

26. 反三角函数

一. 填空题:

1. 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列, 其最小内角为 $\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
2. 已知方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 则 $\arctan x_1 + \arctan x_2 = -\frac{2}{3}\pi$
3. $\arcsin x > \arccos x$ 成立的 x 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$
4. 函数 $y = 2\arccos(x-2)$ 的反函数是 $y = \cos \frac{x}{2} + 2, x \in [0, 2\pi]$
5. 若关于 x 的方程 $\sin x - \cos x = m$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有且仅有一个解, 则 m 的值是 $\pm\sqrt{2}$

二. 选择题:

1. 已知 $\sin \alpha = m (|m| \leq 1)$, 且 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, 若用反三角函数表示 α , 则 α 为 (D)
- A $\arcsin m$ B $2\pi - \arcsin m$ C $\pi + \arcsin m$ D $\pi - \arcsin m$
2. $y = \arcsin x + \arctan x$ 的值域为 (C)
- A $[-\pi, \pi]$ B $[0, \pi]$ C $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ D $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
3. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \pi - \arccos(\sin x)$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ (C)
- A $\arccos(\sin x)$ B $\pi + \arccos(\sin x)$ C $-\arccos(\sin x)$ D $-\pi - \arccos(\sin x)$

三. 解答题:

1. 求下列函数的反函数

(1) $y = \cos x, x \in [\frac{5\pi}{2}, 3\pi]$

解: $\because y = \cos x \in [-1, 0]$

$x = \arccos y + 2\pi$

\therefore 反函数为 $y = \arccos x + 2\pi (x \in [-1, 0])$

2. 求下列函数的定义域和值域

(1) $y = 2\arccos \frac{1}{x-2}$

(2) $y = \arcsin(x^2 - x)$

(3) $y = 2\arcsin(x^2 + x - 1)$

(4) $y = \lg \arcsin(x - \frac{1}{3})$

解: (1)

$\frac{1}{x-2} \in [-1, 0] \cup [0, 1]$

$x-2 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$\therefore x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

$\arccos \frac{1}{x-2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\therefore y \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$

(2) $-1 \leq x^2 - x \leq 1$

$\therefore x \in [-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

$x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$

$\therefore x^2 - x \in [-\frac{1}{4}, 1]$

$\therefore y \in [-\arcsin \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$\therefore x \in [-2, -1] \cup [0, 1]$

$y \in [-\pi, \pi]$

(4) $\arcsin(x - \frac{1}{3}) > 0$

$\therefore x - \frac{1}{3} \in (0, 1]$

$\therefore x \in (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$

$y \in (-\infty, \lg \frac{\pi}{2}]$

3. 求下列各式的值 (1) $\cos\left[\arccos\frac{4}{5} + \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$ (2) $\sin\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\arctan(-2\sqrt{2})\right]$

解: (1) 原式 = $\cos(\arccos\frac{4}{5})\cos(\arccos(-\frac{5}{13})) - \sin(\arccos\frac{4}{5})\sin(\arccos(-\frac{5}{13}))$
 $= \frac{4}{5} \times (-\frac{5}{13}) - \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = -\frac{56}{65}$

(2) $\arctan(-2\sqrt{2}) = \arcsin(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$
 $= -\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 求函数 $y = (\arccos x)^2 - 5\arccos x, x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ 的最值

解: $t = \arccos x \in [0, \frac{2}{3}\pi]$

$y = t^2 - 5t = (t - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

$t = \frac{2}{3}\pi$ 即 $x = -\frac{1}{2}$ 时 $y_{\min} = \frac{4}{9}\pi^2 - \frac{10}{3}\pi$

$t = 0$ 即 $x = 1$ 时 $y_{\max} = 0$

5. 若 $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$, 求 $\arccos\frac{x}{2}$ 的值

解: $1 = \tan(\frac{\pi}{4}) = \tan(\arctan(1+x) + \arctan(1-x))$
 $= \frac{1+x+1-x}{1-(1+x)(1-x)} = \frac{2}{x^2} \therefore x = \pm\sqrt{2}$

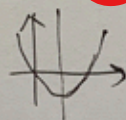
$\therefore \arccos\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

6. 二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为正数, 且满足关系式 $f(x) = f(2-x)$, 解不等式

$f\left(\frac{\arccos x}{4}\right) > f\left(\frac{\arccos(1-x)}{4}\right)$

解: 对称轴直线 $x = 1$

$\frac{\arccos(1-x)}{4} \in [0, \frac{\pi}{4}]$
 $\frac{\pi}{4} < 1$



$\therefore \arccos x < \arccos(1-x)$

$\therefore \arccos x < \arccos(1-x)$

$x \in [-1, 1] \quad 1-x \in [-1, 1]$

$\therefore x \in [0, 1]$

$x > 1-x$

$\therefore x \in (\frac{1}{2}, 1]$

7. 讨论函数 $y = \arccos(x^2 - x)$ 的性质 (定义域, 值域, 单调性, 最值)

解: $-1 \leq x^2 - x \leq 1$

$\therefore x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

$x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$

$\therefore x^2 - x \in [-\frac{1}{4}, 1]$

$\therefore y \in [0, \pi - \arccos\frac{1}{4}]$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y_{\min} = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad y_{\max} = \pi - \arccos\frac{1}{4}$

$x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ 单调递增

$x \in [\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ 单调递减