第四周周末作业　2020-03-13

一．选择题

1．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为(D)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2．把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A、B、C、D 四点为顶点的三棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为(C)

A．90°　　B．60°　　C．45°　　D．30°

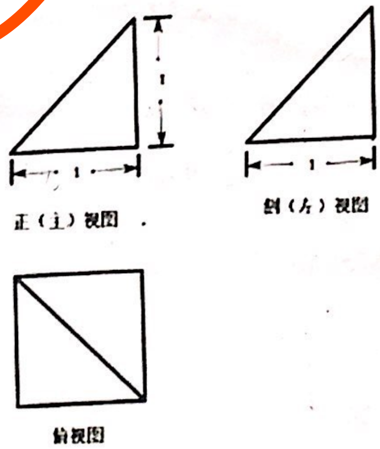
3. 不共线的三点 A、B、C 到平面α的距离相等，是平面 ABC//α的(B)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

4. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥最长棱的棱长为(C)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2



5.设 M,N 是球 O 的半径 OP 上的两点,且 NP=MN=OM,分别过 N,M,O 作垂直于 OP 的平面,截球面得三个圆,则这三个圆的面积之比为(D)

(A)3:5:6　　(B)3:6:8　　(C)5:7:9　　(D)5:8:9

6．直线 AB 与平面α成 60° 角，直线 CD 在平面α内，AB 和 CD 不相交，那么直线 AB 和 CD 所成角中最大角是(B)

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 不确定

7．正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动，并且总是保持 $AP\perp BD_1$，则动点 P 的轨迹是(A)

A. 线段 B_1C　　B. 线段 BC_1

C. BB_1 中点与 CC_1 中点连成的线段　　　　D. BC 中点与 B_1C_1 中点连成的线段

8．在三棱锥 P—ABC 中，PC⊥底面 ABC，∠ACB=90°，AC>BC，D、E 分别是 AB、BC 的中点. 设 PA 与 DE 所成角为α，PD 与平面 ABC 所成角为β，二面角 P—AB—C 大小为γ，则α、β、γ的大小关系是(A)

A. α<β<γ　　B. α<γ<β　　C. β<α<γ　　D. γ<β<α

9. 如图:体积为 V 的大球内有 4 个小球,每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点,4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点.设 V_1 为小球相交部分(图中阴影部分)的体积,V_2 为大球内、小球外的图中黑色部分的体积,则下列关系中正确的是(D)

(A)$V_1>\frac{V}{2}$　　(B)$V_2<\frac{V}{2}$　　(C)$V_1>V_2$　　(D)$V_1<V_2$

二．填空题

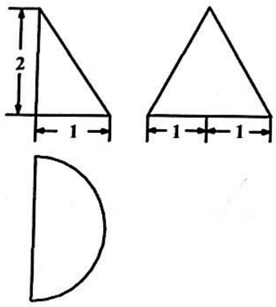
10. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上,则此球的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

11. 设地球半径为 R,若甲地位于北纬 45°东经 120°,乙地位于南纬 75°东经 120°,则甲乙两地的球面距离为 $\frac{2}{3}\pi R$.

12. 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α，则 $\cos\alpha=$ $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

13. 在ΔABC 中,AB=2,BC=15,∠ABC=120°(如图).若将ΔABC 绕直线 BC 旋转一周,则所形成的旋转体的体积是 15π.

14. 某几何体的三视图如图所示，则其体积为 $\frac{\pi}{3}$.



15．正方体被平面截成等积的二个部分，则截面形状可以是(1)正三角形；(2)菱形；(3)长方形；(4)正方形；(5)正六边形. 其中正确的结论是 (2)(3)(4)(5).

16．在三棱锥中，PA⊥平面 ABC，AB⊥BC，AE⊥PB 于 E，AF⊥PC 于 F，连接 EF，则图中共有直角三角形 10 个.

17．在直二面角α—l—β中，A∈α，B∈β，A、B 不在 l 上，AB 与α所成角为θ_1，AB 与β所

成角为θ₂，AB 与 l 所成角为θ₃，则 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3=$ <u>1</u>.

三．解答题

18．如图,AB 是圆的直径,PA 垂直圆所在的平面,C 是圆上的点.

(I)求证: 平面$PAC\perp$平面PBC;

(II)若$AB=2$，$AC=1$，$PA=1$，求证：二面角$C-PB-A$的余弦值.

(I) 证明 AB为圆的直径

$\angle ACB=90^\circ \Rightarrow AC\perp CB$

$PA\perp$平面ACB

$BC\subset$平面ACB

$\Rightarrow BC\perp PA$

$PA\cap AC=A$

$\Rightarrow BC\perp$平面PAC

$BC\subset$平面PBC

平面$PBC\perp$平面PAC

(II) 过C作$CH\perp AB$于H

过H作$HT\perp PB$于T.

$AP\perp$平面ABC.

$AP\subset$平面$APB\Rightarrow$平面$APB\perp$平面ABC

$CH\perp AB\Rightarrow CH\perp$平面$APB$

CT在平面APB上的射影为HT

$\Rightarrow CT\perp PB$

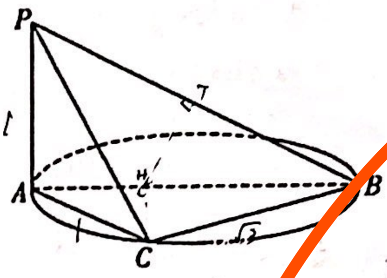
$\angle HTC$为二面角$C-PB-A$平面角.

$\cos\angle HTC=\frac{HT}{TC}$.

勾股定理

$PC=\sqrt{2}$. $CB=\sqrt{3}$, $PB=\sqrt{5}$.

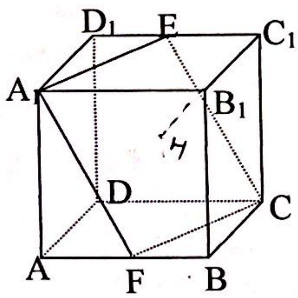
$CT=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$. $HB=\frac{3}{2}$ $HT=\frac{3}{2\sqrt{5}}$.



$\cos\angle HTC=\frac{HT}{TC}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

二面角$C-PB-A$的余弦值$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

19．在棱长为 a 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 D_1C_1 与 AB 的中点，求：(1)A_1B_1 与截面 A_1ECF 所成角的大小；(2)点 B 到截面 A_1ECF 的距离.



解 (1). 设B_1在平面A_1ECF上投影为H

$\angle B_1A_1H$为A_1B_1与截面A_1ECF所成角

$V_{B_1-EA_1F}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1EF}\cdot h$

$=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1F}\cdot a$.

$=\frac{1}{6}a^3$.

$A_1E=A_1F=\frac{\sqrt{5}a}{2}$ $S_{\triangle A_1EF}=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$.

$EF=\sqrt{2}a$.

$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$. $\sin\angle B_1A_1H=\frac{B_1H}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\angle B_1A_1H=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $A_1B_1 /\!/ FB$

$\Rightarrow FB$与截面A_1EP所成角大小$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

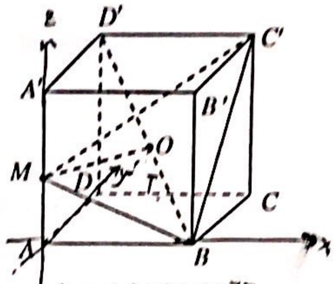
B到截面距离$h_B=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

20．已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1，点 M 是棱 AA' 的中点，点 O 是对角线 BD' 的中点.

(1)求证：OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线；

(2)求二面角 $M-BC'-B'$ 的大小；

(3)求三棱锥 $M-OBC$ 的体积.



证明 ~~$MB=MD'=\frac{\sqrt5}{2}$~~

~~O为BD'中点~~

~~$\Rightarrow OM\perp BD'$~~

~~设A'B'BA中心为T~~

~~T为A'B中点~~

以A为原点 如图建立空间直角坐标系

$A(0,0,0)$ $A'(0,0,1)$ $B(1,0,0)$

$D(0,1,0)$ $D'(0,1,1)$

$O(\frac12,\frac12,\frac12)$ $M(0,0,\frac12)$

$\overrightarrow{OM}=(-\frac12,-\frac12,0)$，$\overrightarrow{AA'}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{BD'}=(-1,1,1)$ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BD'}=0$

$\Rightarrow BD'\perp OM$ $AA'\perp OM$

M在AA'上，O在BD'上

所以OM为异面直线AA'与BD'公垂线

(2) 平面$BC'B'$法向量为$\vec{n_1}=(1,0,0)$.

$\overrightarrow{BC'}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,0,\frac12)$

设平面BMC'的一个法向量$\vec{n_2}$

$\vec{n_2}=\overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{BC'}$

$=\begin{vmatrix}-1&0&\frac12\\0&1&1\\\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\end{vmatrix}=(-\frac12,1,-1)$

设$\vec{n_1}$与$\vec{n_2}$夹角α.

二面角$M-BC'-B'$的平面角β.

$|\cos\beta|=|\cos\alpha|=\frac{\frac12}{\sqrt{1\cdot\frac94}}=\frac13$

由$M-BC'-B'$为锐二面角

$\Rightarrow\beta=\arccos\frac13$

(3) 平面OBC的法向量$\vec{n_3}=(\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2})$

V_{M-OBC}

$=\frac13S_{\triangle OBC}\cdot h_M$

$=\frac13\cdot\frac{\sqrt2}{4}\cdot|\overrightarrow{MO}\cdot\vec{n_3}|$

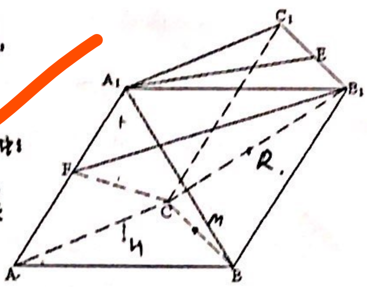
$=\frac{\sqrt2}{12}\cdot\frac{\sqrt2}{4}=\frac{1}{24}$

21．如图:在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$AB=AC$，$A_1A=A_1B=a$，侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 120°，E，F 分别是棱 B_1C_1，A_1A 的中点.

(1)求 A_1A 与底面 ABC 所成角；

(2)证明 A_1E//平面 B_1FC；

(3)求经过 A_1,A,B,C 四点的球的体积.



(1) 取BC中点M.

$AB=AC$

$\Rightarrow AM\perp BC$.

$\angle A_1AB=\angle A_1AC$.

$AB=AC$，$AA_1=AA_1$

$\Rightarrow\triangle A_1AB\cong\triangle A_1AC$

$\Rightarrow A_1B=A_1C$

$\Rightarrow A_1M\perp BC$ $A_1M\cap AM=M$ $\Rightarrow BC\perp$平面A_1AM

E为B_1C_1中点

$\Rightarrow A_1E\perp B_1C_1$，$B_1C_1\parallel BC\Rightarrow A_1E\perp BC$

E在平面AA_1EM内.

$\Rightarrow EM\perp BC$.

由$AM\perp BC$，$EM\perp BC$

$\Rightarrow\angle EMA$为侧面B_1BCC_1与底面ABC所成二面角. $\angle EMA=120°$

$A_1E\underset{=}{\parallel}AM\Rightarrow$ 四边形A_1EMA为平行四边形

$\Rightarrow\angle A_1AM=60°$.

过A_1作$A_1H\perp$平面ABC于H. BC在平面ABC

$\Rightarrow A_1H\perp BC$.

$\Rightarrow$ H在平面AA_1EM内.

$\angle A_1AM$为A_1A与平面ABC所成角

A_1A与底面ABC所成角为60°

(2) B_1C中点R

E，M分别为B_1C_1，BC中点

$\Rightarrow$ EMR共线

平行四边形A_1AME中，FR为中位线

$FR\parallel A_1E$.

A_1E在平面B_1FC外

FR在平面B_1FC.

$\Rightarrow A_1E\parallel$平面$B_1FC$.

(3) $A_1A=A_1B=A_1C=a$.

$AH=BH=CH=\frac{a}{2}$

~~$AH=\frac{\sqrt3}{2}a$~~ H为△ABC外心

设过A_1ABC的球 球心在A_1H上 记作O.

$OA_1=t$.

$OH=\frac{\sqrt3}{2}a-t$.

$t^2=(\frac{\sqrt3}{2}a-t)^2+(\frac{a}{2})^2$.

$a^2=\sqrt3ta$

$t=\frac{\sqrt3}{3}a$

$V=\frac43\pi t^3$

$=\frac43\pi\frac{\sqrt3}{9}a^3$

$=\frac{4\sqrt3}{27}\pi a^3$