李X徒

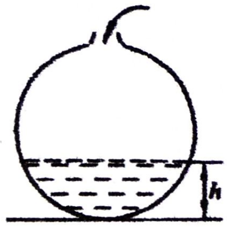
63. 球

一、基本训练题

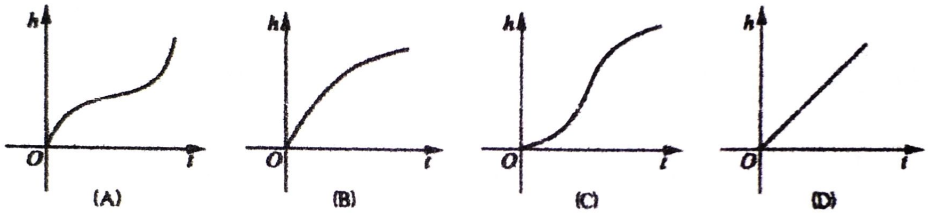
1. 球的半径为 R,则它的外切正方体的棱长为 $2R$,内接正方体的棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

2. 已知球的两个平行截面的面积分别为 5π 和 8π,它们位于球心的同一侧,且相距为 1,则这球的半径为 3 .

3. 湖面上浮着一个球,湖水结冰后将球取出,冰上留下一个面直径为 24cm,深为 8cm 的空穴,则这球的半径为 13cm .

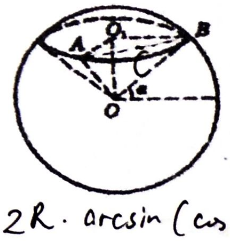


4. 从如图放置的球体容器顶部的一个孔向球内以相同的速度注水,容器中水面的高度 h 与注水时间 t 之间的关系用图象表示应为 (A)



二、典型例题

1. 把地球看作半径为 R 的球,A,B 是北纬 α 度圈上的两点,它们的经度差为 β 度,求 A,B 两点间的球面距离.



设 $\odot O_1$ 为图示圆. 半径为 $R\cos\alpha$

$\because \angle AO_1B=\beta$. 取 AB 连线中点 C

在 $\odot O_1$ 内由垂径定理 $O_1C\perp AB$.

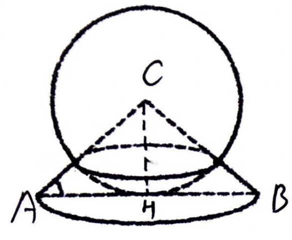
又 $\because CO\perp CB$

$Rt\triangle BOC$ 中 $\sin\angle BOC=\sin\frac{1}{2}\angle AOB$

$=\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$

$\therefore$ A, B 两点间球面距离为 $2R\cdot\arcsin(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2})$

2. 如图所示,圆锥和一个球面相交,球心是圆锥的顶点,半径等于圆锥的高,若圆锥的侧面积被球与圆锥侧面的交线所平分,求圆锥母线与底面所成角的大小.

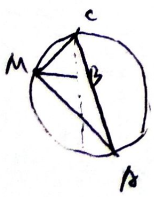


设球半径为 r. 圆锥母线 R. 圆锥侧面展开成扇形有圆心角 θ.

则 $\frac{1}{2}R^2\cdot\theta = 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot r^2\theta)$ $\therefore R=\sqrt{2}r$.

$\therefore$ 母线与底面所成角 $\alpha=\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2})=45^\circ$

3. 过半径为 R 的球面上一点作三条两两垂直的弦 MA,MB,MC,(1) 求证:$MA^2+MB^2+MC^2$ 为定值;(2) 求三棱锥 M-ABC 的体积的最大值.



(1) 联结 AC 则 $\because MC\perp MA$ $\therefore |MA|^2+|MC|^2=|CA|^2$

$\because MB\perp MA$ $MB\perp MC$ $\therefore MB\perp$ 面 AMC

$\therefore MB\perp AC$ $\therefore |CA|^2+|MB|^2=(2R)^2=4R^2$.

为一定值

(2) 设 $|MA|=a$ $|MB|=b$ $|MC|=c$.

$a^2+b^2+c^2=4R^2$

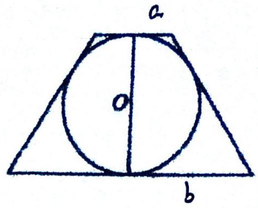
$V=\frac{1}{6}abc$

$\therefore V^2=\frac{1}{36}(x^2y^2z^2)$

$=\frac{1}{36}\cdot(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^3 = \frac{1}{36}$

$=\frac{2^4}{3^5}R^6$ $\therefore V_{max}=\frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$

三、测试题



1. 在北纬 60°圈上有甲、乙两地，它们在纬度圈上的弧长等于 $\frac{\pi R}{2}$（R 为地球半径），则甲、乙两地的球面距离为 $\frac{\pi R}{3}$.

2. 如果一个球内切于上、下底面边长为 a,b 的正四棱台，那么这个球的面积为 πab.

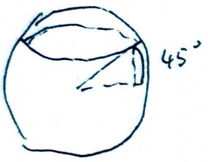
3. 已知圆台的轴截面是底角为 α 的等腰梯形，并有一个内切球，则圆台的侧面积和球面积之比为 （A）

(A) $\csc^2\alpha$　　(B) $\sec^2\alpha$　　(C) $\csc\alpha$　　(D) $\sec\alpha$

4. 有三个球和一个正方体，第一个球与正方体各个面内切，第二个球与正方体各条棱相切，第三个球过正方体各顶点，则三个球面积之比是 （A）

(A) $1:2:3$　　(B) $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　(C) $1:2\sqrt{2}:2\sqrt{3}$　　(D) $1:4:9$

5. 把地球当作半径为 R 的球，地球上的两地 A,B 都在北纬 45°，它们的球面距离为 $\frac{\pi}{3}R$，若 A 在东经 20°处，求 B 的位置.



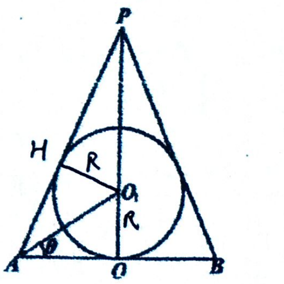
北纬 45° 对应的圆 O_1 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$. ∵ 球面距离为 $\frac{\pi}{3}R$. ∴ $\triangle AO_1B$ 中 $AO_1=BO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}R$

∴ $\angle AO_1B=90°$　∴ B 的位置为 北纬 20°. 西经 70° 或北纬 20°. 东经 110°

6. 已知球 O_1 的半径为 R，内切于顶点为 P 的圆锥，(轴截面如图)，设 $\angle O_1AO=\theta$，

(1) 试用 R,θ 表示圆锥底面半径 r，母线 l 和全面积 S；

(2) 当 θ 为何值时，圆锥全面积取最小值？最小值是多少？



(1) ∵ $PO\perp AB$

∴ 圆锥底面半径

$|AO|=R/\tan\theta$ ∴ $r=\frac{R}{\tan\theta}$

∵ $\angle HAO_1=\angle O_1AO=\theta$

∴ $l=\frac{r}{\cos 2\theta}=\frac{R}{\tan\theta\cos 2\theta}$

全面积 $S=\frac{1}{2}l\cdot(2\pi r)+\pi r^2$.

(2) $S=\pi r^2+\frac{\pi}{\cos 2\theta}r^2$

$=\pi r^2\cdot\left(1+\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$

$=\pi\cdot\frac{R^2(1+\cos 2\theta)}{\tan^2\theta}$

即求 $y=\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta\tan^2\theta}$ 最小值 在 $\theta=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $S=8\pi R^2$

四、说明

本节复习球的性质和它的表面积计算，涉及少量体积计算. 在解题应用中需注意： 即为 S 最小值

1. 球、圆类比；球与圆柱、圆锥、圆台类比——在旋转体中找出共性.

2. 在计算中常用到联系球的直径、截面圆半径等直角三角形，注意在直角三角形中射影定理的灵活应用.

3. 注意球面上两点 A,B 间的直线距离与球面距离的区别. 求 A,B 两点间的球面距离 l_{AB}，实际上就是先求 A,B 两点对球心 O 的张角 θ（弧度），然后由弧长公式 $l=R\theta$ 求得 l_{AB}.

4. 在解一类与球有关的旋转体综合计算问题时，应注意通过“轴截面”转化为平面问题. 对于球与多面体的综合计算题，应重视球的截面（含球的切面）的性质.