复数方程

复数的平方根

定义：若$z_1^2 = z_2$，则称z_1为z_2的平方根

求法：待定系数法

求$a+bi$（$a,b\in R$）的平方根

设$(c+di)^2=a+bi$（$c,d\in R$）

得到$c^2-d^2+2cdi=a+bi$

即解方程组 $c^2-d^2=a$

$2cd=b$

注：① 任一非零复数的平方根有两个

②若$c+di$为$a+bi$的平方根，则$-c-di$也为$a+bi$的平方根

* 实数a的平方根

例1 已知复数z满足$|z|=2$,且存在实数a,使$(z-a)^2=a$,求复数z和实数a.

解：若 $a\geq 0$，则z为实数，此时 $z=2$或$z=-2$,

当$z=2$时， $a^2-5a+4=0$，解得 $a=1$或$a=4$;

当$z=-2$时， $a^2+3a+4=0$，方程无解 .

若$a<0$，则$z-a$为纯虚数，此时 $z=a\pm\sqrt{-a}i$,

由$|z|=2$可知$a^2+(-a)=4$，解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$,

而$a<0$，因此 $a=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$, $z=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}i$.

综上所述，当 $a=1$或4时， $z=2$;

当$a=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$时， $z=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}i$.

复数的立方根

定义：若$z_1^3 = z_2$，则称z_1为z_2的立方根

注：任一非零复数的立方根有三个

1的立方根 $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

记 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$，则 $\overline{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

1的立方虚根的性质

$\omega^3 = \overline{\omega}^3 = 1$ $\qquad |\omega| = |\overline{\omega}| = 1$ $\qquad \omega\overline{\omega} = 1$

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ $\qquad \omega^2 = \overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$

*实数a和纯虚数a*i*的立方根

例2 计算：$\left(\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^9$

解：原式$=\left(\dfrac{1+i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i}\right)^9=\dfrac{(1+i)^9}{i^9\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9}=\dfrac{(1+i)^8(1+i)}{i^9}$

$$=\frac{(2i)^4(1+i)}{i}=16i^3(1+i)=16-16i$$

实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a,b,c\in R,a\neq 0)\quad\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

1.根的情况判断——分Δ>0,Δ=0,Δ<0三种情况

2.求根公式和韦达定理是基本工具

$$(1)\Delta\geq 0\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$(2)\Delta<0\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2a}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

3.实系数的一元二次方程必有两个根，若有虚根，则虚根必成对出现（即共轭虚根）

例3　关于x的方程$3x^2-6(m-1)x+m^2+1=0$的两根为α,β，且$|\alpha|+|\beta|=2$，求实数m.

解：$\Delta=36(m-1)^2-12(m^2+1)=24(m^2-3m+1)$

(1)当$\Delta\geq 0$，即$m^2-3m+1\geq 0$时，α,β均为实根.

由$\alpha\beta=\dfrac{m^2+1}{3}>0$可知$\alpha,\beta$同号，因此$|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|=2|m-1|=2$

解得$m=0$($m=2$不满足$m^2-3m+1\geq 0$，舍去).

(2)当$\Delta<0$，即$m^2-3m+1<0$时，α,β为一对共轭虚根.

因此$\beta=\bar{\alpha},|\alpha|=|\beta|=1$, 又由于$|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}=\alpha\beta=\dfrac{m^2+1}{3}=1$

解得$m=\sqrt{2}$($m=-\sqrt{2}$不满足$m^2-3m+1<0$，舍去).

综上所述，$m=0$或$m=\sqrt{2}$.

例4 已知α,β是方程$x^2+x+m=0$的两根，且$|\alpha-\beta|=3$，求实数m.

解：由韦达定理可知，$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=m$.

则$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4m$,

$$|\alpha-\beta|^2=\left|(\alpha-\beta)^2\right|=|1-4m|=9$$

解得：$m=-2$或$m=\dfrac{5}{2}$.

复系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ \ (a,b,c\in C,a\neq 0)\quad \Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

求根公式和韦达定理依旧适用！

例5 解方程：$x^2-(4+5i)x-1+7i=0.$

解：$\Delta=(4+5i)^2-4(-1+7i)=-9+40i+4-28i=-5+12i$

由于$-5+12i$的平方根为$\pm(2+3i)$，因此方程的解为

$$x=\frac{(4+5i)\pm(2+3i)}{2}$$

$$\therefore x_1=3+4i,x_2=1+i$$

有实根的方程问题

设根代入

例6　关于x的一元二次方程 $x^2+zx+4+3i=0$有实根，求复数z的模的最小值．

解：设$x=a(a\in R)$是方程的解，则$a^2+za+4+3i=0$

那么$-z=\dfrac{a^2+4+3i}{a}=a+\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{a}i$

因此,$|z|=\sqrt{\left(a+\dfrac{4}{a}\right)^2+\left(\dfrac{3}{a}\right)^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{25}{a^2}+8}\geq\sqrt{10+8}=3\sqrt{2}$

当且仅当$a^2=5$,即$a=\pm\sqrt{5}$时，等号成立.

综上所述，当方程的实根为$\sqrt{5}$或$-\sqrt{5}$时,$|z|$取到最小值$3\sqrt{2}$.

其它方程

例7 在复数范围内解方程:$x^2+5|x|-6=0.$

解: (1)若$x \in R$,$(|x|-1)(|x|+6)=0$

解得$|x|=1$,即$x=\pm 1.$

(2)若$x \notin R$,$x^2=6-5|x| \in R$

则x必为纯虚数,设$x=bi(b \in R, b \neq 0)$

$-b^2+5|b|-6=0 \ \Rightarrow (|b|-2)(|b|-3)=0$

解得$|b|=2$或3,即$x=\pm 2i$或$\pm 3i.$

综上所述,$x=\pm 1$或$\pm 2i$或$\pm 3i.$

例8 已知$1+i$是实系数方程$x^4+3x^2-2ax+b=0$的根，求其余的根.

解：若$1+i$是实系数方程的一个根，则$1-i$也是方程的根.

$x^4+3x^2-2ax+b$必有因式$[x-(1+i)][x-(1-i)]=x^2-2x+2$.

设$x^4+3x^2-2ax+b=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+px+q\right)$

$$=x^4+(p-2)x^3+(q-2p+2)x^2+2(p-q)x+2q$$

比较各项系数可知：$\begin{cases} p-2=0 \\ q-2p+2=3 \\ 2(p-q)=-2a \\ 2q=b \end{cases}$，解得$\begin{cases} p=2 \\ q=5 \\ a=3 \\ b=10 \end{cases}$

$\therefore x^4+3x^2-6x+10=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+5\right)$

$$=[x-(1+i)][x-(1-i)][x-(-1+2i)][x-(-1-2i)]$$

因此，其余的根为$1-i,-1\pm 2i$.

思考题

已知$|z|=1$，且$z^5+z=1$，求z.

解：由$z^5=1-z$，可知$|z^5|=|1-z|=1$.

设$z=a+bi(a,b\in R)$

解方程组$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ (1-a)^2+b^2=1 \end{cases}$，得$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

经检验，$z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$均为原方程的解.

$\therefore z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$