９．二次元軸対称圧縮性非粘性・混相流の数値解析（物体適合構造格子）

９．１　基礎方程式

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ r\rho e \\ r\rho_p \\ r\rho_p u_p \\ r\rho_p v_p \\ r\rho_p e_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} r\rho u \\ r(\rho u^2 + p) \\ r\rho v u \\ r\rho u H \\ r\rho_p u_p \\ r\rho_p u_p^2 \\ r\rho_p v_p u_p \\ r\rho_p e_p u_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} r\rho v \\ r\rho u v \\ r(\rho v^2 + p) \\ r\rho v H \\ r\rho_p v_p \\ r\rho_p u_p v_p \\ r\rho_p v_p^2 \\ r\rho_p e_p v_p \end{bmatrix} \tag{9-1}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left(u - u_p\right) \\ p - r\dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left(v - v_p\right) \\ -r\left\{\dfrac{\rho_p c}{\tau_T}\left(T - T_p\right) + \dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left[\left(u - u_p\right)u_p + \left(v - v_p\right)v_p\right]\right\} \\ 0 \\ r\dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left(u - u_p\right) \\ r\dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left(v - v_p\right) \\ r\left\{\dfrac{\rho_p c}{\tau_T}\left(T - T_p\right) + \dfrac{\rho_p}{\tau_V}\left[\left(u - u_p\right)u_p + \left(v - v_p\right)v_p\right]\right\} \end{bmatrix} \tag{9-2}$$

ここで，(u, v)は速度の(x, r)成分である．また，気相単位質量当たりの全エネルギーe及び全エンタルピーHは

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$$
$$H = e + \frac{p}{\rho} \tag{9-3}$$

で表される．粒子相の単位質量あたりの全エネルギーe_pは

$$e_p = cT_p + \frac{1}{2}\left(u_p^2 + v_p^2\right) \tag{9-4}$$

である．

９．２　有限体積法による離散化

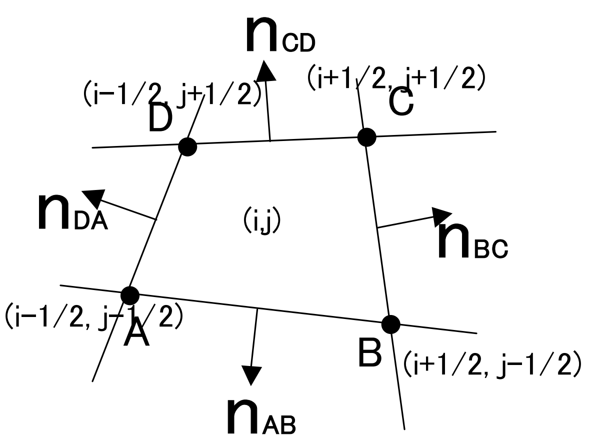


図９－１

有限体積法を適用するにあたり，図９－１に示す点 A，B，C，D で囲まれる四角形セル(i, j)を考え，このセルの面積$V_{i,j}$に亘り式(9-1)を積分する．

$$\iint_{V_{i,j}} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right) dxdr = \iint_{V_{i,j}} \mathbf{S}\, dxdr \tag{9-5}$$

左辺を時間変動項と対流項の和に分割し，さらに対流項の体積積分を Gauss-Green の公式(Gauss の発散定理 etc.)を用いてセルを取り囲む境界$\partial V_{i,j}$上の一周積分に変換する．

$$\iint_{V_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\, dx\, dr + \oint_{\partial V_{i,j}} \left(n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} \right) ds = \iint_{V_{i,j}} \mathbf{S}\, dx\, dr \tag{9-6}$$

ここで，dsは境界$\partial V_{i,j}$に沿う座標で，内部の領域を左に見る方向に正方向を定める．$\mathbf{n} \equiv \left(n_x, n_r \right)$は境界の外向き単位法線ベクトルであり，$n_x, n_r$は$(x, r)$成分である．境界$\partial V_{i,j}$は図９－１に示すように，点 A→B→C→D→A に沿って４つの線分から成り，４頂点の座標が与えられれば，４つの線分の外向き単位法線ベクトル$\mathbf{n}_{AB}$，$\mathbf{n}_{BC}$，$\mathbf{n}_{CD}$，$\mathbf{n}_{DA}$が定まる．例えば，

$$\begin{aligned} \Delta x_{AB} &\equiv x_B - x_A \\ \Delta r_{AB} &\equiv r_B - r_A \end{aligned} \tag{9-7}$$

と定義し，線分 AB の長さを$|AB|$で表すと，$\mathbf{n}_{AB}$は次の外積で計算される．

$$\mathbf{n}_{AB} = \left(\frac{\Delta x_{AB}}{|AB|}, \frac{\Delta r_{AB}}{|AB|}, 0\right) \times (0,0,1) = \left(\frac{\Delta r_{AB}}{|AB|}, -\frac{\Delta x_{AB}}{|AB|}, 0\right) \tag{9-8}$$

他の３つについても同様である．

さて，時間変動項とソース項を離散化するために，次の平均を定義する．

$$\overline{\mathbf{q}}_{i,j} \equiv \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{q}\, dx\, dr}{\iint_{V_{i,j}} r\, dx\, dr} = \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{q}\, dx\, dr}{Vol_{i,j}} \tag{9- 9}$$

定義より，$\overline{\mathbf{q}}_{i,j}$はセル$i,j$における保存量の体積平均値である．

$$\overline{\mathbf{S}}_{i,j} \equiv \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{S}\, dx\, dr}{\iint_{V_{i,j}} r dx\, dr} = \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{S}\, dx\, dr}{Vol_{i,j}} \tag{9- 10}$$

定義より，$\overline{\mathbf{S}}_{i,j}$はセル$i,j$におけるソース項の体積平均値である．（$r$が掛からない！）

ここで，$Area_{i,j}$と$Vol_{i,j}$は以下で計算される．

$$\begin{aligned} Area_{i,j} &= Area_{\Delta_{ABD}} + Area_{\Delta_{BCD}} \\ Area_{\Delta_{ABD}} &= \frac{1}{2}\left\{ x_A(r_B - r_D) + x_B(r_D - r_A) + x_D(r_A - r_B)\right\} \\ Area_{\Delta_{BCD}} &= \frac{1}{2}\left\{ x_B(r_C - r_D) + x_C(r_D - r_B) + x_D(r_B - r_C)\right\} \end{aligned} \tag{9- 11}$$

$$\begin{aligned} Vol_{i,j} &\equiv \iint_{V_{i,j}} r\, dx\, dr \\ &= \iint_{\Delta_{ABD}} r\, dx\, dr + \iint_{\Delta_{BCD}} r\, dx\, dr \\ &= \frac{r_A + r_B + r_D}{3} Area_{\Delta_{ABD}} + \frac{r_B + r_C + r_D}{3} Area_{\Delta_{BCD}} \end{aligned} \tag{9- 12}$$

式(9- 6)に式(9- 9),(9- 10)を代入して，

$$Vol_{i,j} \frac{d\,\overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{d\,t} + \oint_{\partial V_{i,j}} \left(n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F}\right) ds = Vol_{i,j}\, \overline{\mathbf{S}}_{i,j} \tag{9- 13}$$

を得る．

次に対流項に目を移すと，

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r \begin{bmatrix} \rho\,(n_x u + n_r v) \\ \rho\, u\,(n_x u + n_r v) + n_x p \\ \rho\, v\,(n_x u + n_r v) + n_r p \\ \rho\, H\,(n_x u + n_r v) \\ \rho_p\,(n_x u_p + n_r v_p) \\ \rho_p\, u_p\,(n_x u_p + n_r v_p) \\ \rho_p\, v_p\,(n_x u_p + n_r v_p) \\ \rho_p\, e_p\,(n_x u_p + n_r v_p) \end{bmatrix} \tag{9- 14}$$

と表される．速度を境界面に垂直な成分u_nと平行な成分u_tの直交二成分で表すと，(x, r)

成分との間には次の関係がある.

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_r \\ -n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{9-15}$$

または反転させて,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_r \\ n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} \tag{9-16}$$

式(9- 16)を式(9- 14)に代入して, (u_n, u_t) を用いて整理する.

$$\begin{aligned} & n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} \\ &= r \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n + n_x p \\ \rho v u_n + n_r p \\ \rho H u_n \\ \rho_p u_{p_n} \\ \rho_p u_p u_{p_n} \\ \rho_p v_p u_{p_n} \\ \rho_p e_p u_{p_n} \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho H u_n \\ \rho_p u_{p_n} \\ \rho_p u_{p_n}^2 \\ \rho_p u_{p_t} u_{p_n} \\ \rho_p e_p u_{p_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9-17}$$

対流項の和の式(9- 17)を改めて次のように表す.

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r\, \mathbf{T}\, \mathbf{G} \tag{9-18}$$

ここで

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-19}$$

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho H u_n \\ \rho_p u_{p_n} \\ \rho_p u_{p_n}^2 \\ \rho_p u_{p_t} u_{p_n} \\ \rho_p e_p u_{p_n} \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}20)$$

で定義される．これらを用いて式(9- 13)を書き換えると，

$$Vol_{i,j} \frac{d \overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{d t} + \oint_{\partial V_{i,j}} r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds = Vol_{i,j} \, \overline{\mathbf{S}}_{i,j} \qquad (9\text{-}21)$$

次に対流項の線積分を具体的に表す．

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_{i,j}} r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds &= \int_A^B r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds + \int_B^C r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds + \int_C^D r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds + \int_D^A r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds \\ &= T_{AB} \int_A^B r \, \mathbf{G} \, ds + T_{BC} \int_B^C r \, \mathbf{G} \, ds + T_{CD} \int_C^D r \, \mathbf{G} \, ds + T_{DA} \int_D^A r \, \mathbf{G} \, ds \end{aligned} \qquad (9\text{-}22)$$

さらに，次の平均量を導入する．

$$\overline{\mathbf{G}} \equiv \frac{\int r \, \mathbf{G} \, ds}{\int r \, ds} \qquad (9\text{-}23)$$

$$\overline{r} \equiv \frac{\int r \, ds}{\int ds} = \frac{\int r \, ds}{\Delta s} \qquad (9\text{-}24)$$

これらを用いて式(9- 22)を書き換えると，

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_{i,j}} r \, \mathbf{T} \, \mathbf{G} \, ds &= \Delta s_{AB} \, \overline{r}_{AB} \, \mathbf{T}_{AB} \, \overline{\mathbf{G}}_{AB} + \Delta s_{BC} \, \overline{r}_{BC} \, \mathbf{T}_{BC} \, \overline{\mathbf{G}}_{BC} \\ &+ \Delta s_{CD} \, \overline{r}_{CD} \, \mathbf{T}_{CD} \, \overline{\mathbf{G}}_{CD} + \Delta s_{DA} \, \overline{r}_{DA} \, \mathbf{T}_{DA} \, \overline{\mathbf{G}}_{DA} \end{aligned} \qquad (9\text{-}25)$$

式(9- 25)を用いて式(9- 21)を書き換え整理して表すと次式を得る．

$$Vol_{i,j} \frac{d \overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{d t} + \sum_{k=1}^{4} \Delta s_k \, \overline{r}_k \, \mathbf{T}_k \, \overline{\mathbf{G}}_k = Vol_{i,j} \, \overline{\mathbf{S}}_{i,j} \qquad (9\text{-}26)$$

ここで，$k = 1,2,3,4$ はそれぞれ線分 AB，BC，CD，DE を表す．
　構造格子の場合，外向き単位法線ベクトルを用いないで，i 方向の単位法線ベクトル，j 方向の単位法線ベクトルを用いるのも便利である．この場合，式(9- 26)は次のように

書き換わる．

$$Vol_{i,j}\frac{d\,\overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{d\,t}+\left(\Delta s\,\overline{r}\,\mathbf{T}'\,\overline{\mathbf{G}}'\right)_{i+1/2,j}-\left(\Delta s\,\overline{r}\,\mathbf{T}'\,\overline{\mathbf{G}}'\right)_{i-1/2,j}$$
$$+\left(\Delta s\,\overline{r}\,\mathbf{T}'\,\overline{\mathbf{G}}'\right)_{i,j+1/2}-\left(\Delta s\,\overline{r}\,\mathbf{T}'\,\overline{\mathbf{G}}'\right)_{i,j-1/2}=Vol_{i,j}\,\overline{\mathbf{S}}_{i,j}$$

(9- 27)

但しここで$\mathbf{T}$,$\overline{\mathbf{G}}$に $'$をつけたのは，各セル境界で用いる単位法線ベクトルが，境界の種類に応じてi方向またはj方向に正とするためである．このことに注意して式(9- 26)と比較すること．

さて式(9- 27)は，形式的には二次元対流項流束ベクトルの速度成分を読み替えるだけであることに注意する．従って，流束ヤコビアンやそれらの固有値などは二次元の場合に求めたものを使うことができる．この流束ベクトルは数値流束が定まった後，行列$\mathbf{T}$によって再変換され，(x, r)方向の運動量を与えることになる．

時間積分にLU-SGS法を用いる．
式(9- 26)を時間t^n ~ t^{n+1}にわたって積分する．

$$Vol_{i,j}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{d\overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt}dt+\sum_k \Delta s_k \overline{r}_k \mathbf{T}_k\int_{t^n}^{t^{n+1}}\overline{\mathbf{G}}_k dt=Vol_{i,j}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\overline{\mathbf{S}}_{i,j}dt \qquad (9\text{- }28)$$

これより，

$$\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}+\frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\left[\left\{\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\left(\overline{\mathbf{G}}+\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\Delta\overline{\mathbf{q}}\right)\right\}_{i+1/2,j}-\left\{\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\left(\overline{\mathbf{G}}+\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\Delta\overline{\mathbf{q}}\right)\right\}_{i-1/2,j}\right.$$
$$\left.+\left\{\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\left(\overline{\mathbf{G}}+\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\Delta\overline{\mathbf{q}}\right)\right\}_{i,j+1/2}-\left\{\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\left(\overline{\mathbf{G}}+\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\Delta\overline{\mathbf{q}}\right)\right\}_{i,j-1/2}\right]$$
$$=\Delta t\left(\overline{\mathbf{S}}+\frac{\partial\overline{\mathbf{S}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\Delta\overline{\mathbf{q}}\right)_{i,j}$$

であるから，

$$\left[\mathbf{I}-\Delta t\frac{\partial\overline{\mathbf{S}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}_{i,j}+\frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\left\{\delta_I\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)+\delta_J\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)\right\}\right]\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}$$
$$=-\frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\left\{\delta_I\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\overline{\mathbf{G}}\right)^n+\delta_J\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\overline{\mathbf{G}}\right)^n-Vol_{i,j}\overline{\mathbf{S}}^n_{i,j}\right\}$$

のようになり，さらにソース項のオペレーションを分離すると，

$$\left(\mathbf{I}-\Delta t\frac{\partial\overline{\mathbf{S}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}_{i,j}\right)\left[\mathbf{I}+\frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\left\{\delta_I\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)+\delta_J\left(\Delta s\overline{r}\mathbf{T}\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)\right\}\right]\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}=\mathbf{RHS}_{i,j}$$

(9- 29)

となる．ここで，

$$\mathbf{RHS}_{i,j} \equiv -\frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\left\{\delta_I\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\overline{\mathbf{G}}\right)^n + \delta_J\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\overline{\mathbf{G}}\right)^n - Vol_{i,j}\overline{\mathbf{S}}^n_{i,j}\right\} \tag{9- 30}$$

と置いた.

さらに，LU-SGS 法では次のように対流項のオペレータを分離する.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I} - \Delta t\,\frac{\partial\overline{\mathbf{S}}}{\partial\overline{\mathbf{q}}}_{i,j}\right)\Bigg[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}}\Bigg\{&\nabla_I\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^+}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right) + \Delta_I\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^-}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)\\ &+ \nabla_J\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^+}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right) + \Delta_J\left(\Delta s\bar{r}\mathbf{T}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{G}}^-}{\partial\overline{\mathbf{q}}}\right)\Bigg\}\Bigg]\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j} = \mathbf{RHS}_{i,j}\end{aligned} \tag{9- 31}$$

ここで，Δ_I, Δ_J は i-方向，j-方向の前進差分，∇_I, ∇_J は i-方向，j-方向の後退差分を表す.

次に式(9- 31)に含まれるヤコビアン行列を定める.

$$d\mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{q}^*}\,d\mathbf{q}^* \tag{9- 32}$$

ここで，

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix}\rho & \rho u & \rho v & \rho e & \rho_p & \rho_p u_p & \rho_p v_p & \rho_p e_p\end{pmatrix}^T \tag{9- 33}$$

さらに，セル界面に垂直な速度成分を用いて表した保存量ベクトルを定義する.

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \begin{pmatrix}\rho & \rho\,u_n & \rho\,u_t & \rho e & \rho_p & \rho_p u_{p_n} & \rho_p u_{p_t} & \rho_p e_p\end{pmatrix}^T \tag{9- 34}$$

これを用いるとヤコビアン行列は，

$$\frac{\partial\,\mathbf{G}}{\partial\,\mathbf{q}^*} = \frac{\partial\,\mathbf{G}}{\partial\,\tilde{\mathbf{q}}^*}\,\frac{\partial\,\tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial\,\mathbf{q}^*} \tag{9- 35}$$

であり，(u, v) を (u_n, u_t) と読み替えることにより，ヤコビアン行列 $\hat{\mathbf{A}} \equiv \partial\mathbf{G}/\partial\tilde{\mathbf{q}}^*$ は，

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\Gamma}{2}(u_n^2 + u_t^2) - u_n^2 & (3-\gamma)\,u_n & -\Gamma\,u_t & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0\\
-u_n u_t & u_t & u_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2}u_n\left\{-2H + \Gamma(u_n^2 + u_t^2)\right\} & H - \Gamma\,u_n^2 & -\Gamma\,u_n u_t & \gamma\,u_n & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -u_{p_n}^2 & 2u_{p_n} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -u_{p_n}u_{p_t} & u_{p_t} & u_{p_n} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -u_{p_n}e_p & e_p & 0 & u_{p_n}
\end{pmatrix} \tag{9- 36}$$

である．ここで，$\Gamma \equiv \gamma - 1$である．
　また，

$$d\mathbf{q}^* = \mathbf{T}\, d\tilde{\mathbf{q}}^* \tag{9- 37}$$

であるから，結局

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{G}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}} = \frac{\partial\, \mathbf{G}}{\partial\, \mathbf{q}^*} = \hat{\mathbf{A}}\, \mathbf{T}^{-1} \tag{9- 38}$$

によって計算される．
　さらに，

$$\tilde{\mathbf{E}} \equiv n_x\, \mathbf{E} + n_r\, \mathbf{F} \tag{9- 39}$$

に対するヤコビアン行列$\tilde{\mathbf{A}}$は，

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &\equiv \frac{\partial\, \tilde{\mathbf{E}}}{\partial\, \mathbf{q}^*} \equiv \frac{\partial \left(n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} \right)}{\partial\, \mathbf{q}^*} \\ &= r\, \mathbf{T} \frac{\partial\, \mathbf{G}}{\partial\, \mathbf{q}^*} \\ &= r\, \mathbf{T}\, \hat{\mathbf{A}}\, \mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \tag{9- 40}$$

として計算される．
　これより，LU-SGS 法の式(9- 31)は次のように表される．但しここでは混乱を避けるために，i方向の$\tilde{\mathbf{A}}$を$\mathbf{A}$と表し，j方向の$\tilde{\mathbf{A}}$を$\mathbf{B}$と表す．

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}_{i,j} \right) \times \\ &\qquad \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \left\{ \nabla_I \left(\Delta s \mathbf{A}^+ \right) + \Delta_I \left(\Delta s \mathbf{A}^- \right) + \nabla_J \left(\Delta s \mathbf{B}^+ \right) + \Delta_J \left(\Delta s \mathbf{B}^- \right) \right\} \right] \Delta \overline{\mathbf{q}}_{i,j} = \mathbf{RHS}_{i,j} \end{aligned} \tag{9- 41}$$

ここで，

$$\mathbf{A}^{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\mathbf{A} \pm \nu_A \mathbf{I} \right) \tag{9- 42}$$

$$\mathbf{B}^{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\mathbf{B} \pm \nu_B \mathbf{I} \right) \tag{9- 43}$$

である．ここで，ν_A, ν_Bはそれぞれ$\mathbf{A}, \mathbf{B}$のスペクトル半径である．ちなみに$\tilde{\mathbf{A}}$の固有値$\tilde{\lambda}_k$は，

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= r\, \lambda \\ &= r\, u_n,\ r\, u_n,\ r\,(u_n - a),\ r\,(u_n + a),\ r u_{p_n},\ r u_{p_n},\ r u_{p_n},\ r u_{p_n} \end{aligned} \tag{9- 44}$$

であり，スペクトル半径νは

$$\nu \equiv r \max\left[\left|u_n\right| + a,\ \left|u_{p_n}\right| \right] \tag{9- 45}$$

である.

LU-SGS 法の式(9- 41)の対流項のオペレータを展開し，左行きヤコビアンと右行きヤコビアン同士でくくると，次のように表される.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}_{i,j}\right) \times \Bigg[& \left(1 + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \left\{ \left(\Delta s_I \nu_A\right)_{i,j} + \left(\Delta s_J \nu_B\right)_{i,j} \right\}\right) \mathbf{I} + \\ & + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \left\{ - \left(\Delta s_I \mathbf{A}^+\right)_{i-1,j} - \left(\Delta s_J \mathbf{B}^+\right)_{i,j-1} \right\} \\ & + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \left\{ + \left(\Delta s_I \mathbf{A}^-\right)_{i+1,j} + \left(\Delta s_J \mathbf{B}^-\right)_{i,j+1} \right\} \Bigg] \Delta \bar{\mathbf{q}}_{i,j} = \mathbf{RHS}_{i,j}\end{aligned} \tag{9- 46}$$

ここで，i方向のΔsをΔs_I，j方向のそれをΔs_Jと表した.

対流項オペレータ中の単位行列に掛かる係数を$\alpha_{i,j}$と置き，$\alpha_{i,j}$で両辺を割って，対流項のオペレータを二因子分解すると，最終的に次式を得る.

$$\begin{aligned}& \left(\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{q}}}_{i,j}\right) \times \\ & \times \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}\alpha_{i,j}} \left\{ - \left(\Delta s_I \mathbf{A}^+\right)_{i-1,j} - \left(\Delta s_J \mathbf{B}^+\right)_{i,j-1} \right\} \right] \\ & \times \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}\alpha_{i,j}} \left\{ + \left(\Delta s_I \mathbf{A}^-\right)_{i+1,j} + \left(\Delta s_J \mathbf{B}^-\right)_{i,j+1} \right\} \right] \Delta \bar{\mathbf{q}}_{i,j} = \frac{1}{\alpha_{i,j}} \mathbf{RHS}_{i,j}\end{aligned} \tag{9- 47}$$

ここで，

$$\alpha_{i,j} \equiv 1 + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \left\{ \left(\Delta s_I \nu_A\right)_{i,j} + \left(\Delta s_J \nu_B\right)_{i,j} \right\} \tag{9- 48}$$

と置いた.

以上を統合すると，LU-SGS 法として以下の３ステップが導かれる.

(第１ステップ)　ポイント・インプリシット

$$\left(\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial\, \bar{\mathbf{S}}}{\partial\, \bar{\mathbf{q}}}_{i,j}\right) \Delta \mathbf{q}^{**}_{i,j} = \frac{1}{\alpha_{i,j}} \mathbf{RHS}_{i,j} \tag{9- 49}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}^{(AXISYM)} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}^{(2PHASE)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}^{(AXISYM)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{(\gamma - 1)(u^2 + v^2)}{2r} & \dfrac{(1-\gamma)u}{r} & \dfrac{(1-\gamma)v}{r} & \dfrac{\gamma - 1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}}^{(2PHASE)}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{u\varphi}{\tau_V} & -\frac{\varphi}{\tau_V} & 0 & 0 & -\frac{u}{\tau_V} & \frac{1}{\tau_V} & 0 & 0 \\
\frac{v\varphi}{\tau_V} & 0 & -\frac{\varphi}{\tau_V} & 0 & -\frac{v}{\tau_V} & 0 & \frac{1}{\tau_V} & 0 \\
\varphi\left\{\frac{uu_p + vv_p}{\tau_V} + \frac{\left(2c_vT - u^2 - v^2\right)\kappa}{2\tau_T}\right\} & -\varphi\left(\frac{u_p}{\tau_V} - \frac{u\kappa}{\tau_T}\right) & -\varphi\left(\frac{v_p}{\tau_V} - \frac{v\kappa}{\tau_T}\right) & -\frac{\kappa\varphi}{\tau_T} & -\frac{u_p^2 + v_p^2}{\tau_V} + \frac{u_p^2 + v_p^2 - 2c_vT\kappa}{2\tau_T} & -\frac{u_p}{\tau_T} - \frac{u - 2u_p}{\tau_V} & -\frac{v_p}{\tau_T} - \frac{v - 2v_p}{\tau_V} & \frac{1}{\tau_T} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{u\varphi}{\tau_V} & \frac{\varphi}{\tau_V} & 0 & 0 & \frac{u}{\tau_V} & -\frac{1}{\tau_V} & 0 & 0 \\
-\frac{v\varphi}{\tau_V} & 0 & \frac{\varphi}{\tau_V} & 0 & \frac{v}{\tau_V} & 0 & -\frac{1}{\tau_V} & 0 \\
-\varphi\left\{\frac{uu_p + vv_p}{\tau_V} + \frac{\left(2c_vT - u^2 - v^2\right)\kappa}{2\tau_T}\right\} & \varphi\left(\frac{u_p}{\tau_V} - \frac{u\kappa}{\tau_T}\right) & \varphi\left(\frac{v_p}{\tau_V} - \frac{v\kappa}{\tau_T}\right) & \frac{\kappa\varphi}{\tau_T} & \frac{u_p^2 + v_p^2}{\tau_V} - \frac{u_p^2 + v_p^2 - 2c_vT\kappa}{2\tau_T} & \frac{u_p}{\tau_T} + \frac{u - 2u_p}{\tau_V} & \frac{v_p}{\tau_T} + \frac{v - 2v_p}{\tau_V} & -\frac{1}{\tau_T}
\end{pmatrix}
$$

第１ステップは，さらに次のように二つのオペレータに分解する．

$$
\left(\mathbf{I} - \Delta t\,\frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}\right)\Delta \mathbf{q}_{i,j}^{**} = \left(\mathbf{I} - \Delta t\,\frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}^{AXISYM}\right) \times \left(\mathbf{I} - \Delta t\,\frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}^{2PHASE}\right)\Delta \mathbf{q}_{i,j}^{**} = \frac{1}{\alpha_{i,j}}\mathbf{RHS}_{i,j}
$$

従って

ステップ(1−1) で，

$$
\left(\mathbf{I} - \Delta t\,\frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}^{AXISYM}\right)\Delta \mathbf{q}_{i,j}^{***} = \frac{1}{\alpha_{i,j}}\mathbf{RHS}_{i,j} \qquad (9\text{-}50)
$$

を解く．これは簡単に解くことができる．

$$\Delta \mathbf{q}_{i,j}^{***} = \frac{1}{\alpha_{i,j}} \begin{bmatrix} RHS^{(1)} \\ RHS^{(2)} \\ \beta\left\{\frac{\Gamma}{2}\left(u^2 + v^2\right)RHS^{(1)} + \Gamma u RHS^{(2)} + \frac{r}{\Delta t} RHS^{(3)} + \Gamma RHS^{(4)}\right\} \\ RHS^{(4)} \\ RHS^{(5)} \\ RHS^{(6)} \\ RHS^{(7)} \\ RHS^{(8)} \end{bmatrix}_{i,j}$$

(9- 51)

ここで，

$$\beta \equiv \frac{1}{\frac{r}{\Delta t} + \Gamma v}, \qquad \Gamma \equiv \gamma - 1 \tag{9- 52}$$

と置いた．

次にステップ（１－２）で，

$$\left(\mathbf{I} - \Delta t \frac{\partial \overline{\mathbf{S}}}{\partial \overline{\mathbf{q}}}^{2PHASE}\right) \Delta \mathbf{q}_{i,j}^{**} = \Delta \mathbf{q}_{i,j}^{***} \tag{9- 53}$$

を解く．

まず，$\Delta q_{i,j}^{**(4)}$ と $\Delta q_{i,j}^{**(8)}$ 以外を先に求める．

$$\Delta q_{i,j}^{**(1)} = \Delta q_{i,j}^{***(1)} \tag{9- 54}$$

$$\Delta q_{i,j}^{**(2)} = \frac{1}{1 + \varphi + \frac{\tau_V}{\Delta t}} \left\{\varphi u \Delta q_{i,j}^{***(1)} + \left(1 + \frac{\tau_V}{\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{***(2)} - u\Delta q_{i,j}^{***(5)} + \Delta q_{i,j}^{***(6)}\right\}$$

(9- 55)

$$\Delta q_{i,j}^{**(3)} = \frac{1}{1 + \varphi + \frac{\tau_V}{\Delta t}} \left\{\varphi v \Delta q_{i,j}^{***(1)} + \left(1 + \frac{\tau_V}{\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{***(3)} - v\Delta q_{i,j}^{***(5)} + \Delta q_{i,j}^{***(7)}\right\}$$

(9- 56)

$$\Delta q_{i,j}^{**(5)} = \Delta q_{i,j}^{***(5)} \tag{9- 57}$$

$$\Delta q_{i,j}^{**(6)} = \frac{1}{1 + \varphi + \frac{\tau_V}{\Delta t}} \left\{- \varphi u \Delta q_{i,j}^{***(1)} + \varphi \Delta q_{i,j}^{***(2)} + u\Delta q_{i,j}^{***(5)} + \left(\varphi + \frac{\tau_V}{\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{***(6)}\right\}$$

(9- 58)

$$\Delta q_{i,j}^{**(7)} = \frac{1}{1 + \varphi + \dfrac{\tau_V}{\Delta t}}\left\{-\varphi v\Delta q_{i,j}^{***(1)} + \varphi\Delta q_{i,j}^{***(3)} + v\Delta q_{i,j}^{***(5)} + \left(\varphi + \frac{\tau_V}{\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{***(7)}\right\}$$

(9- 59)

その後，$\Delta q_{i,j}^{**(4)}$と$\Delta q_{i,j}^{**(8)}$を求める．

$$\Delta q_{i,j}^{**(4)} = \frac{1}{1 + \kappa\varphi + \dfrac{\tau_T}{\Delta t}}\left\{\left(1 + \frac{\tau_T}{\Delta t}\right)a_4 + a_8\right\} \tag{9- 60}$$

$$\Delta q_{i,j}^{**(8)} = \frac{1}{1 + \kappa\varphi + \dfrac{\tau_T}{\Delta t}}\left\{\kappa\varphi a_4 + \left(\kappa\varphi + \frac{\tau_T}{\Delta t}\right)a_8\right\} \tag{9- 61}$$

ここで，

$$a_4 = \Delta q_{i,j}^{***(4)} + a_4^* \tag{9- 62}$$

$$a_8 = \Delta q_{i,j}^{***(8)} + a_8^* \tag{9- 63}$$

$$\begin{aligned} a_4^* = {} & \varphi\left[\frac{\left\{c_v T - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right\}\kappa}{\tau_T/\Delta t} + \frac{uu_p + vv_p}{\tau_V/\Delta t}\right]\Delta q_{i,j}^{**(1)} \\ & + \varphi\left(\frac{u\kappa}{\tau_T/\Delta t} - \frac{u_p}{\tau_V/\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{**(2)} \\ & + \varphi\left(\frac{v\kappa}{\tau_T/\Delta t} - \frac{v_p}{\tau_V/\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{**(3)} \\ & - \left[\frac{\kappa c_v T - \frac{1}{2}\left(u_p^2 + v_p^2\right)}{\tau_T/\Delta t} + \frac{u_p^2 + v_p^2}{\tau_V/\Delta t}\right]\Delta q_{i,j}^{**(5)} \\ & - \left(\frac{u_p}{\tau_T/\Delta t} + \frac{u - 2u_p}{\tau_V/\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{**(6)} \\ & - \left(\frac{v_p}{\tau_T/\Delta t} + \frac{v - 2v_p}{\tau_V/\Delta t}\right)\Delta q_{i,j}^{**(7)} \end{aligned} \tag{9- 64}$$

$$a_8^* = -a_4^* \tag{9- 65}$$

である．

（第 2 ステップ）　前進スイープ

$$\Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j} = \Delta\mathbf{q}^{**}_{i,j} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}\alpha_{i,j}}\left\{\left(\Delta s_I\mathbf{A}^{+}\right)_{i-1,j}\Delta\mathbf{q}^{*}_{i-1,j} + \left(\Delta s_J\mathbf{B}^{+}\right)_{i,j-1}\Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j-1}\right\}$$

(9- 66)

（第 3 ステップ）　後退スイープ

$$\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j} = \Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j} - \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}\alpha_{i,j}}\left\{\left(\Delta s_I\mathbf{A}^{-}\right)_{i+1,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i+1,j} + \left(\Delta s_J\mathbf{B}^{-}\right)_{i,j+1}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j+1}\right\}$$

(9- 67)

それぞれ，境界外部では未知数をゼロと仮定(陽的境界条件)しておく．

<u>計算例</u>　：　ロケットモータ内の軸対称流れの計算

　ここでは，図 9-2 のような簡単なチャンバー/推進薬面とノズルの形状を想定し，上記の方法で離散化して数値解析する．図にあるように，AB は中心軸，BC は流出面，CD はノズル内固体表面，AD は推進薬表面である．

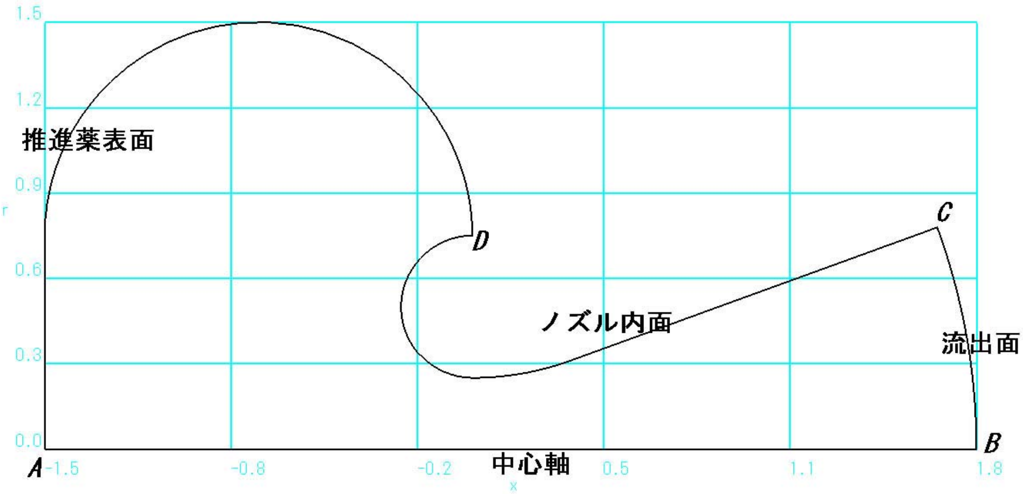


図９－２

それぞれの境界での境界条件は，

　　　中心軸：軸対称条件

流出面：超音速流出条件
ノズル内面：固体壁（すべり壁）条件
推進薬表面：湧き出し条件

を与える．

推進薬特性は，

燃焼温度　T_c=3500K.　　燃焼圧力　p_c=5 MPa,
燃焼ガス比熱比　γ=1.211,　　同平均分子量　$\tilde{M}$=20.33 g/mol
負荷率　0.4
粒子径　　　　　5×10^{-7}，5×10^{-6}，5×10^{-5}ｍの３ケース

とする．

定常解への収束を加速させるために，初期状態を適切に選定し，次に説明するローカルタイムステップを用いる．

ローカルタイムステップ

非定常計算に用いるタイムステップは空間的には一様な時間幅でなければならないため，最も制約の厳しい場所を見つけ，そこで局所的に許容される時間積分幅を全体のタイムステップとして採用した．これをグローバルタイムステップと呼ぶ．対流項による計算の安定性を考える場合 CFL 条件を満たさなければならないが，例えば本問題のように亜音速から超音速までという具合に流速の格差が大きい場合には，超音速部分でタイムステップが制限され，亜音速領域における時間変化がすすまないということが起きる．

もし，興味の対象が定常解だけである場合には，このことは著しく非効率な状況を生み出す．　それを解消するための一つの手段としては，時間発展の物理的妥当性は無視し，局所の安定条件だけを満たしながら，局所的に取り得るだけ時間を進めるのが効果的である．　このようにしても，定常解が得られれば，同じ解に行き着く．　このような収束加速法をローカルタイムステップ法と呼ぶ．　ここでは，次ぎのような方法で，タイムステップを定める．

$$\Delta t_{i,j} = CFL \times \frac{Vol_{i,j}}{\oint_{\delta V_{i,j}} r\left(\left|u_n\right| + a\right) ds} \qquad (9\text{-}40)$$

計算格子

例えば図９－３に示すような格子を用いる．この格子は，i 方向に 101 点，j 方向に 54 点とし，楕円型偏微分方程式を用いて生成した．

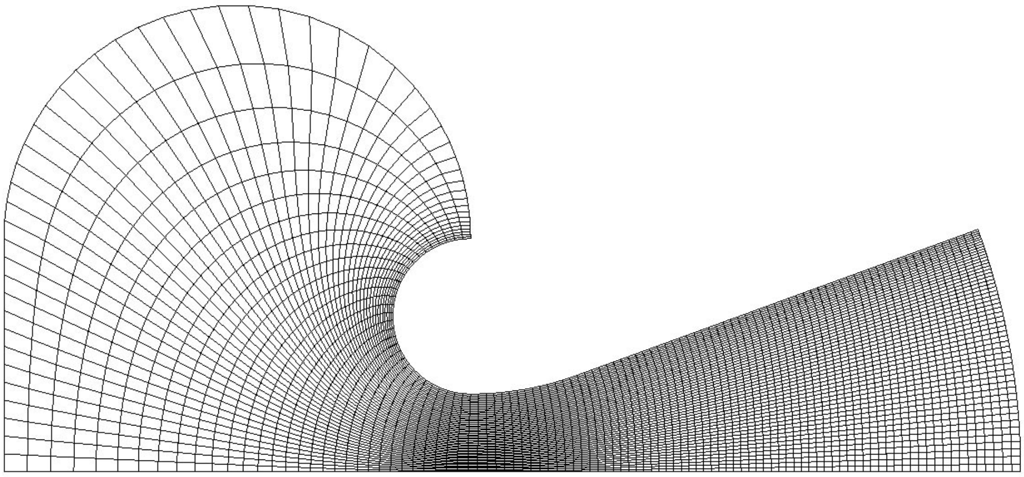
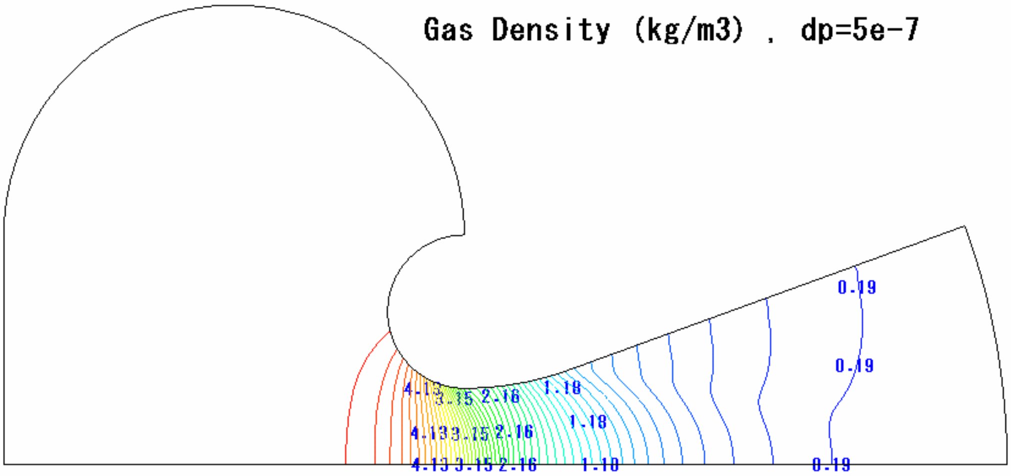
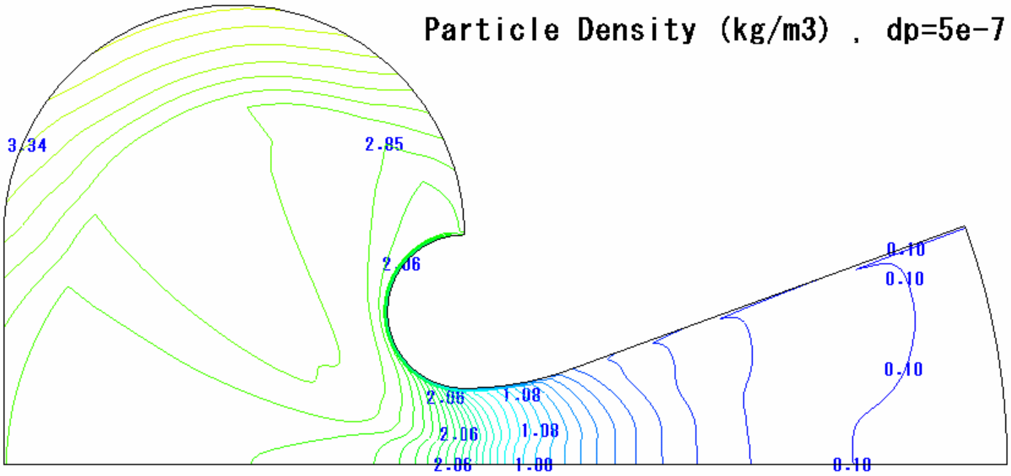
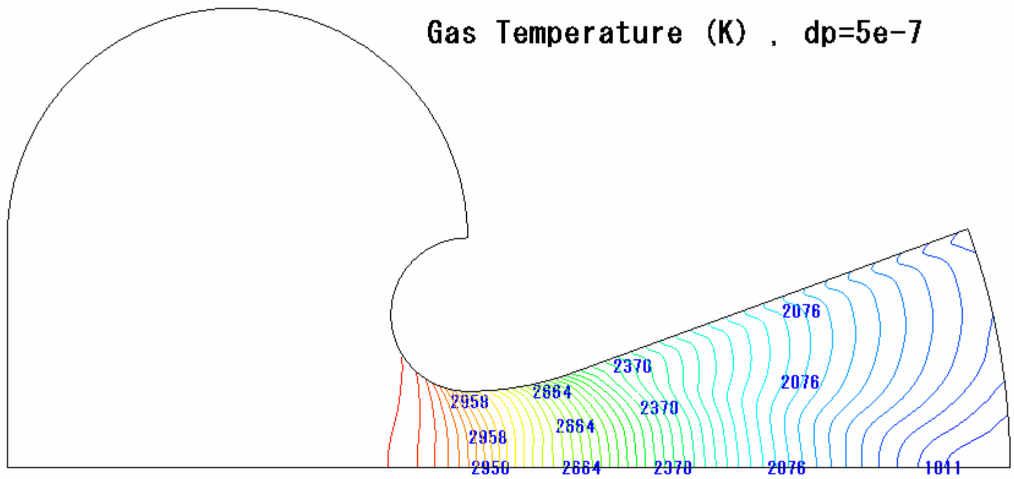


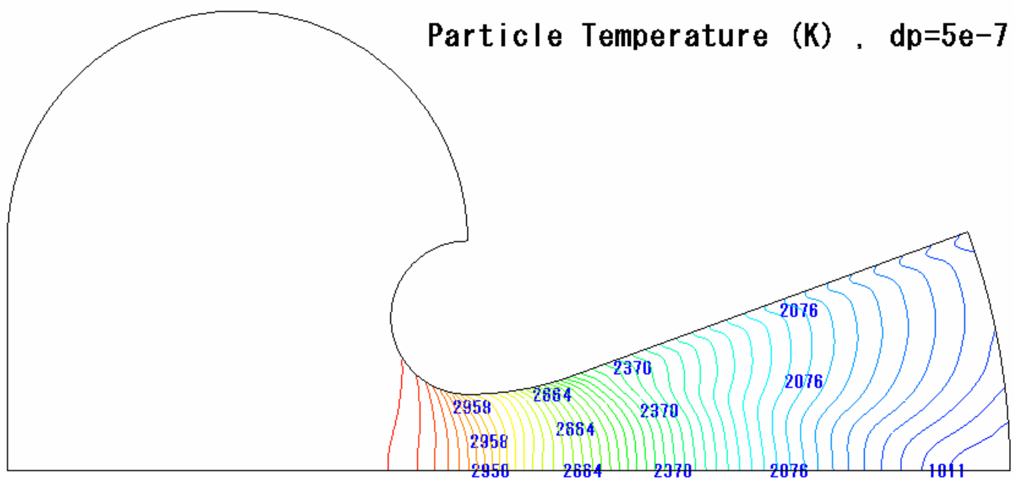
図９－３

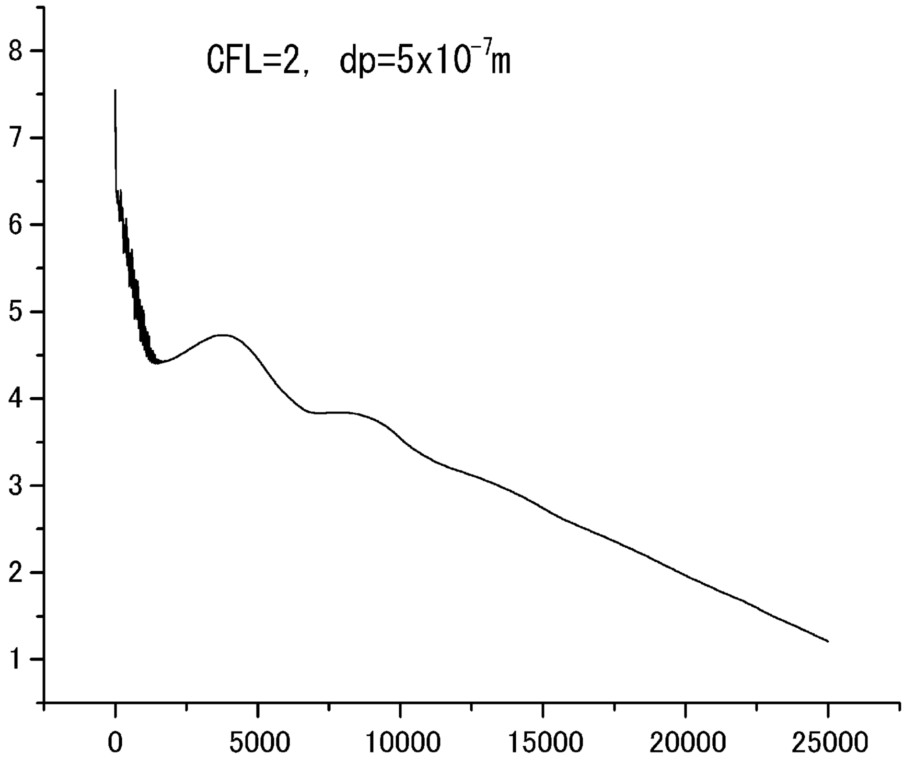
計算結果

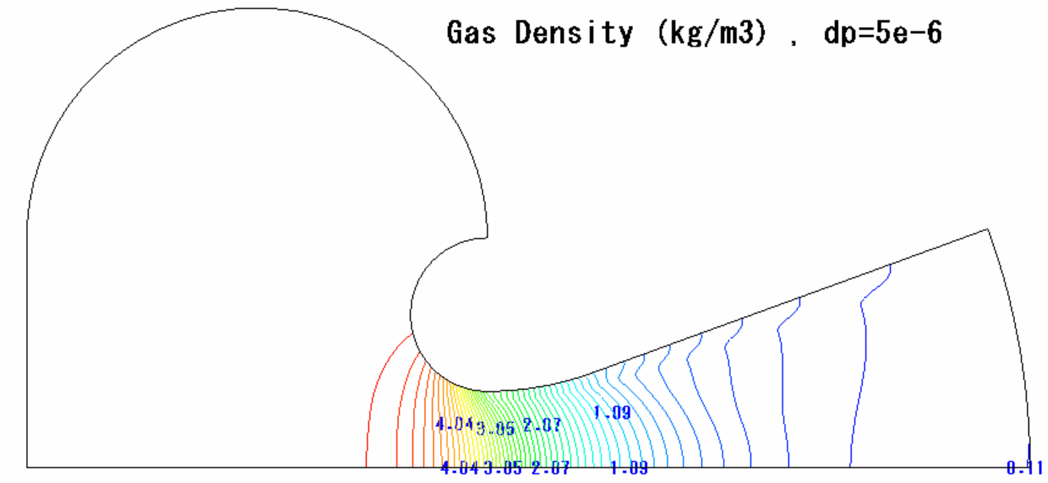

Gas Density (kg/m3) , dp=5e-7
0.19
0.19
0.19
4.13
3.15
2.16
1.18
4.13
3.15
2.16
1.18
4.13
3.15
2.16
1.18

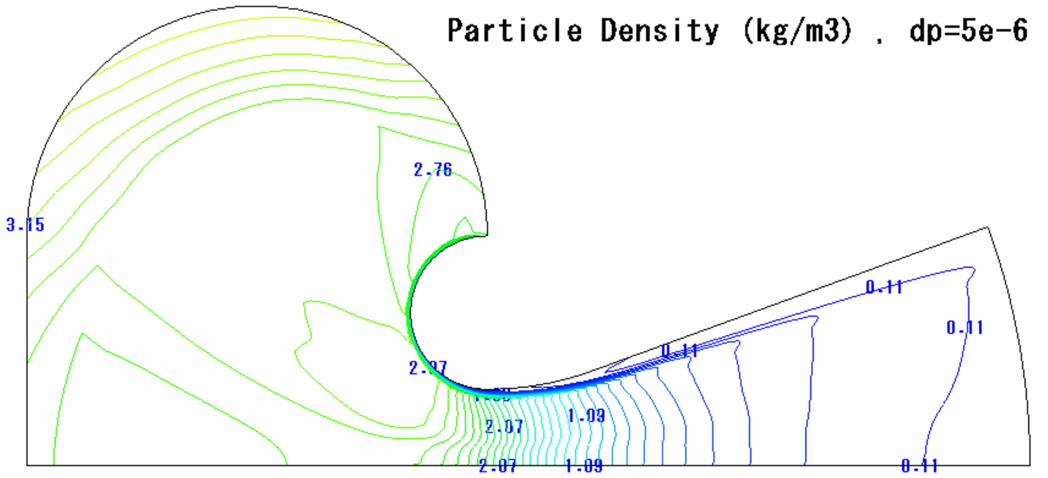

Particle Density (kg/m3) , dp=5e-7
3.34
2.85
2.06
0.10
0.10
0.10
0.10
2.06
1.08
2.06
1.08
2.06
1.08

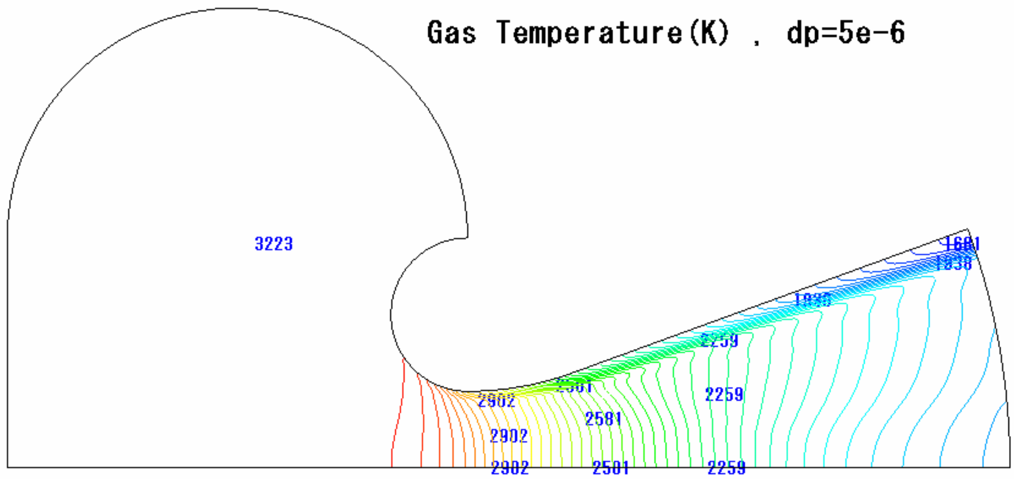

Gas Temperature (K) , dp=5e-7
2076
2370
2076
2958
2664
2370
2664
2958
2958
2664
2370
2076
1011

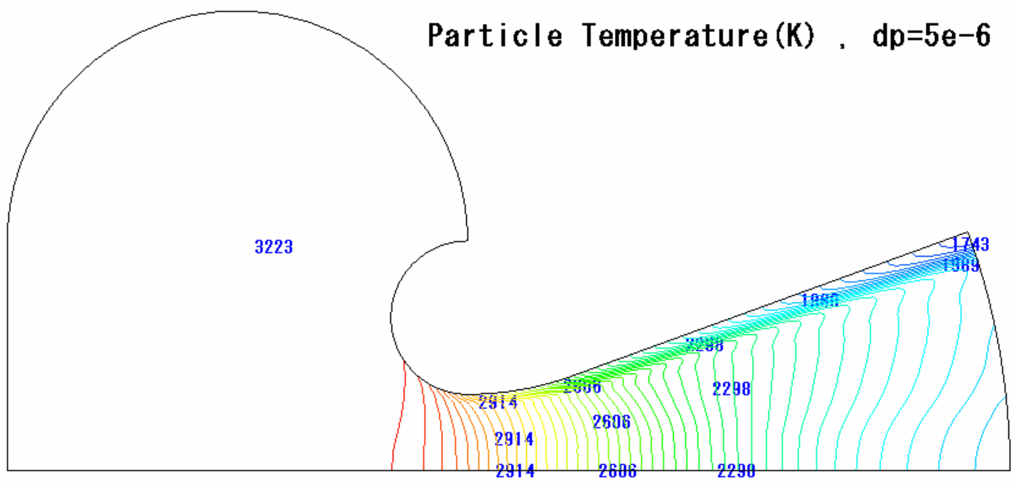

Particle Temperature (K) , dp=5e-7
2076
2370
2076
2958
2664
2370
2664
2958
2958
2664
2370
2076
1011

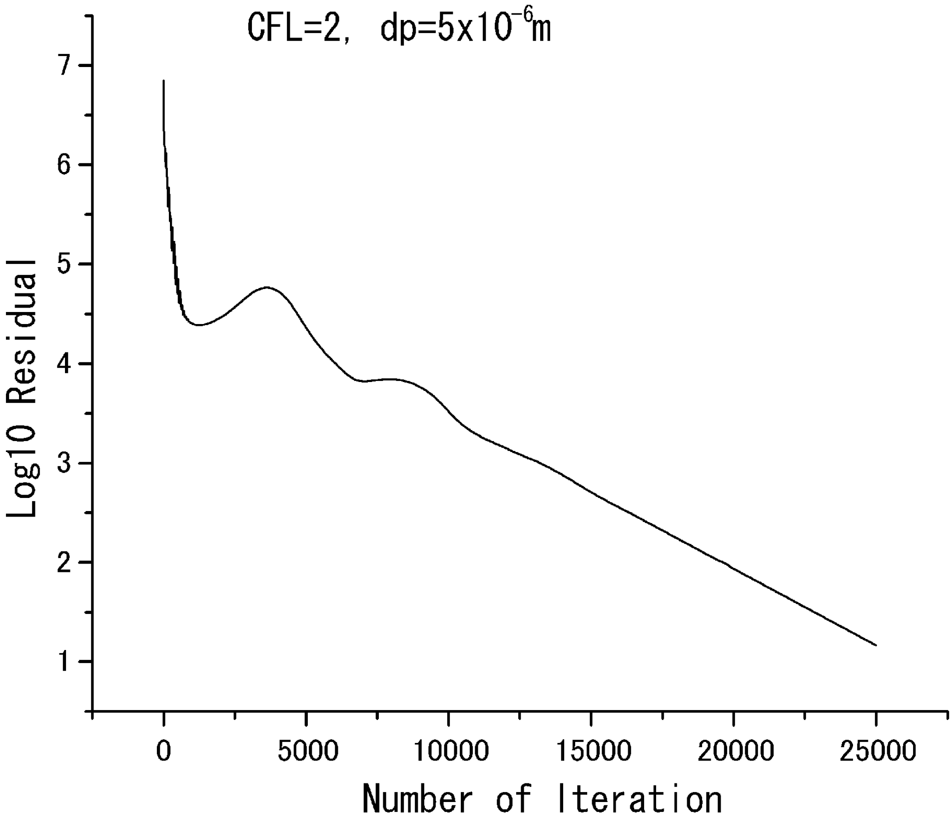

CFL=2, dp=5x10-7m
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5000
10000
15000
20000
25000


Gas Density (kg/m3) , dp=5e-6
4.04
3.05
2.07
1.09
0.11

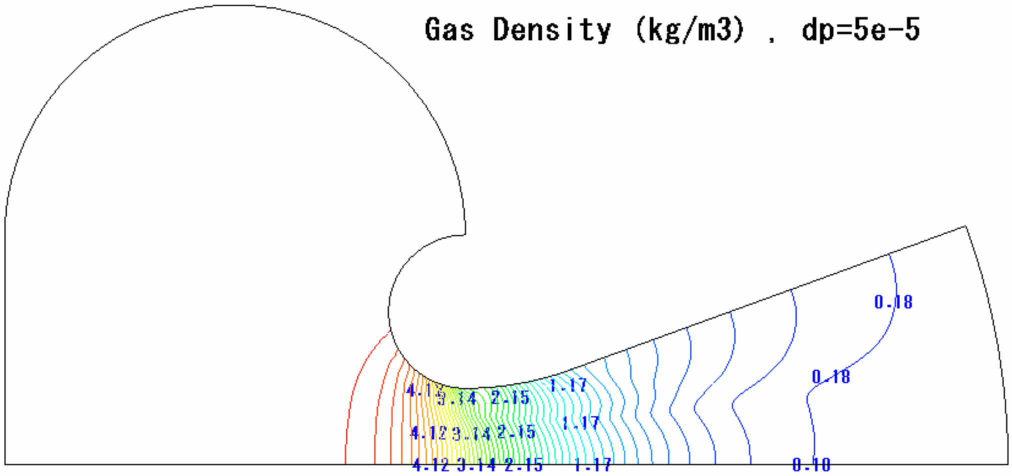

Particle Density (kg/m3) , dp=5e-6
2.76
3.15
0.11
2.07
1.09

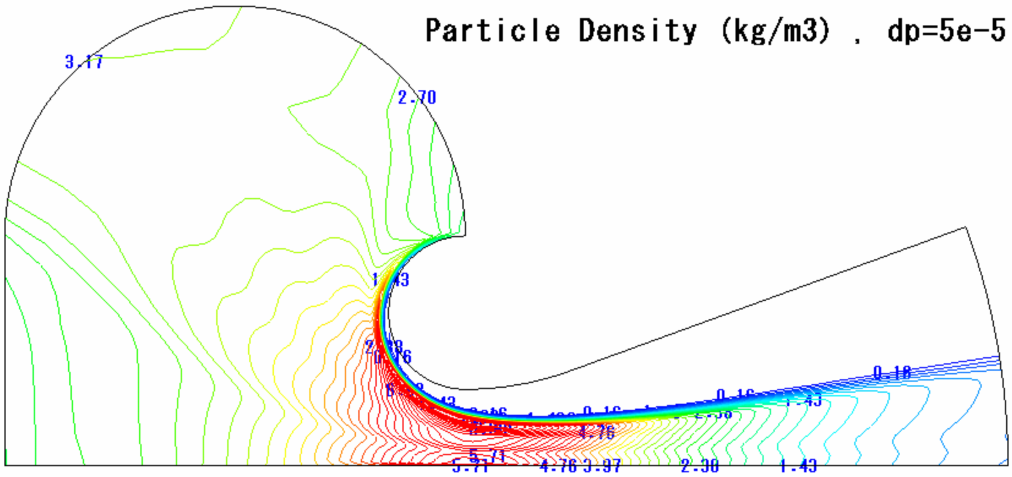

Gas Temperature(K) , dp=5e-6
3223
2902
2581
2259

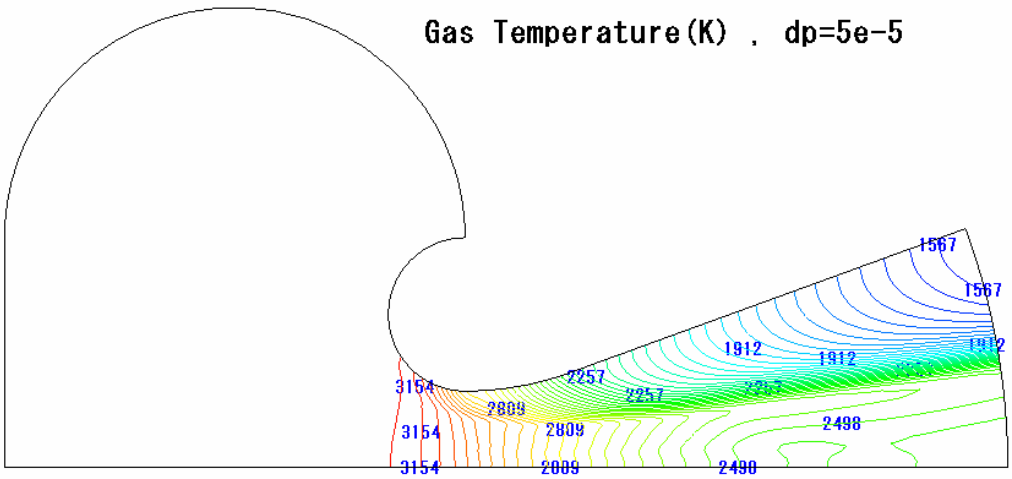

Particle Temperature(K) , dp=5e-6
3223
1743
2914
2606
2298

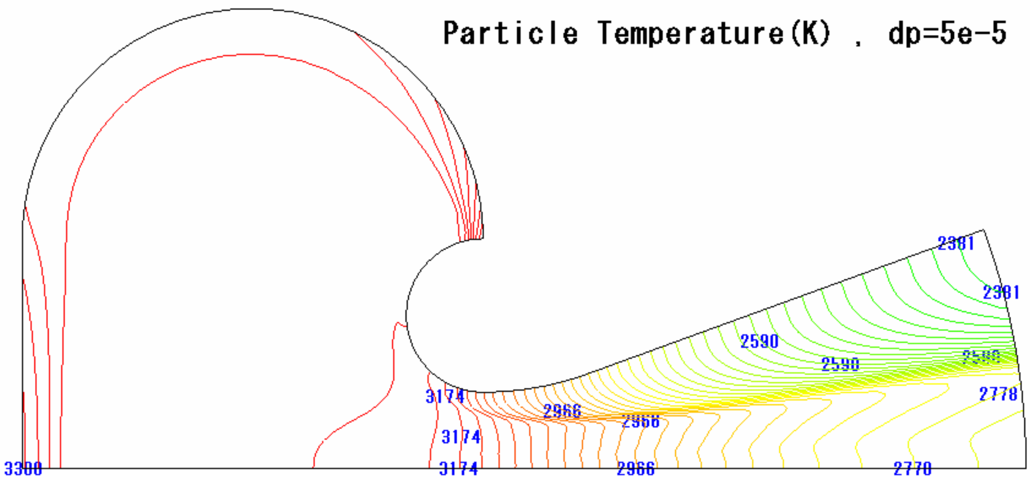


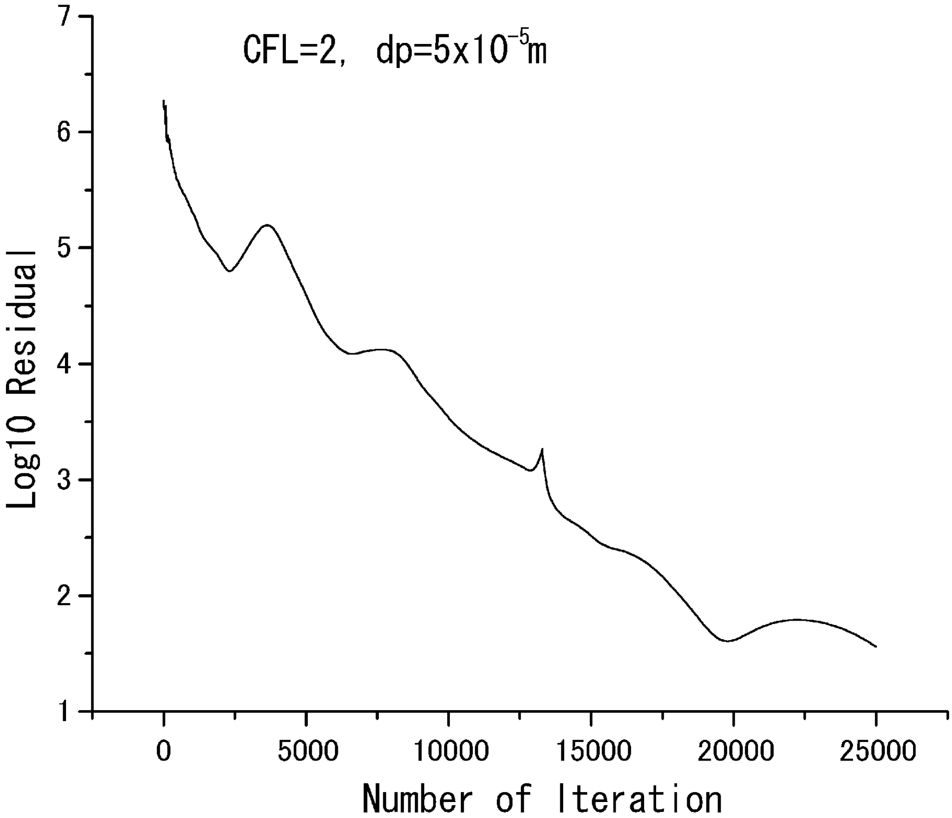
CFL=2, dp=5x10^{-6}m
Log10 Residual
Number of Iteration
1
2
3
4
5
6
7
0
5000
10000
15000
20000
25000


Gas Density (kg/m3) , dp=5e-5
0.18
0.18
0.18
1.17
1.17
1.17
2.15
2.15
2.15
3.14
3.14
3.14
4.12
4.12


Particle Density (kg/m3) , dp=5e-5
3.17
2.70
0.18
1.43
4.76
5.71
5.71
4.76
3.97
2.38
1.43


Gas Temperature(K) , dp=5e-5
1567
1567
1912
1912
1912
2257
2257
3154
2809
2809
3154
3154
2809
2498
2498


Particle Temperature(K) , dp=5e-5
2381
2381
2590
2590
2778
3174
2966
3174
3300
3174
2966
2778


CFL=2, dp=5x10^{-5}m
Log10 Residual
Number of Iteration
1
2
3
4
5
6
7
0
5000
10000
15000
20000
25000

以上