42. 复数的基本概念

一、基本训练题

$2z+1=y-3$, y_2-1

1. 若 x 是纯虚数，y 是实数，且 $2x-1+i=y-(3-y)i$，则 $x=$ $-\frac{5}{2}i$，$y=$ -1.

2. 已知 $i^{3m}=i^n(m,n\in Z)$，则 $i^{m+n}=$ 1.

3. 设复数 $z=a+bi(a,b\in R)$，写出两个 z 为纯虚数的必要且不充分条件是 $a=0$ 或 $b\neq 0$.

4. 如果 z 为复数，那么由复数 $z,\bar{z},\bar{\bar{z}},|z|,\overline{|z|},|\bar{z}|,|z|^2,\overline{|z|^2},|z^2|$ 所组成的集合中，最多含有的元素个数是 (A)

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

5. 设 z_1,z_2 为复数，则下列四个结论中正确的是 (D)

(A) 若 $z_1^2+z_2^2>0$，则 $z_1^2>-z_2^2$　　(B) $|z_1-z_2|=\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}$

(C) $z_1^2+z_2^2=0$ 的充要条件是 $z_1=z_2=0$　　(D) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$ 一定是实数

二、典型例题

1. 已知 $x=\sqrt{2a+1}+ai(a\in R$ 且 $a\geq-\frac{1}{2})$，若 $z=x-|x|+(1-i)$ 分别为实数、虚数、纯虚数和在第二象限，求实数 a 的取值.

解：$|x|=\sqrt{2a+1+a^2}=|a+1|=a+1$.

$\therefore z=\sqrt{2a+1}+ai-a-1+1-i$

$=\sqrt{2a+1}-a+(a-1)i$.

实数：$a=1$

虚数：$a\neq1$ $(a\geq-\frac{1}{2})$

纯虚数 $a=\sqrt{2}+1$

第二象限：$a>1+\sqrt{2}$.

2. (1) 复数 $z=\dfrac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}$，若 $z^2+az+b=1+i$，求实数 a,b 的值；

(2) 已知 $a-1+2ai=-4+4i$，求复数 a；

(3) 若复数 z 满足 $z\bar{z}+2i\bar{z}=3+ai$，且 $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$，求实数 a 的取值范围.

解：(1) $z=\dfrac{3-i}{2+i}=1-i$.

$-2i+(1-i)a+b=1+i$.

$\begin{cases}a+b=1\\-2-a=1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$

(2). $(2i+1)a=-4i-3$

$\therefore a=\dfrac{4i-3}{2i+1}=2i+1$

(3). 设 $z=x+yi$. $(x,y\in R)$.

$x<0<y$.

$x^2+y^2+2i(x-yi)=3+ai$

$\therefore\begin{cases}x^2+y^2+2y=3\\a=2x\end{cases}$

$x^2+(y+1)^2=4$

$\therefore x\in(-\sqrt{3},0)$

$\therefore a\in(-2\sqrt{3},0)$.

3. 复数 z 和 w 满足：$zw+2iz-2iw+1=0$.

(1) 若 $\bar{w}-z=2i$，求 z 和 w；

(2) 求证：若 $|z|=\sqrt{3}$，则 $|w-4i|$ 的值是一个常数，并求出这个常数.

解：(1). $z=\bar{w}-2i$ 代入.

$0=(\bar{w}-2i)w+2i(\bar{w}-2i)-2iw+1$

$=\bar{w}w+2i(\bar{w}-w)+5-2iw$.

$\therefore w\in iR$. 设 $w=xi$. $x\in R$

$x^2+4x+5+2x=0$

$x=-1$ or -5.

$\therefore\begin{cases}z=-i\\w=-i\end{cases}$ or $\begin{cases}z=3i\\w=-5i\end{cases}$

(2) $w=\dfrac{2iz+1}{2i-z}$

$w-4i=\dfrac{2iz+1+8+4iz}{2i-z}=\dfrac{6iz+9}{2i-z}$

$\therefore|w-4i|=6\left|\dfrac{z-\frac{3}{2}i}{z-2i}\right|$

$\left|\dfrac{z-\frac{3}{2}i}{z-2i}\right|^2=\dfrac{z\bar{z}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}iz-\frac{3}{2}i\bar{z}}{z\bar{z}+4+2iz-2i\bar{z}}=\frac{3}{4}$

$\therefore|w-4i|=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

三、测试题

$\frac{1+i}{2}x-\frac{1+2i}{5}y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

1. $x,y\in\mathbf{R}$，且$\frac{x}{1-i}-\frac{y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$，则$x=$ -1 ，$y=$ -5 .

2. 复数$z=\frac{a^2-3a-4}{a+7}+(a^2-5a-6)i\,(a\in\mathbf{R})$，当$a$ $=-1$ or 6 时，z是实数；当a $\neq -1,6,-7$ 时，z是虚数；当a $=4$ 时，z是纯虚数；当a $=-1$ 时，$z=0$.

3. 计算$i+2i^2+3i^3+\cdots+100i^{100}=$ $50-50i$

$i-2-3i+4+5i-6-7i+8$ ... $=(2-2i)\times$

4. 下列四个命题：① 满足$z=\frac{1}{z}$的复数只有± 1，$\pm i$；② 若$a,b\in\mathbf{R}$，且$a=b$，则$(a-b)+(a+b)i$是纯虚数；③ 复数$z\in\mathbf{R}$的充要条件是$z=\bar{z}$；④ 复平面内，x轴是实轴，y轴是虚轴. 其中正确的有 (C)

(A) 0个　　(B) 1个　　(C) 2个　　(D) 3个

5. 已知$|z|=1$且$z^2\neq -1$，则复数$\frac{z}{z^2+1}$ $=\frac{1}{z+\frac{1}{z}}$ (A)

(A) 必为实数　　(B) 必为纯虚数

(C) 是虚数，但不一定是纯虚数　　(D) 可能是实数，也可能是虚数

6. 设z是纯虚数，且$z\bar{z}+iz-i\bar{z}=0$，求z.

解：设$z=xi$，$x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$.

$x^2-x-x=0$

$x=0$(舍) or 2　　$\therefore z=2i$.

7. 已知$|z|=1$，且$z^2+2z+\frac{1}{z}<0$，求复数z.

解：$z^2+2z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$

又 $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$

$\therefore z^2+z\in\mathbb{R}$

设$z=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$，

则 $\begin{cases}2ab+b=0\\ a^2+b^2=1\end{cases}$

1° $b=0$. $a=\pm 1$. $a=-1$符合.

2° $a=-\frac{1}{2}$. $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 也符合.

$\therefore$ 综上，$z=-1$ or $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8. 设z为虚数，$u=\frac{z-1}{z+1}$，求证u为纯虚数的充要条件是$|z|=1$.

解：充分性：若$|z|=1$，则 $u=\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}=\frac{z-\bar{z}}{|z+1|^2}=2\frac{\operatorname{Im}z}{|z+1|^2}i$ 为纯虚数.

必要性：若u为纯虚数，由于 $u=\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}=\frac{|z|^2-1+z-\bar{z}}{|z+1|^2}$

且$z-\bar{z}$为纯虚数

$\therefore |z|^2-1=0$.

$\therefore |z|=1$.

四、说明

1. 若复数$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则实数a,b分别叫复数z的实部和虚部，由此可见任一复数的实部、虚部都是实数，不要错误地认为$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$的虚部是bi. 当$b=0$时，z为实数；当$b\neq 0$时，z是虚数；当$b\neq 0$且$a=0$时，z是纯虚数. 不要把复数集当作是虚数集；实数集$\mathbf{R}$是复数集$\mathbf{C}$的真子集；纯虚数集是虚数集的真子集；而虚数集也是复数集的真子集；$\mathbf{R}\cap\{虚数\}=\varnothing$，$\mathbf{R}\cup\{虚数\}=\mathbf{C}$.

2. 复数$z=a+bi$和$\bar{z}=a-bi(a,b\in\mathbf{R})$互为共轭复数. $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$；当$z\neq 0$时，$z$为纯虚数$\Leftrightarrow z+\bar{z}=0$；对于任意复数$z$均有：$z+\bar{z}\in\mathbf{R}$；$|z|^2=|\bar{z}|^2=z\bar{z}$. 利用这些结论，往往可以使问题得到简洁明快的解决.