43. 复数的代数形式

一、基本训练题

1. 若 n 为奇数，则 $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{4n}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{4n}=$________.

2. 设 $f(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$，则 $f(1-\mathrm{i})=$________.

3. $8+6\mathrm{i}$ 的平方根是________.

4. 设 $f(z)=1-\bar{z}$，$z_1=2+3\mathrm{i}$，$z_2=5-\mathrm{i}$，则 $f(\overline{z_1-z_2})$ 等于　　(　　)

(A) $-4-4\mathrm{i}$　　(B) $4+4\mathrm{i}$　　(C) $4-4\mathrm{i}$　　(D) $-4+4\mathrm{i}$

5. $\frac{(2+2\mathrm{i})^4}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^5}$ 的值为　　(　　)

(A) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(B) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(C) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　(D) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

二、典型例题

1. 已知复数 z 满足：$|z-4|=|z-4\mathrm{i}|$ 且 $z+\frac{14-z}{z-1}\in\mathbf{R}$，求 z.

2. 已知 $z^2=8+6i$，求 $z^3-16z-\frac{100}{z}$ 的值.

3. (1) 已知 $z=-\frac{2}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$，求 $1+z+z^2+\cdots+z^{2000}$ 的值；

(2) 求 $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^{10}$ 的展开式中的所有实数项的和；

(3) 设 $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，试求满足 $z_1{}^m=z_2{}^n$ 的最小正整数 m,n.

三、测试题

1. 已知 $z=(1-\mathrm{i})^3$，则 $z+\bar{z}=$______；$z\bar{z}=$______.

2. 计算：$\dfrac{1}{(3-2\mathrm{i})^2}-\dfrac{1}{(3+2\mathrm{i})^2}=$______.

3. 计算：$\mathrm{i}^{2001}+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i})^8-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\right)^{50}+(3-4\mathrm{i})^2(3\mathrm{i}+4)^2$______.

4. $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^6}-\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 等于 (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) i

5. 若 $(m+\mathrm{i})^3\in\mathbf{R}$，则实数 m 的值为 (　　)

(A) $\pm 2\sqrt{3}$　　(B) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\pm\sqrt{3}$　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 复数 z 满足 $|z|=5$，且 $(3+4\mathrm{i})z$ 是纯虚数，求 $\bar{z}$.

7. 已知 $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)\mathrm{i}$，$z_2=-3\sqrt{3}\,b+(b+2)\mathrm{i}\,(a,b\in\mathbf{R}^+)$，且 $3z_1{}^2+z_2{}^2=0$，求 z_1 和 z_2.

8. (1) 已知 $z=1+\mathrm{i}$，$\dfrac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-\mathrm{i}$，求实数 a,b 的值；

(2) 已知非零复数 a,b 满足 $a^2+ab+b^2=0$，求 $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{2000}+\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{2000}$ 的值.

四、说明

1. 本节课的主要内容有以下三个方面：(1) 复数的加、减、乘、除及乘方和开方运算；(2) i 和 ω 的性质，并会利用这些性质求解某些计算题；(3) 复数域上的因式分解.

2. 求解计算题，应养成这样一个良好的习惯：先认真审题，考虑如何利用 i，ω 的性质；或适当变形，创造条件，从而转化为关于 i，ω 的计算问题. 充分利用 i，ω 的性质，体现了对复数整体性的把握和应用，往往会给解题带来方便.

3. 熟记下列性质是很有用的：

(1) $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^4=1$；(2) $(1\pm\mathrm{i})^2=\pm 2\mathrm{i}$；(3) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$；(4) $\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^{n+1}+\mathrm{i}^{n+2}+\mathrm{i}^{n+3}=0$；(5) $\omega^3=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3=1$；(6) $\omega^2=\bar{\omega}$；(7) $\bar{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$；(8) $\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0\,(n\in\mathbf{N})$.