

## 8. 一次元圧縮性非粘性 希薄・分散性混相流

### 8. 1 基礎方程式系

「4. 固体ロケットモータ内の混相流の性質」で述べたようにSRM内の混相流においては、粒子間の平均距離が流れの代表長に比べて十分に小さいため、一部の大きい粒子を除けば、粒子相を連続体と見なし気相と同様に保存式を立てることができる。

ここでは、その中でも最も簡単なケースとして、粒子相を単一のグループ（粒子種、粒子系が同じ）とした場合について記述する。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ \rho_p \\ \rho_p u_p \\ \rho_p e_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \\ \rho_p u_p \\ \rho_p u_p^2 \\ \rho_p u_p e_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\rho_p}{\tau_v}(u - u_p) \\ -\frac{\rho_p c}{\tau_T}(T - T_p) - \frac{\rho_p}{\tau_v}(u - u_p)u_p \\ 0 \\ \frac{\rho_p}{\tau_v}(u - u_p) \\ \frac{\rho_p c}{\tau_T}(T - T_p) + \frac{\rho_p}{\tau_v}(u - u_p)u_p \end{bmatrix}$$

(8- 1)

#### 補足関係式

(気相)

理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (8- 2)$$

単位体積あたりの全エネルギー

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \\ &= c_v T + \frac{1}{2} u^2 \end{aligned} \quad (8- 3)$$

全エンタルピー

$$\begin{aligned} H &= e + \frac{p}{\rho} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \\ &= c_p T + \frac{1}{2} u^2 \end{aligned} \quad (8- 4)$$

(粒子)

単位体積あたりの全エネルギー

$$e_p = c T_p + \frac{1}{2} u_p^2 \quad (8-5)$$

(速度緩和時間)

$$\tau_v = \frac{4}{3} \frac{\sigma_p d_p^2}{\text{Re}_r \mu C_D} \quad (8-6)$$

抵抗係数  $C_D$  の評価式には非圧縮用のものから、圧縮性・希薄効果を考慮した式まで色々ある。例えば、

非圧縮の場合の評価式 (Putnam)

$$C_{D0} = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_r} \left( 1 + \frac{\text{Re}_r^{2/3}}{6} \right) & (\text{Re}_r < 1000) \\ 0.4392 & (1000 \leq \text{Re}_r < 300000) \end{cases} \quad (8-7)$$

圧縮性・希薄効果を含めた評価式 (Hermesen)

$$C_D = 2 + (C_{D0} - 2) \exp \left( -3.07 \sqrt{\gamma} \frac{M}{\text{Re}_r} g(\text{Re}_r) \right) + \frac{h(M)}{\sqrt{\gamma} M} \exp \left( -\frac{\text{Re}_r}{2M} \right) \quad (8-8)$$

$$g(\text{Re}_r) = \frac{1 + \text{Re}_r (12.278 + 0.548 \text{Re}_r)}{1 + 11.278 \text{Re}_r} \quad (8-9)$$

$$h(M) = \frac{5.6}{1 + M} + 1.7 \sqrt{\frac{T_p}{T}} \quad (8-10)$$

ここでのレイノルズ数とマッハ数は、相対速度  $|u - u_p|$  に基づく。

(温度緩和時間)

$$\tau_T = \frac{c \sigma_p d_p^2}{6 \text{Nu} \lambda_g} \quad (8-11)$$

ヌッセルト数としては、例えば Kavanau-Drake の圧縮性・希薄効果を考慮した

$$\text{Nu} = \frac{2 + 0.459 \text{Re}_r^{0.55} \text{Pr}^{0.33}}{1 + 3.42 \left( \frac{M}{\text{Re}_r \text{Pr}} \right) (2 + 0.459 \text{Re}_r^{0.55} \text{Pr}^{0.33})} \quad (8-12)$$

を用いる。

## 8. 2 粒子相移流項の数値流束

粒子相の保存量ベクトルは,

$$\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} \rho_p \\ \rho_p u_p \\ \rho_p e_p \end{bmatrix} \quad (8-13)$$

粒子相の移流の流束ベクトルは

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \rho_p u_p \\ \rho_p u_p^2 \\ \rho_p e_p u_p \end{bmatrix} = u_p \mathbf{q}_p \quad (8-14)$$

ここで, 流束ヤコビアン行列は,

$$\mathbf{A}_p \equiv \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{q}_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u_p^2 & 2u_p & 0 \\ -e_p u_p & e_p & u_p \end{bmatrix} \quad (8-15)$$

である.

(斉次性)

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_p &= \mathbf{A}_p d\mathbf{q}_p \\ \mathbf{F}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{q}_p \end{aligned} \quad (8-16)$$

が同時に成り立つ.

(対角化)

$\mathbf{A}_p$  の固有値は  $u_p$ ,  $u_p$ ,  $u_p$  であることが容易に分かる. 固有ベクトルは  $(0, 0, 1)$ ,  $(\frac{1}{u_p}, 1, 0)$ , 及び  $(0, 0, 0)$  となり独立な固有ベクトル系とはならない. したがって,  $\mathbf{A}_p$  を相似変換によって 対角化することができない.

(風上スキームの構築)

粒子相の情報は, その物理を考えると自明であるが, 粒子速度  $u_p$  によって伝播する. 従って, セル界面での数値流束を考える際にはこの点を踏まえた風上スキームを用いるのが良い.

セル界面の左側, 右側の物理量がそれぞれ  $(\rho_{pL} \ u_{pL} \ T_{pL})$ ,  $(\rho_{pR} \ u_{pR} \ T_{pR})$  であるとする.

左から右に通過する粒子が運ぶ情報は左側の物理量であるべき, 同様に, 右から左に通過する粒子が運ぶ情報は右側の物理量であるべきである. 従って, 流束分離 (FVS) 型の数値流束が自然である.

$$\tilde{\mathbf{F}}_p = \mathbf{F}_p^+(\mathbf{q}_{pL}) + \mathbf{F}_p^-(\mathbf{q}_{pR})$$

物理的に考えると，右行き，左行きのフラックスは，それぞれ粒子速度が正または負の場合にはそのままの値をとり，逆の場合はゼロになるから，

$$\mathbf{F}_p^\pm \equiv \mathbf{F}_p(\rho_p, u_p^\pm, T_p) \quad (8-17)$$

$$u_p^\pm \equiv \frac{1}{2}(u_p \pm |u_p|) \quad (8-18)$$

で表すことができる．あるいは， $\mathbf{F}_p = u_p \mathbf{q}_p$  であることから，次のようにも書くことができる．

$$\mathbf{F}_p^\pm = u_p^\pm \mathbf{q}_p$$

従って，数値流束は，

$$\tilde{\mathbf{F}}_p = u_{pL}^+ \mathbf{q}_{pL} + u_{pR}^- \mathbf{q}_{pR} \quad (8-19)$$

である．

### 8. 3 ソース項のヤコビアン

原始変数：  $w = [\rho \quad u \quad T \quad \rho_p \quad u_p \quad T_p]$

ソース項の原始変数に関するヤコビアン

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_p}{\tau_V} & 0 & -\frac{u-u_p}{\tau_V} & \frac{\rho_p}{\tau_V} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_p u_p}{\tau_V} & -\frac{c\rho_p}{\tau_T} & -\frac{c(T-T_p)}{\tau_T} - \frac{\tau_V(u-u_p)u_p}{\tau_V} & -\frac{\rho_p(u-2u_p)}{\tau_V} & \frac{c\rho_p}{\tau_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_p}{\tau_V} & 0 & \frac{u-u_p}{\tau_V} & -\frac{\rho_p}{\tau_V} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_p u_p}{\tau_V} & \frac{c\rho_p}{\tau_T} & \frac{c(T-T_p)}{\tau_T} + \frac{\tau_V(u-u_p)u_p}{\tau_V} & \frac{\rho_p(u-2u_p)}{\tau_V} & -\frac{c\rho_p}{\tau_T} \end{bmatrix}$$

(但し， $\tau_T, \tau_V$  の変化による寄与までは考慮しない.)

保存ベクトルの原始変数に関するヤコビアン

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{RT}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2 & \rho u & \frac{\rho R}{\gamma-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_p & \rho_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cT_p + \frac{1}{2}u_p^2 & \rho_p u_p & c\rho_p \end{bmatrix}$$

ソース項の保存変数に関するヤコビアン

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial w} \left( \frac{\partial q}{\partial w} \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{0}{\frac{\phi u}{\tau_V}} & \frac{0}{-\frac{\phi}{\tau_V}} & \frac{0}{0} & \frac{0}{-\frac{u}{\tau_V}} & \frac{0}{\frac{1}{\tau_V}} & \frac{0}{0} \\ \frac{\phi u u_p + \kappa \phi (c_v T - \frac{1}{2} u^2)}{\tau_V} & -\frac{\phi u_p + \kappa \phi u}{\tau_V} & -\frac{\kappa \phi}{\tau_T} & -\frac{u_p^2}{\tau_V} - \frac{(\kappa c_v T - \frac{1}{2} u_p^2)}{\tau_T} & -\frac{u + 2u_p}{\tau_V} - \frac{u_p}{\tau_T} & \frac{1}{\tau_T} \\ \frac{0}{-\frac{\phi u}{\tau_V}} & \frac{0}{\frac{\phi}{\tau_V}} & \frac{0}{0} & \frac{0}{\frac{u}{\tau_V}} & \frac{0}{-\frac{1}{\tau_V}} & \frac{0}{0} \\ -\frac{\phi u u_p - \kappa \phi (c_v T - \frac{1}{2} u^2)}{\tau_V} & \frac{\phi u_p - \kappa \phi u}{\tau_V} & \frac{\kappa \phi}{\tau_T} & \frac{u_p^2}{\tau_V} + \frac{(\kappa c_v T - \frac{1}{2} u_p^2)}{\tau_T} & \frac{u - 2u_p}{\tau_V} + \frac{u_p}{\tau_T} & -\frac{1}{\tau_T} \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\phi \equiv \frac{\rho_p}{\rho_g} \quad \text{及び,} \quad k \equiv \frac{c}{c_v}$$

である.

ソース項ヤコビアン行列の固有値は,  $0, 0, 0, 0, -\frac{1+\phi}{\tau_V}, -\frac{1+\kappa\phi}{\tau_T}$  である. 従って, スペクトル半径は

$$\nu_S = \max \left[ \frac{1+\phi}{\tau_V}, \frac{1+\kappa\phi}{\tau_T} \right] \quad (8-20)$$

である.

陽解法を用いる場合には,

$$\Delta t < \frac{1}{\nu_S} \quad (8-21)$$

でなければならない. 式(8-6), (8-11)から  $\tau_V$  と  $\tau_T$  は粒径  $d_p$  の自乗に比例して大きくなる.

従って粒径が小さい場合には, 速度緩和時間  $\tau_V$  と温度緩和時間  $\tau_T$  が顕著に小さくなるため, 時間ステップ  $\Delta t$  に対する制約が厳しくなる.

対流項から受ける制約に比べて, これが著しく厳しい場合も想定されるため, ソース項について陰解法を用いることが必要である.

#### 8. 4 有限体積法による離散化

準一次元流の場合について述べる. 単相流の場合と同様にして, 時間積分に LU-SGS 法を用いて定式化する. ソース項はポイントインプリシット法で計算する. 基礎式は

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial A \mathbf{q}}{\partial t} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial A \mathbf{F}}{\partial x} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} A \mathbf{S} dt \quad (8-22)$$

と表される. 次のセル平均量を導入して, 離散化する.

$i$  番目のセルの平均断面積 :

$$\bar{A}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx}{\Delta x_i} \quad (8-23)$$

ここで,  $\Delta x_i \equiv x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  である.

$i$  番目のセルでの, 保存量の (体積) 平均 :

$$\bar{\mathbf{q}}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A \mathbf{q} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} \quad (8-24)$$

$i$  番目のセルでの, ソース項の (体積) 平均 :

$$\bar{\mathbf{S}}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A \mathbf{S} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} \quad (8-25)$$

これらを用いて離散化すると, 次式を得る.

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}_i}{dt} + \frac{(\mathbf{F}A)_{i+1/2} - (\mathbf{F}A)_{i-1/2}}{\Delta x_i \bar{A}_i} = \bar{\mathbf{S}}_i \quad (8-26)$$

ソース項にポイントインプリシット法を用い, 対流項を LU-SGS 法によってインプリシット化すると, 最終的に次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{I} - \Delta t^n \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_i^n \right) \left[ \mathbf{I} - \frac{\bar{A}_{i-1}}{\left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i \nu_{\max} \right)} \frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{i-1}^n \right] \left[ \mathbf{I} + \frac{\bar{A}_{i+1}}{\left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i \nu_{\max} \right)} \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{i+1}^n \right] \Delta \bar{\mathbf{q}} \\ & = \left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i \nu_{\max} \right)^{-1} \left[ -A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2}^n + A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2}^n + \bar{A}_i \Delta x_i \bar{\mathbf{S}}_i^n \right] \end{aligned} \quad (8-27)$$

この式は, 次の 3 ステップの演算に分解される.

(第 1 ステップ)

$$\left( \mathbf{I} - \Delta t^n \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_i^n \right) \Delta \mathbf{q}_i^{**} = \left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i \nu_{\max} \right)^{-1} \left[ -A_{i+1/2} \mathbf{F}_{i+1/2}^n + A_{i-1/2} \mathbf{F}_{i-1/2}^n + \bar{A}_i \Delta x_i \bar{\mathbf{S}}_i^n \right] \quad (8-28)$$

(第 2 ステップ)

$$\Delta \mathbf{q}_i^* - \frac{\bar{A}_{i-1}}{\left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i v_{\max} \right)} \frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial \mathbf{q}} \bigg|_{i-1}^n \Delta \mathbf{q}_{i-1}^* = \Delta \mathbf{q}_i^{**} \quad (8-29)$$

(第 3 ステップ)

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_i + \frac{\bar{A}_{i+1}}{\left( \frac{Vol_i}{\Delta t^n} + \bar{A}_i v_{\max} \right)} \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial \mathbf{q}} \bigg|_{i+1}^n \Delta \bar{\mathbf{q}}_{i+1} = \Delta \mathbf{q}_i^* \quad (8-30)$$

### 8. 5 数値解析

次のような流路面積分布に対し，いくつかの例を計算し，粒子径によって混相流がどのように変化するかを確認する．以下，特に断らない限り諸量は単位系を MKS とする有次元量である．

$$A(x) = 1 + 2.2(x - 1.5)^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \quad (8-31)$$

この場合の流路半径（円を仮定）と断面積の分布を図 8－1 に示す．

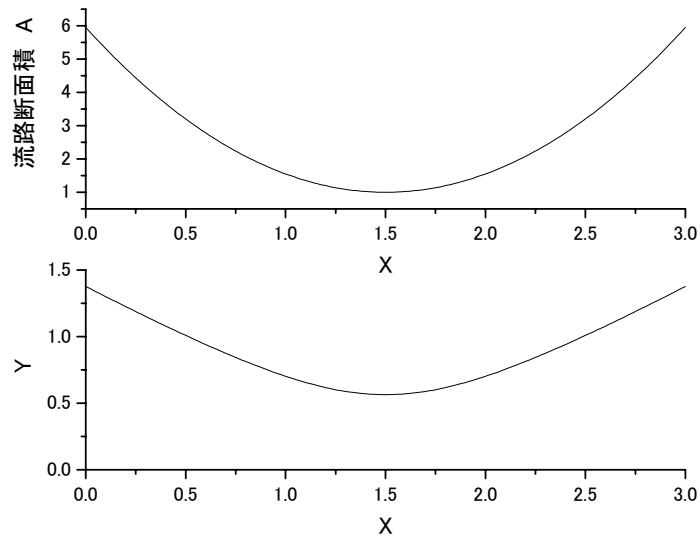


図 8－1 流路半径（下）と断面積（上）の分布

課題 8－1 : SRM 内部混相流をモデルとした設定で,  $0 \leq x \leq 4$  の範囲で, 図 8－1 のノズル流れを数値解析せよ. 気相と粒子の諸量は下記を用いよ.

上流端で温度  $T_L = 3500 \text{ K}$ , 圧力  $p_L = 5 \times 10^6 \text{ Pa}$  の超音速流入とし, 下流端では流出条件で, 背圧として,  $p_R = 1 \times 10^5$  と  $2 \times 10^6 \text{ Pa}$  の場合を調べよ.

さらに, 粒子径として 1 ミクロン～1 ミリまで変化させ, 粒子相と気相との流れの様相の変化を調べよ. 平衡流と凍結流の両極端を議論し, それぞれ気相のみの時と比較すること.

気相の平均分子量	$\tilde{M}_g$	20.33	g/mole
気相の比熱比	$\gamma$	1.211	
気相の定積比熱	$c_v$	1938	J/kg-K
気相の粘性係数	$\mu$	$7 \times 10^{-5}$	Pa-s
気相のプラントル数	$\text{Pr}$	$\frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$	
気相の熱伝導係数	$\lambda_g$		
アルミナ粒子の直径	$d_p$	$10^{-6} \sim 10^{-3}$	m
アルミナの真密度	$\sigma_p$	3204	kg/m <sup>3</sup>
アルミナの比熱	$c$	1380	J/kg-K
アルミナ粒子の負荷率	$\phi \equiv \rho_p / \rho_g$	0.40	

(参考) 平衡混相流の場合,

$$\gamma_{eff} = \frac{\gamma + \phi\beta}{1 + \phi\beta}$$

$$R_{eff} = \frac{1}{1 + \phi} R \quad \text{または,} \quad \tilde{M}_{g_{eff}} = (1 + \phi)\tilde{M}_g$$

ここでの例では,

$$\beta = \frac{c}{c_v} = 0.712074$$

であるから,

$$\gamma_{eff} = 1.164224,$$

$$\tilde{M}_{g_{eff}} = 28.462 \text{ g/mole}$$

と計算される.

以上