练习 16

8.函数$f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$的对称中心为____________.

$\boxed{\text{分析}}$：若函数图像有对称中心(a,b)（或对称轴$x=a$），则其定义域关于$x=a$对称.

现$f(x)$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$关于$x=-\frac{3}{2}$对称，且$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2$，从而猜想$f(x)$的对称中心为$(-\frac{3}{2},2)$.

证明留给同学们自行完成！

提示：$f(x)+f(-3-x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{-3-x}{-2-x}+\frac{-2-x}{-1-x}=\frac{2+2x}{1+x}+\frac{4+2x}{2+x}=4$.

9.小明给朋友发拼手气红包，1 毛钱分成三份（不定额度，每份是 1 分的正整数倍），若这三个红包被甲、乙、丙三位同学抢到，则甲同学抢到 5 分钱的概率为____________.

$\boxed{\text{分析}}$: (隔板法）三人分钱相当于在 10 个相同小球产生的 9 个间隙中插入两个隔板，分为三堆，共C_9^2种分法；

甲分 5 分相当于已经在第 5、6 号球之间插入一个隔板，在剩下 5 个球的 4 个隔板中插入一个隔板，共C_4^1种分法.

故甲抢到 5 分钱的概率为$P(A)=\frac{C_4^1}{C_9^2}=\frac{1}{9}$.

(枚举法)设甲、乙、丙三人抢到的金额分别为x,y,z分，则$x+y+z=10$，且 $x,y,z\in N^*$.

当$x=1$时，(y,z)可能的结果有$(1,8),(2,7),\dots,(8,1)$共 8 种；

当$x=2$时，(y,z)可能的结果有$(1,7),(2,6),\dots,(7,1)$共 7 种；

……

当$x=5$时，(y,z)可能的结果有$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$共 4 种；

……

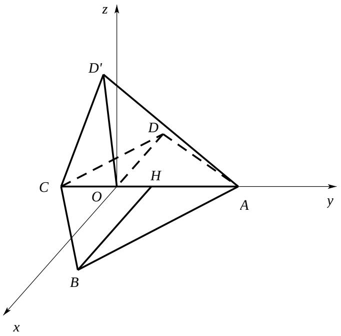
当$x=8$时，(y,z)可能的结果有$(1,1)$共 1 种.

故甲抢到 5 分钱的概率为$P(A)=\frac{4}{1+2+\cdots+8}=\frac{1}{9}$.

10.实数x,y满足$x^2-2xy+2y^2=2$，则x^2+2y^2的最小值为________________.

$\boxed{\text{分析}}$: 将$x^2-2xy+2y^2=2$配方得$(x-y)^2+y^2=2$.故设$x-y=\sqrt{2}\cos\theta,y=\sqrt{2}\sin\theta,\theta\in R$，则$x=\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)$，那么$x^2+2y^2=2(\cos\theta+\sin\theta)^2+4\sin^2\theta=2\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})+4\geq 4-2\sqrt{2}$.

11.如图，已知平面四边形$ABCD$，$AB=BC=3$，$CD=1$，$AD=\sqrt{5}$，$\angle ADC=90^{\circ}$，沿直线AC将$\triangle ACD$翻折成$\triangle ACD'$，直线AC与BD'所成角的余弦的最大值是________________.



$\boxed{\text{分析}}$:过D作$DO\perp AC$交AC于O，过B作$BH\perp AC$交AC于H.在$\triangle ACD$翻折的过程中，$D'O$始终与AC垂直，则$AC\perp$面DOD'.

如图，以O为原点，面ABC为xOy平面建立空间直角坐标系，则D'的轨迹为zOx平面内以O为圆心，$OD=\frac{\sqrt{30}}{6}$为半径圆，故设D'坐标为$\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\cos\theta,0,\frac{\sqrt{30}}{6}\sin\theta\right),\theta\in R$.易知$B\left(\frac{\sqrt{30}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$，故$\overrightarrow{BD'}=\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\cos\theta-\frac{\sqrt{30}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{30}}{6}\sin\theta\right)$，$\overrightarrow{CA}\parallel(0,1,0)$.设直线$AC$与$BD$所成角为$\alpha$，则$\cos\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{BD'}\cdot(0,1,0)}{|\overrightarrow{BD'}|}\right|=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{9-5\cos\theta}}\le\frac{\sqrt{6}}{6}$.

思考，θ的几何意义是什么？什么时候α的余弦取最大值，取最值的时候D'在什么位置？不通过上面的计算，你能否直观猜想出α的余弦取最大值时，D'的位置.

提示：一定程度上（$\theta\in[0,\pi]$时），θ即为二面角$D'-CA-B$的大小.$\cos\theta=1$，即D'与D关于O对称时，$\cos\alpha$最大；$\cos\theta=-1$，即D'与D重合时，$\cos\alpha$最小. α的余弦取最大值，即α取最小值，即$\tan\alpha$取最小值，过B作$BE\perp x$轴于E，则$\tan\alpha=\frac{D'E}{BE}$，其中$\mathrm{BE}=\mathrm{OH}$为定值，$D'E$是平面$zOx$内定点$E$到圆$O$（以$OD$为半径）上一点的距离.

12. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$存在实数x_0，且有$|x_0|\ge3$，使得$f(x_0)=0$，则a^2+4b^2的最小值是____________________.

$\boxed{\text{分析}}$:法一：对于某个$|x_0|\ge3$，$f(x_0)=0$即$ax_0+b+x_0^2=0$，即点$P(a,2b)$在直线$l:x_0x+\frac{y}{2}+x_0^2=0$上.那么$a^2+4b^2=|OP|^2\ge d^2$(其中$d$为$O$到$l$的距离).而$d^2=\left(\frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}\right)^2=\frac{1}{\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{4x_0^4}}$，令$t=\frac{1}{x_0^2}$，则$t\in\left(0,\frac{1}{9}\right]$，$\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{4x_0^4}=t+\frac{1}{4}t^2\in\left(0,\frac{37}{324}\right]$，故$d^2\ge\frac{324}{37}$，从而$a^2+4b^2\ge\frac{324}{37}$.

想一想最小值取到时，a、b的取值？

$a=-\frac{108}{37},b=-\frac{9}{37}$或$a=\frac{108}{37},b=-\frac{9}{37}$.

法二：由题意，存在$|x_0|\ge3$，使$f(x_0)=x_0^2+ax_0+b=0$，故$b=-(ax_0+x_0^2)$.

因此$a^2+4b^2=a^2+4(ax_0+x_0^2)^2=(1+4x_0^2)a^2+8x_0^3a+4x_0^4\ge\frac{4x_0^4}{1+4x_0^2}$(当$a=-\frac{4x_0^3}{1+4x_0^2}$时等号成立).

而$\frac{4x_0^2}{1+4x_0^2}=\frac{1}{4}(4x_0^2+1)+\frac{\frac{1}{4}}{4x_0^2+1}-\frac{1}{2}$，令$t=4x_0^2+1\ge37$，则$g(t)=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\ge g(37)=\frac{324}{37}$.

16.定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$如下：$\{a_n\}$共有$2m$项，其中m项为 0，m项为 1，且对任意$k\le2m$，$a_1,a_2,\dots,a_k$中 0 的个数不少于 1 的个数，若$m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有(______).

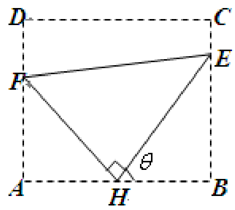
$\boxed{\text{分析}}$:枚举法，共 14 个.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th></tr>
<tr><td rowspan="14">0</td><td rowspan="9">0</td><td rowspan="4">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="14">1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

19.如图，某污水处理厂要在一个矩形污水处理池($ABCD$)的池底水平铺设污水净化管道($Rt\Delta FHE$，H是直角顶点)来处理污水，管道越长，污水净化效果越好.设计要求管道的接口H是AB的中点，E,F分别落在线段BC,AD上.已知$AB=20$米，$AD=10\sqrt{3}$米，记$\angle BHE=\theta$.

(1)试将污水净化管的长度L表示为θ的函数，并写出定义域；

(2)问：当θ取何值时，污水净化效果最好？并求出此时管道的长度.



解：(1)在$\triangle EHB$中，$EH=\frac{BH}{\cos\angle BHE}=\frac{10}{\cos\theta}$.在$\triangle HPA$中，$PH=\frac{HA}{\sin\angle APH}=\frac{10}{\sin\theta}$.

在$\triangle EHP$中，$PE=\sqrt{EH^2+PH^2}=\frac{10}{\sin\theta\cos\theta}$.故$L=EH+PH+PE=\frac{10(\sin\theta+\cos\theta+1)}{\sin\theta\cos\theta}$.

因为$\angle ADH\le\angle APH$，$\angle BHE\le\angle BHC$，所以$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，即$L(\theta)$的定义域为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

(2)令$t=\sin\theta+\cos\theta$，则$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$，注意到$\sin\theta\cos\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{2}=\frac{t^2-1}{2}$，从而$L=\frac{20(t+1)}{t^2-1}=\frac{20}{t-1}$.

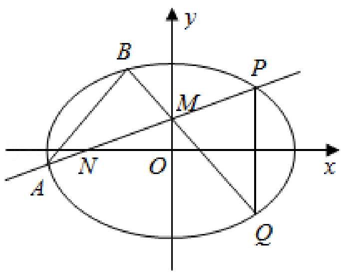
因为L在$\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$上单调递减，所以当$t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{3}$时，$L$取得最大值$20(\sqrt{3}+1)$.

故当$\theta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{3}$时，污水净化效果最好，此时管道长度为$20(\sqrt{3}+1)$米.

20.已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为4，焦距为$2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)过动点$M(0,m)(m>0)$的直线交x轴于点N，交C于点A,P(P在第一象限)，且M是线段PN的中点，过点P作x轴的垂线交C于另一点Q，延长QM交C于点B.



①设直线PM,QM的斜率分别为k,k'，证明：$\frac{k'}{k}$为定值并求此定值；

②求直线AB的斜率的最小值.

解：(1)由题意得：$\begin{cases}2a=4,\\2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}\end{cases}$，解得$a=2,b=\sqrt{2}$.故椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)①由题意，PM的方程为$y=kx+m$，其与x轴交点为$N\left(-\frac{m}{k},0\right)$.

因为M为PN的中点，所以P点的坐标为$\left(\frac{m}{k},2m\right)$.注意到$P$在第一象限，故$k>0$.

由题意，Q与P关于x轴对称，故$Q\left(\frac{m}{k},-2m\right)$，从而$k'=\frac{y_Q-y_M}{x_Q-x_M}=-\frac{3m}{\left(\frac{m}{k}\right)}=-3k$.

即$\frac{k'}{k}=-3$为定值.

②联立MP与C得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

由韦达定理得$x_Ax_P=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，而$x_P=\frac{m}{k}$，故$x_A=\frac{k(2m^2-4)}{m(1+2k^2)},y_A=kx_A+m=\frac{4m^2k^2+m^2-4k^2}{m(1+2k^2)}$.

同样地，联立BQ与C得$(1+18k^2)x^2-12kmx+2m^2-4=0$，从而$x_B=\frac{2m^2-4}{(1+18k^2)x_Q}=\frac{k(2m^2-4)}{m(1+18k^2)}$,

$y_B=-3kx_B+m=\frac{12m^2k^2+m^2+12k^2}{m(1+18k^2)}$.

从而直线AB的斜率为$K=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6k^2+1}{4k}=\frac{3k}{2}+\frac{1}{4k}\geq\frac{\sqrt{6}}{2}$(当且仅当$k=\frac{\sqrt{6}}{6}$时等号成立).

故当$k=\frac{\sqrt{6}}{6}$时，直线AB的斜率取得最小值$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

21.若存在常数$k(k\in N^*,k\geq 2),q,d$，使得无穷数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+d,\frac{n}{k}\notin N^*,\\qa_n,\frac{n}{k}\in N^*\end{cases}$，则称数列$\{a_n\}$为“段比差数列”，

其中常数k,q,d分别叫做段长、段比、段差.设数列$\{b_n\}$为“段比差数列”.

(1)若$\{b_n\}$的首项、段长、段比、段差分别为 1、3、q、3.

①当$q=0$时，求b_{2020}；

②当$q=1$时，设$\{b_n\}$的前$3n$项和为S_{3n}，若不等式$S_{3n}\leq\lambda\cdot 3^{n-1}$对$n\in N^*$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围；

(2)设$\{b_n\}$为等比数列，且首项为b，试写出所有满足条件的$\{b_n\}$，并说明理由.

解：(1)①由题意$b_{n+1}=\begin{cases}b_n+3,\frac{n}{3}\notin N^*,\\0,\frac{n}{3}\in N^*\end{cases}$，从而$b_{3k+1}=0,b_{3k+2}=3,b_{3k+3}=6(k\in N^*)$.所以$b_{2020}=b_{3\times 673+1}=0$.

② 由 题 意 $b_{n+1}=\begin{cases}b_n+3,\frac{n}{3}\notin N^*,\\b_n,\frac{n}{3}\in N^*\end{cases}$ 设 $c_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}+b_{3n}$ ， 则 $c_{n+1}=b_{3n+1}+b_{3n+2}+b_{3n+3}=3b_{3n+1}+9=$

$3b_{3n}+9=b_{3n-2}+b_{3n-1}+b_{3n}+18=c_n+18$，故$\{c_n\}$是以$c_1=b_1+b_2+b_3=12$为首项，18 为公差的等差数列.

那么$S_{3n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{3n}=c_1+c_2+\cdots+c_n=9n^2+3n$.

不等式$S_{3n}\leq\lambda\cdot 3^{n-1}$对$n\in N^*$恒成立，即$\lambda\geq\frac{9n^2+3n}{3^{n-1}}$对$n\in N^*$恒成立.

设$d_n=\frac{9n^2+3n}{3^{n-1}}(n\in N^*)$，则由$d_{n+1}-d_n=\frac{-6n^2+4n+4}{3^{n-1}}<0$解得$n<\frac{1-\sqrt{7}}{3}$或$n>\frac{1+\sqrt{7}}{3}$，因为$n\in N^*$，所以当$n\geq 2,n\in N^*$

时，$d_{n+1}<d_n$，即$d_2>d_3>d_4>\cdots$；且$n=1$时，$d_{n+1}>d_n$，即$d_2>d_1$，故$(d_n)_{max}=d_2=14$.

从而$\lambda \geq \frac{9n^2+3n}{3^{n-1}}$对$n \in N^*$恒成立，即$\lambda \geq (d_n)_{max} = 14$.即$\lambda$的取值范围为$[14,+\infty)$.

(2)当$k \geq 3$时，b_1, b_2, b_3即成等差数列，又成等比数列，故$b_2^2 = b_1 b_3 = \left(\frac{b_1+b_3}{2}\right)^2$，即$(b_1 - b_3)^2 = 0$，故$b_1 = b_2 = b_3$，$d = 0$.

当$d = 0$时，$q = 1$，$b_n = b$符合题意.

当$k = 2$时，$b_1 = b, b_2 = b + d, b_3 = q(b + d), b_4 = q(b + d) + d$.

由$b_1 b_3 = b_2^2$得$bq(b + d) = (b + d)^2$.注意到$b + d = b_2 \neq 0$，所以$bq = b + d$.

由$b_2 b_4 = b_3^2$得$(b + d)[q(b + d) + d] = q^2(b + d)^2$，所以$d = (q^2 - q)(b + d)$.

从而$\frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} = \frac{1}{q} + q^2 - q = 1$，解得$q = \pm 1$.

当$q = 1$时，$d = 0$，$b_n = b$符合题意；当$q = -1$时，$d = -2b$，此时$b_n = (-1)^{n-1} b$符合题意.

综上，满足条件的$\{b_n\}$为$b_n = b (n \in N^*)$和$b_n = (-1)^{n-1} b (n \in N^*)$.

作业 26

一、2.已知方程$x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$的两个实根为x_1, x_2，则$\arctan x_1 + \arctan x_2 =$______________.

分析：由韦达定理得$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3\sqrt{3} < 0 \\ x_1 x_2 = 4 > 0 \end{cases}$，即两根同为负，故$\alpha = \arctan x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \beta = \arctan x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$，

而$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \sqrt{3} = \tan(\alpha + \beta + \pi)$，故$\alpha + \beta + \pi = \frac{\pi}{3}$，从而$\alpha + \beta = -\frac{2\pi}{3}$.

二、3.设$f(x)$是奇函数，且当$x > 0$时，$f(x) = \pi - \arccos(\sin x)$，则当$x < 0$时，$f(x) =$______________.

分析：对于任意的$x < 0$，$f(x) = -f(-x) = -\{\pi - \arccos[\sin(-x)]\} = -\pi + \arccos(-\sin x)$.

应用结论：对任意$x \in [-1,1]$，$\arccos x + \arccos\ (-x) = \pi$.

从而$f(x) = -\pi + [\pi - \arccos(\sin x)] = -\arccos(\sin x)$.

思考：证明结论.

提示：这也证明了反余弦函数的对称性（对称中心$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$）.

三、6.二次函数$f(x)$的二次项系数为正数，且满足关系式$f(x) = f(2 - x)$，解不等式$f\left(\frac{\arccos x}{4}\right) > f\left(\frac{\arccos(1-x)}{4}\right)$.

解：由题意知：$f(x)$的图像开口向上，且关于直线$x = 1$对称，故$f(x)$在$(-\infty, 1]$上单调递减.

又$\because \frac{\arccos x}{4} \leq \frac{\pi}{4} < 1, \frac{\arccos(1-x)}{4} \leq \frac{\pi}{4} < 1$

$\therefore f\left(\frac{\arccos x}{4}\right) > f\left(\frac{\arccos(1-x)}{4}\right)$等价于$\frac{\arccos x}{4} < \frac{\arccos(1-x)}{4}$

而函数$y = \arccos x$是定义在$[-1,1]$上的单调递减函数，故$-1 \leq 1 - x < x \leq 1$，解得$\frac{1}{2} < x \leq 1$.

故原不等式的解集为$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

作业 27

二、3.设两个集合$M=\{a+2\cos\alpha, a+\cos\alpha, a\}, N=\{a\sin\alpha, a\sin^2\alpha, a\}$，问$a,\alpha$为何值时$M=N$.

解：观察得M中三个元素满足$a+(a+2\cos\alpha)=2(a+\cos\alpha)$，即$a+2\cos\alpha, a+\cos\alpha, a$构成公差$d=-\cos\alpha\neq 0$的等差数列.

因此$a+a\sin^2\alpha=2a\sin\alpha$①或 $a+a\sin\alpha=2a\sin^2\alpha$②.

由集合元素的互异性，$a\neq 0$，故①即$1+\sin^2\alpha=2$，解得$\sin\alpha=1$(舍).

同样地，②即$1+\sin\alpha=2\sin^2\alpha$，解得$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$或1(舍).

当$\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$时，$M=\left\{a+\sqrt{3}, a+\frac{\sqrt{3}}{2}, a\right\}, N=\{-\frac{a}{2},\frac{a}{4},a\}$，由$a+\sqrt{3}+a+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{a}{2}+\frac{a}{4}$解得$a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

当$\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in Z)$时，$M=\left\{a-\sqrt{3}, a-\frac{\sqrt{3}}{2}, a\right\}, N=\{-\frac{a}{2},\frac{a}{4},a\}$，由$a-\sqrt{3}+a-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{a}{2}+\frac{a}{4}$解得$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in Z)$或$a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$.

二、6.设集合$A=\{x_k|\cos x_k=a, 0<a<1, x_k>0\}, x_k\in A$，记$S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，求$S_{2008}$的最小值.

解：由$y=\cos x$的图像的性质知：$\cos x=a(0<a<1)$在区间$(2k\pi-2\pi, 2k\pi], k\in Z$上有两解$x_{2k-1}, x_{2k}$，它们关于直线$x=2k\pi-\pi$对称.

故当S_{2008}取得最小值时，$x_1+x_2=2\times\pi, x_3+x_4=2\times 3\pi, \ldots, x_{2007}+x_{2008}=2\times 2007\pi$，它们成等差数列.此时$S_{2008}=\frac{2(\pi+2007\pi)\times 1004}{2}=2016032\pi$.

作业 42

二、3.复数z和w满足：$zw+2iz-2iw+1=0$.

（1）若$\overline{w}-z=2i$，求z和w;

（2）求证：若$|z|=\sqrt{3}$，则$|w-4i|$的值是一个常数，并求出这个常数.

解：（1）由题意$z=\overline{w}-2i$，代入$zw+2iz-2iw+1=0$得：

$w\overline{w}-4iw+2i\overline{w}+5=0$.设$w=a+bi(a,b\in R)$，则$a^2+b^2+6b+5-2ai=0$，即$\begin{cases}a^2+b^2+6b+5=0\\ -2a=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=0,\\ b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\ b=-5\end{cases}$.

故$\begin{cases}w=-i,\\ z=-i\end{cases}$或$\begin{cases}w=-5i,\\ z=3i\end{cases}$.

（2）由$zw+2iz-2iw+1=0$得：$z=\frac{2iw-1}{w+2i}$，所以$\left|\frac{2iw-1}{w+2i}\right|=\sqrt{3}$.平方得

$(2iw-1)(-2i\overline{w}-1)=3(w+2i)(\overline{w}-2i)$，整理得$w\overline{w}+4iw-4i\overline{w}-11=0$，因式分解得$(w-4i)(\overline{w}+4i)=27$，即$|w-4i|=3\sqrt{3}$为常数.

三、7.已知$|z|=1$，且$z^2+2z+\frac{1}{z}<0$，求复数z.

解：因为$|z|=1$，所以设$z=\cos\theta+i\sin\theta,\theta\in[0,2\pi)$.

则 $z^2+2z+\frac{1}{z}=(\cos\theta+i\sin\theta)^2+2(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=(\cos^2\theta-\sin^2\theta+3\cos\theta)+i(2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)<0$,

即$\begin{cases}\cos^2\theta-\sin^2\theta+3\cos\theta<0\\ 2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta=0\end{cases}$.

当$\sin\theta=0$时，$\cos^2\theta+3\cos\theta<0$，故$\cos\theta=-1$；

当$\sin\theta\neq0$时，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，则$\sin^2\theta>\cos^2\theta+3\cos\theta=-\frac{5}{4}$，故$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

综上，$z=-1$或$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

三、8.设z为虚数，$u=\frac{z-1}{z+1}$，求证u为纯虚数的充要条件是$|z|=1$.

证明：充分性：

因为$|z|=1$，所以$1=z\bar{z}$.则$u=\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-z\bar{z}}{z+z\bar{z}}=\frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}=-\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}=-\bar{u}$，故$u$为纯虚数.

必要性：

设$u=bi(b\in R,b\neq0)$，则由$u=\frac{z-1}{z+1}=bi$解得$z=\frac{1+bi}{1-bi}$，那么$|z|=\left|\frac{1+bi}{1-bi}\right|=\frac{|1+bi|}{|1-bi|}=1$.

综上，u为纯虚数的充要条件是$|z|=1$.