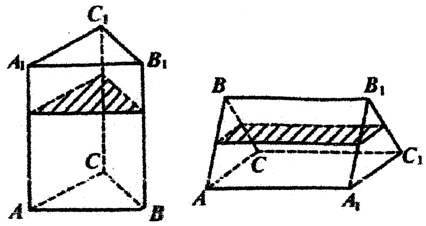
66. 体积计算及其应用(2)

一、基本训练题

1. 已知过球面上三点 A,B,C 的截面和球心 O 的距离等于球半径的一半，且 $AB=BC=CA=3$，则球的体积为________.

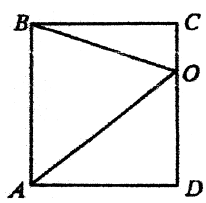
2. 已知直角三角形 ABC 的两直角边的长分别为 3cm 和 4cm，分别以它的三条边为轴，将三角形旋转一周，得到三个旋转体，那么这三个旋转体的表面积的最小值是________，体积的最小值是________.

3. 如图(1)所示是一个正三棱柱形容器，高为 $2a$，内装水若干. 将容器放倒，把一个侧面作为底面，如图(2)所示，这时水面恰好为中截面. 则图(1)中水面的高度是________.



(1)　　　　(2)

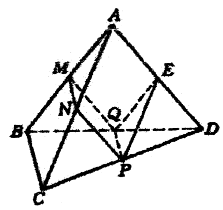
4. 设 O 是矩形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，以直线 CD 为轴旋转这个矩形所得的圆柱体的体积为 V，其中以 OA 为母线的圆锥的体积为 $\frac{V}{4}$，则以 OB 为母线的圆锥的体积等于　　　　(　　)

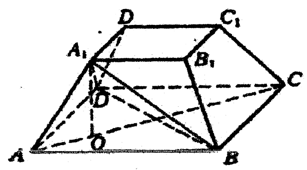


(A) $\frac{V}{6}$　　(B) $\frac{V}{9}$　　(C) $\frac{V}{12}$　　(D) $\frac{V}{15}$

二、典型例题

1. 四面体 $ABCD$ 中，M,P,N,Q 分别是其两组对棱的中点，求截面 $MNPQ$ 分四面体 $ABCD$ 所成两部分体积的比.

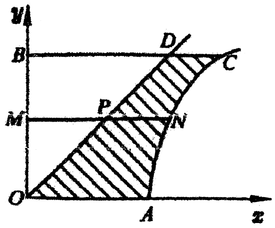




2. 在正四棱台中，侧棱 $AA_1=3$，下底边 $AB=5$，侧面对角线 $A_1B=4$，求 A_1 到底面的距离及三棱锥 A_1-ABD 的体积.

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 用直线 $y=h(h>0)$ 截 y 轴、这双曲线及其渐近线，交点分别为 B,C,D. 由 x 轴、直线 $y=h$，双曲线及其渐近线在第一象限内围成平面图形 $OACD$(图中阴影部分). 将这平面图形绕 y 轴旋转一周生成旋转体. 试完成下列填空，求出这旋转体的体积 V.

(1) 双曲线一段弧$\overset{\frown}{AC}$的方程是________，渐近线上线段 OD 的方程是________.



(2) 设 M 是 OB 上任意一点，且 $OM=t(0\leqslant t\leqslant h)$，过 M 作 y 轴的垂线交$\overset{\frown}{AC}$于 N，交 OD 于 P，则 $|MN|=$________，$|MP|=$________.

(3) 线段 PN 绕 y 轴旋转一周所得圆环的面积为________.

(4) 根据祖暅原理，找出一个与旋转体体积相等的，而且能求出其体积的几何体，从而得 $V=$________.

三、测试题

1. 将一个圆形纸片沿其两条半径剪开，得到两个扇形，它们圆心角的比为 $1:2$，再将它们当作圆锥侧面卷成两个圆锥，则这两个圆锥的体积比是________.

2. 圆台的侧面积是 $144\pi \text{cm}^2$，侧面展开图为半圆环，圆台的上、下底面半径之比为 $1:3$，则圆台的体积是________.

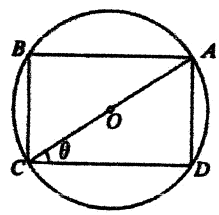
3. 正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底边长之比为 $2:3$，连结 A_1B，BC_1 及 AC_1，把正三棱台分成三个三棱锥，则这三个三棱锥体积之比(由小到大)是________.

4. 已知正方体、等边圆柱和球的全面积都等于 S，这三个几何体体积按从大到小顺序排列为 (　　)

(A) $V_{球}>V_{圆柱}>V_{正方体}$　　(B) $V_{圆锥}>V_{球}>V_{正方体}$

(C) $V_{球}>V_{正方体}>V_{圆柱}$　　(D) $V_{正方体}>V_{球}>V_{圆柱}$

5. 求半径为 R 的球的内接圆柱的体积和全面积的最大值.



6. 把半径为 R 的圆面剪去一个扇形，设剩下的扇形圆心角为 α，将其作为一个圆锥的侧面围成一个圆锥. 问：α 为多大时，圆锥的体积最大？最大值为多少？

四、说明

本节复习重点是棱台、旋转体的体积计算.

1. “割、补”及“等积变换”仍然是本节重点复习的指导思想，如二、2，把体积作为一种中介量用来沟通有关元素之间的联系，即先完成体积计算，然后求出点到平面的距离，这是求距离(或求截面面积)的一种常见的方法.

2. 通过灵活的小题训练，从而能熟练运用面积、体积等基本公式，达到准确计算，是本节的又一目的.

3. “立几最值”也常在体积问题中出现，本节通过三、5，6 复习几种求最值的方法：(1)“选变量、寻定值”运用不等式最值定理；(2) 恰当选取“角”参变量，转化为三角函数式，运用三角最值，这里关键是“选变量”的转化策略.