高三(1)班 宁柯 969

60. 棱柱、棱锥、棱台(1)

一、基本训练题

1. 若长方体的三个交于同一顶点的面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，则长方体的对角线的长为 $\underline{\sqrt{6}}$.

2. 正三棱锥 S-ABC 侧面等腰三角形底角 θ 的取值范围是 $\underline{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})}$，正 n 棱锥侧面等腰三角形底角 θ 的取值范围是 $\underline{(\frac{n-2}{2n}\pi,\frac{\pi}{2})}$ $(n\geq 3, n\in N^*)$

3. 棱柱成为直棱柱的一个必要而不充分条件是 (B)

(A) 棱柱有一条侧棱和底面垂直 X (B) 棱柱有一条侧棱和底面的两条边垂直

(C) 棱柱有一个侧面和底面的一条边垂直 (D) 棱柱有一个侧面是矩形且和底面垂直 X

4. 正四棱锥相邻两侧面形成的二面角为 θ，则 θ 的取值范围是 (D)

(A) $(0,\frac{\pi}{3})$ (B) $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ (C) $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ (D) $(\frac{\pi}{2},\pi)$

二、典型例题

1. 已知正三棱锥的高为 3cm，一个侧面三角形的面积为 $6\sqrt{3}$ cm²，求这个正三棱锥的侧面和底面所成的二面角的大小.

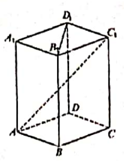
2. 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中给出三个论断：

① 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱；

② 底面 $ABCD$ 是菱形；

③ $AC_1\perp B_1D_1$.

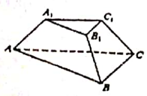
以其中两个论断作条件，余下一个作结论，可以得到三个命题，其中有几个真命题？为什么？



3. 已知三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 是底角为 45° 的等腰梯形，且该侧面与底面垂直，$\angle ACB=90°$.

(1) 求证二面角 A-BB_1-C 为直二面角；

(2) 若 $AB=5$，$BC=3$，求二面角 A_1-AB-C 的大小.



1. 解：在正三棱锥 $P-ABC$ 中 $S_{\triangle PAB}=6\sqrt{3}$ 高 $PH=3cm$.

∵ PH 为正三棱锥的高 ∴ $PH\perp$ 平面 ABC ∴ $PH\perp AB$

作 $DH\perp AB$ 于 D，联结 PD.

∵ P 在平面 ABC 中的射影为 H，$DH\perp AB$ ∴ $PD\perp AB$

∵ $PD\perp AB$，$HD\perp AB$ ∴ $\angle PDH$ 即平面 PAB 与平面 ABC 所成角

设 $DH=x$，则 $AB=2\sqrt{3}x$.

在 Rt$\triangle PDH$ 中 $PD^2=PH^2+DH^2$ ∴ $PD=\sqrt{x^2+9}$

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot PD\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot 2\sqrt{3}x=6\sqrt{3}$ ∴ $x^2=-12$(舍)或 3

$x=-\sqrt{3}$(舍)或 $\sqrt{3}$

$\tan\angle PDH=\frac{PH}{DH}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ∴ $\angle PDH=\frac{\pi}{3}$，侧面与底面所成二面角为 $\frac{\pi}{3}$

2. 解：(1) 以①②为条件，③为结论.

∵ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱

∴ $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$CC_1\perp B_1D_1$

∵ 底面 $ABCD$ 是菱形 ∴ $A_1B_1C_1D_1$ 也为菱形，$A_1C_1\perp B_1D_1$

∵ $A_1C_1\perp B_1D_1$，$CC_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\cap CC_1=C_1$

∴ $B_1D_1\perp$ 平面 A_1C_1CA ∴ $B_1D_1\perp AC_1$，为真命题

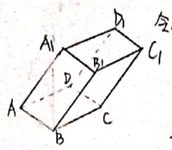
(2) 以①③为条件，②为结论 假命题

令 $A_1D_1=A_1B_1$，$C_1D_1=B_1C_1$，$AD_1\neq C_1D_1$，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$

此时四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，$A_1C_1\perp B_1D_1$，但 $A_1B_1C_1D_1$ 不是菱形.

(3) 以②③为条件，①为结论 假命题.

令 $ABCD$ 为菱形，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ACC_1>\frac{\pi}{2}$



此时 $AC_1\perp B_1D_1$，底面 $ABCD$ 为菱形，但 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为不为直四棱柱.

∴ 只有 1 个真命题

三、测试题

1. 长方体中，设对角线 AC' 和与 A 共点的三条棱所成的角分别为 α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$ ___1___.

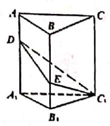
2. 一个棱锥被平行于底面的平面所截，若截面面积是底面面积的一半，则此棱锥的一条侧棱被截面所分成的两段(自上而下)的比是 ___$1:(\sqrt{2}-1)$___

3. 过正三棱锥高的中点作平行于底面的截面，截得正三棱台的上底面边长为 2cm，高恰好是上、下底面边长的等差中项. 则棱台的侧棱与底面所成的角是 ___$\arctan\frac{3}{2}\sqrt{3}$___

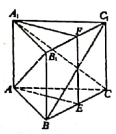
4. 正三棱台两底面的边长分别是 4 和 8，斜高为 4，若过下底面的一条边作该棱台的截面，且截面为三角形，则该截面面积的最小值是 (D)

(A) 24 (B) $4\sqrt{37}$ (C) $4\sqrt{35}$ (D) $\frac{12}{5}\sqrt{55}$

5. 已知 D、E 分别是正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1 和 BB_1 上的点，且 $A_1D=2B_1E=B_1C_1$. (1) 画出过 D、E、C_1 的平面与棱柱的下底面的交线；(2) 求平面 DEC_1 与下底面所成二面角的大小.



6. 直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BC_1\perp AB_1$，$BC_1\perp A_1C$，$AE\perp BC$ 于 E，$A_1F\perp B_1C_1$ 于 F. 求证：(1) B_1ECF 是平行四边形；(2) $AB=AC$；(3) $AB_1=A_1C$.



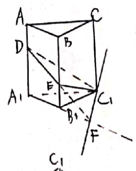
四、说明

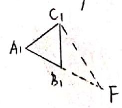
1. 本节重点是复习棱柱、棱锥、棱台的概念及其基本性质，在概念的复习中应善于运用"充要条件"的语言进行变式训练，如一、3.

2. 有些几何体中的计算问题，可以根据已知条件通过列方程(组)转化为代数问题来解决，如例1.

3. 在解柱、锥的综合习题时，要善于综合联想，灵活运用线面关系，如三、6.

5.





解：(1) 图中 C_1F 即所求作交线

(2) ∵ $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 为正三棱柱 ∴ $A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1$，$\angle A_1B_1C_1=60^\circ$

$A_1A \parallel BB_1$

∵ $B_1E \parallel A_1D$.

∴ $\frac{FB_1}{FA_1}=\frac{BE_1}{A_1D}=\frac{FE}{FD}$

∴ $A_1B_1=B_1F$

∵ $\frac{A_1F}{A_1C_1}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. ∴ $\angle C_1A_1F=90^\circ$ $A_1C_1\perp C_1F$.

又 $C_1E=\sqrt{EB_1^2+B_1C_1^2}=\sqrt{EB_1^2+B_1F^2}=EF$. $DE=EF$

∴ $\angle D_1C_1F=90^\circ$

∵ $A_1C_1\perp C_1F$，$DC_1\perp C_1F$，平面 A_1C_1F ∩ 平面 $DC_1F=C_1F$

∴ $\angle A_1C_1D$ 为平面 DEC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角

$\tan\angle DC_1A_1=\frac{DA_1}{A_1C_1}=1$. ∴ 二面角为 45°

$\angle DC_1A_1=45^\circ$.

6. 证明：(1) ∵ $A_1B_1=AB$

$\angle A_1B_1F=\angle ABE$

$\angle A_1FB_1=\angle AEB=90^\circ$

∴ $\triangle A_1B_1F\cong\triangle ABE$. $B_1F=BE$.

∵ $C_1C\perp$ 平面 ABC ∴ $C_1C\perp AE$

∵ BC 为 BC_1 在平面内的射影，$AE\perp BC$

∴ $BC_1\perp AE$.

∵ $AE\perp BC_1$，$AB_1\perp BC_1$，$AE\cap AB_1=A$

∴ $BC_1\perp$ 平面 AB_1E. ∴ $BC_1\perp B_1E$.

同理 $BC_1\perp FC$.

∴ $FC\parallel B_1E$.

又 $B_1F\parallel CE$ ∴ 四边形 B_1FCE 为平行四边形.

(2) ∵ $B_1F=EC$，$B_1F=BE$

∴ $BE=CE$

∵ $AE\perp BC$，$BE=CE$

∴ $AB=AC$

(3) ∵ $AB=CA$，$\angle B_1BA=\angle A_1AC=90^\circ$，$A_1A=B_1B$

∴ $\triangle ABB_1\cong\triangle CAA_1$

∴ $AB_1=A_1C$.