

## 9. 多次元圧縮性非粘性流れの数値解析（二次元軸対称/物体適合構造格子）

ここでは，一般的な物体適合構造格子を用いた，二次元軸対称流れの CFD 解析について述べる．

### 9. 1 基礎方程式

二次元軸対称圧縮性非粘性流れの流体力学方程式系（軸対称圧縮性 Euler 方程式系）は，前節の式 (8-10) で表される．繰り返して表示すると

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r\rho \\ r\rho u \\ r\rho v \\ rE \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} r\rho u \\ r(\rho u^2 + p) \\ r\rho vu \\ r\rho uH \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} r\rho v \\ r\rho uv \\ r(\rho v^2 + p) \\ r\rho vH \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}$$

(9-1)

ここで， $(u, v)$  は速度の  $(x, r)$  成分である．また，単位体積当たりの全エネルギー  $E$  及び，（単位質量当たりの）全エンタルピー  $H$  は

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$$

$$H = \frac{E + p}{\rho}$$

(9-2)

で表される．

### 9. 2 有限体積法による離散化

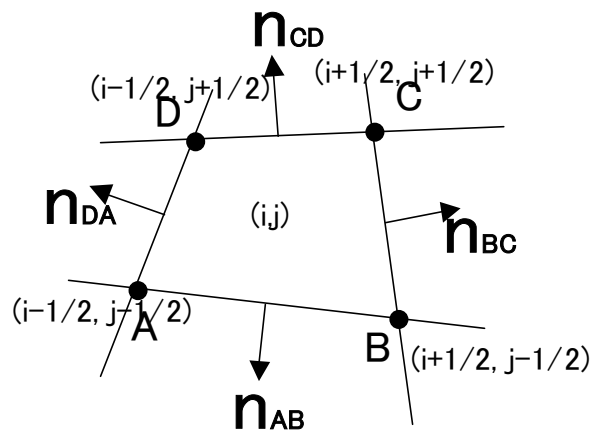


図 9 - 1

有限体積法を適用するにあたり，図 9 - 1 に示す点 A, B, C, D で囲まれる四角形セル  $(i, j)$  を考え，このセルの面積  $V_{i,j}$  に亘り式 (9-1) を積分する．

$$\iint_{V_{i,j}} \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right) dx dr = \iint_{V_{i,j}} \mathbf{S} dx dr \quad (9-3)$$

左辺を時間変動項と対流項の和に分割し，さらに対流項の体積積分を Gauss-Green の公式 (Gauss の発散定理 etc.) を用いてセルを取り囲む境界  $\partial V_{i,j}$  上の一周積分に変換する．

$$\iint_{V_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dx dr + \oint_{\partial V_{i,j}} (n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F}) ds = \iint_{V_{i,j}} \mathbf{S} dx dr \quad (9-4)$$

ここで， $ds$  は境界  $\partial V_{i,j}$  に沿う座標で，内部の領域を左に見る方向に正方向を定める． $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_r)$  は境界の外向き単位法線ベクトルであり， $n_x, n_r$  は  $(x, r)$  成分である．境界  $\partial V_{i,j}$  は図 9-1 に示すように，点  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  に沿って 4 つの線分から成り，4 頂点の座標が与えられれば，4 つの線分の外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_{AB}$ ， $\mathbf{n}_{BC}$ ， $\mathbf{n}_{CD}$ ， $\mathbf{n}_{DA}$  が定まる．例えば，

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{AB} &\equiv \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A \\ \Delta \mathbf{r}_{AB} &\equiv \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \end{aligned} \quad (9-5)$$

と定義し，線分 AB の長さを  $|AB|$  で表すと， $\mathbf{n}_{AB}$  は次の外積で計算される．

$$\mathbf{n}_{AB} = \left( \frac{\Delta x_{AB}}{|AB|}, \frac{\Delta r_{AB}}{|AB|}, 0 \right) \times (0, 0, 1) = \left( \frac{\Delta r_{AB}}{|AB|}, -\frac{\Delta x_{AB}}{|AB|}, 0 \right) \quad (9-6)$$

他の 3 つについても同様である．

さて，時間変動項とソース項を離散化するために，次の平均を定義する．

$$\bar{\mathbf{q}}_{i,j} \equiv \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{q} dx dr}{\iint_{V_{i,j}} r dx dr} = \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{q} dx dr}{Vol_{i,j}} \quad (9-7)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{i,j} \equiv \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{S} dx dr}{\iint_{V_{i,j}} dx dr} = \frac{\iint_{V_{i,j}} \mathbf{S} dx dr}{Area_{i,j}} \quad (9-8)$$

ここで， $Area_{i,j}$  と  $Vol_{i,j}$  は以下で計算される．

$$\begin{aligned}
 Area_{i,j} &= Area_{\Delta ABD} + Area_{\Delta BCD} \\
 Area_{\Delta ABD} &= \frac{1}{2} \{ x_A (r_B - r_D) + x_B (r_D - r_A) + x_D (r_A - r_B) \} \\
 Area_{\Delta BCD} &= \frac{1}{2} \{ x_B (r_C - r_D) + x_C (r_D - r_B) + x_D (r_B - r_C) \}
 \end{aligned} \tag{9-9}$$

$$\begin{aligned}
 Vol_{i,j} &\equiv \iiint_{V_{i,j}} r \, dx \, dr \\
 &= \iiint_{\Delta ABD} r \, dx \, dr + \iiint_{\Delta BCD} r \, dx \, dr \\
 &= \frac{r_A + r_B + r_D}{3} Area_{\Delta ABD} + \frac{r_B + r_C + r_D}{3} Area_{\Delta BCD}
 \end{aligned} \tag{9-10}$$

式(9-4)に式(9-7), (9-8)を代入して,

$$Vol_{i,j} \frac{d \bar{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + \oint_{\partial V_{i,j}} (n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F}) ds = Area_{i,j} \bar{\mathbf{S}}_{i,j} \tag{9-11}$$

次に対流項に目を移すと,

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r \begin{bmatrix} \rho(n_x u + n_r v) \\ \rho u (n_x u + n_r v) + n_x p \\ \rho v (n_x u + n_r v) + n_r p \\ \rho H (n_x u + n_r v) \end{bmatrix} \tag{9-12}$$

と表される. 速度を境界面に垂直な成分  $u_n$  と平行な成分  $u_t$  の直交二成分で表すと,

( $x, r$ ) 成分との間には次の関係がある.

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_r \\ -n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{9-13}$$

または反転させて,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_r \\ n_r & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix} \tag{9-14}$$

式(9-14)を式(9-12)に代入して, ( $u_n, u_t$ )を用いて整理する.

$$\begin{aligned}
 &n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} \\
 &= r \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n + n_x p \\ \rho v u_n + n_r p \\ \rho u_n H \end{bmatrix} \\
 &= r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho u_n H \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9-15}$$

対流項の和の式(9-15)を改めて次のように表す.

$$n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F} = r \mathbf{T} \mathbf{G} \quad (9-16)$$

ここで

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_r & 0 \\ 0 & n_r & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-17)$$

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_t u_n \\ \rho u_n H \end{bmatrix} \quad (9-18)$$

で定義される. これらを用いて式(9-11)を書き換えると,

$$Vol_{i,j} \frac{d \bar{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + \oint_{\partial V_{i,j}} r \mathbf{T} \mathbf{G} ds = Area_{i,j} \bar{\mathbf{S}}_{i,j} \quad (9-19)$$

次に対流項の線積分を具体的に表す.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_{i,j}} r \mathbf{T} \mathbf{G} ds &= \int_A^B r \mathbf{T} \mathbf{G} ds + \int_B^C r \mathbf{T} \mathbf{G} ds + \int_C^D r \mathbf{T} \mathbf{G} ds + \int_D^A r \mathbf{T} \mathbf{G} ds \\ &= T_{AB} \int_A^B r \mathbf{G} ds + T_{BC} \int_B^C r \mathbf{G} ds + T_{CD} \int_C^D r \mathbf{G} ds + T_{DA} \int_D^A r \mathbf{G} ds \end{aligned} \quad (9-20)$$

さらに, 次の平均量を導入する.

$$\bar{\mathbf{G}} \equiv \frac{\int r \mathbf{G} ds}{\int r ds} \quad (9-21)$$

$$\bar{r} \equiv \frac{\int r ds}{\int ds} = \frac{\int r ds}{\Delta s} \quad (9-22)$$

これらを用いて式(9-20)を書き換えると,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_{i,j}} r \mathbf{T} \mathbf{G} ds &= \Delta s_{AB} \bar{r}_{AB} \mathbf{T}_{AB} \bar{\mathbf{G}}_{AB} + \Delta s_{BC} \bar{r}_{BC} \mathbf{T}_{BC} \bar{\mathbf{G}}_{BC} \\ &\quad + \Delta s_{CD} \bar{r}_{CD} \mathbf{T}_{CD} \bar{\mathbf{G}}_{CD} + \Delta s_{DA} \bar{r}_{DA} \mathbf{T}_{DA} \bar{\mathbf{G}}_{DA} \end{aligned} \quad (9-23)$$

式(9-23)を用いて式(9-19)を書き換え整理して表すと次式を得る.

$$Vol_{i,j} \frac{d \bar{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + \sum_{k=1}^4 \Delta s_k \bar{r}_k \mathbf{T}_k \bar{\mathbf{G}}_k = Area_{i,j} \bar{\mathbf{S}}_{i,j} \quad (9-24)$$

ここで,  $k = 1, 2, 3, 4$  はそれぞれ線分 AB, BC, CD, DE を表す.

構造格子の場合，外向き単位法線ベクトルを用いないで， $i$  方向の単位法線ベクトル， $j$  方向の単位法線ベクトルを用いるのも便利である．この場合，式(9-24)は次のように書き換わる．

$$\begin{aligned} Vol_{i,j} \frac{d\bar{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + (\Delta s \bar{\mathbf{r}} \mathbf{T}' \bar{\mathbf{G}}')_{i+1/2,j} - (\Delta s \bar{\mathbf{r}} \mathbf{T}' \bar{\mathbf{G}}')_{i-1/2,j} \\ + (\Delta s \bar{\mathbf{r}} \mathbf{T}' \bar{\mathbf{G}}')_{i,j+1/2} - (\Delta s \bar{\mathbf{r}} \mathbf{T}' \bar{\mathbf{G}}')_{i,j-1/2} = Area_{i,j} \bar{\mathbf{S}}_{i,j} \end{aligned} \quad (9-25)$$

但しここで $\mathbf{T}, \bar{\mathbf{G}}$ に'をつけたのは，各セル境界で用いる単位法線ベクトルが，境界の種類に応じて $i$  方向または $j$  方向に正とするためである．このことに注意して式(9-24)と比較すること．

さて式(9-25)は，二次元軸対称デカルト座標の場合の式(8-19)に相当する．ここで対流項流束ベクトル $\mathbf{G}$ はセル境界での外向き法線方向に変換されていることが特徴である．但し，形式的には二次元対流項流束ベクトルの速度成分を読み替えるだけであることに注意する．従って，流束ヤコビアンやそれらの固有値などは二次元の場合に求めたものを使うことができる．この流束ベクトルは数値流束が定まった後，行列 $\mathbf{T}$ によって再変換され， $(x,r)$  方向の運動量を与えることになる．

時間積分に LU-SGS 法 を用いる場合もデカルト座標の場合とほとんど同じように導出することができる．対流項のヤコビアン行列は式(9-16)より前節，前々節で用いた $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ （式(7-6)，(7-7)）の線型結合により得られ，また別の見方をすれば， $\mathbf{A}$  における $(u,v)$ を $(u_n, u_t)$ と読み替えた $\hat{\mathbf{A}} \equiv \partial \mathbf{G} / \partial \tilde{\mathbf{q}}^*$ を用いて表すことができる．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &\equiv \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{q}^*} \\ &\equiv \frac{\partial (n_x \mathbf{E} + n_r \mathbf{F})}{\partial \mathbf{q}^*} \\ &= r \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}^*} \\ &= r \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial \mathbf{q}^*} \\ &= r \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*} \mathbf{T}^{-1} \\ &= r \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{T}^{-1} \\ &= r \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{2}(u_n^2 + u_t^2) - u_n^2 & (3 - \gamma)u_n & -\tilde{\gamma}u_t & \tilde{\gamma} \\ -u_n u_t & u_t & u_n & 0 \\ \frac{1}{2}u_n \{-2H + \tilde{\gamma}(u_n^2 + u_t^2)\} & H - \tilde{\gamma}u_n^2 & -\tilde{\gamma}u_n u_t & \gamma u_n \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (9-26)$$

但し,

$$\mathbf{q}^* = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E)^T, \quad (9-27)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = (\rho \quad \rho u_n \quad \rho u_t \quad E)^T \quad (9-28)$$

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{2}(u_n^2 + u_t^2) - u_n^2 & (3 - \gamma)u_n & -\tilde{\gamma}u_t & \tilde{\gamma} \\ -u_n u_t & u_t & u_n & 0 \\ \frac{1}{2}u_n \{-2H + \tilde{\gamma}(u_n^2 + u_t^2)\} & H - \tilde{\gamma}u_n^2 & -\tilde{\gamma}u_n u_t & \gamma u_n \end{pmatrix} \quad (9-29)$$

である.

$\tilde{\mathbf{A}}$  の固有値  $\tilde{\lambda}_k$  は,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda} \mathbf{I} &= r \mathbf{T} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{T}^{-1} - \tilde{\lambda} \mathbf{I} \\ &= r \mathbf{T} (\hat{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{T}^{-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9-30)$$

より,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= r \lambda \\ &= r u_n, \quad r u_n, \quad r(u_n - a), \quad r(u_n + a) \end{aligned} \quad (9-31)$$

である. また, 右/左のヤコビアンは, 前と同様に

$$\tilde{\mathbf{A}}^\pm \equiv \frac{\tilde{\mathbf{A}} \pm \nu \mathbf{I}}{2} \quad (9-32)$$

で定義され, スペクトル半径  $\nu$  は

$$\nu \equiv r(|u_n| + a) \quad (9-33)$$

である.

LU-SGS 法として以下の2ステップが導かれる. 但しここでは混乱を避けるために,  $i$  方向の  $\tilde{\mathbf{A}}^\pm$  を  $\mathbf{A}^\pm$  と表し,  $j$  方向の  $\tilde{\mathbf{A}}^\pm$  を  $\mathbf{B}^\pm$  と表す. それに応じたスペクトル半径を,  $\nu_A, \nu_B$  と表す. 同様に  $i$  方向の  $\Delta s$  を  $\Delta s_I$ ,  $j$  方向のそれを  $\Delta s_J$  と表す.

(第1ステップ)

$$\left( \mathbf{I} - \frac{\Delta t \text{Area}_{i,j}}{\text{Vol}_{i,j} \alpha_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}^*} \right) \Delta \mathbf{q}'_{i,j} - \frac{\Delta t}{\text{Vol}_{i,j} \alpha_{i,j}} \{ (\Delta s_I \mathbf{A}^+)_{i-1,j} \Delta \mathbf{q}'_{i-1,j} + (\Delta s_J \mathbf{B}^+)_{i,j-1} \Delta \mathbf{q}'_{i,j-1} \} = \mathbf{RHS}_{i,j} \quad (9-34)$$

但し,

$$\alpha_{i,j} \equiv 1 + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} \{ (\Delta s_I v_A)_{i,j} + (\Delta s_J v_B)_{i,j} \} \quad (9-35)$$

$$RHS_{i,j} \equiv \frac{\Delta t}{Vol_{i,j} \alpha_{i,j}} \left[ - \sum_{k=1}^4 \Delta s_k \bar{r}_k \mathbf{T}_k \bar{\mathbf{G}}_k + Area_{i,j} \bar{\mathbf{S}}_{i,j}^n \right] \quad (9-36)$$

(第2ステップ)

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_{i,j} + \frac{\Delta t}{Vol_{i,j} \alpha_{i,j}} \{ (\Delta s_I \mathbf{A}^-)_{i+1,j} \Delta \bar{\mathbf{q}}_{i+1,j} + (\Delta s_J \mathbf{B}^-)_{i,j+1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_{i,j+1} \} = \Delta \mathbf{q}'_{i,j} \quad (9-37)$$

それぞれ, 境界外部では未知数をゼロと仮定(陽的境界条件)しておく.

第1ステップは, 前進方向の代入後,  $\Delta q^{(3)}$  を

$$\Delta q^{(3)} \leftarrow \frac{\Delta q^{(3)} + \beta \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \Delta q^{(1)} - u \Delta q^{(2)} + \Delta q^{(4)} \right)}{1 + \beta v} \quad (9-38)$$

と置き換えることにより完了する. 但し,

$$\beta \equiv \frac{(\gamma - 1) \Delta t Area_{i,j}}{Vol_{i,j} \alpha_{i,j}} \quad (9-39)$$

である.

第2ステップに対しては後退方向の逐次代入によって, 未知数を求めることができる.

#### 計算例 : ロケットモータ内の軸対称流れの計算

ここでは, 図 9-2 のような簡単なチャンバー/推進薬面とノズルの形状を想定し, 上記の方法で離散化して数値解析する. 図にあるように, AB は中心軸, BC は流出面, CD はノズル内固体表面, AD は推進薬表面である.

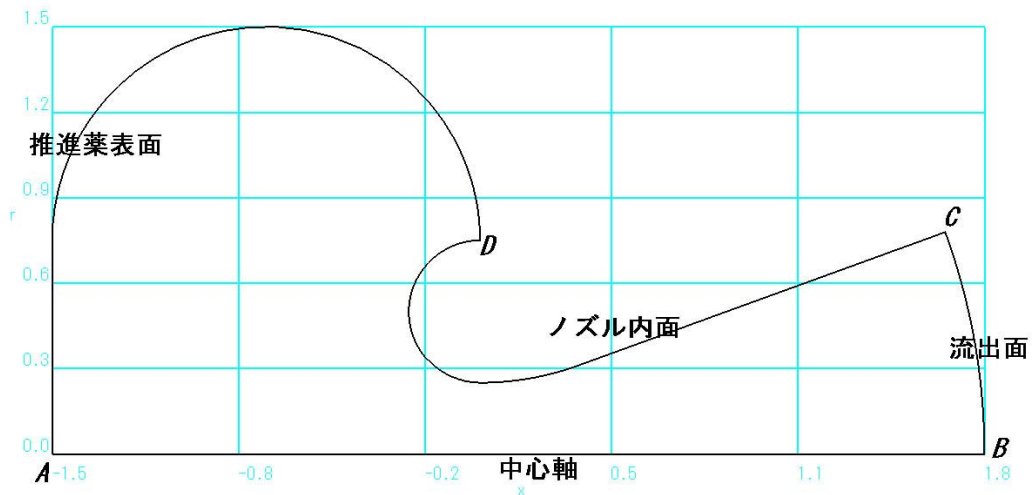


図 9 - 2

それぞれの境界での境界条件は、

中心軸：軸対称条件

流出面：超音速流出条件

ノズル内面：固体壁（すべり壁）条件

推進薬表面：湧き出し条件

を与える。

推進薬特性は、

推進薬密度  $\rho_p = 1.82 \text{ g/cm}^3$

線燃速  $r_b = \frac{9.2}{(4.9 \times 10^6)^{0.4}} p_c^{0.4} \text{ mm/s}$

燃焼温度  $T_c = 3500\text{K}$ .

燃焼圧力  $p_c = 5 \text{ MPa}$ ,

燃焼ガス比熱比  $\gamma = 1.165$ , 同平均分子量  $\tilde{M} = 29.66 \text{ g/mol}$

とする。

定常解への収束を加速させるために、初期状態を適切に選定し、次に説明するローカルタイムステップを用いる。

### ローカルタイムステップ

非定常計算に用いるタイムステップは空間的には一様な時間幅でなければならないため、最も制約の厳しい場所を見つけ、そこで局所的に許容される時間積分幅を全体のタイムステップとして採用した。これをグローバルタイムステップと呼ぶ。対流項による計算の安定性を考える場合 CFL 条件を満たさなければならないが、例えば本問題のように亜音速から超音速までという具合に流速の格差が大きい場合には、超音速部分でタイムステップが制限され、亜音速領域における時間変化がすすまないということが起きる。

もし、興味の対象が定常解だけである場合には、このことは著しく非効率な状況を生み出す。それを解消するための一つの手段としては、時間発展の物理的妥当性は無視し、局所の安定条件だけを満たしながら、局所的に取り得るだけ時間を進めるのが効果的である。このようにしても、定常解が得られれば、同じ解に行き着く。このような収束加速法をローカルタイムステップ法と呼ぶ。ここでは、次ぎのような方法で、タイムステップを定める。

$$\Delta t_{i,j} = CFL \times \frac{Vol_{i,j}}{\oint_{\partial V_{i,j}} r(|u_n| + a) ds} \quad (9-40)$$



### 計算格子

例えば図 9-3 に示すような格子を用いる. この格子は,  $i$  方向に 101 点,  $j$  方向に 54 点とし, 楕円型偏微分方程式を用いて生成した.

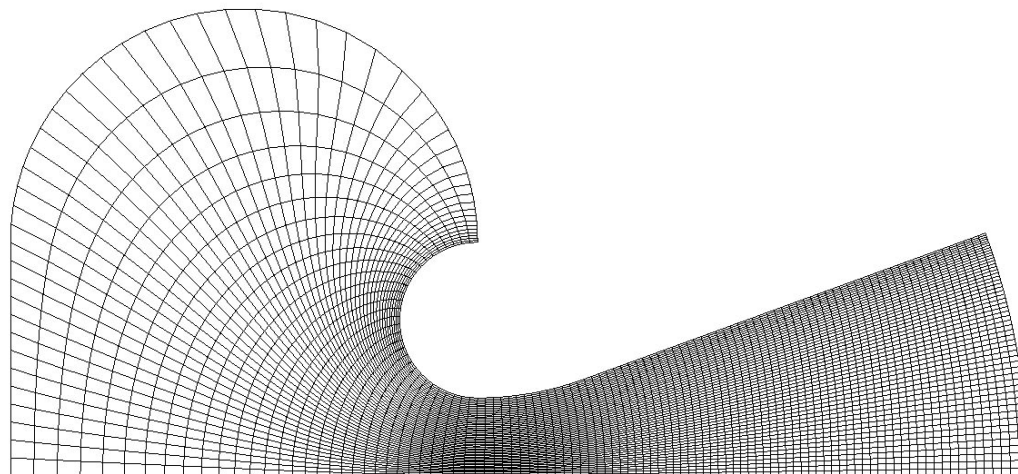


図 9-3

### 計算結果

得られた収束解を図 9-4 に, 残差の履歴を図 9-5 に示す. 初期状態としては, 雰囲気 (1 気圧を仮定し, 気体定数や比熱比は燃焼ガスの値を用いる.) の状態をチャンバー内に一様に与えるケースと,  $i$  =一定の面の面積比で準 1 次元性を仮定して設定するケースの 2 ケースを考える. 結果から述べると, 両者は同じ定常解に行き着くが, 収束の仕方がかなり異なる. 後者のようにすると, 速やかに収束解が得られる.

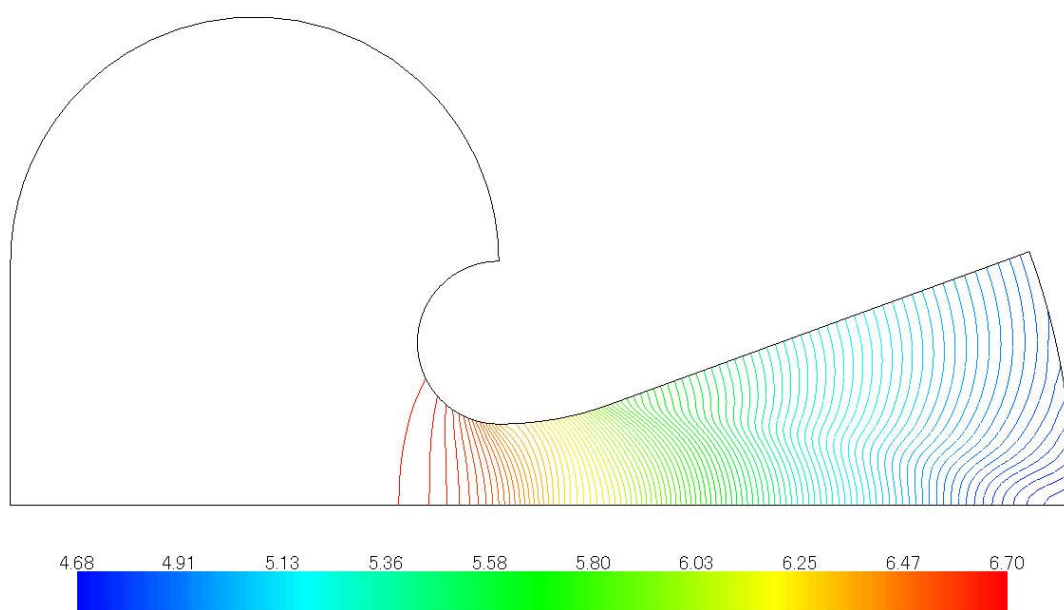


図 9-4 a) 定常解 : 圧力分布 (Log10 N)

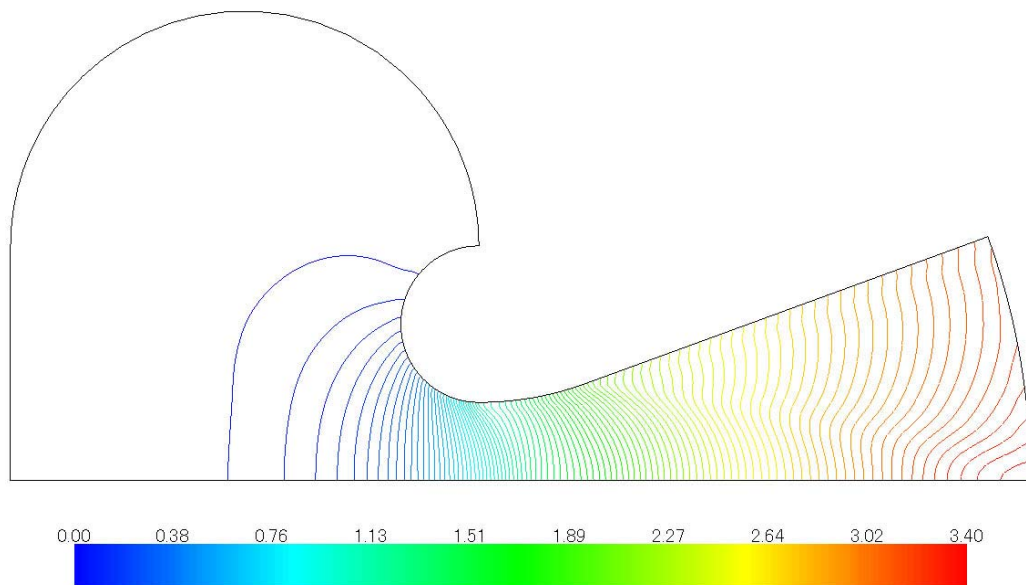


図 9 - 4 b) 定常解： マッハ数分布

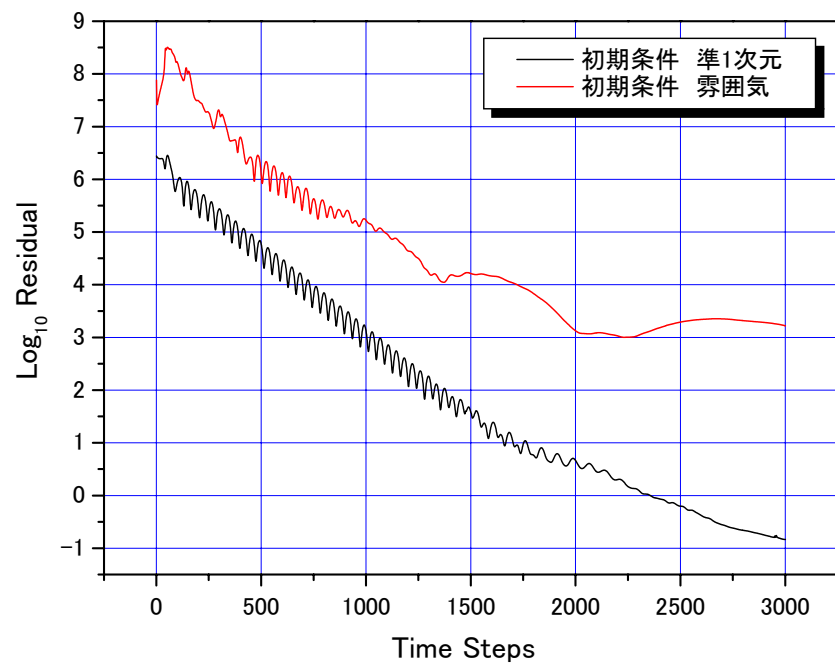


図 9 - 5 残差の履歴（初期条件による相違，CFL=3.0 共通）

以上