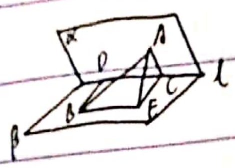
56. 二面角

一 ① $\sqrt{19}$; $\frac{2\sqrt{57}}{3}$ ② $45°$ ③ C

二 ① 过A作$AC\perp l$于C，过B作$BD\perp l$于D．过C作$\vec{CE}=\vec{DB}$，连接BE.



∵C、D为A、B在l上的射影，$CE\parallel BD$ ∴$CE\perp l$ ∴$\angle ACE$即为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角.

由题意得 $AC=5cm$，$BD=8cm$.

∵$\vec{CE}=\vec{DB}$ ∴▱BDCE ∴$CE=BD=8cm$，$DC=BE$，$DC\parallel BE$

在$\triangle ACE$中，$\angle ACE=60°$ ∴$AE=\sqrt{AC^2+CE^2-2AC\times CE\times\cos60°}=7cm$

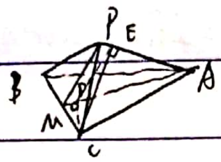
∵$AC\perp l$，$CE\perp l$，$AC\cap CE=C$，$AC, CE\subset$面ACE ∴$l\perp$面ACE

∴$l\perp AE$ ∴$BE\perp AE$

在$Rt\triangle ABE$中，$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{20^2-7^2}=3\sqrt{39}cm$. ∴$DC=3\sqrt{39}cm$.

∴AB在l上射影之间的距离为$3\sqrt{39}cm$.

② 连接MP，MA，过C作$CD\perp MA$于D，过C作$CE\perp AP$，连接DE.



∵正三角形PBC ∴$PM\perp BC$.

∵面$PBC\perp$面ABC，面$PBC\cap$面$ABC=BC$

∴$PM\perp$面ABC ∴$PM\perp CD$

∵$AM\cap PM=M$，$AM、PM\subset$面APM ∴$CD\perp$面APM.

∴D为C在面APM内的射影 ∵$CE\perp AP$

∴$\angle CED$即为二面角$C-PA-M$的平面角

在Rt△ABC中，$AC=\frac{BC}{\tan30°}=\sqrt{3}a$，$CM=\frac{a}{2}$

在$Rt\triangle AMC$中，$CD=\frac{AC\times MC}{\sqrt{AC^2+MC^2}}=\sqrt{\frac{3}{13}}a$

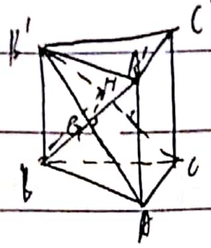
在$Rt\triangle PMA$中，$AP=\sqrt{MP^2+MA^2}=2a$ 在$\triangle ACP$中，$\cos\angle CAP=\frac{AC^2+AP^2-CP^2}{2AC\times AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴$\sin\angle CAP=\frac{1}{2}$ ∴$CE=AC\times\sin\angle CAP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

在$Rt\triangle CDE$中，$\sin\angle CED=\frac{CD}{CE}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

∴二面角$C-PA-M$的正弦值为$\frac{2\sqrt{13}}{13}$

③ (1) 过A'作$A'G\perp B'A$于G.



∵直三棱柱 ∴$A'C'\parallel AC$，$AA'\perp$面$A'B'C'$，~~$\angle B'A'C'=\angle BAC$~~

∴$AA'\perp A'C'$

∵$\angle BAC=90^\circ$ ∴$AC\perp AB$

∵$A'A\cap AB=A$，$A'A$、$AB\subset$面$AA'B'B$

∴$CA\perp$面$AA'B'B$ ∴$CA\perp A'G$

∵$CA\cap AB'=A$，CA、$AB'\subset$面$AB'C$ ∴$A'G\perp$面$AB'C$

∴$A'G$即为点A'到面$AB'C$的距离

∵$A'C'\parallel AC$，$A'C'$不在面$AB'C$内，$AC\subset$面$AB'C$

∴$A'C'\parallel$面$AB'C$ ∴C'到面$AB'C$的距离即为A'到面$AB'C$的距离$=A'G$.

在正方形$AA'B'B$中，$A'G=\sin45^\circ\times AA'=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴C'到面$AB'C$距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 连接BG，过G作$GH\perp B'C$于H，连接BH.

∵~~矩~~矩形$AA'B'B$，$AB=BB'$ ∴正方形$AA'B'B$ ∴B、G、A'三点共线为正方形对角线.

∴$BG\perp$面$AB'C$ ∴G为B在面$AB'C$内的射影.

∵$GH\perp B'C$ ∴$BH\perp B'C$ ∴$\angle BHG$即为二面角$B-B'C-A$的平面角.

在$Rt\triangle BB'A$中，$BG=BA\times\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵$BB'\perp$面BAC ∴BC为$B'C$在面ABC内的射影

∴$\angle B'CB$为$B'C$与面ABC所成角$=30^\circ$

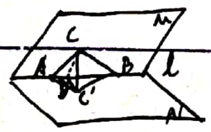
在$Rt\triangle BHC$中，$BH=BB'\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

在$Rt\triangle BGH$中，$\sin\angle BHG=\frac{BG}{BH}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ∴$\cos\angle BHG=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴二面角$B-B'C-A$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

二 ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② C ③ C

④ 在面N内作C的射影C'，过C作$CD\perp l$，连接$C'D$、$C'A$、$C'B$.



∵C'为C在N内的射影

∴ $CC'\perp$面N. ∵ $CD\perp l$ ∴ $C'D\perp l$ ∴ $\angle CDC'$即为二面角$M-l-N$的平面角.

且$\angle CAC'$、$\angle CBC'$即为AC、BC与面N所成的角.

∴ $\angle CDC'=\theta$, $\angle CAC'=\alpha$, $\angle CBC'=\beta$

在$Rt\triangle CAC'$中, $\sin^2\alpha=\frac{CC'^2}{AC^2}$ 在$Rt\triangle CBC'$中, $\sin^2\beta=\frac{CC'^2}{CB^2}$

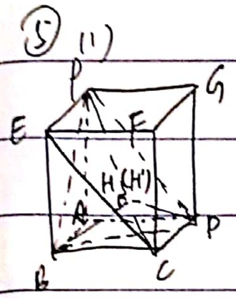
在$Rt\triangle CC'D$中, $\sin^2\theta=\frac{CC'^2}{CD^2}$

在$Rt\triangle CAB$中, $AC\times BC=CD\times AB$

∴ $AC^2\times BC^2=CD^2\times(AC^2+BC^2)$ ∴ $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{CB^2}=\frac{1}{CD^2}$

∴ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\theta$ 即证.

⑤ (1) 连接BD, 过B作$BH\perp PC$于H, 过D作$DH'\perp PC$于H'.



∵ $PA\perp ABCD$ ∴ $PA\perp AB$, $PA\perp AD$

∵正方形$ABCD$ ∴ $AB=AD$, $BC=CD$

在$Rt\triangle PAB$中, $BP=\sqrt{AP^2+AB^2}=\sqrt{2}a$

在$Rt\triangle PAD$中, $DP=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{2}a$

∵ $PB=PD$, $BC=CD$, $PC=PC$ ∴ $\triangle PBC\cong\triangle PDC$.

∴ $\frac{PH}{HC}=\frac{PH'}{H'C}$ ∴ H与H'重合.

∴ $\angle BHD$即为二面角$B-PC-D$的平面角.

在正方形$ABCD$中, $BD=AC=\sqrt{2}a$ 在$Rt\triangle PAC$中, $PC=\sqrt{AP^2+AC^2}=\sqrt{3}a$.

在$\triangle PBC$中, $PB^2+BC^2=PC^2$ ∴ $PB\perp BC$ ∴ $BH=\frac{PB\times BC}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ 同理$DH=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

在$\triangle BHD$中, $\cos\angle BHD=\frac{BH^2+DH^2-BD^2}{2BH\times DH}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$ ∴ $\angle BHD=120^\circ$.

∴二面角$B-PC-D$大小为120°.

(2) 过PA、AB作平面α, 过P在α内作$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AB}$, 连接$BE$、$CE$.

∵正方形$ABCD$ ∴ $AB\parallel CD$且$AB=CD$ ∵ $PE\parallel AB$且$PE=AB$ ∴ $PE\parallel CD$且$PE=CD$. ∴ PE在面PCD.

∴面$PCD\cap$面$PAB=PE$.

∵ $PE\perp AP$且$PE\parallel AB$, $AB\perp AD$ ∴ $PE\perp AD$

∵ $AP\cap AD=A$, AP、AD在面APD ∴ $PE\perp$面PAD ∴ $PE\perp PD$.

∴ $\angle DPA$即为面PAB与面PCD所成二面角的平面角.

∵$PA=a$, $AD=a$, $PA\perp AD$

∴$\angle APD=45^\circ$

∴面PAB与面PCD所成二面角大小为45°

⑥ (1) ∵正三棱柱 设BC_1、B_1C交点为P'.

∴矩形CC_1B_1B ∴C_1B与CB_1的交点即为B_1C中的中点.

∵D为AC中点 ∴$DP'\parallel AB_1$

∵$DP'\subset$面DBC_1，$AB_1\not\subset$面DBC_1 ∴$AB_1\parallel$面DBC_1.

(2) ∵正三棱柱 ∴正三角形ABC，$BB_1\perp$面ABC ∴$BB_1\perp AM$.

∵M为BC中点 ∴$AM\perp BC$.

∵$BC\cap BB_1=B$，BC、$BB_1\subset$面BB_1C_1C

∴$AM\perp$面BB_1C_1C ∴B_1M为B_1A在面BB_1C_1C内的射影

∵$BC_1\subset$面BB_1C_1C，$AB_1\perp BC_1$

∴$B_1M\perp BC_1$.

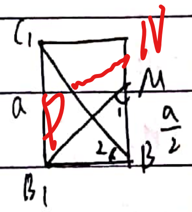
(3) ~~设~~设$BC=a$.

∵D、N为CA、CM中点 ∴$DN\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}AM$

∴$DN\perp$面BB_1C_1C

∴PN为DP在面BB_1C_1C内的射影

∴$\angle DPN$为二面角$D-BC_1-C$的平面角.



在$\triangle ABC$中，$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$CM=\frac{a}{2}$ ∴$DN=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

∵N、P为MC、B_1C的中点 ∴$PN=\frac{1}{2}B_1M$.

在矩形BB_1C_1C中，∵$B_1M\perp BC_1$ ∴$\angle 1=\angle 2$

∴$\tan\angle 1=\tan\angle 2$ ∴$\frac{BB_1}{\frac{a}{2}}=\frac{a}{BB_1}$ ∴$BB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

∴$B_1M=\sqrt{BB_1^2+BM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ∴$PN=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

在$Rt\triangle DPN$中，$\tan\angle DPN=\frac{DN}{PN}=1$.

∴二面角$D-BC_1-C$的正切值为1.

设$NP\cap B_1C=P'$
∴$NP\parallel B_1M$
N…中点
∴P'为B_1C中点
∴P'也为BC_1中点
NP与BC_1交于P'
∴P与P'重合