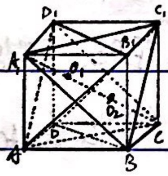
平面$\alpha \cap$平面$\beta = a$，$b \subsetneq \alpha$，$c \subsetneq \beta$，则直线b、c是异面直线的一个充分条件是 $b \cap a = A$且$c \parallel a$

56. 两个平面平行 2020.3.5

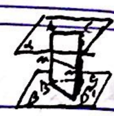
一、1. D 2. 平行或相交或异面 3. 若$a \subsetneq \beta$，$b \subsetneq \beta$，且$a \cap b = A$，$a \parallel \alpha$，$b \parallel \alpha$，则$\alpha \parallel \beta$.

二、1. 在正方体中，ABB_1A_1，~~BCC_1B_1~~ ADD_1A_1 均为正方形，故 $DD_1 \mathop{\parallel}\limits_{=} AA_1 \mathop{\parallel}\limits_{=} BB_1$ 故B_1BDD_1为平行四边形，$B_1D_1 \mathop{\parallel}\limits_{=} BD$，又$B_1$，$D$均不在面$AB_1D_1$内，~~BD~~ $B_1D_1 \subsetneq$面AB_1D_1 故 $BD \parallel$面AB_1D_1 又$ABCD$，CDD_1C_1为正方形 $AB \mathop{\parallel}\limits_{=} CD \mathop{\parallel}\limits_{=} C_1D_1$ 故ABC_1D_1为平行四边形，$BC_1 \parallel AD_1$，又B，C_1均不在面AB_1D_1内，$AD_1 \subsetneq$面AB_1D_1，故 $BC_1 \parallel$面AB_1D_1，又$BD \cap BC_1 = B$，$BD \subsetneq$面BC_1D，$BC_1 \subsetneq$面BC_1D，故面$AB_1D_1 \parallel$面C_1BD



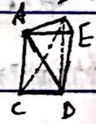
(2) 联结A_1C，A_1C_1，AC，A_1B，CD_1，设A_1C与面AB_1D_1交于O_1，与面BDC_1交于O_2，由$A_1C_1 \perp B_1D_1$，又$AA_1 \perp$面$A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1 \subsetneq$面$A_1B_1C_1D_1$ 故 $B_1D_1 \perp AA_1$，又$AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$ 故$B_1D_1 \perp$面AA_1C_1C，又 $A_1C \subsetneq$面AA_1C_1C，故 $B_1D_1 \perp$面A_1C 同理$A_1C \perp AB_1$，又$AB_1 \subsetneq$面AB_1D_1，$B_1D_1 \subsetneq$面AB_1D_1，$AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$ 故$A_1C \perp$面AB_1D_1，同理$A_1C \perp$面BC_1D，故$O_1O_2 \perp$面AB_1D_1且$O_1O_2 \perp$面C_1BD 故$|O_1O_2|$即为面AB_1D_1与面C_1BD的距离. 又$S_{\triangle A_1B_1D_1} = \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot |A_1D_1| = \frac{1}{2}a^2$. 又在$Rt\triangle AA_1B_1$中 由勾股定理$|AB_1| = \sqrt{|AA_1|^2 + |A_1B_1|^2} = \sqrt{2}a$，同理 $|AD_1| = |B_1D_1| = \sqrt{2}a$. 故 $S_{\triangle AB_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，又$V_{A_1-AB_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot |AA_1| \cdot S_{\triangle A_1B_1D_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle AB_1D_1} \cdot |A_1O_1|$ 故$|A_1O_1| = \frac{S_{\triangle A_1B_1D_1}}{S_{\triangle AB_1D_1}} \cdot |AA_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$，同理 $|CO_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 又由勾股定理 $|A_1C| = \sqrt{|AA_1|^2 + |AC|^2} = \sqrt{|A_1A|^2 + |AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{3}a$ 故$|O_1O_2| = |A_1C| - |A_1O_1| - |CO_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

故面AB_1D_1与面C_1BD间距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$

2. 

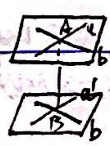
(1) 过C作$CC_1 \perp \beta$于C_1，取C_1D中点N_1，联结NN_1 则NN_1为$\triangle C_1CD$中CC_1边的中位线，$CC_1 \mathop{\parallel}\limits_{=} 2NN_1$ 又$CC_1 \perp \beta$ 故$NN_1 \perp \beta$. 又 $AB \perp \beta$. $CC_1 \perp \beta$，$\alpha \parallel \beta$ 故 $|AB|$，$|CC_1|$即为α，β平面间的距离，$|AB| = |CC_1|$ 又$|NN_1| = \frac{1}{2}|CC_1|$ M为AB中点，$|MB| = \frac{1}{2}|AB|$，故 ~~[illegible]~~ $MB \mathop{\parallel}\limits_{=} NN_1$，$MNN_1B$为平行四边形，$MN \parallel BN_1$ 又MN不在平面β内，$BN_1 \subsetneq \beta$ 故 $MN \parallel \beta$

(2) $|AB| = |CC_1| = a$，$|AC| = |BC_1| = |BD| = b$，$|CD| = c$，在$Rt\triangle CC_1D$中，$|C_1D| = \sqrt{|CD|^2 - |CC_1|^2} = \sqrt{c^2 - a^2}$ 在$\triangle BDC_1$中. N_1为C_1D中点，$BN_1 \perp C_1D$，$|DN_1| = \frac{1}{2}|C_1D| = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - a^2}$，在$Rt\triangle BDN_1$中，$|BN_1| = \sqrt{|BD|^2 - |DN_1|^2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2}$，又$MNN_1B$为平行四边形，$|MN| = |BN_1| = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2 - c^2}$

3. 

过A，C，D三点作平面γ交α于直线l，在l上取一点E使得$|AE| = |CD|$ 由$\alpha \parallel \beta$，$CD \subsetneq \beta$，故 $CD \parallel \alpha$，又$CD \subsetneq \gamma$，CD不在α上 且$\gamma \cap \alpha = AE$，故 $CD \parallel AE$，又$|AE| = |CD|$ 故 $AE \mathop{\parallel}\limits_{=} CD$，$AEDC$为平行四边形. 又$AECD$共面. $d_{B-ADC} = d_{B-ADE}$，又$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ADE}$ $V_{A-BCD} = V_{B-ACD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD} \cdot d_{B-ACD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ADE} \cdot d_{B-ADE} = V_{B-ADE} = V_{D-ABE}$. 又$|AE| = |CD| = b$，$AE \parallel CD$，$AE \cap AB = A$，故$\angle BAE$为$AB$与$CD$夹角(或其补角) 又$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$，故$\sin\angle BAE = \sin\theta$，$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AE| \sin\angle BAE = \frac{1}{2}ab\sin\theta$，又$\alpha$，$\beta$距离即为$D$到面$\alpha$距离$d_{D-ABE} = h$，故$V_{A-BCD} = V_{D-ABE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot d_{D-ABE} = \frac{1}{6}abh\sin\theta$ 故无论AB，CD怎样平移，三棱锥体积恒为$\frac{1}{6}abh\sin\theta$保持不变.

三、1. $\frac{1}{9}$，$\frac{2}{27}$ 2. ③⑤ 3. C

4. 

~~[illegible]~~ B不在a上，过B与a作平面γ与β交于a'. A不在β上，过A与a'作平面λ与α交于b'

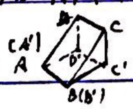
扫描全能王 创建

由 $\alpha // \beta$，$a \not\subset \alpha$ 故 $a // \beta$ 又 $a \subset \gamma$，$\gamma \cap \beta = a'$ 故 $a // a'$，同理 $b // b'$，又 AB 是 a、b 的公垂线，$AB \perp a$，$AB \perp b$，又 $b // b'$，故 $AB \perp b'$ 又 $a \cap b' = A$，$a \subset \alpha$，$b' \subset \alpha$ 故 $AB \perp \alpha$，同理 $AB \perp \beta$ 又 $AB \cap \alpha = A$，$AB \cap \beta = B$，故 AB 是 α 与 β 的公垂线.

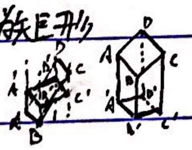
5.(1) $BB' \perp \alpha$，$CC' \perp \alpha$，故 $BB' // CC'$ 又 $CC' \subset$ 面 $CC'D'D$，BB' 不在面 $CC'D'D$ 内，故 $BB' //$ 面 $CC'D'D$. 又 $ABCD$ 为矩形，$AB // CD$ 又 $CD \subset$ 面 $CC'D'D$，AB 不在面 $CC'D'D$ 内，故 $AB //$ 面 $CC'D'D$. 又 $AB \cap BB' = B$，$AB \subset$ 面 $ABB'A'$，$BB' \subset$ 面 $ABB'A'$ 故 面 $ABB'A' //$ 面 $CDD'C'$ 又面 $ABB'A' \cap \alpha = A'B'$，面 $CDD'C' \cap \alpha = C'D'$，故 $A'B' // C'D'$ 同理 $B'C' // A'D'$ 故 $A'B'C'D'$ 为平行四边形.

(2) $AB // \alpha$ 或 $AB \subset \alpha$ 或 $CD // \alpha$ 或 $CD \subset \alpha$ 时 $A'B'C'D'$ 为矩形

1° AB 在 α 内，则 $CC' \perp \alpha$，$A'B' \subset \alpha$，$A'B' \perp CC'$ 又 $AB \perp BC$ 故 $BC \cap CC' = C$，$BC \subset$ 面 BCC'，$CC' \subset$ 面 BCC'，故 $A'B' \perp$ 面 BCC' 又 $B'C' \subset$ 面 BCC' 故 $A'B' \perp B'C'$，故 $A'B'C'D'$ 为矩形.



2° 当 BC 或 CD 或 AD 在 α 内，同理，$A'B'C'D'$ 为矩形

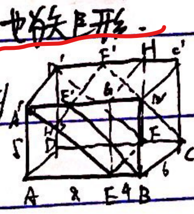


3° $AB // \alpha$，则 $CC' \perp \alpha$，$A'B' \subset \alpha$，故 $A'B' \perp CC'$，又 $AB \perp BC$，$BC \cap CC' = C$，$BC \subset$ 面 BCC'，$CC' \subset$ 面 BCC'，故 又 $AB // A'B'$ 故 $AB \perp CC'$ 故 $AB \perp$ 面 BCC'，又 $A'B' // AB$，$A'B' \perp$ 面 BCC'，~~故 矩形~~ 又 B, C, B', C' 共面，故 $A'B' \perp B'C'$ 故 $A'B'C'D'$ 为矩形

与 AB，CD 在 α 同侧还是异侧无关

4° $BC // \alpha$ 或 $CD // \alpha$ 或 $AD // \alpha$ 同理.

故当 $ABCD$ 一条边在 α 内或平行于 α 时 $A'B'C'D'$ 也为矩形.



6. 过 E' 作 $E'H' \perp A'E$ 于 H'. 在 $A'B'$ 上截 $|B'G| = |BE|$ 在 $C'D'$ 上截 $|C'H| = |CF|$ 则 $B'G // BE$，$B'GEB$ 为平行四边形 $BB' // EG$，又 $BB' \perp$ 面 $A'B'C'D'$，$EG \perp$ 面 $A'B'C'D'$ 又 $EG \subset$ 面 $EFHG$，故 $EFHG \perp$ 面 $A'B'C'D'$，同理 $EFHG \perp$ 面 $ABB'A'$，故 $AEFD - A'GHD'$ 为长方体. $V_{AEFD-A'GHD'} = |AE| \cdot |EF| \cdot |AA'| = 2V_{AEA'-FDD'} = \frac{2}{3}V_{ABCD-A'B'C'D'} = \frac{2}{3} \cdot |AA'| \cdot |AB| \cdot |BC|$

故 $|AE| = \frac{2}{3}|AB| = 8$，$|EB| = |AB| - |EA| = 4$. 又在 $Rt\triangle AA'E$ 中，$|A'E| = \sqrt{|AA'|^2 + |AE|^2} = \sqrt{89}$，$\cos\angle AA'E = \frac{|AA'|}{|A'E|} = \frac{5}{89}\sqrt{89}$ 又 $\angle B'A'E + \angle AA'E = \frac{\pi}{2}$，$\sin\angle E'A'H' = \cos\angle AA'E = \frac{5}{89}\sqrt{89}$，$|E'H'| = |A'E'| \sin\angle E'A'H' = \frac{20}{89}\sqrt{89}$ 又 $E'H' \perp A'E$，$A'D' \perp$ 面 $ABB'A'$ $E'H' \subset$ 面 $ABB'A'$ 故 $E'H' \perp A'D'$ 又 $A'D' \cap A'E = A'$ 故 $E'H' \perp$ 面 $A'EFD'$ 又面 $A'EFD' //$ 面 $BCF'E'$ 故 $E'H' \perp$ 面 $BCF'E'$ 又 $E'H' \cap A'EFD' = H'$，$E'H' \cap BCF'E' = E'$，故 $E'H'$ 是两平行平面距离，故两平行平面距离为 $\frac{20}{89}\sqrt{89}$.