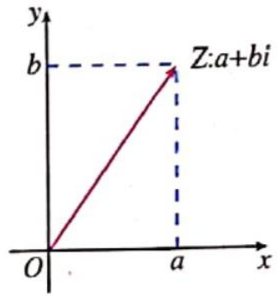
复数第三讲 复数的几何意义

一、基础知识

1. 复平面

建立了直角坐标系用来表示复数的平面叫做复平面，如图，x轴叫做实轴，y轴叫做虚轴. 表示实数的点都在实轴上，表示纯虚数的点都在虚轴上，原点表示实数 0.



复数集$\mathbf{C}$中的数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$与复平面内的点按如下方式建立了一一对应关系

$$\boxed{复数z=a+b\mathrm{i}\xleftrightarrow{一一对应}复平面内的点Z(a,b)}$$

这是复数的一种几何意义.

2. 复数的向量表示

复平面内的点Z与向量$\overrightarrow{OZ}$一一对应，从而复数集$\mathbf{C}$中的数与复平面内以原点为起点的向量建立了如下一一对应关系

$$\boxed{复数z=a+b\mathrm{i}\xleftrightarrow{一一对应}平面向量\overrightarrow{OZ}}$$

这是复数的另一种几何意义.

为方便起见，我们常把复数$z=a+b\mathrm{i}$看做点$Z(a,b)$或看做向量$\overrightarrow{OZ}$. 我们还规定，相等的向量表示同一个复数.

3. 复数的模

复数$z=a+b\mathrm{i}$所对应的点$Z(a,b)$到坐标原点的距离叫做复数z的模(或绝对值)，记作$|z|$，即

$$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

二、典型例题

例 1. 对于$z\in\mathbf{C}$，

(1)已知$\left|z-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=1$，求$|z|$的最值.

(2)已知$|z|=1$，$m\in\mathbf{R}$，求$|z^2+mz+1|$的最大值.

(3)已知$|z-1-\mathrm{i}|=1$，求$w=\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$对应的点的轨迹.

(4)已知$4\le z+\frac{16}{z}\le 10$，求$z$对应的点的轨迹.

答案：(1)因为$\left|z-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=1$，所以$z$在复平面上对应的点$Z$在以点$A(\sqrt{3},-1)$为圆心，$r=1$为半径的圆上，故$\left|\overrightarrow{OA}\right|-r\le |z|=\left|\overrightarrow{OZ}\right|\le\left|\overrightarrow{OA}\right|+r$，$|z|\in[1,3]$.

(2)$|z^2+mz+1|=|z^2+mz+z\bar{z}|=|z+\bar{z}+m|=|2\mathrm{Re}\ \ z+m|\le 2|\mathrm{Re}\ \ z|+|m|\le 2+|m|$.

(3)由$w=\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$解得$z=\frac{\mathrm{i}w-\mathrm{i}}{w+1}$，从而$1=|z-1-\mathrm{i}|=\left|\frac{\mathrm{i}w-\mathrm{i}}{w+1}-1-\mathrm{i}\right|=\left|\frac{-w-1-2\mathrm{i}}{w+1}\right|=\left|\frac{w+1+2\mathrm{i}}{w+1}\right|$. 设$w=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则$|w+1+2i|=|w+1|$即$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，化简得$y=-1$，故$w$对应的点的轨迹为直线$y=-1$.

(4)当$z\in\mathbf{R}$时，由$4\le z+\frac{16}{z}\le 10$解得$2\le z\le 8$，即$z$对应的点在线段$y=0(2\le x\le 8)$上.

当$z\notin\mathbf{R}$时，由$4\le z+\frac{16}{z}\le 10$知$z+\frac{16}{z}\in\mathbf{R}$，则$z+\frac{16}{z}=\overline{z+\frac{16}{z}}=\bar{z}+\frac{16}{\bar{z}}$，即$z-\bar{z}=\frac{16}{\bar{z}}-\frac{16}{z}=\frac{16(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$, 其中$z-\bar{z}\ne 0$, 故$z\bar{z}=16$, 即$|z|=4$.又因为$z+\frac{16}{z}=\mathrm{z}+\bar{z}=2\mathrm{Re}\ \ z\in[4,10]$, 故$\mathrm{Re}\ \ \mathrm{z}\in[2,5]$，即$z$对应的点在圆弧$x^2+y^2=16(x\ge 2)$上.

综上，z对应的点的轨迹为圆弧$x^2+y^2=16(x\ge 2)$和线段$y=0(2\le x\le 8)$

例 2. 已知复数集合$A=\{x+y\mathrm{i}||x|\le 1,|y|\le 1,x,y\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{z_2|z_2=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}\right)z_1,z_1\in A\right\}$, 其中i为虚数单位，若复数$z\in A\cap B$，求$z$对应的点$Z$在复平面内所形成图形的面积.

答案：设$z_1=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R}),z_2=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则由$z_2=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i\right)z_1$得$\begin{cases}a=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}y,\\ b=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y\end{cases}$,反解得$\begin{cases}x=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b,\\ y=\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}a\end{cases}$.因为$\begin{cases}|x|\le 1,\\ |y|\le 1\end{cases}$，所以$\begin{cases}|a+b|\le\frac{3}{2},\\ |a-b|\le\frac{3}{2}\end{cases}$.故$z\in A\cap B$对应的点$Z$所在的平面区域为

$C=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}|x|\le 1,\\ |y|\le 1,\\ |x+y|\le\frac{3}{2},\\ |x-y|\le\frac{3}{2}.\end{cases}\right\}$，作图得图形的面积为$\frac{7}{2}$.

例 3. 已知非零复数z_1,z_2满足$z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$，设z_1,z_2分别对应于复平面上的点A,B，O为坐标原点，试判断$\triangle AOB$的形状.

答案：由$z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$配方得$(z_1-z_2)^2=-3z_2^2$，故$z_1=z_2\pm i\sqrt{3}z_2$.

从而$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|z_1|}{|z_2|}=2$，且$\frac{|BA|}{|OB|}=\frac{|z_1-z_2|}{|z_2|}=\sqrt{3}$，故$|OA|:|BA|:|OB|=2:\sqrt{3}:1$，从而$\triangle AOB$是$\angle B$为直角，$\angle A=30°$，$\angle O=60°$的直角三角形.

例 4. 满足下列条件的复数z对应的点Z的轨迹分别是什么？

(1)$|z+2|=|z-4\mathrm{i}|$；

(2)$|3z+1|=|z-\mathrm{i}|$；

(3)$|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|=4$；

(4)$|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|=2$.

答案：(1)设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则$(x+2)^2+y^2=x^2+(y-4)^2$，化简得$x+2y-3=0$. Z到-2与到$4\mathrm{i}$的距离相同，为线段的中垂线.

(2)设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则$(3x+1)^2+(3y)^2=x^2+(y-1)^2$，化简得$\left(x+\frac{3}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{5}{32}$.

原式两边平方得$(3z+1)(3\bar{z}+1)=(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})$，即$z\bar{z}+\frac{3-\mathrm{i}}{8}z+\frac{3+\mathrm{i}}{8}\bar{z}=0$，$\left(z+\frac{3+\mathrm{i}}{8}\right)\left(\bar{z}+\frac{3-\mathrm{i}}{8}\right)=\frac{5}{32}$，即$\left|z+\frac{3+\mathrm{i}}{8}\right|=\frac{\sqrt{10}}{8}$为圆心为$-\frac{3+\mathrm{i}}{8}$，半径为$\frac{\sqrt{10}}{8}$的圆.

(3)原式表示z到i与$-\mathrm{i}$的距离之和为 4，大于 2，故z的轨迹是以i和$-\mathrm{i}$为焦点，长轴长为 4 的椭圆$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

(4)z的轨迹为线段$x=0(-1\le y\le 1)$.

例 5. 设复数z与复平面上的点P对应，若z满足$|z+3|+(-1)^n|z-3|=3a+(-1)^n a$(其中$n\in\mathbf{N}^*$，常数$a\in\left(\frac{3}{2},3\right)$). 当$n$为奇数时，点$P$的轨迹为$C_1$，当$n$为偶数时，点$P$的轨迹为$C_2$，且两条曲线的一个公共点为$D(2,\sqrt{2})$. 求轨迹$C_1$与$C_2$的方程.

答案：当n为奇数时，$|z+3|-|z-3|=2a<6$，即z到-3与3的距离之差为定值，故C_1为以-3和3为焦点的双曲线的右支，C_1的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9-a^2}=1(x>0)$.

当n为偶数时，$|z+3|+|z-3|=4a>6$，即z到-3到3的距离之和为定值，故C_2为以-3和3为焦点的椭圆，C_2的方程为$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2-9}=1$.

因为D在C_1上，所以$2a=\left|2+\sqrt{2}\mathrm{i}+3\right|-\left|2+\sqrt{2}\mathrm{i}-3\right|=2\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$.

C_1的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$，$C_2$的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.

三、课程小结

1. 求复平面内点的轨迹一般有两条途径：(1)设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，求出$x,y$满足的方程；(2)从$z$满足的方程中读取点$Z$的几何性质.

2. 常用复平面内的曲线方程

(1)$|z-z_1|=|z-z_2|(z_1\neq z_2)$直线；

(2)$|z-z_0|=r>0$圆；

(3)$|z-z_1|+|z-z_2|=2a(z_1\neq z_2)$，当$2a>|z_1-z_2|$时表示椭圆；当$2a=|z_1-z_2|$时表示线段；当$2a<|z_1-z_2|$时无轨迹；

(4)$\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a(z_1\neq z_2)$，当$0<2a<|z_1-z_2|$时表示双曲线；当$2a=|z_1-z_2|$时表示两条射线；当$2a>|z_1-z_2|$时无轨迹.