讲练结合(二)、立几概貌综览

43.复数的代数形式

第一周周末作业

43.复数的代数形式 二、典型例题3(3)

(3) 设 $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $z_2=1+\mathrm{i}$, 试求满足 $z_1^m=z_2^n$ 的最小正整数 m, n.

分析：由 $|z_1|^m=|z_2|^n$ 可得 $n=2m$

故 $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^{2m}=(2i)^m$，

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right)^m=1, \quad (-1)^m\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^m=1,$$

所以最小正整数 m 为 6，最小正整数 n 为 12.

43.复数的代数形式 三、测试题7

7. 已知 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)\mathrm{i}$，$z_2=-3\sqrt{3}b+(b+2)\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}^+$），且 $3z_1^2+z_2^2=0$，求 z_1 和 z_2.

分析：由 $3{z_1}^2+{z_2}^2=0$ 因式分解得 $(\sqrt{3}z_1+z_2i)(\sqrt{3}z_1-z_2i)=0$

故 $\sqrt{3}z_1+z_2i=0$ 或者 $\sqrt{3}z_1-z_2i=0$

可解得(过程略) $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}a=-\dfrac{10}{7}\\b=\dfrac{1}{7}\end{cases}$ （舍）

综上 $z_1=\sqrt{3}+3i$， $z_2=-3\sqrt{3}+3i$.

第一周周末作业 二.4

4．已知复平面内两点 P_1、P_2 对应复数 1、i，则线段 P_1P_2 的垂直平分线方程的复数形式是 $|z-1|=|z-i|$ ________

第一周周末作业 三.6

6. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列,$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$.记 S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $b_k=a_m$(m,k 是大于 2 的正整数),求证:$S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若 $b_3=a_i$(i 是某一正整数),求证:q 是整数,且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项;

(3)是否存在这样的正数 q,使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列?若存在,写出一个 q 的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.

分析：$q=\dfrac{a_2}{a_1}\neq 1$，$\{a_n\}$的公差$d=a_2-a_1=a_1(q-1)$.

$$(1)\ b_k=a_m \Rightarrow a_1q^{k-1}=a_1+(m-1)a_1(q-1) \Rightarrow q^{k-1}=1+(m-1)(q-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^{k-1}}{1-q}=m-1，故\ S_{k-1}=\frac{a_1(1-q^{k-1})}{1-q}=(m-1)a_1.$$

6. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是公比为q的等比数列,$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$,记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和.

(1)若$b_k=a_m$(m,k是大于2的正整数),求证:$S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若$b_3=a_i$(i是某一正整数),求证:q是整数,且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项;

(3)是否存在这样的正数q,使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列?若存在,写出一个q的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.

(2) $b_3=a_i \quad \Rightarrow a_1q^2=a_1+(i-1)a_1(q-1)$

$\Rightarrow q^2=1+(i-1)(q-1)(q\neq 1)\Rightarrow q=i-2$ 是整数.

下面只需证明对任意$n\in N^*,n\geq 3$，存在$m\in N^*$，使得

$b_n=a_m$，即$a_1q^{n-1}=a_1+(m-1)a_1(q-1)$，

即关于m的方程$q^{n-1}=1+(m-1)(q-1)$有正整数解，

$$m=1+\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=1+1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-2},$$

6. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是公比为q的等比数列,$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$,记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和.

(1)若$b_k=a_m$(m,k是大于2的正整数),求证:$S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若$b_3=a_i$(i是某一正整数),求证:q是整数,且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项;

(3)是否存在这样的正数q,使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列?若存在,写出一个q的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.

$q=i-2\,(i\in N^*)$,

当$i=1$时,$q=-1$,$b_{2n-1}=b_1=a_1$,$b_{2n}=b_2=a_2$,符合;

当$i=2$时,$q=0$舍去;当$i=3$时,$q=1$舍去;

当$i\geq 4$时,$q\geq 2,q\in N^*$,$m=2+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-2}\in N^*$,

即数列$\{b_n\}$中第n $(n\geq 3)$项为数列$\{a_n\}$中第$2+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-2}$项.

6. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是公比为q的等比数列,$a_1=b_1$,$a_2=b_2\neq a_1$,记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和.

(1)若$b_k=a_m$(m,k是大于2的正整数),求证:$S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若$b_3=a_i$(i是某一正整数),求证:q是整数,且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项;

(3)是否存在这样的正数q,使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列?若存在,写出一个q的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.

(3)不妨设等比数列$\{b_n\}$中b_m,b_p,b_n($m<p<n$)三项成等差数列,

则$b_m+b_n=2b_p$,$1+q^{n-m}=2q^{p-m}$,　　答案不唯一.

例如令$n=m+3$,$p=m+1$,

$q^3-2q+1=(q-1)(q^2+q-1)=0$,解得$q=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$(负值舍).

令$n=m+3$,$p=m+2$,

$q^3-2q^2+1=(q-1)(q^2-q-1)=0$,解得$q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(负值舍).

会当凌绝顶——立几概貌综览

立体几何初步

立体几何主要考查两大问题

- 一类是空间位置关系的论证，这类问题要熟练掌握公理、定理、定义或用空间向量来论证；
- 另一类问题是空间量(角、距离、体积、侧面积等)的计算.

难点

- 部分客观题需要较高的空间想象能力；
- 主观题需用准确的数学语言来表述证明过程.

1．**平面的基本性质**

公理 1：如果一条直线上的__两点__在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是经过这个公共点的__一条直线__

公理 3: 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

2．空间两条直线的位置关系

位置关系	共面情况	公共点个数
相交直线	在同一平面内	有且只有一个
平行直线	在同一平面内	没有
异面直线	不同在任何一个平面内	没有

3.平行直线的公理及定理

(1)公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(2)等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

(2)推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

4．异面直线的判定及所成的角

(1)异面直线的判定：过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内_不经过该点_的直线是异面直线.

(2)异面直线所成的角：如果 a，b 是两条异面直线，那么经过空间任意一点 O，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，直线 a' 和 b' 所成的_锐角(或直角)_叫做异面直线 a，b 所成的角.

(3)异面直线垂直：若异面直线 a，b 所成的角是直角，则称异面直线 a、b_互相垂直_，记作_$a \perp b$_.

已知：直线 l 与平面 α 相交于点 A，直线 m 在平面 α 上，且不经过点 A，求证：直线 l 与 m 是异面直线.

证明　假设 l 与 m 不是异面直线.设 l 与 m 都在平面 β 上.

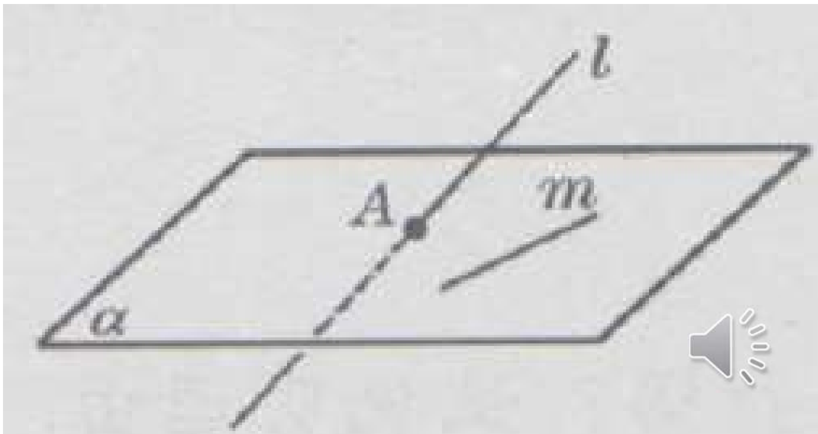
因为点 A 与直线 m 既在 α 上，又在 β 上，

由推论 1 可知平面 α 与 β 重合，

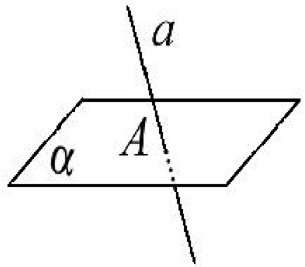
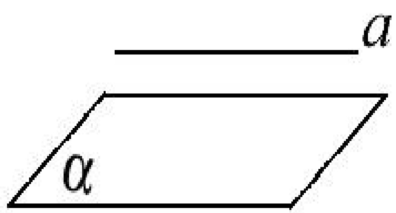
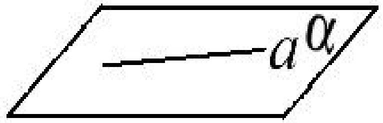
所以直线 l 在平面 α 上，这与直线 l 与平面 α 相交矛盾.

所以假设不成立.所以，

直线 l 与 m 是异面直线.



5. 空间直线与平面的位置关系

		图形语言	符号语言	公共点
直线与平面	相交		$a\cap\alpha=A$	1 个
	平行		$a/\!/\alpha$	0 个
	在平面内		$a\subsetneqq\alpha$	无数 个

6．直线与平面平行的判定与性质

(1)定义：如果一条直线和一个平面<u>没有</u>公共点，那么这条直线与这个平面<u>平行</u>.

(2)判定方法：

①利用定义；

②判定定理：如果平面外的一条直线与<u>平面内</u>的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行；

(3)性质定理：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的<u>交线</u>与该直线平行.

已知：a在α外, b在α内, $a//b$ ， 求证：$a//α$

a,b确定平面β， $α\cap β=b$

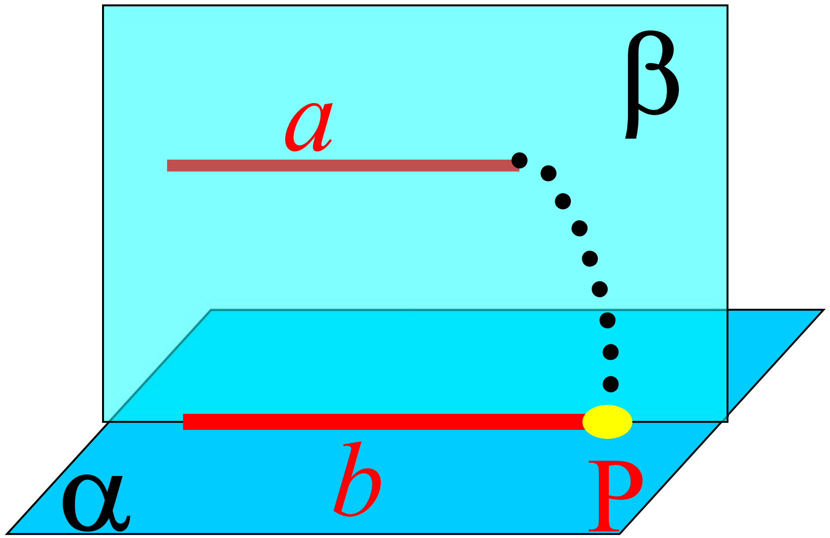
假设a与α不平行

则a与α有公共点P

则$P\in α\cap β=b$

这与已知$a//b$矛盾

∴$a // α$



7．直线与平面垂直的判定与性质

(1)定义：如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的_任意_一条直线都_垂直_，那么这条直线和这个平面垂直．

(2)判定方法：

①利用定义；

②判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条_相交_直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面；

(3)性质定理：垂直于同一个平面的两条直线_平行_.

8．直线和平面所成的角

(1)平面的一条斜线与它在这个平面内的射影所成的<u>锐角</u>，叫做这条直线与这个平面所成的角．

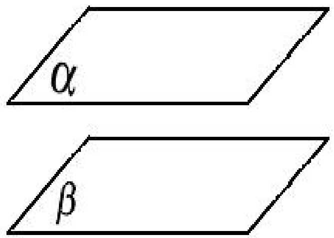
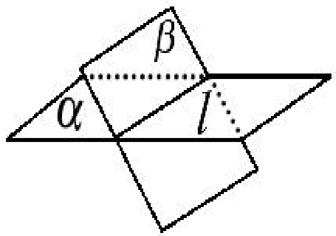
(2)一条直线<u>垂直</u>平面，则称它们所成的角是<u>直角</u>；一条直线与平面<u>平行</u>或<u>在平面内</u>，则称它们所成的角是0°的角．

注意:

斜线与平面所成角 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

直线与平面所成角 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

9. 平面与平面的位置关系

		图形语言	符号语言	公共点
平面与平面	平行		$\alpha \parallel \beta$	0个
	相交		$\alpha \cap \beta = l$	无数个

10．平面与平面平行的判定和性质

(1)定义：如果两个平面没有公共点，那么这两个平面互相平行.

(2)判定方法：

①利用定义；

②判定定理：如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行；

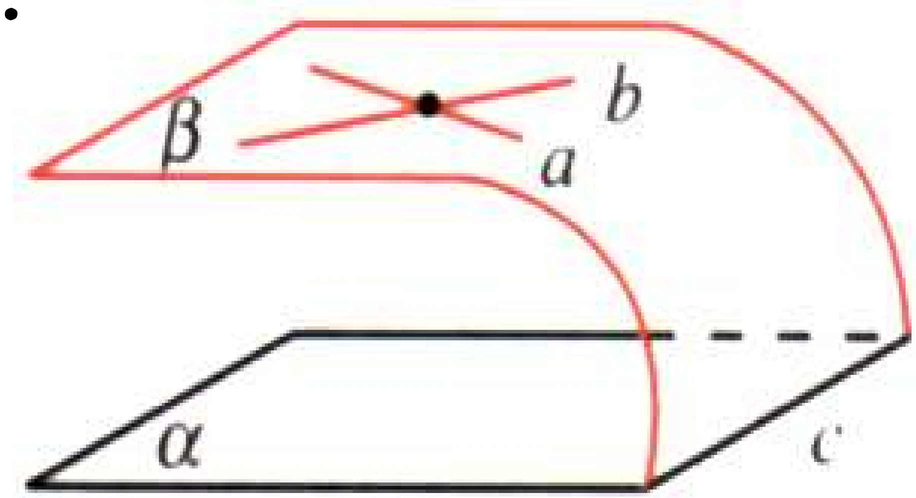
(3)性质定理：如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行.

若$a \subsetneqq \alpha, b \subsetneqq \alpha, a \cap b = A$

且 $a // \beta, b // \beta$，则$\alpha // \beta$

证明：用反证法证明.

假设$\alpha \cap \beta = c$.



$\because a // \alpha, a \subsetneqq \beta,$

$\therefore a // c$

同理$b // c,$

$\therefore a // b$

这与题设a和b是相交直线是矛盾的.

$\therefore \alpha // \beta$

11．**二面角的有关概念**

(1)二面角：一条直线和由这条直线出发的<u>两个半平面</u>所组成的图形叫做二面角．

(2)二面角的平面角：以二面角的棱上任一点为端点，在两个半平面内分别作<u>垂直于棱</u>的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角．二面角的平面角的范围是<u>$[0，\pi]$</u>．

12．**平面与平面垂直**

(1)定义：如果两个平面所成的二面角是<u>直二面角</u>，就说这两个平面互相垂直．

(2)判定定理：如果一个平面经过另一个平面的<u>一条垂线</u>，那么这两个平面互相垂直．

(3)性质定理：如果两个平面互相<u>垂直</u>，那么在一个平面内<u>垂直于它们交线</u>的直线垂直于另一个平面．

平行、垂直关系转化(10个)

线线平行 $\rightleftarrows$ 线面平行

$$\left.\begin{aligned} &a//b \\ &a\text{在}\alpha\text{外} \\ &b\text{在}\alpha\text{内} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a//\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &a//\beta \\ &a\subsetneqq\alpha \\ &\alpha\cap\beta=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a//b$$

线面平行 $\rightleftarrows$ 面面平行

$$\left.\begin{aligned} &a//\beta \\ &b//\beta \\ &a\subsetneqq\alpha \\ &b\subsetneqq\alpha \\ &a\cap b=P \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha//\beta$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha//\beta \\ &a\subsetneqq\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow a//\beta$$

平行、垂直关系转化(10个)

线线垂直 ⇄ 线面垂直

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ b \subsetneqq \alpha \\ c \subsetneqq \alpha \\ b \cap c = P \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \subsetneqq \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b$$

线面垂直 ⇄ 面面垂直

$$\left.\begin{array}{l} a \perp \beta \\ a \subsetneqq \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ a \subsetneqq \alpha \\ a \perp b \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$$

平行、垂直关系转化(10个)

线面垂直 $\longrightarrow$ 线线平行

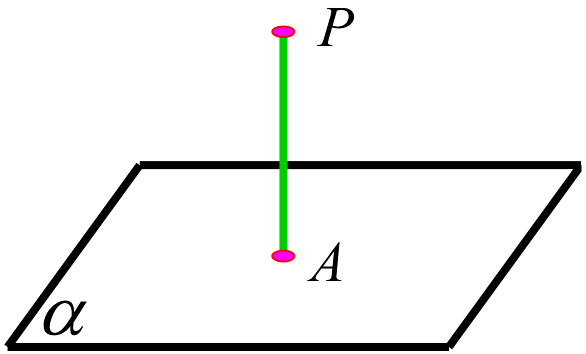
$$\left.\begin{array}{l} a \perp \beta \\ b \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$$

面面平行 $\longrightarrow$ 线线平行

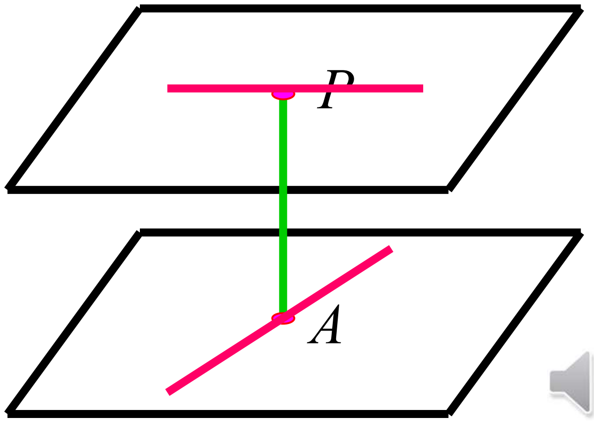
$$\left.\begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$$

13.点与面（线与面、面与面）、异面直线的距离

1. 点到平面的距离：从平面外一点引一个平面的垂线，这点和垂足间的距离叫做这个点到这个面的距离.



2. 异面直线的距离：两异面直线间的公垂线段的长度叫两异面直线的距离。

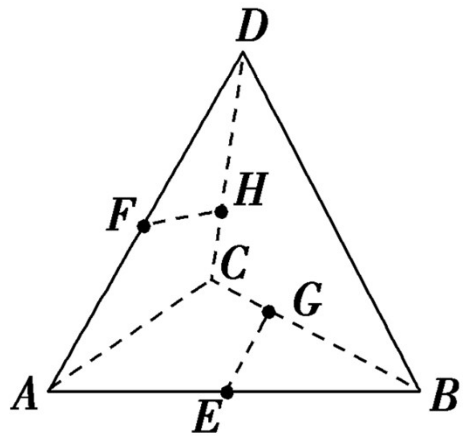


例1

已知空间四边形 $ABCD$(如图所示)，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $CG=\frac{1}{3}BC$，$CH=\frac{1}{3}DC$.求证：

(1)E、F、G、H 四点共面；

(2)三直线 FH、EG、AC 共点.



[证明]　(1)连结 EF、GH，

∵E、F 分别是 AB、AD 的中点，

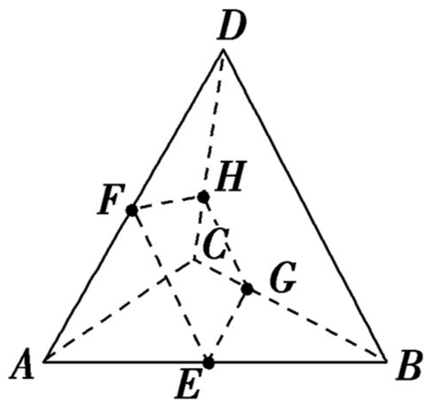
∴$EF \parallel BD$.

又∵$CG=\frac{1}{3}BC$，$CH=\frac{1}{3}DC$，

∴$GH \parallel BD$，

∴$EF \parallel GH$，

∴E、F、G、H 四点共面.



(2)易知 FH 与直线 AC 不平行，但共面，

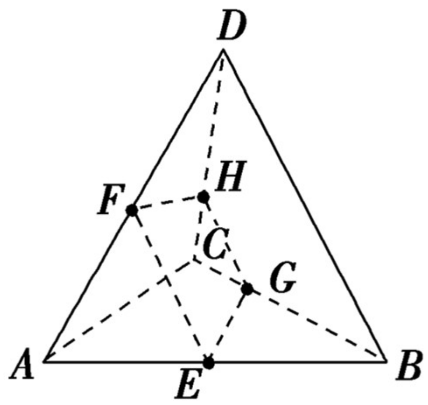
所以它们相交，设 $FH \cap AC = M$，

$\therefore M \in$ 平面 $EFHG$，$M \in$ 平面 ABC.

又$\because$平面 $EFHG \cap$ 平面 $ABC = EG$，

$\therefore M \in EG$，

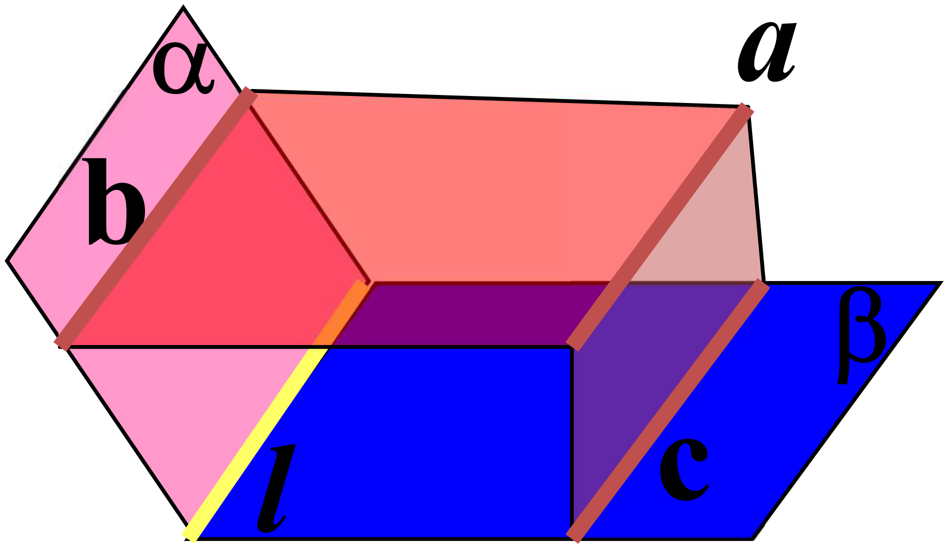
$\therefore$三直线 FH、EG、AC 共点.



例2

如果一条直线和两个相交平面都平行，则这条直线与它们的交线平行

已知：$a // \alpha$， $a // \beta$ ， $\alpha \cap \beta = l$



求证：$a // l$

思路

$$\left.\begin{array}{l} a // \alpha \Rightarrow a // b \\ a // \beta \Rightarrow a // c \end{array}\right\} \Rightarrow b // c$$

$$\Rightarrow b // \beta \Rightarrow b // l \Rightarrow a // l$$

例3

与空间中两两异面的3条直线都相交的直线(D)

A.不存在　　B.有且仅有一条

C.有且仅有两条　　D.有无数条