46. 复数集上的方程

一、基本训练题

1. $z\in\mathbf{C}$，方程 $2z-\mathrm{i}\bar{z}=1$ 的解是________.

2. $x\in\mathbf{C}$，方程 $x^2-\mathrm{i}x+\mathrm{i}-1=0$ 的解是________.

3. 已知 $z\in\mathbf{C}$，且 $z+\frac{1}{z}=2\sin10°$，则 $z^9+\frac{1}{z^9}=$________.

4. 适合方程 $2z-|z|-\mathrm{i}=0$ 的复数 z 是 (　　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　(D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

5. 若 $3+2\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0$ ($p,q\in\mathbf{R}$)的一个根，则 q 的值为 (　　)

(A) 26　(B) 13　(C) 6　(D) 5

二、典型例题

1. 在复数集 C 中解下列方程：

(1) $z\cdot\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}$；　(2) $\bar{z}-\lambda z=w$(常数 $\lambda,w\in\mathbf{C}$，且 $|\lambda|\neq1$)；

(3) $|z|=1,z^5+z=1$.

2. (1) 设关于 x 的方程 $3x^2-(6m-1)x+m^2+1=0$ 的两根为 α,β，且 $|\alpha|+|\beta|=2$，求实数 m 的值；

(2) 关于 x 的方程 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ 至少有一个模等于 1 的根，求实数 a 的值.

3. 已知方程 $x^2+(4+\mathrm{i})x+4+a\mathrm{i}=0(a\in\mathbf{R})$ 有实根 b，且 $z=a+b\mathrm{i}$，求复数 $\bar{z}(1-c\mathrm{i})(c>0)$ 的辐角主值的取值范围.

三、测试题

1. 已知 $x^2+ix+6=2i+5x$，若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x=$________；若 $x\in\mathbf{C}$，则 $x=$________.

2. 若关于 x 的方程 $x^2+zx+4+3i=0$ 有实数根，则 $|z|$ 的最小值为________.

3. 方程 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3=1$ 的解为__________.

4. 设 $z\in\mathbf{C}$，则方程 $z^2+|z|=0$ 的根有 ( )

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

5. 关于 x 的方程 $x^2-(2i-1)x+3m-i=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 有实根，则 m 的取值范围是 ( )

(A) $m\geqslant-\frac{1}{4}$ (B) $m=-\frac{1}{4}$ (C) $m\geqslant\frac{1}{12}$ (D) $m=\frac{1}{12}$

6. 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，$z_1+z_2=\sqrt{2}$，$z_1z_2=1$，求 $z_1^{21}-z_2^{21}$ 的值.

7. 设关于 x 的方程 $x^2+4x+m=0(m\in\mathbf{R})$ 的两个复数根为 α,β，且 $|\alpha-\beta|=2$，求 m 的值.

8. 已知 $z\in\mathbf{C}$，$a\in\mathbf{R}$，若关于 z 的方程 $z+a\cdot|z+1|+i=0$ 有解，试确定 a 的取值范围.

四、说明

1. 本节课主要内容有以下三个方面：(1) 复数集上方程的求解；(2) 根据方程解的情况讨论参数的取值范围；(3) 与复数集上方程有关的计算或证明.

2. 求解复数集上的方程一般有以下四种方法：(1) 设 $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbf{R})$，从而转化为关于实数 x,y 的方程；(2) 若是实系数一元二次方程，则可直接利用求根公式；(3) 考虑复数的几何意义，结合图形去分析；(4) 以模为突破口，先着眼于 $|z|$，再求 z.

3. 对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$：

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两相异实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两相等实根 $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有两互为共轭的虚根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2a}$.