

4. 対流項数値流束

4.1 Flux Difference Splitting Scheme (Roe 法)

まずスカラーの時のことを思い起こす.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f = \frac{1}{2}u^2$$

に対し、

$$df = u du$$

今、これと同じ係数の形で、流束差 $\Delta f \equiv f_R - f_L$ を、 u の差 $\Delta u \equiv u_R - u_L$ を使って表すことができるような \tilde{u} を探す.

$$\Delta f = \tilde{u} \Delta u$$

あるいは

$$(f_R - f_L) = \tilde{u} (u_R - u_L)$$

ただし、 \tilde{u} は以下の用件を満たす必要がある.

$$\tilde{u} \equiv \tilde{u}(u_L, u_R)$$

$$u_L = u_R = u \text{ のとき、 } \tilde{u} = u$$

これを満たす \tilde{u} として、

$$\tilde{u} = \frac{f_R - f_L}{u_R - u_L} = \frac{(u_R^2 - u_L^2)}{2(u_R - u_L)} = \frac{u_R + u_L}{2}$$

を得る.

さて、Euler 方程式の場合について、スカラーの時と同様に進める.

3章式(31)より

$$d\mathbf{F} = \mathbf{A} d\mathbf{q}$$

ここで、 \mathbf{A} は式(21)より

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{u}{2} \left[-2H + (\gamma-1)u^2 \right] & H + (1-\gamma)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

今、これと同じ係数の形で、流束差 $\Delta\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L$ を、 \mathbf{q} の差 $\Delta\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L$ を使って表すことができるような $\tilde{\mathbf{A}}$ を探す.

$$\Delta\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta\mathbf{q} \quad (4-1)$$

あるいは

$$(\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) \quad (4-2)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は以下の用件を満たす必要がある.

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) \quad (4-3)$$

$$\mathbf{q}_L = \mathbf{q}_R = \mathbf{q} \text{ のとき、 } \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \quad (4-4)$$

さて、 \mathbf{A} の要素を見ると、 \mathbf{A} は H と u の関数であることが分かる. 従って、ここでは $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{H}, \tilde{u})$ を考え、式(4-2)を満たすような \tilde{H} と \tilde{u} を \mathbf{q}_L と \mathbf{q}_R を用いて表すことを考える. 即ち、

$$\begin{pmatrix} \rho_R u_R - \rho_L u_L \\ \rho_R u_R^2 + p_R - \rho_L u_L^2 - p_L \\ \rho_R u_R H_R - \rho_L u_L H_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \tilde{u}^2 & (3-\gamma)\tilde{u} & \gamma-1 \\ \frac{\tilde{u}}{2} [-2\tilde{H} + (\gamma-1)\tilde{u}^2] & \tilde{H} + (1-\gamma)\tilde{u}^2 & \gamma\tilde{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_R - \rho_L \\ \rho_R u_R - \rho_L u_L \\ E_R - E_L \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

この式は3つの方程式から成っている．そのうちの第1式（質量流束差）は、恒等的に成り立つことが分かる．

$$p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho \left(H - \frac{1}{2} u^2 \right)$$

及び

$$E = H - \frac{p}{\rho}$$

を用いて、第2式、第3式を整理すると次式を得る．

$$\begin{aligned} & \frac{(-3+\gamma)}{2} \left\{ \tilde{u}^2 (\rho_L - \rho_R) + 2\tilde{u} (-u_L \rho_L + u_R \rho_R) + u_L^2 \rho_L - u_R^2 \rho_R \right\} = 0 \\ & H_R u_R \rho_R + \frac{1}{2} \tilde{u} \left\{ 2H_L \rho_L + u_L^2 (-1+\gamma) \rho_L + (-2H_R + u_R^2 - u_R^2 \gamma) \rho_R \right\} \\ & = H_L u_L \rho_L + \frac{1}{2} \tilde{u} \left\{ -2\tilde{H} + \tilde{u}^2 (-1+\gamma) \right\} (-\rho_L + \rho_R) + \left\{ \tilde{H} - \tilde{u}^2 (-1+\gamma) \right\} (-u_L \rho_L + u_R \rho_R) \end{aligned}$$

これらを解いて、

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} \pm u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} \pm \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L \sqrt{\rho_L} \pm H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} \pm \sqrt{\rho_R}} \end{aligned} \quad (\text{複合同順}) \quad (4-6)$$

を得る．このように解が見つかったということは、式(4-6)に従って \tilde{u} と \tilde{H} を定めれば、式(4-5)、(或いは式(4-1)或いは式(4-2))、を満足することを意味している．式(4-6)は符号の相違で二つの組が可能であることを示しているが、ここでは、分母が

ゼロにならない場合、即ち、+符号の解を使用することに決める。

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}\end{aligned}\quad (4-7)$$

式(4-7)は、左右の量をそれぞれの密度の平方根を重みとして平均として \tilde{u} と \tilde{H} を決めることを意味している。CFD の分野でこの平均は、創始者の名前を取って、Roe 平均と呼ばれている。

Roe 平均された物理量に対して音速を定義することができる。

$$\tilde{a} = \sqrt{(\gamma-1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right)} \quad (4-8)$$

式(4-7)を式(4-8)に代入して整理すると、根号内が常に正であることが分かる。

$$(\gamma-1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right) = \frac{2a_L^2 \rho_L + \{2a_L^2 + 2a_R^2 + (u_L - u_R)^2 (\gamma-1)\} \sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R} + 2a_R^2 \rho_R}{2 \left(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \right)^2} > 0$$

さて、 $\tilde{\mathbf{A}}$ に関しても3章で \mathbf{A} に関して述べたことがそのまま当てはまる。従って、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は固有値として $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u}$, $\tilde{\lambda}_2 = -\tilde{a} + \tilde{u}$, $\tilde{\lambda}_3 = \tilde{a} + \tilde{u}$ を持ち、3章式(31)のように分解される。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \quad (4-9)$$

ここで、各行列の要素は3章で示した表式中で、 u, a を \tilde{u}, \tilde{a} に置き換えるだけで得られる。

次に、流束差を分離することを考える。

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{F} &= \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L \\ &= (\mathbf{F}_R - \hat{\mathbf{F}}) + (\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_L) \\ &= \Delta \mathbf{F}^+ + \Delta \mathbf{F}^-\end{aligned}\quad (4-10)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{F}}$ がセル界面での数値流束となる．また、右行き情報によって生じる流束差 $\Delta \mathbf{F}^+$ 及び、左行き情報によって生じる流束差 $\Delta \mathbf{F}^-$ を考えると、式(4-10)に示すように、

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{F}^+ &= \mathbf{F}_R - \hat{\mathbf{F}} \\ \Delta \mathbf{F}^- &= \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_L\end{aligned}\tag{4-11}$$

の関係がある．これより、

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R + \Delta \mathbf{F}^- - \Delta \mathbf{F}^+)\tag{4-12}$$

スカラーの時と同じようにして、式(4-1)，(4-9)を用いると、

$$\Delta \mathbf{F}^\pm = \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\Lambda}^\pm \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q}\tag{4-13}$$

の形で表すことができる．ここで、

$$\tilde{\Lambda}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\lambda}_1 \pm |\tilde{\lambda}_1|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\lambda}_2 \pm |\tilde{\lambda}_2|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{\lambda}_3 \pm |\tilde{\lambda}_3|}{2} \end{pmatrix}\tag{4-14}$$

等のように例えば与えることができる．これは、別の記法として、

$$\tilde{\Lambda}^\pm = \frac{1}{2} \left(\tilde{\Lambda} \pm |\tilde{\Lambda}| \right)\tag{4-15}$$

ここで、

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |\tilde{\lambda}_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{\lambda}_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\tilde{\lambda}_3| \end{pmatrix}\tag{4-16}$$

と表すこともできる．

さて、式(4-13)-(4-16)を式(4-12)に代入して整理すると、数値流束を与える表式として、

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{F}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R + \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\Lambda}^- \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\Lambda}^+ \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R + \tilde{\mathbf{X}} \left(\tilde{\Lambda}^- - \tilde{\Lambda}^+ \right) \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R - \tilde{\mathbf{X}} \left| \tilde{\Lambda} \right| \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R - \tilde{\mathbf{X}} \left| \tilde{\Lambda} \right| \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \left(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

を得る.

ここで、数値粘性項を

$$\mathbf{D} \equiv \tilde{\mathbf{X}} \left| \tilde{\Lambda} \right| \tilde{\mathbf{X}}^{-1} \Delta \mathbf{q} \tag{4-18}$$

と置き、その成分を、 D_1, D_2, D_3 とすると、それらは次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \alpha_1 \left| \tilde{\lambda}_1 \right| + \alpha_2 \frac{\left| \tilde{\lambda}_2 \right|}{\tilde{a}^2} + \alpha_3 \frac{\left| \tilde{\lambda}_3 \right|}{\tilde{a}^2} \\
 D_2 &= \alpha_1 \tilde{u} \left| \tilde{\lambda}_1 \right| + \alpha_2 \frac{-\tilde{a} + \tilde{u}}{\tilde{a}^2} \left| \tilde{\lambda}_2 \right| + \alpha_3 \frac{\tilde{a} + \tilde{u}}{\tilde{a}^2} \left| \tilde{\lambda}_3 \right| \\
 D_3 &= \alpha_1 \frac{\tilde{u}^2}{2} \left| \tilde{\lambda}_1 \right| + \alpha_2 \left(-\frac{\tilde{u}}{\tilde{a}} + \frac{\tilde{u}^2}{2\tilde{a}^2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \left| \tilde{\lambda}_2 \right| + \alpha_3 \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{a}} + \frac{\tilde{u}^2}{2\tilde{a}^2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \left| \tilde{\lambda}_3 \right|
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

ただし、ここで、

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \left(1 + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{a}^2} \right) \Delta q_1 + \frac{(\gamma-1)\tilde{u}}{\tilde{a}^2} \Delta q_2 + \frac{1-\gamma}{\tilde{a}^2} \Delta q_3 \\
 \alpha_2 &= \frac{\tilde{u} \{ 2\tilde{a} + (\gamma-1)\tilde{u} \}}{4} \Delta q_1 + \frac{-\tilde{a} + (1-\gamma)\tilde{u}}{2} \Delta q_2 + \frac{\gamma-1}{2} \Delta q_3 \\
 \alpha_3 &= \frac{\tilde{u} \{ -2\tilde{a} + (\gamma-1)\tilde{u} \}}{4} \Delta q_1 + \frac{\tilde{a} + (1-\gamma)\tilde{u}}{2} \Delta q_2 + \frac{\gamma-1}{2} \Delta q_3
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

である.

バーガーズ方程式の場合と同様、エントロピー条件を満たすために、絶対値関数を修正してやる必要があり、非線型波 ($\tilde{u} \pm \tilde{a}$ で伝播する波) の内、膨張波に対して修正する.

4.2 Flux Vector Splitting Scheme 1 (Steger-Warming 法)

まず3章の最後で述べた、対流項流束の斉次性を思い出す．オイラー方程式の流束ベクトルと保存量ベクトルには、次の特殊な関係が成立している．

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{q} \quad (4-21)$$

3章式(31)を上式に代入して、

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{q} \quad (4-22)$$

数値流束として次の形を考える．

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{F}^+(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{q}_R) \quad (4-23)$$

ここで、 \mathbf{F}^+ は右行き流束、 \mathbf{F}^- は左行き流束であり、 $\mathbf{q}_L = \mathbf{q}_R = \mathbf{q}$ のとき、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$$

が成り立たなければならない．このような条件を満たす流束分離法の一つとして次の形が考えられる．

$$\mathbf{F}^\pm = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}^\pm \mathbf{X}^{-1} \mathbf{q} \quad (4-24)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}^\pm &\equiv \frac{1}{2} \left(\mathbf{\Lambda} \pm |\mathbf{\Lambda}| \right) \\ &\equiv \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 \pm |\lambda_1|}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 \pm |\lambda_2|}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3 \pm |\lambda_3|}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-25)$$

である．

式(4-24)は、形式的には、式(4-18)のFDS法における数値粘性項に類似しているため、これを読み替えるだけで直ちに、ここでの数値流束を書き下すことができる。

$$\mathbf{F}^\pm(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} F_1^\pm \\ F_2^\pm \\ F_3^\pm \end{pmatrix}$$

$$F_1^\pm = \alpha_1 \lambda_1^\pm + \alpha_2 \frac{\lambda_2^\pm}{a^2} + \alpha_3 \frac{\lambda_3^\pm}{a^2} \quad (4-26)$$

$$F_2^\pm = \alpha_1 u \lambda_1^\pm + \alpha_2 \frac{-a+u}{a^2} \lambda_2^\pm + \alpha_3 \frac{a+u}{a^2} \lambda_3^\pm$$

$$F_3^\pm = \alpha_1 \frac{u^2}{2} \lambda_1^\pm + \alpha_2 \left(-\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \lambda_2^\pm + \alpha_3 \left(\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \lambda_3^\pm$$

ここで、

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{1-\gamma}{2} \frac{u^2}{a^2} \right) q_1 + \frac{(\gamma-1)u}{a^2} q_2 + \frac{1-\gamma}{a^2} q_3$$

$$\alpha_2 = \frac{u \{ 2a + (\gamma-1)u \}}{4} q_1 + \frac{-a + (1-\gamma)u}{2} q_2 + \frac{\gamma-1}{2} q_3$$

$$\alpha_3 = \frac{u \{ -2a + (\gamma-1)u \}}{4} q_1 + \frac{a + (1-\gamma)u}{2} q_2 + \frac{\gamma-1}{2} q_3$$

これに q_1, q_2, q_3 を具体的に代入して整理すると、

$$\alpha_1 = \rho - \frac{p}{a^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{p}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{p}{2}$$

これを式(4-26)に代入し、マッハ数 $M \equiv \frac{u}{a}$ を用いて整理すると、最終的に次の流束分離法を得る。(Steger-Warming)

$$\begin{aligned}
F_1^\pm &= a\rho \frac{2M\gamma \pm |1-M| \pm 2(-1+\gamma)|M| \pm |1+M|}{4\gamma} \\
F_2^\pm &= a^2\rho \frac{2+2M^2\gamma \pm (-1+M)|1-M| \pm 2M(-1+\gamma)|M| \pm (1+M)|1+M|}{4\gamma} \\
F_3^\pm &= a^3\rho \frac{\{\pm 2 \pm (-2+M)M(-1+\gamma)\}|1-M| + 2M\{[2+M^2(-1+\gamma)]\gamma \pm M(-1+\gamma)^2|M|\}}{8(-1+\gamma)\gamma} \\
&\quad + a^3\rho \frac{\pm \{2+M(2+M)(-1+\gamma)\}|1+M|}{8(-1+\gamma)\gamma}
\end{aligned}
\tag{4-27}$$

これを \mathbf{F}^\pm として、数値流束を式(4-23)によって計算する．式(4-27)を用いて計算した、Steger-Warming のFVSスキームの値を、図4-1に質量流束について、図4-2に運動量流束について、図4-3にエネルギー流束について、各々示す．

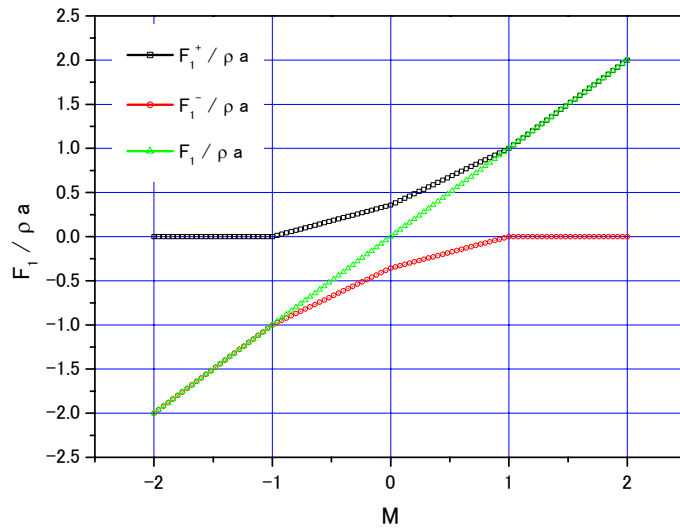


図4-1 Steger-Warming FVS 法の質量流束

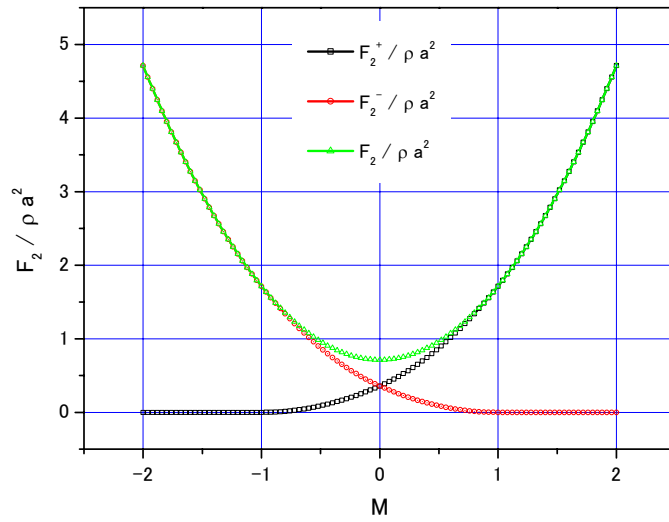


図 4-2 Steger-Warming FVS 法の運動量流束

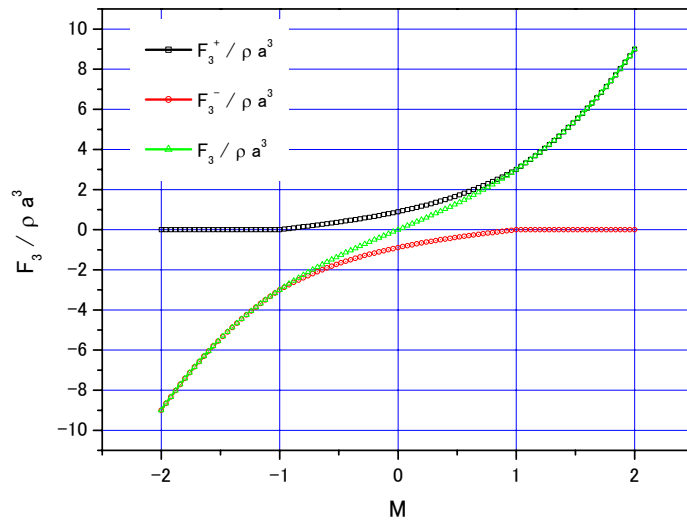


図 4-3 Steger-Warming FVS 法のエネルギー流束

4.3 Flux Vector Splitting Scheme 2 (Van Leer 法)

前節で述べた Steger-Warming の流束分離法 (FVS) は、物理的な観点から自動的に風上化して数値粘性の量を決める画期的な手法として注目された。しかしその後、固有値 λ_k ($k=1,3$) がゼロとなる点 ($M = -1$, $M = 0$, $M = 1$) において、分離流束の

1 次導関数（厳密には質量流束とエネルギー流束）が不連続であり、これが数値解に悪影響を及ぼすことが指摘された．表 4-1 に各点での片側微分係数の値を示す．

表 4-1

M	-1		0		1	
	左	右	左	右	左	右
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_1^+}{\rho a} \right)$	0	$\frac{1}{2\gamma}$	$\frac{1}{2\gamma}$	$\frac{2\gamma-1}{2\gamma}$	$\frac{2\gamma-1}{2\gamma}$	1
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_1^-}{\rho a} \right)$	1	$\frac{2\gamma-1}{2\gamma}$	$\frac{2\gamma-1}{2\gamma}$	$\frac{1}{2\gamma}$	$\frac{1}{2\gamma}$	0
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_2^+}{\rho a^2} \right)$	0	0	$\frac{1}{\gamma}$	$\frac{1}{\gamma}$	2	2
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_2^-}{\rho a^2} \right)$	-2	-2	$-\frac{1}{\gamma}$	$-\frac{1}{\gamma}$	0	0
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_3^+}{\rho a^3} \right)$	0	$\frac{\gamma-3}{4\gamma(\gamma-1)}$	$\frac{1}{2\gamma-2}$	$\frac{1}{2\gamma-2}$	$\frac{\gamma(6\gamma-1)-3}{4\gamma(\gamma-1)}$	$\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}$
$\frac{d}{dM} \left(\frac{F_3^-}{\rho a^3} \right)$	$\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}$	$\frac{\gamma(6\gamma-1)-3}{4\gamma(\gamma-1)}$	$\frac{1}{2\gamma-2}$	$\frac{1}{2\gamma-2}$	$\frac{\gamma-3}{4\gamma(\gamma-1)}$	0

Van Leer はその問題を改善するために、次のようにして数値流束を求めようとした．

1) 数値流束を次のように定める．

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^+(\mathbf{q}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{q}_R) \quad (4-28)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^+ &= 0 & ; & & M < -1 \\
 &= \mathbf{F}_{\text{VL}}^+ & ; & & -1 \leq M < 1 \\
 &= \mathbf{F} & ; & & 1 \leq M \\
 \mathbf{F}^- &= \mathbf{F} & ; & & M < -1 \\
 &= \mathbf{F}_{\text{VL}}^- & ; & & -1 \leq M < 1 \\
 &= 0 & ; & & 1 \leq M
 \end{aligned} \quad (4-29)$$

2) 各分離流束は、至る所で連続である．

3) 各分離流束の 1 次導関数は、至る所で連続である．

4) $\mathbf{F}_{\text{VL}}^\pm$ は上記条件を満たす最低次の多項式で与える．

これらの条件を満足する数値流束として次式を得る．

$$\mathbf{F}_{\text{VL}}^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{4}(\pm 1 + M)^2 \rho a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \frac{\pm 2 + M(-1 + \gamma)}{\gamma} a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \left(-\frac{1}{2} \pm M + \frac{1}{-1 + \gamma} \right) a^2 \end{pmatrix} \quad (4-30)$$

さらに、2次導関数まで連続であることを課すと、次式を得る。

$$\mathbf{F}_{\text{VL-2}}^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{4}(\pm 1 + M)^2 \rho a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \frac{(\pm 1 + M) \{ 8 + (\pm 3 - M)M(\gamma - 3) \}}{4\gamma} a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \frac{(\pm 1 + M) \{ \pm 7 \mp \gamma + M(-5 + 3\gamma) \}}{8(\gamma - 1)} a^2 \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

さらに、3次導関数まで連続であることを課すと、次式を得る。

$$\mathbf{F}_{\text{VL-3}}^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{4}(\pm 1 + M)^2 \rho a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \frac{(\pm 1 + M) \{ 8 + (\pm 3 - M)M(\gamma - 3) \}}{4\gamma} a \\ F_{1\text{VL}}^{\pm} \frac{(\pm 1 + M)^2 \{ 11 + (\pm 4 - M)M(\gamma - 3) - \gamma \}}{16(\gamma - 1)} a^2 \end{pmatrix} \quad (4-32)$$

van Leer 法の数値流束を、Steger-Warming 法と比較して、図 4-4, 4-5, 4-6 に示す。

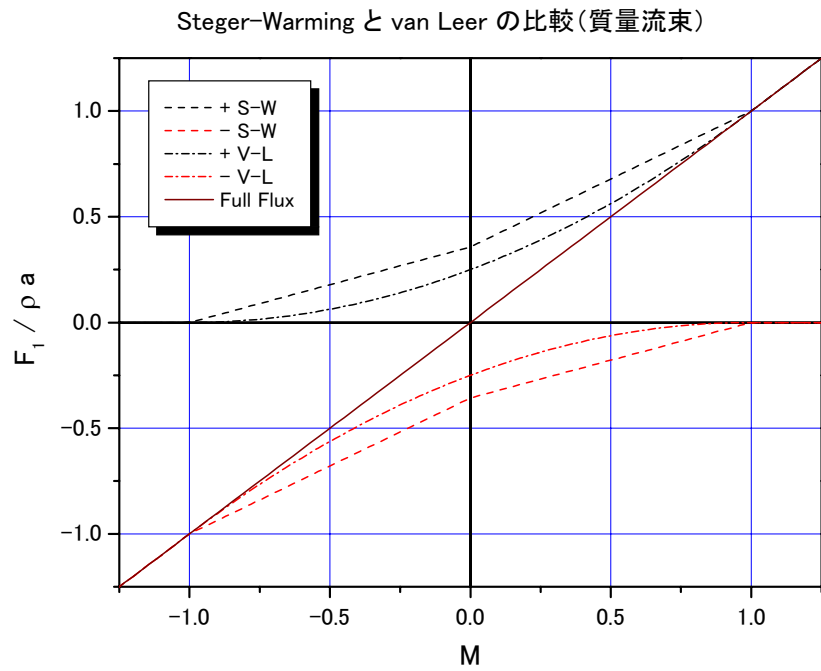


図 4-4 Steger-Warming 法と van Leer 法の分離流束の比較 (質量流束)

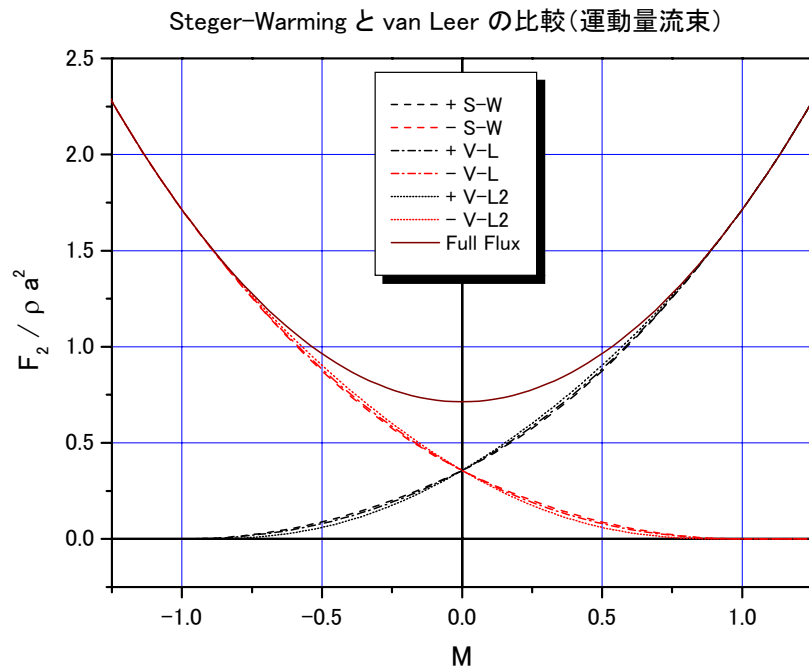


図 4-5 Steger-Warming 法と van Leer 法の分離流束の比較 (運動量流束)

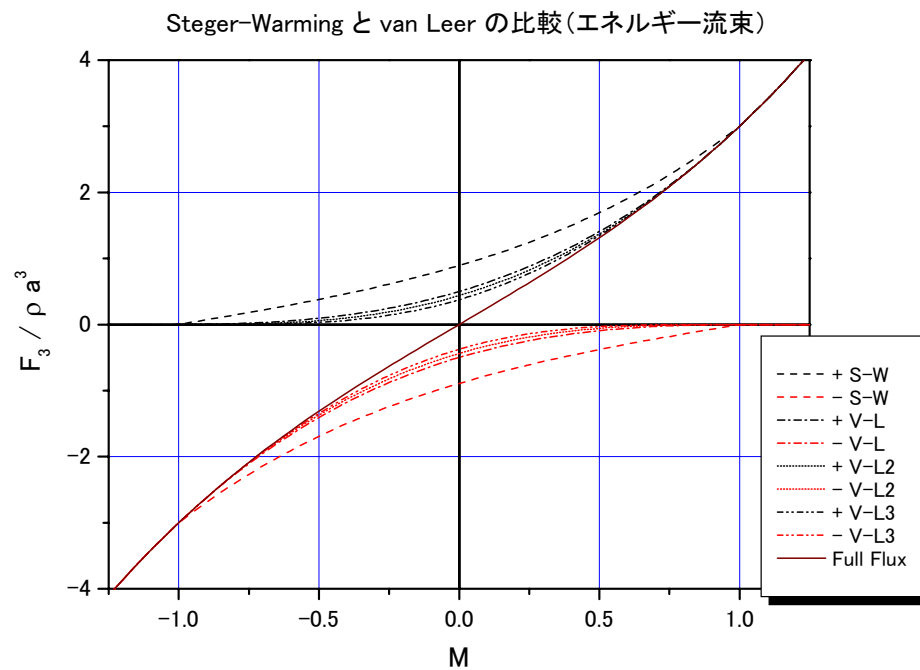
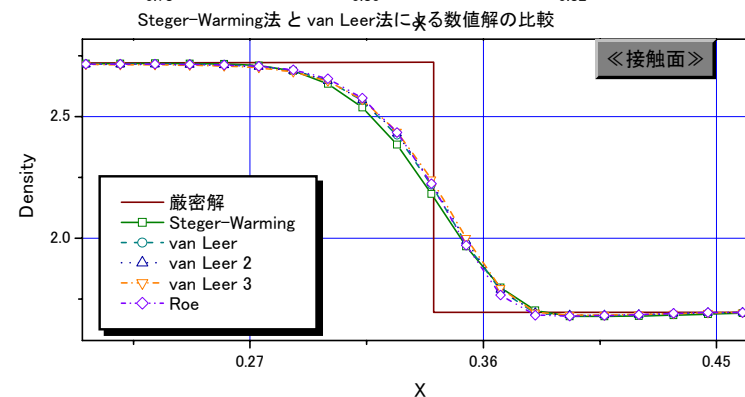
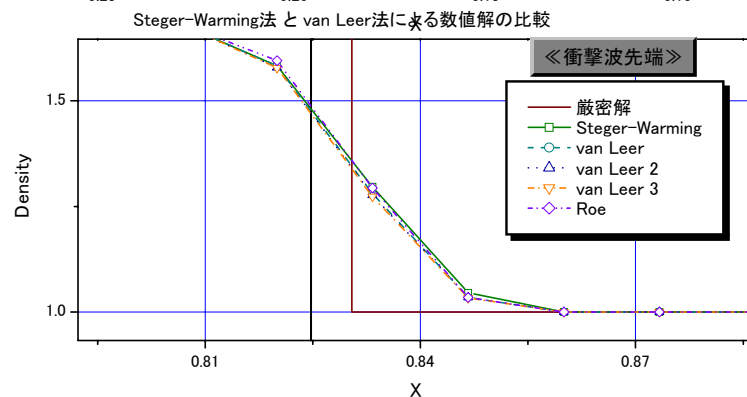
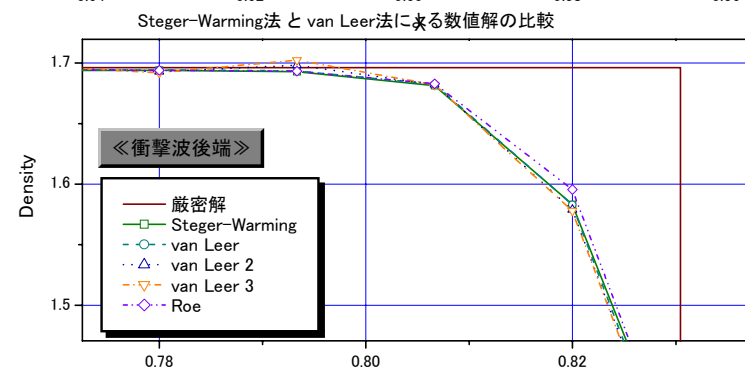
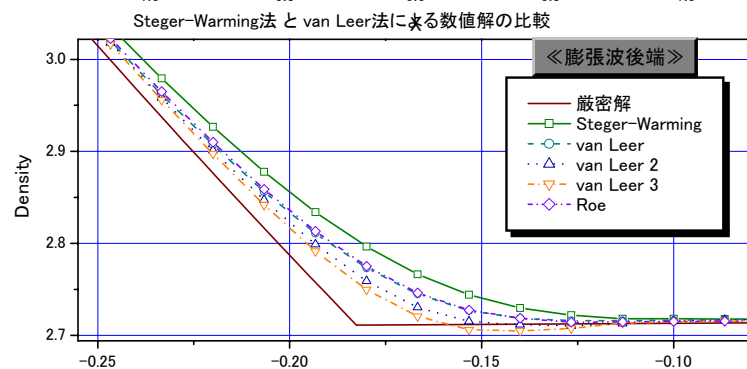
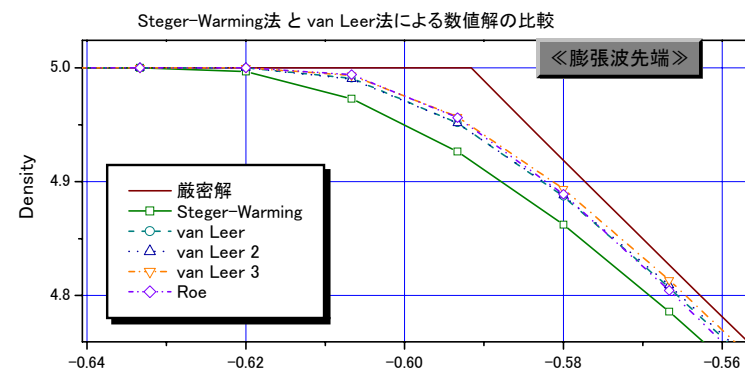
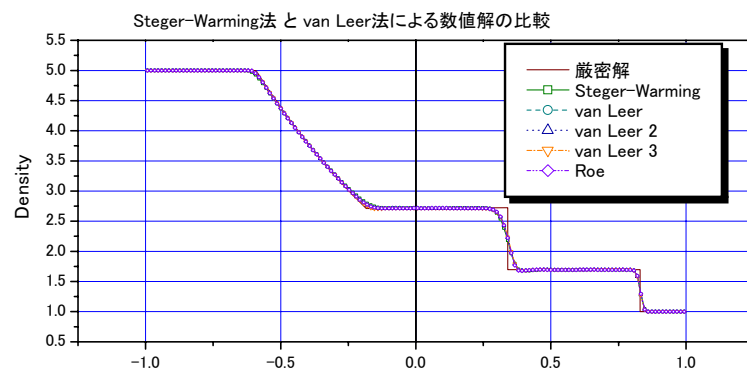


図 4-6 Steger-Warming 法と van Leer 法の分離流束の比較 (エネルギー流束)

課題： Shock Tube 問題を、Steger-Warming 法、van Leer 法 (VL, VL-2, VL-3)、Roe 法を用いて解析し、数値解の相違を見よ。 ケース 1、 $n=151$, $CFL=0.1$, $\phi=1$, $\kappa=1/3$ とする。



衝撃波管問題 ケース1 $\phi=1, \kappa=1/3, n=151, cfl=0.1$

