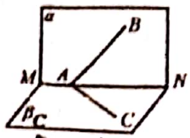
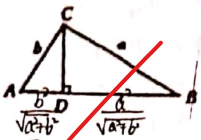
57. 两个平面垂直

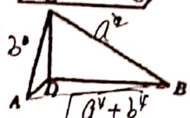
一、基本训练题



1. 设 α-MN-β 是直二面角，$A\in MN$，$AB\subset\alpha$，$AC\subset\beta$，$\angle BAN=\angle CAN=45°$，则 $\angle BAC=$ $\frac{\pi}{3}$.

2. 在直角△ABC 中，两直角边 $AC=b$，$BC=a$，$CD\perp AB$ 于 D，把△ABC 沿 CD 折成直二面角 A-CD-B 后，cos$\angle ACB=$ $\frac{ab}{a^2+b^2}$.





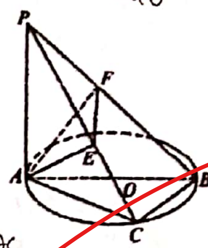
3. 对于直线 m,n 和平面 α,β，$\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是 （D）

(A) $m\perp n$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$　　(B) $m\perp n$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$

(C) $m/\!/n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$　　(D) $m/\!/n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$

$\dfrac{a^2+b^2-\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}{2ab}=\dfrac{2a^2b^2}{2ab(a^2+b^2)}$

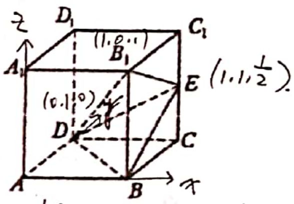
二、典型例题



1. 如图，AB 是圆 O 的直径，C 是圆周上一点，$PA\perp$ 平面 ABC. (1) 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC；(2) 若 $AE\perp PC$，E 为垂足，F 为 PB 上任意一点. 求证：平面 $AEF\perp$ 平面 PBC.

∵ AB为直径
∴ BC⊥AC
PA⊥平面ABC
∴ BC⊥PA
∵ PA、AC为相交直线
∴ BC⊥平面PAC
∵ BC⊂平面PBC
∴ 平面PAC⊥平面PBC

(2) ∵ 平面PAC⊥平面PBC，交线为PC
而 AE⊥PC，AE⊂平面PAC
∴ AE⊥平面PBC
∵ AE⊂平面AEF，
∴ 平面AEF⊥平面PBC

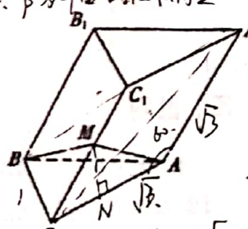


2. 如图，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，E 是 CC_1 的中点. (1) 求证：平面 $B_1DE\perp$ 平面 B_1BD；(2) 求二面角 B-B_1E-D 的余弦值.

(1) 以 A 为原点，AB、AD、AA₁ 为 x、y、z 轴如图建系.
设正方体边长为1.
则 $\overrightarrow{B_1D}=(-1,1,-1)$
$\overrightarrow{B_1E}=(0,1,-\frac{1}{2})$
$\overrightarrow{B_1B}=(0,0,-1)$

记 $\vec{n}=(-1,1,2)$，$\vec{m}=(1,1,0)$
则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1D}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0$
$\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1B}=\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0$
∴ $\vec{n}$、$\vec{m}$ 分别为平面B₁DE、平面B₁BD 的法向量.
而 $\vec{n}\cdot\vec{m}=0$
∴ 平面B₁DE⊥平面B₁BD

(2) $\overrightarrow{BE}=(0,1,\frac{1}{2})$
记 $\vec{p}=(1,0,0)$.
则 $\vec{p}\cdot\overrightarrow{B_1B}=\vec{p}\cdot\overrightarrow{BE}=0$
∴ $\vec{p}$ 为平面BB₁E法向量
设所成角为θ
则 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{|\vec{p}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
由图知 $\theta<\frac{\pi}{2}$
∴ $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$



4 − 2√3.

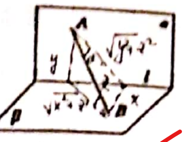
3. 已知斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$，在底面△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle C=90°$，$BC=1$，侧面 $A_1ACC_1\perp$ 底面 ABC，侧棱与底面成 $60°$ 角，$AA_1=\sqrt{3}$，M 是 CC_1 的中点. (1) 求证：$AM\perp BC$；(2) 求直线 A_1B 与平面 AA_1C_1C 所成的角.

(1). 过M作 MN⊥AC 交AC于N
∵ 平面A₁ACC₁⊥平面ABC
且两平面交线为 AC.
而 MN⊥AC
∴ MN⊥平面ABC
∴ AC为直线AM在平面ABC内的射影
∵ BC⊥AC，BC⊂平面ABC
∴ BC⊥AM.

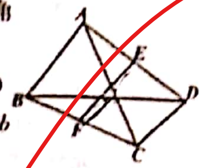
(2). ∵ BC⊥AC.
平面AACC₁⊥平面ABC 且交线为AC.
∴ BC⊥平面ACC₁A₁　∴ BC⊥A₁C
∴ 所成角为 ∠BA₁C
∵ $A_1C=\sqrt{AC^2+AA_1^2-2AC\cdot AA_1\cdot\cos\angle ACAA_1}=\sqrt{3}$ 或 3.
设所成角为θ，则 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $\frac{1}{3}$　∴ $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 arctan $\frac{1}{3}$.

三、测试题

1. α-l-β 是直二面角，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，A，B 不在 l 上，设 AB 与 α，β 成的角分别是 θ_1，θ_2，则 $\theta_1+\theta_2$ 的取值区间为 $[0,\frac{\pi}{2}]$.



2. 如图：在空间四边形 $ABCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$\angle BDC=90°$，E，F 分别是 AD 和 BC 的中点，当 $EF=CD$ 时，EF 与 CD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，EF 与平面 ABD 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.

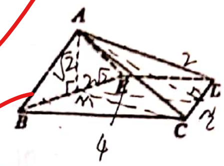


3. 在直二面角 α-l-β 中，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，a，b 与 l 都斜交，则（C）

(A) a 不和 b 垂直，但可能 $a\parallel b$　(B) a 可能和 b 垂直，也可能 $a\parallel b$

(C) a 不和 b 垂直，a 也不与 b 平行　(D) a 不和 b 平行，但可能 $a\perp b$

4. 在四棱锥 A-$BCDE$ 中，$BC\parallel DE$，$\angle BCD=\angle CDE=90°$，$DE=CD=\frac{1}{2}BC$，$AB=AE=\frac{1}{2}BC$，$AC=AD$. (1) 证明：平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$；(2) 求 AC 与平面 $BCDE$ 所成角的正弦值.



(1) 取 BE、CD 中点 M，N

则 MN 为梯形 $BEDC$ 中位线

$\therefore MN\parallel BC$，而 $BC\perp CD$

$\therefore MN\perp CD$

$\because AD=AC$　$\therefore CD\perp AN$

$\therefore AN$，AM 为相交直线

$\therefore CD\perp$ 平面 AMN

$\therefore CD\perp AM$

$\because AB=AE$　$\therefore AM\perp BE$

$\because BE$，CD 不平行

$\therefore AM\perp$ 平面 $BEDC$

$\because AM\subset$ 平面 ABE

$\therefore$ 平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$

(2) $\because AM\perp$ 平面 $BCDE$

$\therefore$ 所求角为 $\angle ACM$

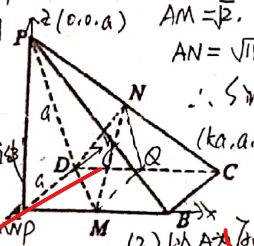
设 $BC=4$，则 $DE=CD=AB=AE=2$，$BE=2\sqrt{2}$

$AM=\sqrt{2}$，$MN=3$.

$AN=\sqrt{11}$，$AC=2\sqrt{3}$

$\therefore \sin\angle ACM=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

5. 如图，$PA\perp$ 矩形 $ABCD$ 所在平面，$PA=AD=a$，M，N 分别是 AB，PC 的中点. (1) 求证：平面 $MND\perp$ 平面 PCD；(2) 若二面角 N-MD-C 为 $60°$，求 AB 的长.



(1) $PM^2=PA^2+MA^2=AD^2+MA^2$

$=BC^2+MB^2=MC^2$

$\therefore PM=MC$　$\because N$ 为 CP 中点

$\therefore MN\perp PC$

$4\vec{MN}\cdot\vec{CD}$

$=2(\vec{MP}+\vec{MC})\cdot\vec{CD}$

$=(\vec{AP}+\vec{BP}+\vec{AC}+\vec{BC})\cdot\vec{CD}$

$=(2\vec{AP}+\vec{BA}+2\vec{BC}+\vec{AB})\cdot\vec{CD}$

$=2\cdot\vec{AP}\cdot\vec{CD}+2\vec{BC}\cdot\vec{CD}=0$

$\therefore MN\perp CD$

$\because CD$，PC 为相交直线

$\therefore MN\perp$ 平面 PCD

$\because MN\subset$ 平面 MNP

$\therefore$ 平面 $MND\perp$ 平面 PCD

(2) 以 A 为原点，AB，AD，AP 为 x，y，z 轴如图建系，

$z\ (0,0,a)$　$(ka,a,0)$

设 $AB=k\cdot a$.

则 $M(\frac{k}{2}a,0,0)$

$N(\frac{k}{2}a,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

$\therefore \vec{DM}=(\frac{k}{2}a,0,-a)$

$\vec{DN}=(\frac{k}{2}a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$

平面 DMN 法向量为

$\vec{n}=(2,-k,k)$

底面法向量为

$\vec{m}=(0,0,1)$

$\therefore \cos60°$

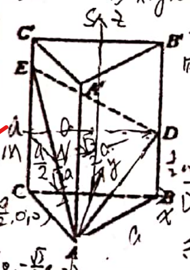
$=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}\right|$

$=\frac{k}{\sqrt{2k^2+4}}$

$\therefore k=\sqrt{2}$.

$\therefore AB=\sqrt{2}a$

6. ABC-$A'B'C'$ 是正三棱柱，底面边长为 a，D，E 分别是 BB'，CC' 上的点，$BD=\frac{1}{2}a$，$EC=a$. (1) 求证：平面 $ADE\perp$ 平面 $ACC'A'$；(2) 求截面 $\triangle ADE$ 的面积.



以 BC 中点 T 为原点，

设 $B'C'$ 中点为 S

以 TB，TA，TS 为 x，y，z 轴

如图建系

则平面 $ACC'A'$ 法向量

为 $\vec{n}=(\sqrt{3},-1,0)$

$\vec{AD}=(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a)$

$\vec{AE}=(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a,a)$

$\therefore$ 平面 ADE 法向量 $(1,-\sqrt{3},2)$

而 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$　$\therefore$ 平面 $ADE\perp$ 平面 $ACC'A'$

(2) $DE=AD=\frac{\sqrt{5}}{2}a$

$AE=\sqrt{2}a$

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$

$(-\frac{a}{2},0,0)$　$(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$

四、说明

1. 本节复习两平面垂直的概念、判定定理和性质定理. 应掌握"线线垂直"、"线面垂直"、"面面垂直"间的转化及转化的条件.

2. 在证两平面垂直时，一般可先从现有的直线寻找平面的垂线，如例 1，证平面 $PAC\perp$ 平面 PBC 时，可找到 $BC\perp$ 平面 PAC. 如果这样的直线图中不存在，则可通过作辅助线来解决，如测试题 6，可通过取 AE 的中点 P，再证 $DP\perp$ 平面 $ACC'A'$；如测试题 4 取 CD，BE 的中点 M，N，通过证明 $AN\perp$ 平面 $BCDE$ 得平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$.