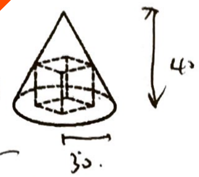
1009 邱泽轩

62. 圆柱、圆锥、圆台

一、基本训练题

$\frac{ab}{\pi}$ 1. 用一张 $a\times b$ 的矩形硬纸卷成圆柱的侧面，则圆柱轴截面的面积(接头忽略不计)是 ____，等边圆柱轴截面面积为 Q，则圆柱的侧面积是 πQ.

2. 如图，一个正方体内接于高为 40cm，底面半径为 30cm 的圆锥，正方体的棱长是 $(3150-240\sqrt{2})cm$



3. 圆锥的母线长为 l，轴截面的顶角为 120°，则过锥顶的圆锥截面面积的取值范围是 C

(A) $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\right]$ (B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}l^2,\frac{1}{2}l^2\right]$

(C) $\left(0,\frac{l^2}{2}\right]$ (D) $\left[0,\frac{l^2}{2}\right]$

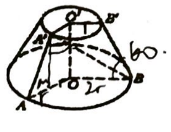
4. 圆台的母线与底面所成的角为 30°，轴截面面积为 Q，则圆台的侧面积为 (B)

(A) πQ (B) $2\pi Q$ (C) $3\pi Q$ (D) $\pi Q/2$

二、典型例题

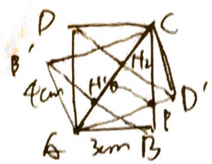
1. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=3cm$，$AD=4cm$，以对角线 AC 为轴将矩形 $ABCD$ 旋转一周，求所得旋转体的表面积.

2. 如图，圆台的上、下底面半径分别为 r 和 $2r$，$O'A'$，OB 分别为上、下底面的一条半径，且以 OO' 为棱的半平面 $O'OAA'$ 与平面 $O'OBB'$ 所成的二面角等于 120°，又圆台的母线与底面成 60°角，求：(1) 线段 $A'B$ 的长；(2) AB' 与圆台轴 OO' 所成的角.



3. 圆锥底面圆半径为 5 cm，高为 12 cm，为了使它的内接圆柱的全面积最大，求内接圆柱的高.

1.



将CD翻折至CD'，AB翻折至AB'，ABCD绕一周所得表面积为CD'B'A绕一周所得的表面积

$BB'\perp AC$ 于 H'

$H'B=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}cm$

AB 转一周表面积为 $\pi\cdot\frac{12}{5}\cdot 3=\frac{36}{5}\pi(cm^2)$

同理 CD 绕一周也为 $\frac{36}{5}\pi(cm^2)$

AD'绕一周为 $\pi\times 4\times\frac{12}{5}=\frac{48}{5}\pi(cm^2)$

AP绕一周为 $\pi\times AP\cdot OP=\pi\cdot\frac{25}{8}\times\frac{15}{8}=\frac{375}{64}\pi$

$\therefore$ PD'绕一周为 $\frac{48}{5}\pi-\frac{375}{64}\pi=\frac{1197}{320}\pi$

$\therefore S_总=\frac{36}{5}\pi+\frac{36}{5}\pi+\frac{1197}{320}\pi+\frac{1197}{320}\pi$

$=\frac{3501}{160}\pi(cm^2)$

2. 1) 过 A' 作 $A'M\perp AO$.

$A'M\perp$ 面 AOB.

$AM=AO-A'O'=r$

$\angle A'AM=60°$

$A'M=\sqrt{3}r$

$\because AO\perp OO'$, $OB\perp OO'$

$\therefore \angle AOB$ 是 $O'OAA'$ 与 $O'OBB'$ 夹角

$MB=\sqrt{MO^2+OB^2-2\cos\angle MOB\cdot MO\cdot OB}$

$=\sqrt{7}r$

$A'B=\sqrt{A'M^2+MB^2}=\sqrt{10}r$

2) $A'M\parallel OO'$

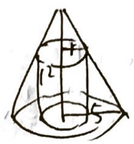
$\therefore \angle MA'B$ 或其补角为 AB' 与 OO' 成角

$A'M=\sqrt{3}r$, $MB=\sqrt{7}r$

$\therefore \tan\angle MA'B=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

$\therefore AB'$ 与 OO' 成角 $\arctan\frac{\sqrt{21}}{3}$

3.



设内接圆柱半径长 r，高为 h

$\therefore \frac{12-h}{r}=\frac{12}{5}$

$h=\frac{60-12r}{5}$

$\therefore S_全=2\pi r^2+2\pi rh$

$=2\pi\left(r^2+\frac{60r-12r^2}{5}\right)$

$=2\pi\left(12r-\frac{7}{5}r^2\right)=2\pi\left(-\frac{7}{5}\left(r-\frac{30}{7}\right)^2+\frac{180}{7}\right)$

$=\cancel{2\pi\times\frac{7}{5}}\ (\quad ?\ \frac{360}{7}\pi$

当 $r=\frac{30}{7}$ 时取到

$h=\frac{12}{7}$

$2\pi r = 1.0$

$r = 30cm$

三、测试题

1. 要在一个半径为 50cm 的圆形铁皮中剪出一个扇形，把它围成一个高为 40cm 的圆锥形漏斗，则剪出的扇形铁皮的中心角是 (B)

(A) 144°　　(B) 216°　　(C) 270°　　(D) 288°

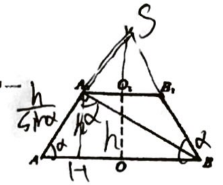
2. 已知圆柱的轴截面是正方形，侧面积和体积分别为 S 和 V，设 $S^3=t$，则函数 $V=f(t)$ 的图象是 (B)

(A) ~~一条射线~~　　(B) 抛物线的一部分

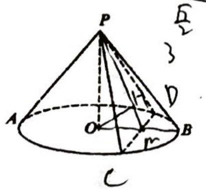
(C) 一个幂函数的图象　　(D) 半圆

3. 面积为 36 cm² 的三角形，以一边为轴旋转，所得旋转体的体积为 192π cm³，表面积为 216π cm²，则这条边的长是 4cm，这个三角形的周长为 36cm.

4. 设一个圆柱与一个圆锥的底面半径都为 r，高都为 h，它们的侧面积分别为 S_1 和 S_2，问：S_1 和 S_2 能相等吗？为什么？



5. 设圆台的高为 h，母线与下底面所成的角为 α，轴截面中一条对角线垂直于腰，求圆台的侧面积.



6. 将半径等于 3，中心角为 300° 的扇形围成圆锥的侧面，求这圆锥的过顶点面积最大的截面到圆锥底面中心的距离.

四、说明

1. 本节重点复习三类常见的旋转体(圆柱、圆锥、圆台)的概念、性质及其侧面积计算.

2. 因为轴截面联系着母线、底面半径、高等主要元素，因此处理好轴截面中边角关系是达到正确计算的关键.

3. 对于圆台问题，要重视"还台为锥"的思想方法.

4. $S_1 = 2\pi rh$

$S_2 = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$

若 $S_1 = S_2$

$\therefore 2\pi rh = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$

$2h = \sqrt{h^2+r^2}$

$4h^2 = h^2+r^2$

$r^2 = 3h^2$

$r=\sqrt{3}h$ 时 S_1 与 S_2 相等

5. 由已知 $\angle B_1BO$ 为母线与下底面成角

$\angle A_1AB = \angle ABB_1 = \alpha$

延长 AA_1, OO_1, BB_1 交于 S

过 A_1 作 $A_1H \perp AB$　$A_1H = O_1O = h$

$A_1A = \frac{h}{\sin\alpha}$.　$AH = h\cot\alpha$

$HB = h\tan\alpha$　$AO = \frac{1}{2}h(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$A_1O_1 = \frac{1}{2}h(\tan\alpha-\cot\alpha)$

$SA = \frac{\frac{1}{2}h(\tan\alpha+\cot\alpha)}{\cos\alpha}$

$SA' = \frac{\frac{1}{2}h(\tan\alpha-\cot\alpha)}{\cos\alpha}$

$S_{侧} = S_{SA侧} - S_{SA_1侧}$

$= \pi(AO\cdot SA - A_1O_1\cdot SA_1)$

$= \frac{\pi h^2}{\cos\alpha}$

6. $PA=PB=3$ 设底面半径 r

$2\pi\times3\times\frac{300}{360} = 2\pi r$

$r = 2.5$

$\therefore \cos\angle APB = \frac{3^2+3^2-5^2}{2\times3\times3} = -\frac{7}{18}$

$\therefore \angle APB > 90°$

当截面顶角为 90° 时取最大值

可取到 90°　$\therefore$ 设截面 PCD

CD 交 OB 于 M.　$OB \perp CD$

过 O 作 $OH \perp PM$

$CD \perp OB$. $CD \perp PO$　$PO \cap OB = O$

$\therefore CD \perp$ 面 POM.　$PM \cap CD = M$

$CD \perp OH$　$OH \perp PM$

$\therefore OH \perp$ 面 PCD.

$\therefore OH$ 为 O 到 PCD 距离

PCD 为等腰 Rt△

$\therefore PM = CM = CD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$OM = \sqrt{r^2-CM^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$　$PO = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$PM = \sqrt{OM^2+PO^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$OH = \frac{PO\cdot OM}{PM} = \frac{\sqrt{154}}{12}$

$\therefore$ 面积最大截面到底面中心距离为 $\frac{\sqrt{154}}{12}$