

55. 直线与平面垂直

一、基本训练题

1. 如图, 设 $PO \perp$ 平面 AOB , PA, PB 与平面 AOB 所成角分别为 $30^\circ, 45^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, $PO = 10$, 则 P 到 AB 的距离为 $5\sqrt{2}$.

2. 如图, $\angle BAC$ 在平面 α 内, PA 是 α 的斜线, 若 $\angle PAB = \angle PAC = \angle BAC = 60^\circ$, $PA = a$, 则点 P 到 α 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

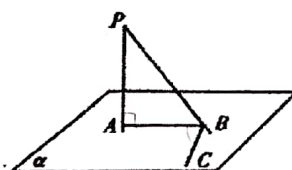
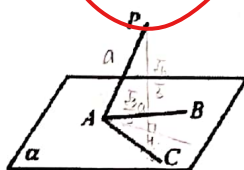
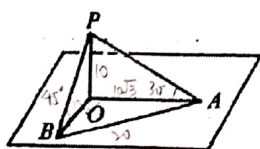
3. 如图, 从平面 α 外一点 P 向平面 α 引垂线和斜线, A 为垂足, B 为斜足, 射线 $BC \subset \alpha$, 且 $\angle PBC$ 为钝角, 设 $\angle PBC = x$, $\angle ABC = y$, 则有 (C.)

(A) $x > y$

(B) $x = y$

(C) $x < y$

(D) x, y 的大小关系不确定



二、典型例题

1. l_1, l_2 是异面直线, $A, B \in l_1, A_1, B_1 \in l_2, AA_1 \perp l_2, BB_1 \perp l_2$.

(1) 当 A_1, B_1 重合时, 求证: $l_1 \perp l_2$; (2) 当 l_1, l_2 所成角为 θ

($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 且 $AB = a$ 时, 求 A_1B_1 的长.

解: (1) $AA_1 \perp l_2, BB_1 \perp l_2$

且 $AA_1 \cap BB_1 = A_1$

$\therefore l_2 \perp$ 平面 AA_1B_1

又 $l_1 \subset$ 平面 AA_1B_1

$\therefore l_1 \perp l_2$

(2) 过 B 作 $l_2' \parallel l_2$

在 l_2' 上取 $BC = AB_1$

$\therefore l_2' \parallel l_2, AB_1 = BC$

\therefore 四边形 AA_1B_1C 为平行四边形

$\therefore A_1C \parallel AB_1$

$\therefore BB_1 \parallel A_1C$

又 $BB_1 \perp l_2$

$\therefore A_1C \perp l_2$

又 $A_1C \perp l_2, AA_1 \perp l_2$

$\therefore A_1C \perp$ 平面 AA_1B_1

又 $l_1 \subset$ 平面 AA_1B_1

$\therefore l_1 \perp$ 平面 AA_1B_1

$\therefore l_1 \perp l_2$

又 l_1, l_2 所成角为 θ

$\therefore l_1$ 与 l_2' 所成角为 θ

$\therefore \angle ABC = \theta$

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中

$BC = AB \cos \theta = a \cos \theta$

又 $AB_1 = BC$

$\therefore A_1B_1 = a \cos \theta$

2. 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC =$

$\angle BC_1C = 90^\circ, A_1C_1 = a, BC_1 = 2a$. (1) 求证: $CC_1 \perp$ 平面 ABC_1 ; (2)

求 BC_1 与平面 A_1B_1BA 所成的角.

解: $AA_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

又 $CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

又 $CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC

