

47. 复数的几何意义

一、基本训练题

1. 若 $z = \frac{(i - \sqrt{3})^3 (3 + 4i)^3}{(1 + i)^4}$, 则 $|z| =$ _____.
2. 若 $|z - 3| = \sqrt{17}$, $|z - 2| = 4$, 则 $z =$ _____.
3. 已知 $|z_1| = 1$, $|z_2| = \sqrt{3}$, $|z_1 - z_2| = 2$, 则 $|z_1 + z_2| =$ _____.
4. 满足 $|z - 1| - |z + 1| = 2$ 的复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是_____.
5. 如果复数 z 满足 $|z + i| + |z - i| = 2$, 那么, $|z + i + 1|$ 的最小值是 ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

二、典型例题

1. 已知关于 x 的方程 $x^2 + zx + 4 + 3i = 0$ 有实数根, 求复数 z 的模的最小值.
2. (1) 已知复数 $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ 满足 $|z - 4i| - |z + 2| = 0$, 求 $2^x + 4^y$ 的最小值;
(2) 设复数 z 满足 $2|z - 3 - 3i| - |z| = 0$, 求 $|z|$ 的最大值和最小值.
3. (1) 已知复数 z 满足 $|z - 2 - i| = 2$, 求复数 $\omega = \frac{1 - iz}{1 + iz}$ 的对应点的轨迹方程;
(2) 连结椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点 F 与椭圆上一动点 P 作正方形 $FPAB$ (F, P, A, B 为顺时针方向排列), 求点 P 沿椭圆绕行一周时, B 点的轨迹.

三、测试题

1. $z \in C, |z|=1, u = \frac{z(z-a)}{az-1} (a \in R)$, 则 $|u| =$ _____.
2. 在复平面内, 已知等比三角形的两个顶点所表示的复数分别为 $2, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则第三个顶点对应的复数为_____.
3. $z \in C, 1 \leq |z| \leq \sqrt{2}$, 则复数 $u = \bar{z} \cdot (1+i)$ 在复平面内对应的图形的面积为_____.
4. 已知 $|z_1 - 1| = |z_1|, z_1 z = -1$, 则复数 z 在复平面上对应的点恒在 ()
A. 定直线上 B. 定椭圆上 C. 定圆上 D. 定双曲线上
5. 设 $z \in C$, 且 $\frac{z}{z-1}$ 是纯虚数, 则 $|z+i|$ 的最大值为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
6. 已知复数 $z = \frac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2} (a \in R)$, 且 $|z| = \frac{2}{3}$, 求 a .
7. (1) 复平面内 P、Q 两点对应的复数分别为 $z_1, z_2, |z_1|=2, z_2=1+iz_1$, 求点 Q 的轨迹方程;
(2) 设复数 z 满足不等式 $0 < z + \frac{17}{z} \leq 8$, 求出 z 在复平面上所对应点的轨迹.
8. 已知 $\triangle ABO$ 在复平面内, O 是原点, A、B 对应的复数分别为 α, β , 且:
(1) $|\alpha-3|=1$; (2) $\beta = (-1+i)\alpha$, 求 $\triangle ABO$ 的面积的最大值和最小值.