856 胡煜琪

46. 复数集上的方程

一、基本训练题

$2\bar{z}+iz=1$

1. $z\in\mathbf{C}$，方程 $2z-i\bar{z}=1$ 的解是 $z=\frac{2+i}{3}$.

2. $x\in\mathbf{C}$，方程 $x^2-ix+i-1=0$ 的解是 $x_1=i-1$ $x_2=1$.

$\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ$

3. 已知 $z\in\mathbf{C}$，且 $z+\frac{1}{z}=2\sin10^\circ$，则 $z^9+\frac{1}{z^9}=$ 2.

$2\bar{z}=|z|-i$ $\Rightarrow 4|z|^2=|z|^2+1$

4. 适合方程 $2z-|z|-i=0$ 的复数 z 是 $\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\mathrm{Re}\,z=\frac{\sqrt{3}}{6}$ （A.）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$　(D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$

5. 若 $3+2i$ 是关于 x 的方程 $2x^2+\overset{-12}{p}x+\overset{26}{q}=0$ $(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 q 的值为 （A.）

(A) 26　(B) 13　(C) 6　(D) 5

二、典型例题

1. 在复数集 C 中解下列方程：

(1) $z\cdot\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$；　(2) $\bar{z}-\lambda z=w$（常数 $\lambda,w\in\mathbf{C}$，且 $|\lambda|\neq1$）；

(3) $|z|=1$，$z^5+z=1$.

解：(1) $|z|^2-1=3i\bar{z}+3i$ $\Rightarrow \mathrm{Im}\,3i\bar{z}+3i=0$ $\Rightarrow \mathrm{Re}\,3\bar{z}+3=0$ $\Rightarrow \mathrm{Re}\,z=-1$

设 $z=-1+bi$ $(b\in\mathbf{R})$ $b^2-3b=0$ $\Rightarrow b=0$ 或 3 $z=-1$ 或 $-1+3i$ 验证成立

(2) $\bar{z}-\lambda z=w$ ① 取共轭 $z-\bar{\lambda}\bar{z}=\bar{w}$ ② $\bar{\lambda}\cdot$①$+$② $(1-\lambda\bar{\lambda})z=w\bar{\lambda}+\bar{w}$ 由 $|\lambda|\neq1$. $\Rightarrow z=\frac{w\bar{\lambda}+\bar{w}}{1-|\lambda|^2}$

(3) ~~$z^5+z^2-z^2-z+1$.~~ ~~$z^2(z^3+1)+(z^2-z+1)=z^2-z+1$~~ ~~$(z^3+z+1)(z^2-z+1)$~~ $z^5=1-z$. $|z|=1\Rightarrow |z|^5=1$ $|1-z|=1$ $|z|=|1-z|$ $\Rightarrow z\bar{z}=(1-z)(1-\bar{z})$ $\Rightarrow z+\bar{z}=1$ $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 验证成立

2. (1) 设关于 x 的方程 $3x^2-(6m-1)x+m^2+1=0$ 的两根为 α,β，且 $|\alpha|+|\beta|=2$，求实数 m 的值；

(2) 关于 x 的方程 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ 至少有一个模等于 1 的根，求实数 a 的值.

解：(1) $\Delta\geq0$ 时. $x_1x_2=\frac{m^2+1}{3}>0$ $\Rightarrow x_1,x_2$ 同号 $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|=2$ $\left|\frac{6m-1}{3}\right|=2$. $\Rightarrow m=\frac{7}{6}$ 或 $-\frac{5}{6}$.

由 $(6m-1)^2\geq4\times3(m^2+1)$ $\Rightarrow m=\frac{7}{6}$ 或 $-\frac{5}{6}$ 均成立

(2) $\Delta<0$. $x_1x_2=\frac{m^2+1}{3}>0$ $|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}=2$ $\Rightarrow m^2=2$ $m=\pm\sqrt{2}$

由 $\Delta<0$. $m=\pm\sqrt{2}$ 均舍去. $\Rightarrow m=\frac{7}{6}$ 或 $-\frac{5}{6}$

(2) ① 若方程有实根 1° $x=1$ 是根 $a^2+2a+2=0$ $a\notin\mathbf{R}$. 2°. $x=-1$ 是根 $a^2-4a+2=0$. $a=2\pm\sqrt{2}$

② 若方程无实根 由虚根成对定理 $x_1x_2=|x_1|^2=|x_2|^2=1$ $\Rightarrow \frac{a^2-a}{2}=1$ $a=2$ 或 -1 由 $\Delta<0$ $9a^2<8(a^2-a)$ $a=-1$ 成立，$a=2$ 舍去 $\Rightarrow a=-1$ 或 $2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$

3. 已知方程 $x^2+(4+i)x+4+ai=0$ $(a\in\mathbf{R})$ 有实根 b，且 $z=a+bi$，求复数 $\bar{z}(1-ci)$ $(c>0)$ 的辐角主值的取值范围.

三、测试题

1. 已知 $x^2+ix+6=2i+5x$，若 $x\in\mathbf{R}$，则 $x=$ __2__；若 $x\in\mathbf{C}$，则 $x=$ __2 or $3-i$__.

2. 若关于 x 的方程 $x^2+zx+4+3i=0$ 有实数根，则 $|z|$ 的最小值为 __$3\sqrt{2}$__.

3. 方程 $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^3=1$ 的解为 __$z_1=0$ $z_2=\sqrt{3}i$__ $z_3=-\sqrt{3}i$

4. 设 $z\in\mathbf{C}$，则方程 $z^2+|z|=0$ 的根有　　$|z|=0$ or 1　　(C)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

5. 关于 x 的方程 $x^2-(2i-1)x+3m-i=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 有实根，则 m 的取值范围是　(D)

(A) $m\geqslant-\dfrac{1}{4}$　　(B) $m=-\dfrac{1}{4}$　　(C) $m\geqslant\dfrac{1}{12}$　　(D) $m=\dfrac{1}{12}$

6. 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，$z_1+z_2=\sqrt{2}$，$z_1z_2=1$，求 $z_1^{21}-z_2^{21}$ 的值.

解. z_1, z_2 是方程 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ 的两根

$\Rightarrow z_1, z_2$ 分别为 $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

$\Rightarrow z_1^4=z_2^4=-1$

原式 $=-(z_1-z_2)$

$=\pm\sqrt{2}i$

7. 设关于 x 的方程 $x^2+4x+m=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 的两个复数根为 α,β，且 $|\alpha-\beta|=2$，求 m 的值.

解: $\Delta=16-4m$.

1° $m\leq4$. 则方程两根为实根

$-2+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$　5　$-2-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{\Delta}=2$

$\Rightarrow 16-4m=4$

$m=3$.

2°. $m>4$. 方程两根为虚根

$-2+\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$　5　$-2-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{-\Delta}=2$

$\Rightarrow -\Delta=4$

$m=5$

故 $m=3$ 或 5.

8. 已知 $z\in\mathbf{C}$，$a\in\mathbf{R}$，若关于 z 的方程 $z+a\cdot|z+1|+i=0$ 有解，试确定 a 的取值范围.

解. 设 $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbf{R})$.

$x+yi+a\cdot|z+1|+i=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x+a\cdot|z+1|=0 \\ y+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow y=-1$.

$a=\frac{-x}{|z+1|}$

$=\frac{-x}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

当 $x>0$ 时. $a=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$=\frac{-1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}}$

$\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\in(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

$(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}\in(1,+\infty)$

$a\in(-1,0)$

$x=0$ 时 $a=0$

$x<0$ 时. $a=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}}$

$\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\in(-\infty,\frac{1}{\sqrt{2}})$

$(\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}\in[\frac{1}{2},+\infty)$

$a\in(0,\sqrt{2}]$

综上. $a\in(-1,\sqrt{2}]$

四、说明

1. 本节课主要内容有以下三个方面：(1) 复数集上方程的求解；(2) 根据方程解的情况讨论参数的取值范围；(3) 与复数集上方程有关的计算或证明.

2. 求解复数集上的方程一般有以下四种方法：(1) 设 $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbf{R})$，从而转化为关于实数 x,y 的方程；(2) 若是实系数一元二次方程，则可直接利用求根公式；(3) 考虑复数的几何意义，结合图形去分析；(4) 以模为突破口，先着眼于 $|z|$，再求 z.

3. 对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$：

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两相异实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两相等实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}$；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有两互为共轭的虚根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2a}$.