book**

per questo esistono MO di genere **Immediate-or-Cancel** che prevengono agli ordini di andare su offerte "terribili"

3.1.1 LOB e il suo spread

il **LOB** è definito da una griglia discreta di prezza (price-levels)
La grandezza di uno step (tra un price level e l'altro) è detto tick [1]
definiamo la differenza tra **ask** e **bid** definita come **quoted spread**

$$QuotedSpread_t = P_t^a - P_t^b$$

[1] min. 0.01€, ma può variare tra mercati

dove P_t^a e P_t^b sono i migliori prezzi di bid ed ask (bid=> vendita, ask=>acquisto). In alcuni casi bid=ask e lo spread è quindi 0,

in questi casi diciamo che il **mercato è locked** anche se questo non dura a lungo.

Un altro oggetto utile per il **LOB** è il suo **midprice** definito come la media aritmetica tra bid e ask

definiamo il midprice come il vero prezzo dell'asset.

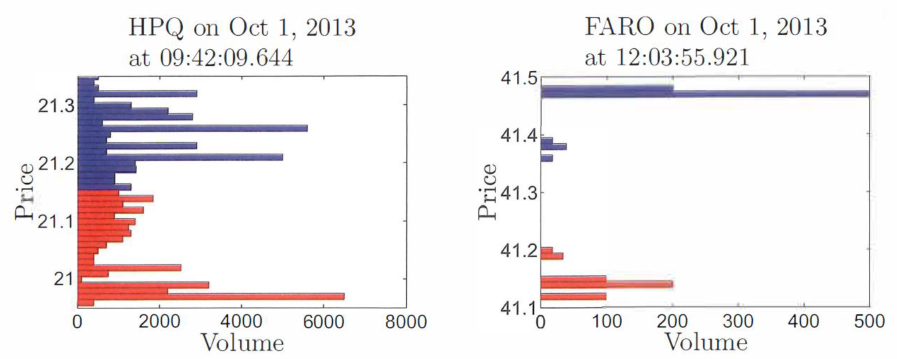

Figure 1.1 Snapshots of the NASDAQ LOB after the 10,000th event of the day. Blue bars represent the available sell LOs, red bars represent the available buy LOs.

Figura 3.1: La differenza tra un asset molto liquido e quindi con un volume alto di trade e uno poco liquido, il prezzo(non in figura) di HPQ è più vicino al suo midprice di quanto lo sia FARO

3.2 Il Limit Order Book

3.2.1 L'aggiunta di LO al LOB

in genere il LOB gestisce i LO con una coda FIFO per LO di prezzi uguali

3.2.2 Microprice

ad ogni momento t può essere definito un MicroPrice di una stock come

$$Microprice = \frac{V_t^b}{V_t^b + V_t^a} P_t^a + \frac{V_t^a}{V_t^b + V_t^a} P_t^b$$

il microprice è una subdola misura della tendenza ad avvicinarsi al buy or sell order di una particolare stock

con molti acquirenti il microprice tende ad avvicinarsi al prezzo di bid, e viceversa con molti seller.

3.3 Tempo

il ruolo del tempo è fondamentale in un electronic exchange.
è necessario sistemare la propria posizione di trading in risposta ad ogni cambio o, addirittura, anticipandoli

L'importanza della velocità è ciò che consente **L'high frequency trading**.
La velocità fa si che vengano sviluppati algoritmi di trading, influenzati a loro volta dalla scelta di:

linguaggi di programmazione,hardware,connessioni all'engine, utilizzo di ordini...
A loro volta gli exchange si adattano, creando nuovi tipi di ordine oltre ai MO e LO.

3.3.1 Tipi di ordine

Day Order ordini che possono estendersi oltre le sessioni di mercato

Non-Routable ordini che non possono estendersi oltre il mercato attuale

Pegged,Hide-not Slide ordini basati su midpoint o sul prezzo nazionale

Hidden ordini che non mostrano la loro quantità

Icebeg ordini che mostrano una parte della loro quantità

Immediate-or-Cancel eseguiti al prezzo migliore e poi cancellati (No walk-the-book)

Fill-or-Kill ordini che vengono eseguiti UNICAMENTE al best price

Good-Till-Time ordini con una spanna di tempo come life-time

Discretionary ordini che mostrano un prezzo ma che in verità sono ad un altro prezzo (????)

nella scelta dei nostri algoritmi dobbiamo essere a coscienza di ogni possibile tipo di ordine eseguibile non solo nel nostro exchange ma anche in tutti quelli che competono con noi.

3.4 Colocation

Gli exchange controllano quante e come le informazioni sono rilasciate,

per una fee, possiamo ottenere più informazioni.

Oltre a questo offrono dei computer/server direttamente vicini all'engine per massimizzare la velocità delle nostre operazioni

questo semplifica l'abilità di fornire servizi agli utenti e garantisce che ogni trader ha la stessa velocità di accesso e non sono svantaggiati rispetto a trader con hardware più potente

ovviamente crea una distinzione tra trader colocati e non.

3.5 Exchange Fees

un altro problema di cui bisogna essere allertati sono le exchange fee.

alcuni mercati impongono un **maker-taker system** che favorisce la liquidità degli asset

fornendo una fee per i MO e dando un rebate,un pagamento, per i LO

esistono invece mercati con una struttura inversa, dove è favorito chi toglie liquidità (I MO)

questo è un grosso problema in quanto le fee distorgono(?) il prezzo di mercato

3.6 Trader Class

Esistono 3 generiche classi di trader

Fondamentale sono guidati dai fondamenti dell'economia

Informato guadagnano profitti dalle informazioni non riflettute sul market price, scambiando asset in anticipi

Market maker professionali, che facilitano exchange in asset particolari

Definiamo anche i **Proprietary traders**, traders che scambiano con vantaggi(reali e non) su traders più piccoli, questi vantaggi possono essere vari: conoscenza maggiore degli asset,identificare lo swing di un asset, conoscenza di pattern

gli **Investitori regolari** e i **Fondamentali** sono investitori che hanno un uso diretto degli asset scambiati

sono individui che sperano di crescere insieme ad una corporazione, o persone che desiderano ribilanciare i loro investimenti

3.6.1 Liquidità e traders

pensiamo ai trader **MarketMaker** come ad una tipologia passiva/reattiva che scambia utilizzando la loro profonda conoscenza del mercato ed in grado di adattarsi con le circonstanze.

Gli altri due tipi sono trader più aggressivi, che cercano di sfruttare specifiche informazioni ottenute all'infuori dell'ambiente di trading.
Fare mercato non equivale a generare liquidità cosi come trading informato non equivale a prendere liquidità.

L'attività di Maket making in genere favorisce la liquidità, ma differenti strategie fanno si che questo non è sempre vero

Viceversa, il trading informato non sempre avviene attraverso ordini aggressivi, ma è a volte meglio implementato attraverso

ordini passivi che aggiungono liquidità invece che toglierla.

Capitolo 4

Asset e ritorni

4.1 Ritorni semplici ad un periodo

La maggior parte degli studi finanziari sono volti al ritorno, anziche il prezzo, degli asset.

Gli Asset return sono un resoconto completo e (scale-free?) delle opportunità di investimento di un investitore

serie di ritorni sono statisticamente più interessanti di serie di prezzi

vi sono diverse definizioni di asset return

Definiamo P_t come prezzo di un asset in un periodo t(no dividendi).

4.1.1 Il periodo di Holding e i ritorni

Supponiamo l'acquisto di un asset a t_0 per P_0 e di venderlo a t_1 a prezzo P_1

Supponendo l'assenza di dividendi tra i due periodi allora definiamo il rate of return come la variazione percentuale

dei due prezzi:

$$R(t_0, t_1) = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

definiamo il tempo tra t_0 e t_1 come **holding period**

mentre $R(t_0, t_1)$ come **ritorni dell'holding period**.

L**holding period** può essere un qualsiasi intervallo temporale.

4.2 Ritorni semplici

definizione di **Ritorni lordi(?)**:

il totale dei ritorni prima di dedurre qualsiasi fee o spesa necessaria, i ritorni lordi sono visti su uno specifico

periodo temporale: un mese, un quadrimestre, un anno.

sono generalmente i ritorni promessi da, per esempio, una pubblicità.
siano P_t il prezzo nominale di un asset alla fine del mese t, che non paga divididendi

$P_t - 1$ il prezzo alla fine del mese t-1.

$$\textit{ritorni netti in un investimento tra t-1 e t}= R_{t-1,t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \%\Delta P_t$$

che possiamo riscrivere come

$$1 + R_{t-1,t} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Il ritorno lordo di un mese è l'interpretazione del valore di 1.00 € nell'asset per un mese.

4.2.1 Esempio

Assumiamo di investire in un'azione Microsoft al periodo $t-1$ con P_{t-1}=85 € e di venderla il mese successivo

al prezzo P_t=90 € allora

i ritorni netti semplici di un mese e il lordo sono:

$$R_t = \frac{90}{85} - 1 = 1,0588 - 1 = 0,0588$$
$$1 + R_t = 1,0588$$

Abbiamo che il ritorno netto del mese è stato del 5,88%

oppure possiamo dire che l'investimento di 1 è cresciuto in 1,0588

4.3 Ritorni compunded e Multi-Periodo

[1] definiamo che nel **periodo di k mesi** il ritorno semplice è nientemeno che il prodotto dei periodi mensili:

ritorno netto di un periodo k-simo $R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$

ritorno semplice di due mesi:$= \frac{P_t}{P_{t-2}} - 1$

il ritorno lordo su k mesi è definito come il prodotto dei primi k-esimi ritorni lordi

$$\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

[1]check con Candelieri per la correttezza

4.3.1 Continous Compound Return

eseguendo il **continuos compounding** su un asset possiamo computare facilmente i ritorni

su un periodo di tempo

$$\log{(1 + R_t)} = r_t = \log{(\frac{P_t}{P_{t-1}})}$$

per un periodo di tempo k

$$r_t[k] = \log{(1 + R_t[k])} = \log{[(1 + R_t)(1 + R_{t-1})...(1 + R_{t-k+1})]}$$

4.3.2 Esempio

ritornando all'esempio precedente con

$$P_t = 90$$
$$P_{t-1} = 85$$
$$P_{t-2} = 80$$

allora il ritorno per due mesi è:

$$R_t(2) = \frac{90-80}{80} - 1 = 0,1250$$

che equivale al 12.50% per due mesi

che equivale a sua volta al prodotto tra i due ritorni ad un mese:

$$R_{t-1} = \frac{85-80}{80} - 1 = 1,0625 - 1 = 0,0625$$
$$R_t = \frac{90-85}{85} - 1 = 1,0588 - 1 = 0,0588$$
$$\text{il cui prodotto: } 1,0625 * 1,0588 = 1,1250 = 12,50\%$$

4.4 Ritorni e Portfolio

Consideriamo un investimento di valore V$ su due asset A e B.

sia x_A e x_B la frazione di V che i due asset rappresentano,

questo valore è definito **investment share**

sappiamo che il valore in dollari è rappresentato da $V * x_A$ e $V * x_B$

assumiamo che la somma degli **investment share** $x_A + x_B = 1$.

un insieme di **investment share** definisce il portfolio, quando i valori degli investment share sono negativi siamo in short selling.

4.4.1 Simple Returns

definiamo $R_{A,t}$ e $R_{B,t}$ come i ritorni semplici mensili degli asset A e B

vogliamo definire i ritorni del portfolio p definito da (x_A, x_B) [2]

$$R_{p,t} = x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}$$

[2] Per dimostrazioni vedi slide

4.5 I dividendi

assumendo che un dato asset paghi dividendi tra t-1 e t abbiamo il valore dei dividendi al tempo t: D_t

allora il calcolo dei ritorni diventa:

$$R_t^{total} = \frac{P_t+D_t-P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

Capital gains e Dividendi

definiamo i **capital gain**: guadagno in capitale: identifica il guadagno ottenuto dalla compravendita di strumenti finanziari,

è la differenza tra prezzo di acquisto e di vendita di uno strumento finanziario.

è tassato.

Se un asset paga dividendi periodici la definizione dei ritorni di un asset è modificata in

$$1 + R_t^{total} = \frac{P_t+D_t}{P_{t-1}}$$

4.6 Inflazione

I calcoli sui ritorni finora effettuati sono considerati **nominali** o prezzi attuali degli asset

I ritorni calcolati su prezzi nominali sono detti **ritorni nominali**

I **veri** ritorni su un asset in un **horizon** considerano la crescita dei prezzi su quell'horizon (?)

se il nominal price cresce più in fretta del prezzo generico allora i ritorni nominali saranno maggiori dell'inflazione,

ed il nostro ritorno reale sarà positivo

Viceversa se cresce più lentamente il nostro ritorno sarà negativo in quanto il valore dei ritorni sarà minore dell'inflazione.

La **computazione dei ritorni reali** è un processo a due step:

1. De-inflaziona il prezzo nominale con il prezzo generico
2. Computa i ritorni semplici sul prezzo De-inflazionato

4.6.1 Calcolo per i ritorni reali

siano P_t il prezzo nominale di un asset al tempo t e CPI_t un indice del prezzo generico.

alora il prezzo reale al tempo t sarà

$$P_t^{real} = \frac{P_t}{CPI_t}$$

una volta ottenuto il prezzo reale sarà possibile calcolare i ritorni come al solito.

4.6.2 Calcolo Inflazione

Possiamo anche definire l'inflazione al tempo t come:

$$\pi_t = \%\Delta CPI_t = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}}$$
$$R_t^{Real} = \frac{1+R_t}{1+\pi_t} - 1$$

4.7 Ritorni annuali

In genere convertiamo i ritorni in ritorni annuali per stabilire delle basi per effettuare confronti: Compound Annual Gross Return(CAGR), o Ritorni annuali Lordi,

Compound Annual net Return(CANR), o Ritorni annuali Netti[3]

$$CAGR = 1 + R_A = 1 + R_T(12) = (1 + R_m)^{12}$$
$$CANR = R_A = (1 + R_m)^1 2 - 1$$

4.7.1 Esempio

Supponiamo che R_t per una stock Microsoft sia 5,88%.

se assumiamo vero questo ritorno per 12 mesi allora l'annuale è:

$R_A = (1, 0588)^1 2 - 1 = 1, 9850 - 1 = 0, 9850$

oppure 98,50% annuale.

4.8 Ritorni medi

Per un investimento su un dato horizon, ci interessa computare la misura dei ritorni medi su quell'horizon

consideriamo una sequenza di investimenti mensili su un anno con ritorni mensili abbiamo due possibilità

1. Media Aritmetica: $\bar{R} = \frac{1}{12}(R_1 + R_2 ... + R_1 2)$ che può essere errata
2. Media Geometrica: $(1+\bar{R})^{12} = (1+R_A) = (1+R_1)(1+R_2)...(1+R_{12})$

   $\bar{R} = (1 + R_A)^{\frac{1}{12}} - 1$

   $= [(1 + R_1)(1 + R_2)...(1 + R_{12})]^{\frac{1}{12}} - 1$ che è più precisa

4.9 Annualizzare i ritorni

In genere differenti horizon sono annualizzati: convertiti in ritorni annuali per confrontarli con altri investimenti.

Il processo di annualizzazione dipende dall'holding period dell'investimento e da una assunzione sul compounding.

Questo è un processo semplice per horizon annuali, ma richiede di fare assunzioni particolari su periodi più brevi:

Avrò lo stesso ritorno R_t per ogni periodo dell'anno? allora possiamo utilizzare le formule per il netto e il lordo precedenti.

[3]non utilizziamo $R_A = 12R_m$ perchè assumiamo ritorni compounded

Capitolo 5

Ottimizzazione Portfolio

nel 1952 viene presentata da **Markowitz Harry** le basi per selezionare un portfolio:

Una combinazione di asset che in un dato periodo di tempo produce ritorni maggiori ad un mischio minore

vi sono due step da seguire:

1. Identificare la combinazione di asset ottimali rispetto a **rischio e ritorno** attesi per creare un portfolio
2. Scegliere il miglior portfolio che rispecchia la **funzione di utilità dell'investitore**

La **funzione di utilità dell'investitore** riguarda limiti,tolleranza al rischio,tipologia e numero di asset desiderati e

capitale totale disponibile.

5.1 Il modello media-varianza

Dalla ipotesi di Markowitz per la selezione del modello deriviamo che:
I ritorni attesi sono "**buoni**"
La varianza, nei ritorni attesi sono da **evitarsi**.
Cerchiamo di dimostrare matematicamente l'importanza nella **diversificazione del portfolio**.

5.1.1 Reminder sui Portfolio return

In genere, per un dato portfolio di n asset con investment share x_i tale che $x_1 + x_2 ... + x_n = 1$ abbiamo che

$$1 + R_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} x_i(1 + R_{i,t})$$
$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_{i,t} = x_1 R_{1t} + ... + x_n Rnt$$

Definiamo a questo punto il **Valore Medio** o **Valore atteso** ad un tempo **t** di un portfolio **w** E la sua varianza [1]

$$\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_{i,t})$$
$$\sigma_w^2 = Var(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j$$

5.1.2 Considerazioni

Caso 1 il ritorno di N asset su un portfolio è incorrelato a coppie:
Maggiore è il numero di asset incorrelato, minore è il rischio del portfolio.
Caso 2 i iritorni degli asset di un portfolio sono correlati:
Maggiore è la presenza di asset correlati, maggiore è il rischio che vi sia un rischio comune a tutti gli asset.

Pertanto, la **diversificazione** è ottenuta considerando **asset altamente incorrelati**.
Plottando un portfolio dato da una funzione N abbiamo che circa 15-20 asset incorrelati sono un numero ragionevole.

[1] ρ = coefficente di correlazioene tra due asset

5.2 Portfolio a Rischio minimo

Essendo che secondo la regola di Markowitz gli investitori sono concentrati sull'ottenimento di benefit con il minor rischio possibile,

La selezione di un portfolio di Markowitz si riduce a:

Trova i pesi $w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_N)$ tali che, per un tasso di ritorno r^*, il portfolio ***w*** *ha ritorni r^* con varianza minimale*

La varianza minima per un dato portfolio si collega ai problemi di ottimizzazione: [2]

$$\begin{gathered} \underset{w}{min}\ w'Cw \\ \text{soggetto a: } w'\mu = r^* \\ \text{e tale che } \sum_{i_1}^{N} w_i = 1 \end{gathered}$$

questo è un problema Quadratico con vincoli lineari, questo può essere ridotto a un sistema lineare. [3]

I vincoli indicano che l'nvestitore utilizza tutto il suo budget per gli N asset

5.2.1 Considerazioni

Il modello non impone restrizioni sui valori dei pesi (possono essere long o short)

Sotto queste condizioni e senza arbitraggio, il problema può essere risolto con i **Lagrange Multipliers**

Una volta risolto il sistema lineare otterremo i pesi dei singoli w con una media **r*** e varianza minima.

Questa soluzione è detta **efficiente** in quanto è IL portfolio con ritorni attesi r* e varianza minima rispetto ad altri portfolii con lo stesso valore atteso.

5.3 Frontiera di efficienza

Per un insieme di N assets che costituiscono un portfolio, vanno considerati i possibili **problemi quadratici** per ottenere una definizione efficiente dei pesi w.

da questi pesi otteniamo la deviazione standard del portfolio w:

$$\sigma^* = std(R^{w*}) = \sqrt{(w^*)'Cw*}$$

[2] Candelieri? w'

[3] Lagrangiane

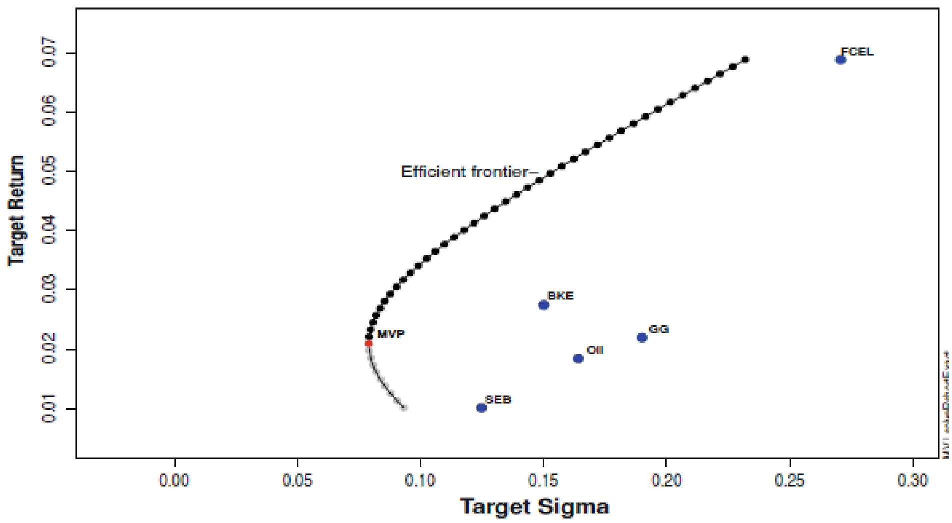

Figura 5.1: Frontiera di efficienza

5.4 Portfolio con asset risk-free

Fino ad ora abbiamo assunto che tutti gli asset che utilizziamo nel nostro portfolio presentino dei rischi

L'aggiunta di risk-free asset [4] causa delle consequenze. Queste sono la consapevolezza di prestare [5] denaro ad un interesse conosciuto r_0 e con 0 rischio:

Prestare denaro significa avere un asset risk-free con un peso w positivo

Ricevere denaro significa avere un asset risk-free con un peso w negativo. Sia $r_f = r_0 * \tau$ la rata risk-free,o ritorno, nel periodo di tempo τ.

Un portfolio che consiste solo di questo asset ha valore medio r_f e varianza 0.

Il rischio di questo portfolio nel piano *rischio-media* è nel punto(0,r_f). ri-considerando le formule per calcolare il valore di un portfolio dato da

$$\mu_w = E(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_{i,t})$$
$$\sigma_w^2 = Var(R_t^w) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j$$

sia allora w_f il peso dell'asset risk free nel portfolio, abbiamo che

$$1 - w_f = w_1 + ... + w_N$$

[4]bond

[5]essere prestati

questo vale a dire che l'investimento totale è diviso in due parti: la risk-free e la non risk-free. vediamo il portfolio come una coppia (w,w_f) = (w_1, w_N, w_f) che consiste di un asset risk-free, di media r_f e con deviazione standard 0, insieme al vettore degli N asset rischiosi, con peso 1-w_f, media μ_w e deviazione σ_w.
NOTA come la covarianza di questi è sempre 0.
a questo punto il portfolio combinato ω=(w,w_f) ha:

$$\text{valore atteso } \mu_\omega = w_f r_f + (1 - w_f)\mu_w$$
$$\text{deviazione standard } \sigma_\omega = (1 - w_f)\sigma_w$$

vediamo in queste equazioni come media e deviazione del portfolio dipendano linearmente da w_f. pertanto

variando il valore di w_f otterremo che i diversi portfolii rappresentati dalle equazioni sono una linea retta con origine in

(0,r_f) passante attraverso i punti $(sigma_w, mu_w)$ nel piano rischio-media. Inoltre, modificando i pesi dei N asset rischiosi costruiamo un altro portfolio **w'**, che combinato con il risk-free asset genera un altra linea retta di tutti i possibili portfolii creati da queste combinazioni.

Concludiamo quindi che la regione ammissibile dei portfolii Markowitziani(o della regione media-varianza) ottenuti con: N asset rischiosi, 1 asset risk-free. è un triangolo con un vertice nel punto rappresentante l'asset risk-free e che copre tutta l'iperbole contenente tutti i possibili portfolii.

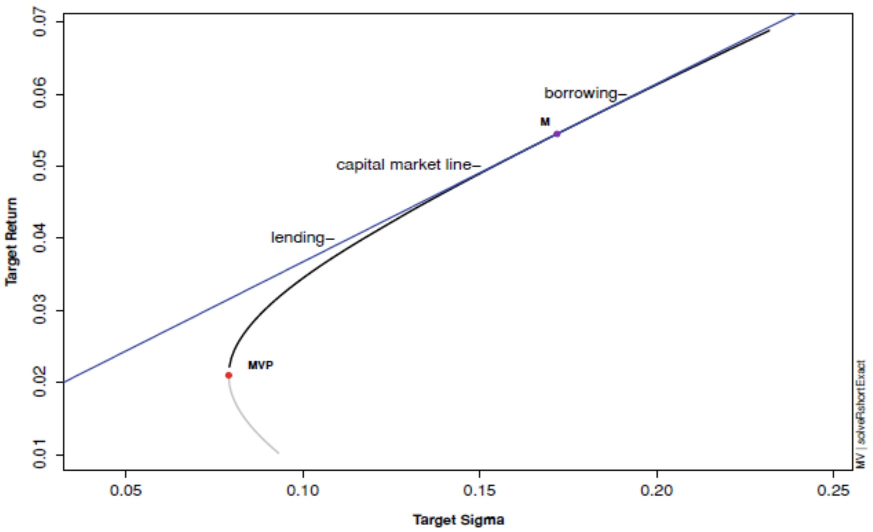

Fig. 8.3 Feasible region and efficient frontier of portfolios with a risk free asset with $r_f = 2\,\%$. Capital Market Line (*blue*); Market Portfolio (*M*). Efficient portfolios above (resp. *below*) M need borrowing (resp. *lending*) at the risk free rate

5.5 La linea del mercato capitale e il portfolio di mercato

La frontiera di efficienza è adesso una linea retta con intercetta in $(0,r_f)$ e tangente alla frontiera di efficienza dei portfolii rischiosi [6] nel piano rischio-media.
La tangente che descrive i portfolii è definita **Capital Market Line(CML)**, il punto in cui CML incontra EF_r ha:
coordinate della deviazione standard e valore atteso di un portfolio particolare: il *Market Portfolio*.

5.5.1 Market Portfolio

Il *Market Portfolio* è il miglior portfolio con rispetto al rapporto $\frac{excessreturn}{rischio}$ esso è la miglior rappresentazione del mercato, in quanto contiene ogni azione sul mercato in propororzione al loro peso.
sia θ l'angolo tra l'asse orizzontale e una linea passante su$(0,r_f)$ e un punto $(std(R^w), E(R^w))$, corrispondente a un qualche portfolio rischio so allora:

$$\tan\theta = \frac{E(R^w)-r_f}{std(R^w)}$$

il **Market Portfolio** è il punto che massimizza $\tan\theta$, questo da la inclinazione della CML computata al punto di tangenza della frontiera rischiosa di efficienza [7].

Dall'equazione vediamo che il MarketPortfolio da il massimo rapporto (ritorno/rischio); i pesi di tale soluzione massimizzano $\tan\theta$ e sono in proporzione al loro peso sul mercato.

[6] da ora chiamati EF_r
[7] Candelieri(??)

5.5.2 Sharpe Ratio

Sia $(std(R_m), E(R_m))$ il punto che descrive il Market Portfolio, il punto di tangenza tra CML e EF_r
Come prima,$(0, r_f)$ rappresenta l'asset risk-free. Allora ogni punto $(std(R^w), E(R^w))$ nella CML, ogni portfolio efficiente è tale che:

$$E(R^w) = w_f r_f + (1 - w_f)E(R_M)$$
$$std(R^w) = (1 - w_f)std(R_M)$$

dove w_f è una frazione dell'investimento sul risk-free asset:
se $w_r \geq 0$ stiamo prestando con un tasso di interesse risk-free; se $w_r \leq 0$ stiamo ricevendo un prestito con un tasso risk-free, Per aumentare i nostri investimenti sugli asset rischiosi
Possiamo riscrivere CML come:

$$\begin{aligned} E(R^W) &= r_f + (1 - w_F)(E(R_M) - r_f) \\ &= r_f + \tfrac{(E(R_M) - r_f)}{std(R_M)} std(R^W) \end{aligned}$$

definiamo, in queste equazioni la **Sharpe Ratio** del Market Portfolio come $SR_M = \frac{(E(R_M) - r_f)}{std(R_M)}$
In genere, per un qualunque portfolio la **Sharpe Ratio** è il numero:

$$SR^W = \tfrac{(E(R^W) - r_f)}{std(R^W)}$$

Essa rappresenta la misura di un portfolio di premiare il tasso di variabilità [8].
Più alta la Sharpe Ratio, migliori gli investimenti, con il limite superiore di una qualunque Sharpe Ratio individuata nel Market Portfolio.

Dunque, per ogni portfolio veramente efficiente, con almeno un risk-free asset, abbiamo che

$$SR^W = SR_M$$

è sempre vera.
Riassumendo, in un mondo basato sulla media-varianza MarkoWitziana, il meglio che si può fare è:
allocare una porzione dell'investimento in UN asset risk-free, e tutto il resto nel Market Portfolio,
garantendo cosi il miglior rapporto di ritorno/variabilità.

[8] Candelieri, non varianza?

5.6 Il modello Capital Asset Pricing e Beta

La Capital Market Line, CML, mostra l'equilibrio tra valore atteso e deviazione standard in un portfolio efficiente.
è desiderabile avere un equilibrio simile tra rischio e reward di un asset rischioso rispetto al portfolio in cui voglio inserirlo.
L'equilibrio tra asset e un portfolio è dato dal **CAPM** *Capital Asset Pricing Model.*

Theorem 1 (Teorema CAPM) *Sia $E(R_M)$ i ritorni attesi del* Market Portfolio*, $\sigma_M = std(R_M)$ la sua deviazione standard, e r_f il risk-free return in un periodo di tempo τ*
Sia $E(R_i)$ il valore atteso di un asset i, σ_i la sua deviazione standard, e $\sigma_{iM} = CoV(R_i, R_M)$ la covarianza tra R_i e R_M
allora:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i(E(R_M) - r_f)$$
$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(R_i,R_M)}{Var(R_M)}$$

il CAPM fa si che il valore atteso di ritorno dell'asset i, $E(R_i)-r_f$, conosciuto anche come il premio del rischio, è proporzionale
di un fattore β_i ai valori attesi di ritorno del Market Portfolio, $E(R_M) - r_f$ o il premio del market.
Il coefficiente β_i anche conosciuto come *beta dell'asset i* è la percentuale del premio dell'asset sul premio del market.

5.6.1 CAPM come modello di pricing

Supponendo di voler sapere il prezzo P di un asset il cui payoff dopo un periodo τ è un valore casuale P_τ
Allora il rate di ritorno dell'asset in un periodo τ è $R_\tau = (P_\tau/P) - 1$,
per CAPM il valore atteso R_τ è relativo al rate di ritorni del mercato nello stesso periodo di tempo.

$$E(R_\tau) = \frac{E(P_\tau)}{P} - 1 = r_f + \beta(E(R_M) - r_f)$$

con β beta dell'asset che stiamo analizzando

risolvendo per P otteniamo

$$P = \frac{E(P_\tau)}{1+r_f+\beta(E(R_M)-r_f)}$$

che è una generalizzazione della formula del discounted cash flow per asset risk free, includendo asset rischiosi.

5.6.2 Il significato di Beta

Formalmente, il beta di un asset rappresenta la dipendenza lineare dei ritorni dell'asset e dei ritorni del mercato in proporzione alla volatilità del mercato:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i,R_M)}{Var(R_M)} = \rho(R_i, R_M)\frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

utilizzando l'equazione precedente possiamo ottenere delle interpretazioni dei valori di un asset come misura di un suo movimento con il mercato:

Sia $\beta = \beta_i$ e $\rho = \rho(R_i, R_M)$ il coefficiente di correlazione dell'asset e il mercato: ad esempio, supponendo che $\beta = 0$ significa che asset e mercato

Value of beta	Effect on correlation and volatility ratio	Interpretation
$\beta < 0$	$\rho < 0$, $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 0$	Asset moves in the opposite direction of the movement of the market
$\beta = 0$	$\rho = 0$	Movements of the asset and the market are uncorrelated
$0 < \beta \leq 1$	$\rho > 0$, $0 < \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \leq 1/\rho$	Asset moves in the same direction as the market, volatility of asset can be $<$ or $>$ volatility of market
$\beta > 1$	$\rho > 0$, $\frac{\sigma_i}{\sigma_M} > 1/\rho > 1$	Asset moves in the same direction as the market but with greater volatility

non hanno relazioni,
essendo che la deviazione standard è sempe positiva.

In questo caso, secondo il CAPM: $E(R_i) = r_f$, il rischio del premio è zero.
un altro caso è $\beta > 1$
Questo implica che il mercato e l'asset sono positivamente correlato, ed il rischio dell'asset è maggiore del rischio del mercato.

Da questo rischio extra deduciamo con CAMP: $E(R_i) > E(R_M)$, l'asset potrebbe battere il mercato.

5.6.3 Continuo sull'interpretazione di Beta

[9] La nostra interpretazione è una delle molte interpretazioni;

L'uso più comune di Beta è la misurazione del rischio relativo al mercato. ma è uno solo dei fattori dell'equazione

[9]Totalmente non compreso

5.6.4 Stimare il valore di Beta

Date n coppie di stock i, R_i e di mercato, R_m in un periodo di tempo uguale, possiamo stimare il beta di i con rispetto al mercato utilizzando degli stimatori per la covarianza e la varianza:

$$\widehat{\beta_i} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{i,t} - \widehat{\mu}(R_i))(R_{M,t} - \widehat{\mu}(R_M))}{\sum_{t=1}^{n}(R_{M,t} - \widehat{\mu}(R_M))^2}$$

per questo stimatore assumiamo che il rate della risk free r_f rimanga costante durante il periodo in considerazione,

5.7 Ottimizzare il portfolio sotto diversi vincoli

Avendo N asset con un vettore di ritorni $\mu = (\mu_1, ..., \mu_N), \mu_i = E(R_i)$ valore atteso del ritorno,

avendo una matrice $C = [\sigma_{ij}]_{1 \geq i,j \geq N}$ di Covarianza(R_i, R_j).
Scegliendo un livello $\gamma \subseteq [0, 1]$ il problema è trovare il vettore dei pesi **w**$=$ $(w1, ..., w_N)$

che massimizza

$$\gamma w'\mu - (1 - \gamma)w'Cw$$

soggetto a

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

5.7.1 Sui Vincoli

I vincoli sono correlati al budget ed è una restrizione necessaria per risolvere il problema della media-varianza
Ci sono diversi altri vincoli che possono essere utilizzati per adattarsi al caso, Ad ogni modo, l'addizione di vincoli rendono il problema computazionalmente più difficile, e per quello utiliziamo euristiche di ottimizzazione.

Limiti superiori ed inferiori negli holding Limitano le proporzioni di asset che possiamo tenere nel portfolio, possono modellare situazioni in cui siamo obbligati ad avere solamente posizioni di long.

Limiti di Turnover in compravendita Sono limiti che impongono limiti sulle variazioni che possiamo eseguire da un periodo di holding ed un altro.

Trading Limits Sono limiti che impongono di eseguire scambi forzati tra un periodo di holding ed un altro.

Dimensioni del Portfolio Si riferiscono a dimensioni massime, massimo numero di asset, che un portfolio può avere.