１０．多次元圧縮性非粘性流れの数値解析（二次元軸対称/三角形非構造格子）

ここでは，一般的な三角形非構造格子を用いた，二次元軸対称流れの CFD 解析について述べる．

１０．１　基礎方程式

二次元軸対称圧縮性非粘性流れの流体力学方程式系(軸対称圧縮性 Euler 方程式系）は，前節の式(8-10)で表される．繰り返して表示すると

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}=\mathbf{S}$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ rE \end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} r\rho u \\ r(\rho u^2+p) \\ r\rho vu \\ r\rho uH \end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} r\rho v \\ r\rho u v \\ r(\rho v^2+p) \\ r\rho vH \end{bmatrix}\qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10-1}$$

ここで，(u,v)は速度の(x,r)成分である．また，単位体積当たりの全エネルギーE及び，（単位質量当たりの）全エンタルピーHは

$$\begin{aligned} E &= \frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho}{2}\left(u^2+v^2\right) \\ H &= \frac{E+p}{\rho} \end{aligned} \tag{10-2}$$

で表される．

１０．２　有限体積法による離散化

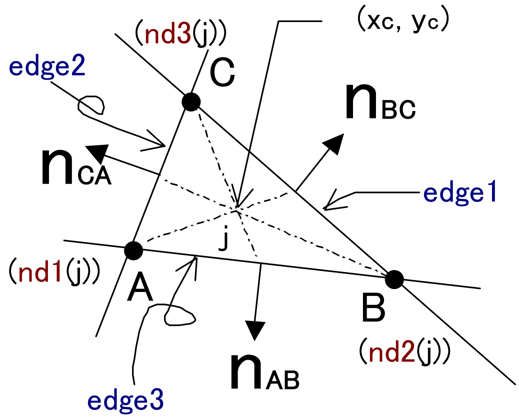

図１０－１

有限体積法を適用するにあたり，図１０－１に示す点 A，B，C で囲まれる三角形セル(j)を考え，このセルの面積A_jに亘り式(10-1)を積分する．

$$\iint_{A_j}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r}\right)dx\,dr=\iint_{A_j}\mathbf{S}\,dx\,dr \tag{10-3}$$

左辺を時間変動項と対流項の和に分割し，さらに対流項の体積積分を Gauss-Green の公式（Gauss の発散定理 etc.）を用いてセルを取り囲む境界∂A_j上の一周積分に変換する．

$$\iint_{A_j}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}dx\,dr+\oint_{\partial A_j}\left(n_x\mathbf{E}+n_r\mathbf{F}\right)ds=\iint_{A_j}\mathbf{S}\,dx\,dr \tag{10-4}$$

ここで，dsは境界∂A_jに沿う座標で，内部の領域を左に見る方向に正方向を定める．$\mathbf{n}\equiv\left(n_x,n_r\right)$は境界の外向き単位法線ベクトルであり，$n_x,n_r$は$(x,r)$成分である．境界$\partial A_j$は図 10－１に示すように，点 A→B→C→A に沿って３つの線分から成り，3 頂点の座標が与えられれば, 3 つの線分の外向き単位法線ベクトル$\mathbf{n}_{AB}$，$\mathbf{n}_{BC}$，$\mathbf{n}_{CA}$が定まる．例えば,

$$\begin{aligned}\Delta x_{AB}&\equiv x_B-x_A\\ \Delta r_{AB}&\equiv r_B-r_A\end{aligned} \tag{10-5}$$

と定義し，線分 AB の長さを$|AB|$で表すと，$\mathbf{n}_{AB}$は次の外積で計算される．

$$\mathbf{n}_{AB}=\left(\frac{\Delta x_{AB}}{|AB|},\frac{\Delta r_{AB}}{|AB|},0\right)\times(0,0,1)=\left(\frac{\Delta r_{AB}}{|AB|},-\frac{\Delta x_{AB}}{|AB|},0\right) \tag{10-6}$$

他の３つについても同様である．

さて，時間変動項とソース項を離散化するために，次の平均を定義する．

$$\overline{\mathbf{q}}_j\equiv\frac{\iint_{A_j}\mathbf{q}\,dx\,dr}{\iint_{A_j}r\,dx\,dr}=\frac{\iint_{A_j}\mathbf{q}\,dx\,dr}{Vol_j} \tag{10-7}$$

$$\overline{\mathbf{S}}_j\equiv\frac{\iint_{A_j}\mathbf{S}\,dx\,dr}{\iint_{A_j}dx\,dr}=\frac{\iint_{A_j}\mathbf{S}\,dx\,dr}{Area_j} \tag{10-8}$$

ここで，$Area_j$とVol_jは以下で計算される．

$$Area_j = Area_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2}\{ x_A(r_B - r_C) + x_B(r_C - r_A) + x_C(r_A - r_B)\} \tag{10-9}$$

$$\begin{aligned} Vol_j &\equiv \iint_{A_j} r\,dx\,dr \\ &= \iint_{\Delta_{ABC}} r\,dx\,dr \\ &= \frac{r_A + r_B + r_C}{3} Area_{\Delta_{ABC}} \end{aligned} \tag{10-10}$$

式(10-4)に式(10-7),(10-8)を代入して,

$$Vol_j \frac{d\,\overline{\mathbf{q}}_j}{d\,t} + \oint_{\partial A_j} (n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F}) ds = Area_j \overline{\mathbf{S}}_j \tag{10-11}$$

次に対流項に目を移すと,

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r \begin{bmatrix} \rho(n_x u + n_r v) \\ \rho u (n_x u + n_r v) + n_x p \\ \rho v (n_x u + n_r v) + n_r p \\ \rho H (n_x u + n_r v) \end{bmatrix} \tag{10-12}$$

と表される.速度を境界面に垂直な成分u_nと平行な成分u_tの直交二成分で表すと,(x,r)成分との間には次の関係がある.

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_r \\ -n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{10-13}$$

または反転させて,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_r \\ n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} \tag{10-14}$$

式(10-14)を式(10-12)に代入して,(u_n, u_t)を用いて整理する.

$$\begin{aligned} & n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} \\ &= r \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u\, u_n + n_x p \\ \rho v\, u_n + n_r p \\ \rho u_n H \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho u_n H \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10-15}$$

対流項の和の式(10-15)を改めて次のように表す.

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G} \tag{10-16}$$

ここで

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10-17}$$

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho u_n H \end{bmatrix} \tag{10-18}$$

で定義される．これらを用いて式(10-11)を書き換えると，

$$Vol_j \frac{d\,\overline{\mathbf{q}}_j}{d\,t} + \oint_{\partial A_j} r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds = Area_j\,\overline{\mathbf{S}}_j \tag{10-19}$$

次に対流項の線積分を具体的に表す．

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A_j} r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds &= \int_A^B r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds + \int_B^C r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds + \int_C^A r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds \\ &= T_{AB}\int_A^B r\,\mathbf{G}\,ds + T_{BC}\int_B^C r\,\mathbf{G}\,ds + T_{CA}\int_C^A r\,\mathbf{G}\,ds\end{aligned} \tag{10-20}$$

さらに，次の平均量を導入する．

$$\overline{\mathbf{G}} \equiv \frac{\int r\,\mathbf{G}\,ds}{\int r\,ds} \tag{10-21}$$

$$\bar{r} \equiv \frac{\int r\,ds}{\int ds} = \frac{\int r\,ds}{\Delta s} \tag{10-22}$$

これらを用いて式(10-20)を書き換えると，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A_j} r\,\mathbf{T}\,\mathbf{G}\,ds &= \Delta s_{AB}\,\bar{r}_{AB}\,\mathbf{T}_{AB}\,\overline{\mathbf{G}}_{AB} + \Delta s_{BC}\,\bar{r}_{BC}\,\mathbf{T}_{BC}\,\overline{\mathbf{G}}_{BC} \\ &\quad + \Delta s_{CA}\,\bar{r}_{CA}\,\mathbf{T}_{CA}\,\overline{\mathbf{G}}_{CA}\end{aligned} \tag{10-23}$$

式(10-23)を用いて式(10-19)を書き換え整理して表すと次式を得る．

$$Vol_j \frac{d\,\overline{\mathbf{q}}_j}{d\,t} + \sum_{k=1}^{3} \Delta s_k\,\bar{r}_k\,\mathbf{T}_k\,\overline{\mathbf{G}}_k = Area_j\,\overline{\mathbf{S}}_j \tag{10-24}$$

ここで，$k = 1,2,3$ はそれぞれ線分 AB，BC，CD を表す．

さて式(10-24)は，二次元軸対称デカルト座標の場合の式(8-19)に相当する．ここで対流項流束ベクトル $\mathbf{G}$ はセル境界での外向き法線方向に変換されていることが特徴である．但し，形式的には二次元対流項流束ベクトルの速度成分を読み替え

るだけであることに注意する．従って，流束ヤコビアンやそれらの固有値などは二次元の場合に求めたものを使うことができる．この流束ベクトルは数値流束が定まった後，行列$\mathbf{T}$によって再変換され，(x,r)方向の運動量を与えることになる．

１０．３　ノードにおける物理量の勾配の算出

図 10-2 に示すようなノードj及びそれを取り囲むエレメント$k=1,\ldots,5$を考える．

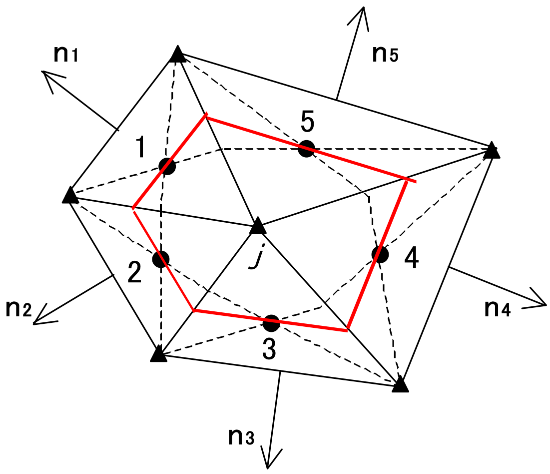

図 10-2

5 個のエレメントの重心を通る赤い線によって取り囲まれる領域全体をΩ_j，これを取り囲む外形線(赤い線)を$\partial\Omega_j$とする．各エレメントの面積をA_k，エレメント全体を取り囲む外形線(黒い線)上の線分の長さをΔs_k，その外向き単位法線ベクトルを$\mathbf{n}_k=(n_{xk},n_{rk})$と表す．

物理量Qの勾配$\mathbf{grad}\ Q=\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial r}\right)$を考え，領域$\Omega_j$に亘って積分すると，Gauss-Green の公式から次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega_j}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdr &= \oint_{\partial\Omega_j} n_x Q ds \\
\iint_{\Omega_j}\frac{\partial Q}{\partial r}dxdr &= \oint_{\partial\Omega_j} n_r Q ds
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}26)
$$

領域Ω_jでの平均勾配を次のように定義する．

$$
\overline{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j} \equiv \frac{\iint_{\Omega_j} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdr}{\iint_{\Omega_j} dxdr} = \frac{\iint_{\Omega_j} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdr}{\frac{4}{9}\sum_k A_k}
$$

$$
\overline{\left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)_j} \equiv \frac{\iint_{\Omega_j} \frac{\partial Q}{\partial r} dxdr}{\iint_{\Omega_j} dxdr} = \frac{\iint_{\Omega_j} \frac{\partial Q}{\partial r} dxdr}{\frac{4}{9}\sum_k A_k} \qquad (10\text{-}27)
$$

式（10-26），(10-27)より，ノードjを取り囲む領域Ω_jにおける，物理量Qの平均勾配を次のように算出することができる．但し各外形線上での物理量をセル(エレメント)の平均量$\overline{Q_k}$で近似する．

$$
\overline{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_j} = \frac{3}{2}\frac{\sum_k n_{xk}\Delta s_k \overline{Q}_k}{\sum_k A_k}
$$

$$
\overline{\left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)_j} = \frac{3}{2}\frac{\sum_k n_{rk}\Delta s_k \overline{Q}_k}{\sum_k A_k} \qquad (10\text{-}28)
$$

以上