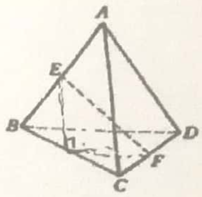
53. 空间两直线的位置关系

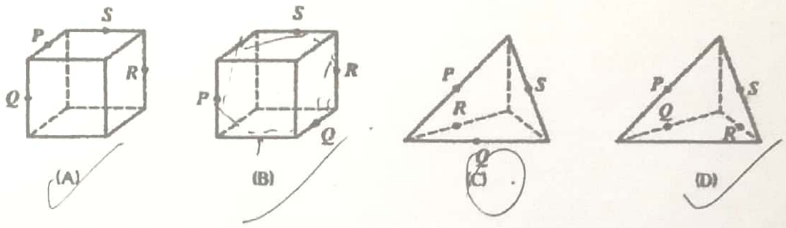
一、基本训练题



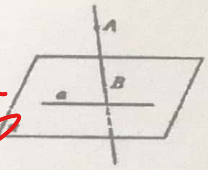
1. 已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta=a$，$b\subset\alpha$，$c\subset\beta$，则直线 b，c 是异面直线的一个充分条件是 a,b相交且a,c平行 .（只需填写一个.）

2. 如图，在正四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、CD 的中点，则 EF 与 AC 所成角的大小为 45° .

3. 下列各图是正方体或四面体，P、Q、R、S 分别是所在棱的中点，这四个点不共面的一个图是 （C）



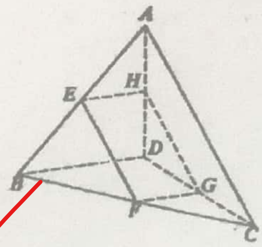
二、典型例题



1. 已知：$a\subset$ 平面 α，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$. 用反证法证明：直线 AB 和 a 是异面直线.

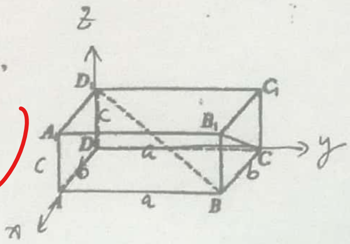
解：证：假设直线AB和a不是异面直线.
则 $\exists$ 平面 β s.t. $a\subset\beta$，$AB\subset\beta$.
由于直线 a 与直线外一点 B 唯一确定了平面 α
$\therefore \beta=\alpha$ 重合
$\therefore AB\subset\alpha$
$\therefore A\in\alpha$，矛盾！
$\therefore$ 假设不成立. 故直线AB和a是异面直线.

2. 设 E，F，G，H 依次是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB，BC，CD，DA 的中点（如图），设 $AC+BD=a$，$AC\cdot BD=b$，求 EG^2+FH^2 的值.



解：$EH \parallel \frac{1}{2}BD \parallel FG$，$EF \parallel \frac{1}{2}AC \parallel HG$.
$\therefore EFGH$ 是平行四边形
$\therefore EG^2+FH^2 = EF^2+FG^2-2EF\cdot FG\cos\angle EFG$
$+ EF^2+FH^2-2EF\cdot FH\cos\angle FEH$
$=2(EF^2+FG^2)=\frac{1}{2}(AC^2+BD^2)=\frac{1}{2}a^2-b$.

3. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$，求异面直线 BD_1 和 B_1C 所成角的余弦值.

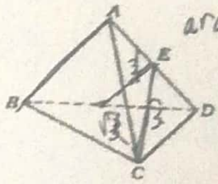


解：如图建系（只有长方体允许）
则 $B(b,a,0)$，$D_1(0,0,c)$
$B_1(b,a,c)$，$C(0,a,0)$
$\therefore \overrightarrow{BD_1}=(-b,-a,c)$.
$\overrightarrow{B_1C}=(-b,0,-c)$.
设异面直线所成角为 θ
则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}\right|=\left|\dfrac{b^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}\right|=\dfrac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$

要有

三、测试题

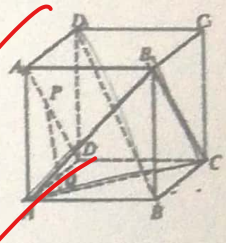
1. 如图，在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，六条棱长均相等，E 是 AD 的中点，则 AB 和 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，PQ 是异面直线 A_1D 和 AC 的公垂线，则直线 PQ 与 BD_1 的关系是 (B)

(A) 异面直线　　(B) 平行

(C) 垂直不相交　　(D) 垂直相交



3. 在正方体的一个面所在的平面内任意画一条直线，则与它异面的正方体的棱的条数是 (B)

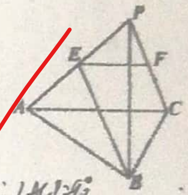
(A) 4 或 5 或 6 或 7　　(B) 4 或 6 或 7 或 8

(C) 6 或 7 或 8　　(D) 4 或 5 或 6

4. 如图，已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点，E 为 PA 的中点，F 为 PC 的中点，$BE\perp AC$，$PC\perp AC$.

(1) 求证：EF 是 BE，PC 的公垂线；

(2) 若 $PA=a$，$PC=b$，求异面直线 BE，PC 的距离.



解：(1) ∵ EF // AC，BE ⊥ AC

∴ EF ⊥ BE.

∵ EF // AC，PC ⊥ AC

∴ EF ⊥ PC

又 ∵ EF ∩ BE = E，EF ∩ PC = F

∴ EF 是 BE、PC 的公垂线

(2) 由 (1)，BE、PC 的距离就是 EF

∵ ∠ACP = 90°

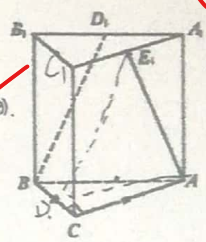
∴ $AC^2+CP^2=AP^2$

∴ $AC=\sqrt{a^2-b^2}$

∴ $EF=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

∴ 距离为 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

5. 如图，$ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，$\angle ACB=90^\circ$，点 D_1，E_1 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，若 $BC=CA=CC_1$，求 BD_1 与 AE_1 所成角的余弦值.



解：取 BC 中点 D.

则 $D_1E_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}B_1C_1 \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC \mathrel{\underline{\parallel}} BD$

∴ BDE_1D_1 是平行四边形

∴ $BD_1 \parallel DE_1$

∴ BD_1 与 AE_1 所成角是 $\angle AE_1D$（或其补角）.

设 $BC=CA=CC_1=2a$.

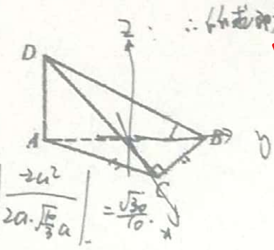
$AE_1=AD=\sqrt{5}a$，$AB=2\sqrt{2}a$.

$DE_1=BD_1=\sqrt{6}a$.

∴ $\cos\angle AE_1D=\frac{AE_1^2+E_1D^2-AD^2}{2AE_1\cdot DE_1}=\frac{5a^2+6a^2-5a^2}{2\cdot\sqrt{5}a\cdot\sqrt{6}a}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$

∴ 所成角余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

6. 如图，在三棱锥 $D\text{-}ABC$ 中，$DA\perp$平面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle ABD=30^\circ$，$AC=BC$，求异面直线 AB 与 CD 所成的角的余弦值.



解：以 AB 中点 O 为原点，如图建系.

设 OA = OB = OC = a.

则 C(a, 0, 0)，A(0, −a, 0)，B(0, a, 0)

D(0, −a, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$)

∴ $\overrightarrow{AB}=(0, 2a, 0)$

$\overrightarrow{CD}=(-a, -a, \frac{2}{3}\sqrt{3}a)$

设所成角为 θ

则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}\right|=\left|\frac{-2a^2}{2a\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}a}\right|=\frac{\sqrt{30}}{10}$

∴ 所成角余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

以 O 为原点，分别以 … 为 x、y、z

四、说明

1. 本节复习内容为：(1) 平面的性质（三个公理及其推论）；(2) 空间两直线的位置关系；(3) 两异面直线所成的角；(4) 给出公垂线的两异面直线的距离.

2. 通过复习，应初步掌握反证法. 证明两直线异面常用反证法外，本节例 1 即教材第 10 页的结论也可用来证明两直线异面.

3. 通过平移，把两异面直线所成角转化为两相交直线所成角时，注意异面直线所成角的取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

且图中也要建系（不要左手系）