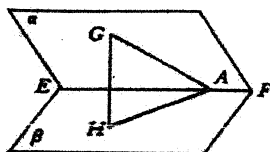
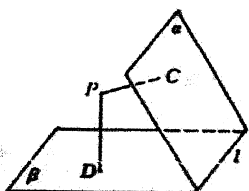


## 58. 二 面 角

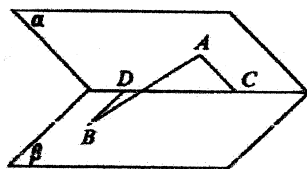
### 一、基本训练题

- 如图,在平面角为  $60^\circ$  的二面角  $\alpha-l-\beta$  内有一点  $P$ ,  $P$  到  $\alpha, \beta$  的距离分别为  $PC=2\text{cm}$ ,  $PD=3\text{cm}$ , 则垂足的连线  $CD=$  \_\_\_\_\_,  $P$  到棱  $l$  的距离为 \_\_\_\_\_.
- 如图,在平面角为锐角的二面角  $\alpha-EF-\beta$  中,  $A \in EF$ ,  $AG \subset \alpha$ ,  $\angle GAE=45^\circ$ , 若  $AG$  与  $\beta$  所成角为  $30^\circ$ , 则二面角  $\alpha-EF-\beta$  的平面角为 \_\_\_\_\_.
- 两条异面直线所成角的取值集合为  $M_1$ , 斜线和平面所成角的取值集合为  $M_2$ , 二面角的平面角的取值集合为  $M_3$ , 则有 ( )  
 (A)  $M_1=M_2 \subset M_3$     (B)  $M_1 \subset M_2 \subset M_3$     (C)  $M_2 \subset M_1 \subset M_3$     (D)  $M_1=M_3 \subset M_2$

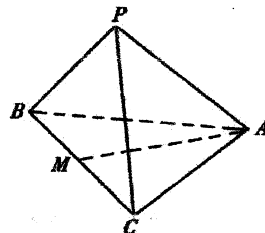


### 二、典型例题

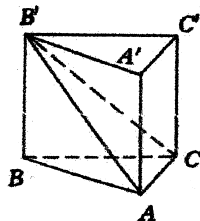
- 已知  $\alpha-l-\beta$  是  $60^\circ$  的二面角,  $A \in \alpha, B \in \beta, AB=20\text{cm}$ ,  $A, B$  到  $l$  的距离分别为  $5\text{cm}$  和  $8\text{cm}$ , 求  $A, B$  在棱  $l$  上射影之间的距离.



- 如图,三棱锥  $P-ABC$  中,平面  $PBC \perp$  平面  $ABC$ ,  $\triangle PBC$  是边长为  $a$  的正三角形,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $\angle BAC=30^\circ$ ,  $M$  是  $BC$  的中点. 求二面角  $C-PA-M$  的正弦值.

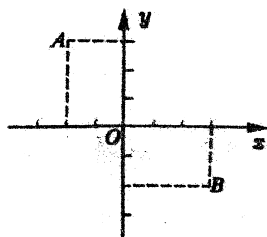
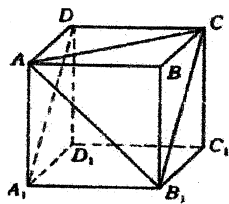


- 在直三棱柱  $ABC-A'B'C'$  中,  $\angle BAC=90^\circ$ ,  $AB=BB'=1$ , 直线  $B'C$  与平面  $ABC$  成  $30^\circ$  的角. (1) 求点  $C'$  到平面  $AB'C$  的距离; (2) 求二面角  $B-B'C-A$  的余弦值.



### 三、测试题

1. 如图,在正方体  $AC_1$  中,二面角  $A-B_1C-A_1$  的平面角的正切值为\_\_\_\_\_.

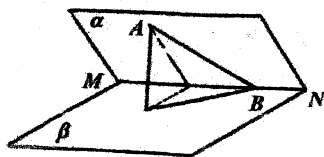


2. 在直角坐标系中,设  $A(-2,3), B(3,-2)$ ,沿  $x$  轴把直角坐标平面折成大小为  $\theta$  的二面角后,  $|AB|=4\sqrt{2}$ ,则  $\theta$  的值为

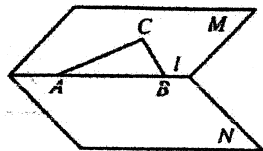
- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $120^\circ$

3. 二面角  $\alpha-MN-\beta$  的平面角为  $\theta_1$ ,  $AB \subset \alpha, B \in MN$ ,  $\angle ABM = \theta_2$  ( $\theta_2$  为锐角),  $AB$  与面  $\beta$  所成角为  $\theta_3$ ,则下列关系式成立的是

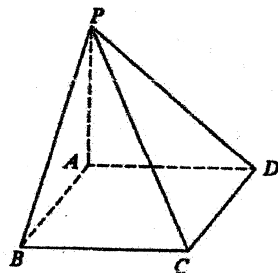
- (A)  $\cos \theta_3 = \cos \theta_1 \cos \theta_2$  (B)  $\sin \theta_3 = \cos \theta_1 \sin \theta_2$   
(C)  $\sin \theta_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2$  (D)  $\cos \theta_3 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$



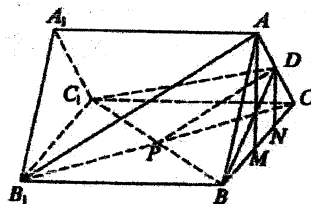
4. 直角三角形  $ABC$  的斜边  $AB$  在二面角  $M-l-N$  的棱  $l$  上,直角顶点  $C \in$  平面  $M$ ,设二面角  $M-l-N$  的大小为  $\theta$ ,  $AC, BC$  与平面  $N$  所成的角分别为  $\alpha, \beta$ . 求证:  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \theta$ .



5. 过正方形  $ABCD$  的顶点  $A$  作  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 设  $PA = AB = a$ . (1) 求三面角  $B-PC-D$  的大小; (2) 求平面  $PAB$  和平面  $PCD$  所成二面角的大小.



6. 如图,  $ABC-A_1B_1C_1$  是正三棱柱,  $D$  是  $AC$  的中点. (1) 求证:  $AB_1 \parallel$  平面  $DBC_1$ ; (2) 设  $M$  是  $BC$  的中点, 当  $AB_1 \perp BC_1$  时, 求证  $B_1M \perp BC_1$ ; (3) 在 (2) 的条件下, 若  $N$  是  $CM$  的中点, 且  $NP \parallel B_1M$ ,  $NP$  与  $BC_1$  交于  $P$ . 求证:  $\angle DPN$  是二面角  $D-BC_1-C$  的平面角, 并求出这个二面角的正切值.



### 四、说明

本节复习二面角的概念,处理二面角问题的关键是找出二面角的平面角.作平面角,一般有以下几种常规方法:(1) 根据定义在二面角的棱上取点,过这点在两个半平面内分别作棱的垂线构成平面角;(2) 作二面角棱的垂直平面与两半平面的交线构成平面角,如基本训练第1题;(3) 找一个平面的垂线,由三垂线定理或其逆定理作平面角是用得最多的,如例3,测试题6等.