

## 5. 準一次元 圧縮性非粘性流れ

準一次元流れとは、流れの方向には流管断面積の変化を含め物理量の変化を許すが、その方向に垂直な断面内では状態が一様であるとして、理想化された流れである。ノズル内の流れなどが比較的それに当てはまる。

### 5. 1 基礎式

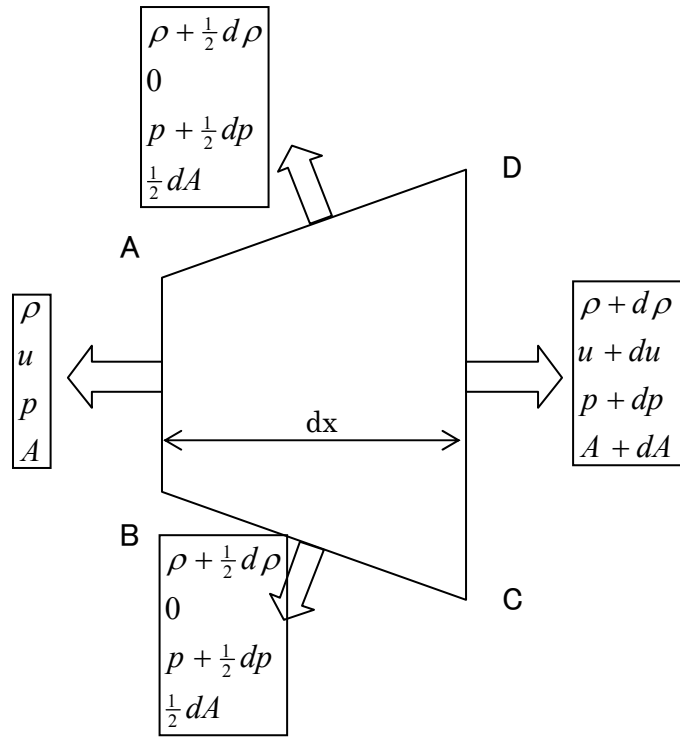


図 5 - 1 準一次元流れの検査体積

図 5 - 1 の検査体積について質量・運動量・エネルギーの保存式を考える。ここで  $A$  は流路断面積で、 $x$  のみの関数である。

#### (1) 質量保存

$$Adx \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho + d\rho)(u + du)(A + dA) - \rho u A = 0$$

$dx \rightarrow 0$  の極限では高次の項は 0 に近づくので、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u A}{\partial x} = 0 \quad (5-1)$$

#### (2) 運動量保存

$$Adx \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \left\{ (\rho + d\rho)(u + du)^2 + p + dp \right\} (A + dA) - (\rho u^2 + p)A - 2(p + \frac{1}{2} dp) \frac{dA}{2} = 0$$

同様にして、次式を得る。

$$\frac{\partial \rho u A}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) A}{\partial x} - p \frac{dA}{dx} = 0 \quad (5-2)$$

(3) エネルギー保存

$$A dx \frac{\partial E}{\partial t} + (\rho + d\rho)(u + du)(H + dH)(A + dA) - \rho u H A = 0$$

同様にして，次式を得る．

$$\frac{\partial A E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H A}{\partial x} = 0 \quad (5-3)$$

以上をまとめて，ベクトル表示する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial A \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial A \mathbf{F}}{\partial x} &= A \mathbf{S} \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{d(\ln A)}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-4)$$

## 5. 2 数値計算法

有限体積法により離散化し，対流項には1次元流れで学習した，Roe 法あるいは van Leer 法等を用い，時間積分には Euler 陽解法を用いる．まず，式(5-4)を*i*番目のセルの幅( $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$ )に亘って*x*について積分する．

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial A \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial A \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A \mathbf{S} dx \quad (5-5)$$

さて，式(5-5)を有限体積法で離散化するために次の平均量を定義する．

$$i \text{ 番目のセルの平均断面積} : \quad \overline{A}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx}{\Delta x_i} \quad (5-6)$$

ここで,  $\Delta x_i \equiv x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  である.

$$i \text{ 番目のセルでの, 保存量の (体積) 平均} : \quad \overline{q}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A q dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} \quad (5-7)$$

$$i \text{ 番目のセルでの, ソース項の (体積) 平均} : \quad \overline{S}_i \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A S dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} \quad (5-8)$$

これらを用いて, 式(5-5)を離散化すると, 次式を得る.

$$\frac{d\overline{q}_i}{dt} + \frac{(\mathbf{F}A)_{i+1/2} - (\mathbf{F}A)_{i-1/2}}{\Delta x_i \overline{A}_i} = \overline{S}_i \quad (5-9)$$

さらに時間幅  $(t_n, t_{n+1})$  に亘って, 式(5-9)を時間について積分する.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{d\overline{q}_i}{dt} + \frac{(\mathbf{F}A)_{i+1/2} - (\mathbf{F}A)_{i-1/2}}{\Delta x_i \overline{A}_i} \right\} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{S}_i dt \quad (5-10)$$

数値時間積分に Euler 陽解法を用いる, 即ち, 時間積分幅に亘って, 対流項流束とソース項を時刻  $t_n$  の時の値で一定であると仮定する. その仮定のもとで, 式(5-10)を計算すると, 次式を得る.

$$\overline{q}_i^{n+1} = \overline{q}_i^n - \frac{\Delta t^n}{Vol_i} \left( \mathbf{F}_{i+1/2}^n A_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^n A_{i-1/2} \right) + \overline{S}_i^n \Delta t^n \quad (5-11)$$

ここで,  $\Delta t^n \equiv t_{n+1} - t_n$  はタイムステップ,  $Vol_i \equiv \Delta x_i \overline{A}_i$  は  $i$  番目のセルの体積である.

対流項流束  $\mathbf{F}$  は一次元の時と同じ方法で数値流束を評価する.

ソース項は運動量の式 (第2要素) に現れ, たとえば次のように評価する.

$$\overline{S}_i^{(2)n} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p A \frac{d \ln A}{dx} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p \frac{dA}{dx} dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p dA}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} \approx \frac{\overline{p}_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dA}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A dx} = \frac{\overline{p}_i (A_{i+1/2} - A_{i-1/2})}{Vol_i} \quad (5-12)$$

ここで,  $\overline{p}_i$  は  $i$  番めのセルでの圧力であり,  $\overline{q}_i$  から算出される.

## 5. 3 ノズル内定常準一次元流れ

## (1) 衝撃波を伴わない場合 (等エントロピー流れ)

次の関係がある．詳細は教科書を参照のこと．

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (5-13)$$

ここで，\*は音速状態を表す．等エントロピーの関係式として，

$$\frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (5-14)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (5-15)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (5-16)$$

ここで添え字0は淀み点状態を表す．

式(5-13)を微分すると，次式を得る．

$$\frac{dA}{dM} = \frac{A^{*2}}{A} \frac{2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\gamma+1} \left[ \frac{2 + M^2(\gamma-1)}{\gamma+1} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \frac{M^2 - 1}{M^3} \quad (5-17)$$

これより，次のことが判る．

$$M < 1 \text{ のとき} \quad \frac{dA}{dM} < 0$$

$$M > 1 \text{ のとき} \quad \frac{dA}{dM} > 0$$

$$M = 1 \text{ のとき} \quad \frac{dA}{dM} = 0$$

従って，亜音速領域で，縮流するとマッハ数は増加し，超音速領域で縮流すると，マッハ数は減少する．逆に，亜音速領域で，流路が拡大するとマッハ数は減少し，超音速領域で拡大すると，マッハ数は増加する．ロケットで用いられるノズルの多くは，convergent-divergent nozzle であり，亜音速領域，超音速領域ともに加速される．またマッハ1となるところでは，断面積変化が極値を取る．ロケットのノズルでは，もっとも絞られたところでこの条件が成り立ち，スロートと呼ばれる．

## (2) 衝撃波を伴う場合

準一次元流れの範囲では垂直衝撃波を扱うことになる。垂直衝撃波の関係は、質量・運動量・エネルギーの保存を満たす跳びの関係から定まる。それによると、垂直衝撃波を横切って、総圧の減少、エントロピーの増大があるが、総温は変化しない。（垂直衝撃波に乗ったときの）垂直衝撃波前方のマッハ数を  $M_1$  とすると、垂直衝撃波前後の総圧の関係は次式で表される。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (5-18)$$

総温は変化しないので、

$$T_{01} = T_{02} \quad (5-19)$$

垂直衝撃波背後のマッハ数は次式で表される。

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + M_1^2(\gamma-1)/2}{\gamma M_1^2 - (\gamma-1)/2}} \quad (5-20)$$

垂直衝撃波前後では、それぞれ別の音速断面積  $A_1^*, A_2^*$  を持ち、それらに対応する等エントロピー流れが形成される。途中で質量の発生、消滅が無い限り、総圧と音速断面積の積は流路に沿って一定である。即ち、

$$p_{01} A_1^* = p_{02} A_2^* \quad (5-21)$$

このことは、質量保存関係から導かれる。

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u A = \rho^* u^* A^* = \rho^* a^* A^* = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} a^* A^* = \frac{p_0}{RT_0} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\gamma R T^*} A^* \\ &= \frac{p_0}{RT_0} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\gamma R T_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)} A^* = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \end{aligned} \quad (5-22)$$

定常流を前提としているので、流管に沿って質量流量が保存される。また衝撃波前後で総温が一定であることから、式(5-21)が得られる。

## 5. 4 数値境界条件

3章（1次元圧縮性オイラー方程式）で述べたように、圧縮性非粘性流れは複数の波に分解され、それぞれ、 $u-a, u, u+a$  の速度で情報を伝える（3章 3.3 項、式(19)参照）。ここで、最も簡単で、かつ物理的に適切な数値境界条件の与え方を示す。さらに高級な境界条件に関してはスコープ外とする。

数値境界条件を分類すると,

- 流入／流出境界条件
  - 超音速／亜音速
  - 流出／流入
- 固体壁境界条件
  - 粘着／すべり／湧き出し
- 対称境界条件
  - 点／軸／面
- 周期境界条件

等に分類できる．ここでは，当面流入／流出の数値境界条件が必要となるので，その与え方を示す．その他については，必要が生じたところで随時解説する．

### 流入／流出境界条件

情報の速度が3種類あるので, 境界面外向き速度成分  $u_n$  と音速  $a$  によって次のように場合分けされる.

流出か流入か :  $u_n > 0$  のとき流出,  $u_n < 0$  のとき流入

超音速か亜音速か                   :        $|u_n| > a$  のとき超音速,        $|u_n| < a$  のとき亜音速

従って、これらの組み合わせにより、合計 4 つの場合に分けられる。以下に各場合の数値境界条件の与え方を示すが、基本的考え方は、3 つの情報伝播速度に応じて、外から指定する量と、内から（解と共に修正されながら）決められる量の数を妥当に設定することである。

- (1) 超音速の場合

- (ア) 流入の場合

$\rho, u, p$  を固定値として指定する.

- (イ) 流出の場合

$\rho, u, p$  を内部（解）から外挿により定める.

- ## (2) 亜音速の場合

- (ア) 流入の場合

2つの物理量を固定値として指定，残り1つは内部（解）から外挿により定める．

- (イ) 流出の場合

2つの物理量を内部（解）から外挿して定め、残り1つは固定値として指定する.

亜音速の場合は，解こうとする問題の性質を尊重して，どの物理量を固定するのかを判断するのが，良い数値計算にとって重要なことである．この意味では，亜音速の解析の方が超音速のそれよりも相対的に困難と言える．

このコースで採用している、(セル中心型)有限体積法の場合には、超音速／亜音速，流出／流入にかかわらず，境界面の外側に位置するゴーストセルに対して上記の要領で場合に応

じて値を設定し、内部の解析と同じように境界上の数値流束を計算して解析を進めることができる。

## 5. 5 数値解析

次のような流路面積分布に対し、いくつかの例を計算し、厳密解と比較する。ここでは、敢えて無次元化を施さないで有次元量のまま解析する。設計で用いられる数値計算では、単位をつけたまま計算することの方が多い。一方、流れの特性を研究する立場からは、無次元化が重要となる。以下、特に断らない限り、単位系を **MKS** とする。即ち、長さはメートル、時間は秒を単位とする。

$$A(x) = 1 + 2.2(x - 1.5)^2 \quad 0 \leq x \leq 3 \quad (5-23)$$

この場合の流路半径（円を仮定）と断面面積の分布を図 5－2 に示す。

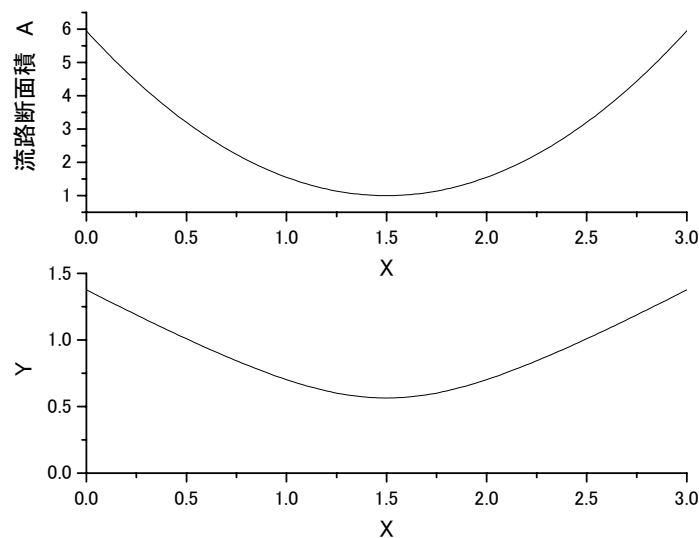


図 5－2 流路半径（下）と断面面積（上）の分布

式(5-23)或いは図 5－2 から判るように、 $x = 1.5$  で面積が最小であるから、この位置がスロートとなる。 $x$  が増加する方向に流れを考えると、スロート上流で亜音速、下流で超音速、スロートで音速になる流れが存在する。

課題 5－1 : 空気を想定した気体(分子量  $\tilde{M} = 28.96 \text{ g/mol}$  , 比熱比  $\gamma = 1.4$  )が式(5-23)

で示される流管を流れるとし、上流端での温度  $T_L = 3500 \text{ K}$  , 圧力  $p_L = 10 \times 10^6 \text{ Pa}$  , 下流端の境界では超音速になっているものとする。Roe 法を用いて数値解（定常解）を求め、厳密解と比較せよ。時間積分は Euler 陽解法で、CFL 数を 0.3 とする。空間方向は、100 分割とする。

### (1) 厳密解を求める

流入が亜音速で、流出が超音速の場合には、ノズル内は等エントロピー流れと仮定してよい。なぜならば、仮にノズル内に定在垂直衝撃波が存在するとすれば、衝撃波前方(上流)で超音速、後方(下流)で亜音速でなければならない。一方、流入が亜音速であるから、超音速領域が生じるとすれば、必ずスロートより下流でなければならない。従って、垂直衝撃波が定在するとすれば、拡大部において存在することになり、衝撃波背後で亜音速であるから、拡大部において亜音速となることになる。式(5-17)を用いた議論のとおり、亜音速の場合、流路が拡大すれば、マッハ数は減少する。従ってこのとき、流出は必ず亜音速であり、超音速にはならない。従って、流入が亜音速でかつ流出が超音速であり、かつ内部に定在垂直衝撃波を含むような流れは、存在しない。よって、流入が亜音速で、流出が超音速ならば、垂直衝撃波は含まない。よって、ノズル内は等エントロピー流れとしてよい。

まず、式(5-13)の断面積とマッハ数の関係を用いて、各場所でのマッハ数を計算する。このとき Newton 法を用いて反復計算により求める。式(5-13)を参照して、次のようなマッハ数の関数を設定する。

$$f(M) = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \left( \frac{A}{A^*} \right)^2 \quad (5-24)$$

各場所のマッハ数  $M$  は、 $A^*$  をスロート断面積とし、求めたい場所の断面積を  $A$  として、 $f(M) = 0$  を解いて求める。式(5-24)を微分して、

$$df(M) = \frac{4^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma+1} \frac{M^2 - 1}{M^3} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M^2}{2(\gamma+1)} \right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dM \quad (5-25)$$

Newton 法では、予測値  $M^n$  が与えられたとき、

$$f(M^n) + df(M^n) = 0$$

となるような  $dM^n$  を求め、 $M^{n+1} = M^n + dM^n$  として、 $M$  の値を修正する。即ち、

$$M^{n+1} = M^n - \frac{f(M^n)}{\frac{df}{dM}(M^n)} \quad (5-26)$$

とする。この手順を繰り返し、 $dM$  が十分小さくなるまで繰り返す。

ここで、注意を要するのは、一つの  $A/A^*$  に対して、2 つの  $M$  (超音速解と亜音速解) が存在することである。反復解で、 $M$  の初期値を超音速にとるか、亜音速にとるかによって、収束先の解が異なってくる。

マッハ数が計算されれば、入り口での状態量とマッハ数から、激み点状態が式(5-14),(5-15),(5-16)によって求められる。

任意の位置での状態量は、やはり同じ手順で、マッハ数を求め、激み点状態が分かっているので、やはり式(5-14)-(5-16)によって、計算することができる。

## (2) 数値解を求める



## (ア) 残差について

ここでは、全エネルギーの時間変化によって残差を次のように定義する.

$$R^n = \sqrt{\sum_i (E_i^n - E_i^{n-1})^2} \quad (5-27)$$

## (イ) 境界での外挿法について

境界では、亜音速流入に対しては、速度だけを、超音速流出に対しては、密度・圧力・速度を外挿する. このとき、内側の量をそのまま与えれば、一次精度、線型で外挿すれば二次精度の境界条件となる.

## (3) 数値解と厳密解の比較

図5-3に結果を示す. また、図5-4に残差の履歴を示す.

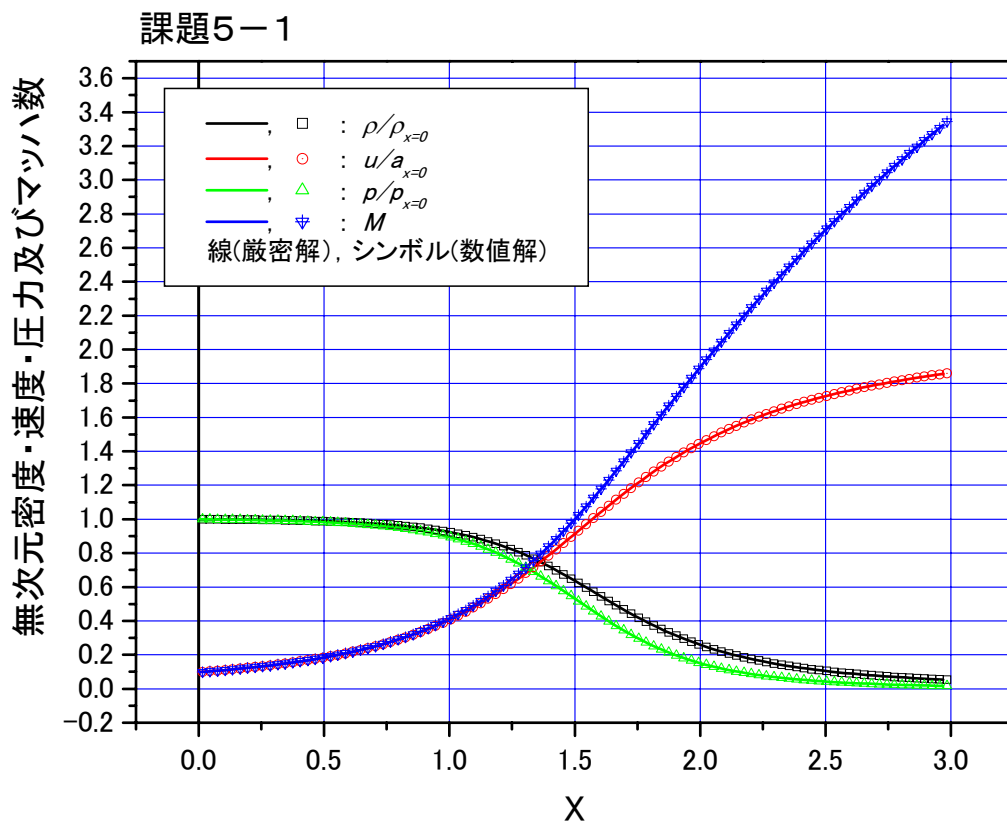


図5-3 課題5-1の結果

このように、数値解と厳密解は一致する.

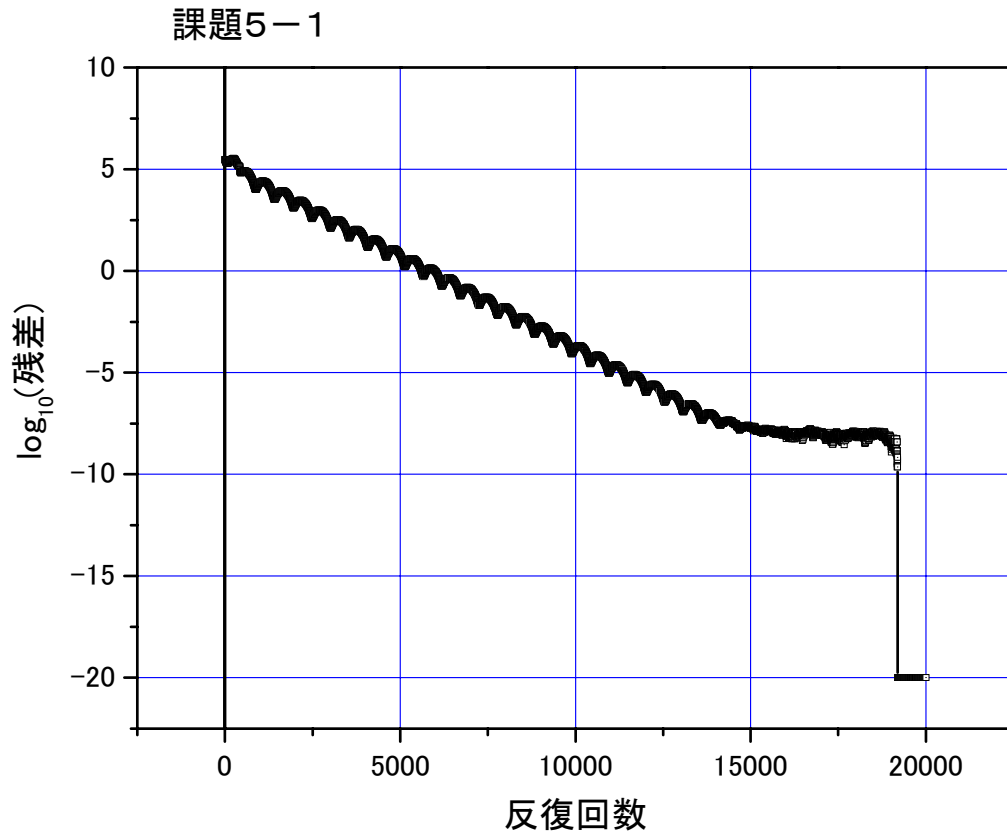


図 5－4 課題 5－1 残差の履歴

課題 5－2 : 空気を想定した気体 (分子量  $\tilde{M} = 28.96 \text{ g/mol}$  , 比熱比  $\gamma = 1.4$  ) が式(5-23)で示される流管を流れるとし, 上流端での温度  $T_L = 3500 \text{ K}$  , 圧力  $p_L = 1.5$  気圧で大気に噴射する場合を考える. 大気圧は  $p_R = 1$  気圧とし, 大気密度は  $\rho_R = 1 \text{ kg/m}^3$  とする. Roe 法を用いて数値解 (定常解) を求め, 厳密解と比較せよ. 時間積分は Euler 陽解法で, CFL 数を 0.3 とする. 空間方向は, 100 分割とする.

#### (1) 厳密解を求める

等エントロピーで膨張した場合の出口圧を断面積の関係を用いて計算すると, 出口圧は  $2374.54 \text{ Pa}$  となり, ここでの大気圧に比べて低い値となる. また, 上流端での圧力は大気圧に比べて高いので, 全域亜音速で等エントロピーの解も, 存在しない. 従ってここでの解は, 拡大部での垂直衝撃波によって圧力が回復するケースとなる.

まず、垂直衝撃波の立つ位置を  $x_s$  として、そこでの断面積を  $A_s$  とおく。断面積は、式(5-23)によって与えられる。スロート面積を  $A_t$ 、衝撃波前方でのマッハ数を  $M_1$  と表すと、式(5-13)より次式が成り立つ。

$$\left(\frac{A_s}{A_t}\right)^2 = \frac{1}{M_1^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (5-28)$$

垂直衝撃波前方の領域、及び後方の領域は、それぞれ、等エントロピー流れであるが、両者の総圧は異なる。総圧の関係を表す式として、式(5-21)及び、式(5-18)が成り立つ。ここで、 $A_{t2}$  は衝撃波背後の等エントロピー流れに対する、音速点断面積である。

$$p_{01} A_t = p_{02} A_{t2} \quad (5-29)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (5-30)$$

垂直衝撃波前方での総圧  $p_{01}$  は入り口の断面積  $A_{in}$  とスロート断面積  $A_t$  を用いて、入り口でのマッハ数  $M_{in}$  を Newton 法により算出し、等エントロピーの関係から求めることができる。即ち、

$$\left(\frac{A_{in}}{A_t}\right)^2 = \frac{1}{M_{in}^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{in}^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (5-31)$$

$$p_{01} = p_{in} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{in}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5-32)$$

課題 5-2 の場合、流入マッハ数  $M_{in}$  は、0.09782 ... と算出される。

総温  $T_0$  は衝撃波を横切って変化しない。課題 5-2 の場合

$$T_0 = T_{in} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{in}^2 \right) = 3506.69 \dots$$

となる。

次に、衝撃波背後領域の等エントロピー流れについて、ノズル出口でのマッハ数を  $M_{ex}$ 、断面積を  $A_{ex}$ 、圧力を  $p_{ex}$  とすると、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{A_{ex}}{A_{t2}}\right)^2 = \frac{1}{M_{ex}^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ex}^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (5-33)$$

$$p_{02} = p_{ex} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ex}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5-34)$$

以上の関係式より、衝撃波を含む準一次元ノズル流れを計算する。

まず、式(5-29)と式(5-33)から、 $A_{t2}$ を消去して、次式を得る。

$$A_t^2 p_{01}^2 \left( \frac{2 + M_{ex}^2 (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = A_{ex}^2 M_{ex}^2 p_{02}^2 \quad (5-35)$$

式(5-34)と式(5-35)から、 $p_{02}$ を消去して次式を得る。

$$A_{ex}^2 M_{ex}^2 p_{ex}^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ex}^2 \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = A_t^2 p_{01}^2 \left( \frac{2 + M_{ex}^2 (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (5-36)$$

式(5-36)は未知数  $M_{ex}$  に関する方程式とみなすことができる。この方程式は、Newton 法により数値的に解かなければならない。そのために、次の関数  $g(M_{ex})$  を考える。

$$g(M_{ex}) = A_{ex}^2 M_{ex}^2 p_{ex}^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ex}^2 \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - A_t^2 p_{01}^2 \left( \frac{2 + M_{ex}^2 (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (5-37)$$

$g(M_{ex}) = 0$  を満たす  $M_{ex}$  を Newton 法で計算するために、 $g$  の  $M_{ex}$  についての導関数を求める。

$$\frac{dg}{dM_{ex}} = \frac{2M_{ex} \left( -(\gamma+1)A_t^2 p_{01}^2 \left( \frac{2 + (\gamma-1)M_{ex}^2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} + A_{ex}^2 p_{ex}^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ex}^2 \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (2 + (3\gamma-1)M_{ex}^2) \right)}{2 + (\gamma-1)M_{ex}^2} \quad (5-38)$$

出口で亜音速であるため、 $M_{ex}$  の初期値として亜音速の値を設定し、

$$M_{ex}^{n+1} = M_{ex}^n - \frac{g(M_{ex}^n)}{\frac{dg}{dM_{ex}}(M_{ex}^n)}$$

を収束するまで繰り返すことにより、 $M_{ex}$  が算出される。課題 5-2 の場合、 $M_{ex} = 0.1465 \dots$  である。

上で求めた  $M_{ex}$  の値と、式(5-29)、式(5-34)を用いて、 $p_{02}$  と  $A_{t2}$  が算出される。さらに、 $T_0$  が判っているので状態方程式より  $\rho_{02}$  も算出できる。

ここまでくると、式(5-30)は、垂直衝撃波前方のマッハ数  $M_1$  に関する方程式とみなされ、Newton 法を用いて  $M_1$  が求まる。計算の対象とする関数とその導関数は次のように与えられる。

$$f(M_1) = \frac{p_{02}}{p_{01}} - \alpha\beta$$

$$\alpha \equiv \left[ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \beta \equiv \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right]^{1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{df}{dM_1} = -\beta \frac{d\alpha}{dM_1} - \alpha \frac{d\beta}{dM_1}$$

$$\frac{d\alpha}{dM_1} = \frac{4\gamma \left\{ \frac{M_1^2(\gamma+1)}{2+M_1^2(\gamma-1)} \right\}^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}}{M_1^3(\gamma^2-1)}, \quad \frac{d\beta}{dM_1} = -\frac{4\gamma M_1 \left( \frac{\gamma+1}{1-\gamma+2\gamma M_1^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(\gamma-1)\{1+\gamma(-1+2M_1^2)\}}$$

課題 5-2 の場合、 $M_1 = 2.1042 \dots$  と算出される。

最後に、式(5-28)より、衝撃波位置での断面積  $A_s$  が求まり、式(5-23)より衝撃波の位置  $x_s$  が算出される。課題 5-2 の場合、 $x_s = 2.1192 \dots$  である。

以上の計算の後、任意の点での状態量は、その場所が衝撃波の前方にあるか後方にあるかに応じて、総圧及び音速点断面積を使い分けながら、等エントロピーの関係式により、全て計算することができる。

## (2) 数値解を求める

流入境界条件は、課題 5-1 と同様に、亜音速流入の条件である。一方、流出境界では、課題 5-1 とは異なり、亜音速の流出条件を用いなければならない。即ち、密度・速度は外挿により解と共に更新するが、圧力は固定する。

初期状態としては、流入部に与えられた圧力・温度、及び適当な速度(例えば 100m/s)を、流出部に与えられた大気圧と密度及び適当な速度(例えば 500m/s)を設定し、その間の場所での状態量はそれらの線型補間によって与える。但し、この手続きは一例にすぎない。ここで最終的な定常解に反映されるのは、流入部の圧力と温度、及び流出部の圧力のみであることに注意のこと。

CFL 数を 0.3 とし、空間 100 分割、空間 3 次精度 ( $\phi=1, \kappa=1/3$ ) でリミッターを用いてセル境界での値を定め、Roe 法により数値流束を計算する。時間積分は Euler 陽解法を用いる。

計算結果と厳密解を合わせて図 5-5 に示す。また、残差の履歴を図 5-6 に示す。これらより、数値解と厳密解が良く一致することがわかる。

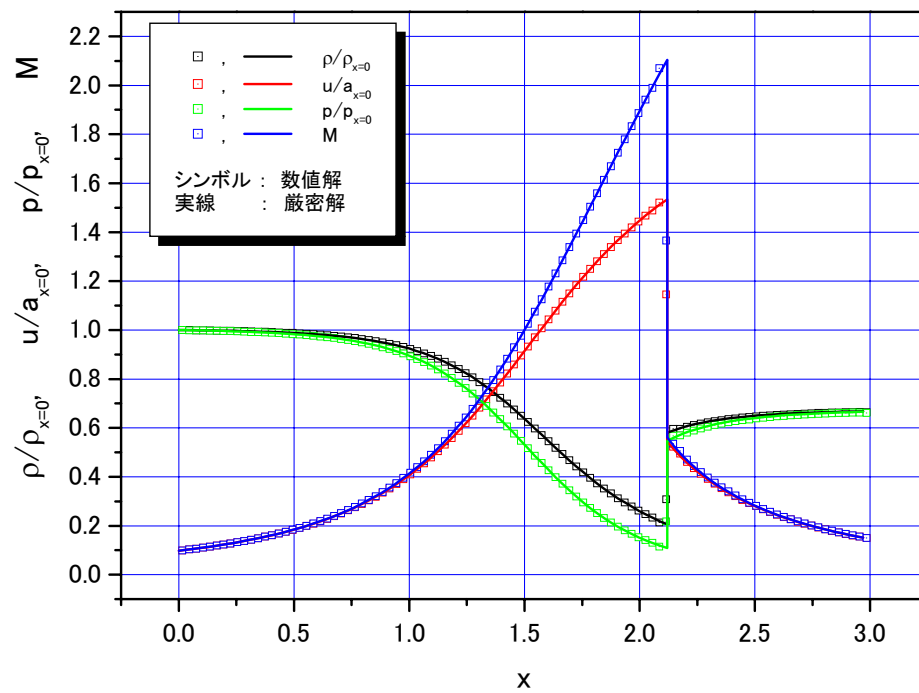


図5-5 課題5-2の計算結果

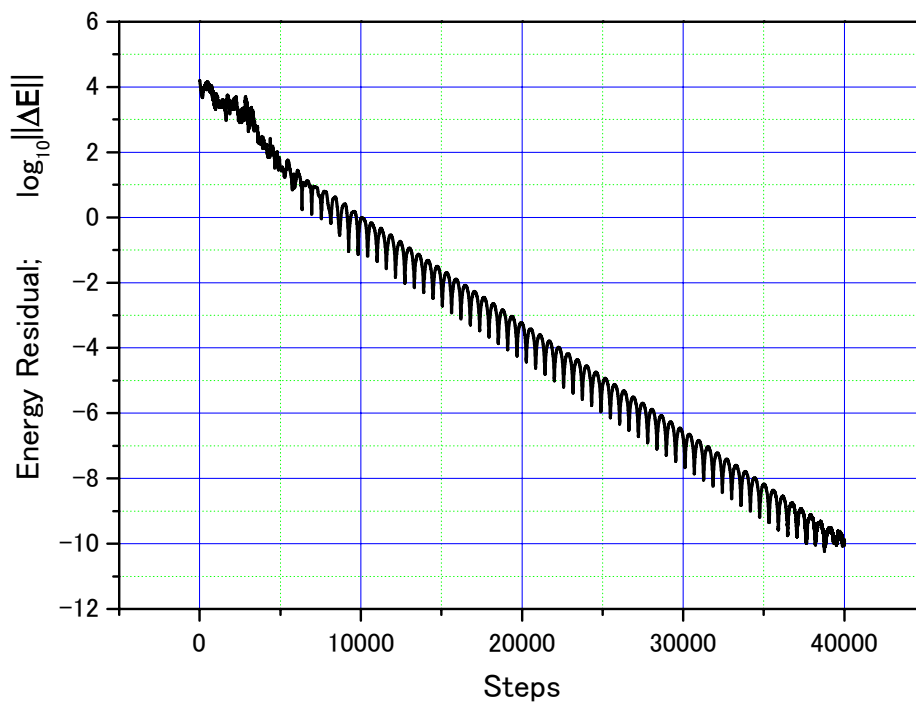


図5-6 課題5-2の残差履歴

準一次元流れはこれぐらいにして、次に 2 次元の問題へと進もう。しかし、その前に、定常解をより早く求めるための手段として、陰解法を習得する。2 次元、3 次元へと進むにつれて、計算量が増えるため、定常解の計算には陰解法が用いられることが多い。次節では、陰解法の基礎として、Euler 陰解法と、より高速化が施された、LU-SGS 法 (Lower-Upper Successive Gauss-Sidel) を習得する。

本節は以上