43. 复数的代数形式

一、基本训练题

1. 若 n 为奇数，则 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}=$ -2 .

2. 设 $f(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$，则 $f(1-i)=$ $\frac{3-2i}{13}$.

3. $8+6i$ 的平方根是 $\pm(3+i)$.

4. 设 $f(z)=1-\bar{z}, z_1=2+3i, z_2=5-i$，则 $f(\overline{z_1-z_2})$ 等于 （C）

(A) $-4-4i$　(B) $4+4i$　(C) $4-4i$　(D) $-4+4i$

5. $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 的值为 （B）

(A) $1+\sqrt{3}i$　(B) $-1+\sqrt{3}i$　(C) $1-\sqrt{3}i$　(D) $-1-\sqrt{3}i$

二、典型例题

1. 已知复数 z 满足：$|z-4|=|z-4i|$ 且 $z+\frac{14-z}{z-1}\in\mathbf{R}$，求 z.

解：设 $z=a+bi$ $(a,b\in R)$.

$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-4)^2$

$-8a=-8b \Rightarrow a=b.$

$z=a(1+i)$

$z+\frac{14-z}{z-1}=a+ai+\frac{(14-a)-ai}{(a-1)+ai}$

$=a+ai+\frac{[(14-a)-ai][(a-1)-ai]}{(a-1)^2+a^2}$

$\therefore a+\frac{a^2-14a-a^2+a}{(a-1)^2+a^2}=0$

$a=0$ 或 $1=\frac{13}{(a-1)^2+a^2}$

$13=2a^2-2a+1$

$2a^2-2a-12=0$

$a=3$ 或 -2

综上 $z=0$ 或 $3+3i$ 或 $-2-2i$

2. 已知 $z^2=8+6i$，求 $z^3-16z-\frac{100}{z}$ 的值.

解：$z^2=8+6i=(3+i)^2$

$\therefore z=\pm(3+i)$

1° $z=3+i$，原式 $=(8+6i)(3+i)-16(3+i)-10(3-i)$

$=-60+20i$

2° $z=-(3+i)$ 原式$_2=-(8+6i)(3+i)+16(3+i)+10(3+i)=60-20i$

综上

3. (1) 已知 $z=-\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$，求 $1+z+z^2+\cdots+z^{2000}$ 的值；

(2) 求 $(1-\sqrt{3}i)^{10}$ 的展开式中的所有实数项的和；

(3) 设 $z_1=\sqrt{3}+i, z_2=1+i$，试求满足 $z_1^m=z_2^n$ 的最小正整数 m, n.

解：(1). $z=-\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z^2+z+1=0.$

$\therefore$ 原式 $=0$

(2) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{10}}{2^{10}}=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(-1)^3=\frac{\sqrt{3}i-1}{2}$

$\therefore (1-\sqrt{3}i)^{10}=512\sqrt{3}i-512$

实数项和为 -512

(3) $|z_1|=|z_2|^2$

$z_1^m=z_2^n$

$\Rightarrow |z_1|^m=|z_2|^n$

$\Rightarrow n=2m$

$(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^{2m}=(2i)^m$

$i^m=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^m$

$\frac{m\pi}{2}-\frac{m\pi}{6}=2k\pi\ (k\in Z)$

$\therefore m\pi=6k\pi\ (k\in Z)$

$\therefore m_{min}=6$

$n_{min}=12$

三、测试题

1. 已知 $z=(1-i)^3$，则 $z+\bar{z}=$ -4；$z\bar{z}=$ 8.

2. 计算：$\frac{1}{(3-2i)^2}-\frac{1}{(3+2i)^2}=$ $\frac{24}{169}i$.

3. 计算：$i^{2001}+(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^8-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{50}+(3-4i)^2(3i+4)^2=$ $783-334i$.

4. $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^6}-\frac{-2+i}{1+2i}$ 等于　　（A）

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) i

5. 若 $(m+i)^3\in R$，则实数 m 的值为　　（B）

(A) $\pm2\sqrt{3}$　　(B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\pm\sqrt{3}$　　(D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 复数 z 满足 $|z|=5$，且 $(3+4i)z$ 是纯虚数，求 $\bar{z}$

解：设 $z=a+bi$ $(a,b\in R)$

$a^2+b^2=25$

$(3+4i)z=(3a-4b)+(4a+3b)i$

$3a=4b$ $\Rightarrow \begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$

$\therefore \bar{z}=4-3i$ 或 $-4+3i$

7. 已知 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)i$，$z_2=-3\sqrt{3}b+(b+2)i$ $(a,b\in R^+)$，且 $3z_1^2+z_2^2=0$，求 z_1 和 z_2.

解：$z_2^2=-3z_1^2$

$\therefore z_2=\pm\sqrt{3}i\,z_1$

$\therefore \begin{cases}-3\sqrt{3}b=-\sqrt{3}(a+1)\\b+2=\frac{3}{2}a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-3\sqrt{3}b=\sqrt{3}(a+1)\\b+2=-\frac{3}{2}a\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{10}{7}\\b=\frac{1}{7}\end{cases}$

又 $a>0$　$b>0$.

$\therefore a=2$　$b=1$

$\therefore z_1=\sqrt{3}+3i$

$z_2=-3\sqrt{3}+3i$

8. (1) 已知 $z=1+i$，$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$，求实数 a，b 的值；

(2) 已知非零复数 a，b 满足 $a^2+ab+b^2=0$，求 $\left(\frac{a}{a+b}\right)^{2000}+\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2000}$ 的值.

解：(1). $z^2=2i$

$2i+a(1+i)+b=(1-i)(2i-z+1)=1+i$

$(2+a)i+a+b=1+i$

$a=-1$　$b=2$

(2). $(a+b)^2=ab$

原式 $=\frac{a^{2000}}{(ab)^{1000}}+\frac{b^{2000}}{(ab)^{1000}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1000}+\left(\frac{b}{a}\right)^{1000}$

$\because a\neq b$ (否则 $a=b=0$) $\therefore a^3-b^3=0$ $\therefore a^3=b^3$ $\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^3=1$

$\therefore$ 原式 $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

$=\frac{a^2+b^2}{ab}$

$=\frac{-ab}{ab}=-1$

四、说明

1. 本节课的主要内容有以下三个方面：(1) 复数的加、减、乘、除及乘方和开方运算；(2) i 和 ω 的性质，并会利用这些性质求解某些计算题；(3) 复数域上的因式分解.

2. 求解计算题，应养成这样一个良好的习惯：先认真审题，考虑如何利用 i，ω 的性质；或适当变形，创造条件，从而转化为关于 i，ω 的计算问题．充分利用 i，ω 的性质，体现了对复数整体性的把握和应用，往往会给解题带来方便.

3. 熟记下列性质是很有用的：

(1) $i^2=-1$，$i^4=1$；(2) $(1\pm i)^2=\pm2i$；(3) $\frac{1+i}{1-i}=i$；(4) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$；(5) $\omega^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1$；(6) $\omega^2=\bar{\omega}$；(7) $\bar{\omega}=\frac{1}{\omega}$；(8) $\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0$ $(n\in N)$.