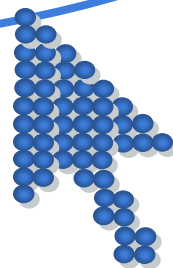
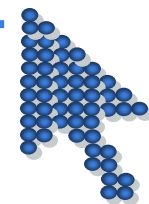


# 反三角函数与复数 提高课





例1、证明： $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4}, x \in (-1, 1]$

分析：将原等式转化为证明

$$2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

先证明：

$$\cos\left(2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

证：记  $\alpha = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ，则

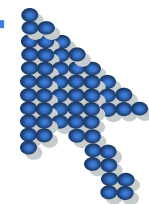
$$\cos \left( 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) = \sin(\arcsin x) = x$$

$$\text{故: } \cos \left( 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin x \right)$$

$$\text{又: } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{2}{1+x} - 1} \in [0, +\infty)$$





$$\therefore \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in [0, \frac{\pi}{2}), \text{即} 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in [0, \pi),$$

$$\text{而 } \frac{\pi}{2} - \arcsin x \in [0, \pi)$$

由  $y = \cos x$  在  $[0, \pi)$  上单调递减, 可得:

$$2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\text{即: } \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4}$$





例2、求函数  $f(x) = \frac{\arcsin(\sin x)}{x}$  的值域.

分析:  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  时,  $\arcsin(\sin x) = x$ ,

$x \in [k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$  时, 有:  $\sin x = (-1)^k \sin(x - k\pi)$

解:  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  关于原点对称

$$\text{且有: } f(-x) = \frac{\arcsin(\sin(-x))}{-x} = \frac{\arcsin(-\sin(x))}{-x} = f(x)$$

$\therefore f(x)$  是偶函数, 因此只用考虑  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上的值域





当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时, 由  $\arcsin(\sin x) = x$  知  $f(x) = 1$

当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  时  $\arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - \pi))$   
 $= -\arcsin(\sin(x - \pi)) = \pi - x$

此时  $f(x) = \frac{\pi - x}{x} = \frac{\pi}{x} - 1 \in [-\frac{1}{3}, 1]$

当  $x > \frac{3}{2}\pi$ , 由  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2}$ , 可得:

$$|f(x)| < \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3}$$

综上,  $f(x)$  的值域为  $[-\frac{1}{3}, 1]$





例3、已知 $\alpha, \beta$ 是关于 $x$ 的方程 $a\sin x + b\cos x = c$ 的两个实根, ( $ab \neq 0, \alpha \neq 2k\pi + \beta$ )求证:  $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$

分析: 利用辅助角公式可将原方程:  $a\sin x + b\cos x = c$ ,  
化为:  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c$

故可以先解出 $\alpha, \beta$ 的具体值, 再证明问题

解: 原方程即:  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c$ , 这里 $\varphi$ 满足:

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$



记:  $\theta = \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , 则原方程的解为:

$$x = 2k\pi + \theta - \varphi \text{ 或 } 2k\pi + \pi - \theta - \varphi, k \in \mathbb{Z}$$

又:  $\alpha \neq 2k\pi + \beta$ , 故存在整数  $k_1, k_2$

$$\text{使得: } \alpha = 2k_1\pi + \theta - \varphi, \quad \beta = 2k_2\pi + \pi - \theta - \varphi$$

$$\therefore \frac{\alpha - \beta}{2} = (k_1 - k_2)\pi - \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$\text{因此 } \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin^2 \theta = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$







分析：求解三角方程  $a\sin x + b\cos x = c$ ，也可以将其与  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  进行联立，从而解出  $\sin x, \cos x$

解：由：  $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ ，消去  $\cos x$  得：

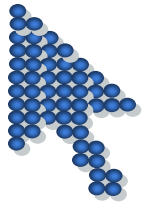
$$(a^2 + b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + c^2 - b^2 = 0$$

记  $t_1 = \sin\alpha, t_2 = \sin\beta$ ，由  $\alpha \neq 2k\pi + \beta$  知：

$t_1, t_2$  是方程  $(a^2 + b^2)t^2 - 2act + c^2 - b^2 = 0$  的两根

$$\text{故： } \sin\alpha\sin\beta = t_1 t_2 = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

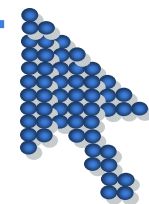




同理可得：  $\cos\alpha\cos\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$

因此：  $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$





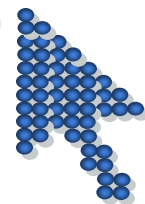
例4、非零复数 $a, b, c$ 满足： $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \neq 1$ ,  $z = \frac{a+b-c}{a-b+c}$ ,  
求 $1 + z + z^2 + \cdots + z^9$ 的值

分析：注意到 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 三式的乘积为1，故可以先求出  
 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 再计算 $z$ 的大小

解：设 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k \neq 1$ , 由 $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$ 得 $k^3 = 1$

$$\text{故 } k = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$





由  $b = k^2 a, c = ka$  得:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a + b - c}{a - b + c} = \frac{a + ak^2 - ak}{a - ak^2 + ak} = \frac{k^2 - k + 1}{-k^2 + k + 1} \\ &= \frac{-2k}{-2k^2} = \frac{1}{k} = \bar{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \cdots + z^9 &= 1 + (z + z^2 + z^3) + \\ \cdots + (z^7 + z^8 + z^9) &= 1 \end{aligned}$$





例5、设复数 $A, z_1, z_2$ 满足:  $z_1\bar{z}_2 + \bar{A}z_1 + A\bar{z}_2 = 0$ , 其中 $|A| = \sqrt{5}$ ,

(1) 求 $|z_1 + A| \cdot |z_2 + A|$

(2) 证明:  $\frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \frac{|z_1 + A|}{|z_2 + A|}$

解: (1)  $|z_1 + A| \cdot |z_2 + A| = |z_1 + A| \cdot \overline{|z_2 + A|}$   
 $= |(z_1 + A)(\bar{z}_2 + \bar{A})| = |z_1\bar{z}_2 + \bar{A}z_1 + A\bar{z}_2 + A\bar{A}|$   
 $= |A\bar{A}| = |A|^2 = 5$





(2)分析：要证明： $\frac{z_1+A}{z_2+A} = \left| \frac{z_1+A}{z_2+A} \right|$

也就是要说明 $\frac{z_1+A}{z_2+A}$ 是一个正实数

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad \frac{z_1+A}{z_2+A} &= \frac{(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})}{|z_2+A|^2} = \frac{z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{z}_2+A\bar{A}}{|z_2+A|^2} \\ &= \frac{5}{|z_2+A|^2} > 0\end{aligned}$$

$$\text{故：} \quad \frac{z_1+A}{z_2+A} = \left| \frac{z_1+A}{z_2+A} \right| = \frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$$





例6、若 $z \in \mathbb{C}$ , 且 $|z| = 1$ ,  $u = z^4 - z^3 - 3z^2i - z + 1$ , 求 $|u|$ 的最大值和最小值, 并求出取得最大值、最小值时的复数 $z$ .

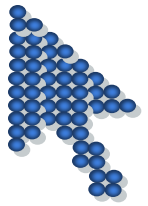
分析: 复数 $u$ 的次数较高, 直接计算 $|u|$ 的运算难度较大,

考虑到 $|z| = 1$ , 可以得到 $\frac{1}{z} = \bar{z}$ , 再结合复数模的运算性质,

可以降低复数 $u$ 的次数

解: 由 $|z| = 1$ , 得到 $\frac{1}{z} = \bar{z}$ , 因此有:





$$\begin{aligned}|u| &= \left| z^2 \left( z^2 - z - 3i - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \right| \\&= |z^2| \cdot |(z^2 - z - 3i - \bar{z} + \bar{z}^2)| \\&= |(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) - 3i|\end{aligned}$$

注意到:  $z^2 + \bar{z}^2 \in R, z + \bar{z} \in R$

$$\text{因此 } |u| = \sqrt{[(z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z})]^2 + 9}$$

$$\text{又: } (z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) = (z + \bar{z})^2 - (z + \bar{z}) - 2$$

$$\text{而 } z + \bar{z} \in [-2, 2], \text{ 故 } (z^2 + \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) \in \left[-\frac{9}{4}, 4\right]$$





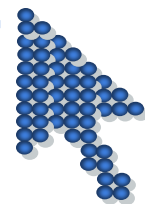
---

$$\therefore u_{\max}=5, u_{\min}=3$$

当 $u=5$ 时,  $z+\bar{z}=-2$ , 此时 $z=-1$

当 $u=3$ 时,  $z+\bar{z}=-1$ 或 $1$ , 此时 $z=1$ 或 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$





例7、已知 $A = \{z | \frac{z}{z-1} \text{ 是纯虚数}\}$ ,  $B = \{t | t = iz + b, z \in A\}$ , 若 $A \cap B = \emptyset$ , 求实数 $b$ 的取值范围

分析：利用结论“ $z$ 为非零复数， $z$ 为纯虚数的充要条件是 $z + \bar{z} = 0$ ”，可以得到集合 $A$ 中复数在复平面上对应点的轨迹.

再利用“转移代入法”可以得到集合 $B$ 中复数在复平面上对应点的轨迹.再求得实数 $b$ 的取值范围





解：由 $\frac{z}{z-1}$ 是纯虚数，则 $z \neq 0$ ,  $\frac{z}{z-1} + \overline{\left(\frac{z}{z-1}\right)} = 0$

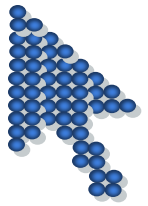
$$\text{即： } \frac{z}{z-1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} = 0$$

$$\therefore 2z\bar{z} - z - \bar{z} = 0, \text{ 则 } z\bar{z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \text{ 故 } \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

集合A中的复数z对应点的轨迹为以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为圆心 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆 $C_1$  (除去 $(0,0), (1,0)$ )





而对于集合B中的数 $t, z = \frac{t-b}{i} \in A$

$$\therefore \left| \frac{t-b}{i} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \left| t - b - \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$$

集合B中点在以 $b + \frac{1}{2}i$ 所对应点为圆心 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆 $C_2$ 上

要使 $A \cap B = \emptyset$ , 圆 $C_1, C_2$ 外离

$$\therefore \sqrt{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \text{ 解得 } b > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } b < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$





例8、给定实数 $m > 0$ , 且 $m \neq 1$ , 设虚数 $z$ 满

足: $z^2 - m^t z + \frac{m^{100}}{4} = 0 (t \in R)$

(1) 当 $t$ 取遍所有正整数, 求满足条件的虚数 $z$ 的实部的和

(2) 若满足条件的 $z$ 总有实部与虚部之差大于0, 求 $t$ 的取值范围

解: (1) 因为 $z$ 为虚数,  $\therefore \Delta = m^{2t} - m^{100} < 0$ ,

$$\text{且 } \operatorname{Re}(z) = \frac{m^t}{2}$$

当 $m > 1$ 时,  $t < 50$  且  $t \in N^*$





所求的全体虚数 $z$ 的实部的和

$$S = 2 \left( \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2} + \cdots + \frac{m^{49}}{2} \right) = \frac{m^{50} - 1}{m - 1}$$

当 $0 < m < 1$ 时,  $t > 50$ 且 $t \in N^*$

所求的全体虚数 $z$ 的实部的和

$$S = 2 \left( \frac{m^{51}}{2} + \frac{m^{52}}{2} + \cdots \right) = \frac{m^{51}}{1 - m}$$

(2)由求根公式得 $Im(z) = \pm \frac{\sqrt{m^{100} - m^{2t}}}{2}$

因为总有 $z$ 的实部与虚部之差大于0, 故:





$$\frac{m^t}{2} - \frac{\sqrt{m^{100} - m^{2t}}}{2} > 0$$

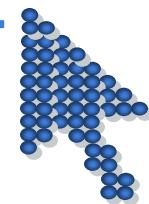
$$\text{即: } m^t > \frac{m^{50}}{\sqrt{2}}, \text{ 又有 } \Delta = m^{2t} - m^{100} < 0$$

$$\therefore \frac{m^{50}}{\sqrt{2}} < m^t < m^{50}$$

当  $m > 1$  时, 解得  $50 - \log_m \sqrt{2} < t < 50$

$0 < m < 1$  时, 解得  $50 < t < 50 - \log_m \sqrt{2}$





例9、已知 $a, b, z$ 均为复数，设 $f(z) = z^2 + az + b$ ，对于一切 $|z| = 1$ 都有 $|f(z)| = 1$ ，求复数 $a, b$ 的值

分析：考虑到需要求解复数 $a, b$ 的值，即求解出这两复数的实部与虚部共四个未知数，可以考虑对 $|f(z)| = 1$ 进行四次赋值

解：因为对于一切 $|z| = 1$ 都有 $|f(z)| = 1$ ，故分别令 $z = \pm 1, \pm i$

可得： $|1 + a + b| = |1 - a + b| = |1 - ia - b| = |1 + ia - b| = 1$







注意到:

$$4 = |1 + a + b| + |1 - a + b| + |1 - ia - b| + |1 + ia - b| \geq |(1 + a + b) + (1 - a + b) + (1 - ia - b) + (1 + ia - b)| = 4$$

因此等号恰好成立, 根据模不等式的取等条件

复数 $1 + a + b, 1 - a + b, 1 - ia + b, 1 + ia - b$ 是四个方向相同且模均为1的复数

$$\text{故 } 1 + a + b = 1 - a + b = 1 - ia + b = 1 + ia - b$$

由此解得:  $a = b = 0$



---

而：  $a = b = 0$  时，  $f(z) = z^2$ ，满足对于一切  $|z| = 1$  都有  $|f(z)| = 1$

因此所求的复数  $a = b = 0$

