# 42. 复数的基本概念

## 一、基本训练题

- 1. 若 x 是纯虚数,y 是实数,且 2x-1+i=y-(3-y)i,则  $x=____,y=____$
- 2. 已知 i<sup>3m</sup>=i<sup>n</sup>(m,n∈Z),则 i<sup>m+n</sup>=\_\_\_\_
- 3. 设复数  $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ ,写出两个 z 为纯虚数的必要且不充分条件是
- 4. 如果 z 为复数,那么由复数  $z,\overline{z},\overline{z},|z|,|\overline{z}|,|z|^2,|z^2|$ 所组成的集合中,最多含有的元 素个数是
  - (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 7
- 5. 设 z1, z2 为复数,则下列四个结论中正确的是

)

- (C)  $z_1^2 + z_2^2 = 0$  的充要条件是  $z_1 = z_2 = 0$  (D)  $z_1 z_2 + z_1 z_2$ 定是实数

## 二、典型例题

- 1. 已知  $x = \sqrt{2a+1} + ai(a \in \mathbb{R}$  且  $a \ge -\frac{1}{2}$ ),若 z = x |x| + (1-i)分别为实数、虚数、纯 虚数和在第二象限,求实数 a 的取值.
  - 2. (1)  $2 \times z = \frac{(1+i)^2 + 3(1-i)}{2+i}$ ,  $z^2 + az + b = 1+i$ ,  $x = x \times a$ , b = 0 的值;
    - (2) 已知 a-1+2ai=-4+4i,求复数 a;
    - (3) 若复数 z 满足  $z\overline{z}+2i\overline{z}=3+ai$ , 且 $\frac{\pi}{2}$  <  $\arg z < \pi$ , 求实数 a 的取值范围.
  - 3. 复数 z 和 w 满足: zw+2iz-2iw+1=0.
  - (1) 若 $\overline{w}-z=2i$ ,求z和w;

#### 三、测试题

- 1.  $x, y \in \mathbb{R}, \underline{\Pi} \frac{x}{1-i} \frac{y}{1-2i} = \frac{5}{1-3i}, \underline{M} x = \underline{\qquad}, y = \underline{\qquad}.$
- 2. 复数 z = <sup>a²-3a-4</sup>/<sub>a+7</sub> + (a²-5a-6)i(a∈R), 当 a \_\_\_\_\_\_ 时, z 是实数; 当 a \_\_\_\_\_ 时, z 是实数; 当 a \_\_\_\_\_ 时, z 是 虚数; 当 a \_\_\_\_\_ 时, z = 0.
  - 3. 计算 i+2i²+3i³+···+100i¹00=\_\_\_\_\_
- 4. 下列四个命题: ① 满足  $z=\frac{1}{z}$ 的复数只有 $\pm 1, \pm i$ ;② 若  $a,b \in \mathbb{R}$ ,且 a=b,则 (a-b)+(a+b)i 是纯虚数;③ 复数  $z \in \mathbb{R}$  的充要条件是  $z=\overline{z}$ ;④ 复平面内,x 轴是实轴,y 轴是虚轴. 其中正确的有
  - (A) 0个
- (B) 1 个
- (C) 2个
- (D) 3 个
- 5. 已知|z|=1且 $z^2 \neq -1$ ,则复数 $\frac{z}{z^2+1}$

( )

(A) 必为实数

- (B) 必为纯虚数
- (C) 是虚数,但不一定是纯虚数
- (D) 可能是实数,也可能是虚数
- 6. 设 z 是纯虚数,且 zz+iz-iz=0,求 z.
- 7. 已知|z|=1,且 $z^2+2z+\frac{1}{z}<0$ ,求复数 z.
- 8. 设z 为虚数, $u=\frac{z-1}{z+1}$ ,求证u 为纯虚数的充要条件是|z|=1.

#### 四、说明

- 1. 若复数  $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ ,则实数 a,b 分别叫复数 z 的实部和虚部,由此可见任一复数的实部、虚部都是实数,不要错误地认为  $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$  的虚部是 bi. 当 b=0 时,z 为实数;当  $b\neq0$  时,z 是虚数;当  $b\neq0$  且 a=0 时,z 是纯虚数. 不要把复数集当作是虚数集;实数集 R 是复数集 C 的真子集;纯虚数集是虚数集的真子集;而虚数集也是复数集的真子集; $\mathbb{R}\cap\{$ 虚数 $\}=\emptyset$ , $\mathbb{R}\cup\{$  虚数 $\}=\emptyset$ , $\mathbb{R}\cup\{$  虚数 $\}=\emptyset$ , $\mathbb{R}\cup\{$  虚数 $\}=\emptyset$ .
- 2. 复数 z=a+bi 和  $\overline{z}=a-bi$  ( $a,b\in\mathbb{R}$ ) 互为共轭复数.  $z\in\mathbb{R}$   $\Leftrightarrow z=\overline{z}$ ; 当  $z\neq 0$  时,z 为纯虚数  $\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$ ;对于任意复数 z 均有: $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ ;  $|z|^2=|\overline{z}|^2=z\overline{z}$ . 利用这些结论,往往可以使问题得到简洁明快的解决.