

第一周周末作业 2020-02-21

一. 选择题

1. 已知 z 为复数, 下列四个命题: ①若 $z = \bar{z}$, 则 $z \in \mathbb{R}$; ② $z + \bar{z} = 0$, 则 z 为纯虚数; ③若 $z^2 \geq 0$, 则 $z \in \mathbb{R}$; ④若 $z^2 < 0$ 则 z 为纯虚数----- ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知 $z \in \mathbb{C}$, 且 $|z|=1$, 则下列各式中成立的是----- ()

A. $z^2=1$ B. $z^{-2}=1$ C. $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ D. $z + \frac{1}{z}$ 是虚数

3. 与自身的平方共轭的复数 z 的集合是----- ()

A. $\{1, 0\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ C. $\left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ D. $\left\{1, 0, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

4. 设 $z \in \mathbb{C}$, $M = \{z | (z-1)^2 = |z-1|^2\}$, 则有----- ()

A. $M = \{\text{纯虚数}\}$ B. $M = \{\text{实数}\}$ C. $\{\text{实数}\} \subset M \subset \{\text{复数}\}$ D. $M = \{\text{虚数}\}$

5. 当 $m \in \mathbb{R}$ 时, $(1-i)x^2 + mx - (1+i) = 0$ 的根是----- ()

A. 两不等虚根 B. 两不等实根 C. 一实一虚根 D. 一对共轭虚根

6. 当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 方程 $(1-i)x^2 + tx - (1+i) = 0$ 的根是----- ()

A. 两不等实根 B. 一对共轭虚根 C. 两不等虚根 D. 实、虚根各一个

7. 设 i 是虚数单位, 复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数, 则实数 a 为----- ()

(A) 2 (B) -2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

8. 对于复数 a, b, c, d , 若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质“对任意 $x, y \in S$, 必有 $xy \in S$ ”, 则当 $\begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = b \end{cases}$

时, $b+c+d$ 等于----- ()

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) i

二. 填空题

1. 若 i 是 $x^2 + 2x + k = 0$ 的一个根, 则 k 与另一根的和为_____

2. $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 3$, 则 $|z+1| =$ _____

3. 使 $\frac{(1+i)^{2n}}{1-i} + \frac{(1-i)^{2n}}{1+i} = 2^n$ 成立的最小正整数 $n =$ _____

4. 已知复平面内两点 P_1 、 P_2 对应复数 1 、 i ，则线段 P_1P_2 的垂直平分线方程的复数形式是

5. $(1-i)(2+i) - \frac{3+2i}{2+i} =$ _____

6. 已知 z_1 、 z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$ ，则 $|z_1-z_2|=$ _____

7. $z=x+yi$ ， x 、 $y \in \mathbf{R}$ ， $|z-1+2i|+|z-1-2i|=6$ ，则 $x+y$ 的取值范围是_____

8. $2|z-3-3i|=|z|$ ，则 $|z|$ 的取值范围是_____

9. 复数范围内因式分解： $-\frac{1}{2}x^2+x-3=$ _____.

10. 为求解方程 $x^5-1=0$ 的虚根,可以把原方程变形为

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$,再变形为 $(x-1)(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)=0$,由此可得原方程的一个虚根为
_____.

三. 解答题

1. 已知 z 、 w 为复数， $(1+3i)z$ 为纯虚数， $w = \frac{z}{2+i}$ ， $|w|=5\sqrt{2}$ ，求 z .

2. 设关于 x 的方程 $3x^2-6(m-1)x+m^2+1=0$ 的两根模的和为 2 ，求实数 m 的值。

3. 已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+i)=1-i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2 .

4. 已知 z 是复数, $z+2i, \frac{z}{2-i}$ 均为实数, (i 为虚数单位), 且复数 $(z+ai)^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

5. 已知实系数方程 $x^3-3x^2+mx-2=0$ 有一个实根 x_0 , 其余 2 根为虚根, 且三根在复平面上对应点恰为一个正 Δ 三个顶点, 求 x_0 、 m .

6. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1=b_1, a_2=b_2 \neq a_1$,记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1)若 $b_k=a_m$ (m, k 是大于2的正整数),求证: $S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若 $b_3=a_i$ (i 是某一正整数),求证: q 是整数,且数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项;

(3)是否存在这样的正数 q ,使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列?若存在,写出一个 q 的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.