

42. 复数的基本概念

一、基本训练题

1. 若 x 是纯虚数, y 是实数, 且 $2x-1+i=y-(3-y)i$, 则 $x=$ _____, $y=$ _____.
2. 已知 $i^{3m}=i^n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$), 则 $i^{m+n}=$ _____.
3. 设复数 $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 写出两个 z 为纯虚数的必要且不充分条件是 _____ 或 _____.
4. 如果 z 为复数, 那么由复数 $z, \bar{z}, \overline{\bar{z}}, |z|, |\bar{z}|, |z|^2, |\bar{z}|^2$ 所组成的集合中, 最多含有的元素个数是 ()
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
5. 设 z_1, z_2 为复数, 则下列四个结论中正确的是 ()
(A) 若 $z_1^2+z_2^2>0$, 则 $z_1^2>-z_2^2$ (B) $|z_1-z_2|=\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}$
(C) $z_1^2+z_2^2=0$ 的充要条件是 $z_1=z_2=0$ (D) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$ 一定是实数

二、典型例题

1. 已知 $x=\sqrt{2a+1}+ai$ ($a \in \mathbb{R}$ 且 $a \geq -\frac{1}{2}$), 若 $z=x-|x|+(1-i)$ 分别为实数、虚数、纯虚数和在第二象限, 求实数 a 的取值.

2. (1) 复数 $z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}$, 若 $z^2+az+b=1+i$, 求实数 a, b 的值;
(2) 已知 $a-1+2ai=-4+4i$, 求复数 a ;
(3) 若复数 z 满足 $z\bar{z}+2i\bar{z}=3+ai$, 且 $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$, 求实数 a 的取值范围.

3. 复数 z 和 w 满足: $zw+2iz-2iw+1=0$.

(1) 若 $\bar{w}-z=2i$, 求 z 和 w ;

(2) 求证: 若 $|z|=\sqrt{3}$, 则 $|w-4i|$ 的值是一个常数, 并求出这个常数.

