8. 多次元圧縮性非粘性流れの数値解析（軸対称）

　ここでは，前節に引き続き，多次元流れの CFD 解析について述べる．やはり前節と同様二次元直交カーテジアン座標を用いてメッシュ分割された格子系を使うが，軸対称流れを扱う．

8.1　基礎方程式

　軸対称圧縮性非粘性流れの流体力学方程式系（軸対称圧縮性 Euler 方程式系）は，弱保存形ベクトル表示で以下のように表される．

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}=\mathbf{S}$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ r\rho w \\ rE \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} r\rho u \\ r(\rho u^2+p) \\ r\rho vu \\ r\rho wu \\ r\rho uH \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} r\rho v \\ r\rho u v \\ r(\rho v^2+p) \\ r\rho w v \\ r\rho vH \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p+\rho w^2 \\ -\rho vw \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-1}$$

ここで，(u,v,w) は速度の (x,r,θ) 成分である．また，単位体積当たりの全エネルギー E 及び，（単位質量当たりの）全エンタルピー H は

$$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)$$
$$H=\frac{E+p}{\rho} \tag{8-2}$$

で表される．

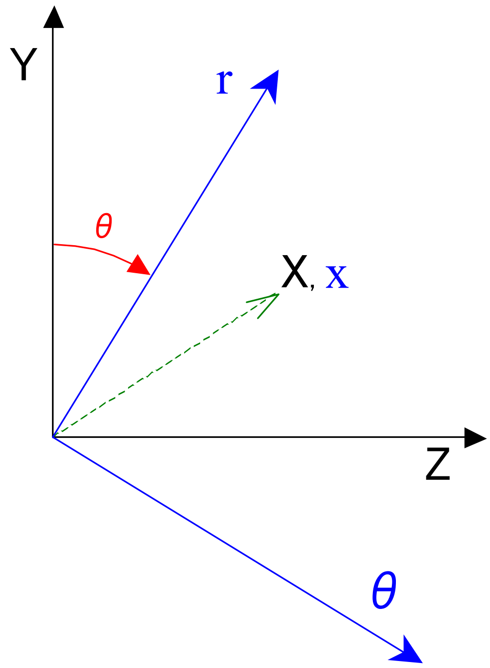
　ここでは，式(8-1)を３次元デカルト座標表示の式から導いておく．

デカルト座標 (X,Y,Z) での Euler 方程式系は次式で表される．

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial X}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Y}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Z}=0$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho W \\ E \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U^2+p \\ \rho VU \\ \rho WU \\ \rho HU \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho UV \\ \rho V^2+p \\ \rho WV \\ \rho HV \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho UW \\ \rho VW \\ \rho W^2+p \\ \rho HW \end{bmatrix} \tag{8-3}$$

ここで，(U,V,W) は速度の (X,Y,Z) 成分である．



上図より，両座標には以下の関係が成り立っている．

$$
\begin{aligned}
X &= x \\
Y &= r\cos\theta \\
Z &= r\sin\theta
\end{aligned}
\tag{8-4}
$$

あるスカラー量Qの(x, r, θ)に関する偏微分は，(X, Y, Z)に関する偏微分の一次結合で表される．このとき係数行列は座標変換のメトリックス或いはメトリック行列などと呼ぶ．即ち，

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial r} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \theta} \end{pmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\
\dfrac{\partial X}{\partial r} & \dfrac{\partial Y}{\partial r} & \dfrac{\partial Z}{\partial r} \\
\dfrac{\partial X}{\partial \theta} & \dfrac{\partial Y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial Z}{\partial \theta}
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial X} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Z} \end{pmatrix}
\tag{8-5}
$$

式(8-4)を使って具体的にメトリック行列を計算し式(8-5)を書き直すと，

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial r} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \theta} \end{pmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & \cos\theta & \sin\theta \\
0 & -r\sin\theta & r\cos\theta
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial X} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Z} \end{pmatrix}
\tag{8-6}
$$

メトリック行列は逆行列を持つので式(8-6)を反転すると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial X} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial r} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{8-7}$$

次に，速度ベクトルを両座標系で表した成分間に存在する関係を考えると，式(8-6),(8-7)と同様に次式が成立する．このときメトリックスとの相違はθ方向の線素が$d\theta$ではなく，$rd\theta$であることから生じる．

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \tag{8-8}$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{8-9}$$

さて次に，式(8-7)及び(8-9)を３次元デカルト座標での Euler 方程式(8-3)に代入する．但し，式(8-3)の第３，第４の式はあくまで，Y,Z 方向の運動量保存式であるから，それらを，r,θ方向の運動量保存式に書き直さなければならない．そのためには式(8-8)を用いて以下の操作をする．

$$\begin{pmatrix} r\text{方向の運動量保存式} \\ \theta\text{方向の運動量保存式} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y\text{方向の運動量保存式} \\ Z\text{方向の運動量保存式} \end{pmatrix}$$

以上の手続きを実施する際，次ぎのことを利用して式を変形することにより，最終的に式(8-1)が得られる．

- 軸対称の条件：θ 方向の変化がない．即ち，$\dfrac{\partial \bullet}{\partial \theta} = 0$
- r はt,x,θによらず独立な変数なので，$\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial \theta}$の内外に出し入れが可能
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

８．２　二次元軸対称流の解析

基礎式(8-1)は三次元軸対称流の基礎式であり，剛体回転する旋回流のように周方向速度を持つ軸対称流れも扱うことができる．しかし，ここでは簡単のために，二次元的な軸対称流，即ち周方向の速度成分がいたるところでゼロ（$w \equiv 0$）の流れを考える．この場合，基礎式は以下のように簡単化される．

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}=\mathbf{S}$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ rE \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} r\rho u \\ r(\rho u^2+p) \\ r\rho v u \\ r\rho u H \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} r\rho v \\ r\rho u v \\ r(\rho v^2+p) \\ r\rho v H \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-10}$$

さて式(8-10)を有限体積法を用いて離散化する．まず式(8-10)をセル(i,j)の面積に亘って積分する．即ち，

$$\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}\right)dx\,dr=\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\mathbf{S}\,dx\,dr \tag{8-11}$$

最終的には二次元デカルト座標の場合の離散化とかなり似た形にまとめることができるが，ここでは判りやすさを尊重して，つぎのように考える．まずrを分離したベクトルを定義する．

$$\begin{aligned}\mathbf{q}&=r\,\mathbf{q}^*\\ \mathbf{E}&=r\,\mathbf{E}^*\\ \mathbf{F}&=r\,\mathbf{F}^*\end{aligned} \tag{8-12}$$

セル平均値を次のように定義する．

$$\overline{\mathbf{q}}_{i,j}\equiv\frac{\displaystyle\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\mathbf{q}^*r\,dx\,dr}{\displaystyle\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}r\,dx\,dr}=\frac{\displaystyle\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\mathbf{q}^*r\,dx\,dr}{\Delta x_i\,\Delta r_j\,\overline{r}_j} \tag{8-13}$$

但し，

$$\overline{r}_j\equiv\frac{1}{2}\left(r_{j-1/2}+r_{j+1/2}\right) \tag{8-14}$$

また$\Delta x_i,\Delta r_j$はそれぞれ，セル(i,j)のx方向幅及びr方向幅である．従ってそれらの積によって，セル(i,j)の面積$A_{i,j}$を定義することができる．

$$A_{i,j}=\Delta x_i\Delta r_j \tag{8-15}$$

次に，各セル界面において，次の平均を定義する．

- x =一定の界面（即ち，$x=x_{i+1/2}$，$r_{j-1/2}\le r\le r_{j+1/2}$）での平均流束

$$\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} \equiv \frac{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} r\mathbf{E}^*_{i+1/2}\,dr}{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} r\,dr} = \frac{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}} r\mathbf{E}^*_{i+1/2}\,dr}{\bar{r}_j\,\Delta r_j} \tag{8-16}$$

● r =一定の界面（即ち，$x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$，$r = r_{j+1/2}$，）での平均流束

$$r_{j+1/2}\tilde{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} \equiv \frac{r_{j+1/2}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{F}^*_{j+1/2}\,dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx} = \frac{r_{j+1/2}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{F}^*_{j+1/2}\,dx}{\Delta x_i} \tag{8-17}$$

ソースタームのセル平均は以下のように定義する．

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{i,j} \equiv \frac{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}\,dx\,dr}{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx\,dr} = \frac{\int_{r_{j-1/2}}^{r_{j+1/2}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}\,dx\,dr}{A_{i,j}} \tag{8-18}$$

式(8-13)～式(8-18)の定義を用いて，式(8-11)の積分を実行し整理すると，

$$A_{i,j}\frac{d\overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + \Delta r_j\left(\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} - \hat{\mathbf{E}}_{i-1/2,j}\right) + \frac{\Delta x_i}{\bar{r}_j}\left(r_{j+1/2}\tilde{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} - r_{j-1/2}\tilde{\mathbf{F}}_{i,j-1/2}\right) = \frac{A_{i,j}}{\bar{r}_j}\overline{\overline{\mathbf{S}}}_{i,j} \tag{8-19}$$

を得る．

この式は，二次元カーテシアンの場合の式(7-24)に相当する．ここで実用上重要なことは，ソースターム以外の各物理量ベクトルは形式的に二次元カーテシアンのそれと同じということである．従って，流束ヤコビアンやそれらの固有値などは二次元の場合に求めたものを使うことができる．

時間積分にLU-SGS法を用いる場合，ソースターム以外は二次元の場合とほとんど同じように導出することができる．ソースタームの保存量ベクトルに対するヤコビアン$\partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{q}^*$は，

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{q}^*}d\mathbf{q}^* = (\gamma - 1)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{u^2+v^2}{2} & -u & -v & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\mathbf{q}^* \tag{8-20}$$

により定義される．二次元と同様の手順により以下の２ステップが導かれる．

（第 1 ステップ）

$$\left(\mathbf{I}-\frac{\Delta t}{\bar{r}_j\alpha_{i,j}}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}^*}\right)\Delta\mathbf{q}'_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^+_{i-1,j}\Delta\mathbf{q}'_{i-1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta r_j\,\bar{r}_j\,\alpha_{i,j}}\bar{r}_{j-1}\,\mathbf{B}^+_{i,j-1}\Delta\mathbf{q}'_{i,j-1}=\mathbf{RHS}_{i,j} \tag{8-21}$$

但し，

$$\mathbf{RHS}_{i,j}\equiv\frac{\Delta t}{A_{i,j}\alpha_{i,j}}\left[-\Delta r_j\left(\hat{\mathbf{E}}^n_{i+1/2,j}-\hat{\mathbf{E}}^n_{i-1/2,j}\right)-\frac{\Delta x_i}{\bar{r}_j}\left(r_{j+1/2}\tilde{\mathbf{F}}^n_{i,j+1/2}-r_{j-1/2}\tilde{\mathbf{F}}^n_{i,j-1/2}\right)+\frac{A_{i,j}}{\bar{r}_j}\overline{\overline{\mathbf{S}}}^n_{i,j}\right] \tag{8-22}$$

（第 2 ステップ）

$$\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}+\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^-_{i+1,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i+1,j}+\frac{\Delta t}{\Delta r_j\,\bar{r}_j\,\alpha_{i,j}}\bar{r}_{j+1}\,\mathbf{B}^-_{i,j+1}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j+1}=\Delta\mathbf{q}'_{i,j} \tag{8-23}$$

それぞれ，境界外部では未知数をゼロと仮定(陽的境界条件)しておく．

第 1 ステップは，前進方向の代入後，$\Delta q'^{(3)}$ を

$$\Delta q'^{(3)}\leftarrow\frac{\Delta q'^{(3)}+\beta\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}\Delta q'^{(1)}-u\,\Delta q'^{(2)}+\Delta q'^{(4)}\right)}{1+\beta v} \tag{8-24}$$

と置き換えることにより完了する．但し，

$$\beta\equiv\frac{(\gamma-1)\Delta t}{\bar{r}_j\,\alpha_{i,j}} \tag{8-25}$$

である．

第 2 ステップに対しては後退方向の逐次代入によって,未知数を求めることができる．

対流項の数値流束については，以上の議論より明らかに，二次元の場合の数値流束をそのまま用いることができる．