7. 多次元圧縮性非粘性流れの数値解析（その１）

ここでは，多次元流れのCFD解析について述べる．但し，（その１）では，二次元直交カーテジアン座標を用いてメッシュ分割された格子系を使う．８章では，同じ格子系で軸対称流れを扱う．その後，9章では（その２）とし，一般曲線座標を用いてメッシュ分割した物体適合格子系(Body-Fitted Coordinate)でのCFD解析について述べる．

ここではカーテジアン座標での解析に適切な問題として，ロケットプルームを取り上げる．

7.1　基礎方程式

二次元圧縮性非粘性流れの流体力学方程式系(二次元圧縮性Euler方程式系)は，ベクトル表示で以下のように表される．

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}=0$$
$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho vu\\ \rho uH\end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vH\end{bmatrix} \tag{7-1}$$

ここで，(u,v)は速度の(x,y)成分である．また，単位体積当たりの全エネルギーE及び，（単位質量当たりの）全エンタルピーHは

$$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho}{2}\left(u^2+v^2\right)$$
$$H=\frac{E+p}{\rho} \tag{7-2}$$

で表される．

二次元の場合，対流項流束は，x軸に垂直な面を通過する流束$\mathbf{E}$と，y軸に垂直な面を通過する流束$\mathbf{F}$の，二つのベクトルによって与えられる．

対流項流束ヤコビアンは一次元の時と同様の方法で求めることができる．即ち，原始変数ベクトルを

$$\mathbf{w}\equiv[\rho \quad u \quad v \quad p]^T \tag{7-3}$$

で定義し，

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}=\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{w}}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{w}}\right)^{-1} \tag{7-4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{w}} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{w}} \right)^{-1} \tag{7-5}$$

により計算する．また，これらのヤコビアン行列の要素は，やはり一次元のときと同じように，速度成分(u,v)及び総エンタルピーHのみによって表される．そうして次の結果を得る．

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2+v^2)\tilde{\gamma} - u^2 & u(3-\gamma) & -v\tilde{\gamma} & \tilde{\gamma} \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{1}{2}u\left\{-2H + (u^2+v^2)\tilde{\gamma}\right\} & H - u^2\tilde{\gamma} & -uv\tilde{\gamma} & u\gamma \end{pmatrix} \tag{7-6}$$

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2+v^2)\tilde{\gamma} - v^2 & -u\tilde{\gamma} & v(3-\gamma) & \tilde{\gamma} \\ \frac{1}{2}v\left\{-2H + (u^2+v^2)\tilde{\gamma}\right\} & -uv\tilde{\gamma} & H - v^2\tilde{\gamma} & v\gamma \end{pmatrix} \tag{7-7}$$

ただし，

$$\tilde{\gamma} \equiv \gamma - 1 \tag{7-8}$$

である．また，これらのヤコビアン行列の固有値は，$\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}$に対して，

$$\lambda_{\mathbf{A}\,k=1,\cdots,4} = u, u, u-a, u+a \tag{7-9}$$

並びに，$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$に対して，

$$\lambda_{\mathbf{B}\,k=1,\cdots,4} = v, v, v-a, v+a \tag{7-10}$$

とそれぞれ求められる．

また，1次元の場合と同様にして，相似変換が成立する．

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}_\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} \tag{7-11}$$

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}_\mathbf{B}\mathbf{Y}^{-1} \tag{7-12}$$

ここで，

$$\mathbf{\Lambda}_\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+a \end{bmatrix} \tag{7-13}$$

$$\mathbf{\Lambda}_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v+a \end{bmatrix} \tag{7-14}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u & u-a & u+a \\ 1 & v & v & v \\ v & \frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right) & H-au & H+au \end{bmatrix} \tag{7-15}$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{\tilde{\gamma}}{2a^2} \begin{bmatrix} -\dfrac{2a^2 v}{\tilde{\gamma}} & 0 & \dfrac{2a^2}{\tilde{\gamma}} & 0 \\ -2H+\dfrac{4a^2}{\tilde{\gamma}} & 2u & 2v & -2 \\ H+\dfrac{a(u-a)}{\tilde{\gamma}} & -u-\dfrac{a}{\tilde{\gamma}} & -v & 1 \\ H-\dfrac{a(u+a)}{\tilde{\gamma}} & -u+\dfrac{a}{\tilde{\gamma}} & -v & 1 \end{bmatrix} \tag{7-16}$$

同様に，

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & u & u \\ 0 & v & v-a & v+a \\ u & \frac{1}{2}(u^2+v^2) & H-av & H+av \end{bmatrix} \tag{7-17}$$

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{\tilde{\gamma}}{2a^2} \begin{bmatrix} -\dfrac{2a^2 u}{\tilde{\gamma}} & \dfrac{2a^2}{\tilde{\gamma}} & 0 & 0 \\ -2H+\dfrac{4a^2}{\tilde{\gamma}} & 2u & 2v & -2 \\ H+\dfrac{a(v-a)}{\tilde{\gamma}} & -u & -v-\dfrac{a}{\tilde{\gamma}} & 1 \\ H-\dfrac{a(v+a)}{\tilde{\gamma}} & -u & -v+\dfrac{a}{\tilde{\gamma}} & 1 \end{bmatrix} \tag{7-18}$$

である．

7.2　有限体積法による離散化

空間方向の離散化は一次元の場合と同じように有限体積法による．式(7-1)をセル(i,j)の面積に亘って積分する．即ち，

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) dx\, dy = 0 \tag{7-19}$$

セル平均値を次のように定義する．

$$\overline{\mathbf{q}}_{i,j} \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}\, dx\, dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx\, dy} = \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}\, dx\, dy}{\Delta x_i \Delta y_j} \tag{7-20}$$

ここで，$\Delta x_i, \Delta y_j$ はそれぞれ，セル(i,j)のx方向幅及びy方向幅である．従ってそれらの積によって，セル(i,j)の面積$A_{i,j}$を定義することができる．

$$A_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j \tag{7-21}$$

次に，各セル界面において，次の平均量を定義する．

- x =一定の界面（即ち，$x = x_{i+1/2}$，$y_{j-1/2} \le y \le y_{j+1/2}$）での平均値

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1/2,j} \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{q}(x_{i+1/2}, y) dy}{\Delta y_j} \tag{7-22}$$

- y =一定の界面（即ち，$x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$，$y = y_{j+1/2},$）での平均値

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i,j+1/2} \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(x, y_{j+1/2}) dx}{\Delta x_i} \tag{7-23}$$

式(7-20)～式(7-23)の定義を用いて，式(7-19)の積分を実行すると，

$$A_{i,j} \frac{d\overline{\mathbf{q}}_{i,j}}{dt} + \Delta y_j \left(\hat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} - \hat{\mathbf{E}}_{i-1/2,j} \right) + \Delta x_i \left(\tilde{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}_{i,j-1/2} \right) = 0 \tag{7-24}$$

を得る．

空間方向の計算は，直交・等間隔メッシュの場合（のみ厳密に），１次元スキームを適用することができる．即ち，x方向に一次元と考えて，式(7-24)の第２項を計算し，別途，y方向に一次元と見なして，同式の第３項を計算する．

7.3　時間積分：LU-SGS 法

時間方向の離散化は，準一次元の場合と同様に陽的方法と陰的方法が考えられる．ここでは，最も実用性の高い，LU-SGS 法を用いる．まず，基礎式(7-1)を時間(t_n, t_{n+1})に亘って積分し，積分幅の中で，対流項流束を$t = t_{n+1}$での値で一定と仮定すると，

$$\Delta\mathbf{q} + \Delta t\left(\frac{\partial \mathbf{E}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^{n+1}}{\partial y}\right) = 0 \tag{7-25}$$

を得る．次に式(7-25)を$\Delta\mathbf{q}$に関して線型化するために，時刻t_{n+1}での対流項流束をつぎのように近似する．

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{n+1} &= \mathbf{E}^n + \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}\right|^n \Delta\mathbf{q} = \mathbf{E}^n + \mathbf{A}^n\Delta\mathbf{q}\\ \mathbf{F}^{n+1} &= \mathbf{F}^n + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}\right|^n \Delta\mathbf{q} = \mathbf{F}^n + \mathbf{B}^n\Delta\mathbf{q}\end{aligned} \tag{7-26}$$

式(7-26)を式(7-25)に代入して整理すると，

$$\left[\mathbf{I} + \Delta t\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{A}^n + \Delta t\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{B}^n\right]\Delta\mathbf{q} = -\Delta t\left(\frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial y}\right) \tag{7-27}$$

を得る．7-2 節で述べたように，空間の離散化は有限体積法による．6 章で述べたように，左辺のオペレータ中の対流項流束ヤコビアンを，右行きと左行きの流束ヤコビアンの和に分解し，さらに，風上差分を適用の上，セル平均値の後退差分・前進差分で近似することにより，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(D_x^-\mathbf{A}^+ + D_x^+\mathbf{A}^-\right)^n + \frac{\Delta t}{\Delta y_j}\left(D_y^-\mathbf{B}^+ + D_y^+\mathbf{B}^-\right)^n\right]\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}\\ &\quad = -\frac{\Delta t}{A_{i,j}}\left[\Delta y_j\left(\hat{\mathbf{E}}^n_{i+1/2,j} - \hat{\mathbf{E}}^n_{i-1/2,j}\right) + \Delta x_i\left(\tilde{\mathbf{F}}^n_{i,j+1/2} - \tilde{\mathbf{F}}^n_{i,j-1/2}\right)\right]\end{aligned} \tag{7-28}$$

ここで，

$$\begin{aligned}D_x^-(\bullet)_{i,j} &\equiv (\bullet)_{i,j} - (\bullet)_{i-1,j}\\ D_x^+(\bullet)_{i,j} &\equiv (\bullet)_{i+1,j} - (\bullet)_{i,j}\\ D_y^-(\bullet)_{i,j} &\equiv (\bullet)_{i,j} - (\bullet)_{i,j-1}\\ D_y^+(\bullet)_{i,j} &\equiv (\bullet)_{i,j+1} - (\bullet)_{i,j}\end{aligned} \tag{7-29}$$

は，各方向の後退差分，前進差分である．

　また，右行き，左行きの流束ヤコビアンは一次元の場合と同様に次のように定義される．

$$\mathbf{A}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} \pm \nu_{\mathbf{A}}\mathbf{I}\right) \tag{7-30}$$

$$\mathbf{B}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} \pm \nu_{\mathbf{B}}\mathbf{I}\right) \tag{7-31}$$

ここで，$\nu_{\mathbf{A}}, \nu_{\mathbf{B}}$は，流束ヤコビアン行列$\mathbf{A}, \mathbf{B}$のスペクトル半径である．即ち，

$$\begin{aligned}\nu_{\mathbf{A}} &\equiv \max_{k=1,4}\left[\left|\lambda_{\mathbf{A}k}\right|\right] = |u| + a\\ \nu_{\mathbf{B}} &\equiv \max_{k=1,4}\left[\left|\lambda_{\mathbf{B}k}\right|\right] = |v| + a\end{aligned} \tag{7-32}$$

である.

$$\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{-}=\nu_{\mathbf{A}}\mathbf{I}$$
$$\mathbf{B}^{+}-\mathbf{B}^{-}=\nu_{\mathbf{B}}\mathbf{I} \tag{7-33}$$

に注意して，式(7-28)を書き換えると次式を得る.

$$\alpha_{i,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x_i}\mathbf{A}^{+}_{i-1,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i-1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta y_j}\mathbf{B}^{+}_{i,j-1}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j-1}+\frac{\Delta t}{\Delta x_i}\mathbf{A}^{-}_{i+1,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i+1,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y_j}\mathbf{B}^{-}_{i,j+1}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j+1}$$
$$=-\frac{\Delta t}{A_{i,j}}\left[\Delta y_j\left(\hat{\mathbf{E}}^{n}_{i+1/2,j}-\hat{\mathbf{E}}^{n}_{i-1/2,j}\right)+\Delta x_i\left(\tilde{\mathbf{F}}^{n}_{i,j+1/2}-\tilde{\mathbf{F}}^{n}_{i,j-1/2}\right)\right] \tag{7-34}$$

ここで，

$$\alpha_{i,j}\equiv 1+\frac{\Delta t}{\Delta x_i}\nu_{\mathbf{A}i,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y_j}\nu_{\mathbf{B}i,j} \tag{7-35}$$

と定義した.

一次元の場合と同様に，両辺を$\alpha_{i,j}$で除した後，左辺を対称二因子のオペレータに因数分解すると次式を得る.

$$\left[\mathbf{I}-\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^{+}_{i-1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta y_j\alpha_{i,j}}\mathbf{B}^{+}_{i,j-1}\right]\times\left[\mathbf{I}+\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^{-}_{i+1,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y_j\alpha_{i,j}}\mathbf{B}^{-}_{i,j+1}\right]\Delta\mathbf{q}$$
$$=-\frac{\Delta t}{A_{i,j}\alpha_{i,j}}\left[\Delta y_j\left(\hat{\mathbf{E}}^{n}_{i+1/2,j}-\hat{\mathbf{E}}^{n}_{i-1/2.j}\right)+\Delta x_i\left(\tilde{\mathbf{F}}^{n}_{i,j+1/2}-\tilde{\mathbf{F}}^{n}_{i,j-1/2}\right)\right] \tag{7-36}$$

この式は，次ぎの 2 つの方程式系を表している.

(第 1 ステップ)

$$\Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^{+}_{i-1,j}\Delta\mathbf{q}^{*}_{i-1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta y_j\alpha_{i,j}}\mathbf{B}^{+}_{i,j-1}\Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j-1}=\mathbf{RHS}^{(7-36)}_{i,j} \tag{7-37}$$

(第 2 ステップ)

$$\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j}+\frac{\Delta t}{\Delta x_i\alpha_{i,j}}\mathbf{A}^{-}_{i+1,j}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i+1,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y_j\alpha_{i,j}}\mathbf{B}^{-}_{i,j+1}\Delta\overline{\mathbf{q}}_{i,j+1}=\Delta\mathbf{q}^{*}_{i,j} \tag{7-38}$$

それぞれ，境界外部では未知数をゼロと仮定(陽的境界条件)しておくと，第 1 ステップに対しては前進方向の，第 2 ステップに対しては後退方向の逐次代入によって，未知数を求めることができる.

7.4　対流項数値流束 ： Roe 法

一次元のときと同様の方法により，Roe の近似リーマンソルバーを構成することができる．但し $\mathbf{E},\mathbf{F}$ について個々に数値流束 $\hat{\mathbf{E}},\breve{\mathbf{F}}$ を定義する必要がある.

まず，次ぎの関係を厳密に満たすように，セル界面平均値を定める．$x = x_{i+1/2}$ での界面において，

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_R) - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_L) = \mathbf{A}(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{H})[\hat{\mathbf{q}}_R - \hat{\mathbf{q}}_L] \tag{7-39}$$

及び，$y = y_{j+1/2}$ の界面において，

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_R) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_L) = \mathbf{B}\left(\breve{u}, \breve{v}, \breve{H}\right)[\tilde{\mathbf{q}}_R - \tilde{\mathbf{q}}_L] \tag{7-40}$$

ここで，$\hat{\mathbf{q}}_R, \hat{\mathbf{q}}_L$ は $x = x_{i+1/2}$ の界面での，右側(東側)及び左側(西側)の保存変数ベクトルの見積もり値，$\tilde{\mathbf{q}}_R, \tilde{\mathbf{q}}_L$ は $y = y_{i+1/2}$ の界面での，右側(北側)及び左側(南側)の保存変数ベクトルの見積もり値である．この見積もり方は，空間一次精度の場合はセル内一様分布を，空間二次精度の場合はセル内線型分布を，空間三次精度の場合はセル内で放物型分布を取るものと仮定して求める．二次精度以上の高次精度の場合，分布が極大・極小を取る所において，空間一次精度に落とすようなリミッターを使用することにより，一次元での TVD (Total Variation Diminishing) スキームに順ずるスキームとする．(厳密に言えば，空間二次元以上では，TVD 性は成立しない．)

さて，式(7-39)，(7-40)を満たす，$\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{H}$ 及び $\breve{u}, \breve{v}, \breve{H}$ の組は，数学的にはそれぞれ，4 組ずつ存在するが，そのうち，セル界面平均値として相応しいのは，次ぎのものだけである．

$$\begin{aligned}
\widehat{u} &= \frac{\sqrt{\hat{\rho}_R}\hat{u}_R + \sqrt{\hat{\rho}_L}\hat{u}_L}{\sqrt{\hat{\rho}_R} + \sqrt{\hat{\rho}_L}} \\
\widehat{v} &= \frac{\sqrt{\hat{\rho}_R}\hat{v}_R + \sqrt{\hat{\rho}_L}\hat{v}_L}{\sqrt{\hat{\rho}_R} + \sqrt{\hat{\rho}_L}} \\
\widehat{H} &= \frac{\sqrt{\hat{\rho}_R}\hat{H}_R + \sqrt{\hat{\rho}_L}\hat{H}_L}{\sqrt{\hat{\rho}_R} + \sqrt{\hat{\rho}_L}}
\end{aligned} \tag{7-41}$$

$$\begin{aligned}
\breve{u} &= \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_R}\tilde{u}_R + \sqrt{\tilde{\rho}_L}\tilde{u}_L}{\sqrt{\tilde{\rho}_R} + \sqrt{\tilde{\rho}_L}} \\
\breve{v} &= \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_R}\tilde{v}_R + \sqrt{\tilde{\rho}_L}\tilde{v}_L}{\sqrt{\tilde{\rho}_R} + \sqrt{\tilde{\rho}_L}} \\
\breve{H} &= \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_R}\tilde{H}_R + \sqrt{\tilde{\rho}_L}\tilde{H}_L}{\sqrt{\tilde{\rho}_R} + \sqrt{\tilde{\rho}_L}}
\end{aligned} \tag{7-42}$$

これより一次元の場合と同様にして，Roe 法の数値流束が次のように定まる．

$$\widehat{\mathbf{E}}_{i+1/2,j} \equiv \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_L) + \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_R) + \Delta\mathbf{E}^- - \Delta\mathbf{E}^+\right] \\ = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_L) + \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}_R) - \widehat{\mathbf{X}}\left|\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{A}}\right|\widehat{\mathbf{X}}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_R - \hat{\mathbf{q}}_L)\right] \tag{7-43}$$

$$\breve{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} \equiv \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_L) + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_R) + \Delta\mathbf{F}^- - \Delta\mathbf{F}^+\right] \\ = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_L) + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_R) - \breve{\mathbf{Y}}\left|\breve{\mathbf{\Lambda}}_B\right|\breve{\mathbf{Y}}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_R - \tilde{\mathbf{q}}_L)\right] \tag{7-44}$$

ここで,

$$\Delta\mathbf{E}^{\pm} \equiv \widehat{\mathbf{A}}^{\pm}(\hat{\mathbf{q}}_R - \hat{\mathbf{q}}_L) \\ \Delta\mathbf{F}^{\pm} \equiv \breve{\mathbf{B}}^{\pm}(\tilde{\mathbf{q}}_R - \tilde{\mathbf{q}}_L) \tag{7-45}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^{\pm} \equiv \widehat{\mathbf{X}}\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{\pm}_{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{X}}^{-1} \\ \breve{\mathbf{B}}^{\pm} \equiv \breve{\mathbf{Y}}\breve{\mathbf{\Lambda}}^{\pm}_{\mathbf{B}}\breve{\mathbf{Y}}^{-1} \tag{7-46}$$

ここで, $\widehat{\mathbf{X}}, \breve{\mathbf{Y}}$ は $\mathbf{X}(\widehat{u},\widehat{v},\widehat{H}), \mathbf{Y}(\breve{u},\breve{v},\breve{H})$ を意味する.

$$\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{\pm}_{\mathbf{A}} \equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{A}} \pm \left|\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{A}}\right|\right) \\ \breve{\mathbf{\Lambda}}^{\pm}_{\mathbf{B}} \equiv \frac{1}{2}\left(\breve{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{B}} \pm \left|\breve{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{B}}\right|\right) \tag{7-47}$$

$$\left|\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{A}}\right| \equiv \begin{bmatrix} |\widehat{u}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\widehat{u}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\widehat{u} - \widehat{a}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\widehat{u} + \widehat{a}| \end{bmatrix} \\ \left|\breve{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{B}}\right| \equiv \begin{bmatrix} |\breve{v}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\breve{v}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\breve{v} - \breve{a}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\breve{v} + \breve{a}| \end{bmatrix} \tag{7-48}$$

$$\widehat{a} \equiv \sqrt{\tilde{\gamma}\left[\widehat{H} - \tfrac{1}{2}(\widehat{u}^2 + \widehat{v}^2)\right]} \\ \breve{a} \equiv \sqrt{\tilde{\gamma}\left[\breve{H} - \tfrac{1}{2}(\breve{u}^2 + \breve{v}^2)\right]} \tag{7-49}$$

また, 一次元のときと同様に, Roe 法では膨張衝撃波の発生を抑制する目的で, マッハ１のところで, エントロピーフィックスを施す必要がある.