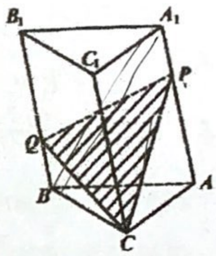
65. 体积计算及其应用(1)

一、基本训练题

1. 若四面体的六条棱中，有五条棱的长为 2，则这四面体体积的取值范围是 $(0,1]$.

2. 长方体的表面积为 32cm^2，体积为 8cm^3，长、宽、高成等比数列，则长方体所有棱长之和为 32cm.

3. 正四棱锥的底面积为 12cm^2，侧面积为 24cm^2，则它的体积为 12cm.

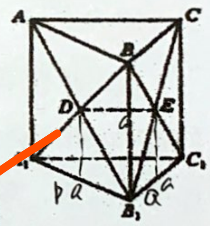


4. 在斜三棱柱侧棱 AA_1 和 BB_1 上各有一个动点 P,Q，满足 $A_1P=BQ$(如图). 过 P,Q,C 三点的截面把三棱柱分成两部分，这上、下两部分体积之比为 (B)

(A) $3:1$　　(B) $2:1$

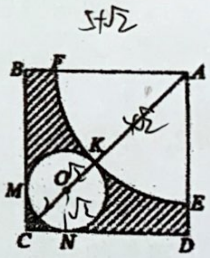
(C) $4:1$　　(D) $\sqrt{3}:1$

二、典型例题



1. 如图，直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱和底面边长都是 a，截面 AB_1C 和截面 A_1BC_1 相交于 DE，求三棱锥 $B\text{-}B_1DE$ 的体积.

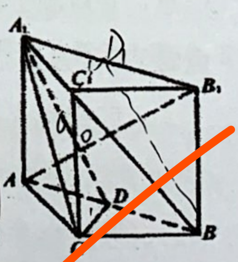
作DP∥BB_1交AB于P
EQ∥BB_1交B_1C于Q
∵$ABC\text{-}A_1B_1C_1$为直三棱柱
∴AA_1B_1B，BCC_1B_1为矩形
∴$DA_1=BD$　$BE=C_1E$
⇒$AP=B_1P$　$BQ=C_1Q$
又DP不在平面BCC_1B内
∴DP∥平面BCC_1B
同理EQ∥平面ABB_1A_1
∴$V_{B\text{-}B_1DE}=V_{P\text{-}B_1C_1Q}=V_{BPB_1Q}$
$=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2$
$=\frac{\sqrt{3}}{48}a^3$



2. 在边长为 $5+\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 内，以 A 为圆心画一个扇形，再画一个圆 O，它与 BC、CD 相切，切点为 M,N，又与扇形的圆弧 $\overset{\frown}{EF}$ 相切于 K 点(如图)，把扇形围成圆锥的侧面，圆 O 为圆锥的底面，求这圆锥的体积.

设$OM=ON=OK=r$
$AC=(5+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}-r-\sqrt{2}r$
由题：$AK\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi\cdot r$
⇒ $5\sqrt{2}+2-(\sqrt{2}+1)r=4r$ ⇒ $r=\sqrt{2}$

$h=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{30}$
$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h$
$=\frac{2\sqrt{30}}{3}\pi$



3. 如图，在斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，D 为 AB 的中点，平面 $A_1B_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1，异面直线 BC_1 与 AB_1 互相垂直.

(1) 求证：$AB_1\perp$平面 A_1CD；

(2) 若 CC_1 与平面 ABB_1A_1 的距离为 1，$A_1C=\sqrt{37}$，$AB_1=5$，求三棱锥 $A_1\text{-}ACD$ 的体积.

平面ABC∥平面ABB_1A_1
平面ABC∥平面$A_1B_1C_1$
∵AC=BC　AD=BD
CD⊥AB
∴平面ABC⊥平面ABB_1A_1
平面ABC∩平面ABB_1A_1=A_1B_1
∴CD⊥平面ABB_1A_1
而AB_1⊂平面ABB_1A_1
∴CD⊥AB_1

作C_1D_1⊥A_1B_1于D_1，联结BD_1
∴A_1D_1≝BD
∴A_1D_1BD为平行四边形
∴BD_1∥A_1D
∴CD∥C_1D_1
∴C_1D_1⊥AB_1
又BC_1⊥AB_1
C_1D_1∩BC_1=C_1
∴AB_1⊥平面BC_1D_1

∵AB_1⊥BD_1
∴AB_1⊥A_1D
而A_1D∩CD=D
∴AB_1⊥平面A_1CD

由题 $CD=C_1D_1=1$
∵CD⊥A_1D
$A_1C=\sqrt{37}$
∴$A_1D=6$　又$AB_1=5$，$AD=5$
∵AB_1∥AD　$AD=\frac{1}{2}A_1B_1$
∴$\frac{AO}{OB_1}=\frac{1}{2}$ ⇒ $AO=\frac{5}{3}$

∴$V_{A_1\text{-}ACD}=V_{C\text{-}A_1AD}=\frac{1}{3}CD\cdot S_{A_1AD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot A_1D\cdot AO$
$=\frac{5}{3}$

三、测试题

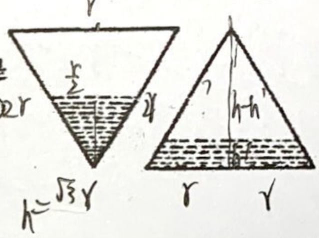
1. 一个圆锥的全面积为 πa^2 个面积单位，其侧面展开图扇形的圆心角为 60°，则这个圆锥的体积为 $\frac{\sqrt{5}}{21}\pi a^3$ 个立方单位

2. 已知函数 $f(x)=|x-2|$ 和 $g(x)=\frac{1}{2}x+2$，将这两个函数的图象围成的平面图形绕 x 轴旋转一周，则所得旋转体的体积为 64π 立方单位.

3. 在三棱锥 S-ABC 的侧棱 SA,SB,SC 上分别取 A',B',C' 三点，使 $SA'=\frac{1}{2}SA$，$SB'=\frac{1}{3}SB$，$SC'=\frac{1}{4}SC$，过 A',B',C' 三点作截面把棱锥分成两部分，这两部分的体积之比是（C）

(A) 1 : 21　(B) 1 : 22　(C) 1 : 23　(D) 1 : 24

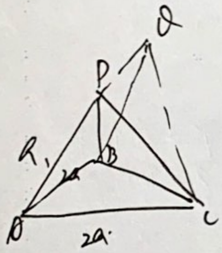
4. 一个容器形如倒置的等边圆锥，如右图所示，当所盛水深是容器高的一半时，将容器倒转，那么水深将是容器高的（C）



(A) $1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$　(B) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$

(C) $1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$　(D) $1-\frac{1}{3}\sqrt[3]{7}$

5. 三棱锥 P-ABC 中，$PA=a$，$AB=AC=2a$，$\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60°$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



延长AP至Q，使得AQ=2a，联结QB、QC

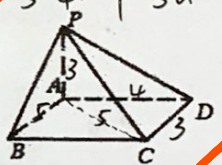
$\because \angle QAB=\angle QAC=\angle BAC=60°$　QA=AB=AC

$\therefore$ Q-ABC为正四面体

$\frac{V_{P-ABC}}{V_{Q-ABC}}=\frac{V_{C-PAB}}{V_{C-QAB}}=\frac{S_{APB}}{S_{AQB}}=\frac{AP}{AQ}=\frac{1}{2}$

$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{2}V_{Q-ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

6. 在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PD\perp DC$，$DC\,/\!/$ 侧面 PAB. (1) 求证：$DA\perp AB$；(2) 设 $PB=PC$，且 $DC=PA=3$cm，$DA=4$cm，求这个四棱锥的体积.



(1) $\because$ PA⊥平面ABCD　又$\because$ CD∥平面PAB

CD⊊平面ABCD　平面ABCD∩平面PAB=AB

$\therefore$ PA⊥CD　CD⊊平面ABCD

又 PD⊥CD　$\therefore$ CD∥AB

PA∩PD=P　$\therefore$ AB⊥AD

$\therefore$ CD⊥平面PAD

AD⊊平面PAD

AD⊥CD

(2) $\because$ 联结AC　DA=4　CD=3

$\therefore$ AC=5

$\because$ PA⊥AC　PA⊥AB　PC=PB

$\therefore$ AB=AC=5

$\because$ AD⊥AB　AD⊥CD

$\therefore S_{ABCD}=\frac{1}{2}AD(AB+CD)=16$

$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot PA\cdot S_{ABCD}$

$=16$ (cm³).

四、说明

本节复习内容主要是柱体的体积计算及锥体的体积计算.

1. 复习中要善于抓住立体的图形、性质和平面几何的图形和性质的联系以及相互转化，体会把空间问题转化为平面问题来研究的思想方法，并以棱柱、棱锥等几何体为载体，运用第一章直线与平面的性质，达到复习直线与平面位置关系的目的.

2. 三棱锥的体积计算特别灵活，常用"换底"法来达到计算或证明的目的，应重视训练.

3. 熟练掌握柱、锥、台体积公式及其内在联系是达到准确计算的关键. 要能灵活地运用比例性质来解有关问题.