

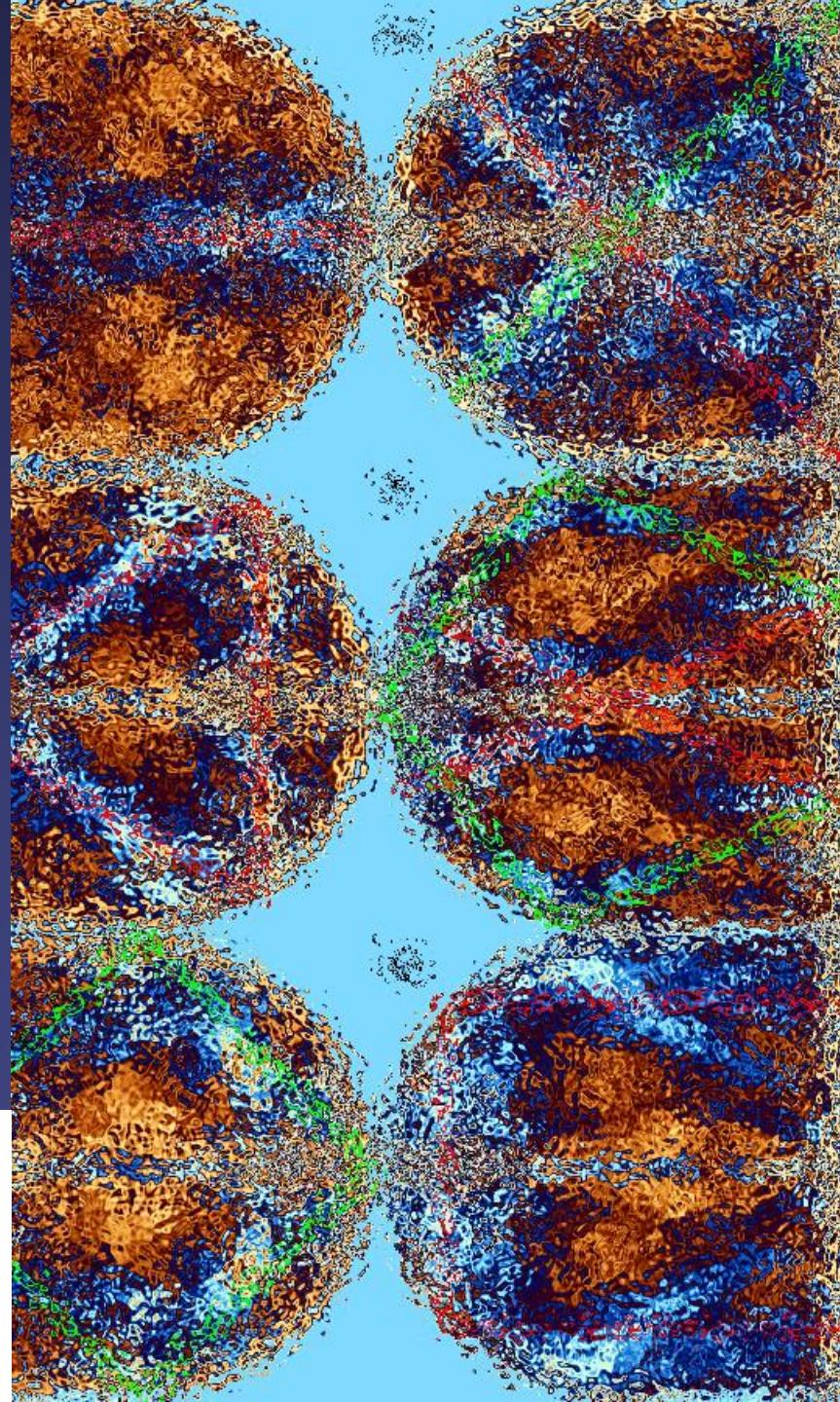
# Introduzione al Quantum Chaos

**Elaborato per la prova d'esame di Sistemi Complessi**

Calandriello Gennaro

17/10/2022

GitHub repository: <https://github.com/GennaroCalandriello>



## Cos'è il Quantum Chaos?

- Branca della Fisica che si occupa di capire in che modo strutture caotiche di sistemi dinamici possano emergere ed essere descritte dalla Quantum Mechanics

## Tipi di analisi affrontabili

- Equazione di Schrödinger lineare, ma il chaos emerge dalla non linearità, oppure da BC particolari.
- Metodi semiclassici, Periodic Orbit Theory, connette traiettorie classiche con la QM, quantizzazione di WKB/EKB
- Distribuzione dello spacing degli autovalori (RMT)
- Emergenza di Quantum Scars
- Repulsione dei livelli spettrali
- Quantum localization

# 1. Descrizione semiclassica di sistemi non-integrabili

## 1.1 Funzione di Green

Partiamo da:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = \hat{H}\psi(t) \quad \text{con } \psi(t=0) = \psi_0$$

Per calcolare osservabili fisiche di un sistema dinamico occorre un operatore  $\hat{U}(t)$ , t.c. :

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi_0 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\psi_0 \quad \text{con } H \text{ t.i.}$$

Fourier trasformando:

$$\hat{G}(E) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} e^{\frac{i}{\hbar}(E+i\epsilon)t} dt = \frac{1}{(E + i\epsilon - \hat{H})} = \text{retarded Green f.} = \sum_n \frac{1}{(E + i\epsilon - E_n)} |n\rangle\langle n|$$

Funzione d'onda nello spazio di Fourier:

$$\tilde{\psi}(E) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty \psi(t) e^{\frac{i}{\hbar}(E+i\epsilon)t} dt = \hat{G}(E)\psi_0$$

Dalla funzione di Green calcolo la *densità degli stati*:

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n) = -\frac{1}{\pi} \text{Tr}[\Im\{\hat{G}(E)\}]$$

Dimostrabile facilmente dall'identità:

$$\Im\left[\frac{1}{x \pm i\epsilon}\right] = \Im\left[\frac{x \mp i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}\right] = \mp \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mp \pi\delta(x)$$

La funzione di Green consente di calcolare valori di aspettazione di osservabili fisiche rispetto ad una base di autoenergie:

$$\text{Tr} \left[ \left( -\frac{1}{\pi} \Im\{\hat{G}(E)\} \right) \hat{A} \right] = \sum_n \langle n | \left( \sum_m \delta(E - E_m) |m\rangle \langle m| \right) \hat{A} |n\rangle = \sum_n \delta(E - E_n) \langle n | \hat{A} |n\rangle$$

## 1.2 Path Integral

L'approccio più sensato all'analisi di sistemi non integrabili (oltre la quantizzazione WKB e EKB) è partire dall'espressione generale del Path Integral:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int D[\mathbf{q}] \exp \left\{ \int_0^t \frac{i}{\hbar} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t')) dt' \right\} = \int D[\mathbf{q}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]}$$

Tale espressione denota un integrale funzionale su tutti i possibili cammini *classici e non classici*, con  $\mathbf{q}: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}$ .

L'uguaglianza sopra deriva dalla rappresentazione spaziale dell'operatore evoluzione temporale:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = U(t)\psi_0(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi_0(\mathbf{r}'), \quad \text{con } K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \langle \mathbf{r} | \hat{U}(t) | \mathbf{r}' \rangle$$

Da ciò i contributi delle orbite classiche si ottengono da un'analisi di **punto sella**.

La densità degli stati per un sistema non integrabile o quasi integrabile è riscrivibile come:

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \rho_{fl}(E)$$

## 1.3 Metodo delle fasi stazionarie

Nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  (espressione semiclassica) il Path Integral è dominato dai cammini classici dove  $\delta S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ .

Analizziamo tale metodo partendo dal caso 1D. Data una funzione  $f$  tale per cui  $\int |f| dx < \infty$ . In analogia alla forma del P.I.

ci chiediamo quali siano i massimi contributi di un integrale della forma:

$$\int_a^b g(x) e^{\frac{i}{\hbar} f(x)} dx$$

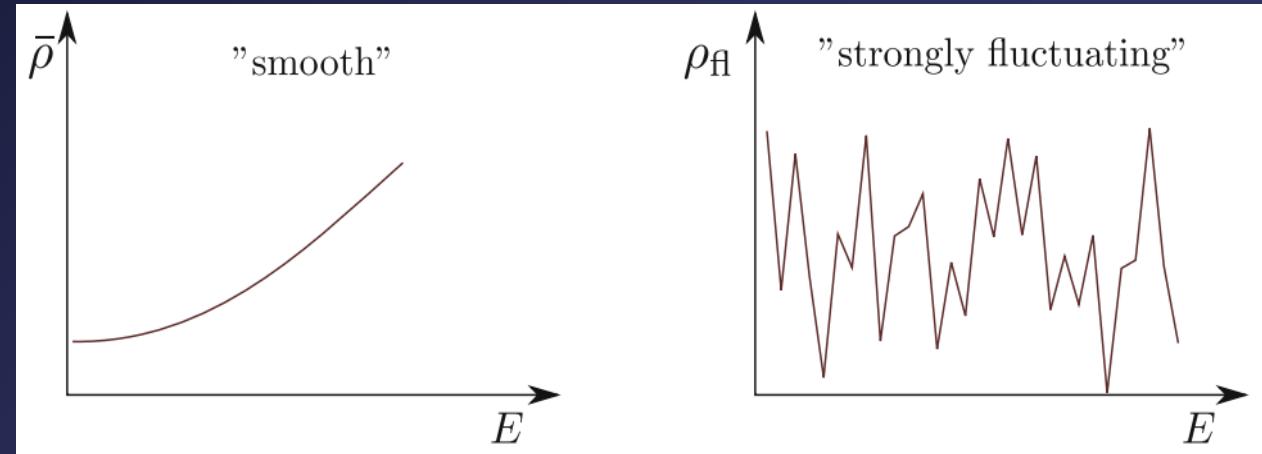
Troviamo i punti  $x_\nu$  per cui la  $f$  è estremale:

$$f(x - x_\nu) \simeq f(x_\nu) + f'(x_\nu)(x - x_\nu) + f''(x_\nu) \frac{(x - x_\nu)^2}{2} \quad f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_\nu \in (a, b)$$

L'integrale è Gaussiano, complesso, il risultato è immediato:

$$\int_a^b g(x) e^{\frac{i}{\hbar} f(x)} dx \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_\nu g(x_\nu) e^{\frac{i}{\hbar} f(x_\nu)} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|f''(x_\nu)|}} e^{i\frac{\pi}{4}\alpha_\nu} + O(\hbar)$$

$$\alpha_\nu = \text{sgn}(f'') = \begin{cases} 1 & : f''(x_\nu) > 0 \\ -1 & : f''(x_\nu) < 0 \end{cases}$$



Generalizzabile in  $n$  dimensioni come:

$$\int d^n x \, g(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{\hbar} f(x)} \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_{\nu} g(x_{\nu}) e^{\frac{i}{\hbar} f(x_{\nu})} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\left| \det \left( \frac{\partial^2 f(x_{\nu})}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|_{n \times n}}} e^{i\frac{\pi}{4}\alpha_{\nu}} + O(\hbar) \quad \alpha_{\nu} = \sum_{j=1}^n \text{sgn}(\lambda_j^{\nu})$$

Applichiamo questo risultato del tutto generale alla funzione di Green per poi ottenere il risultato noto della Formula di Gutzwiller.

## 1.4 Funzione di Green semiclassica

Tenendo presente i risultati appena ottenuti applichiamo il metodo delle fasi stazionarie:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} f(\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_N) = \mathbf{0} \rightarrow \frac{\delta}{\delta \mathbf{q}(\tilde{t})} \int_0^t \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = 0$$

Vale inoltre:

$$\frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{\partial p'}{\partial q} = -\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'}$$

Otteniamo:

$$K_{SC}(q, q', t) = \sum_{\nu} \left( \frac{1}{2\pi\hbar i} \right)^{\frac{d}{2}} \left| \det \left( \frac{\partial p'}{\partial q} \right) \right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\nu}(q, q', t) - \frac{i\pi}{2} \mu_{\nu}}$$

In generale:

$$G(q, q', E) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} Et} K(q, q', t)$$

Valutiamo la funzione di Green applicando di nuovo il metodo delle fasi stazionarie. Dall'integrale sopra, in base all'espressione di  $K$  avremo:  $\partial_t S(q, q', t) + E = 0$  le cui soluzioni sono esattamente le lunghezze delle traiettorie da  $q'$  a  $q$  ad energia fissata  $E$ . Banalmente  $\partial_t^2 S(q, q', t) = \partial_t E|_{q', q}$ , per il singolo path:

$$G_{\nu}(q, q', E) = \frac{1}{i\hbar(2\pi i\hbar)^{\frac{d-1}{2}}} \left| \left( \det \frac{\partial p'}{\partial q} \right)_{q, q'} \left( \det \frac{\partial t}{\partial E} \right)_{q', q} \right|^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\nu} - i\frac{\pi}{2} \mu_{\nu}}$$

Che va sotto il nome di **Propagatore di Van-Vleck**. La funzione di Green totale sarà:

$$G_{SC}(q, q', E) = G_0 + \sum_{\nu} G_{\nu}$$

Con  $G_0$  contributo delle traiettorie brevi.

## 1.5 Gutzwiller Trace Formula

E' la traccia della funzione di Green, contiene contributi da traiettorie classiche lunghe, labellate dall'indice  $\nu$  nelle espressioni precedenti, e le traiettorie d lunghezza che approcciano a 0,  $q \rightarrow q'$ .

$$Tr(G_{SC}) = Tr(G_0) + \sum_{\nu} \int dq \ G_{\nu}(q, q, E)$$

Il procedimento prevede la suddivisione delle orbite in  $q_{||}$  e  $q_{\perp}$  ( $d^d \mathbf{q} = dq_{||} d^{n-1} \mathbf{q}_{\perp}$ ). L'invariante topologico  $\mu$  non dipende da  $q_{||}$ .

$$Tr(G_{\nu}) = \frac{1}{i\hbar(2\pi i\hbar)^{\frac{d-1}{2}}} \oint_{\nu} \frac{dq_{||}}{\dot{q}} \int d\mathbf{q}_{\perp} |\det D_{\perp}|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S_{\nu} - i\frac{\pi}{2}\mu_{\nu}} = \frac{1}{\hbar i} \sum_{PPO} T_{PPO} \sum_n \frac{1}{\sqrt{|\det(1 - M_{PPO}^n)|}} e^{n(\frac{i}{\hbar}S_{PPO} - \frac{i}{2}\pi\mu_{PPO})}$$

dove nell'ultima equazione abbiamo riutilizzato il metodo delle fasi stazionarie che ha condotto a:

$$\partial_q S(q, q, E) = \left( \partial'_q S(q', q, E) + \partial_q S(q', q', E) \right) \Big|_{q'=q} = p' - p = 0$$

Abbiamo assunto che le PPO siano isolate e non formino una famiglia continua di curve

A questo punto possiamo calcolare entrambe le componenti della densità spettrale:

$$1. \quad \bar{\rho}(E) = \sum_j \delta(E - E_j)$$

$$2. \quad \rho_{fl}(E) \approx \frac{1}{\hbar\pi} \sum_{PPO} T_{PPO} \sum_n \frac{1}{\sqrt{|\det(1 - M_{PPO}^n)|}} \cos \left[ n \left( \frac{1}{\hbar}S_{PPO} - \frac{1}{2}\pi\mu_{PPO} \right) \right]$$

In 1D non esiste una matrice di stabilità, non c'è chaos! In 2D distinguiamo 3 casi (autovalori di  $M$ :  $\Lambda, \Lambda^{-1}$ ):

1. caso ellittico:  $\Lambda = e^{\pm i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
2. caso iperbolico:  $\Lambda = e^{\pm \lambda}, \quad \lambda > 0$
3. caso iperbolico inverso:  $\Lambda = -e^{\pm \lambda}, \quad \lambda > 0$

Inoltre:  $S_{PO} = n \cdot S_{PPO}, \quad M_{PO} = M_{PPO}^n, \quad \mu_{PO} = n \cdot \mu_{PPO}$

Per un sistema totalmente caotico abbiamo:

$$\{M_{PPO}^n\} = \{e^{\pm n\lambda_{PPO}}, (-1)^n e^{\pm \lambda_{PPO}}\}$$

$$\sqrt{|\det(M_{PPO}^n - 1)|} = \sqrt{(e^{n\lambda_{PPO}} - 1)(e^{-n\lambda_{PPO}} - 1)} = 2 \left| \sinh\left(\frac{n\lambda_{PPO}}{2}\right) \right|$$

Il massimo contributo a  $\rho_{fl}$  è atteso dalle orbite con l'esponente di Lyapunov più piccolo

Per un sistema regolare invece (caso 1):

$$\sqrt{|\det(M_{PPO}^n - 1)|} = 2 \left| \sin\left(\frac{n\lambda_{PPO}}{2}\right) \right|$$

Ci chiediamo: come applicare la Trace Formula ad un certo sistema fisico? Problema! Il numero di orbite periodiche aumenta esponenzialmente con il periodo  $T_{PPO}$  ad energia fissata, in un sistema caotico. La somma dunque non è necessariamente convergente:

$$\sum_{PO} \left| \frac{T_{PPO}}{\sqrt{|\det(M_{PO} - 1)|}} \right| \rightarrow \infty$$

cosa facciamo?

- consideriamo solo orbite isolate
- curiamo il problema con una convoluzione tramite una funzione smooth:

$$\tilde{\rho}(E) = \rho(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta E}} \int_{\mathbb{R}} \rho(E') \exp\left[-\frac{(E - E')^2}{\Delta E^2}\right] dE'$$

## 2. Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger

### 2.1 Schrödinger time independent

Discretizzazione 2D:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{\Delta x^2}$  stessa cosa per  $y$ . L'espressione matriciale è:

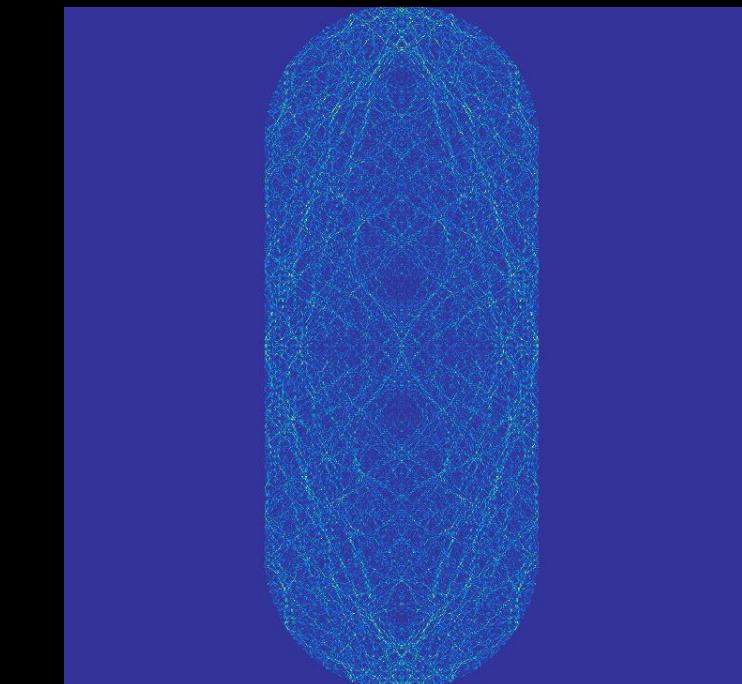
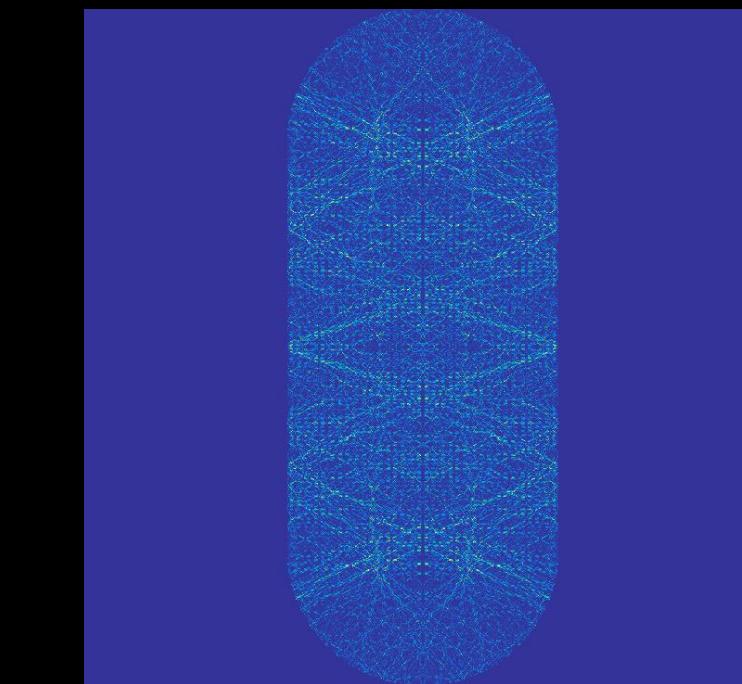
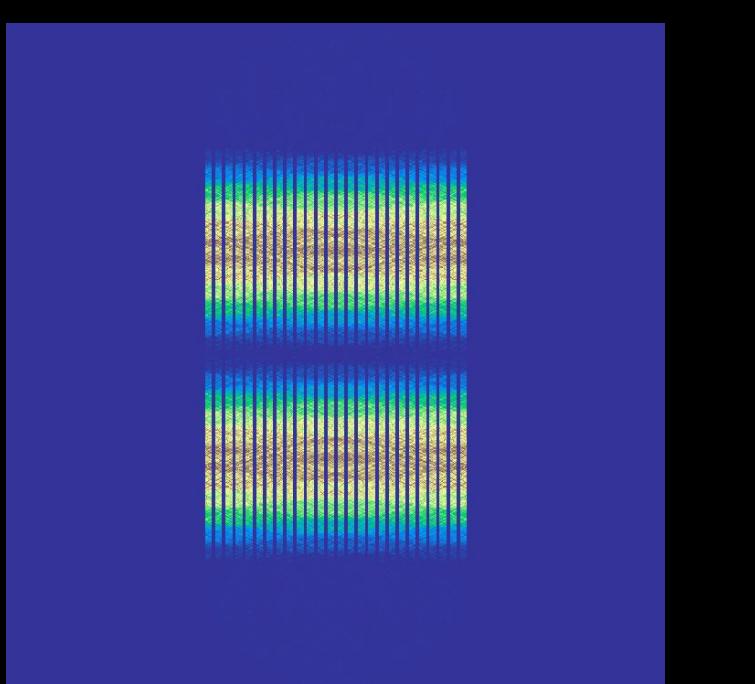
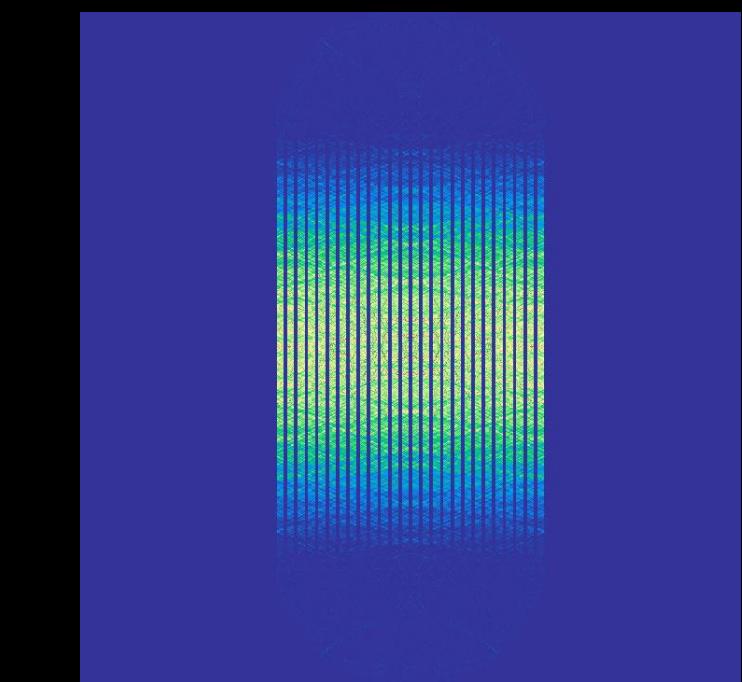
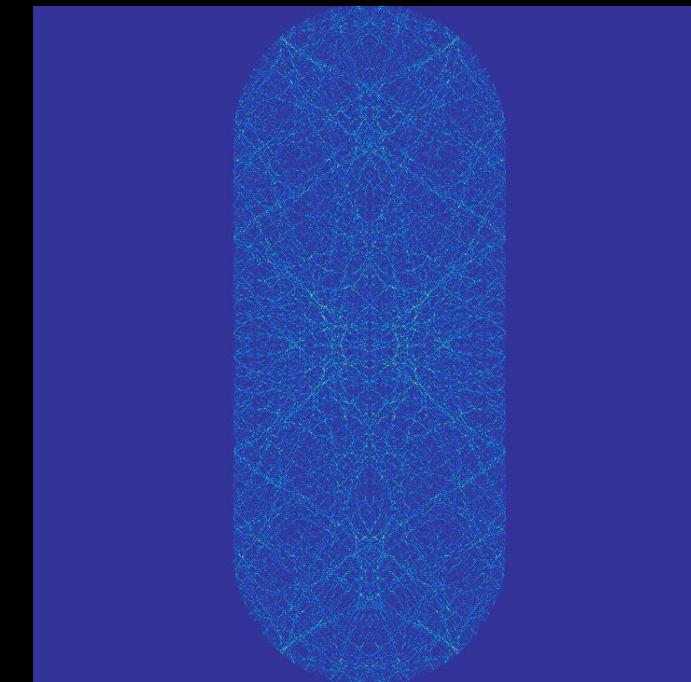
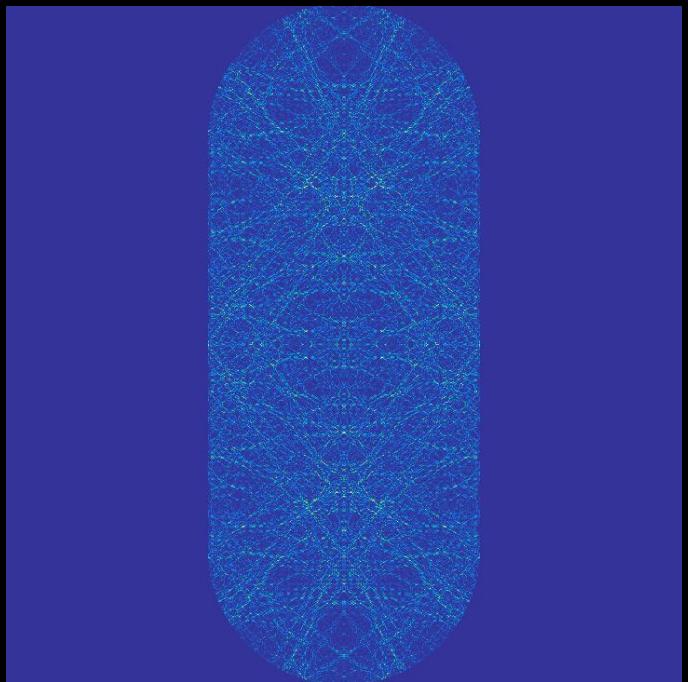
$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \cdots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \text{ vettorizzabile come } [\psi_{11} \dots \psi_{1N} \ \psi_{21} \dots \psi_{2N} \dots \psi_{NN}]^T \text{ dimensione } N^2$$

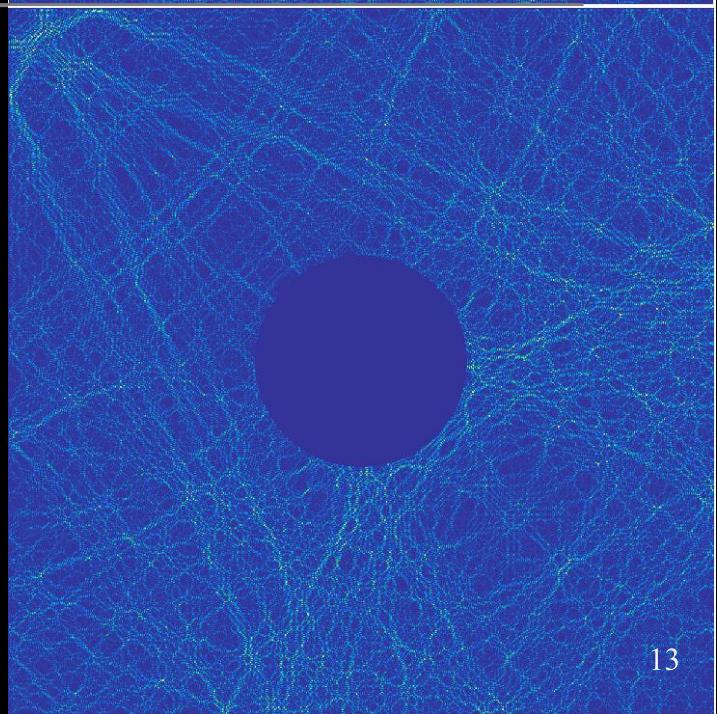
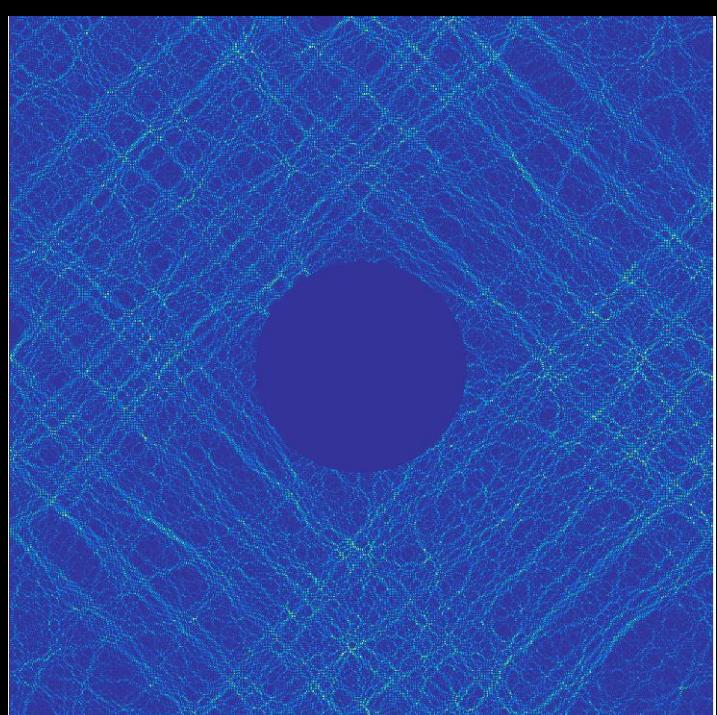
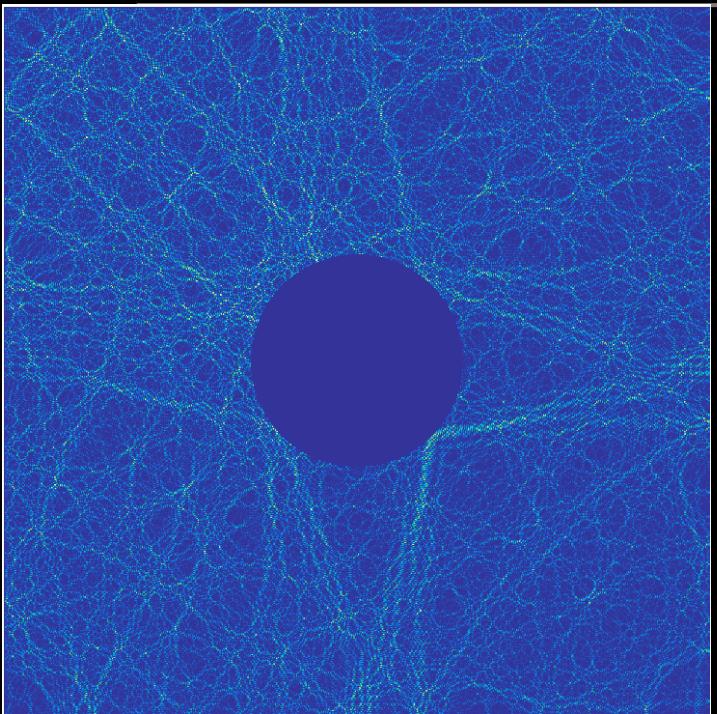
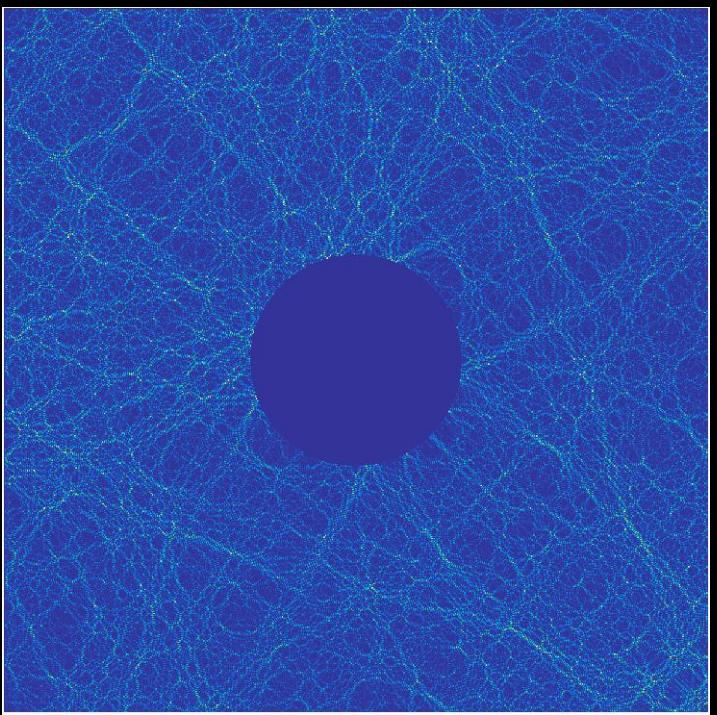
Laplaciano discreto:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow L = D_{xx} \otimes I_y + I_x \otimes D_{yy}$$

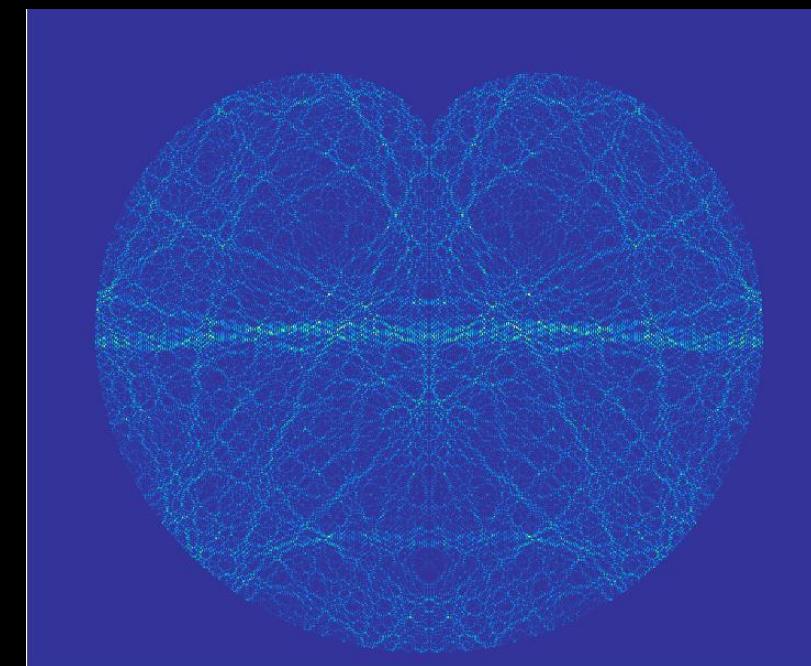
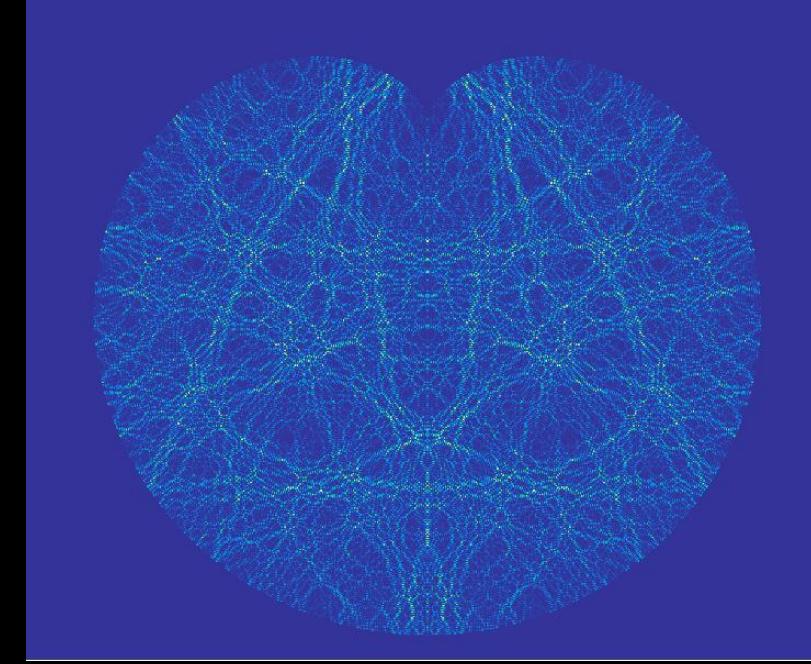
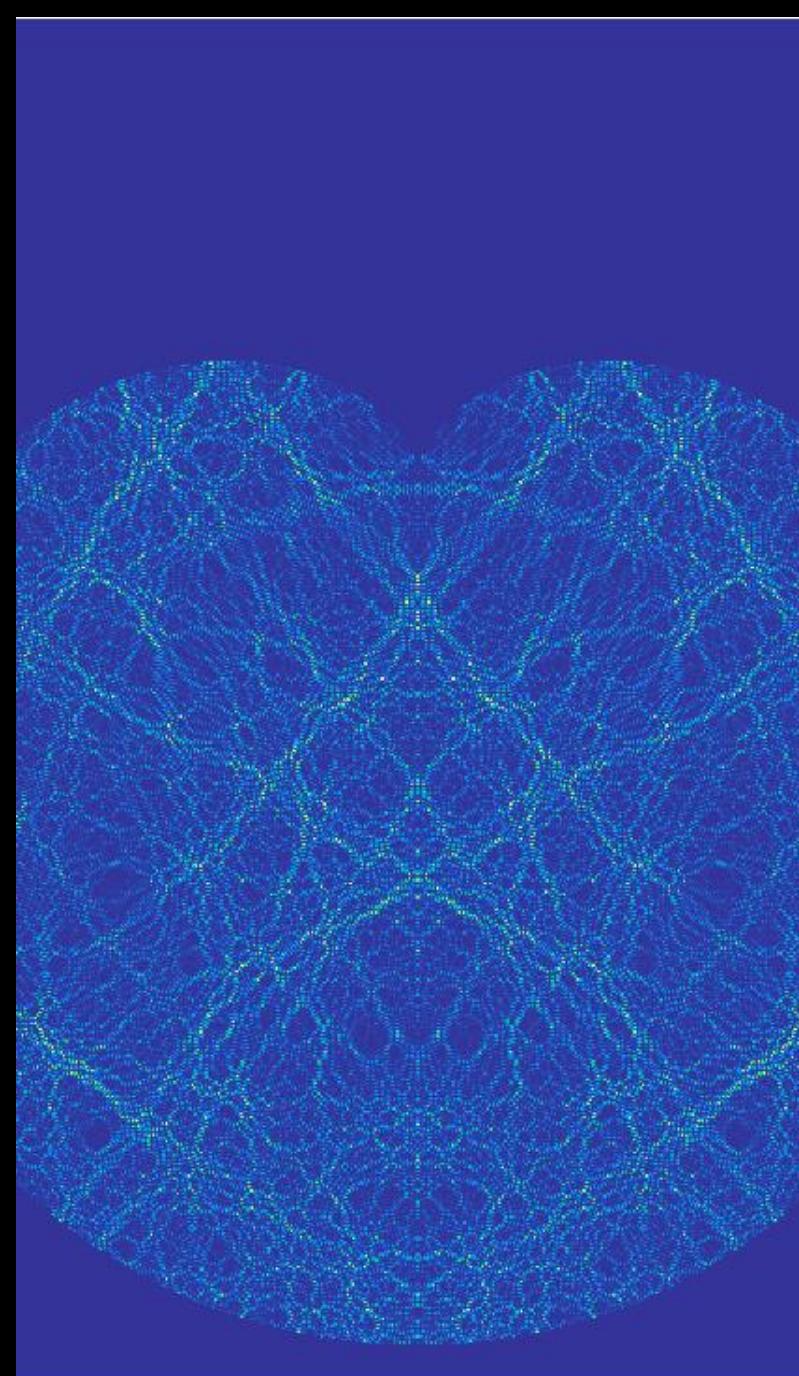
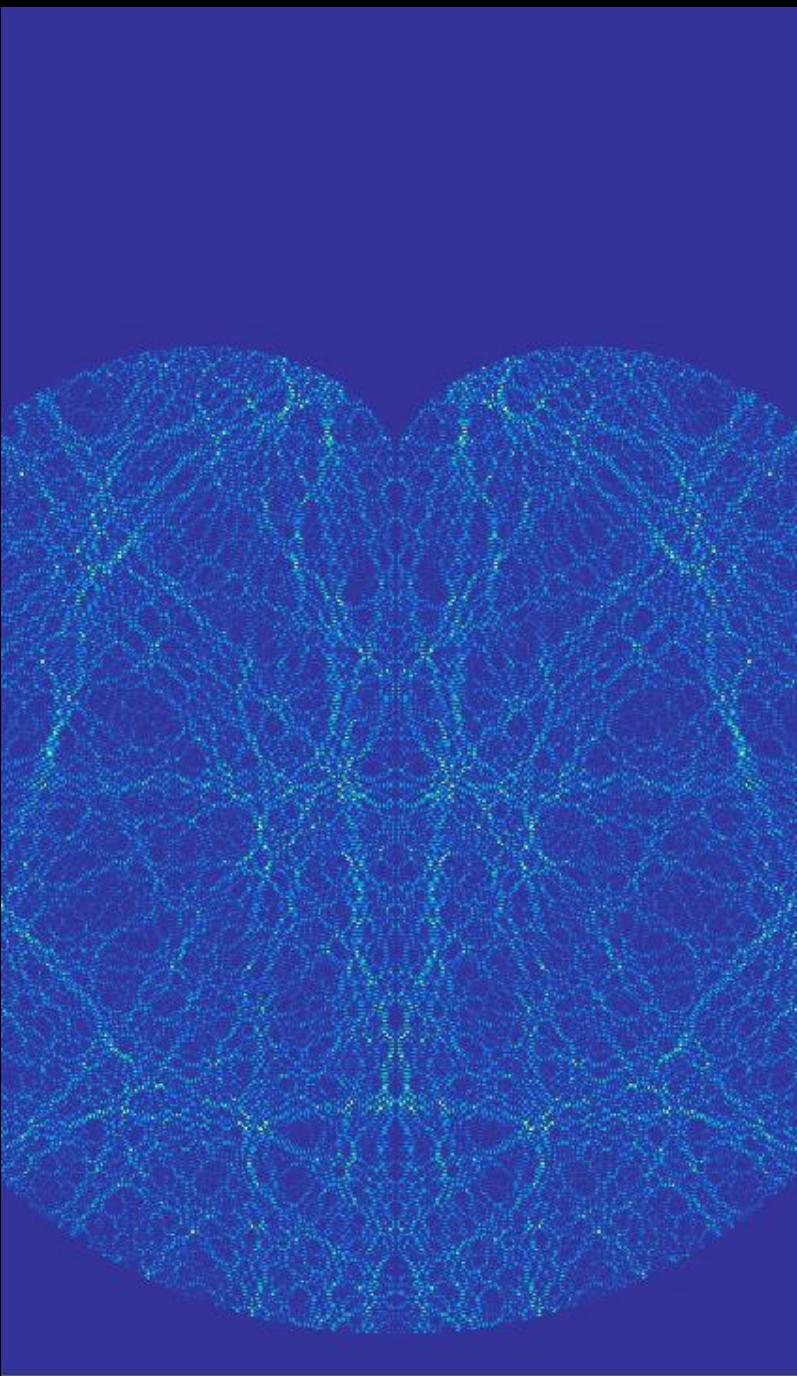
$$I_x \otimes D_{yy} = \begin{bmatrix} D & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D \end{bmatrix}_{N^2 \times N^2} \quad \text{per il potenziale: } VI = \begin{bmatrix} V_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_{NN} \end{bmatrix}_{N^2 \times N^2} ; \text{l'equazione time independent diventa:}$$

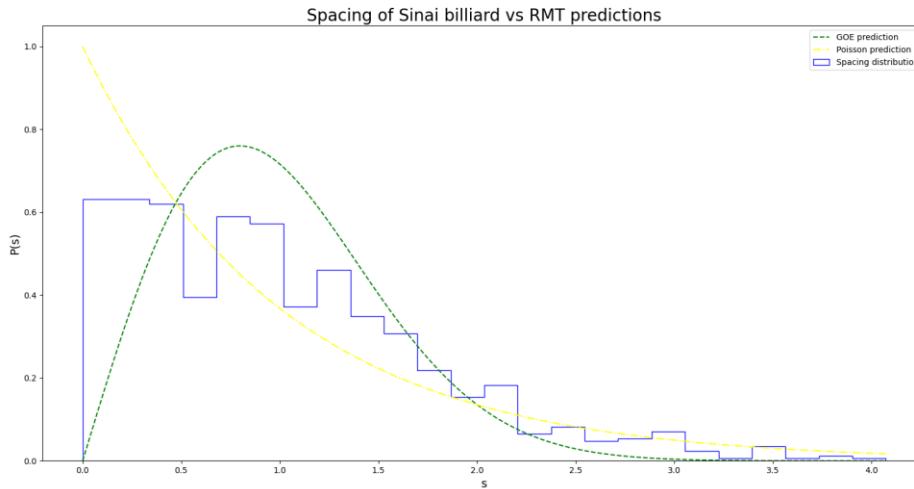
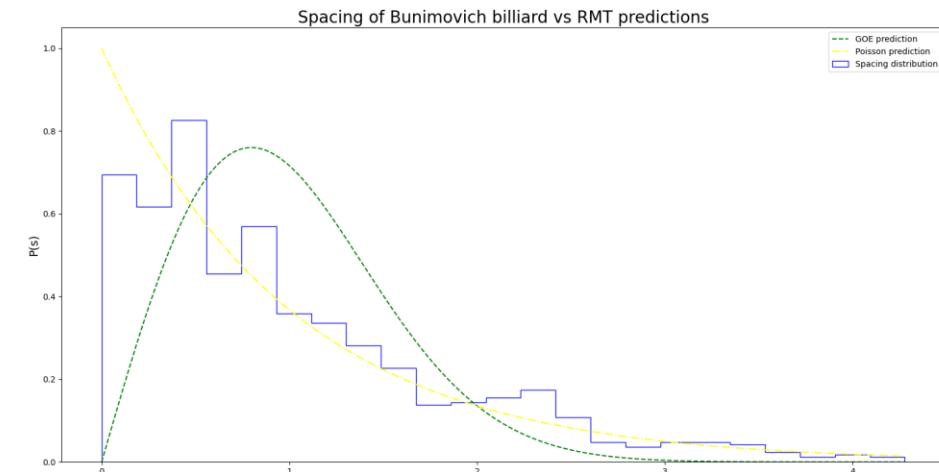
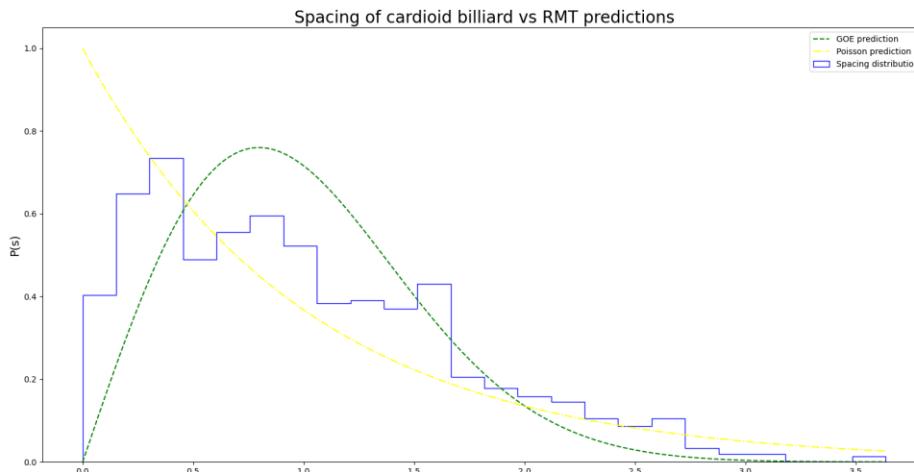
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} (D \oplus D) + VI \right] \psi = E \psi$$



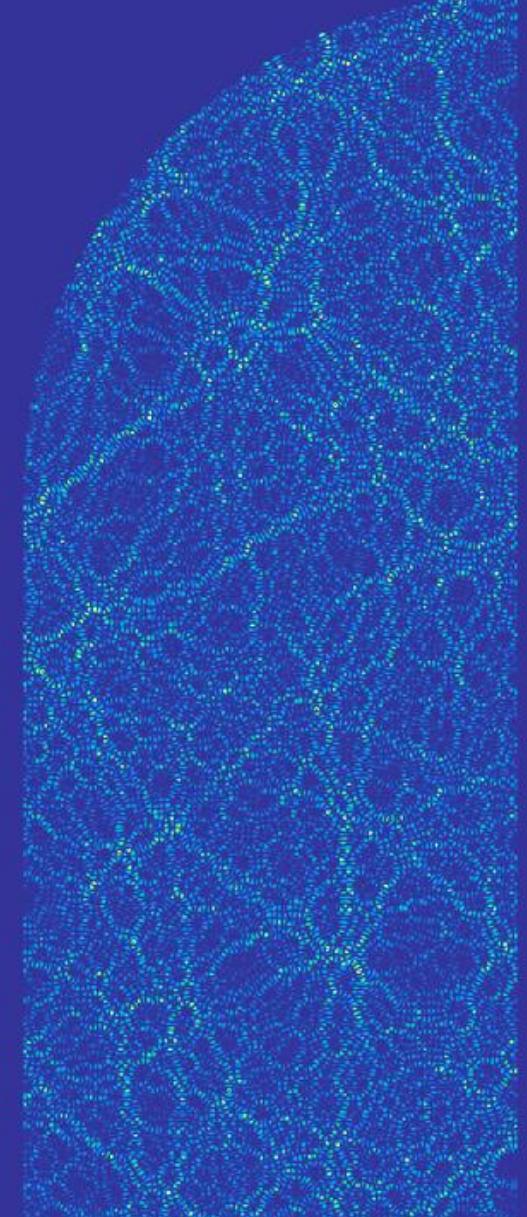
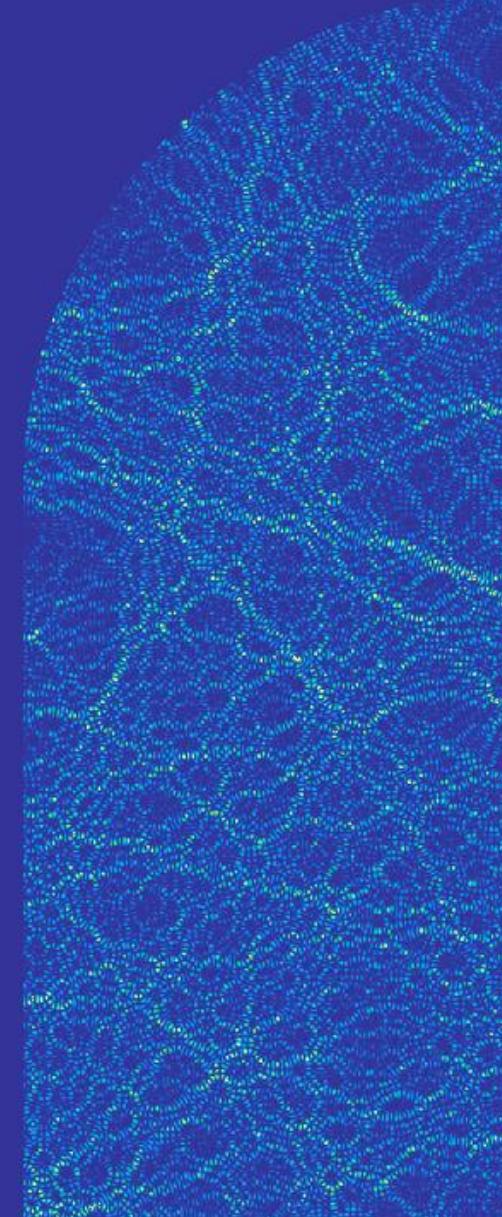
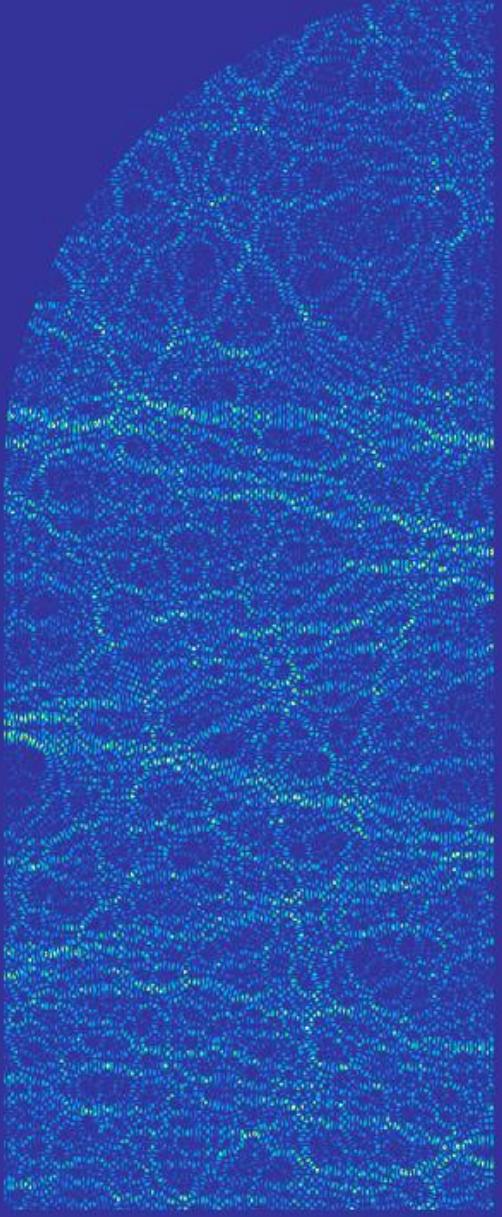
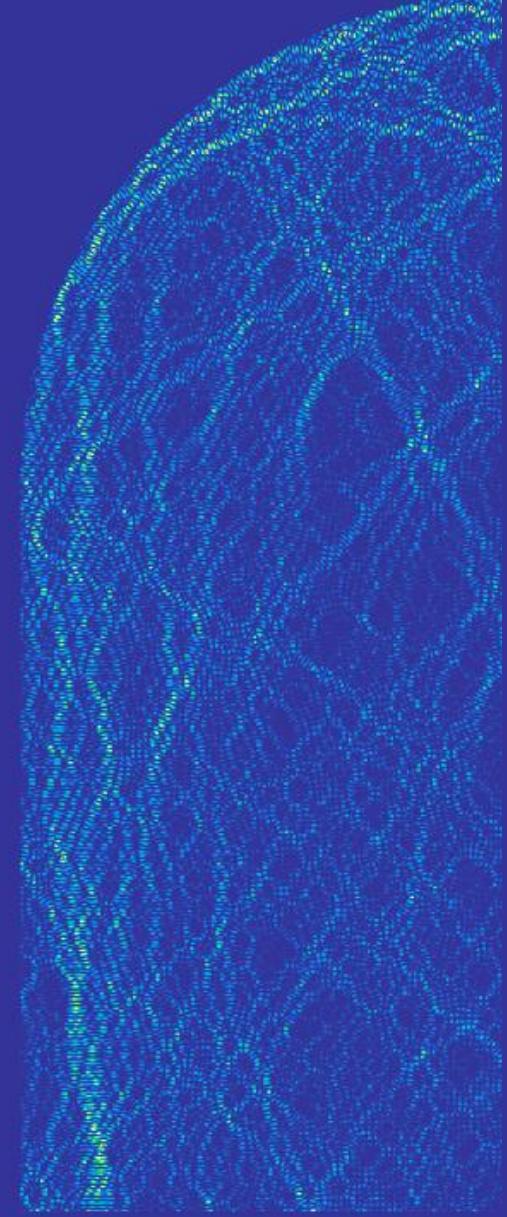


Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger

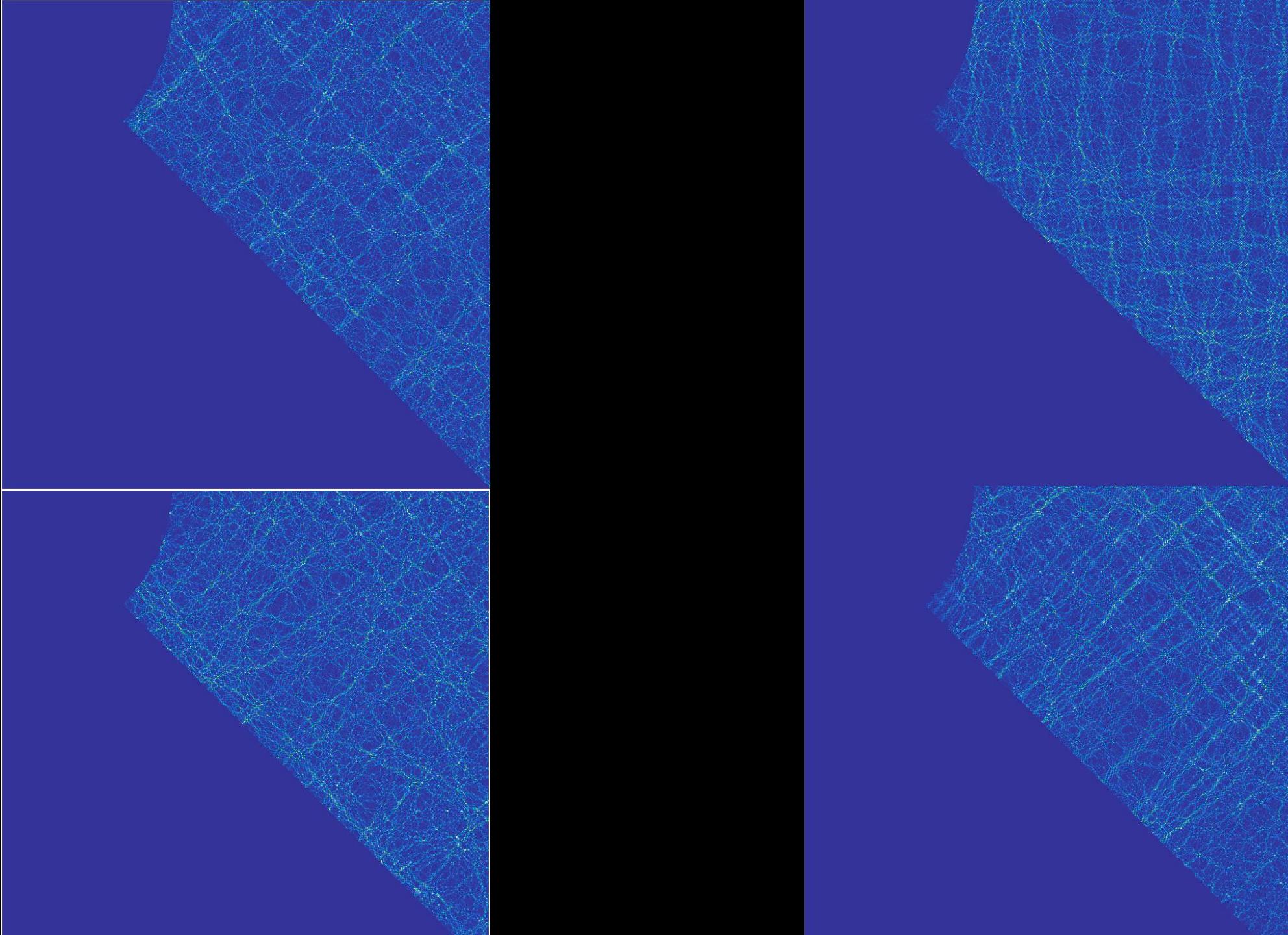


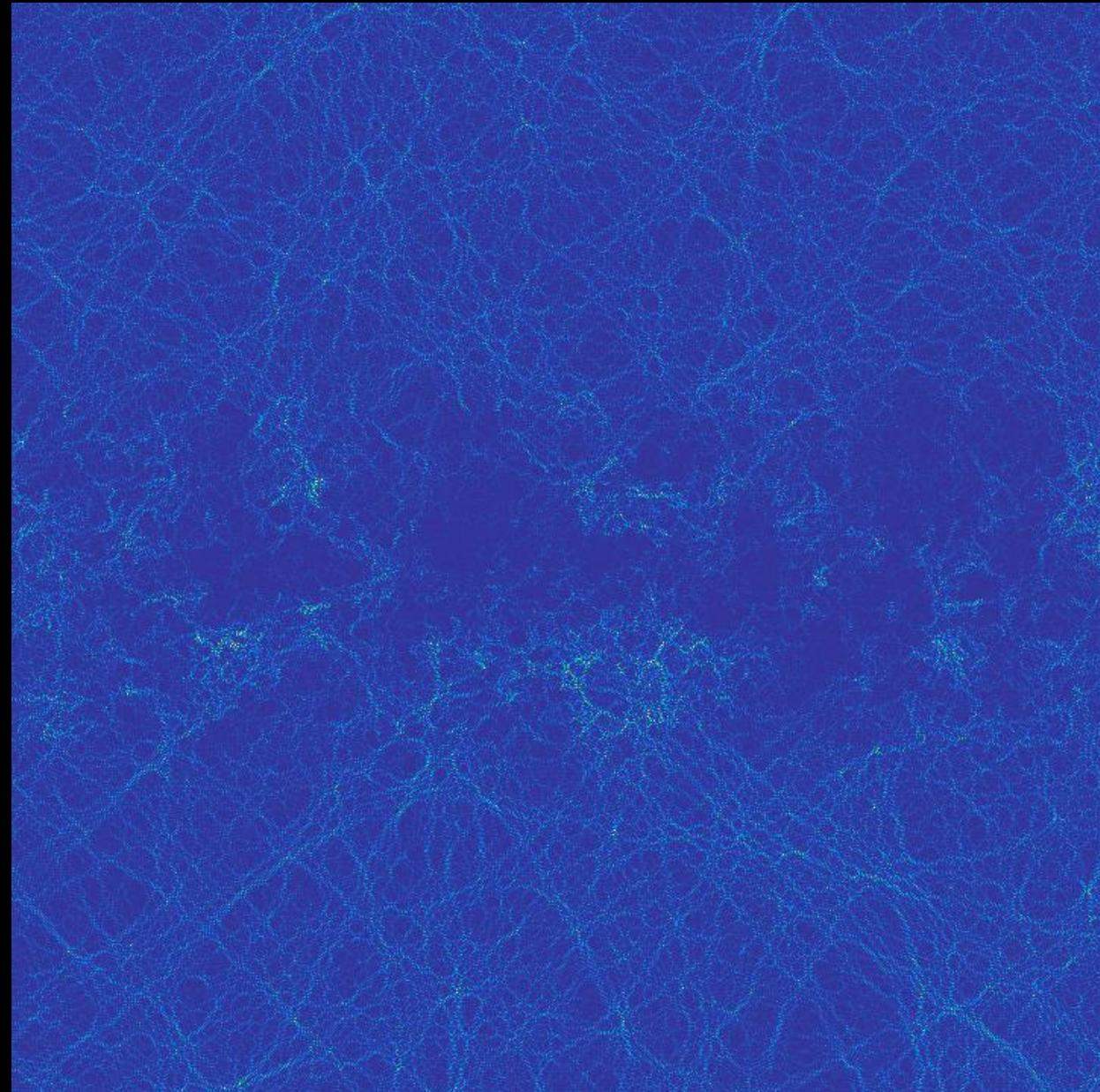
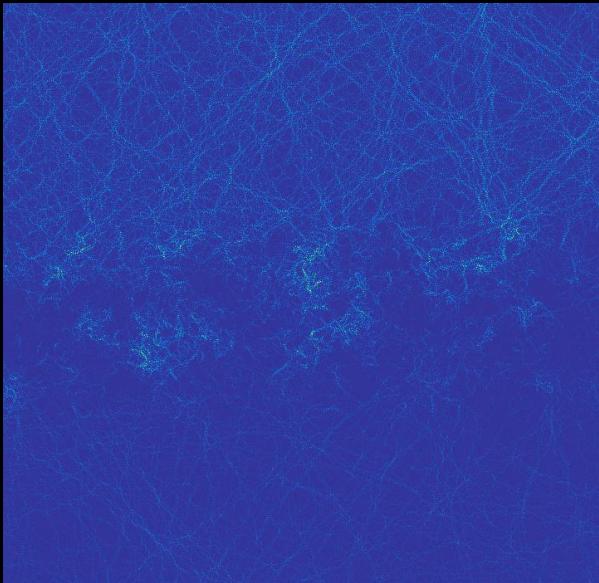
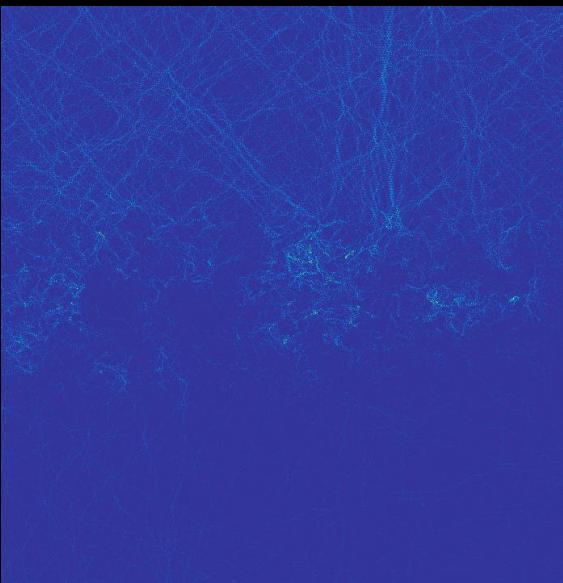
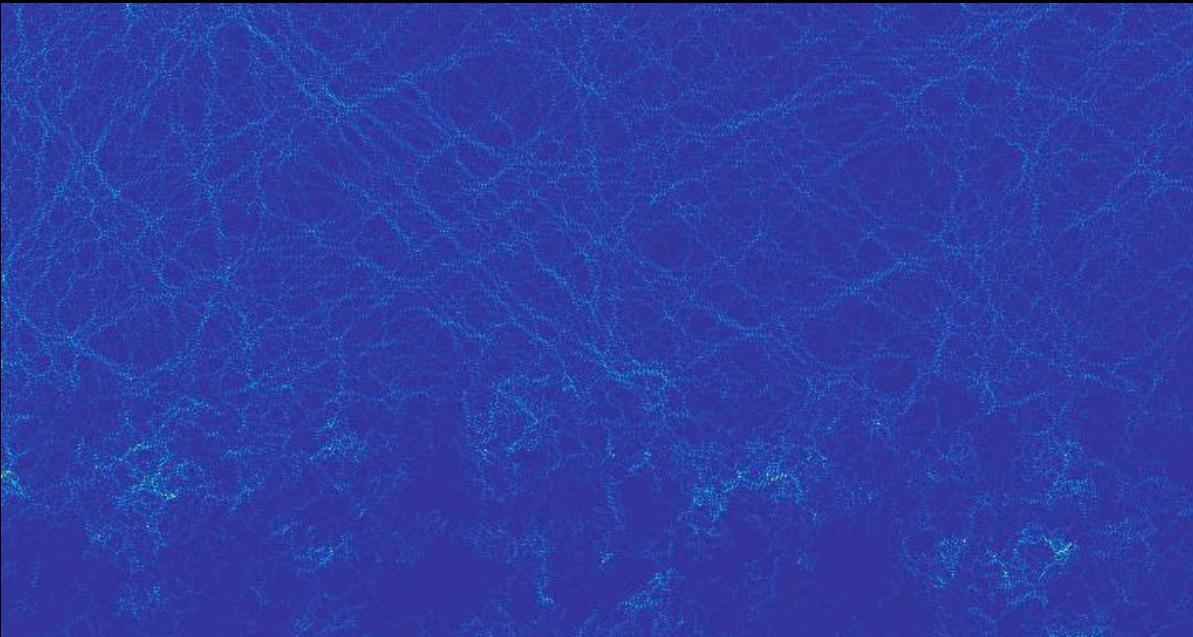


	$\langle r \rangle$	$\langle s^{CN} \rangle$	$\langle s^{FN} \rangle$
Bunimovich	0.386	0.511	1.49
Sinai	0.414	0.541	1.46
Cardioide	0.446	0.581	1.42

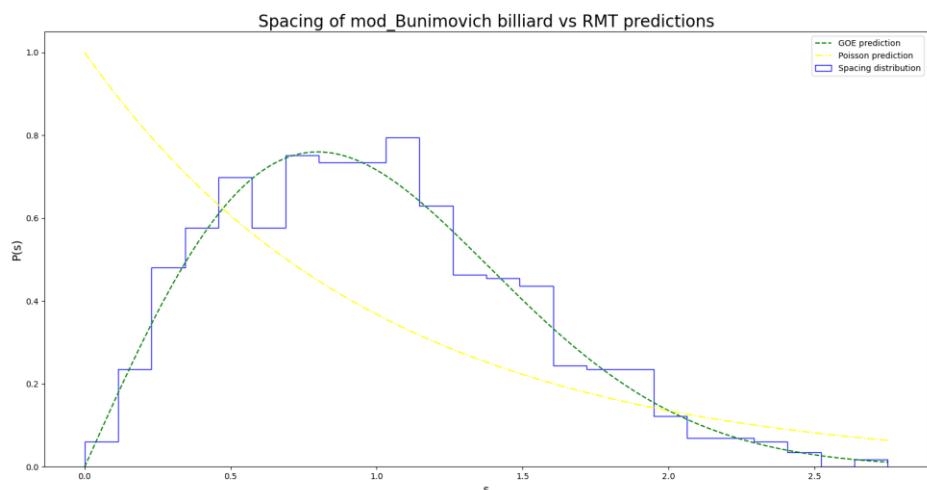
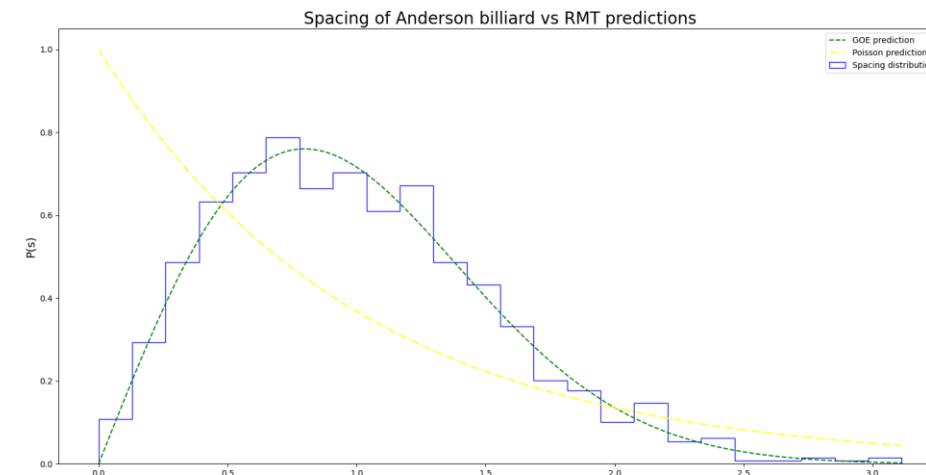
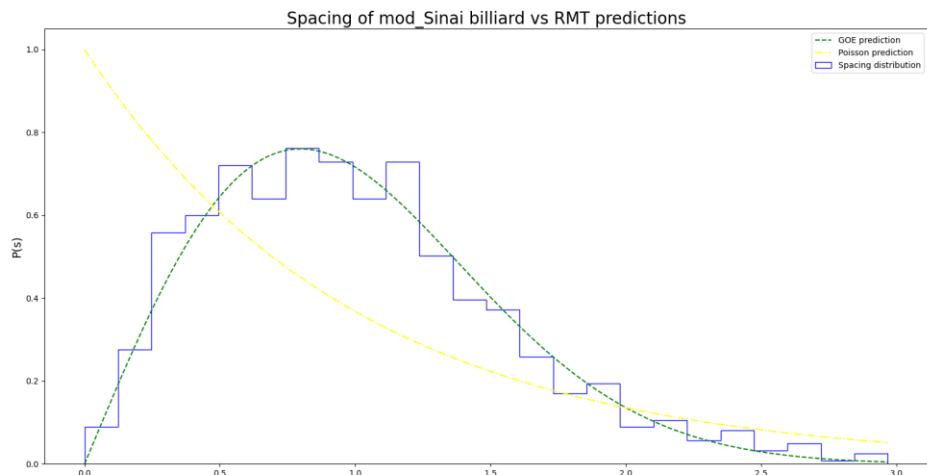


Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger





Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger



	$\langle r \rangle$	$\langle s^{CN} \rangle$	$\langle s^{FN} \rangle$	$\langle s \rangle$
mod_Bun.	0.534	0.667	1.33	0.999
mod_Sinai	0.519	0.649	1.35	0.998
Anderson	0.517	0.646	1.36	0.999

## 2.2 Schrödinger time dependent

L'equazione è stata integrata utilizzando una tecnica di *split operator*, l'*Alternate Direction Implicit*, che risolve separatamente per le due variabili, implicitamente per una ed esplicitamente per l'altra, in modo alternato. Di seguito alcuni parametri utilizzati:

$$dt = 2 \cdot 10^{-5}, \quad Nx = Ny = 800, \quad dy = dx = 1.25 \cdot 10^{-3}$$

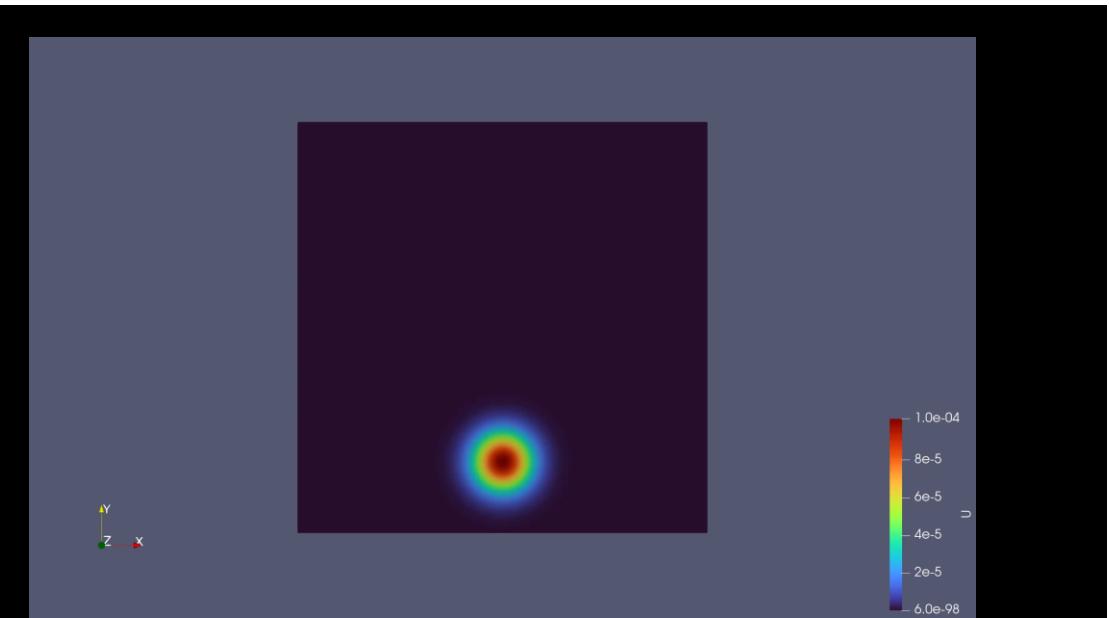
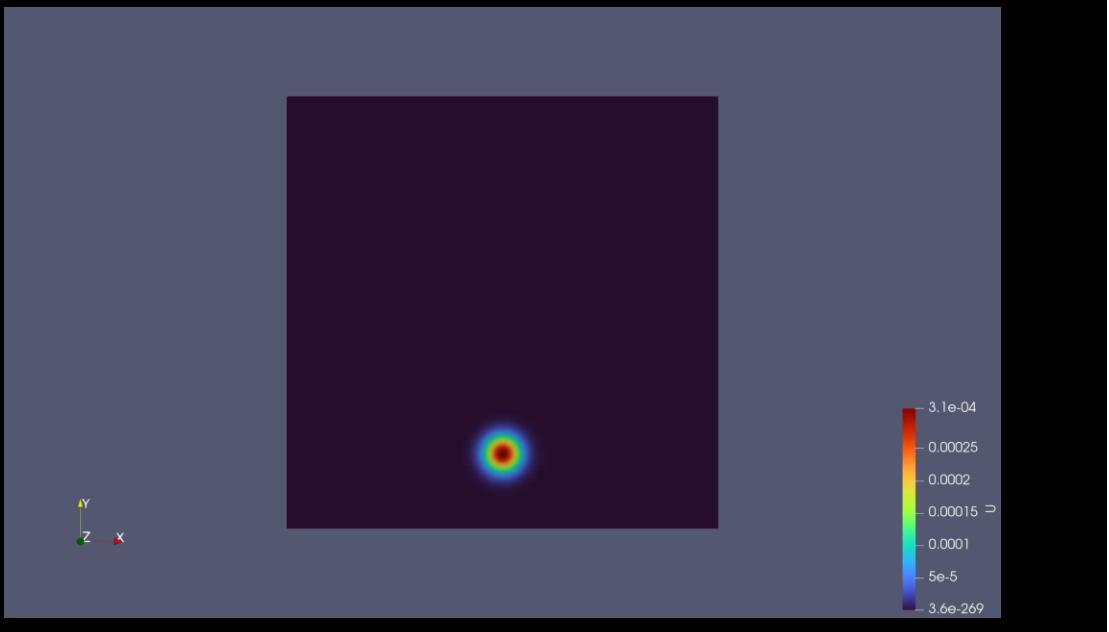
L'equazione simulata è la seguente:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + V(x, y) \psi$$

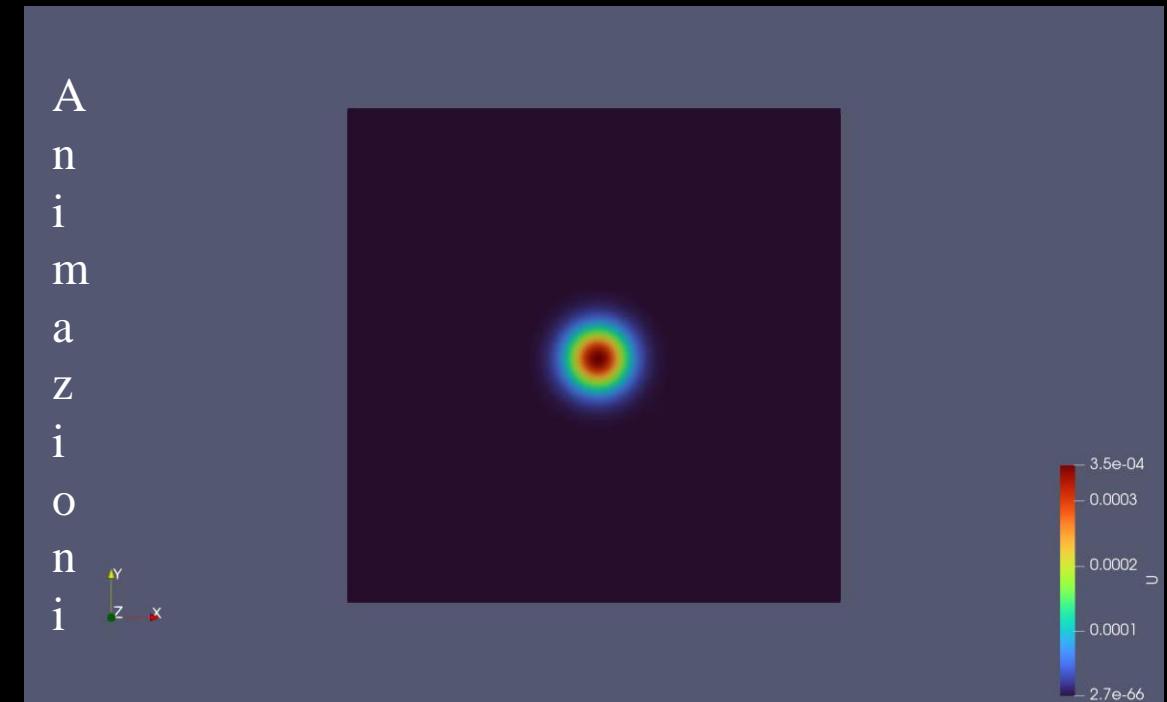
I 2 step per lo schema sono:

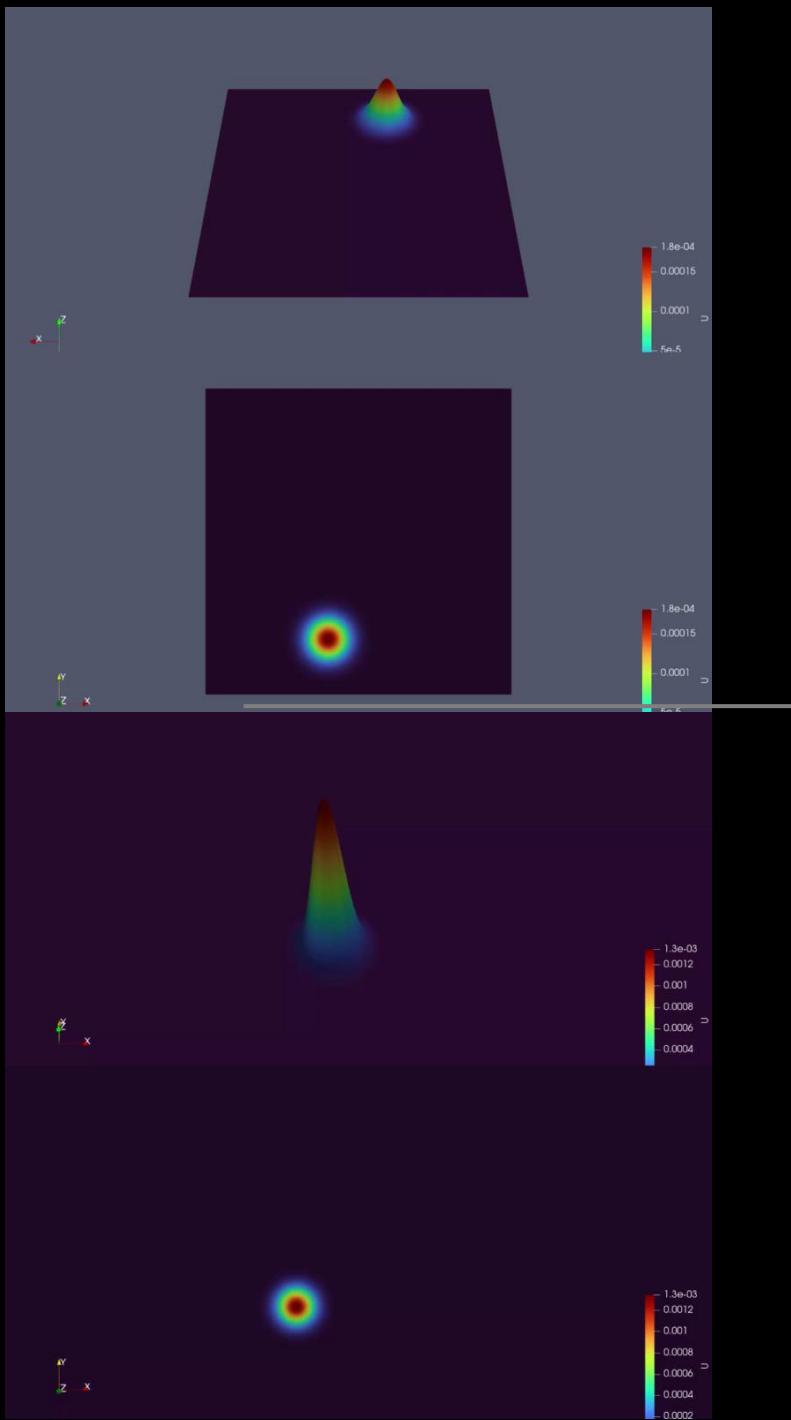
1.  $\psi_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left( 1 + 2\alpha_x + i \frac{dt}{2} V_{ij} \right) - \alpha_x \left( \psi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \psi_{ij}^n \left( 1 - 2\alpha_y - i \frac{dt}{2} V_{ij} \right) + \alpha_y (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n)$
2.  $\psi_{ij}^{n+1} \left( 1 + 2\alpha_y + i \frac{dt}{2} V_{ij} \right) - \alpha_y (\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}) = \psi_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \left( 1 - 2\alpha_x - i \frac{dt}{2} V_{ij} \right) + \alpha_x \left( \psi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right)$

Con  $\alpha_x = \alpha_y = i \frac{dt}{2dx^2}$



Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger

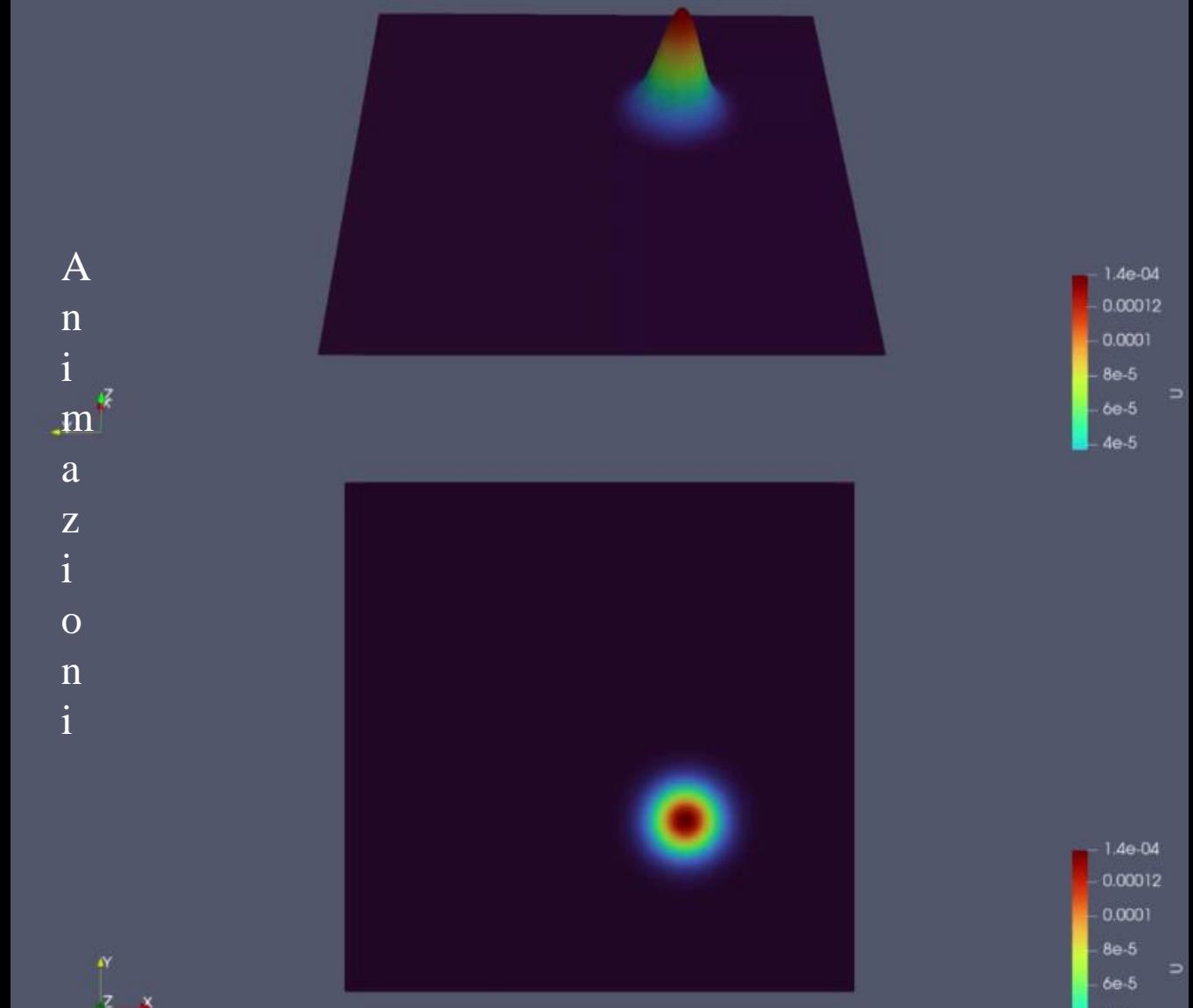




Soluzioni numeriche dell'equazione di Schrödinger

A  
n  
i  
m  
a  
z  
i  
o  
n  
i

Y  
Z  
X



### 3. Random Matrix Theory

#### Cosa sono?

- Matrici in cui tutti gli elementi o una parte di essi sono variabili random

#### A cosa servono?

- Introdotte da Wigner per riprodurre la statistica di autovalori e autofunzioni di sistemi quantistici a molti corpi.
- Trovano utilizzo in Stato Solido (modellano bene il comportamento di Hamiltoniani disordinati in approx di campo medio), in econofisica, in QCD (chiral Dirac operator), Quantum Gravity, Neuroscienze (modellano bene il network di connessioni sinaptiche tra neuroni), etc...

#### Quantum Chaos

- Congettura di **Bohigas-Giannoni-Schmit**

### 3.1 Ensembles

- 1. GOE:** sistema invariante sotto inversione temporale, l'Hamiltoniana commuta con l'operatore di inversione  $\hat{T}$ ;  $H$  reale  $H = H^+ = H^T$ ; la distribuzione di probabilità è invariante rispetto ad una trasformazione ortogonale

$$[\hat{H}, \hat{T}] = 0 \quad P(H) = P(OHO^T) \quad \hat{T}^2 = 1 \quad H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^*$$

- 2. GUE:** no time-reversal invariance,  $H$  Hermitiana con elementi complessi. Invarianza sotto trasformazioni unitarie

$$[\hat{H}, \hat{T}] \neq 0 \quad P(H) = P(UHU^+) \quad U^{-1} = U^+$$

- 3. GSE:** invariante sotto time-reversal, ogni livello è 2 volte degenero, la trasformazione della base è simplettica:

$$[\hat{H}, \hat{T}] = 0 \quad \hat{T}^2 = -1 \quad P(H) = P(SHS^+) \quad H = H_{nm}^{(0)} - i \sum_{\gamma=1}^3 H_{nm}^{(\gamma)} \sigma_\gamma$$

NNS distribution:  $P(s) = \begin{cases} e^{-s} & \text{integrabile, Poissoniana} \\ s \frac{\pi}{2} e^{-s^2 \frac{\pi}{4}} & GOE \\ s^2 \frac{32}{\pi} e^{-s^2 \frac{4}{\pi}} & GUE \\ s^3 \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} e^{-s^2 \frac{64}{9\pi}} & GSE \end{cases}$

Normalizzazione:  $\int_0^\infty P(s)ds = \int_0^\infty P(s)s ds = 1$

## 3.2 Nearest Neighbor Spacing Distribution per Sistemi Caotici

- Dà informazioni sulle correlazioni locali dello spettro. L'andamento dello spacing per i potenziali trattati segue le previsioni delle RMT.
- Esistono due tipologie di spacing:
  1. *Closest Neighbor*, utilizzabile nel contesto delle teorie perturbative, caso di piccole spaziature:

$$s_i^{CN} = \min\{E_{i+1} - E_i, E_i - E_{i-1}\}$$

- 2. *Farther Neighbor*, caso di spaziature più grandi tra gli autovalori :

$$s_i^{FN} = \max\{E_{i+1} - E_i, E_i - E_{i-1}\}$$

- Per ottenere risultati consistenti con la RMT è utile procedere prima all'*unfolding* dello spettro.
- Possiamo verificare rapidamente se siamo in buon accordo con le previsioni della RMT poiché:

$$\langle s^{CN} \rangle_{GOE} = \frac{2}{3} \approx 0.67 \quad \langle s^{FN} \rangle_{GOE} = \frac{4}{3} \approx 1.3$$

## 3.3 RMT: Unfolding & densità degli stati

### 3.3.1 Unfolding

Eliminazione di distorsioni e ‘smearing’ nello spettro. L’algoritmo è il seguente:

1. ordinamento degli autovalori
2. calcolo della densità degli stati integrata, o Staircase Function:

$$N(E) = \sum_n \Theta(E - E_n)$$

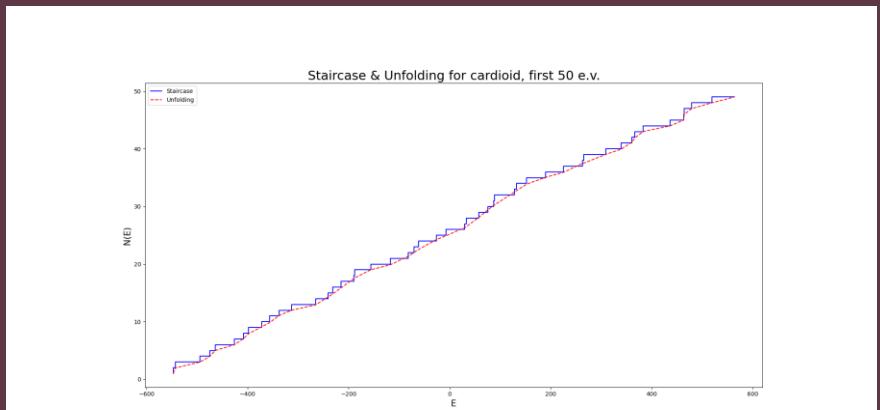
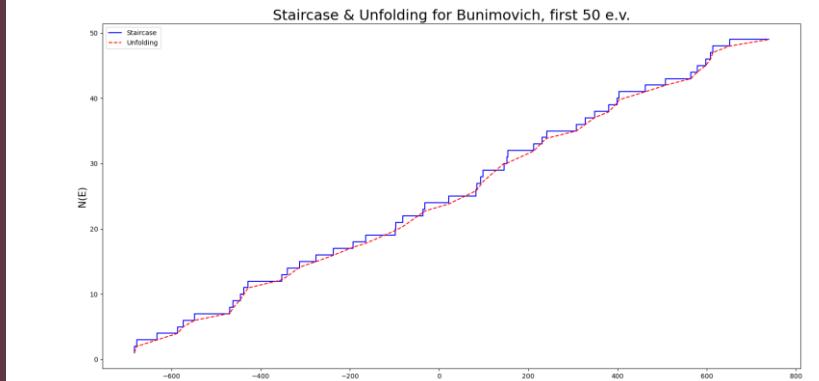
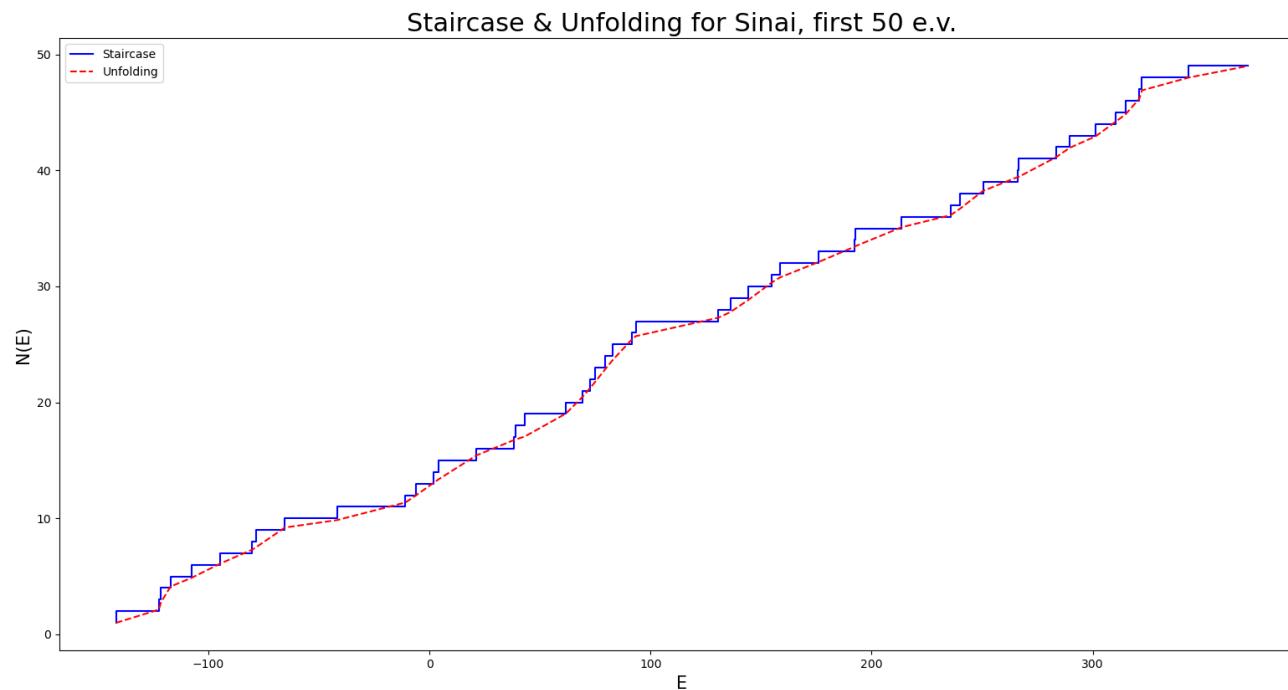
3. approssimazione di  $N(E)$  attraverso una funzione ‘smooth’
4. si decompone come:  $N(E) = N_{smooth}(E) + N_{fluc}(E)$

Come otteniamo una buona approx.? Nel seguito viene usata un’approssimazione polinomiale.

### 3.3.2 Densità degli stati

Formalmente:

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \sum_n \delta(E - E_n)$$



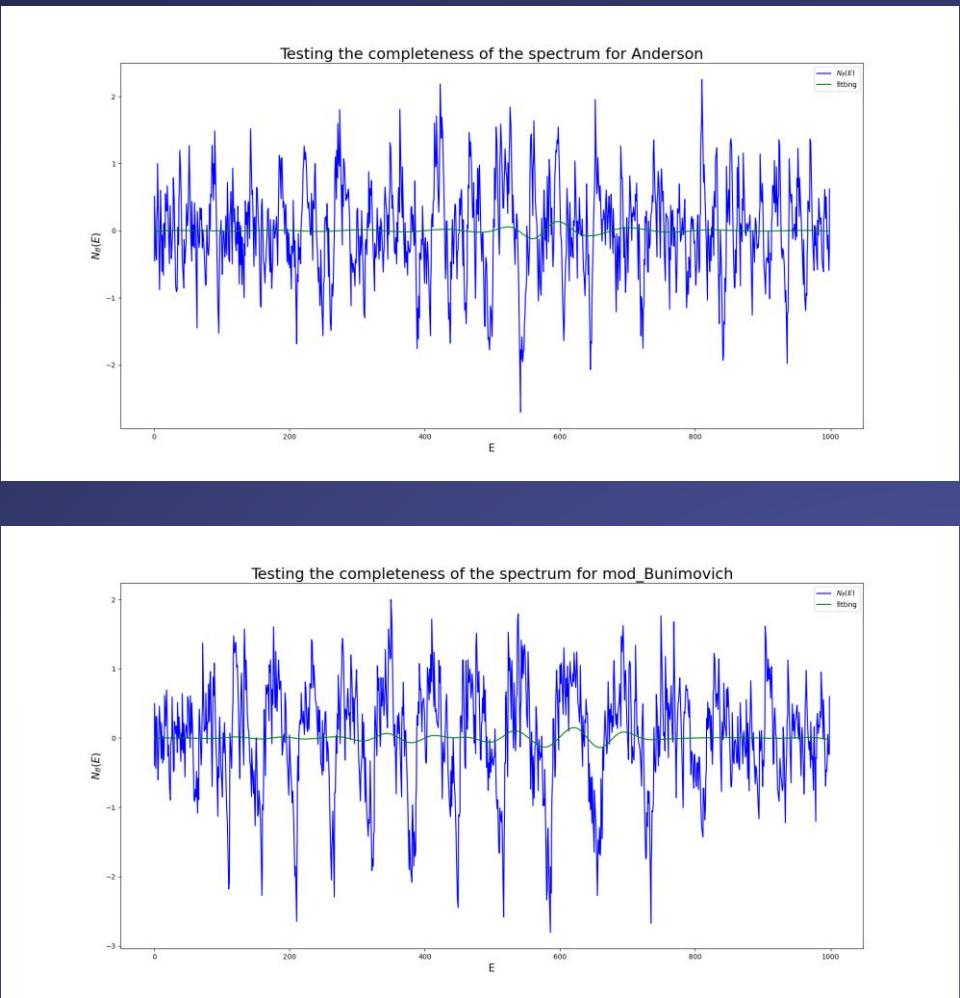
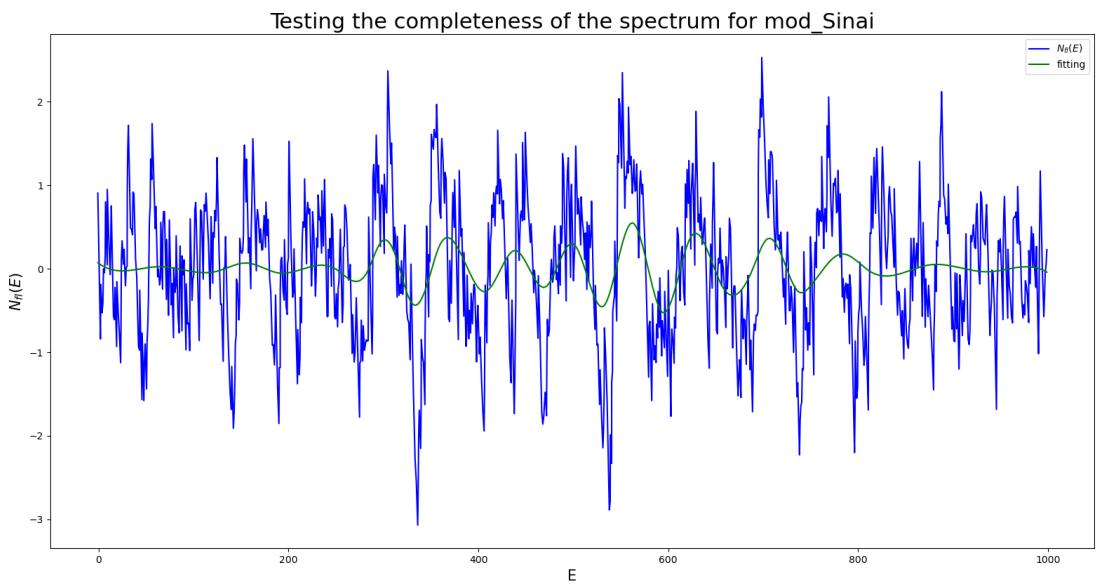
### 3.3.3 Parte fluttuante

La  $N_{fl}(E)$  può essere calcolata nel seguente modo, sullo spettro unfolded:

$$N_{fl}(E_n) = n - E_n$$

Fluttua intorno allo 0, suggerisce se lo spettro di autovalori è completo:

1. cosa vuol dire?
2. come capiamo se uno spettro è completo?

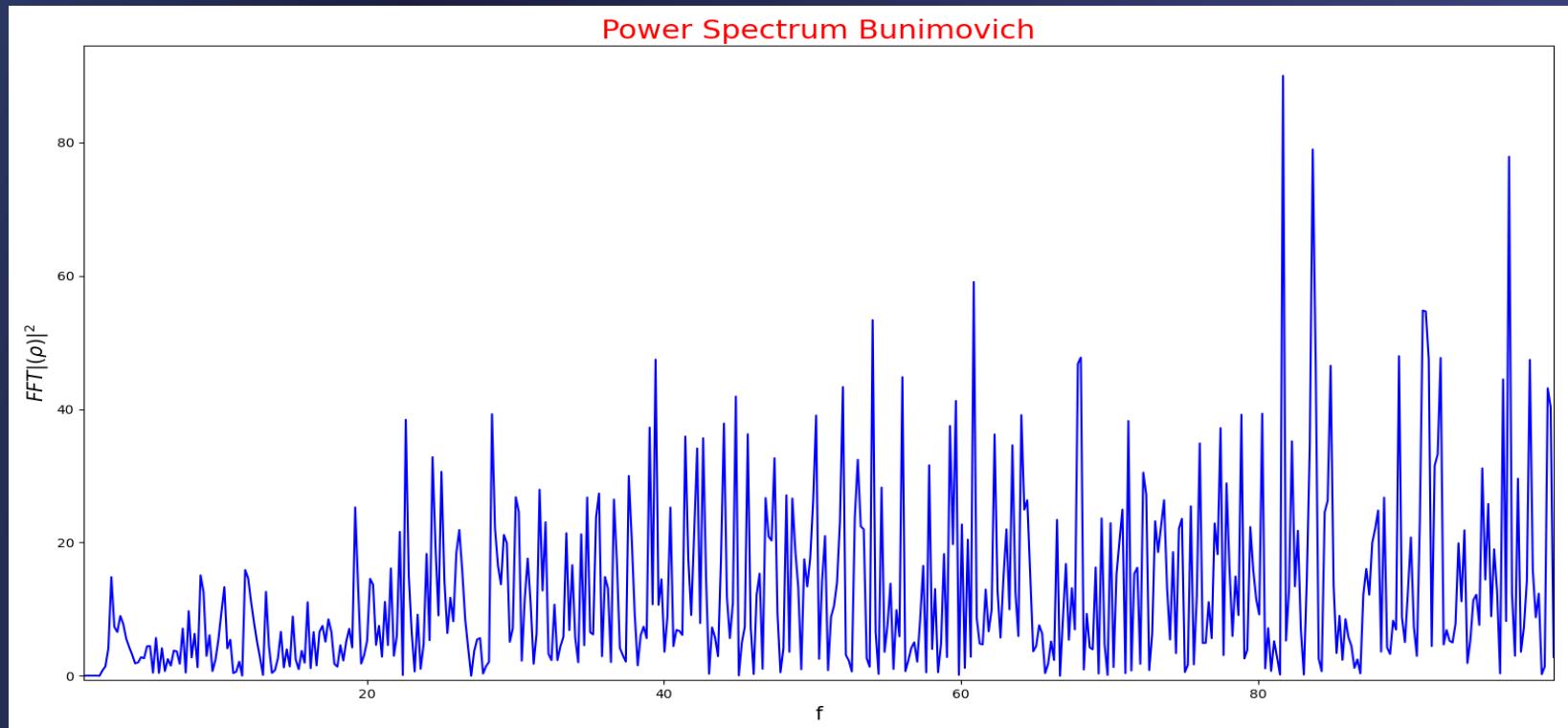


### 3.3.4 Spectral density

Dalle definizioni date per  $\rho$  e  $N$ , la parte fluttuante della densità dei livelli energetici può essere approssimata attraverso una derivata numerica come segue:

$$\rho_{fl}(E) = \frac{d}{dE} N_{fl}(E)$$

Il valore assoluto della trasformata di Fourier della parte fluttuante di  $\rho$  al quadrato restituisce la densità spettrale. I picchi corrispondono ad orbite classiche periodiche. Di seguito lo spettro di potenza per Bunimovich



## 4. Tecniche di analisi statistica più sofisticate

### 4.1 $\Delta_3$ - statistics (spectral rigidity)

Dà una misura delle fluttuazioni nella sequenza di autovalori intorno ad una densità media. Rappresenta una funzione di correlazione a lungo raggio nello spettro di un sistema quantistico; è una proprietà a grande scala delle energie

La definiamo in vari modi, come:

$$1. \quad \Delta_3(L) = \left\langle \min_{a,b} \int_{E-\frac{L}{2}}^{E+\frac{L}{2}} [N(E) - a - bE^2] \right\rangle \quad 2. \quad \Delta_3(L) = \frac{L}{15} - \frac{1}{15L^4} \int_0^L (L-E)^2 (2L^2 - 9LE - 3E^2) Y_2(E) dE$$

Il comportamento asintotico della rigidità spettrale previsto dalle RMT è il seguente:

$$\Delta_3(L) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \left[ \ln(2\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{8} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GOE \\ \frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln(2\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GUE \\ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \ln(4\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{8} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GSE \end{cases}$$

$$Y_2(E) = \left( \frac{\sin(\pi E)}{\pi E} \right)^2 + \left[ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} E - \int_0^{\pi E} \frac{\sin x}{x} dx \right] \left[ \frac{\cos(\pi E)}{\pi E} - \frac{\sin(\pi E)}{(\pi E)^2} \right]$$

## 4.2 $\Sigma_2$ number variance

Definita come la varianza del numero di autovalori in un certo range, è dunque una funzione di correlazione a 2 punti:

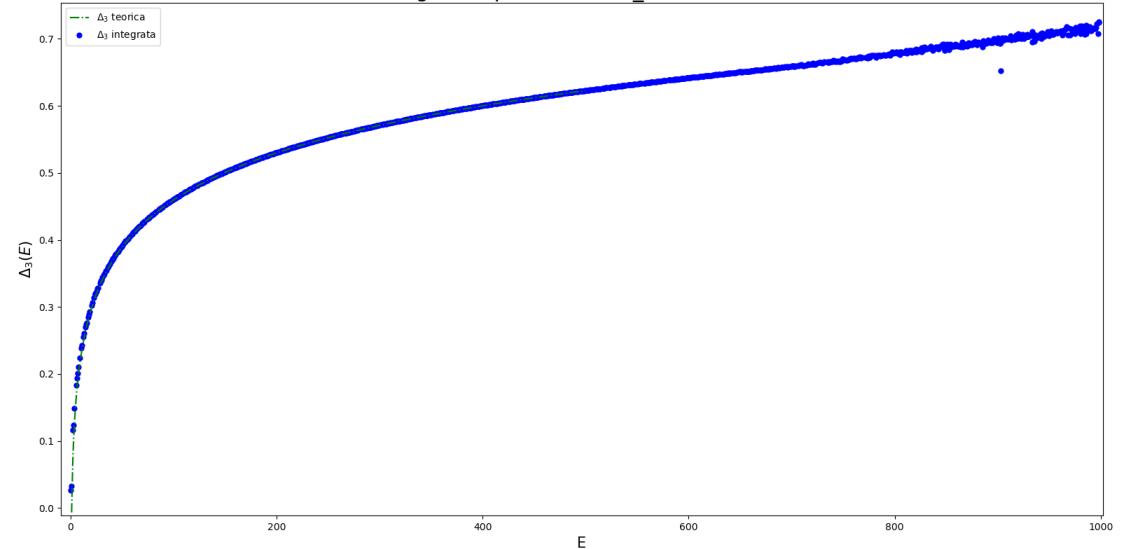
$$\Sigma_2(L) = \langle n(E, L)^2 \rangle - \langle n(E, L) \rangle^2 = \langle n(E, L)^2 \rangle - L^2 = \left\langle \left( \int_{\tilde{E}-\frac{L}{2}}^{\tilde{E}+\frac{L}{2}} dE \rho(E) - L \right)^2 \right\rangle_{\tilde{E}}$$

Ai fini di un'integrazione e confronto numerici utilizziamo la seguente espressione a sx, a dx invece il comportamento asintotico previsto dalla RMT:

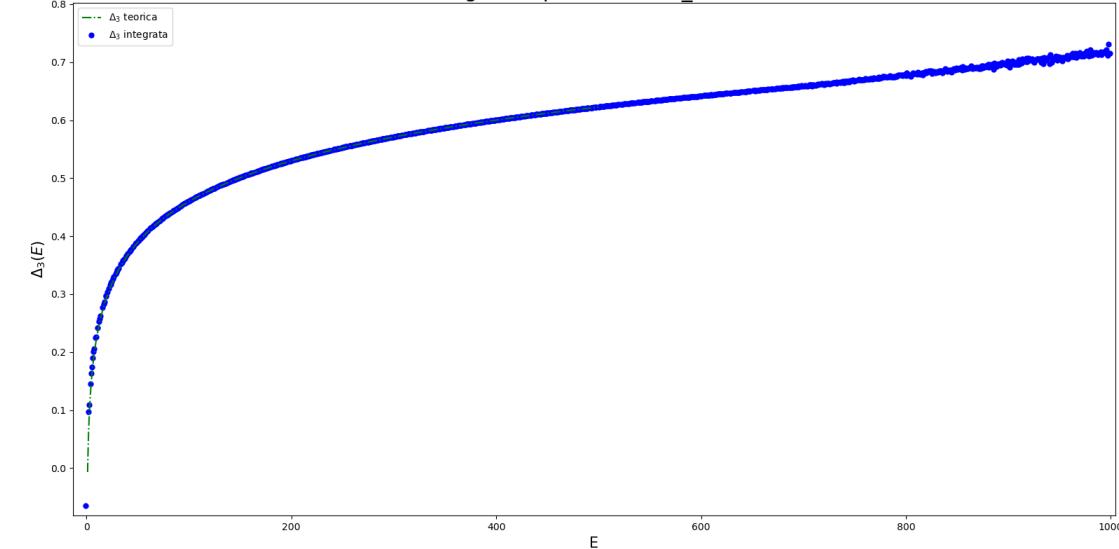
$$\Sigma_2(L) = L - 2 \int_0^L (L - E) Y_2(E)$$

$$\Sigma_2(L) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2} \left[ \ln(2\pi L) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GOE \\ \frac{1}{\pi^2} [\ln(2\pi L) + \gamma + 1] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GUE \\ \frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln(4\pi L) + \gamma + 1 + \frac{\pi^2}{8} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) & GSE \end{cases}$$

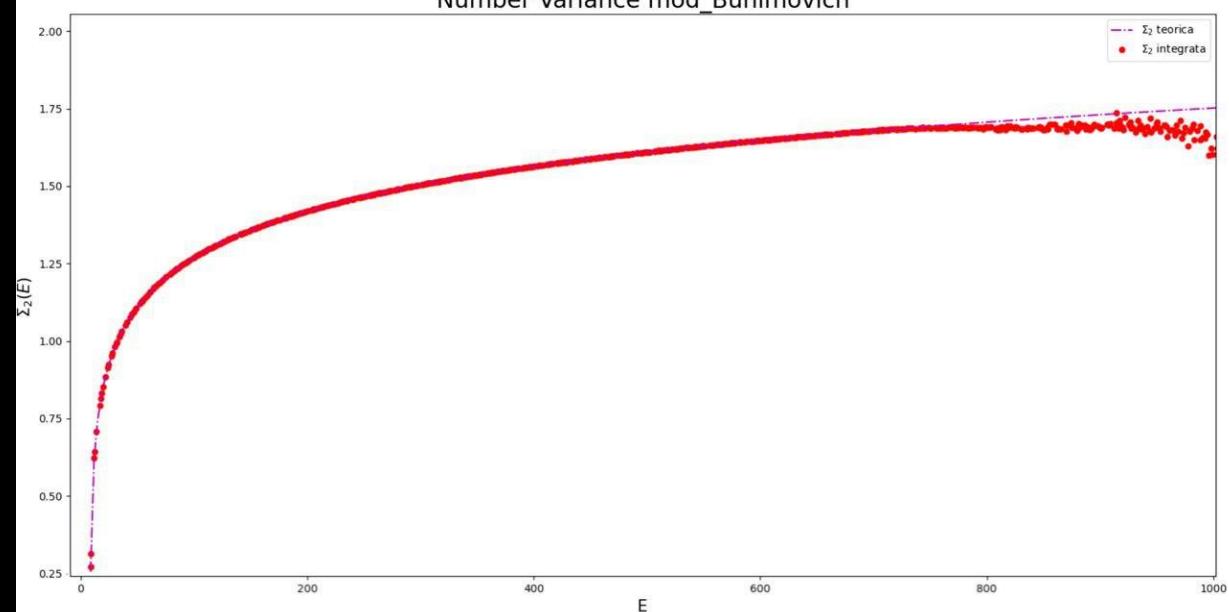
Rigidità spettrale mod\_Bunimovich



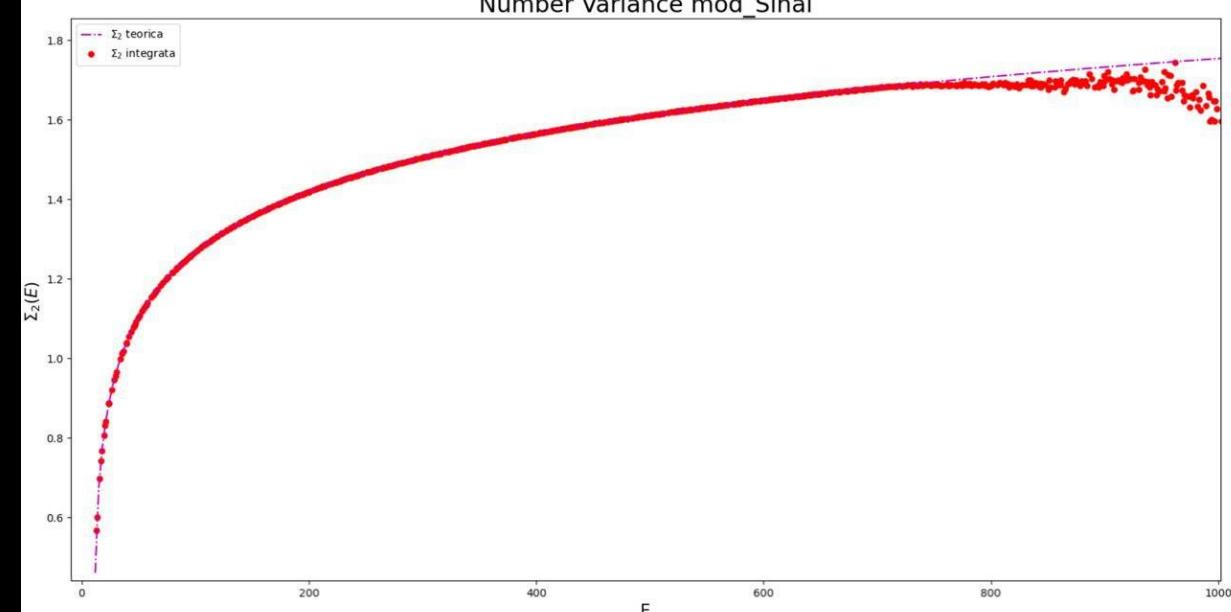
Rigidità spettrale mod\_Sinai



Number Variance mod\_Bunimovich



Number Variance mod\_Sinai



# 5 Chaos classico e quantistico: confronto

## 5.1 Classical Kicked Rotor

L' Hamiltoniana dipendente dal tempo la scriviamo come:

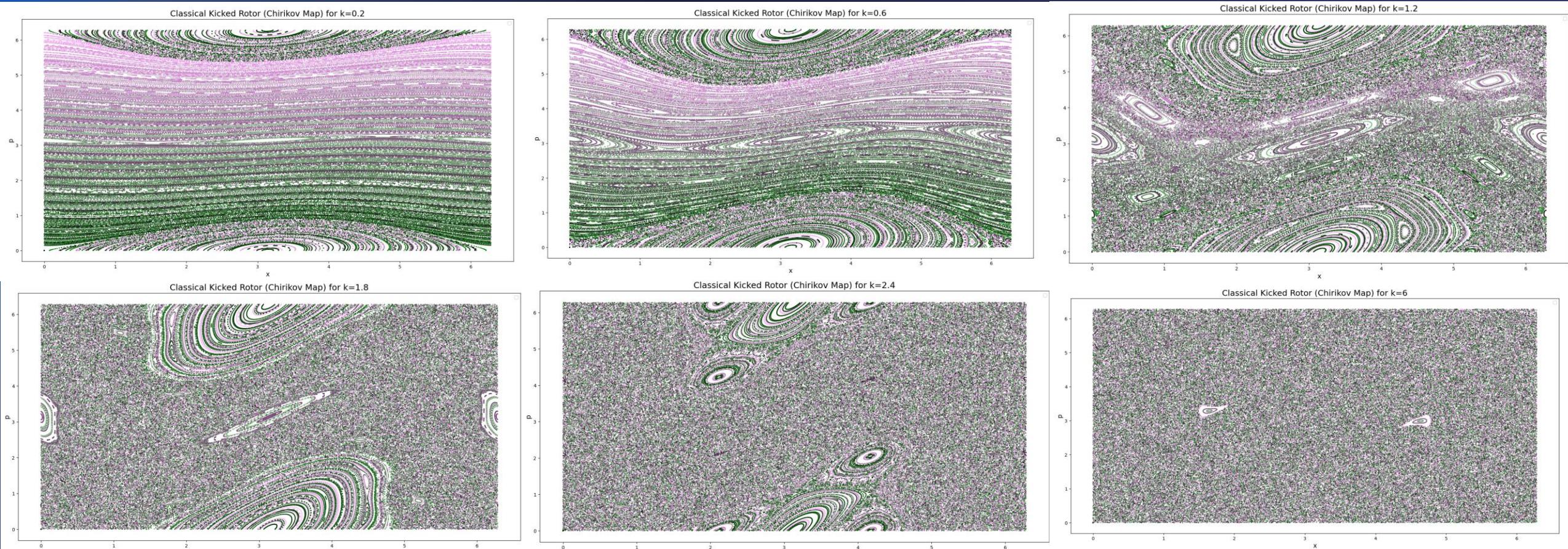
$$H = \frac{p^2}{2I} + k \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Introducendo la quantità riscalata  $K = kT$ , le equazioni di Hamilton, esattamente integrate, sono:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + K \sin x_n \end{cases} \quad \text{va sotto il nome di Mappa Standard}$$

La trasformazione è canonica ( $x_n, p_n \rightarrow x_{n+1}, p_{n+1}$ ) e lo Jacobiano associato  $\left| \frac{\partial(x_{n+1}, p_{n+1})}{\partial(x_n, p_n)} \right| = 1$

- $K = 0$  sistema integrabile
- $K > 0$  non integrabile



Mappa standard per vari valori di  $K$

## 5.2 Quantum Kicked Rotor

L'Hamiltoniana è:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \sum_n \delta(t - nT) \psi(x, t) \quad V(x) = k \cos x$$

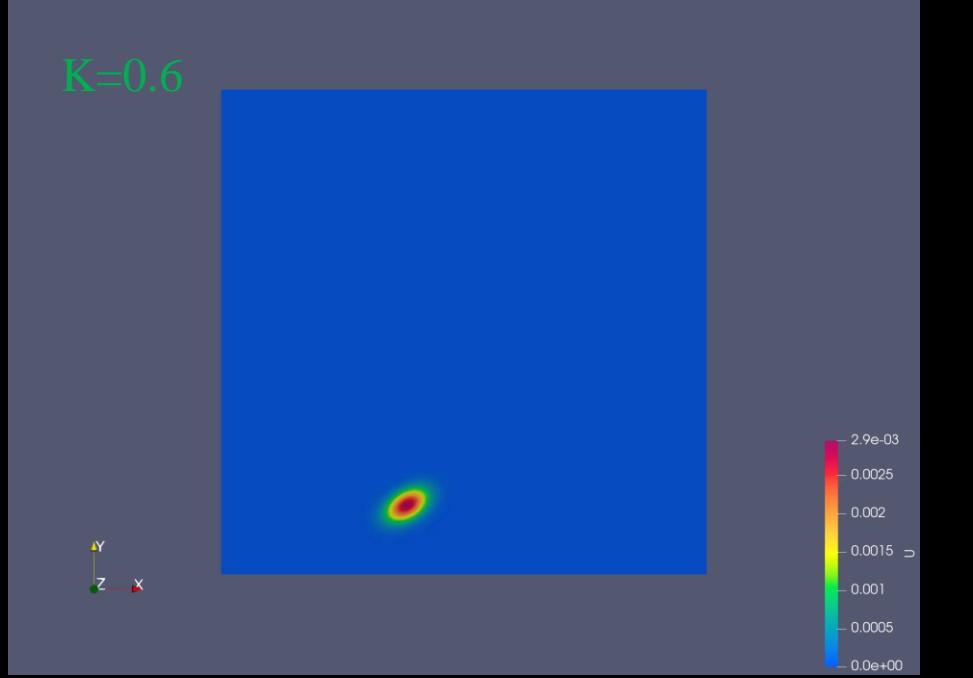
$$\hat{U} = \hat{U}_{kick} \hat{U}_{free} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} K \cos \hat{x}\right) \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \hat{p}^2\right)$$

Mappa uno stato arbitrario iniziale al tempo discreto  $n$  in uno stato successivo:

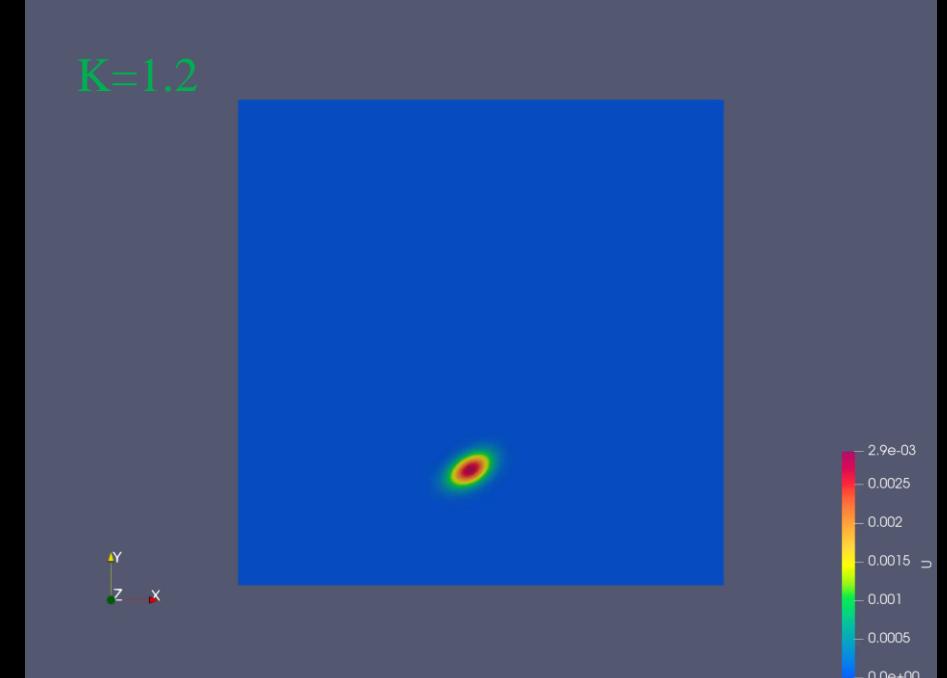
$$\psi(x, n+1) = \hat{U} \psi(x, n)$$

Gli effetti di localizzazione possono essere verificati calcolando l'energia media  $\langle \hat{p}^2 \rangle$ . Nel caso quantistico dopo un certo tempo  $t_b$  gli effetti quantistici dominano su quelli classici, l'energia raggiunge un plateau, mentre nel caso classico essa aumenta.

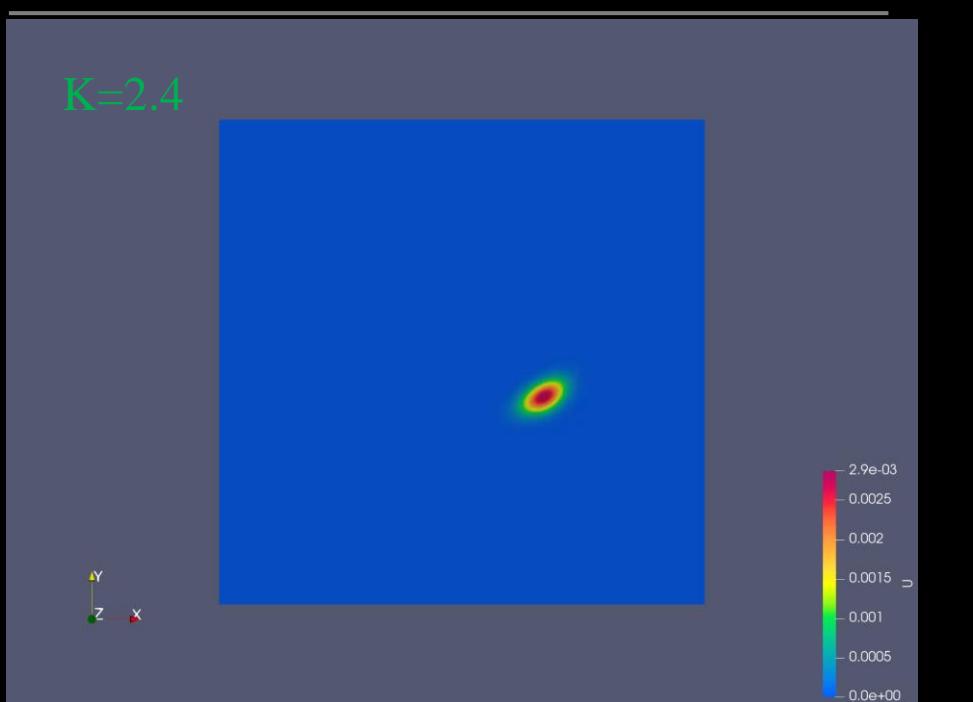
K=0.6



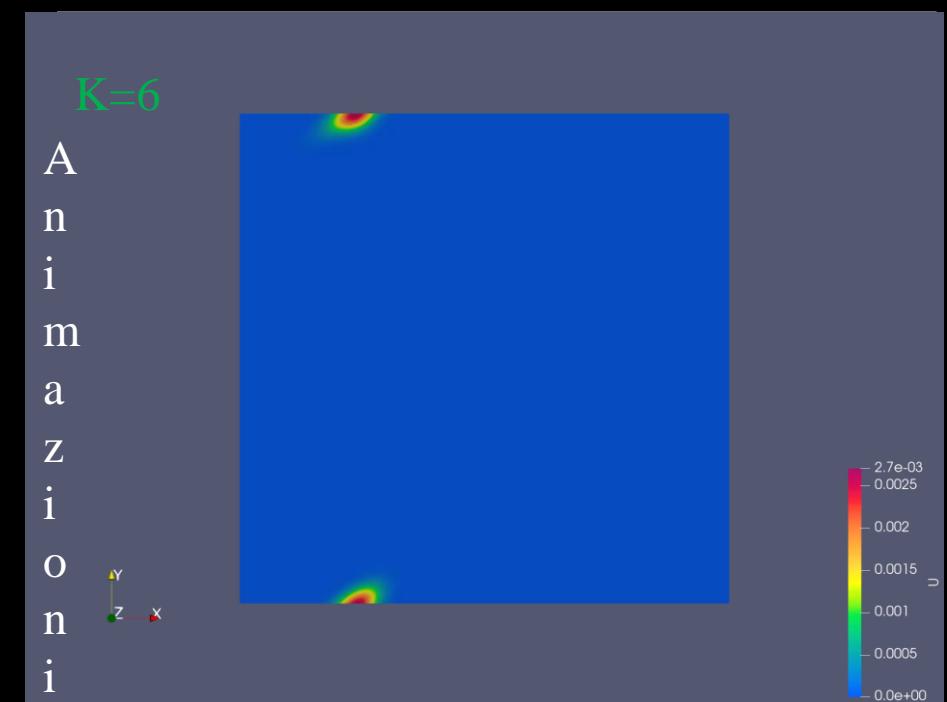
K=1.2



K=2.4



K=6

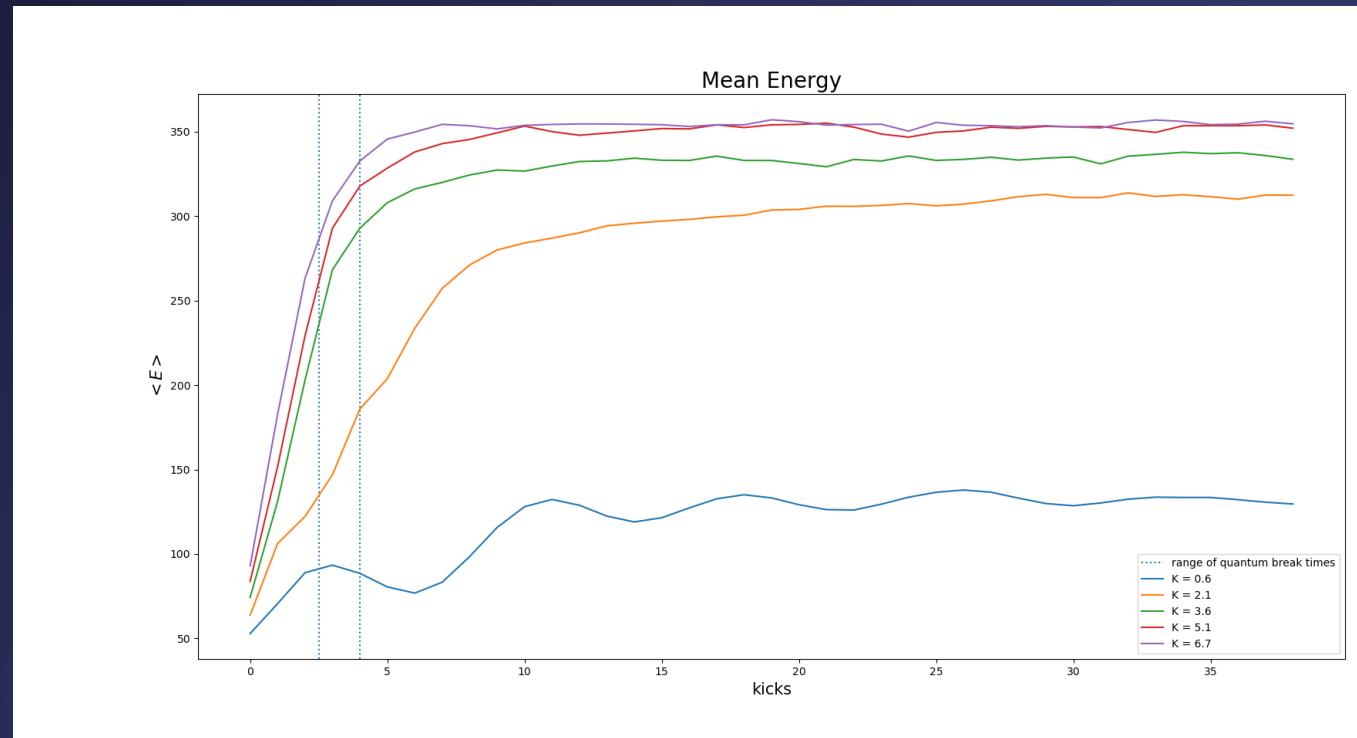


## 5.3 Mean Energy & Quantum Break Time

Si definisce *Quantum Break Time* il tempo dopo il quale gli effetti quantistici diventano dominanti, ovvero il kick dopo cui l'energia del sistema inizia a saturare (rispetto ad una evoluzione puramente classica) ed effetti diffusivi non sono più possibili per via della localizzazione del pacchetto d'onda.

L'energia media è data da:

$$\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \psi | \hat{U}^{+(N)} \hat{p}^2 \hat{U}^{(N)} | \psi \rangle$$



Inoltre è possibile definire una lunghezza caratteristica per la localizzazione data da:

$$\langle \Delta \hat{p}^2 \rangle \sim m_L^2 \hbar^2$$

## A.1 Appendice: Connessione con la localizzazione di Anderson

$$\hat{U}|\phi\rangle = e^{-i\beta}|\phi\rangle \quad \text{riscrivibile come:}$$

$e^{-iV(x)}e^{-iH_0(p)}\phi^+$ ,  $e^{-iH_0(p)}e^{-iV(x)}\phi^-$ ,  $\phi^\pm$  rappresentano gli autostati dell'operatore di Floquet, nella rappresentazione della posizione:

$$\begin{aligned}\phi^-(x) &= e^{iV(x)}\phi^+(x) = e^{i(\beta-H_0(x))}\phi^+ \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{2}[|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle]\end{aligned}$$

Performiamo una trasformazione definendo un operatore Hermitiano del tipo:

$$\begin{aligned}W(x) &= -\tan\left(\frac{V(x)}{2}\right) \rightarrow e^{-iV(x)} = \frac{1+iW(x)}{1-iW(x)} \\ (1-W(x))\phi(x) &= e^{i\beta-iH_0(x)}(1+iW(x))\phi(x)\end{aligned}$$

Arriviamo facilmente a:

$$T_m\phi_m + \sum_{r \neq 0} W_r\phi_{m+r} = E\phi_m \quad T_m = \tan \frac{(\beta - \hbar m^2/2)}{2}$$

## A.2 Appendice: Funzione d'onda semiclassica per sistemi integrabili in più dimensioni

Partiamo dall'eq. Di Schroedinger stazionaria:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Facciamo un ansatz del tipo:

$$\psi(r) = A(r) e^{\frac{i}{\hbar} \xi(r)}$$

A,  $\xi$  rispettivamente ampiezza e fase. Da questa espressione:

$$\nabla^2 \psi = \left( \underbrace{\nabla^2 A + \frac{2i}{\hbar} \nabla \xi \cdot \nabla A + \frac{i}{\hbar} (\nabla^2 \xi) A - \frac{1}{\hbar^2} A (\nabla \xi)}_{= \frac{i}{\hbar A} \nabla (A^2 \nabla \xi) = p.Im.} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \xi}$$

Reinserendo nell'equazione e separando la parte reale da quella immaginaria:

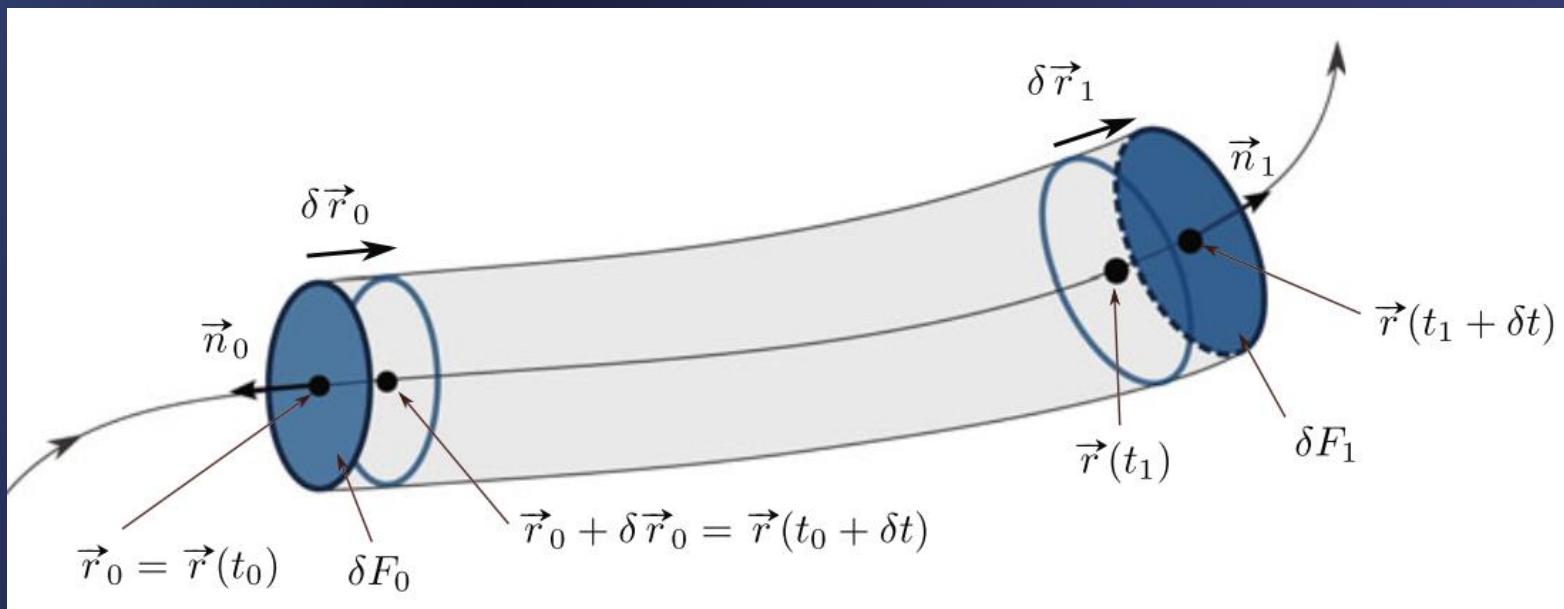
$$\frac{[\nabla \xi(r)]^2}{2m} + V(r) - E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A(r)}{A}$$

La parte a sx rappresenta l'equazione di Hamilton-Jacobi  $H\left(\mathbf{r}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right) = E = \text{cost.}$  con  $S = \xi$  funzione generatrice (analogia corretta solo al leading order in  $\hbar$ ), mentre quella a dx una correzione quantistica  $O(\hbar^2)$

Analizziamo la parte immaginaria dell'eq. di Schroedinger

$$\nabla(A^2(\mathbf{r})\nabla\xi) = 0 \quad \xrightleftharpoons{Th.div.} \quad \oint_{\delta V} A^2 \nabla\xi \cdot d\mathbf{n} = 0$$

Tale volume è generato da una certa area  $\delta F_0$  che evolve nel tempo intorno ad una famiglia di traiettorie dal punto iniziale  $\mathbf{r}_0$ . La direzione delle traiettorie è determinata da  $\mathbf{p} = \nabla\xi \rightarrow \nabla\xi \cdot d\mathbf{n} = 0$  lungo il boundary del tubo di flusso in figura.



Gli unici contributi derivano da  $\delta F_0, \delta F_1$ . Si valuta l'integrale sopra ottenendo:

$$0 = A^2 \delta F_1 \mathbf{n}_1 \cdot \nabla\xi(\mathbf{r}_1) + A^2 \delta F_0 \mathbf{n}_0 \cdot \nabla\xi(\mathbf{r}_0)$$

Con alcune sostituzioni:

$$A^2(\mathbf{r}_1) = A^2(\mathbf{r}_0) \left( \frac{\delta V_1}{\delta V_0} \right)^{-1} \quad \text{con} \quad \delta V_1 = \delta F_1 \mathbf{n}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 \quad \delta V_0 = -\delta F_0 \mathbf{n}_0 \cdot \delta \mathbf{r}_0 < 0 \quad \left( \frac{\delta V_1}{\delta V_0} \right)^{-1} = \det \left( \frac{\partial \mathbf{r}(t_1)}{\partial \mathbf{r}(t_0)} \right)^{-1}$$

Per un sistema integrabile possiamo usare le variabili azione angolo per descriverne l'evoluzione:

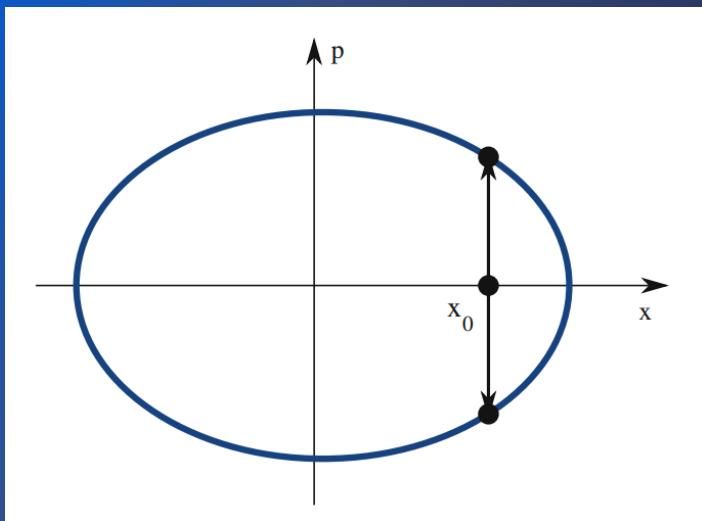
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &\equiv \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\theta}(t_0) + (t - t_0)\boldsymbol{\omega} & \boldsymbol{\omega} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{r}(t_0)} &= \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \boldsymbol{\theta}(t)} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(t)}{\partial \boldsymbol{\theta}(t_0)} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(t_0)}{\partial \mathbf{r}(t_0)} \end{aligned}$$

Riscrivendo ciascuno dei termini precedenti risp. come  $\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \mathbf{r}(t_0)} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_1) \right)^{-1} \cdot I_{d \times d} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_0)$ , la funzione d'onda sarà

$$A^2(\mathbf{r}_1) \sim \left| \det \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_1) \right| = \left| \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{I}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{I}) \right) \right| \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{I}} = \boldsymbol{\theta}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\left| \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{I}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{I}) \right) \right|} e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

Il problema è che  $S(\mathbf{r}, \mathbf{I})$  non è univocamente determinata per un certo valore di  $\mathbf{r}$ , per cui occorre sommare su tutti i possibili rami:



$$\psi(\mathbf{r}) \propto \sum_{\nu} \sqrt{\left| \det \left( \frac{\partial^2 S_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{I})}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{I}} \right) \right|} \exp \left( \frac{i}{\hbar} S_{\nu} + i \mu_{\nu} \right)$$

$\mu$  è il solito indice di Maslov che tiene conto del comportamento delle orbite nei punti di inversione del moto.  
Per un sistema non-integrabile non possiamo più descrivere l'azione per un certo  $\mathbf{I}$  fisso, ma estendere la forma dell'azione a tutte le possibili orbite:

$$S_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{I}, t) \rightarrow R_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$$

## A.3 Appendice: Bracket di Moyal e funzione di Wigner

Espressione nota:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

Wigner & Moyal ricercano un'equivalenza classica nello spazio delle fasi per il principio di indeterminazione. Partiamo dal considerare un *operatore caratteristico*:

$$M(\hat{p}, \hat{q}, \tau, \phi) = \exp\{i/\hbar(\tau \hat{p} + \phi \hat{q})\}$$

Con  $\tau, \phi$  in unità di posizione e momento risp.. Possiamo esprimere uno stato come:

$$M(\tau, \phi) = \langle \psi | \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\tau \hat{p} + \phi \hat{q}) \right\} | \psi \rangle \underset{CBH formula}{=} \langle \psi | e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{q}} e^{\frac{i}{\hbar} \tau \hat{p}} e^{\frac{i}{2\hbar} \tau \phi} | \psi \rangle$$

La cui trasformata di Fourier è la funzione di Wigner:

$$f(p, q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\phi M(\tau, \phi) e^{-\frac{i}{\hbar}(\tau p + \phi q)}$$
$$M(\tau, \phi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq e^{\frac{i}{\hbar}(\tau p + \phi q)} f(p, q)$$

Dove nel  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f_{quantum} = f_{class}$  e  $f$  è la funzione densità di probabilità classica sullo spazio delle fasi.

Un operatore  $\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})$  può sempre essere scritto in termini di una funzione di fase:

$$\hat{A}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int d\tau d\phi a(\tau, \phi) \exp\{i/\hbar(\tau \hat{p} + \phi \hat{q})\}$$

Dove la funzione di fase viene definita come:

$$A(p, q) = \frac{1}{2\pi \hbar} \int \int d\tau d\phi a(\tau, \phi) e^{\frac{i}{\hbar}(\tau p + \phi q)}$$

Per cui:

$$\hat{A}(\hat{p}, \hat{q}) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int \dots \int d\tau d\phi dp dq A(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar}(\tau(p - \hat{p}) + \phi(q - \hat{q}))}$$

Tenendo presente ciò riscriviamo una generica relazione di commutazione per poi farne il limite  $\hbar \rightarrow 0$ :

$$i\hbar \hat{C}(\hat{p}, \hat{q}) = [\hat{A}(\hat{p}, \hat{q}), \hat{B}(\hat{p}, \hat{q})]$$

Riesprimiamo gli operatori in termini della funzione delle fasi:

$$\frac{i\hbar}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0 d\phi_0 c(\tau_0, \phi_0) e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_0 \hat{p} + \phi_0 \hat{q})} = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\phi_1 d\phi_2 a(\tau_1, \phi_1) b(\tau_2, \phi_2) \cdot [e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_1 \hat{p} + \phi_1 \hat{q})}, e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_2 \hat{p} + \phi_2 \hat{q})}]$$

Svolgendo il commutatore e usando la formula di CBH otteniamo:

$$[e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_1 \hat{p} + \phi_1 \hat{q})}, e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_2 \hat{p} + \phi_2 \hat{q})}] = 2ie^{\frac{i}{\hbar}((\tau_1 + \tau_2)\hat{p} + (\phi_1 + \phi_2)\hat{q})} \sin\left[\frac{i}{2\hbar}(\tau_1 \phi_2 - \tau_2 \phi_1)\right]$$

A questo punto sostituiamo l'espressione appena trovata nella precedente e facciamone il valore di aspettazione rispetto ad uno stato  $|\psi\rangle$  (tenendo conto dell'espressione della funzione  $M$ ):

$$\frac{i\hbar}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_0 d\phi_0 c(\tau_0, \phi_0) M(\tau_0, \phi_0) = 2i \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \cdot \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\phi_1 d\phi_2 a(\tau_1, \phi_1) b(\tau_2, \phi_2) \cdot M(\tau_1 + \tau_2, \phi_1 + \phi_2) \cdot \sin \left[ \frac{i}{2\hbar} (\tau_1 \phi_2 - \tau_2 \phi_1) \right]$$

Come ultimo passaggio antitrasformiamo la funzione  $M$  e applichiamo la definizione precedentemente scritta della funzione di fase associata con i corrispettivi operatori che stiamo considerando:

$$\frac{i\hbar}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 dq_0 C(p_0, q_0) f(p_0, q_0) = \\ = 2i \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\phi_1 d\phi_2 dp dq f(p, q) a(\tau_1, \phi_1) e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_1 p + \phi_1 q)} \cdot b(\tau_2, \phi_2) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\tau_2 p + \phi_2 q)} \cdot \sin \left[ \frac{i}{2\hbar} (\tau_1 \phi_2 - \tau_2 \phi_1) \right] \\ = \left( \frac{2i}{2\pi\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq f(p, q) \sin \left[ \frac{\hbar}{2} (\partial_{p_B} \partial_{q_A} - \partial_{p_A} \partial_{q_B}) \right] \cdot A(p, q) B(p, q)$$

Troviamo dunque che la funzione di fase equivalente al commutatore che stavamo cercando di riscrivere è la seguente:

$$i\hbar C(p, q) = 2i \sin \left[ \frac{\hbar}{2} (\partial_{p_B} \partial_{q_A} - \partial_{p_A} \partial_{q_B}) \right] \cdot A(p, q)B(p, q)$$

Tale equazione prende il nome di *bracket di Moyal* e nel lim  $\hbar \rightarrow 0$  si riduce alle parentesi di Poisson:

$$C(p, q) = \{A(p, q), B(p, q)\}_{Poisson} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial A}{\partial q}$$

= 0 per quantità conservative.

## A.4 Appendice: Cose random

**Teorema:** In una Hamiltoniana su reticolo come quella considerata tutti gli autostati  $\psi_\lambda$  sono esponenzialmente localizzati nello spazio delle coordinate per ogni  $D/t>0$ , ovvero ogni autostato si comporta asintoticamente per grandi  $i$  come:

$$|\psi_\lambda(i)| \sim e^{-\frac{|i-j(E)|}{\lambda(E)}}$$

**Def:** Un sistema quantistico è integrabile se esistono  $m$  operatori  $\hat{I}_m(\hat{p}_1 \dots \hat{p}_m; \hat{q}_1 \dots \hat{q}_m)$  mutuamente commutanti:

$$[\hat{I}_m, \hat{I}_n] = 0,$$

Inoltre,  $\hat{I}$  indipendente da  $\hat{H}$ , tale che le funzioni nello spazio delle fasi  $I, H$  devono soddisfare la condizione di bracket di Moyal: e.g. per 2 d.o.f.  $H(p_1, p_2; q_1, q_2)$   $I(p_1, p_2; q_1, q_2)$  (vedi Appendice A.2):

$$\sin \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_{1H}} \frac{\partial}{\partial p_{1I}} + \frac{\partial}{\partial q_{2H}} \frac{\partial}{\partial p_{2I}} - \frac{\partial}{\partial q_{1I}} \frac{\partial}{\partial p_{1H}} - \frac{\partial}{\partial q_{2I}} \frac{\partial}{\partial p_{2H}} \right) \right] \times H(p_1, p_2; q_1, q_2) I(p_1, p_2; q_1, q_2) = 0$$

# Conclusioni

- Risvolti sperimentali
- Hyperion e le prime indagini sul Chaos Quantistico
- Decoerenza & Lindbladiano

*Amazing! I did not understand a single word.* —Fritz Haake sulla Trace Formula

# Referenze

- <sup>1</sup>S. Wimberger (2014): *Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos, An Introduction* (Springer-Verlag)
- <sup>2</sup>L. E. Reichl (2004): *The Transition to Chaos* (Springer-Verlag)
- <sup>3</sup>M. Tabor (1988): *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (Wiley)
- <sup>4</sup>E. J. Heller (1984): The American Physical Society, **53**, 1517
- <sup>5</sup>A. Buchleitner, D. Delande, J. Zakrzewski (2002): *Non-dispersive wave packets in periodically driven quantum systems*
- <sup>6</sup>N. Pomphrey (1974): J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., Vol 7, No 14
- <sup>7</sup>T. Guhr, A.M. Groeling, H.A. Weidenmuller (1997): *Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts*
- <sup>8</sup>A. A. Abul-Magd: *Unfolding of the Spectrum for Chaotic and Mixed Systems*
- <sup>9</sup>P. Rao, H. N. Deota, N.D. Chavda (2021): *Ordered level spacing distribution in embedded random matrix ensembles*
- <sup>10</sup>M.S. Santhanam, S.Paul, J. B. Kannan (2022): *Quantum Kicked Rotor and its variants: Chaos, localization and beyond*
- <sup>11</sup>D. Delande (2013): *Kicked Rotor and Anderson localization*
- <sup>12</sup>B.Dietz, U. Reif (2008): *Bouncing ball orbits and symmetry breaking effects in a three-dimensional chaotic billiard*