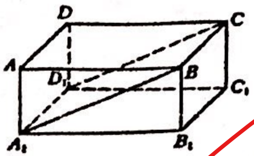
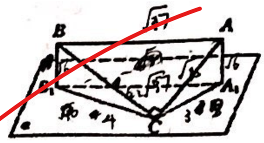
54. 直线与平面平行

一、基本训练题





1. 如图，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 $A_1A=5$，$AB=12$，那么直线 B_1C_1 与平面 A_1BCD_1 的距离是 $\underline{\frac{60}{13}}$.

2. 如图，直角三角形 ABC 的直角顶点 C 在平面 α 内，斜边 $AB \parallel \alpha$，并且 AB 与 α 间的距离为 $\sqrt{6}$，A，B 在 α 内的射影分别为 A_1，B_1，且 $A_1C=3$，$B_1C=4$，则 $AB=$ $\underline{\sqrt{37}}$，$\angle A_1CB_1=$ $\underline{120^\circ}$.

3. 过直线 a 外两点作与直线 a 平行的平面，这样的平面 (D)

(A) 不可能作 ✓　　(B) 只能作一个 ✓

(C) 可以作无数多个 ✓　　(D) 上述三种情况都有可能

万一重合呢?

二、典型例题

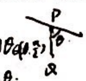
1. 求证：经过两条异面直线中的一条，有且只有一个平面和另一条直线平行.

图?　why 只有一个? 用文字

证明：假设两条直线分别为 a.b.
在 b 上任取一点 B.
过 B 有且仅有一条直线与 a 平行，记该直线为 l.
由 a 与 b 为异面直线 故 $b \nparallel l$.
$\Rightarrow b \cap l = B$
$\Rightarrow b$ 与 l 确定一个平面 β
以下先证明存在性
$l \parallel a$. $l \subsetneq \beta$ $a \not\subset \beta$.
$\Rightarrow l \parallel \beta$. 存在性证毕.

再证明唯一性
假设另存在一个平面 β'. $\beta' \parallel a$
考虑 B 与 a 所确定的平面 α.
α 与 β' 不重合 因有交点. 则有交线.
考虑 α 与 β' 的交线 l'
$l' \parallel l$.
在平面 α 中 有且仅有一条直线即 l 与 a 平行.
则 l' 与 a 相交. 而 $l' \subset \beta'$
则 β' 与 a 相交
矛盾. 唯一性证毕.
综上 本题得证

2. 设 P 是空间中定直线 a 外的一个定点，P 到 a 的距离为 d，则过 P 且与 a 的距离为 d 的所有直线构成的图形是什么？说明理由.



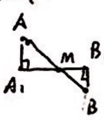
过P且平行于 a 的平面. 且与 P 与 a 所确定的平面垂直.
下证明之:
我们设 P 在直线 a 上垂足为 Q.
先证明 任意满足条件的直线 l.
满足 $l \perp PQ$.
否则. 设 l 与 PQ 夹角 $\theta \neq 90°$
a 到 l 的距离为 $d\sin\theta$.
则 a 与 l 距离不大于 $d\sin\theta < d$.
矛盾
而对于任意满足 $l \perp PQ$ 的直线
都有 PQ 为 l 与 a 公垂线段 有 l 与 a 距离为 d.
故所有直线即为 过 P 与 PQ 垂直的所有直线
过 P 且垂直于 PQ 的平面 α.
由 α 中任意直线与 PQ 垂直
故 题中图形包含平面 α.
假设另有一条直线与 PQ 垂直 过 P 且不位于 α.
将该直线记作 b 考虑 b 与 α 确定平面 β.
$\beta \cap \alpha = c$. 则 b.c.PQ 在同一平面.
$PQ \perp b$. $PQ \perp c$.
且 b c 均过 P
与 在平面中过一定点有且仅有一条直线与已知直线垂直 相矛盾.
故构成图形即为
过 P 且垂直于 PQ 的平面.

3. (1) 求证：如果一个平面经过一条线段的中点，那么这条线段的两个端点到平面的距离相等；

(2) 求证：空间四边形的两条对角线到这空间四边形各边中点所在平面的距离相等.

(3) 与四面体四个顶点距离相等的平面有多少个？

(1) 证明：设线段两端点 A.B 中点 M 平面为 α.
A B 在平面上投影分别为 A_1 B_1.
① 当 A.B 均不在 α 上时.
$AA_1 \perp \alpha$. $BB_1 \perp \alpha$.
若 A.A_1 与 $B$$B_1$ 共线.
则 $A_1 = B_1 = M \Rightarrow AA_1 = BB_1$.
若 AA_1 与 BB_1 不共线
$AA_1 \parallel BB_1$. AA_1 与 BB_1 确定一个平面 β.
$\beta \cap \alpha = A_1B_1$.



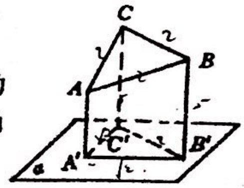
$\Rightarrow AA_1 \perp A_1B_1$
$BB_1 \perp A_1B_1$
$\angle AMA_1$ 与 $\angle BMB_1$ 为对顶角故相等.
$\Rightarrow AA_1 = AM\sin\angle AMA_1 = BM\sin\angle BMB_1 = BB_1$.
②. 当 A.B 有一个在 α 上时.
由 $M \in \alpha$. A.$B \neq M$.
$\Rightarrow AB \subset \alpha$.
$\Rightarrow A$.B 到 α 距离均为0. 相等. 证毕!

(2) 设 空间四边形 $ABCD$

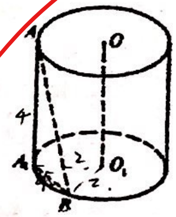
AB.BC.CD.DA 中点 分别为 $PQRS$
$RS \parallel AC$ $PQ \parallel AC \Rightarrow PQRS$ 确定一个平面
记 $PQRS$ 所在平面 α
由第一问
A.B 到 α 距离相等. CD 到 α 距离相等
BC 到 α 距离相等. DA 到 α 距离相等
$\Rightarrow A$.B.C.D 到 α 距离相等.
又 AC. BD 分居 α 两侧. $AC \parallel \alpha$. $BD \parallel \alpha$.
$\Rightarrow AC$.BD 到 α 距离相等.

(3). 考虑 $ABCD$ 分为两组在平面两侧
一组4个 一组0个. 不成立
一组3个 一组1个. 4个. 为该顶点高的中垂面
两组各2个. 3个. 由上一题知 为各棱中点确定的平面.
总共7个.

三、测试题



1. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，BC // 平面 α，A，B，C 在 α 的同侧，它们在 α 内的射影分别为 A'，B'，C'，若 $\triangle A'B'C'$ 为直角三角形，BC 与 α 间的距离为 5，则 A 到 α 的距离为 $5\pm\sqrt{2}$.



2. 如图，圆柱的底面圆半径为 2，高为 4，线段 $AB=2\sqrt{6}$，它的两端点分别在上、下底面圆周上，AA_1 是圆柱的母线，则圆柱两底面圆圆心连线 OO_1 与平面 AA_1B 的距离为 $\sqrt{2}$.

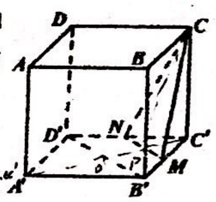
3. α，β 表示平面，a，b 表示直线，则 a // α 的一个充分条件是（D）

(A) $\alpha\perp\beta$ 且 $a\perp\beta$　　(B) $\alpha\cap\beta=b$ 且 a // b

(C) a // b 且 b // α　　(D) α // β 且 $a\subset\beta$

4. 对于命题："若直线 a // 平面 α，直线 $l\perp$ 平面 α，则 $l\perp$ 直线 a."进行如下证明："在平面 α 内作直线 b // 直线 a，$\because l\perp\alpha$，$\therefore l\perp b$，而 b // a，$\therefore l\perp a$."试指出证明中的错误.

没有说明直线b的存在性直接作平行线



5. $ABCD$-$A'B'C'D'$ 是棱长为 a 的正方体，M，N 分别是 $B'C'$ 和 $C'D'$ 的中点.(1) 求证：$B'D'$ // 平面 CMN；(2) 求 B' 到平面 CMN 的距离.

(1)

证明：由 M.N 为 B'C'.C'D' 中点.

$MN \parallel B'D'$.

B'D' 不在平面 CMN 内.

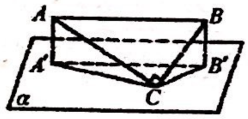
$\Rightarrow B'D' \parallel$ 平面 CMN

(2) ~~设体 A'C' 交BD 于 O 交MN于P~~

~~BC~~，设距离 h.

$h=\dfrac{3V_{B'-CMN}}{S_{\triangle CMN}}=\dfrac{3V_{C-B'MN}}{S_{\triangle CMN}}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot BM\cdot CN\cdot CC'}{\frac{1}{2}\cdot MN\cdot CP}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2}a}=\frac{1}{3}a$



6. 直角三角形 ABC 的直角顶点 C 在平面 α 内，斜边 AB // α，A，B 在 α 内的射影分别为 A'，B'，(1) 求证：$\triangle A'B'C$ 是钝角三角形；(2) 当 AC，BC 与平面 α 所成角分别为 30°和 45°时，求 $\cos\angle A'CB'$ 的值.

解. (1) $AB^2=AC^2+BC^2$.

$AA'\perp\alpha$. $BB'\perp\alpha$.

$\Rightarrow \angle AA'C=\angle BB'C=90°$

$AC^2=A'A^2+A'C^2$ $BC^2=B'B^2+B'C^2$

$\Rightarrow AB^2=AC^2+BC^2$

$=A'A^2+A'C^2+B'C^2+B'B^2$.

~~AB=AB~~ $AB^2>A'C^2+B'C^2$.

$AB \parallel A'B'$

$\angle AA'B'=\angle BB'A'=90°$

~~AABB~~ $AA' \parallel BB'$

$\Rightarrow ABB'A'$ 为矩形.

$AB=A'B'$

$\Rightarrow A'B'^2>A'C^2+B'C^2$

$\Rightarrow \angle A'CB'$ 为钝角.

(2) 设 $AA'=d=BB'$.

$\angle ACA'$ 为AC与平面α所成角.

$\angle BCB'$ 为BC与平面α所成角

$\angle ACA'=30°$ $\angle BCB'=45°$

$\Rightarrow AC=2d$. $BC=\sqrt{2}d$. $A'C=\sqrt{3}d$ $B'C=d$.

$\Rightarrow AB=\sqrt{6}d=A'B'$

~~A'C=~~ $\cos\angle A'CB'=\dfrac{d^2+3d^2-6d^2}{2\sqrt{3}d^2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、说明

1. 本节的复习内容为直线与平面平行的概念、判定和性质，平行的直线与平面间的距离.

2. 在求平行的直线与平面间距离时，先要找出或作出表示这距离的线段，并进行证明，然后计算得出结果. 如三、5 求点 B' 到平面 CMN 的距离时，把点 B' 移到 $B'D'$ 的中点 O，从 O 作平面 CMN 的垂线就比较方便了. 利用 M 是 $B'C'$ 的中点，转化为 C' 到平面 CMN 的距离，而这个距离又可以转化为三棱锥 C'-CMN 的高，利用体积公式来求就更方便了.