§2.7　矩阵的秩

数学系　梁卓滨

2016 - 2017 学年 I 暑修班

教学要求

♢

♣

♡

♠

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

$$\begin{pmatrix}1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&2&\boxed{1}&0\\0&3&0&0&1\\-2&\boxed{5}&-4&\boxed{-2}&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&1\\5&-2\end{vmatrix}=-3$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

2 阶子式

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&2&\boxed{1}&0\\0&3&0&0&1\\-2&\boxed{5}&-4&\boxed{-2}&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&1\\5&-2\end{vmatrix}=-3$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

2 阶子式

$$\begin{pmatrix}1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-3$$

- 取第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

2 阶子式

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&2&\boxed{1}&0\\0&3&0&0&1\\-2&\boxed{5}&-4&\boxed{-2}&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&1\\5&-2\end{vmatrix}=-3$$

- 取第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列：

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&\boxed{3}&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\-2&5&-4&-2&1\\1&\boxed{5}&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

2 阶子式

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&2&\boxed{1}&0\\0&3&0&0&1\\-2&\boxed{5}&-4&\boxed{-2}&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&1\\5&-2\end{vmatrix}=-3$$

- 取第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列：

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&\boxed{3}&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\-2&5&-4&-2&1\\1&\boxed{5}&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&0&1\\5&2&2\end{vmatrix}$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：

2 阶子式

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{5} & -4 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

- 取第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列：

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & \boxed{5} & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 取第 1, 3 行，2, 4 列：　　　　2 阶子式

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&2&\boxed{1}&0\\0&3&0&0&1\\-2&\boxed{5}&-4&\boxed{-2}&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&1\\5&-2\end{vmatrix}=-3$$

- 取第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列：　　　　3 阶子式

$$\begin{pmatrix}1&\boxed{-1}&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&\boxed{3}&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\-2&5&-4&-2&1\\1&\boxed{5}&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&0&1\\5&2&2\end{vmatrix}=0$$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\\boxed{0}&3&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\\boxed{-2}&5&\boxed{-4}&-2&\boxed{1}\\\boxed{1}&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}$$

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\\boxed{0}&3&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\\boxed{-2}&5&\boxed{-4}&-2&\boxed{1}\\\boxed{1}&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&-4&1\\1&2&2\end{vmatrix}$$

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{0}\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1}\\ \boxed{-2} & 5 & \boxed{-4} & -2 & \boxed{1}\\ \boxed{1} & 5 & \boxed{2} & 1 & \boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：(-2)

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 计算第 1, 4 行，3, 5 列，所构成的 2 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&\boxed{2}&1&\boxed{0}\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4$$

- 计算第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\\boxed{0}&3&\boxed{0}&0&\boxed{1}\\\boxed{-2}&5&\boxed{-4}&-2&\boxed{1}\\\boxed{1}&5&\boxed{2}&1&\boxed{2}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&-4&1\\1&2&2\end{vmatrix}=0$$

- 计算第 3 行，4 列，所构成的 1 阶子式：$(-2)\Longrightarrow -2$

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 ____________ 个
- 2 阶子式共有 ____________ 个
- 3 阶子式共有 ____________ 个
- 4 阶子式共有 ___________ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 ____________ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 ____________ 个
- 3 阶子式共有 ____________ 个
- 4 阶子式共有 ___________ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 ________ 个
- 3 阶子式共有 ________ 个
- 4 阶子式共有 ________ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 __________ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 __________ 个
- 4 阶子式共有 __________ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10=60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 ____________ 个
- 4 阶子式共有 __________ 个

子式——引例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5 = 20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10 = 60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 ____________ 个（4 行任取 3 行，5 列任取 3 列）
- 4 阶子式共有 __________ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10=60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 $\underline{4\times 10=40}$ 个（4 行任取 3 行，5 列任取 3 列）
- 4 阶子式共有 ______ 个

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{4\times 5=20}$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10=60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 $\underline{4\times 10=40}$ 个（4 行任取 3 行，5 列任取 3 列）
- 4 阶子式共有 ______ 个（4 行任取 4 行，5 列任取 4 列）

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10=60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 $\underline{4\times 10=40}$ 个（4 行任取 3 行，5 列任取 3 列）
- 4 阶子式共有 $\underline{\ 1\times 5=5\ }$ 个（4 行任取 4 行，5 列任取 4 列）

子式——引例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

- 1 阶子式共有 $\underline{\ 4\times 5=20\ }$ 个（4 行任取 1 行，5 列任取 1 列）
- 2 阶子式共有 $\underline{6\times 10=60}$ 个（4 行任取 2 行，5 列任取 2 列）
- 3 阶子式共有 $\underline{4\times 10=40}$ 个（4 行任取 3 行，5 列任取 3 列）
- 4 阶子式共有 $\underline{\ 1\times 5=5\ }$ 个（4 行任取 4 行，5 列任取 4 列）
- 5 阶或以上的子式没有！

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\le k\le \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\leq k\leq \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\le k\le \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

子式，秩

- **定义** 设
$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$
从中任取 k 行 k 列（$1\leq k\leq \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个 k 阶子式。

- **注** 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k\geq k_0$ 阶子式也为零。

子式，秩

- 定义 设

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1 \le k \le \min(m, n)$），其相交处的 $k \times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

- 注 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k \ge k_0$ 阶子式也为零。

- 定义若 $A_{m\times n}$ 中所有 $r+1$ 阶子式为零

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\leq k\leq \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

- **注** 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k\geq k_0$ 阶子式也为零。

- **定义**若 $A_{m\times n}$ 中所有 $r+1$ 阶子式为零（从而所有更高阶子式也为零），

子式，秩

- 定义 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\le k\le \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

- 注 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k\ge k_0$ 阶子式也为零。

- 定义若 $A_{m\times n}$ 中所有 $r+1$ 阶子式为零（从而所有更高阶子式也为零），而存在某个 r 阶子式不为零，

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\le k\le \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

- **注** 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k\ge k_0$ 阶子式也为零。

- **定义**若 $A_{m\times n}$ 中所有 $r+1$ 阶子式为零（从而所有更高阶子式也为零），而存在某个 r 阶子式不为零，则称 r 为矩阵 A 的秩，

子式，秩

- **定义** 设

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \boxed{*} & * & \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} & * \end{pmatrix}_{m\times n}$$

从中任取 k 行 k 列（$1\le k\le \min(m,n)$），其相交处的 $k\times k$ 个元素，所构成的行列式，称为的一个k 阶子式。

- **注** 若 A 中所有 k_0 阶子式为零，则所有 $k\ge k_0$ 阶子式也为零。

- **定义**若 $A_{m\times n}$ 中所有 $r+1$ 阶子式为零（从而所有更高阶子式也为零），而存在某个 r 阶子式不为零，则称 r 为矩阵 A 的秩，记作

$$r(A)=r$$

例计算矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$,

例计算矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A)\geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3$，所以 $r(A)\geq 2$

例 计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
    - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

例计算矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A)\geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix}1&-1\\0&3\end{vmatrix}=3$，所以 $r(A)\geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&-4&1\\1&2&2\end{vmatrix}=0$

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：

例计算矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A)\geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3$，所以 $r(A)\geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$

例 计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 其余的 $\underline{40 - 2 = 38}$ 个 3 阶子式等于多少？

例计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 其余的 $\underline{40-2=38}$ 个 3 阶子式等于多少？ 

例 计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 其余的 $\underline{\ 40 - 2 = 38\ }$ 个 3 阶子式等于多少？ 

实际上，所有 3 阶子式都为零！

例 计算矩阵的秩：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$

- 有非零 1 阶子式，所以 $r(A) \geq 1$
- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，所以 $r(A) \geq 2$
- 是否有非零 3 阶子式？
  - 第 2, 3, 4 行，1, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 第 1, 2, 4 行，2, 3, 5 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$
  - 其余的 $\underline{40-2=38}$ 个 3 阶子式等于多少？

实际上，所有 3 阶子式都为零！所以 $r(A) = 2$。

例（续）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，

例（续）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

例（续）

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

例（续）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例（续）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}$$

例（续）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：

  第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-a_{14}M_{14}=0$$

例（续）

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\-2&5&-4&-2&1\\1&5&2&1&2\end{pmatrix}$$

- 既然 3 阶子式都为零，则所有 4 阶子式也为零，举例验证如下：
  第 1, 2, 3, 4 行，1, 2, 3, 4 列，所构成的 4 阶子式：

  $$\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&0\\-2&5&-4&-2\\1&5&2&1\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-a_{14}M_{14}=0$$

  （最后一步利用到 M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14} 均为三阶子式均为零）

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & -1 & -2 & 7 \\ \boxed{0} & \boxed{-7} & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & -1 & -2 & 7 \\ \boxed{0} & \boxed{-7} & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：
  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$,

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & -1 & -2 & 7 \\ \boxed{0} & \boxed{-7} & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -7\end{vmatrix}=-7$，所以 $r(A)\geq 2$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -7\end{vmatrix}=-7$，所以 $r(A)\geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -7\end{vmatrix}=-7$，所以 $r(A)\geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A)=2$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45$，

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45$，所以 $r \geq 3$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45$，所以 $r \geq 3$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -7\end{vmatrix}=-7$，所以 $r(A)\geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A)=2$。

例 计算 $A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix}-3 & -2 & 3\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=45$，所以 $r\geq 3$。
- 任意 4 阶子式均为零！

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$，所以 $r(A) \geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A) = 2$。

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 45$，所以 $r \geq 3$。
- 任意 4 阶子式均为零！所以 $r(A) = 3$。

阶梯型矩阵的秩的计算

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 2 阶子式，如第 1, 2 行，1, 2 列，所构成的 2 阶子式：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}=-7$，所以 $r(A)\geq 2$。
- 任意 3 阶子式均为零！所以 $r(A)=2$。

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 有非零 3 阶子式，如 1, 2, 3 行，2, 4, 6 列，所构成的 3 阶子式：$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=45$，所以 $r\geq 3$。
- 任意 4 阶子式均为零！所以 $r(A)=3$。

阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 $b_1, b_2, \ldots, b_r \neq 0$，称为阶梯型矩阵。

阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 $b_1, b_2, \ldots, b_r \neq 0$，称为阶梯型矩阵。

阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A=\left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

的矩阵，其中 $b_1, b_2, \ldots, b_r \neq 0$，称为阶梯型矩阵。

性质 对上述阶梯型矩阵 A，其秩为：

$$r(A) = r = \text{阶梯形矩阵非零行的行数}$$

阶梯型矩阵的秩

形如：

$$A=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 $b_1, b_2, \ldots, b_r \neq 0$，称为阶梯型矩阵。

性质 对上述阶梯型矩阵 A，其秩为：

$$r(A) = r = \text{阶梯形矩阵非零行的行数}$$

注 任意矩阵，都可通过初等行变换，化为阶梯型矩阵！

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A) = 2$ 的结论？

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，

  是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A) = 2$ 的结论？

定理 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，

  是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A) = 2$ 的结论？

定理 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

启发 计算矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的技巧：

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，

  是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A) = 2$ 的结论？

定理 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

启发 计算矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的技巧：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，

  是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A)=2$ 的结论？

定理 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

启发 计算矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的技巧：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

从而

$$r(A) = \text{对应阶梯形矩阵非零行的行数}$$

秩的计算

已知

- 阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数 r。
- 一般矩阵的秩如何计算？例如，对 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 5}$，

  是否需逐一计算所有 40 个 3 阶子式，发现均为零，才得出 $r(A) = 2$ 的结论？

定理 矩阵作初等变换后，其秩保持不变。

启发 计算矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的技巧：

$$A_{m\times n} \xrightarrow[\text{（通常是初等行变换）}]{\text{一系列初等变换}} \text{阶梯形矩阵}$$

从而

$$r(A) = \text{对应阶梯形矩阵非零行的行数}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\longrightarrow$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\&&&\\&&&\end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\&&&\\&&&\end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\ & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=2$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix}_{4\times 4}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & -7 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=2$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10\\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\1&-1&1&-1&2\\2&-2&4&-4&10\\-1&1&1&0&-1\end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\1&-1&1&-1&2\\2&-2&4&-4&10\\-1&1&1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&2&-2&6\\0&0&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&2&-2&6\\0&0&0&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&0&2&-2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&0&2&-2&6\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 5}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \longleftrightarrow c_3}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \longleftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_1}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \longleftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=2$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq 2$ 时，$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq 2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq 2$ 时, $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$, 此时 $r(A)=3$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \longleftrightarrow c_3}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \longleftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\longleftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ & & \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=1$ 时, $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

例 计算 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda = 1$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，此时 $r(A) = 2$

例 计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq 1$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq 1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$

例 计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{3\times3}$ 的秩

解

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=2$
- 当 $\lambda\neq1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \lambda+1 & 2 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=3$

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

证明

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

证明 B 可写成一些初等矩阵的乘积：$B = P_1P_2\cdots P_s$。

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

证明 B 可写成一些初等矩阵的乘积：$B = P_1P_2\cdots P_s$。所以

$$AB = AP_1P_2\cdots P_s$$

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

证明 B 可写成一些初等矩阵的乘积：$B = P_1P_2\cdots P_s$。所以

$$AB = AP_1P_2\cdots P_s$$

为 A 作一系列初等列变换得到，

关于秩的结论

回忆 对任意矩阵 A：

$$A_{m\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{m\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

定理 任一矩阵 A，其等价标准形中的 r，正好是 A 的秩；即 $r(A) = r$。特别滴，每个矩阵的等价标准形是唯一的。

定理 设 $B_{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$A = A_{m\times n}$，则 $r(AB) = r(A)$。

证明 B 可写成一些初等矩阵的乘积：$B = P_1P_2\cdots P_s$。所以

$$AB = AP_1P_2\cdots P_s$$

为 A 作一系列初等列变换得到，其秩仍与 A 相等。

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

定理 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充分必要条件是 A 满秩（$r(A)=n$）。

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

定理 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充分必要条件是 A 满秩（$r(A)=n$）。

证明

$$A_{n\times n}\xrightarrow{\text{一系列初等变换}}D_{n\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

定理 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充分必要条件是 A 满秩（$r(A)=n$）。

证明

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则：

$$A\text{可逆} \iff D = I_n$$

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

定理 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充分必要条件是 A 满秩（$r(A)=n$）。

证明

$$A_{n\times n}\xrightarrow{\text{一系列初等变换}}D_{n\times n}=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

则：

$$A\text{可逆}\quad\Longleftrightarrow\quad D=I_n\quad\Longleftrightarrow\quad r=n$$

关于秩的结论

定义 设 A 为 n 阶方阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵。

定理 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充分必要条件是 A 满秩（$r(A)=n$）。

证明

$$A_{n\times n} \xrightarrow{\text{一系列初等变换}} D_{n\times n} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则：

$$A\text{可逆} \iff D=I_n \iff r=n \iff r(A)=n$$