反三角函数与复数提高课

例1、证明：$arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}arcsinx=\frac{\pi}{4}, x\in(-1,1]$

分析：将原等式转化为证明

$$2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\pi}{2}-arcsinx$$

先证明：

$$\cos(2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})=\cos(\frac{\pi}{2}-arcsinx)$$

证：记$\alpha = arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，则

$$\cos\left(2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1-tan^2\alpha}{1+tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - arcsinx\right) = \sin(arcsinx) = x$$

故:$\cos(2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) = \cos(\frac{\pi}{2} - arcsinx)$

又：$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{2}{1+\mathrm{x}} - 1} \in [0, +\infty)$

$\therefore arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in [0,\frac{\pi}{2})$,即$2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in [0,\pi)$,

而$\frac{\pi}{2} - arcsinx \in [0,\pi)$

由$y = cosx$在$[0,\pi)$上单调递减，可得:

$$2arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2} - arcsinx$$

即： $arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}arcsinx = \frac{\pi}{4}$

例2、求函数$f(x)=\dfrac{\arcsin(sinx)}{x}$的值域.

分析：$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时，$\arcsin(sinx)=x$,

$x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right],k\in Z$时，有:$sinx=(-1)^k\sin(x-k\pi)$

解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称

且有：$f(-x)=\dfrac{\arcsin(\sin(-x))}{-x}=\dfrac{\arcsin(-\sin(x))}{-x}=f(x)$

$\therefore f(x)$是偶函数，因此只用考虑$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的值域

当$x \in (0,\frac{\pi}{2})$时，由$\arcsin(sinx) = x$知$f(x) = 1$

当$x \in [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$时$\arcsin(sinx) = \arcsin(-\sin(x-\pi))$

$$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = \pi - x$$

此时$f(x) = \frac{\pi-x}{x} = \frac{\pi}{x} - 1 \in [-\frac{1}{3},1]$

当$x > \frac{3}{2}\pi$,由$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(sinx) \leq \frac{\pi}{2}$,可得：

$$|f(x)| < \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3}$$

综上，$f(x)$的值域为$[-\frac{1}{3},1]$

例3、已知α, β是关于x的方程$asinx+bcosx=c$的两个实根，$(ab\neq 0,\alpha\neq 2k\pi+\beta)$求证：$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$

分析：利用辅助角公式可将原方程： $asinx+bcosx=c$，化为:$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c$

故可以先解出α, β的具体值，再证明问题

解：原方程即： $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c$，这里$\varphi$满足:

$$\begin{cases} sin\varphi=\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

记：$\theta = arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,则原方程的解为:

$x = 2k\pi + \theta - \varphi$或$2k\pi + \pi - \theta - \varphi, k \in Z$

又： $\alpha \neq 2k\pi + \beta$,故存在整数$k_1, k_2$

使得：$\alpha = 2k_1\pi + \theta - \varphi$，$\beta = 2k_2\pi + \pi - \theta - \varphi$

$\therefore \frac{\alpha-\beta}{2} = (k_1 - k_2)\pi - \frac{\pi}{2} + \theta$

因此$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = sin^2\theta = \frac{c^2}{a^2+b^2}$

分析：求解三角方程$asinx + bcosx = c$，也可以将其与$sin^2x + cos^2x = 1$进行联立，从而解出$sinx, cosx$

解：由：$\begin{cases} asinx + bcosx = c \\ sin^2x + cos^2x = 1 \end{cases}$，消去$cosx$得：

$$(a^2 + b^2)sin^2x - 2acsinx + c^2 - b^2 = 0$$

记$t_1 = sin\alpha, t_2 = sin\beta$,由$\alpha \neq 2k\pi + \beta$知:

t_1, t_2是方程$(a^2 + b^2)t^2 - 2act + c^2 - b^2 = 0$的两根

故：$sin\alpha sin\beta = t_1 t_2 = \frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$

同理可得：$cos\alpha cos\beta=\frac{c^2-a^2}{a^2+b^2}$

因此：$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}=\frac{1+cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$

例4、非零复数a,b,c满足：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}\neq 1, \mathrm{z}=\frac{a+b-c}{a-b+c}$,求$1+z+z^{2}+\cdots+z^{9}$的值

分析：注意到$\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$三式的乘积为1，故可以先求出$\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$再计算z的大小

解：设$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k\neq 1$,由$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$得$k^{3}=1$

故$k=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

由$b = k^2 a, c = ka$得:

$$z = \frac{a+b-c}{a-b+c} = \frac{a+ak^2-ak}{a-ak^2+ak} = \frac{k^2-k+1}{-k^2+k+1}$$

$$= \frac{-2k}{-2k^2} = \frac{1}{k} = \bar{k}$$

$$1+z+z^2+\cdots+z^9 = 1+(z+z^2+z^3)+\cdots+(z^7+z^8+z^9) = 1$$

例5、设复数A, z_1, z_2满足：$z_1\overline{z_2}+\bar{A}z_1+A\overline{z_2}=0$,其中$|A|=\sqrt{5}$,

（1）求$|z_1+A|\cdot|z_2+A|$

（2）证明：$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$

解：（1）$|z_1+A|\cdot|z_2+A|=|z_1+A|\cdot|\overline{z_2+A}|$

$=|(z_1+\mathrm{A})(\overline{z_2}+\bar{A})|=|z_1\overline{z_2}+\bar{A}z_1+A\overline{z_2}+A\bar{A}|$

$=|A\bar{A}|=|A|^2=5$

(2)分析：要证明：$\frac{z_1+A}{z_2+A}=|\frac{z_1+A}{z_2+A}|$

也就是要说明$\frac{z_1+A}{z_2+A}$是一个正实数

解：$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{(z_1+A)(\overline{z_2}+\bar{A})}{|z_2+A|^2}=\frac{z_1\overline{z_2}+\bar{A}z_1+A\overline{z_2}+A\bar{A}}{|z_2+A|^2}$

$$=\frac{5}{|z_2+A|^2}>0$$

故：$\frac{z_1+A}{z_2+A}=|\frac{z_1+A}{z_2+A}|=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$

例6、若$z \in C$,且$|z| = 1, \mathrm{u} = z^4 - z^3 - 3z^2 i - z + 1$,求$|u|$的最大值和最小值，并求出取得最大值、最小值时的复数z.

分析：复数u的次数较高，直接计算$|u|$的运算难度较大，

考虑到$|z| = 1$,可以得到$\frac{1}{z} = \bar{z}$,再结合复数模的运算性质，

可以降低复数u的次数

解：由$|z| = 1$, 得到$\frac{1}{z} = \bar{z}$，因此有：

$$|u| = \left|z^2\left(z^2 - z - 3i - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\right|$$

$$= |\,z^2| \cdot |(z^2 - z - 3i - \bar{z} + \bar{z}^2)|$$

$$= |(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) - 3i|$$

注意到: $z^2 + \bar{z}^2 \in R, z + \bar{z} \in R$

因此$|u| = \sqrt{[(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z})]^2 + 9}$

又: $(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) = (z + \bar{z})^2 - (z + \bar{z}) - 2$

而$z + \bar{z} \in [-2,2]$,故$(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) \in [-\frac{9}{4}, 4]$

$\therefore u_{max=5}, u_{min} = 3$

当u =5时， $z + \bar{z} = -2$,此时$z = -1$

当u = 3时， $z + \bar{z} = -1$或1，此时$z = 1$或$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

例7、已知$A=\{z|\frac{z}{z-1}$是纯虚数$\}$,$B=\{t|t=iz+b,z\in A\}$,若$A\cap B=\emptyset$,求实数b的取值范围

分析：利用结论"z为非零复数，z为纯虚数的充要条件是$z+\bar{z}=0$"，可以得到集合A中复数在复平面上对应点的轨迹.

再利用"转移代入法" 可以得到集合B中复数在复平面上对应点的轨迹.再求得实数b的取值范围

解：由$\frac{z}{z-1}$是纯虚数，则$z \neq 0, \frac{z}{z-1} + \overline{(\frac{z}{z-1})}$ =0

即：$\frac{z}{z-1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1}$ =0

$\therefore 2z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$,则$z\bar{z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,故$|z - \frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

集合A中的复数z对应点的轨迹为以$(\frac{1}{2}, 0)$为圆心$\frac{1}{2}$为半径的圆C_1（除去(0,0),(1,0)）

而对于集合B中的数t,$z=\frac{t-b}{i}\in A$

$\therefore \left|\frac{t-b}{i}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，即$\left|t-b-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$

集合B中点在以$b+\frac{1}{2}i$所对应点为圆心$\frac{1}{2}$为半径的圆C_2上

要使$A\cap B=\emptyset$，圆C_1,C_2外离

$\therefore \sqrt{(b-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,解得$b>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$或$b<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

例8、给定实数$m > 0$, 且$m \neq 1$,设虚数z满足:$z^2 - m^t z + \frac{m^{100}}{4} = 0(t \in R)$

(1)当t取遍所有正整数，求满足条件的虚数z的实部的和

(2)若满足条件的z总有实部与虚部之差大于0，求t的取值范围

解：（1）因为z为虚数，$\therefore \Delta = m^{2t} - m^{100} < 0$,

且$Re(z) = \frac{m^t}{2}$

当m>1时，$t < 50$且$t \in N^*$

所求的全体虚数z的实部的和

$$S=2\left(\frac{m}{2}+\frac{m^2}{2}+\cdots+\frac{m^{49}}{2}\right)=\frac{m^{50}-1}{m-1}$$

当0<m<1时， $t>50$且$t\in N^*$

所求的全体虚数z的实部的和

$$S=2\left(\frac{m^{51}}{2}+\frac{m^{52}}{2}+\cdots\right)=\frac{m^{51}}{1-m}$$

(2)由求根公式得$Im(z)=\pm\frac{\sqrt{m^{100}-m^{2t}}}{2}$

因为总有z的实部与虚部之差大于0，故:

$$\frac{m^t}{2}-\frac{\sqrt{m^{100}-m^{2t}}}{2}>0$$

即：$m^t>\frac{m^{50}}{\sqrt{2}}$,又有Δ= $m^{2t}-m^{100}<0$

$$\therefore \frac{m^{50}}{\sqrt{2}}<m^t<m^{50}$$

当m>1时，解得$50-log_m\sqrt{2}<t<50$

0<m<1时，解得$50<t<50-log_m\sqrt{2}$

例9、已知a,b,z均为复数，设$f(z)=z^2+az+b$,对于一切$|z|=1$都有$|f(z)|=1$,求复数a,b的值

分析：考虑到需要求解复数a,b的值，即求解出这两复数的实部与虚部共四个未知数，可以考虑对$|f(z)|=1$进行四次赋值

解：因为对于一切$|z|=1$都有$|f(z)|=1$，故分别令$z=\pm1,\pm i$

可得：$|1+a+b|=|1-a+b|=|1-ia-b|=|1+ia-b|=1$

注意到:

$4=|1+a+b|+|1-a+b|+|1-ia-b|+|1+ia-b| \geq |(1+a+b)+(1-a+b)+(1-ia-b)+(1+ia-b)|=4$

因此等号恰好成立，根据模不等式的取等条件

复数$1+a+b, 1-a+b, 1-ia+b, 1+ia-b$是四个方向相同且模均为1的复数

故$1+a+b=1-a+b=1-ia+b=1+ia-b$

由此解得：$a=b=0$

而： $a = b = 0$时，$f(z) = z^2$,满足对于一切$|z| = 1$都有$|f(z)| = 1$

因此所求的复数$a = b = 0$