47. 复数的几何意义

一、基本训练题 $\frac{2^3\times5^3}{\sqrt{2}^4}$

1. 若 $z=\dfrac{(i-\sqrt{3})^3(3+4i)^3}{(1+i)^4}$，则 $|z|=$ ___250___.

2. 若 $|z-3|=\sqrt{17}$，$|z-2|=4$，则 $z=$ ___$2\pm4i$.___.

3. 已知 $|z_1|=1$，$|z_2|=\sqrt{3}$，$|z_1-z_2|=2$，则 $|z_1+z_2|=$ ___2___.

$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

4. 满足 $|z-1|-|z+1|=2$ 的复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是 ~~$y=0\ (x\le-1)$~~ 一条射线 $y=0\,(x\le-1)$.

5. 如果复数 z 满足 $|z+i|+|z-i|=2$，那么，$|z+i+1|$ 的最小值是 （ A ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

二、典型例题

1. 已知关于 x 的方程 $x^2+zx+4+3i=0$ 有实数根，求复数 z 的模的最小值.

解：设实根为 x_0.

则 $x_0^2+zx_0+4+3i=0$

$\therefore |z|^2=\left|x_0+\frac{4+3i}{x_0}\right|=(x_0+\frac{4}{x_0})^2+(\frac{3}{x_0})^2=x_0^2+\frac{25}{x_0^2}+8\ge18$

$\therefore |z|\ge3\sqrt{2}$

$x_0=\sqrt{5}$，$z=-\frac{9}{5}\sqrt{5}-\frac{3}{5}\sqrt{5}i$. 时等号成立　$\therefore |z|_{min}=3\sqrt{2}$.

2. (1)已知复数 $z=x+yi(x,y\in R)$ 满足 $|z-4i|-|z+2|=0$，求 2^x+4^y 的最小值；

(2)设复数 z 满足 $2|z-3-3i|-|z|=0$，求 $|z|$ 的最大值和最小值.

解：(1). $|z-4i|=|z+2|$

$x^2+(y-4)^2=(x+2)^2+y^2$

$-8y+16=4x+4$

$\therefore x+2y=3.$

$\therefore 2^x+4^y=2^x+2^{2y}\ge2\sqrt{2^x\cdot2^{2y}}=2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}.$

$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{4}$

即 $z=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}i$ 时等号成立.

(2). 设 $z=x+yi$.（$x,y\in R$）.

$2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$4(x^2-6x+9+y^2-6y+9)=x^2+y^2$

$x^2-8x+y^2-8y+24=0$

$(x-4)^2+(y-4)^2=8$.

$\therefore |z|\in[2\sqrt{2},6\sqrt{2}]$.

$|z|_{min}=2\sqrt{2}\,(z=2+2i)$

$|z|_{max}=6\sqrt{2}\,(z=6+6i)$.

3. (1)已知复数 z 满足 $|z-2-i|=2$，求复数 $\omega=\dfrac{1-iz}{1+iz}$ 的对应点的轨迹方程；

(2)连结椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点 F 与椭圆上一动点 P 作正方形 FPAB(F,P,A,B 为顺时针方向排列)，求点 P 沿椭圆绕行一周时，B 点的轨迹.

解：(1). $w+iwz=1-iz$

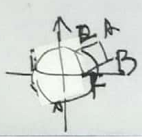
$\therefore z=\dfrac{1-w}{i(w+1)}=\dfrac{w-1}{w+1}i$

$2=|z-2-i|=\left|\frac{w-1}{w+1}i-2-i\right|=\left|\dfrac{wi-i-(2+i)w-2-i}{w+1}\right|=2\left|\dfrac{w+1+i}{w+1}\right|$

$\therefore |w+1+i|=|w+1|$.

$\therefore$ w的轨迹方程：$y=-\frac{1}{2}$.

(2).



F $(\sqrt{3},0)$.　设 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$.

B $(\sqrt{3}+\sin\theta,\sqrt{3}-2\cos\theta)$.

$\therefore$ B的轨迹方程：$(x-\sqrt{3})^2+\dfrac{(y-\sqrt{3})^2}{4}=1$

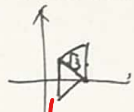
是以 $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 为中心，$(\sqrt{3},2)$.$(\sqrt{3},2\sqrt{3})$ 为焦点，长轴长为 4 的椭圆.

$\left|\frac{z-a}{az-1}\right|=1$

三、测试题

1. $z\in C,|z|=1$，$u=\dfrac{z(z-a)}{az-1}(a\in R)$，则$|u|=$ <u>1</u>.

2. 在复平面内，已知等比三角形的两个顶点所表示的复数分别为$2,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，则第三个顶点对应的复数为 <u>$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ or $2+\sqrt{3}i$</u>.



3. $z\in C$，$1\le|z|\le\sqrt{2}$，则复数$u=\bar{z}\cdot(1+i)$在复平面内对应的图形的面积为 <u>2π</u>.

$Re z_1=\frac{1}{2}$ $\quad 2 \quad \sqrt{2} \quad 4\pi^2$

4. 已知$|z_1-1|=|z_1|$，$z_1z=-1$，则复数z在复平面上对应的点恒在 （ C ）

$z_1=-\frac{1}{z}$ $\quad Re\frac{1}{z}=\frac{1}{2}z \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{\bar z}=1 \quad z\bar z=z+\bar z$

A. 定直线上 B. 定椭圆上 C. 定圆上 D. 定双曲线上

5. 设$z\in C$，且$\dfrac{z}{z-1}$是纯虚数，则$|z+i|$的最大值为 （ D ）

$\frac{bi\cdot}{bi-1}+i$

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$z=biz-bi$ $\quad z=\frac{bi}{bi-1}$

$(1+\frac{1}{b^2+1})^2+(\frac{b}{b^2+1}+1)^2$

$=1+\frac{b^2+1}{b^2+1}+i$

6. 已知复数$z=\dfrac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2}(a\in R)$，且$|z|=\dfrac{2}{3}$，求$a$

解：$\frac{2}{3}=|z|=\frac{|1+i|^3|a-i|^2}{\sqrt{2}\cdot|a-3i|^2}=\frac{\sqrt{2}^3\sqrt{a^2+1}^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+9}^2}=2\frac{a^2+1}{a^2+9}$

$\therefore 3a^2+3=a^2+9$

$\therefore a=\pm\sqrt{3}$.

7. (1)复平面内P、Q两点对应的复数分别为z_1,z_2，$|z_1|=2$，$z_2=1+iz_1$，求点Q的轨迹方程；

(2)设复数z满足不等式$0<z+\dfrac{17}{z}\le 8$，求出z在复平面上所对应点的轨迹.

解：(1). $z_1=\frac{z_2-1}{i}$

$\therefore 2=|z_1|=\left|\frac{z_2-1}{i}\right|=|z_2-1|$

$\therefore$ 点Q的轨迹方程：$(x-1)^2+y^2=4$.

(2). 由题得，$z+\frac{17}{z}\in R$.

则$z+\frac{17}{z}=\bar z+\frac{17}{\bar z}$

$\therefore z=\bar z$ or $z\bar z=17$.

1°. $z=\bar z$，即$z\in R$.

由$z+\frac{17}{z}>0$知$z>0$.

但此时$z+\frac{17}{z}\ge 2\sqrt{17}>8$ 舍.

2°. $z\bar z=17$.

则$z+\frac{17}{z}=z+\frac{z\bar z}{z}=z+\bar z=2Re z$

$0<2Re z\le 8$

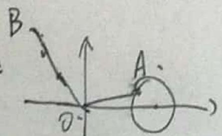
$\therefore 0<Re z\le 4$.

$\therefore$ 轨迹方程，$x^2+y^2=17(0<x\le 4)$

$\therefore$ 轨迹，为以原点为圆心的圆弧

8. 已知ΔABO在复平面内，O是原点，A、B对应的复数分别为α,β，且：(1)$|\alpha-3|=1$; (2)$\beta=(-1+i)\alpha$，求ΔABO的面积的最大值和最小值.

解：



$Arg\beta=Arg\alpha+Arg(-1+i)+2k\pi$

$=Arg\alpha+\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in Z)$

$\therefore\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$.

$\therefore S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}|OA|\cdot|OA|=\frac{1}{2}|OA|^2=\frac{1}{2}|\alpha|^2$

$1=|\alpha-3|\ge|\alpha|-3.\quad\Rightarrow|\alpha|\le 4$

$1=|\alpha-3|\ge 3-|\alpha|\quad\Rightarrow|\alpha|\ge 2$

$\therefore 2\le S_{\Delta ABO}\le 8$

$\alpha=2.\ \beta=2i-2$时，$S_{\Delta ABO}=2$

$\alpha=4.\ \beta=4i-4$时，$S_{\Delta ABO}=8$.

$\therefore$ 综上，min = 2

max = 8