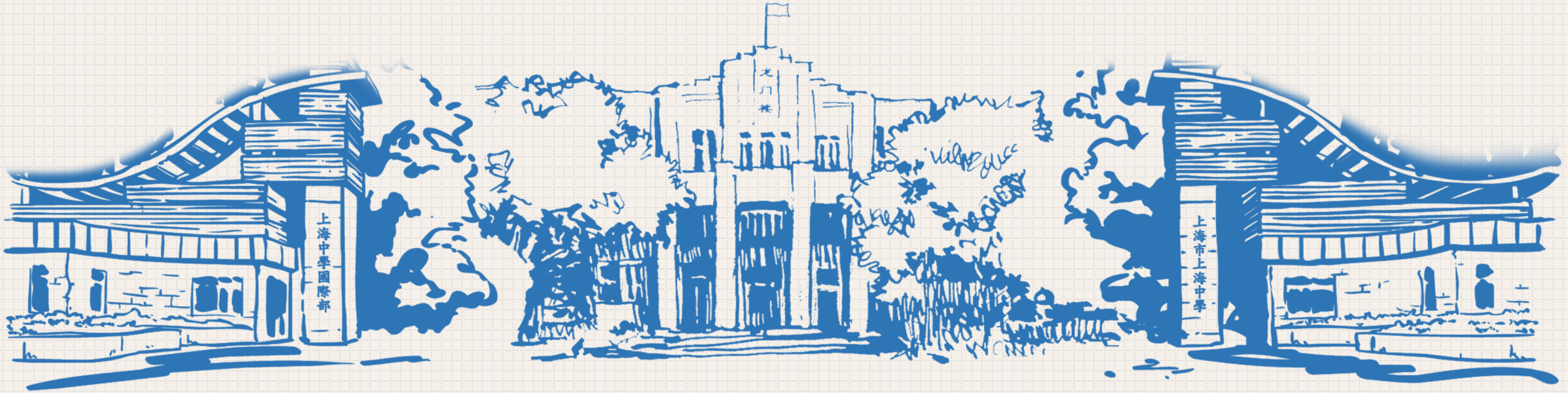
投影与三视图

课程老师：罗修文



目录

『CONTENT』

第一部分

『投影』

1 投影

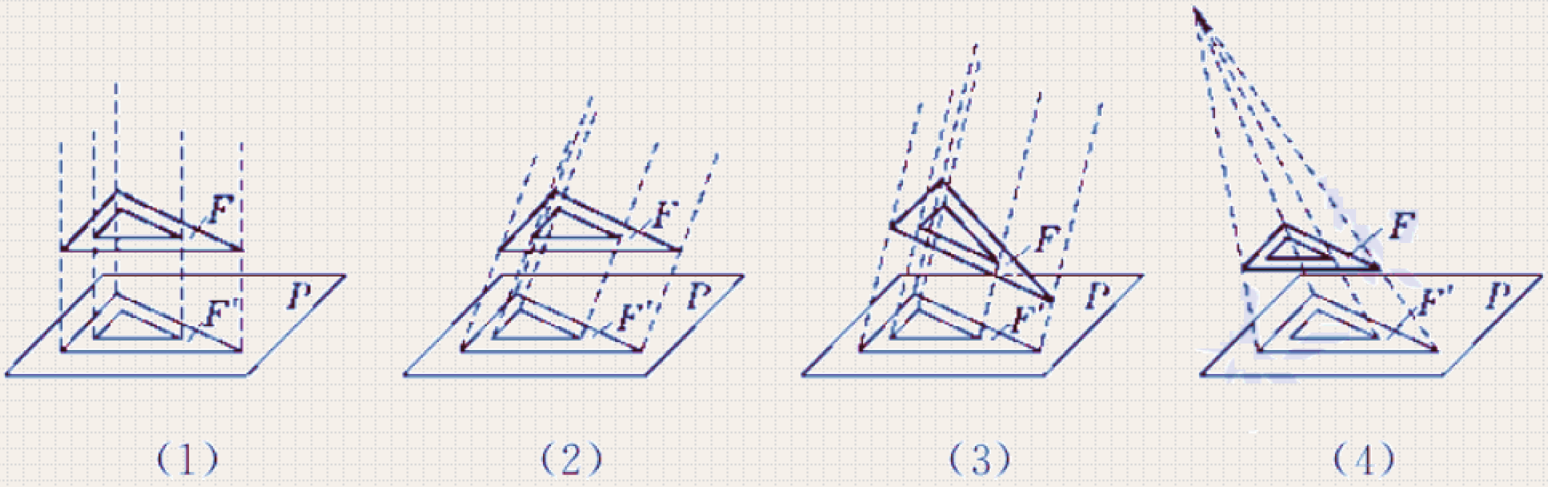
题西林壁

苏轼

横看成林侧成峰，远近高低各不同。

不识庐山真面目，只缘身在此山中。

1 投影



当光线照射到空间图形上时，会在它后面的平面上留下阴影，这阴影叫做原空间图形在平面上的投影，投影形成了空间图形的平面图.

上图中，水平放置的平面P叫做投影平面，平面图形F'是空间图形F在平面P上的投影，虚线族表示由F产生F'的投影线.

1 投影

（1）投影线的结构特征

如果投影线是共点的，那么该投影称为中心投影，公共点称为投影中心.如果投影线是互相平行的，那么该投影称为平行投影.

注：平行投影的性质

I.　直线的投影是直线或点；

II.　平行直线的投影是平行直线或一条直线或两个点；

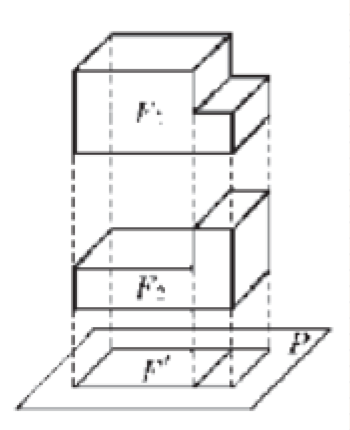
III.　线段上的定比分点投影后保持原比例不变.

（2）投影线的方向特征

在平行投影的情况下，用 α 表示投影线与投影平面 P 所成的角.当 $\alpha=90°$ 时，该投影称为正投影，其他都称为斜投影.

（3）空间图形F的位置特征

对于一个确定了位置的空间图形 F，如果规定了它的投影面 P 和投影线方向，那么由投影产生的平面图F'是唯一确定的.但是反过来，一个平面投影图对应的空间图形一般不止一个.



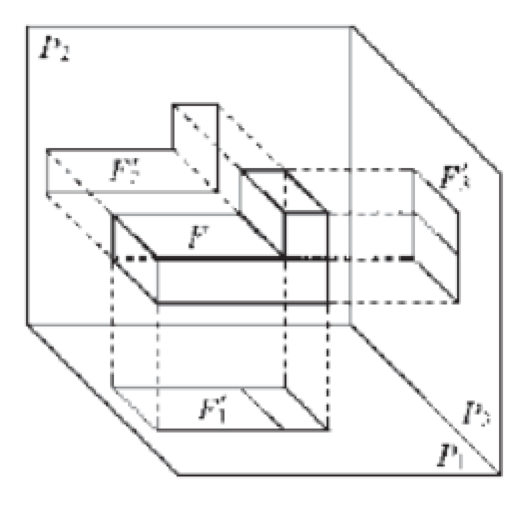
1 投影

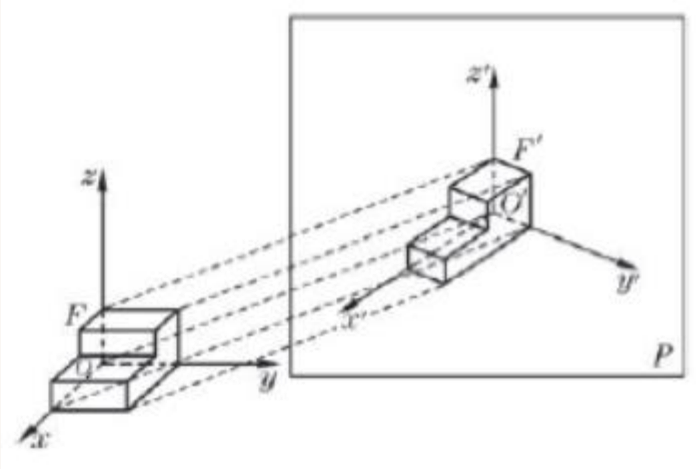
常用的投影画图方法

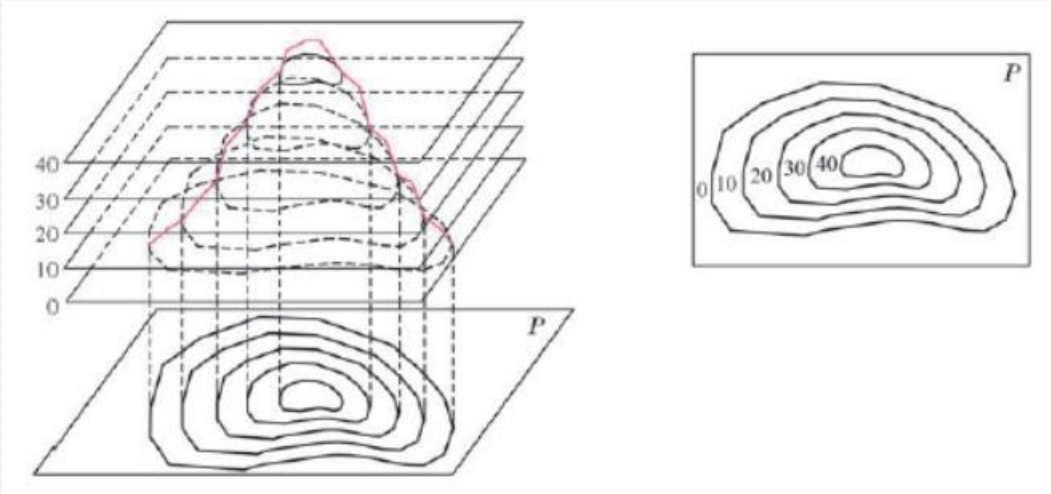
（1）多面投影法

（2）轴测法

（3）标高投影法







第二部分

『三视图』

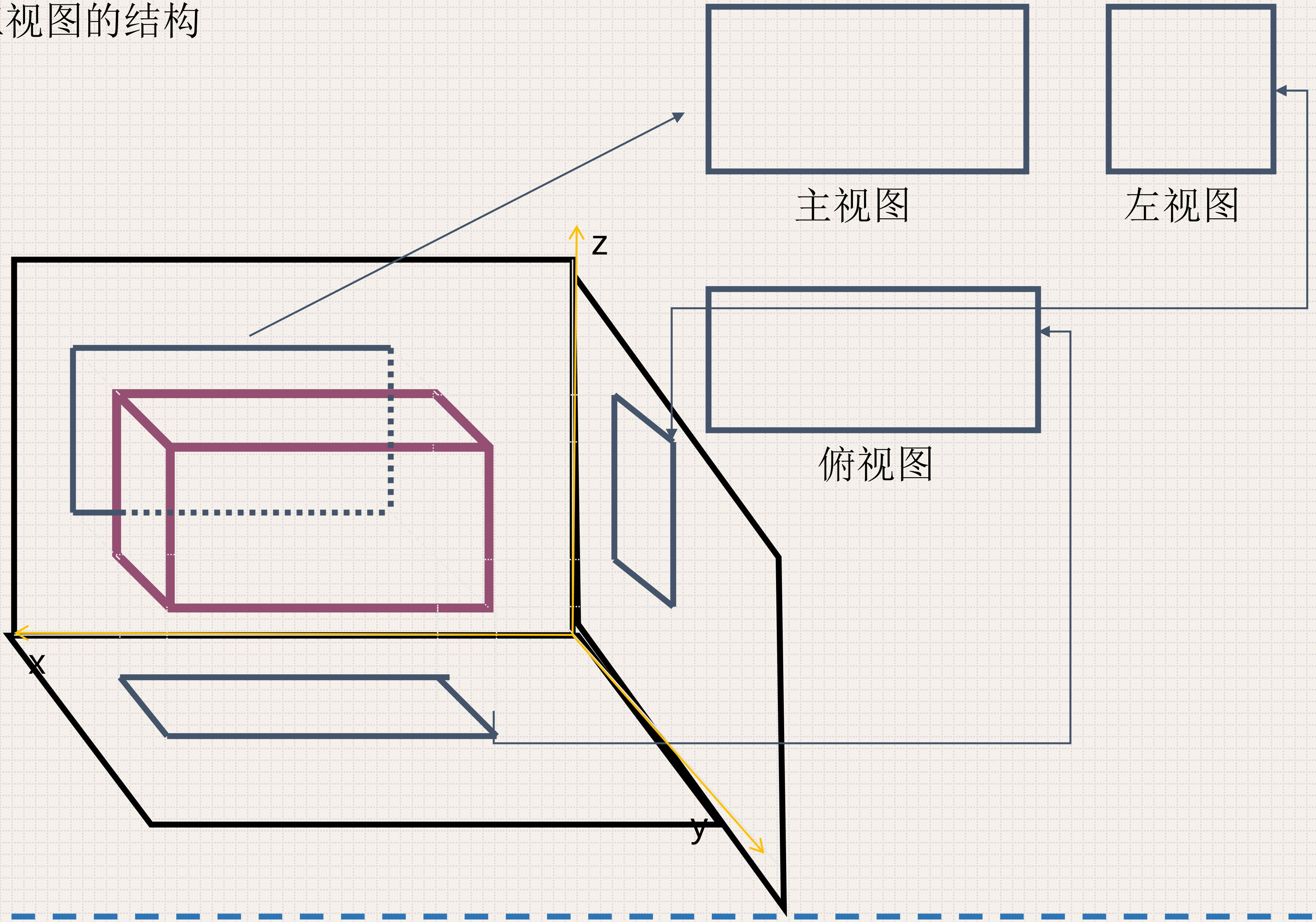
2 三视图

1.投影平面和视图

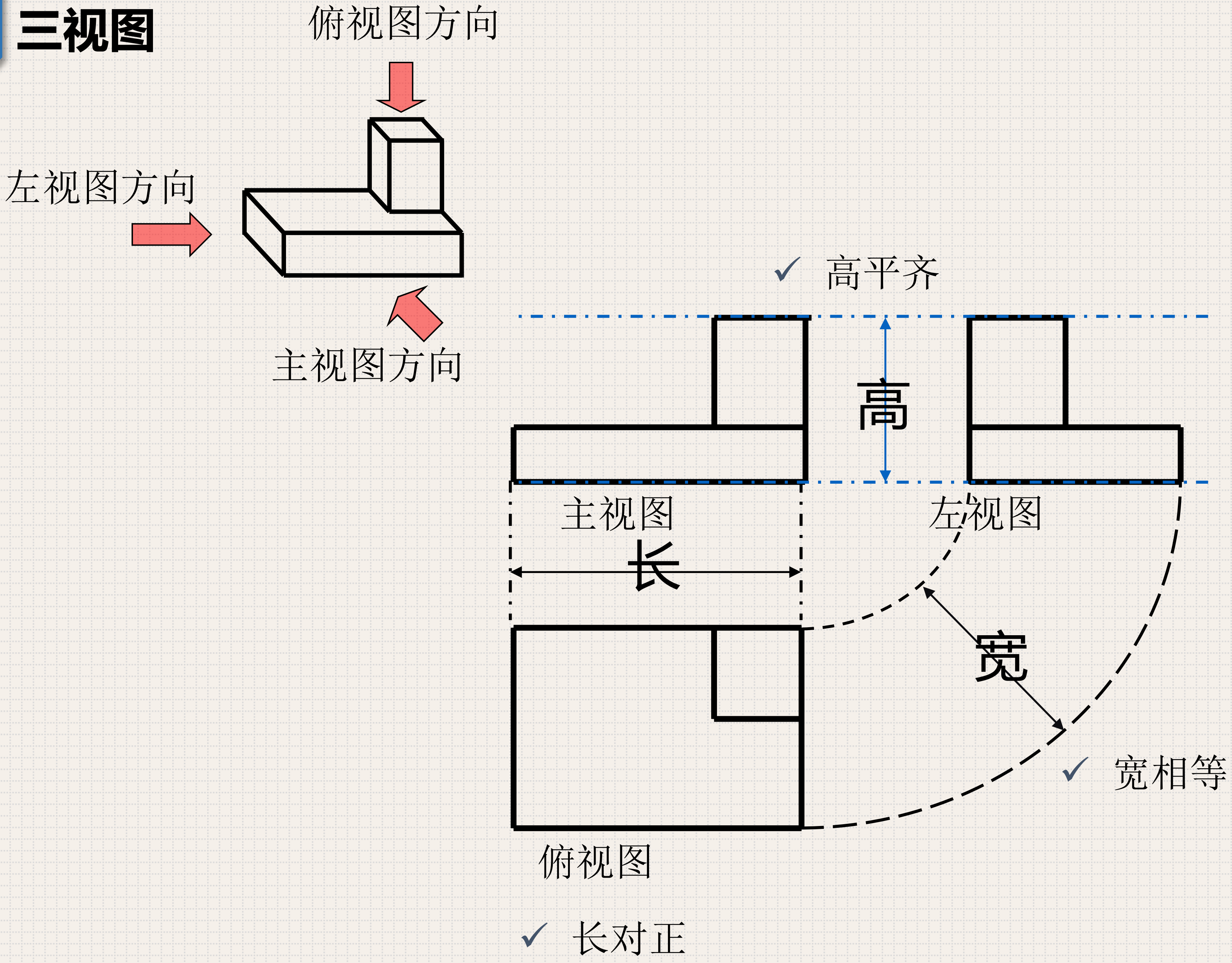
将空间直角坐标系的xOy平面、yOz平面和xOz平面作为投影平面，其中xOy平面接受由上向下方向的正投影，所得到的投影被称为图形F的俯视图；yOz平面接受由左向右方向的正投影，所得到的投影被称为图形F的左视图；xOz平面接受由前向后方向的正投影，所得到的投影被称为图形F的主视图.

2 三视图

2.三视图的结构

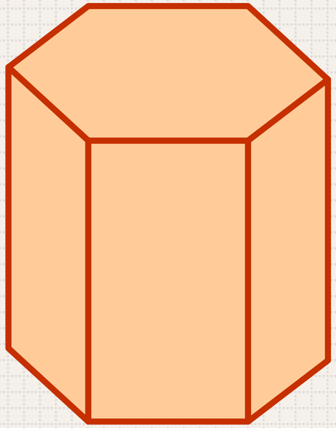


2 三视图



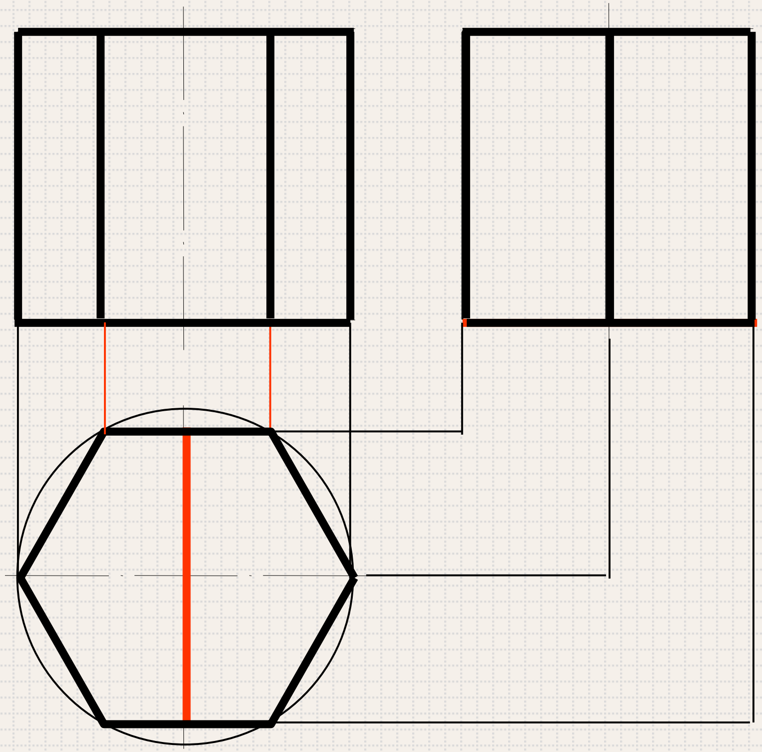
2 三视图

三视图作图步骤：
1. 形体分析
2. 确定主视图
3. 选比例
4. 布图，画基准线
5. 画三视图
6. 检查，擦去辅助线

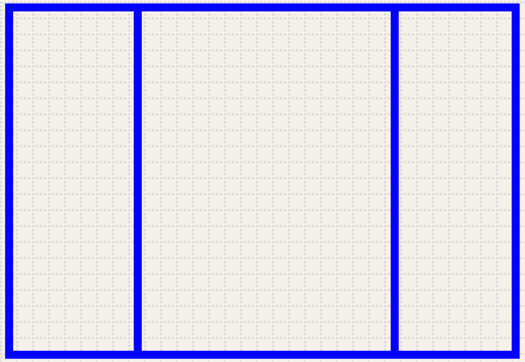


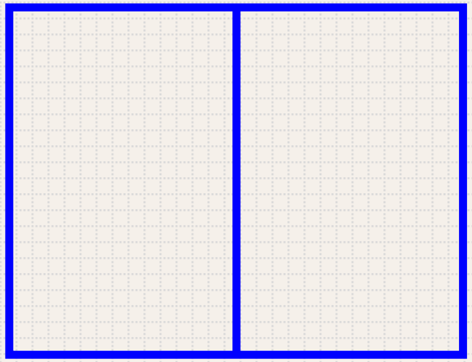
先用点画线画出水平投影的中心线，正面投影和侧面投影的对称线；

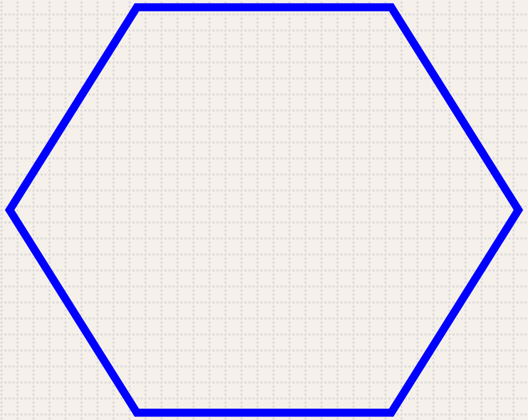
画正六棱柱的水平投影（正六边形），根据正六棱柱的高度画出顶面和底面的正面投影和侧面投影。



2 三视图

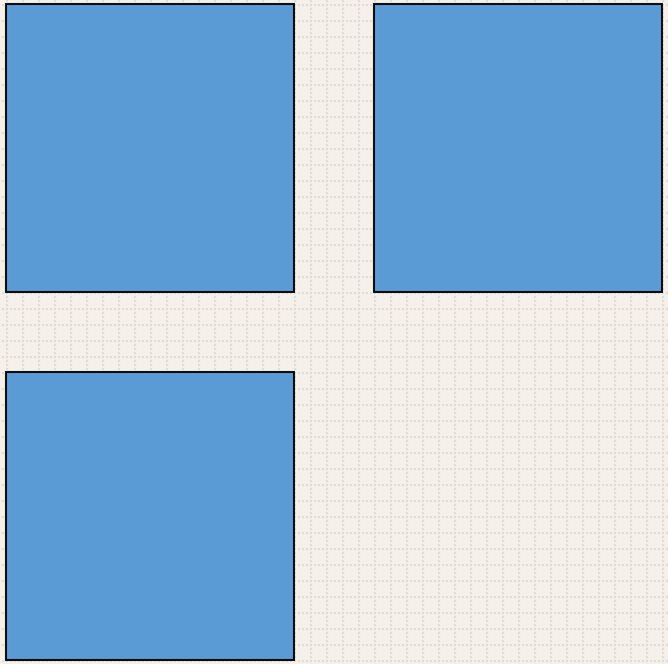

主视图

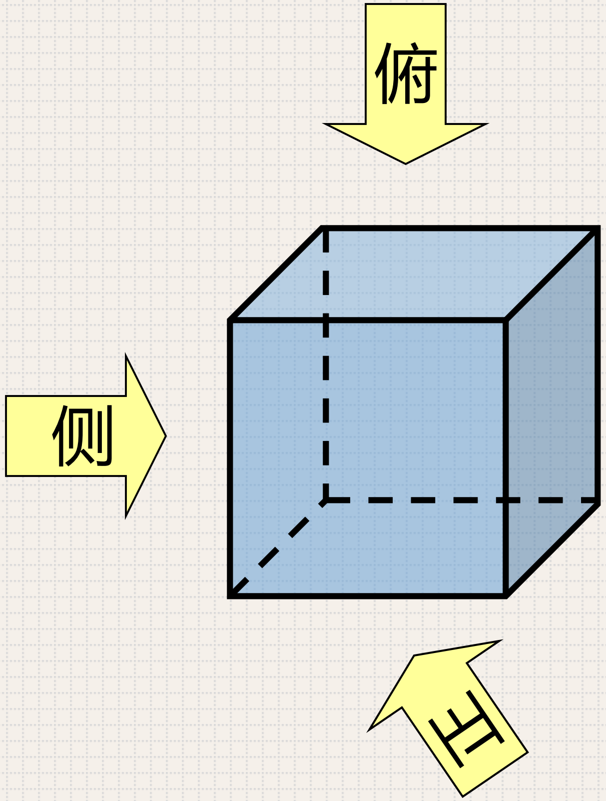

左视图


俯视图

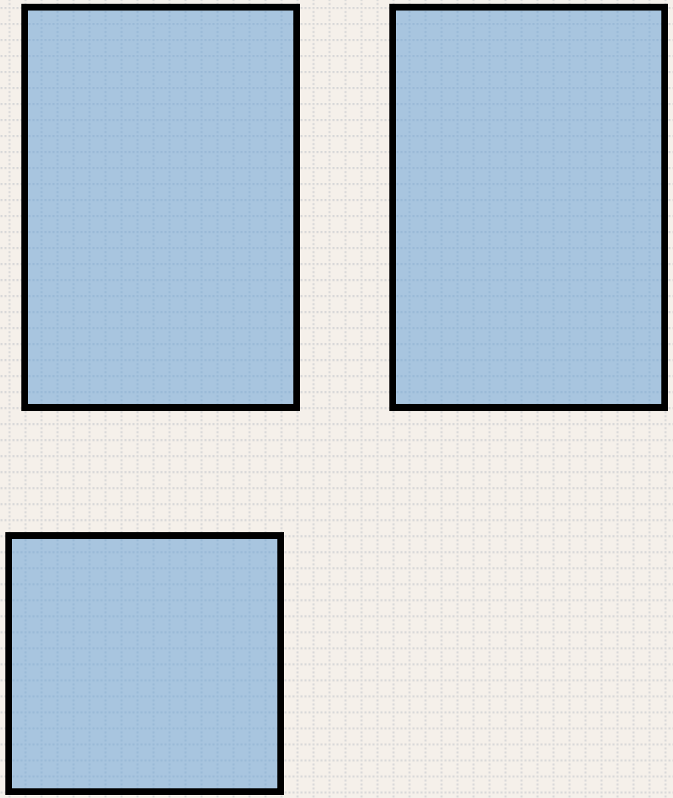
2 三视图

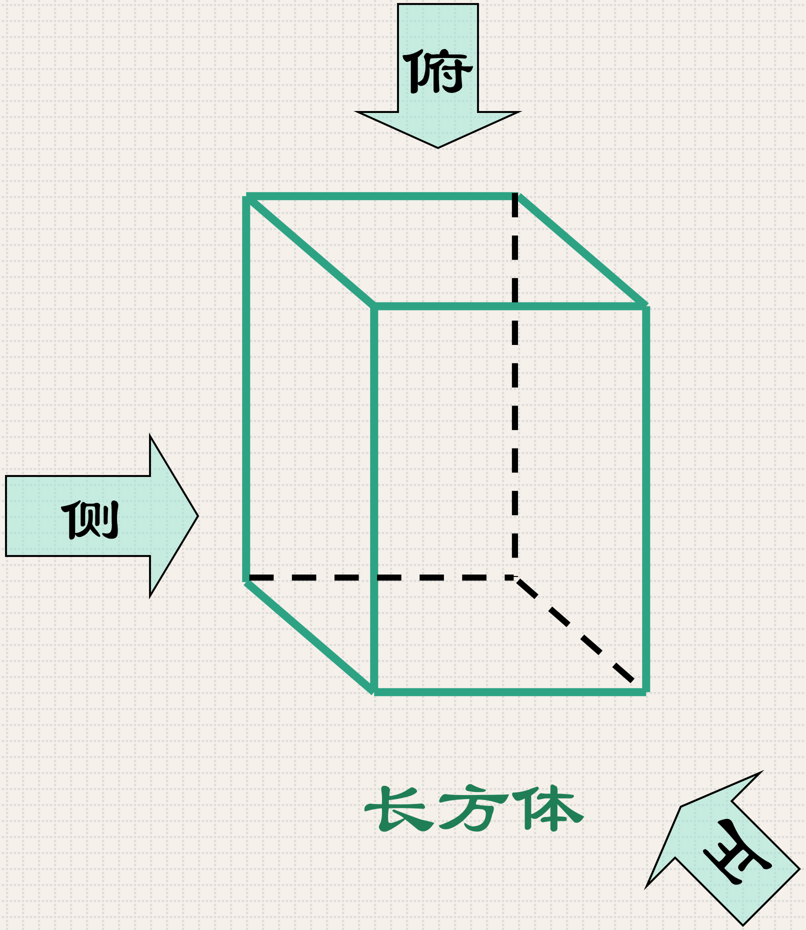
3.简单多面体的三视图



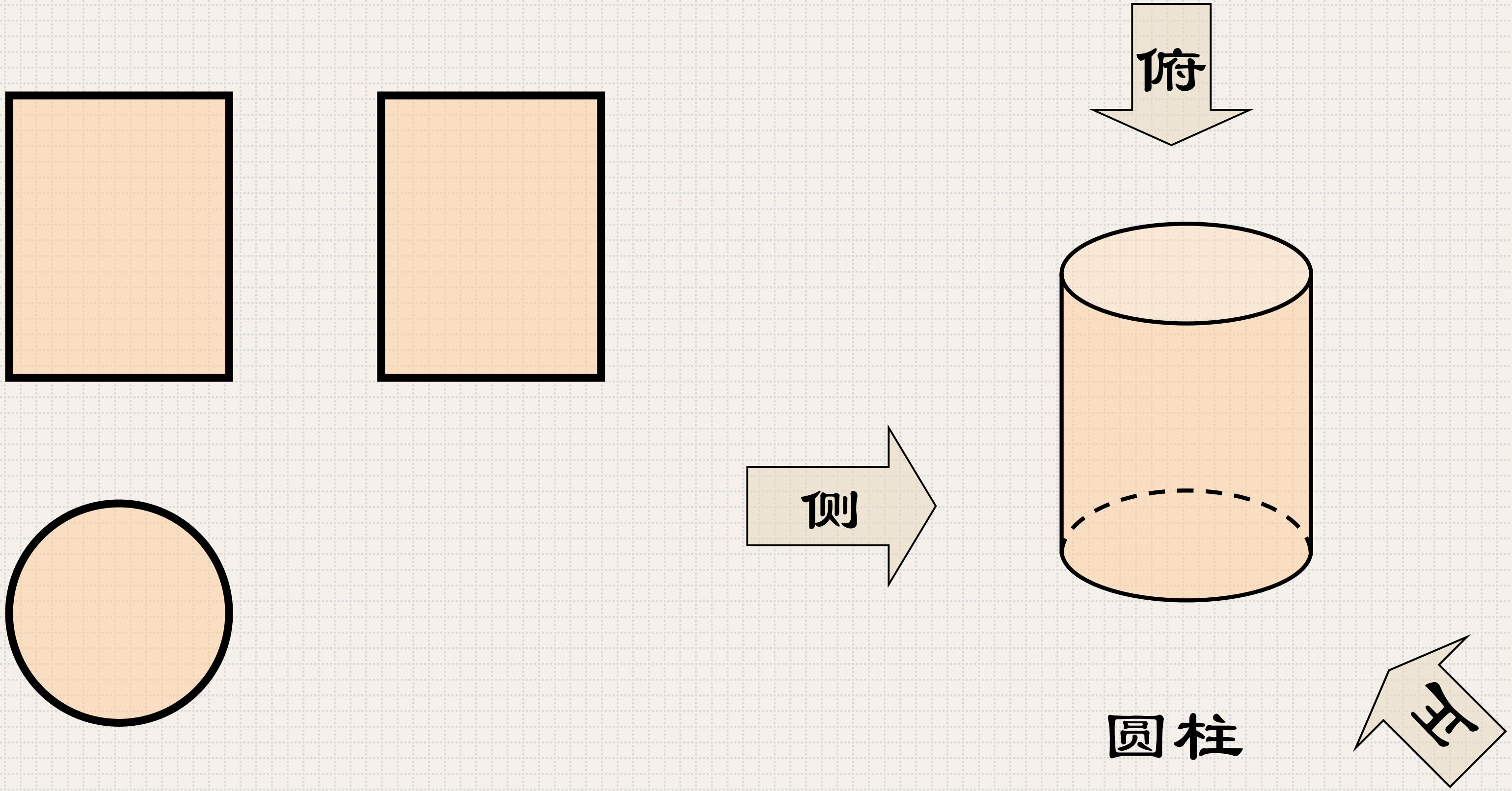


2 三视图





2 三视图



2 三视图

4.由三视图还原空间几何体

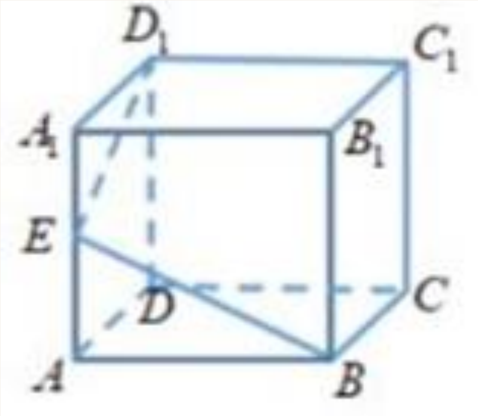
分别根据主视图、俯视图和左视图想象立体图形的前面、上面和左侧面，结合常见几何体的三视图，再综合起来考虑整体图形.

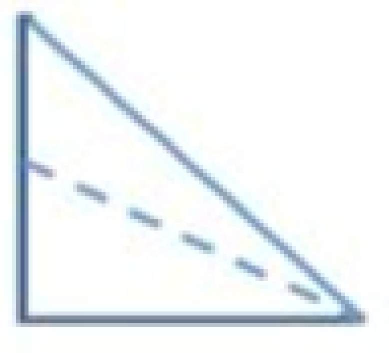
第三部分

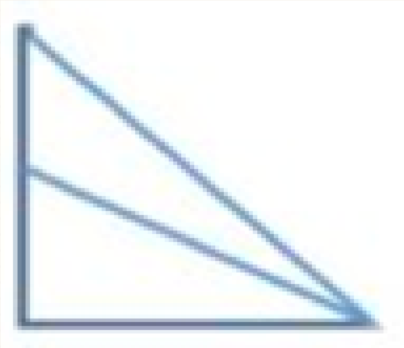
『典型例题』

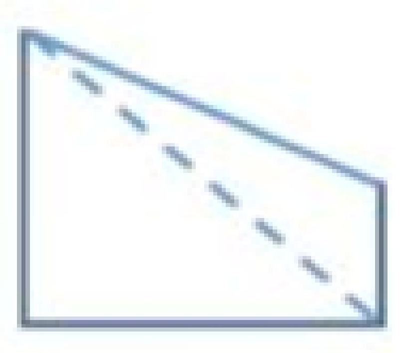
3 典型例题

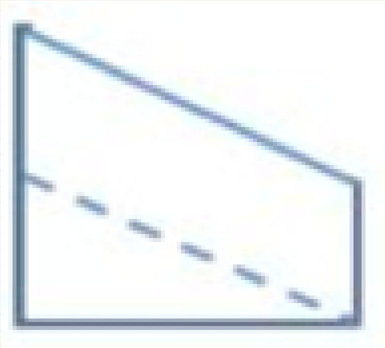
1.如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱AA_1的中点，用过点B,E,D_1的平面截去该正方体的上半部分，则剩余几何体的左视图为?





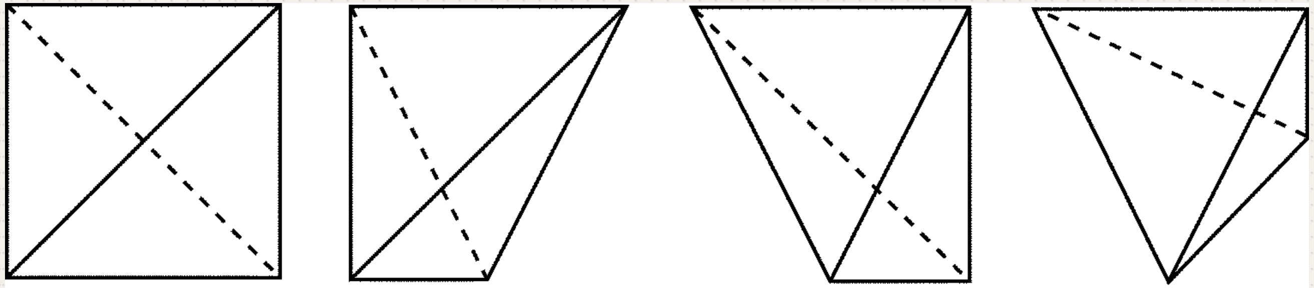






3 典型例题

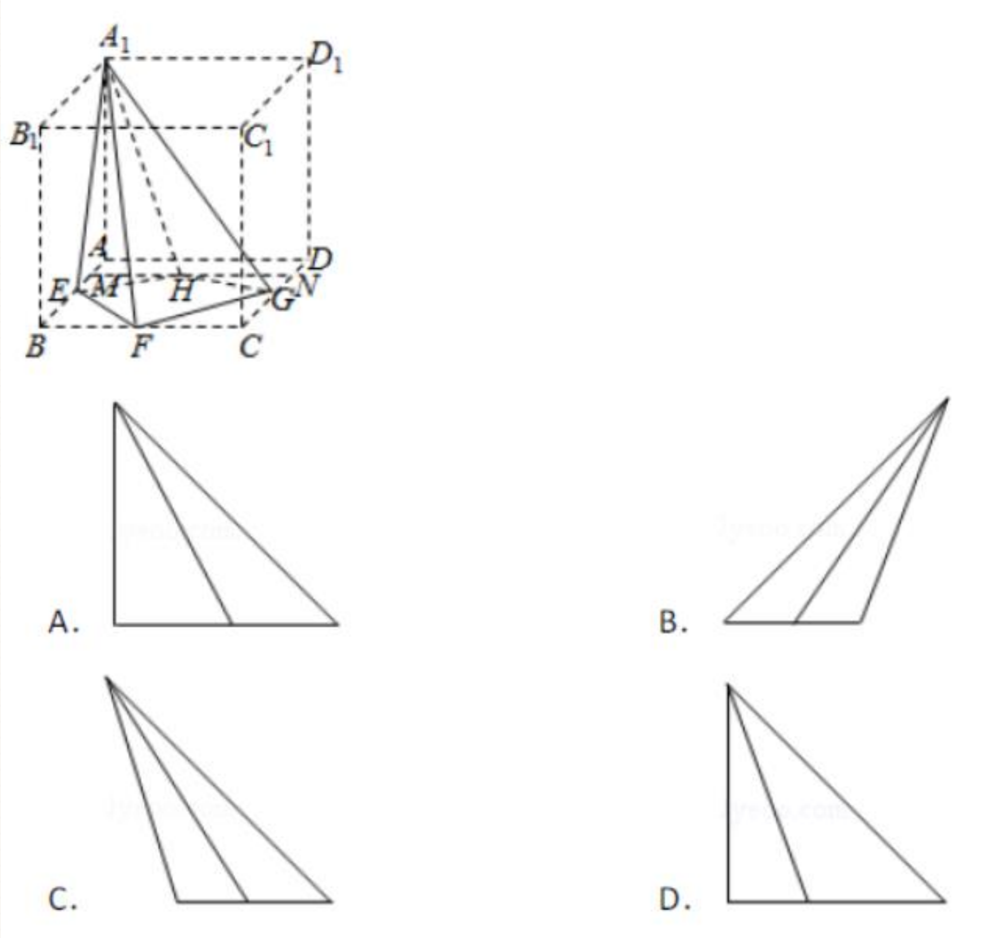
2.（2013全国卷II）一个四面体的顶点在空间直角坐标系$O-xyz$中的坐标分别是$(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,0)$，画该四面体三视图中的主视图时，以$zOx$平面为投影面，则得到的主视图可以为



A.　　B.　　C.　　D.

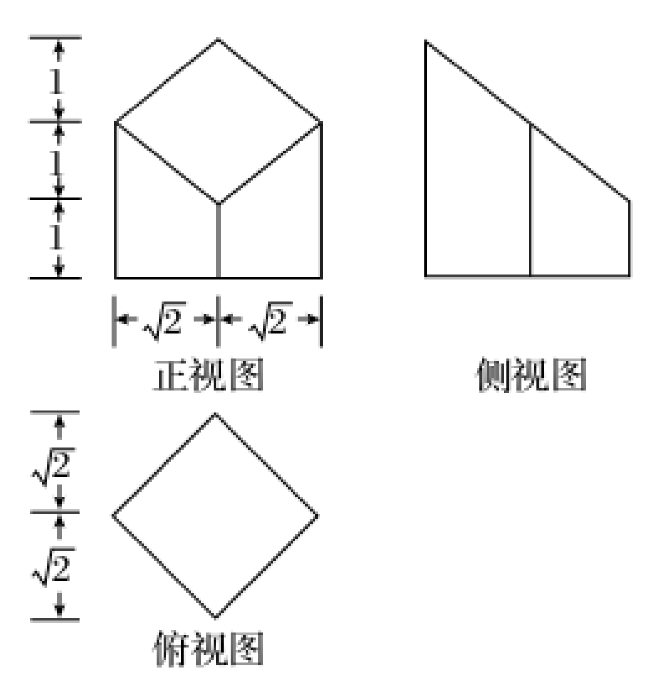
3 典型例题

3.（2017嘉定二模）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,E是AB的三等分点，G,N是CD的三等分点，F,H分别是BC,MN的中点，则四棱锥A_1-EFGH的左视图是



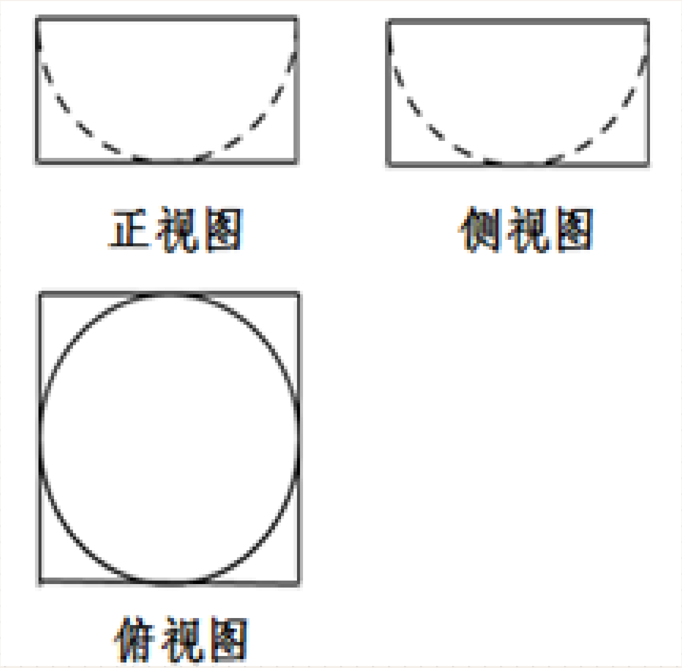
3 典型例题

4.某个长方体被一个平面所截，得到的几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为？



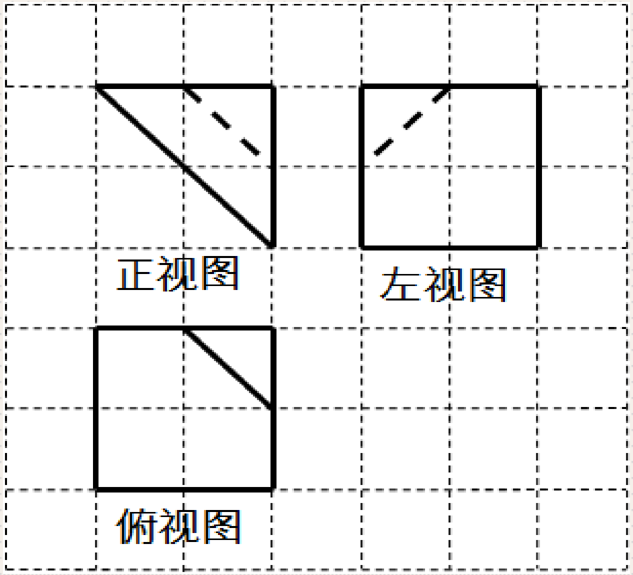
3 典型例题

5.某几何体的三视图如图所示，若该几何体的表面积为$16+\pi$，则俯视图中圆的半径为



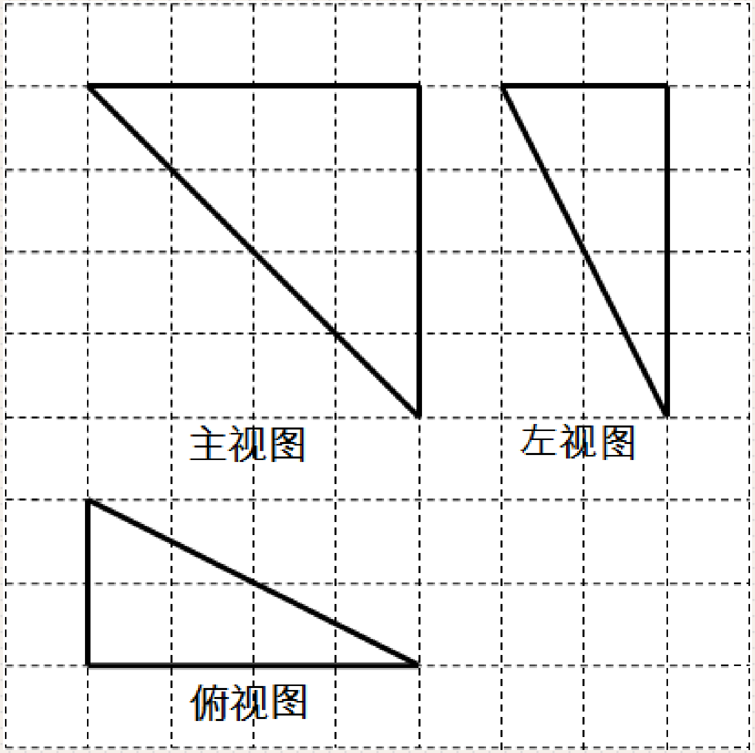
3 典型例题

6.如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



3 典型例题

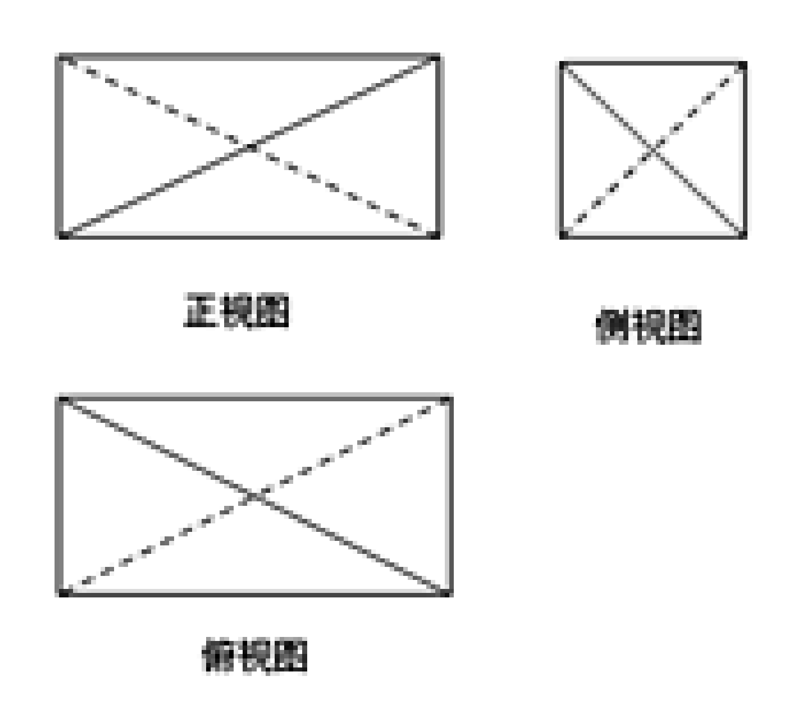
7.如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的外接球的表面积为



3 典型例题

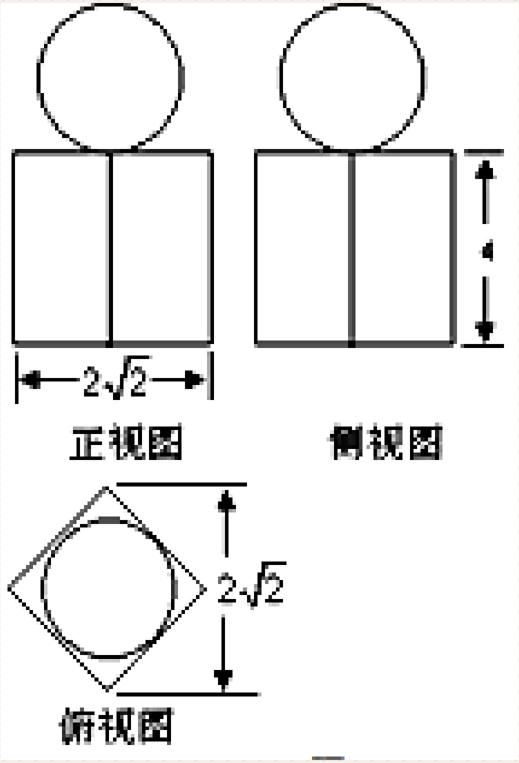
8.已知一个三棱锥的三视图如图所示，其中三视图的长、宽、高分别为2, a , b ， 且

$2a+b=\frac{5}{2}(a>0,b>0)$ ， 则此三棱锥外接球表面积的最小值为



3 典型例题

9.已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积和体积分别为

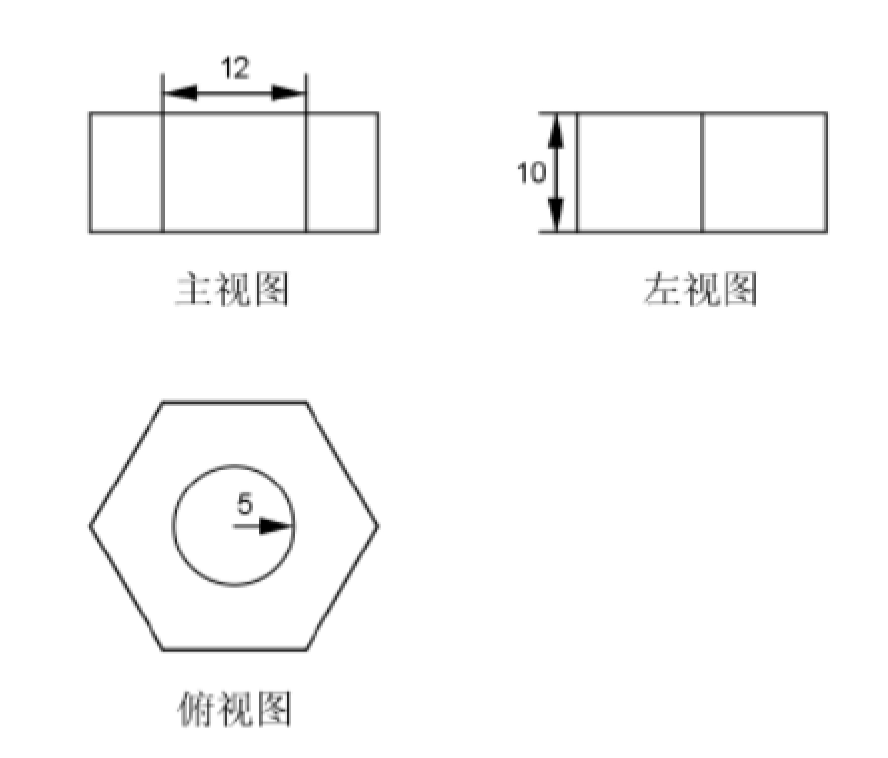


3 典型例题

10.（2017普陀一模）现有一堆规格相同的正六棱柱型金属螺帽毛坯，经测定其密度为$7.8g/cm^3$，总重量为5.8kg，其中一个螺帽的三视图如下图所示（单位：毫米）；

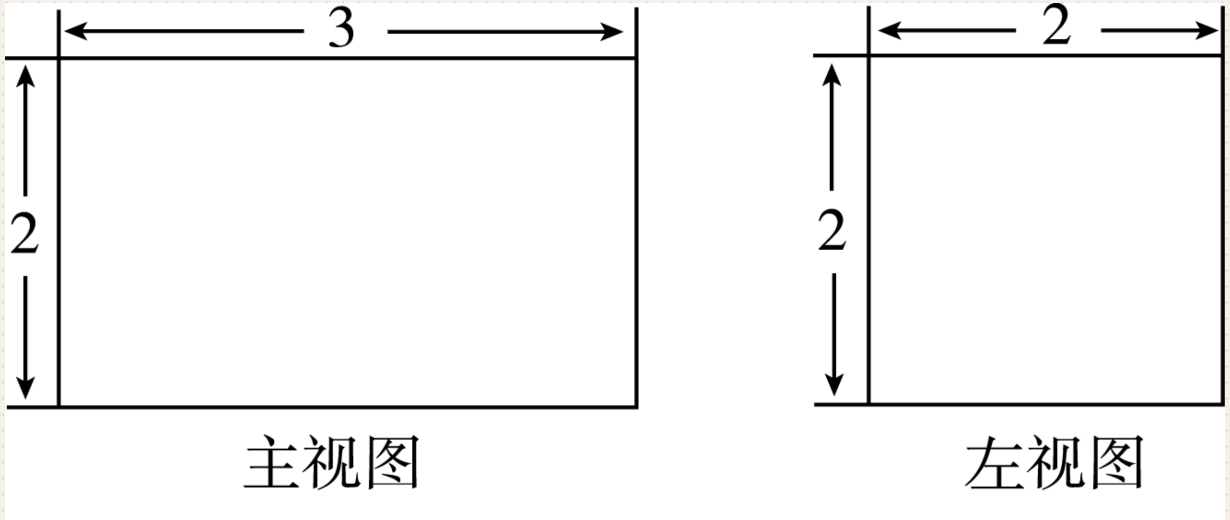
（1）这堆螺帽至少有多少个；

（2）对上述螺帽作防腐处理，每平方米需要耗材0.11千克，共需要多少千克防腐材料？（结果精确到0.01）



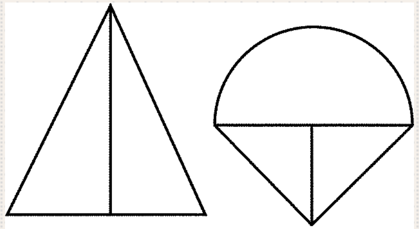
3 典型例题

11.一个简单几何体的主视图、左视图如图所示，则其俯视图不可能为：①长方形；②直角三角形；③圆；④椭圆.其中符合题意的序号是

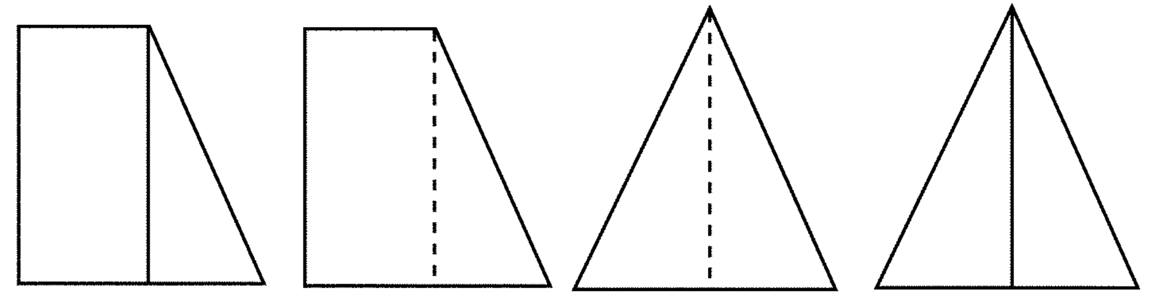


3 典型例题

12.在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如下图所示，则相应的侧视图可以为



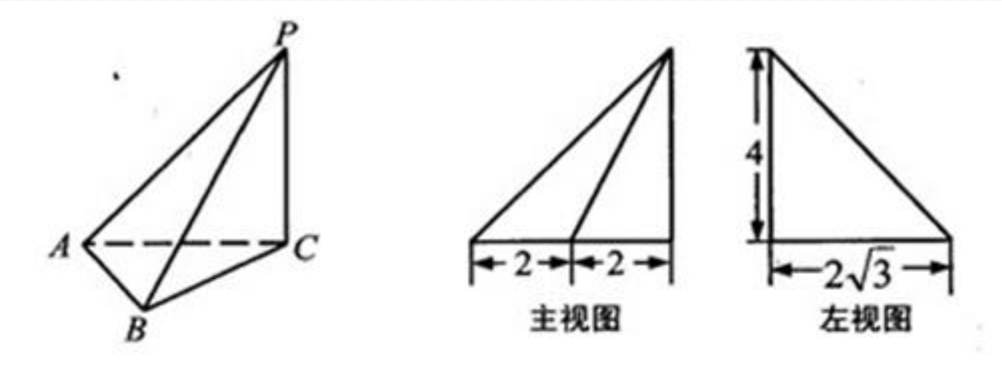
正视图　　俯视图



A.　　B.　　C.　　D.

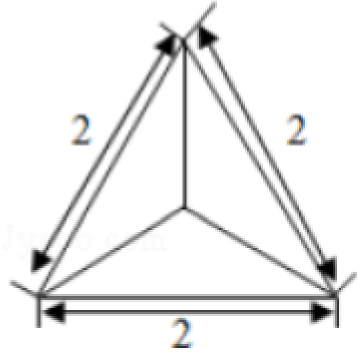
3 典型例题

13.（2018长宁嘉定二模）三棱锥 $P-ABC$ 及其三视图中的主视图和左视图如下图所示，则棱PB的长为



3 典型例题

14.（2017虹口二模）三条侧棱两两垂直的正三棱锥，其俯视图如图所示，主视图的边界是底边长为2的等腰三角形，则主视图的面积等于



俯视图

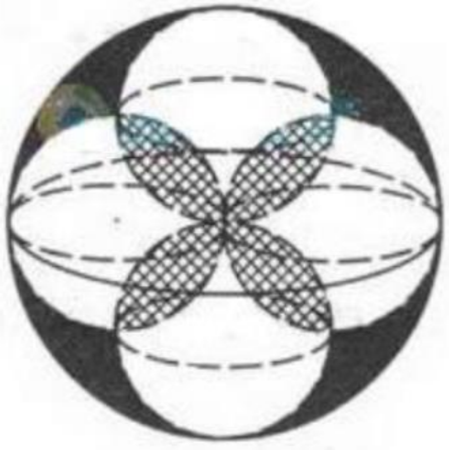
第四部分

『讲评作业』

4 讲评作业

第四周周末作业

9. 如图:体积为 V 的大球内有 4 个小球,每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点,4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点.设 V_1 为小球相交部分(图中阴影部分)的体积,V_2 为大球内,小球外的图中黑色部分的体积,则下列关系中正确的是(　　)



(A)$V_1>\dfrac{V}{2}$　　(B)$V_2<\dfrac{V}{2}$　　(C)$V_1>V_2$　　(D)$V_1<V_2$

设大球半径为R，则小球半径为$\frac{R}{2}$，则$\frac{4}{3}\pi R^3=4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3-V_1+V_2$，故

$V_2-V_1=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{V}{2}>0$，从而$V_2>V_1$.

$V_2-\frac{V}{2}=V_1>0$，从而$V_2>\frac{V}{2}$；$V_1+\frac{V}{2}=V_2<V$，从而$V_1<\frac{V}{2}$.

4 讲评作业

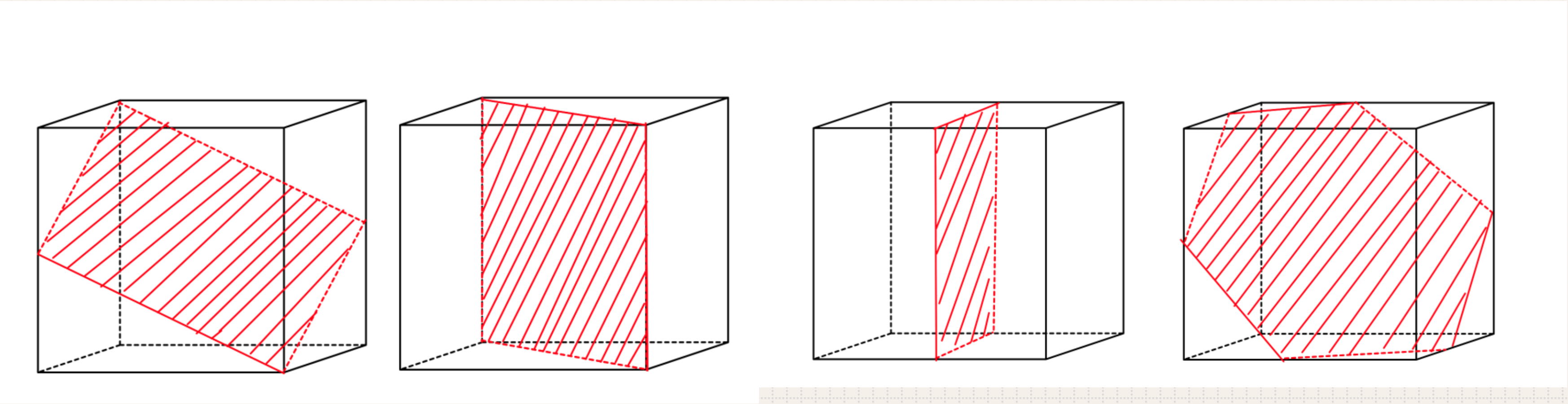
第四周周末作业

15．正方体被平面截成等积的二个部分，则截面形状可以是(1)正三角形；(2)菱形；(3)长方形；(4)正方形；(5)正六边形．其中正确的结论是________．

命题：满足题意的平面过正方体的中心.

证明：若存在平面α平方正方体的体积且不过正方体的中心，则存在一个过正方体中心且与α平行的平面β.由对称性知，正方体被β分为两个相同的部分，则β平分正方体的体积，从而正方体在α与β间的部分体积为0，即α,β重合.这与α不过正方体中心矛盾.

从而截面边界关于正方体中心对称，是对边相互平行的偶数边多边形.



4 讲评作业

第四周周末作业

16．在三棱锥中，PA⊥平面 ABC，AB⊥BC，AE⊥PB 于 E，AF⊥PC 于 F，连接 EF，则图中共有直角三角形__________个.

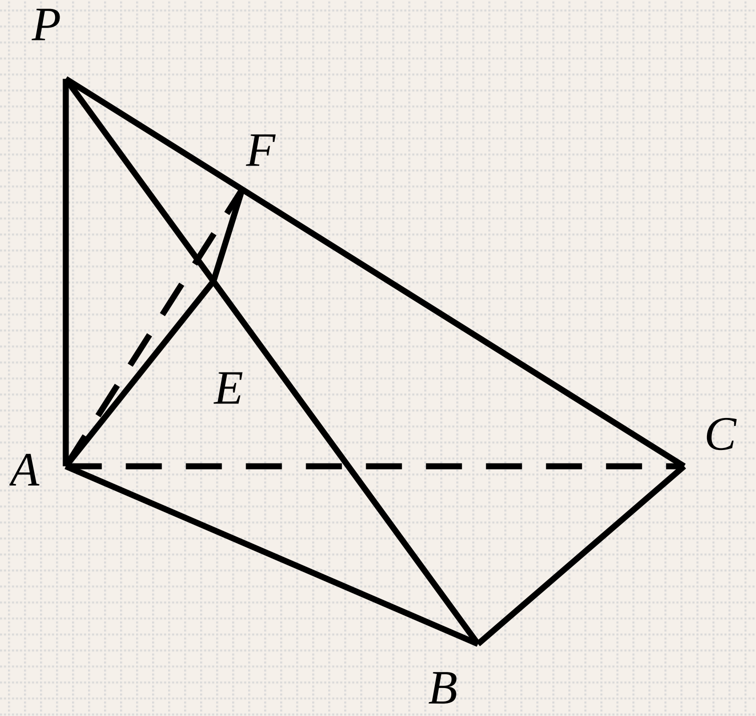
面PAC内：$\Delta PAC,\Delta PAF,\Delta AFC$

面PAB内：$\Delta PAB,\Delta PAE,\Delta AEC$

面ABC内：ΔABC

面AEF内：ΔAEF

面PBC内：$\Delta PBC,\Delta PEF$



$\because PA\perp$面ABC，$\therefore PA\perp BC$.

$\because AB\perp BC$，AB与PA是面PAB内的两条相交直线，

$\therefore BC\perp$面PAB，从而$BC\perp AE$.

$\because AE\perp PB$，PB与BC是面ABC内的两条相交直线，

$\therefore AE\perp$面PBC，从而$AE\perp EF$，$AE\perp PC$.

$\because AF\perp PC$，AF与AE是面AEF内的两条相交直线，

$\therefore PC\perp$面AEF，从而$PC\perp EF$.

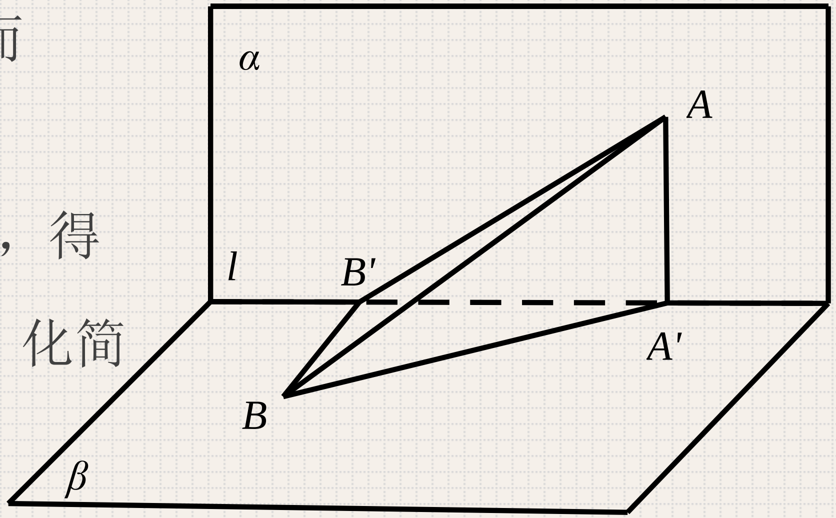
4 讲评作业

第四周周末作业

17．在直二面角α—l—β中，A∈α，B∈β，A、B 不在 l 上，AB 与α所成角为θ_1，AB 与β所成角为θ_2，AB 与 l 所成角为θ_3，则 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3=$________.

设A,B在l上的射影为A',B'，则$\angle BAB'=\theta_1$，$\angle ABA'=\theta_2$，设$AB=1$，则$AA'=\sin\theta_2, AB'=\cos\theta_1$，从而 $A'B'=\sqrt{AB'^2-AA'^2}=\sqrt{\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_2}$.

将$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}$两端同时与$\overrightarrow{A'B'}$作数量积，得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'B'}^2$，故$\cos\theta_3=\sqrt{\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_2}$，化简得$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3=1$.

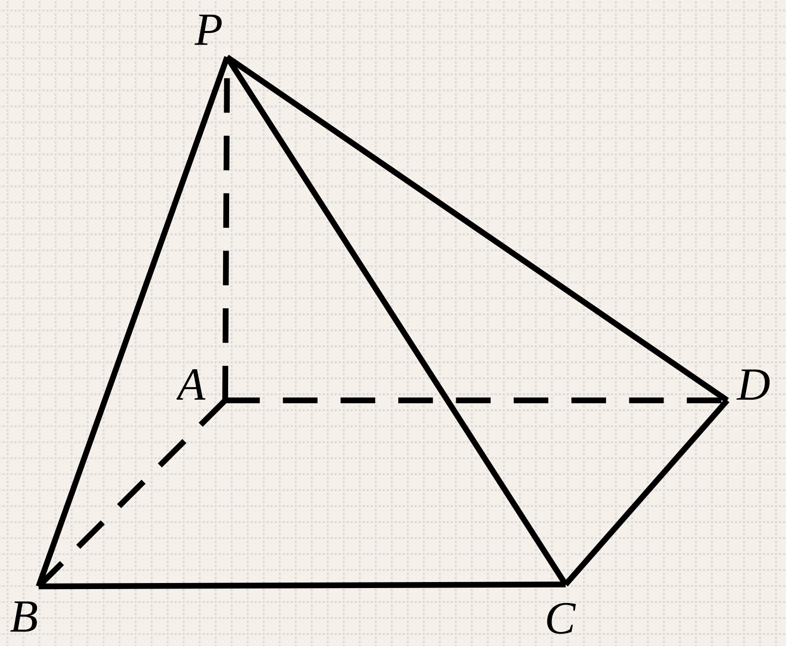


4 讲评作业

61.棱柱、棱锥（2）

在四棱锥的四个侧面中，直角三角形的个数最多可以有________个.

如图，$PA\perp$面$ABCD$，四边形$ABCD$为矩形.

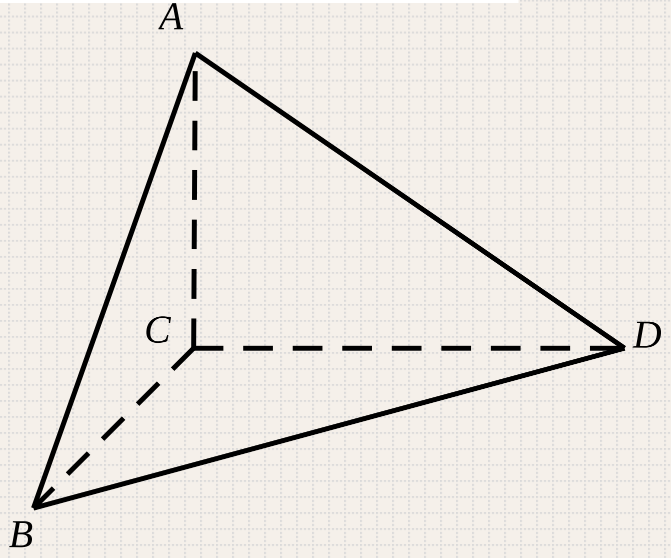


4 讲评作业

61.棱柱、棱锥（2）

3. 将正方体截下一个角，截得三个面的面积分别为 $3cm^2$，$4cm^2$，$12cm^2$，截面面积为 S，则 $S=$________.

如图，CA, CB, CD两两垂直，设$CA=a, CB=b, CD=c$，则$AB=\sqrt{a^2+b^2}, BD=\sqrt{b^2+c^2}, AD=\sqrt{a^2+c^2}$，故$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}$，$\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}$，$S=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=13cm^2$.



4 讲评作业

61.棱柱、棱锥（2）

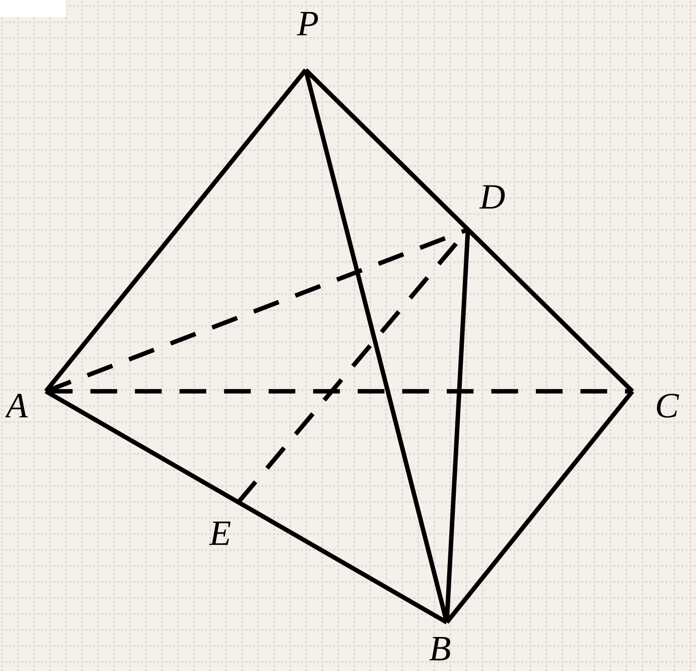
6. 正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$AB=a$，相邻两个侧面所成的二面角为 θ.（1）若 $BD\perp PC$，求 BD 的长；（2）求这棱锥的侧面积.

解：（1）取AB中点E，连结AD,ED.∵三棱锥$P-ABC$是正三棱锥，∴ $\angle DCA=\angle DCB$，∴$\triangle ADC\cong\triangle BDC$.

∵ $BD\perp PC$，∴ $AD\perp PC$，∴ $\angle ADB$即为两个侧面所成二面角的平面角，$\angle ADB=\theta$.

∵ $AD=BD$，E为AB中点，∴ DE为$\angle ADB$的角平分线，故

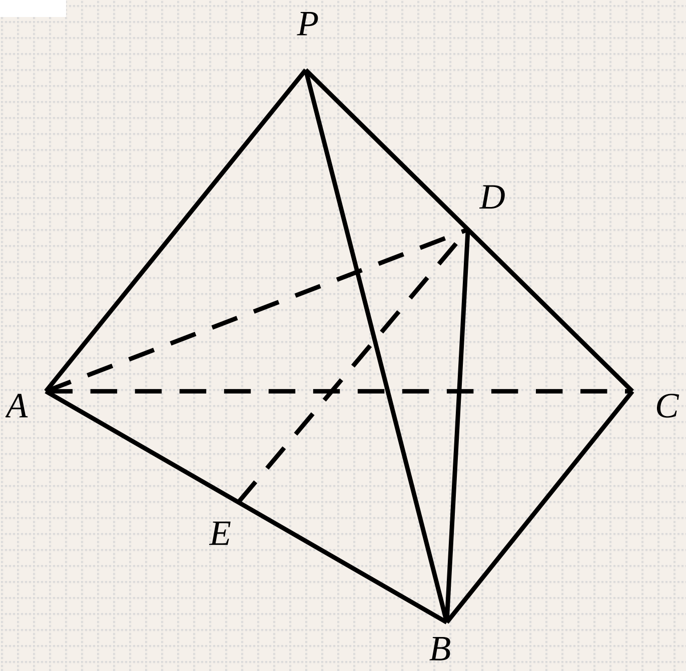
$\angle BDE=\frac{\theta}{2}$，从而$BD=\frac{BE}{\sin\angle BDE}=\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.



4 讲评作业

61.棱柱、棱锥（2）

6. 正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$AB=a$，相邻两个侧面所成的二面角为 θ. (1) 若 $BD\perp PC$，求 BD 的长；(2) 求这棱锥的侧面积.



解：（2）在$Rt\triangle BCD$中，$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,a$.

设$PB=PC=x$，则$PD=x-CD$，在$Rt\triangle PDB$中，$PB^2=PD^2+BD^2$，即$x^2=(x-CD)^2+BD^2$，即$2x\cdot CD=CD^2+BD^2=BC^2$，

$x=\frac{a^2}{2CD}$.

则棱锥的侧面积$S=\frac{3}{2}BD\cdot PC=\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{a^2}{2\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}}a}=\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}-1}}=$

$\frac{3a^2}{4\sqrt{1-2\cos\theta}}$.

第五部分

『布置作业』

5 布置作业

▷3月18日

活页：62.圆柱、圆锥

感谢观看

课程老师：罗修文