20200320.

第五周周末作业

一. 填空题:

1、已知三个球的表面积之比是 1:2:3,则这三个球的体积之比是 $1:2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$.

2、若一个球的外切正方体的全面积等于 $6cm^2$,则此球的体积是 $\frac{\pi}{6}$

3、已知高与底面直径之比为 2:1 的圆柱内接于球，且圆柱的体积为 $500\pi cm^3$,则球的体积为 $\frac{2500\sqrt{5}}{3}\pi\ cm^3$.

4、正四面体的内切球球心到一个面的距离等于这个正四面体高的 $\frac{1}{4}$

5、若棱锥的全面积为 S，体积为 V，则它的内切球的体积是 $\frac{36\pi V^3}{S^3}$

6、已知球面上两点的球面距离为 5cm，过这两点的球半径成 60^0 角，则球的半径为 $\frac{15}{\pi}$ cm.

7、设地球半径为 R，在北纬 30^0 圈上有甲，乙两地，它们的经度差 120^0，则这两地的纬度线长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R$.

8、地球北纬 45^0 圈上有 A，B 两地分别在东经 70^0 和 160^0 处，若地球的半径为 R，则 A，B 两地的球面距离是 $\frac{\pi}{3}R$.

9、设地球的半径为 R，卫星离地面的高度为 H，要使地球上 $\frac{1}{3}$ 面积上的人能同时见到卫星，则 H 等于 $2R$

10、在 120^0 的二面角内放一个半径为 5 的球，使球与两个半平面各有且仅有一个公共点，则这两个点之间的球面距离等于 $\frac{5}{3}\pi$.

11、在北纬 60^0 圈上，有甲，乙两地，它们在纬度圈上的弧长等于 $\frac{\pi R}{2}$（R 为地球半径），则这两地间的球面距离是 $\frac{\pi}{3}R$.

12、在地球北纬 60^0 圈上有 A，B 两点，它们的经度相差 180^0，则 A，B 两点沿此北纬度圈的劣弧长与 A，B 两点的球面距离之比是 3:2.

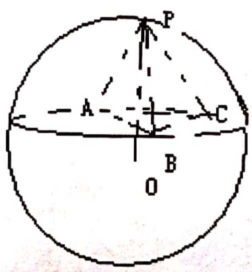
13、有半径为 r，的相同的四个球，要把它们全部装在一个大球内，则大球的最小表面积是 $(10+4\sqrt{6})\pi r^2$.

14、球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\frac{1}{6}$，经过这 3 个点的小圆的周长为 4π，那么这个球的半径为 $2\sqrt{3}$. $\frac{\pi}{3}$

15、已知半径为 5 的球的两个平行截面的周长分别为 6π 和 8π，则这两个截面的距离为 1或7

16、长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3、4、5，且它的八个顶点都在同一个球面上，这个球的表面积是 50π.

17、在球面上有四个点 P、A、B、C，如果 PA、PB、PC 两两互相垂直，且 PA=PB=PC=a,则这个球的表面积是 $3a^2\pi$.



二、解答题：

18、把地球当作半径为 R 的球，地球上 A，B 两点都在北纬 45^0 的纬线上，A，B 两点的球面距离是 $\frac{\pi}{3}$R，A 在东经 20^0，求 B 点的位置。

$\because$ AB两点间球面距离是 $\frac{\pi}{3}R$

$\therefore \angle AOB \cdot R = \frac{\pi}{3}R$

即 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$

$\therefore AB = \sqrt{OA^2+OB^2-2\cos\angle AOB \cdot OA \cdot OB} = R.$

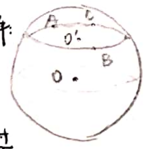
$\because AO' = BO' = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

$\therefore \angle AO'B = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ B在北纬45°.东经110°或北纬45°.西经70°

19、在球 O 的球面上有 A、B、C 三点且 AB=10，BC=8，AC=6，过 A、B、C 三点的截面与球心 O 的距离为 $\sqrt{11}$，求 A，C 两点的球面距离。

解：



过

设ABC三点的截面圆心为O'.

$\because AB^2 = BC^2 + AC^2$

$\therefore \triangle ABC$ 为以C为直角顶点的直角三角形.

其外心为AB中点. 即AB中点为O'

$\therefore O'A = \frac{1}{2}AB = 5.$

$\because OO' \perp$ 平面ABC. $AO' \subset$ 平面ABC

$\therefore OO' \perp AO'$

$\therefore AO = \sqrt{AO'^2 + OO'^2}$

$= 6.$

$\because \cos\angle AOC = \frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2OA \cdot OC} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle AOC = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ AC两点间球面距离为 $6(\frac{\pi}{3}) = 2\pi.$

20、如图所示是一个长方体截去一个角得到的几何体的直观图及正视图和侧视图（单位：*cm*）.

(1)画出该多面体的俯视图，并标上相应的数据；

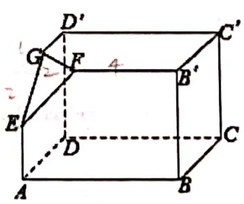
(2)按照给出的数据，求该几何体的体积.

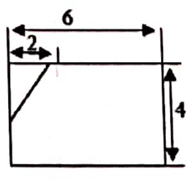
解:(2) $V = V_{长方体} - V_{三棱锥}$

$= 6\times4\times4 - \frac{1}{3}\times2\times2\times\frac{1}{2}\times2$

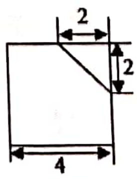
$= 96 - \frac{4}{3}$

$= \frac{284}{3}\ cm^3.$

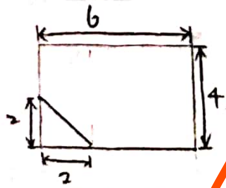




正视图



侧视图



俯视图.

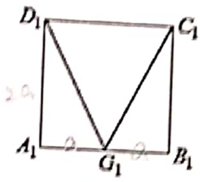
21、一个空间几何体 $G-ABCD$ 的三视图如图所示，其中 A_i，B_i，C_i，D_i，$G_i(i=1,2,3)$ 分别是 A，B，C，D 五点在直立、侧立、水平三个投影面内的投影，且在主视图中，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形且 $A_1B_1=2a$；在左视图中 $A_2D_2\perp A_2G_2$，俯视图中 $A_3G_3=B_3G_3$，

(1)根据三视图作出空间几何体 $G-ABCD$ 的直观图，并标明 A，B，C，D，G 五点的位置；

(2)在空间几何体 $G-ABCD$ 中，过点 B 作平面 AGC 的垂线，若垂足 H 在直线 CG 上，

求证：平面 $AGD\perp$ 平面 BGC；

(3)在(2)的条件下，求三棱锥 $D-ACG$ 的体积及其外接球的表面积，

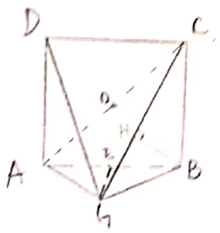


主视图

侧视图

俯视图

解. (1).



(2). ∵ $BH\perp$ 平面 AGC

$AG\subsetneq$ 平面 AGC

∴ $BH\perp AG$.

∵ 平面 $ABCD\perp$ 平面 AGB 且两平面交线为 AB

$AD\perp AB$. $AD\subsetneq$ 平面 $ABCD$

∴ $AD\perp$ 平面 AGB.

又 在正方形中 $CB//AD$

∴ $CB\perp$ 平面 AGB

∵ $AG\subsetneq$ 平面 AGB

∴ $CB\perp AG$

∵ $CB\perp AG$. $BH\perp AG$. $BH\cap CB=B$

∴ $AG\perp$ 平面 BGC

又 $AG\subsetneq$ 平面 AGD

∴ 平面 $BGC\perp$ 平面 AGD.

(3). $V_{D-AGC}=V_{G-ACD}$.

∵ 平面 $CBG\perp AG$

$GB\subsetneq$ 平面 BCG

∴ $AG\perp GB$.

又 $AG=GB$, $AB=2a$

∴ $AG=GB=\sqrt{2}a$.

过 G 作 $GE\perp AB$.

∵ $AD\perp$ 平面 AGB, $GE\subsetneq$ 平面 AGB

∴ $AD\perp GE$

又 $GE\perp AB$. $AD\cap AB=A$

∴ $GE\perp$ 平面 $ADCD$

即 GE 为三棱锥 $G-ACD$ 的高.

∵ $GE\cdot AB=AG\cdot GB$

∴ $GE=a$

∴ $V_{G-ACD}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{1}{2}\times 2a\times 2a=\frac{2}{3}a^3$

故 $V_{D-ACG}=\frac{2}{3}a^3$

取 AC 中点，记为 O

在直角 $\triangle ADC$ 中. O 为斜边 AC 中点. 故

$AO=OC=OD=\sqrt{2}a$.

∵ $OE\subsetneq$ 平面 $ABCD$. $GE\perp$ 平面 $ABCD$

∴ $OE\perp GE$.

∴ $OG=\sqrt{GE^2+OE^2}$.

∵ $AO=OC$, $AE=EB$

∴ $OE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CB=a$

∴ $OG=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

即 $OA=OC=OD=OG$

故 O 为 $D-ACG$ 外接球球心. 半径为 $\sqrt{2}a$

由 $S=4\pi r^2$

∴ $S=4\pi(\sqrt{2}a)^2=8\pi a^2$.