高二数学练习17 2/26

一. 18. 令 $M(t,\ t^2+6t+10)$

则 $z_1 = t + (t^2+6t+10)i$

又 $\because z_2 = 2-2i$

$\therefore z = [t-(t^2+6t+10)i]i - (2-2i)$

$= ti + (t^2+6t+10) - 2 + 2i$

$= (t^2+6t+8) + (t+2)i$

记 $N(t^2+6t+8,\ t+2)$

$x = t^2+6t+8 = (t+2)(t+4)$

$\therefore y = t+2$，有 $x = y(y+2)$

$\therefore z$ 的轨迹方程 $x = y^2+2y$

一. 12. 显然 $a, b \neq 0$.

$f(x)=0$ 的根为 a, b. $g(x)=0$ 的根为 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$.

对 $x^2 - 4\sqrt{3}x\cos 2\theta + 2 = 0$ 两边除以 x^2 后有

$1 - \frac{4\sqrt{3}\cos 2\theta}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$ ① 它的两根 α, β 同时也是

$2x^2 + 4x\sin 2\theta + 1 = 0$ ② 的两根.

$\begin{cases} 2t^2 - 4\sqrt{3}\cos 2\theta \cdot t + 1 = 0 \\ 2x^2 + 4\sin 2\theta \cdot x + 1 = 0 \end{cases}$ 两方程根一致

$\therefore 4\sqrt{3}\cos 2\theta = -4\sin 2\theta$ 于是 $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

又 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $\therefore \theta = \frac{5}{6}\pi$

二. 18 (2)

由 $z_1 \cdot z_2 = 3i$ 可以知道 $\begin{cases} a\cos A - b\cos B = 0 & ① \\ a\cos B + b\cos A = 3. & ② \end{cases}$

由 ① 可知 $a\cos A = b\cos B$. $\therefore \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a}$.

由正弦定理 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}$ 于是 $\sin B\cos B = \sin A\cos A$

$\therefore \sin(2A) = \sin(2B)$ $\because 0<A<\pi,\ 0<B<\pi$.

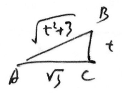
$\therefore 2A = 2B$ 或 $2A+2B = \pi$ 即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

1° $A=B$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

$\because b=\sqrt{3}$. $A=B$ $\therefore a=b=\sqrt{3}$. 又由 ② 可知

$\sqrt{3}\cos A + \sqrt{3}\cos A = 3$. $\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 于是 $A = \frac{\pi}{6}$.

2° $A+B=\frac{\pi}{2}$. $\triangle ABC$ 为直角三角形.



如左图. $a\cos B + b\cos A = \frac{t^2}{\sqrt{3+t^2}} + \frac{3}{\sqrt{3+t^2}} = 3$

解出 $t=\sqrt{6}$. $\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $A = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$

综上. $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 且 $A = \frac{\pi}{6}$.

或 $\triangle ABC$ 为直角三角形 且 $A = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$

三/19

(1) $\because \overline{w}\cdot\overline{z}-w=0$

$\therefore \overline{z}=\frac{w}{\overline{w}}$. $\therefore |z|=\left|\frac{\overline{w}}{w}\right|=1$

$\therefore$ z对应点在x轴下方

$\therefore -1<\frac{1-ra^2}{1+a^2}<1$ 又$\because r=2$

$\therefore 0<a^2<2$ $\therefore a\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$

(2) $u=|z^2-z+2|$. $\because z\cdot\overline{z}=1$

$\therefore u=|z^2-z+2z\cdot\overline{z}|=|z|\cdot|z-1+2\overline{z}|$

$=|z-1+2\overline{z}|$

设 $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. 则 $|z|=x^2+y^2=1$

$u=|(3x-1)-yi|=\sqrt{(3x-1)^2+y^2}=\sqrt{(3x-1)^2+1-x^2}$

$=\sqrt{8x^2-6x+2}$

记 $f(x)=8x^2-6x+2$ $\because x\in[-1,1]$. 进一步有

$x=\frac{1-ra^2}{1+a^2}=\frac{r+1}{1+a^2}-r\in(-r,1]$

$\Rightarrow$ $r=1$时，$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{3}{8}$ 对称.

$f(x)$此时无最大值. 当u取最小值时，$a=\pm\frac{\sqrt{55}}{11}$.

当 $r\geq 2$ 时. 则 $f(x)$ 定义域为 $[-1,1]$

$\therefore f(x)_{max}=f(-1)$ $f(x)_{min}=f(\frac{3}{8})$ 不合题意.

综上. 当 $r=1$ 时 u有最小值，无最大值 $a=\pm\frac{\sqrt{55}}{11}$

三/21(2) $\because b_n=a_n a_{n+1}\cos(n+1)\pi=\begin{cases}a_n a_{n+1}, & n为奇数\\ -a_n a_{n+1}, & n为偶数\end{cases}$

则当n为偶数时 设 $n=2m$ $(m\in\mathbb{N}^*)$

(3) $\therefore T_n=(a_1a_2-a_2a_3)+(a_3a_4-a_4a_5)+\cdots+(a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1})$

$=-\frac{2n^2+6n}{9}$，此时 $n=2$时 $-\frac{1}{9}(2+\frac{6}{n})_{min}=-\frac{5}{9}$.

当n为奇数时 类似地，$T_n=\frac{1}{9}(2n^2+6n+7)$

此时 $T_n\geq 0$. 在 $t\leq-\frac{5}{9}$ 时，$T_n>tn^2$

综上 $t\in(-\infty,-\frac{5}{9}]$

4.3 复数的代数形式 2/24

一.4/ $f(\overline{z_1-z_2}) = 1-(z_1-z_2)$

$= 1-(2+3i-5+i)$

$= 1-(-3+4i)$

$= 4-4i$. C正确

二.1. [分类讨论后一定要写答句"综上所述，……"]

二.3.(1) $z=-\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 时 $z^n=\begin{cases}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & (n\equiv 1 \pmod 3)\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & (n\equiv 2 \pmod 3)\\ 1 & (n\equiv 0 \pmod 3)\end{cases}$

$2000=1998+2$. 而 $z+z^2+z^3=0$

$\therefore \sum_{i=1}^{2000}(z_i) = 0+0+\cdots+0+1-1=0$

46. 复数集上的方程 2/25

二. 1. (2)

$$\bar{z} = \lambda z + w$$

$$z - \bar{\lambda} \cdot \bar{z} = \bar{w}$$

$$\therefore \begin{cases} \bar{z} - \lambda z = w \\ z - \bar{\lambda} \cdot \bar{z} = \bar{w}. \end{cases} \Rightarrow z \cdot (1 - \lambda \cdot \bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot w + \bar{w}$$

$$\because |\lambda| \neq 1. \qquad \therefore z = \frac{\bar{\lambda} \cdot w + \bar{w}}{1 - \lambda \cdot \bar{\lambda}}.$$

47 复数的几何意义

一.4 /

复平面上的点到 $(-1,0)$，$(1,0)$ 距离之和为 2

这是一条射线，为 $y=0\ (x\leqslant-1)$

则易知其轨迹方程为 $y=0\ (x\leqslant-1)$

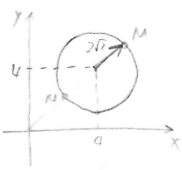
(轨迹 要把曲线类型和方程都写上)

二.2 /

(2) 设 $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ 则 (x,y) 到 $(3,3)$ 的距离

的2倍等于 (x,y) 到原点的距离

$\therefore 2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $(x-4)^2+(y-4)^2=8$



$\therefore |z|$ 的最大值为 $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

最小值为 $4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

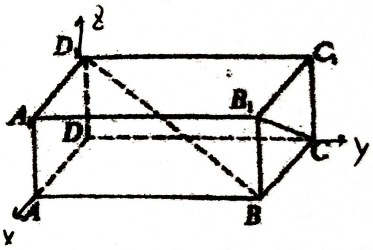
分别在 $z=6+6i$，$z=2+2i$ 时取到

三.8 / [用矩阵求三角形面积不要忘记 $\frac{1}{2}$！]

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & c & d\\ 1 & e & f\end{vmatrix}\right|$$

，为 $\triangle\{(a,b),(c,d),(e,f)\}$ 之面积

3. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$，求异面直线 BD_1 和 B_1C 所成角的余弦值.



以D为原点，DA、DC、DD_1 为x、y、z轴建立空间直角坐标系，

则 $\overrightarrow{D_1B}=(a,b,-c)$　　$\overrightarrow{B_1C}=(-a,0,-c)$

∴ 所求夹角的余弦值 $\cos\theta = \dfrac{|b^2-c^2|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{b^2+c^2}}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)}$

$$\left|\frac{\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{D_1B}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}\right|$$