第一周周末作业 2020-02-21

丁嘉炫

一．选择题

1．已知 z 为复数，下列四个命题：①若 $z=\bar{z}$，则 $z\in R$；②$z+\bar{z}=0$，则 z 为纯虚数；③若 $z^2\geq 0$，则 $z\in R$；④若 $z^2<0$ 则 z 为纯虚数----------------------------(C)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2．已知 $z\in C$，且 $|z|=1$，则下列各式中成立的是------------------------(C)

A. $z^2=1$　　B. $z^{-2}=1$　　C. $z+\frac{1}{z}\in R$　　D. $z+\frac{1}{z}$ 是虚数

3．与自身的平方共轭的复数 z 的集合是----------------------------(D)

A. $\{1,0\}$　　B. $\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$　　C. $\left\{1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$　　D. $\left\{1,0,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

4．设 $z\in C$，$M=\{z|(z-1)^2=|z-1|^2\}$,则有-----------------------------(B)

A. M={纯虚数}　　B. M={实数}　　C.{实数}$\subset M\subset${复数}　　D. M={虚数}

5．当 $m\in R$ 时，$(1-i)x^2+mx-(1+i)=0$ 的根是---------------------------(A)

A. 两不等虚根　B. 两不等实根　C. 一实一虚根　D. 一对共轭虚根

6．当 $t\in R$ 时，方程 $(1-i)x^2+tx-(1+i)=0$ 的根是------------------------(C)

A.两不等实根　　B.一对共轭虚根　　C.两不等虚根　　D.实、虚根各一个

7．设 i 是虚数单位,复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数,则实数 a 为--------------------(A)

(A)2　　(B)-2　　(C)$-\frac{1}{2}$　　(D)$\frac{1}{2}$

8．对于复数 a,b,c,d,若集合 $S=\{a,b,c,d\}$ 具有性质“对任意 $x,y\in S$,必有 $xy\in S$”,则当 $\begin{cases}a=1\\b^2=1\\c^2=b\end{cases}$ 时,b+c+d 等于--(B)

(A)1　　(B)-1　　(C)0　　(D)i

二．填空题

1．若 i 是 $x^2+2x+k=0$ 的一个根，则 k 与另一根的和为 ___-1-3i___

2．$z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}=3$，则 $|z+1|=$ ___2___

3．使 $\frac{(1+i)^{2n}}{1-i}+\frac{(1-i)^{2n}}{1+i}=2^n$ 成立的最小正整数 n= ___3___

4. 已知复平面内两点 P_1、P_2 对应复数 1、i，则线段 P_1P_2 的垂直平分线方程的复数形式是 $z-i\bar{z}=0$ $|z-1|=|z-i|$（亦可）

5. $(1-i)(2+i)-\dfrac{3+2i}{2+i}=$ $\dfrac{7-6i}{5}$

6. 已知 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=1$，则 $|z_1-z_2|=$ $\sqrt{3}$

7. $z=x+yi$，x、y∈R，$|z-1+2i|+|z-1-2i|=6$，则 x+y 的取值范围是 $[1-\sqrt{14},1+\sqrt{14}]$

8. $2|z-3-3i|=|z|$，则 $|z|$ 的取值范围是 $[2\sqrt{2},6\sqrt{2}]$

9. 复数范围内因式分解：$-\dfrac{1}{2}x^2+x-3=$ $-\frac{1}{2}(x-1-\sqrt{5}i)(x-1+\sqrt{5}i)$

10. 为求解方程 $x^5-1=0$ 的虚根,可以把原方程变形为 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$,再变形为 $(x-1)(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)=0$,由此可得原方程的一个虚根为 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$.

$ab=-1$
$a+b=1$

三．解答题

1. 已知 z、w 为复数，$(1+3i)z$ 为纯虚数，$w=\dfrac{z}{2+i}$，$|w|=5\sqrt{2}$，求 z.

解：$z=2w+wi$.

$(1+3i)(2w+wi)$

$=-w+7wi$

设 $w=a+bi$，$a,b\in R$.

$(1+3i)z=-a-bi+7ai-7b$

$\therefore \begin{cases} a+7b=0 \\ a^2+b^2=50 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=7 \\ b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-7 \\ b=1 \end{cases}$

$z=15+5i$ 或 $-15-5i$.

2. 设关于 x 的方程 $3x^2-6(m-1)x+m^2+1=0$ 的两根模的和为 2，求实数 m 的值。

解：记两根 x_1,x_2

$\Delta=36(m-1)^2-12(m^2+1)$

$=12(3m^2-6m+3-m^2-1)$

$=12(2m^2-6m+2)$

若 $\Delta\geq0$. 设 $x_1x_2=\dfrac{m^2+1}{3}$

$\therefore x_1,x_2$ 同号

$|x_1|+|x_2|=|x_1+x_2|=2|m-1|=2$.

$m=0$ 或 2（舍）.

若 $\Delta<0$

$|x_1|=|x_2|$

$\therefore |x_1|=|x_2|=1$.

$|x_1x_2|=1=\dfrac{m^2+1}{3}$.

$m=\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$（舍）

$\therefore m=0$ 或 $\sqrt{2}$.

3. 已知复数 z_1 满足$(z_1-2)(1+i)=1-i$(i 为虚数单位),复数 z_2 的虚部为 2,且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数,求 z_2.

解. $z_1=2-i$

设 $z_2=a+2i$ $a\in R$.

$4-a=0$

$\therefore a=4$

$z_2=4+2i$

4. 已知 z 是复数,$z+2i$, $\frac{z}{2-i}$ 均为实数,(i 为虚数单位),且复数$(z+ai)^2$ 在复平面上对应的点在第一象限,求实数 a 的取值范围.

解: 设 $\frac{z}{2-i}=a'$ $a'\in R$

$\therefore z=2a'-a'i$

$z+2i=2a'-a'i+2i$

$\therefore a'=2$

$z=4-2i$

$(z+ai)^2=(4+(a-2)i)^2=16-(a-2)^2+(8a-16)i$

$\begin{cases}(a-2)^2<16\\ 8a-16>0\end{cases}$

$a\in(2,6)$.

5. 已知实系数方程 $x^3-3x^2+mx-2=0$ 有一个实根 x_0，其余 2 根为虚根，且三根在复平面上对应点恰为一个正Δ三个顶点，求 x_0、m.

解. 记两虚根为 x_1, x_2

$x_0+x_1+x_2=3$

设 $x_0=1+a$ $a\in R$.

$x_1=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a$

$x_2=1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}a$

$x_0x_1x_2=2$.

$\therefore (1+a)(1-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}ia)(1-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}ia)$

$=(1+a)(1-a+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2)$

$=a^3+1=2$

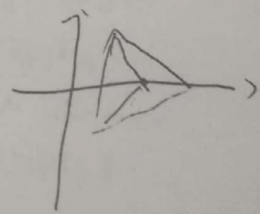
$a=1$

$x_0=2.$

$8-12+2m-2=0$

$m=3.$

$\therefore x_0=2, m=3.$



6. 已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列,$a_1=b_1,a_2=b_2\neq a_1$,记 S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $b_k=a_m$(m,k 是大于 2 的正整数),求证:$S_{k-1}=(m-1)a_1$;

(2)若 $b_3=a_i$(i 是某一正整数),求证:q 是整数,且数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项;

(3)是否存在这样的正数 q,使等比数列$\{b_n\}$中有三项成等差数列?若存在,写出一个 q 的值,并加以说明;若不存在,请说明理由.

解:设 a_n 公差为 d　　$d\neq 0$, $q\neq 1$.

$a_1+d=q\,a_1 \Rightarrow \frac{d}{q-1}=a_1$

$a_1+(m-1)d=q^{k-1}a_1 \Rightarrow q^{k-1}-1=\frac{(m-1)d}{a_1}$

$S_{k-1}=a_1+qa_1+\cdots+q^{k-2}a_1$

$=\frac{q^{k-1}a_1-a_1}{q-1}$

$=\frac{q^{k-1}-1}{q-1}a_1$

$=\frac{(m-1)d}{q-1}=(m-1)a_1$.

(2) $b_3-b_2=q^2a_1-qa_1=(q-1)a_1\cdot(q+1)$

$=(q+1)d=(i-2)d$.

$q=i-3$ 为整数

若 $q^2=1$. $\therefore q=-1$.

$a_i=a_1\cdot(-1)^{i+1}$

又 $a_2=-a_1$. $a_i=a_1$

$\therefore\{b_n\}$ 的项均为 $\{a_n\}$ 中的项.

当 $i=2$. $q=1$ 舍.

若 $i=3$. $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$ 舍.

若 $i\geq 4$. $q>0$, 故 $q\geq 2$.

当 $k\geq 3$

$b_k=q^{k-1}a_1$

$=a_1+a_1(q-1)(q^{k-2}+\cdots+1)$

$=a_1+d(q^{k-2}+\cdots+1)$

$=(q^{k-2}+\cdots+q+1)+1$.

又 b_1, b_2 在 $\{a_n\}$ 中

$\therefore\{b_n\}$ 每项在 $\{a_n\}$ 中.

(3). 取 $b_1=1$;

$b_2=q$. $b_4=q^3$

$q^3+1=2q$

$(q-1)(q^2+q-1)=0$

$\therefore q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 时. b_1, b_2, b_4 成等差数列.