§4.3　实对称矩阵的特征值和特征向量

数学系　梁卓滨

2016 - 2017 学年 I 暑修班

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta =$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \ \ a_2 \ \ \cdots \ \ a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T \beta$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T \beta = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T \beta = (\, -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \,) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T\beta = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T\beta = (\, -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \,) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3$$

向量内积

定义 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的内积定义为：

$$\alpha^T\beta = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

例 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积是

$$\alpha^T\beta = (\, -1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \,) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \times 2 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 = 4$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$
2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta =$$

$$\beta^T\alpha =$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha =$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n.$$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n.$$

所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (\, a_1 \;\, a_2 \;\, \cdots \;\, a_n \,) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (\, b_1 \;\, b_2 \;\, \cdots \;\, b_n \,) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n.$$

所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

另证 $\alpha^T\beta = \left(\alpha^T\beta\right)^T =$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n.$$

所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

另证 $\alpha^T\beta = \left(\alpha^T\beta\right)^T = \beta^T\left(\alpha^T\right)^T =$

内积性质

1. $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

证明 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$\alpha^T\beta = (\,a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\,)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

$$\beta^T\alpha = (\,b_1\ b_2\ \cdots\ b_n\,)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n.$$

所以 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

另证 $\alpha^T\beta = \left(\alpha^T\beta\right)^T = \beta^T\left(\alpha^T\right)^T = \beta^T\alpha$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$,（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma =$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = (\alpha^T + \beta^T)\gamma =$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = (\alpha^T+\beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = (\alpha^T+\beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

内积性质

2. $(k\alpha)^T\beta = k\alpha^T\beta$，（$k$ 是实数）
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\alpha^T\alpha = 0$

证明

2. 显然
3. $(\alpha+\beta)^T\gamma = (\alpha^T+\beta^T)\gamma = \alpha^T\gamma + \beta^T\gamma$
4. $\alpha^T\alpha = (\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n \,)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| =$$

$$||\beta|| =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} =$$

$$||\beta|| =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} =$$

$$||\beta|| =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$||\beta|| =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$||\beta|| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$||\beta|| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 1 + 25} =$$

向量范数

定义

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称为向量的长度或范数。

例 求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

解

$$||\alpha|| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77}$$

$$||\beta|| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 1 + 25} = 6$$

- 向量的长度或范数

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

- 向量的长度或范数

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

长度性质

1. $||\alpha|| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$||\alpha|| = 0$

- 向量的长度或范数

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

长度性质

1. $||\alpha|| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$||\alpha|| = 0$
2. $||k\alpha|| = |k| \cdot ||\alpha||$，（$k$ 是实数）

- 向量的长度或范数

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

长度性质

1. $||\alpha|| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$||\alpha|| = 0$
2. $||k\alpha|| = |k| \cdot ||\alpha||$，（$k$ 是实数）
3. 对任意向量 α, β，都成立

$$|\alpha^T\beta| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

- 向量的长度或范数

$$||\alpha|| := \sqrt{\alpha^T\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

长度性质

1. $||\alpha|| \geq 0$，并且仅当 $\alpha = 0$ 时，$||\alpha|| = 0$
2. $||k\alpha|| = |k| \cdot ||\alpha||$，（$k$ 是实数）
3. 对任意向量 α, β，都成立

$$|\alpha^T\beta| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$$

即

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

向量单位化

- 定义 长度为 1 的向量称为单位向量。

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为单位向量。
- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

都是单位向量

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为单位向量。
- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},\quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

  都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $||\alpha|| \neq 0$,

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为**单位向量**。
- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\text{-th} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

  都是单位向量
- 设 $\alpha \neq 0$，则 $||\alpha|| \neq 0$，向量 $\frac{1}{||\alpha||}\alpha$ 是单位向量：

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为单位向量。
- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

  都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $||\alpha|| \neq 0$，向量 $\frac{1}{||\alpha||}\alpha$ 是单位向量：

$$\left\| \frac{1}{||\alpha||}\alpha \right\| = \frac{1}{||\alpha||}||\alpha|| = 1$$

向量单位化

- **定义** 长度为 1 的向量称为单位向量。
- **例** 向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},\quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th}$$

都是单位向量

- 设 $\alpha \neq 0$，则 $||\alpha|| \neq 0$，向量 $\frac{1}{||\alpha||}\alpha$ 是单位向量：

$$\left\| \frac{1}{||\alpha||}\alpha \right\| = \frac{1}{||\alpha||}||\alpha|| = 1$$

称 $\frac{1}{||\alpha||}\alpha$ 为 α 的单位化

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $||\alpha|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $||\alpha|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$，所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{||\alpha||}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $||\alpha|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$，所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{||\alpha||}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

2. $||\beta|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{49} = 7$,

例 将下列向量单位化

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解

1. $||\alpha|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$，所以的 α 单位化为：

$$\frac{1}{||\alpha||}\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

2. $||\beta|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{49} = 7$，所以的 β 单位化为：

$$\frac{1}{||\beta||}\beta = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 2/7 \\ 4/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β **正交**（或**垂直**）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta=0$，则称 α,β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha=0\cdot a_1+0\cdot a_2+\cdots+0\cdot a_n=0$$

例 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ 与 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T\beta=2\times 1+4\times 2+5\times(-2)=0$$

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T\beta = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$$

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 中的向量两两正交：

向量正交

定义 若 $\alpha^T\beta = 0$，则称 α, β 正交（或垂直）

例 零向量与任意向量正交：

$$0^T\alpha = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n = 0$$

例 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 与 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 正交：

$$\alpha^T\beta = 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times (-2) = 0$$

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 中的向量两两正交：

$$\varepsilon_1^T\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1^T\varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2^T\varepsilon_3 = 0$$

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$
2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$
2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$
2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

例 向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

正交向量组

定义 若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 满足

1. 每个向量非零：$\alpha_i \neq 0$，$i = 1, 2, \ldots, s$
2. 两两正交：$\alpha_i^T \alpha_j = 0$，$i \neq j$

即则称该向量组为正交向量组。

例 向量组 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

例 向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 是正交向量组

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 一定线性无关。

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s)$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j}$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i\alpha_i^T\alpha_i$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i \underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i \underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

所以 $k_i = 0$。

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

定理 $\mathbb{R}^n$ 中正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 一定线性无关。

证明 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

则

$$0 = \alpha_i^T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s) \xlongequal{\alpha_i^T\alpha_j=0 \text{ for } i\neq j} k_i \underbrace{\alpha_i^T\alpha_i}_{\neq 0}$$

所以 $k_i = 0$。由 i 的任意性

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\text{（线性无关）} \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\text{（等价，两两正交）}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\text{（线性无关）} \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\text{（等价，两两正交）}$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\text{(线性无关)} \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\text{(等价，两两正交)}$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{\quad}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\quad}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\quad}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\qquad}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（线性无关）$\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$（等价，两两正交）

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s =$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2 - \cdots - \underline{\qquad\qquad}\beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\quad}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\quad}{\quad}\beta_2 - \cdots - \frac{\quad}{\quad}\beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{}{}\beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\text{（线性无关）} \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\text{（等价，两两正交）}$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T\beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T\beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{}{||\beta_{s-1}||^2}\beta_{s-1}$$

正交化

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(线性无关) $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$(等价，两两正交)

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{}{||\beta_{s-1}||^2}\beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{}{||\beta_{s-1}||^2}\beta_{s-1}$$

正交化

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s(\text{线性无关}) \xrightarrow{\text{正交化}} \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s(\text{等价，两两正交})$$

实现正交化步骤（施密特正交化方法）:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_s^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s^T \beta_{s-1}}{||\beta_{s-1}||^2}\beta_{s-1}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad} \beta_1 - \underline{\qquad\qquad} \beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad} \beta_1 - \underline{\qquad\qquad} \beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2} \beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad} \beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{||\beta_1||^2}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{||\beta_2||^2}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{}{}\beta_1 - \frac{}{}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{}{}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}-\frac{\qquad}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\qquad}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}-\frac{12}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{-32}{16}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\underline{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\underline{\qquad\qquad}\beta_1-\underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}-\frac{12}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{-32}{16}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\underline{\qquad\qquad}\beta_1-\underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad\qquad}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad\qquad}{}\beta_1 - \frac{\qquad\qquad}{}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad} \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad} \beta_1 - \underline{\qquad\qquad} \beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\quad}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\underline{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\underline{\qquad\qquad}\beta_1-\underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 =$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\underline{\quad}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\underline{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\underline{\qquad\qquad}\beta_1-\underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_1-\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\quad}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \underline{\qquad\qquad}\beta_1 - \underline{\qquad\qquad}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化

解

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\underline{\hspace{3cm}}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\underline{\hspace{3cm}}\beta_1-\underline{\hspace{3cm}}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/4\\-1/4\\1/4\\3/4\end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是**正交矩阵**。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$；

证明

1. $Q^TQ=I_n \Rightarrow$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow \qquad |I_n| = |Q^TQ|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$；

证明

1. $Q^TQ=I_n \Rightarrow 1=\ |I_n|=|Q^TQ|=|Q^T|\cdot|Q|$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$；

证明

1. $Q^TQ=I_n \Rightarrow 1=|I_n|=|Q^TQ|=|Q^T|\cdot|Q|=|Q|^2$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ=I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q|=1$ 或 $|Q|=-1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1}=Q^T$；

证明

1. $Q^TQ=I_n \Rightarrow 1=|I_n|=|Q^TQ|=|Q^T|\cdot|Q|=|Q|^2 \Rightarrow |Q|=\pm1$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；

证明

1. $Q^TQ = I_n \ \Rightarrow 1 = \ |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T|\cdot|Q| = |Q|^2 \ \Rightarrow \ |Q| = \pm 1$
2. 显然

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然
3. $(PQ)^T(PQ) =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然
3. $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然
3. $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TI_nQ =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然
3. $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TI_nQ = Q^TQ =$

正交矩阵

定义 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^TQ = I_n$，则称 Q 是正交矩阵。

例 $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵：

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质

1. 若 Q 为正交矩阵，则 $|Q| = 1$ 或 $|Q| = -1$；
2. 若 Q 为正交矩阵，则 Q 可逆，且 $Q^{-1} = Q^T$；
3. 若 P, Q 为正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵。

证明

1. $Q^TQ = I_n \Rightarrow 1 = |I_n| = |Q^TQ| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 \Rightarrow |Q| = \pm 1$
2. 显然
3. $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TI_nQ = Q^TQ = I_n$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \dots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \dots\, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & & \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q = (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n)$，则

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} (\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

所以

$$Q^TQ=I$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

所以

$$Q^TQ=I \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\alpha_i^T\alpha_i=1,\\ \alpha_i^T\alpha_j=0,\end{cases}$$

正交矩阵

定理 n 阶矩阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是：Q 的列（行）向量组是单位正交向量组。

证明 设 $Q=(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

所以

$$Q^TQ=I \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\alpha_i^T\alpha_i=1, & (i=1,\,2,\,\ldots,\,n)\\ \alpha_i^T\alpha_j=0, & (i\neq j;\ i,\,j=1,\,2,\,\ldots,\,n)\end{cases}$$

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

答案 A_1 是正交矩阵

例 验证下列矩阵是否正交矩阵：

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

提示 验证：列向量组是单位正交向量组

答案 A_1 是正交矩阵，A_2 不是正交矩阵

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0=|\lambda I-A|=$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

所以特征值是 $\lambda_1 = -\sqrt{-1}$，$\lambda_2 = \sqrt{-1}$。

实对称矩阵的特征值和特征向量

- 对任意 n 阶方阵：
  1. 一定有 n 个特征值（计算重数，复数域内），可能有非实数特征值
  2. 不一定能对角化

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值方程是

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

所以特征值是 $\lambda_1=-\sqrt{-1}$，$\lambda_2=\sqrt{-1}$。

- 对实对称矩阵，总成立：
  1. 定理 实对称矩阵的特征值都是实数。
  2. 定理 实对称矩阵一定可以对角化。

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q ，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注 由于正交矩阵满足 $Q^{-1} = Q^T$,

定理 实对称矩阵一定可以对角化。

设 A 为实对称矩阵，则一定存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

事实上，还可以进一步要求 P 是正交矩阵：

定理 设 A 为实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q ，使得

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注 由于正交矩阵满足 $Q^{-1} = Q^T$，上述等价于 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，

$$\alpha_2^T \alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^T A\alpha_1 = \lambda_1\, \alpha_2^T\alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^T A\alpha_1 = \lambda_1\, \alpha_2^T\alpha_1$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_2\, \alpha_1^T\alpha_2$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$\begin{aligned} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_2^T A\alpha_1 = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1} \\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2} \end{aligned}$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2}$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2}$$

注意 $\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T =$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$\begin{aligned} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1} \\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2} \end{aligned}$$

注意$\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T =$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1}$$

$$A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2}$$

注意$\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A\alpha_2$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$\begin{aligned} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_2^T A\alpha_1 = \lambda_1 \alpha_2^T\alpha_1 \\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_2 \alpha_1^T\alpha_2 \end{aligned}$$

注意$\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A\alpha_2$，两式相减得

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2^T\alpha_1$$

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交。

证明 设 A 为实对称矩阵，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为两特征值，α_1, α_2 为相应特征向量，则

$$\begin{aligned} A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2^T A\alpha_1} = \lambda_1 \boxed{\alpha_2^T\alpha_1} \\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1^T A\alpha_2} = \lambda_2 \boxed{\alpha_1^T\alpha_2} \end{aligned}$$

注意$\alpha_2^T A\alpha_1 = \left(\alpha_2^T A\alpha_1\right)^T = \alpha_1^T A^T \left(\alpha_2^T\right)^T = \alpha_1^T A\alpha_2$，两式相减得

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2^T\alpha_1$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以

$$\alpha_2^T\alpha_1 = 0$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	正交化	单位化
λ_1	n_1		
λ_2	n_2		
$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s		
	共 n		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1			
λ_2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$			
λ_s	n_s			
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$		
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系	正交化	单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow \beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$				
	共 n	共 n 个无关特征向量				

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I-A)x=0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)},\cdots,\alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)},\cdots,\beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)},\cdots,\gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)},\cdots,\alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)},\cdots,\beta_{n_2}^{(2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)},\cdots,\alpha_{n_s}^{(s)}$				
	共 n	共 n 个无关特征向量				

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$			
	共 n	共 n 个无关特征向量				

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$		
	共 n	共 n 个无关特征向量				

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解释示意图

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系		正交化		单位化
λ_1	n_1	$\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(1)}, \cdots, \beta_{n_1}^{(1)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(1)}, \cdots, \gamma_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$\alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(2)}, \cdots, \beta_{n_2}^{(2)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(2)}, \cdots, \gamma_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$\alpha_1^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\beta_1^{(s)}, \cdots, \beta_{n_s}^{(s)}$	$\Rightarrow$	$\gamma_1^{(s)}, \cdots, \gamma_{n_s}^{(s)}$
	共 n	共 n 个无关特征向量				构成单位正交特征向量

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

- $\lambda_1=-1$，
- $\lambda_2=2$，
- $\lambda_3=5$，

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$,
- $\lambda_3=5$,

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，特征方程：

$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_2=\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$，特征方程：

$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2=\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，特征方程：

$0 = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1 = -1$，特征向量$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 2$，特征向量$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3 = 5$，特征向量$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

所以取 $Q = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$，

例 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，特征方程：

$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

- $\lambda_1=-1$，特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_2=2$，特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_2=\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$
- $\lambda_3=5$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$

所以取 $Q=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{array}\\\begin{pmatrix}2/3&2/3&1/3\\2/3&-1/3&-2/3\\1/3&-2/3&2/3\end{pmatrix}\end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重）

- $\lambda_3=10$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases} \alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{正交化}} \begin{cases} \beta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2=\begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

所以取 $Q=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}&2/3\sqrt{5}&1/3\\1/\sqrt{5}&4/3\sqrt{5}&2/3\\0&\sqrt{5}/3&-2/3\end{pmatrix}\end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$，

例 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

- $\lambda_1=1$（二重），特征向量

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\frac{5}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_3=10$，特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

所以取 $Q=\underbrace{\begin{array}{ccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5&2/3\sqrt5&1/3\\1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\\0&\sqrt5/3&-2/3\end{pmatrix}}\end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ ▸ Det

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重）

- $\lambda_2=5$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$ ▸ Det

- $\lambda_1 = -1$（二重），特征向量：

- $\lambda_2 = 5$，特征向量：

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量： Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_2=5$，特征向量： Det

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ ▸ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量： ▸ Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_2=5$，特征向量： ▸ Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量： Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}$$

Det

- $\lambda_2=5$，特征向量： Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量：Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Det

- $\lambda_2=5$，特征向量：Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量：Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow[\text{Det}]{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_2=5$，特征向量：Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量：Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow[\text{Det}]{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_2=5$，特征向量：Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量：Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{cases}$$

Det

- $\lambda_2=5$，特征向量：Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$\text{取 } Q=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ Det

- $\lambda_1=-1$（二重），特征向量： Detail

$$\begin{cases}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow[\text{Det}]{\text{正交化}}\begin{cases}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\end{cases}\xrightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\gamma_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \gamma_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{cases}$$

- $\lambda_2=5$，特征向量： Det $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\gamma_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

取 $Q=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{array}}_{Q\text{：正交阵}}$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$Q^{-1}AQ = \Lambda$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, \quad , \ldots, \quad) = (\quad , \quad , \ldots, \quad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, \qquad) = (\qquad , \qquad , \ldots, \qquad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\qquad , \qquad , \ldots , \qquad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \qquad , \ldots, \qquad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \qquad)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ=\Lambda \Leftrightarrow AQ=Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}_{Q}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\dots,\lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$$

由 Q 是正交矩阵，成立

1. $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是单位正交的特征向量；$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是相应特征值。

定理 设 A 为实对称矩阵，则 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

注 回忆：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda \Leftrightarrow AQ = Q\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$

由 Q 是正交矩阵，成立

1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是单位正交的特征向量；$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是相应特征值。
2. $Q^{-1} = Q^T$，所以 $Q^TAQ = \Lambda$

The End

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

▸ Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3-r_2}}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-5)$$

▸ Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda-5)$$

$$=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = -1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(-I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-2&-2&0\\-2&-2&-2&0\\-2&-2&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-x_2-x_3$$

▸ Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A \vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_1=-1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(-I-A \vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) =$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=5$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(5I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&-2&0\\-2&4&-2&0\\-2&-2&4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=5$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(5I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&-2&0\\-2&4&-2&0\\-2&-2&4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\1&-2&1&0\\2&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&-3&3&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2=5$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(5I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 4 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$
(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

所以 $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \end{cases}$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 5$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(5I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

基础解系：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2=5$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(5I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&-2&0\\-2&4&-2&0\\-2&-2&4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\1&-2&1&0\\2&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&-3&3&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases}x_1\phantom{{}+x_2}-x_3=0\\ \phantom{x_1+{}}x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 =$$

$$\beta_2 =$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 =$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▸ Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\qquad}{\qquad}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\qquad}{\qquad}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Back

将线性无关组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{}{}\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Back