# 线面垂直与线面平行

## 1、空间直线与平面的位置关系

- 直线在平面内
- 直线在平面外：
  - 直线与平面相交
  - 直线与平面平行

## 2、直线和平面平行

（1）判定定理

如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

（线线平行 $\Longrightarrow$ 线面平行）

（2）性质定理

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。

（线面平行 $\Longrightarrow$ 线线平行）

## （3）点到面的距离、直线与平面的距离

$l//\alpha$：则$l$上每个点到平面$\alpha$的距离都相等，这个距离称为直线与平面的距离。

那么，直线与平面的距离本质上也就是点到面的距离。

**点到平面距离的计算方法：**

①直接法：找到点在平面内的射影；

②转化法：利用其他点到平面的距离（平行、比例）

③向量法： $d=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

（其中，$\vec{n}$为平面的法向量，$A$为该点，$P$为平面内任意一点.）

④ 体积法

## 3、直线和平面垂直

（1）定义

如果一条直线和一个平面内的<u>任意</u>一条直线都垂直，就称这条直线和这个平面相互垂直。

该直线称为平面的垂线，该平面称为直线的垂面，该直线与平面的交点叫做垂足。

（2）判定定理

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线就垂直于这个平面。

（3）性质定理

（a）如果两条直线垂直于同一个平面，则这两条直线平行.

（b）如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

## （4）三垂线定理及其逆定理

- 直线$l$和平面$\alpha$相交且不垂直时，叫做直线$l$和平面$\alpha$**斜交**. 直线$l$叫做平面$\alpha$的**斜线**，斜线和平面的交点叫做**斜足**.
- 斜线上一点与斜足间的线段叫做**这点到这个平面的斜线段**.
- 过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做**斜线在这个平面内的射影**.

## （4）三垂线定理及其逆定理

三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

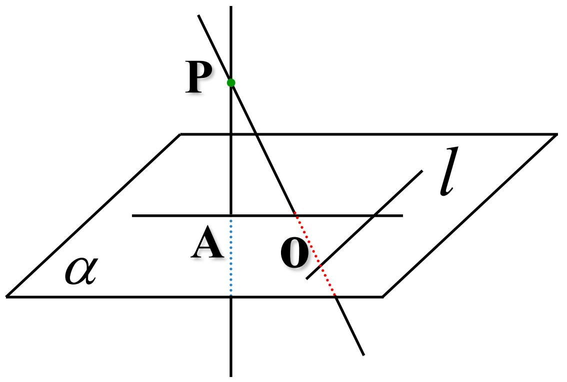
三垂线定理的表述：

$\because PA \perp \alpha$

$\therefore AO$是$PO$在$\alpha$内的射影.

$\because l \subsetneqq \alpha, l \perp AO$

$\therefore l \perp PO$



**三垂线定理的逆定理：**

在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在这个平面内的射影垂直。

## 4、直线与平面所成角

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，

叫做这条斜线和这个平面所成的角。

**注：**（1）当直线垂直于平面时，直线和平面所成的角是 $90°$；

当直线和平面平行或在平面内时，直线和平面所成的角是0°.

（2）直线与平面所成角 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

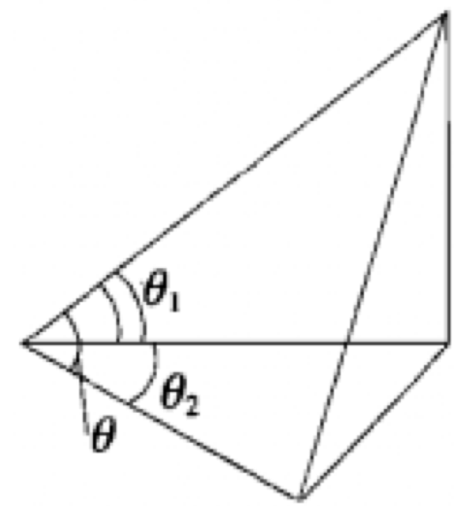
## 结论：

1 、$\cos\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$

$\theta$是斜线$L$与面内非射影所成的角.

$\theta_1$是斜线$L$与面内射影所成的角.

$\theta_2$是面内直线与射影所成的角.




2 、最小角定理

斜线和它在平面内的射影所成的角, 是这条斜线和这个平面内的任一直线所成的角中的最小角.

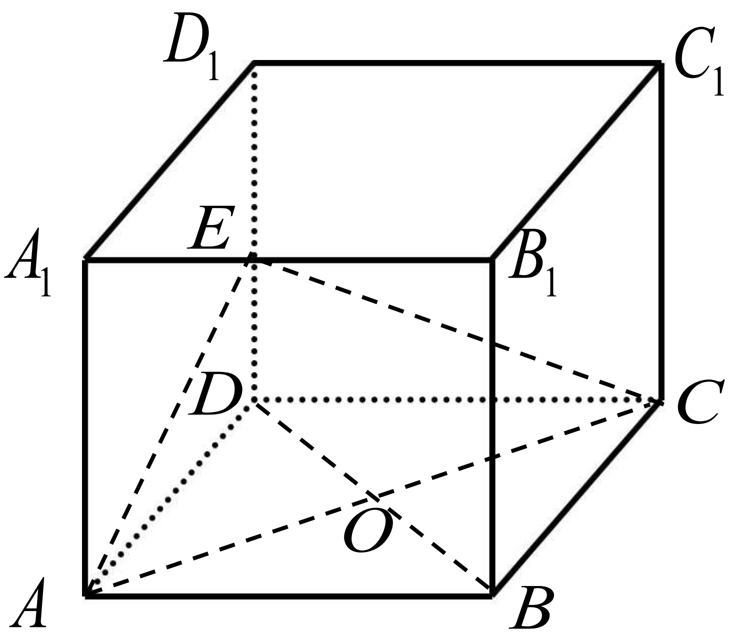
计算方法：

(a) 定义法：需要证明，指明线面所成角.

(b) 向量法：设直线AB与平面$\boldsymbol{\alpha}$所成的角为$\boldsymbol{\theta}$， $\vec{\boldsymbol{n}}$是平面$\boldsymbol{\alpha}$的一个法向量，则

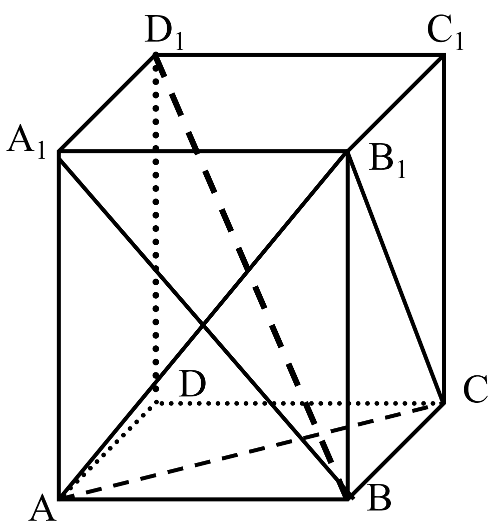
$$\boldsymbol{sin\theta} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{n}}|}$$

例1. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AC$与$BD$相交于点$O$，E为棱$DD_1$的中点，证明：$BD_1 \parallel$平面$ACE$.



例2.

如图，已知正方体ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，联结$BD_1$，AC，$CB_1$，$B_1A$，求证：$BD_1\perp$平面$AB_1C$

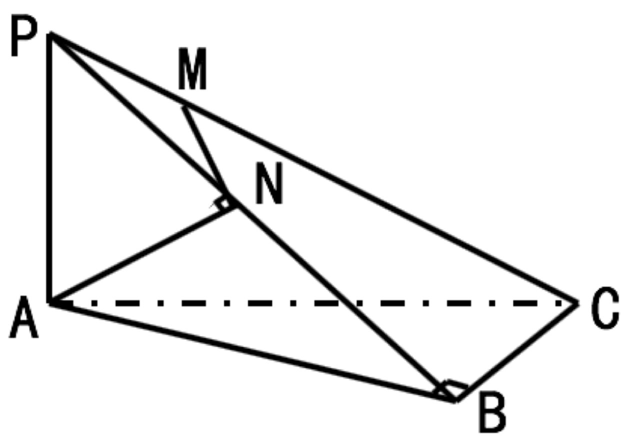


## 例3.

△ABC中，∠ABC＝$90^0$ ，PA⊥平面ABC，垂足为A，AN⊥PB于N.

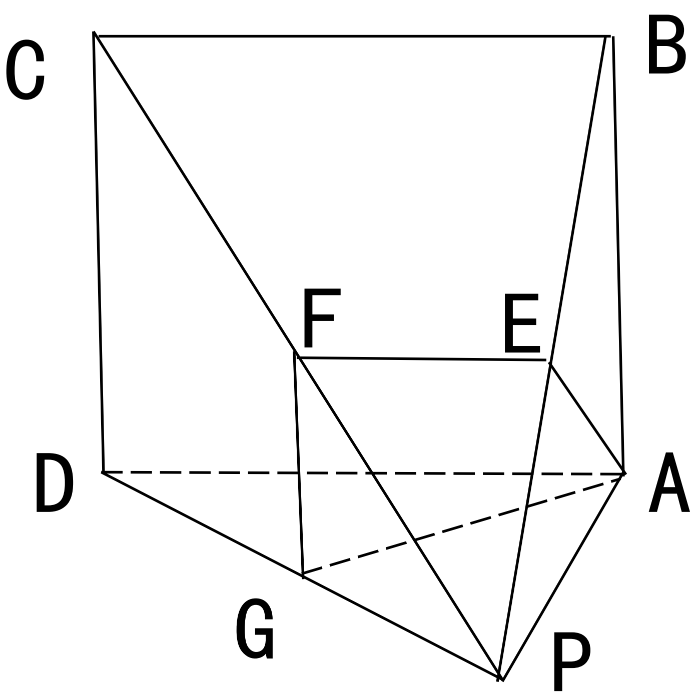
(1)求证：AN⊥平面PBC.

(2)若AM⊥PC于M，求证：PC⊥平面AMN.

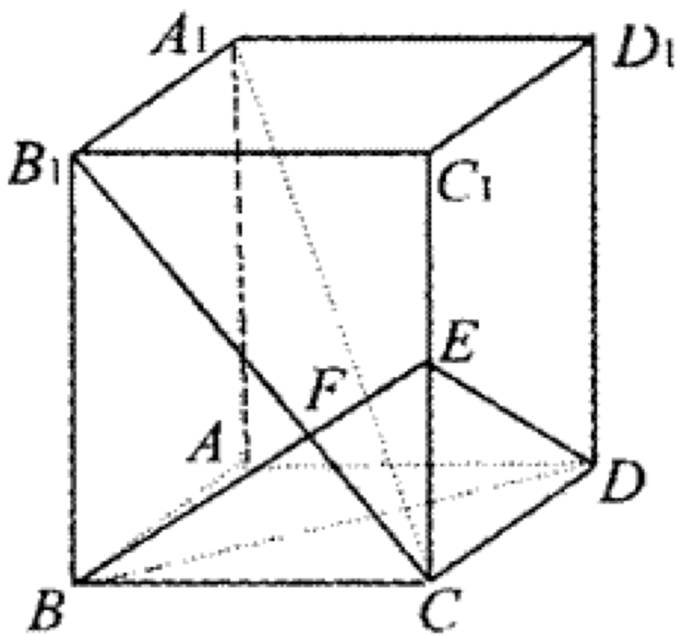


例4.

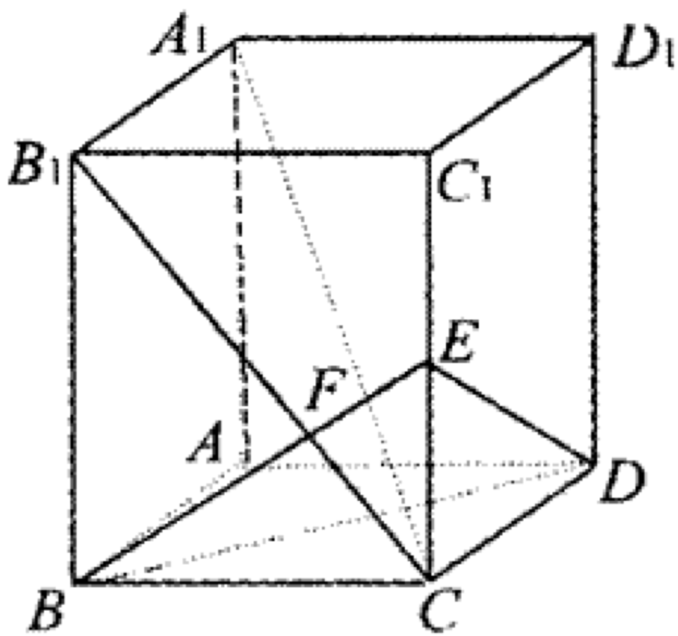
已知正方形$ABCD$，$PA\perp$平面$ABCD$，过$A$且垂直于$PC$的平面交$PB,PC,PD$分别于点$E,F,G$，求证：$AE\perp PB$.



例5. 已知长方体$AC_1$中，棱$AB=BC=3$，$BB_1=4$，连结$B_1C$，过点$B$作$B_1C$的垂线交$CC_1$于$E$，交$B_1C$于$F$，求$ED$与平面$A_1B_1C$所成角的大小.



例5. 已知长方体$AC_1$中，棱$AB = BC = 3$，$BB_1 = 4$，连结$B_1C$，过点$B$作$B_1C$的垂线交$CC_1$于$E$，交$B_1C$于$F$，求$ED$与平面$A_1B_1C$所成角的大小.



例6.

四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB=3$，$BC=4$，$PA=2$，$Q$为$PA$中点，

（1） 求$Q$到$BD$的距离；

（2） 求$P$到面$BQD$的距离.