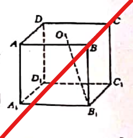
[redacted] 59. 综合应用

一、基本训练题



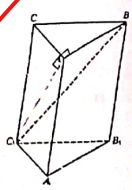
1. 如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，O 是上底面 $ABCD$ 的中心，则异面直线 OB_1 与 BC 所成角的正切值为 $\underline{\sqrt{5}}$.

2. $P\text{-}ABC$ 是三棱锥，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60°$，$PA=a$，则点 A 到平面 PBC 的距离为 $\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}a}$.

3. 如图，斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$BC_1\perp AC$，则 C_1 在底面 ABC 上的射影 H 必在 （ A ）

(A) 直线 AB 上　　(B) 直线 BC 上

(C) 直线 CA 上　　(D) △ABC 的内部



二、典型例题

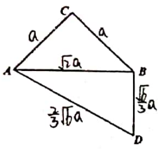
1. 将一副三角板放在同一个平面上组成左图所示的四边形 $ACBD$，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$；$\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=90°$，$\angle D=60°$，设 $AC=a$，现将四边形 $ACBD$ 沿着 AB 翻折成直二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$，连结 CD 得一个四面体(如右图).

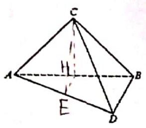
(1) 求证：平面 $ACD\perp$ 平面 BCD；

(2) 求直线 AD 和 BC 所成的角；

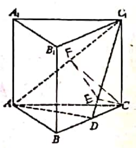
(3) 求直线 AD 和平面 BCD 所成的角；

(4) 求平面 ACD 和平面 ABD 所成二面角(锐角)的大小.





2. $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是各棱长相等的正三棱柱，D 是 BC 上一点，$\angle ADC_1=90°$，求二面角 $D\text{-}AC_1\text{-}C$ 的大小.



解：(1) 在平面ABC中作 $CH\perp AB$ 于H

∵平面ACD⊥平面BCD. CH⊂平面ABC $CH\perp AB$.

∴ CH⊥平面ABD. $CH\perp BD$.

∵ $BD\perp AB$, $BD\perp CH$, $CH\cap AB=H$

∴ BD⊥平面ABC. $BD\perp AC$.

∵ $AC\perp CD$, $BC\perp CD$. ∴ ∠ACB即二面角A-CD-B的平面角

∵ $\angle ACB=90°$ ∴平面ACD⊥平面BCD.

(2) 设AD与BC所成角为θ.

$\cos\theta=\frac{|\vec{AD}\cdot\vec{BC}|}{|\vec{AD}|\cdot|\vec{BC}|}=\frac{|(\vec{AB}+\vec{BD})\cdot\vec{BC}|}{\frac{2}{3}\sqrt{6}a\cdot a}=\frac{|-a^2+0|}{\frac{2}{3}\sqrt{6}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

∴ AD与BC所成角为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(3) ∵ $AC\perp BC$, $AC\perp BD$, $BC\cap BD=B$

∴ AC⊥平面BCD.

∵ AC⊥平面BCD ∴ ∠ADC即AD与平面BCD所成角

$\sin\angle ADC=\frac{AC}{AD}=\frac{a}{\frac{2}{3}\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ ∴ AD与平面BCD所成角为 $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(4) 在平面ABD内作EH⊥AD交AD于E.

∵ H为C在平面ABD中的射影, $HE\perp AD$ ∴ $CE\perp AD$

∵ $CE\perp AD$, $HE\perp AD$ ∴ ∠CEH为平面ACD与平面ABD所成二面角的平面角.

∵ $\triangle AEH\backsim\triangle ABD$. ∴ $\frac{AH}{HE}=\frac{AD}{BD}$ ∴ $HE=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

$\tan\angle CEH=\frac{CH}{HE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{2}$. ∴平面ACD与平面ABD所成二面角为 $\arctan\frac{1}{2}$

2. 解：设边长为a.

在正三角形ABC中, BD=CD ∴ $AD\perp CD$.

∵ $AD\perp CD$, $AD\perp DC_1$, $DC_1\cap CD=D$.

∴ AD⊥平面CDC_1.

作 $CE\perp C_1D$ 于E, $CF\perp AC_1$ 于F, 联结EF.

∵ AD⊥平面CDC_1 ∴ $AD\perp CE$.

∵ $CE\perp AD$, $CE\perp C_1D$, $C_1D\cap AD=D$.

∴ CE⊥平面C_1AD.

∵ C在平面ADC_1中投影为E, $CF\perp AC_1$.

∴ $EF\perp AC_1$

∵ $EF\perp AC_1$, $CF\perp AC_1$ ∴ ∠CFE为二面角$D\text{-}AC_1\text{-}C$平面角.

$CE=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,

$CF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

∴ $\sin\angle CFE=\frac{CE}{CF}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

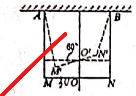
∴ 二面角$D\text{-}AC_1\text{-}C$的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$

三、测试题

1. 设 α、β 表示平面，m 表示既不在 α 内也不在 β 内的直线，存在下列三个事实：(1) $m \perp \alpha$；(2) $m // \beta$；(3) $\alpha \perp \beta$. 若以其中两个作为条件，另一个作为结论所组成的三个命题中，正确命题的个数是__1__.

2. 经过空间一点作直线和两条异面直线都成 60°角，若这两条异面直线也成 60°角，则这样的直线可以作__3__条.

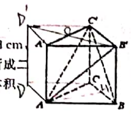
3. 在水平横梁上 A、B 两点处各挂长为 50cm 的细线 AM、BN，AB 的长为 60cm，在 MN 处挂长为 60cm 的木条 MN 平行于横梁，木条中点为 O，若木条绕过 O 的铅垂线旋转角 60°，则木条比原来升高了多少？（A.）



(A) 10cm (B) 5cm

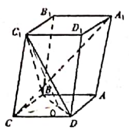
(C) $10\sqrt{3}$ cm (D) $5\sqrt{3}$ cm

4. 一个气球以每分钟 14m 的垂直分速度由地面上升，10 分钟后由观察点 D 测得气球在 D 的正东方向，仰角为 45°；又经过 10 分钟后，测得气球在 D 的北偏东 60°方向，仰角为 60°. 若气球是匀速直线运动，求观察过程中的风向和风速.



5. 在正三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中，底面的边长为 6cm，侧棱长为 $3\sqrt{3}$ cm，过侧面对角线 AB' 且平行于另一侧面对角线 BC' 的平面与底面 ABC 所成二面角大小为 β(β 为锐角). (1) 求 β 的大小；(2) 求三棱锥 $A\text{-}BB'C'$ 的体积.

6. 如图，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$.



(1) 证明：$C_1C \perp BD$；

(2) 假定 $CD=2$，$CC_1=\frac{3}{2}$，记面 C_1BD 为 α，面 CBD 为 β，求二面角 $\alpha\text{-}BD\text{-}\beta$ 的平面角的余弦值；

(3) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

四、说明

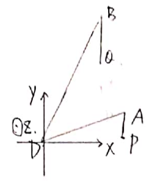
1. 直线与平面这一章是立几的基础部分，通过复习应掌握立体几何中元素的位置判定，平行、垂直的性质和判定；角和距离的计算.

2. 把空间问题转化为同一平面内的问题，这是立几中的重要方法，应很好掌握.

3. 当给出的问题没有图形时，应根据题意选择恰当的角度构图；当有图形给出而需要添加辅助线时，应充分注意添加的辅助线与原图形的元素的位置关系.

4. 证明题应注意推理的严密性；计算题应注意计算方法的正确性，先证某一对象是所要求的元素，作、证、算是一般计算题的解题步骤——要求先证，要证先作.

4.



解：作 A，B 在地面的射影点 P，Q，以 D 为原点如图建系

P 在 X 轴上，A 仰角为 45°，∴ $A(140,0,140)$

Q 在北偏东 60°方向 ∴设 $Q(\sqrt{3}X, X, Z)$

$ZQ=10\times2\times14=280$，

又 Q 点仰角为 60° ∴ $\tan 60°=\frac{280}{2X}=\sqrt{3}$， ∴ $X=\frac{140}{3}\sqrt{3}$

$Q(140, \frac{140}{3}\sqrt{3}, 280)$

∴风向为南风，风速 $V=\frac{140}{\sqrt{3}}\div10=\frac{14}{3}\sqrt{3}$ m/min.

5. 解：(1) 将正三棱柱补为直四棱柱 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，则 ABCD 为菱形，

$AD' // BC'$.

∵ BC' 在平面 $D'AB'$ 外，$AD' \subset$ 平面 $D'AB'$，$BC' // AD'$

∴ $BC' //$ 平面 $AB'D'$，平面 $AB'D'$ 即与 ABC 所成角为 β 的平面

由图可知 ∠OAC 即为 β.

$\tan\beta=\frac{CC'}{A'O}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

∴ β 为 60°

(2) 作 $AH \perp$ 平面 $BCC'B'$ 于 H

∵平面 $ABC \perp$ 平面 $BCC'B'$，$AH \perp BC$

∴ $AH \perp$ 平面 $C'B'B$.

$AH=\sin 60°\cdot AB=3\sqrt{3}$ cm.

∴ $V_{A\text{-}BB'C'}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle C'B'B}\cdot AH$

$=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\sqrt{3})\cdot3\sqrt{3}=27\text{ cm}^3$.

6. 解：(1) 联结 AC 交 BD 于 O，联结 C_1O.

∵ ABCD 为菱形 ∴ $AC \perp BD$.

∵ $\angle C_1CB=\angle C_1CD$，$CC_1=CC_1$，$BC_1=DC_1$

∴ $\triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$.

∴ $C_1B=C_1D$

∵ $BO=DO$ $C_1B=C_1D$，∴ $C_1O \perp BD$

∵ $C_1O \perp BD$，$CA \perp BD$，$C_1O \cap CA=O$

∴ $BD \perp$ 平面 ACC_1

∴ $BD \perp CC_1$.

(2) ∵ $CO \perp BD$，$C_1O \perp BD$. ∴ $\angle C_1OC$ 为二面角 α-BD-β 的平面角.

∵ ∠BCD=60° ∴ BD=BC=CD=2.

$BO=1$ $CO=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$C_1B=\sqrt{C_1C^2+CB^2-2\cos\angle C_1CB\cdot C_1C\cdot BC}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$C_1O=\sqrt{C_1B^2-BO^2}=\sqrt{\frac{13}{4}-1}=\frac{3}{2}$.

$\cos\angle C_1OC=\frac{C_1O^2+CO^2-CC_1^2}{2C_1O\cdot CO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴二面角 α-BD-β 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) ∵ $BD \perp C_1C$，$CC_1 // AA_1$

∴ $BD \perp AA_1$.

∵ $BD \perp AA_1$，$BD \perp AC$，$AC \cap AA_1=A$

∴ $BD \perp$ 平面 ACA_1 ∴ $BD \perp A_1C$

∵ $A_1C \perp$ 平面 C_1BD. ∴只要 $A_1C \perp C_1O$ 即成立.

∵ $AC \perp\!\!\!\!= A_1C_1$ ∴ CA_1 与 C_1O 共面

当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，BCC_1B_1 为菱形.

∵ $C_1B \perp CB_1$，$C_1B \perp A_1B_1$，$A_1B_1 \cap B_1C=B_1$

∴ $C_1B \perp$ 平面 B_1A_1C

∴ $C_1B \perp A_1C$.

∵ $C_1B \perp A_1C$，$BD \perp A_1C$，$C_1B \cap BD=B$

∴ $CA_1 \perp$ 平面 C_1BD，

∴ $\frac{CD}{CC_1}=1$