３．１次元圧縮性オイラー方程式

3.1 保存形式

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=0$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uH\end{bmatrix}$$

q　保存変数（conservative variable）ベクトル

- ρ　密度　$\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
- u　速度　$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
- E　単位体積あたりの全エネルギー　$\mathrm{J\cdot m^{-3}}$

F　対流項流束（非粘性流束）ベクトル

- p　圧力、静圧　Pa
- H　全エンタルピー　$\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$

3.2 補足関係式

理想気体の状態方程式

$$p=\rho RT \qquad (2)$$

$R\equiv\dfrac{\overline{R}}{M_W}$　気体定数

$\overline{R}\equiv N_A k_B$　普遍気体定数

$N_A=6.0221367\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$　アヴォガドロ数

$k_B=1.38066\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$　ボルツマン定数

M_W　分子量、平均分子量　$\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$

T　温度、静温度　K

単位体積あたりの全エネルギー

$$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow\quad E=\rho\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}u^2\right)$$

ε 内部エネルギー $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

γ 比熱比 $\equiv c_p / c_V$

c_p 定圧比熱 $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

c_V 定積比熱 $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

$R = c_p - c_V$

全エンタルピー

$$\begin{aligned}
H &= \frac{E+p}{\rho} \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 \\
&= \frac{1}{\gamma-1}a^2 + \frac{1}{2}u^2 \\
&= \frac{a^2}{\gamma-1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \qquad (5) \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-1}RT\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0 \\
&= c_p T_0
\end{aligned}$$

a 音速 $a^2 \equiv \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \gamma p/\rho = \gamma RT$

M マッハ数 $\equiv u/a$

T_0 総温度 $T_0 = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$

3.3 非保存形式

原始変数（primitive variable）ベクトル　$\mathbf{w}$

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}\rho\\ u\\ p\end{bmatrix} \tag{6}$$

保存変数は原始変数の関数である.

$$\mathbf{q}=\mathbf{f}(\mathbf{w})$$

要素毎に書くと、

$$\begin{aligned}q_1 &= f_1(w_1,w_2,w_3)\\ q_2 &= f_2(w_1,w_2,w_3)\\ q_3 &= f_3(w_1,w_2,w_3)\end{aligned}$$

微分して、

$$d\mathbf{q}=\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{w}}d\mathbf{w}$$

または

$$\begin{bmatrix}dq_1\\ dq_2\\ dq_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1}{\partial w_2} & \frac{\partial f_1}{\partial w_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2}{\partial w_2} & \frac{\partial f_2}{\partial w_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial w_1} & \frac{\partial f_3}{\partial w_2} & \frac{\partial f_3}{\partial w_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dw_1\\ dw_2\\ dw_3\end{bmatrix}$$

具体的に書く.

$$\begin{bmatrix}d\rho\\ d(\rho u)\\ dE\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ u & \rho & 0\\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\rho\\ du\\ dp\end{bmatrix}$$

係数行列を $\mathbf{Q}$ と表す.

$$d\mathbf{q} = \mathbf{Q}\, d\mathbf{w} \tag{7}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \dfrac{u^2}{2} & \rho u & \dfrac{1}{\gamma - 1} \end{bmatrix}$$

次に、流束ベクトルも原始変数ベクトルの関数である．同様にして、

$$d\mathbf{F} = \mathbf{P}\, d\mathbf{w} \tag{8}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 1 \\ \dfrac{1}{2}u^3 & \rho(H + u^2) & \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}u \end{bmatrix}$$

式(7)，(8)を用いて、式(1)を書き換える.

$$\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

行列 $\mathbf{Q}$ には逆行列 $\mathbf{Q}^{-1}$ が存在する.

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{u}{\rho} & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{\gamma - 1}{2}u^2 & (1-\gamma)u & \gamma - 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$\mathbf{Q}^{-1}$ を式(9)両辺に左から掛けて

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0$$

これを、行列$\mathbf{R} \equiv \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}$を用いて書き改める.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}$$

式(11)は、非保存形式の圧縮性 Euler 方程式の代表的な表現である.

3.4 特性量による表現

行列$\mathbf{R}$の固有値を求める. 固有多項式

$$\left|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E}\right| = 0$$

を解いて、固有値は、$\lambda = u,\ \ -a+u,\ \ a+u$である. それぞれを$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$で表す.

次に、各固有値に対する固有ベクトル$\mathbf{x}_k$を求める.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$$

より、$\mathbf{x}_k$はそれぞれ、$(1, 0, 0)$、$\left(\frac{1}{a^2}, -\frac{1}{\rho a}, 1\right)$、$\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{\rho a}, 1\right)$である.

これらをまとめて記述する.

$$\mathbf{R}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

さらに、

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ 0 & -\frac{1}{\rho a} & \frac{1}{\rho a} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

を用いて書き直すと、

$$\mathbf{R}\,\mathbf{L} = \mathbf{L}\,\mathbf{\Lambda}$$

行列 $\mathbf{L}$ には逆行列 $\mathbf{L}^{-1}$ が存在する.

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{a^2} \\ 0 & -\dfrac{\rho a}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\rho a}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

以上より、

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{L}^{-1} \tag{15}$$

である.(相似変換)

式(15)を式(11)に代入して、

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{L}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{L}^{-1}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0$$

両辺に左から $\mathbf{L}^{-1}$ を掛けて、

$$\mathbf{L}^{-1}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{L}^{-1}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0$$

を得る.さらに、

$$d\,\mathbf{C} \equiv \mathbf{L}^{-1}\,d\,\mathbf{w} \tag{16}$$

で定義される特性変数 $\mathbf{C}$ を導入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

を得る．この式を具体的に表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u-a & 0 \\ 0 & 0 & u+a \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

となり、３つのスカラー波動方程式からなることが分かる．即ち、

$$\begin{gathered} \left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right] C_1 = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial}{\partial x}\right] C_2 = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial}{\partial x}\right] C_3 = 0 \end{gathered} \tag{19}$$

である．これらは、C_1, C_2, C_3 がそれぞれ、$u, u-a, u+a$ の速度で進行する３つの波に沿って、保存されることを意味しており、特性変数と呼ばれる所以である．

式(16)を具体的に表す.

$$d\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho - \frac{1}{a^2} dp \\ -\frac{1}{2} a\rho\, du + \frac{1}{2} dp \\ +\frac{1}{2} a\rho\, du + \frac{1}{2} dp \end{pmatrix} \tag{20}$$

これは、３つの特性曲線に沿って次の関係が成り立つことを意味する.

$dp - a^2 d\rho = 0$　　C_1 一定線：$dx/dt = u$　に沿って．　(21a)

$dp - a\rho\, du = 0$　　C_2 一定線：$dx/dt = -a + u$　に沿って．　(21b)

$dp + a\rho\, du = 0$　　C_3 一定線：$dx/dt = +a + u$　に沿って．　(21c)

特に、等エントロピー流れの場合には次のことが成り立つ．等エントロピー条

件：

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = 一定 \tag{22}$$

により、

$$dp = \gamma \frac{p}{\rho} d\rho = a^2 d\rho \tag{23}$$

ここで a は音速で、次式で計算される.

$$a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s=一定} = \gamma \frac{p}{\rho} \tag{24}$$

この式を変形して、

$$p = \frac{\rho a^2}{\gamma}$$

上式の全微分を取って、

$$dp = \frac{1}{\gamma}(a^2 d\rho + 2a\rho\, da)$$

上式に式(23)を代入して dp について整理すると、次式を得る.

$$dp = \frac{2a\rho}{\gamma - 1} da \tag{25}$$

式(23)及び式(25)より、等エントロピー流れの場合、式(21)は次のように表すことができる.

$$ds = 0 \qquad C_1 一定線：dx/dt = u \quad に沿って. \tag{26a}$$

$$d\left(\frac{2a}{\gamma - 1} - u\right) = 0 \qquad C_2 一定線：dx/dt = -a + u \quad に沿って. \tag{26b}$$

$$d\left(\frac{2a}{\gamma - 1} + u\right) = 0 \qquad C_3 一定線：dx/dt = +a + u \quad に沿って. \tag{26c}$$

これらは、C_1一定線に沿って、等エントロピーであること．さらに、C_2一定線及び、C_3一定線に沿って、

$$I^{\mp} \equiv \frac{2a}{\gamma - 1} \mp u \tag{27}$$

が、それぞれ保存されることを意味している．この量をリーマン(Riemann)の不変量と呼ぶ.

3.5 保存量ベクトルに対する対流項流束のヤコビアン行列

式(7)より、$d\mathbf{w} = \mathbf{Q}^{-1}\,d\mathbf{q}$、また、式(8)より、$d\mathbf{F} = \mathbf{P}\,d\mathbf{w}$、であるから、

$$d\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}^{-1}\,d\mathbf{q} \tag{28}$$

である．保存量ベクトルに対する対流項流束ベクトルのヤコビアン行列を$\mathbf{A}$とすると、

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ \dfrac{u}{2}\left[-2H + (\gamma-1)u^2\right] & H + (1-\gamma)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$
(29)

また式(11)で使ったように$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$であり、それと式(15)を用いると

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}\,\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{L}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{Q}^{-1} \tag{30}$$

となり、$\mathbf{A}$もまた固有値として$u, u-a, u+a$を持つことが分かる.
　さらに、置きなおして

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{X}^{-1} \\ \mathbf{X} &\equiv \mathbf{Q}\,\mathbf{L} \end{aligned} \tag{31}$$

と書ける．このとき

$$
\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a^2} \\ u & \dfrac{-a+u}{a^2} & \dfrac{a+u}{a^2} \\ \dfrac{u^2}{2} & \dfrac{u(-2a+u)}{2a^2}+\dfrac{1}{-1+\gamma} & \dfrac{u(2a+u)}{2a^2}+\dfrac{1}{-1+\gamma} \end{pmatrix} \qquad (32)
$$

$$
\mathbf{X}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{2a^2+u^2(1-\gamma)}{2a^2} & \dfrac{u(-1+\gamma)}{a^2} & \dfrac{1-\gamma}{a^2} \\ \dfrac{1}{4}u\{2a+u(-1+\gamma)\} & \dfrac{-a+u(1-\gamma)}{2} & \dfrac{-1+\gamma}{2} \\ \dfrac{1}{4}u\{-2a+u(-1+\gamma)\} & \dfrac{a+u(1-\gamma)}{2} & \dfrac{-1+\gamma}{2} \end{pmatrix} \qquad (33)
$$

である.

3.6 対流項流束の斉次性

式(28), (29)より、

$$
d\mathbf{F}=\mathbf{A}\,d\mathbf{q} \qquad (34)
$$

という式が成立するが、これは流束ベクトル$\mathbf{F}$の微分$d\mathbf{F}$が、保存量ベクトル$\mathbf{q}$の微分$d\mathbf{q}$の一次結合で表されることを意味している. 要素毎に書くと、

$$
\begin{aligned}
dF_1 &= A_{11}dq_1 + A_{12}dq_2 + A_{13}dq_3 \\
dF_2 &= A_{21}dq_1 + A_{22}dq_2 + A_{23}dq_3 \\
dF_3 &= A_{31}dq_1 + A_{32}dq_2 + A_{33}dq_3
\end{aligned}
$$

対流項流束の斉次性とは、

$$
\mathbf{F}=\mathbf{A}\,\mathbf{q} \qquad (35)
$$

と、式(34)が同時に成立することを言う. 要素毎に書くと

$$
\begin{aligned}
F_1 &= A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + A_{13}q_3 \\
F_2 &= A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + A_{23}q_3 \\
F_3 &= A_{31}q_1 + A_{32}q_2 + A_{33}q_3
\end{aligned}
$$

である.

斉次性はどの方程式でも成り立つわけではなく、Euler 方程式の特殊な性質である.