

## §2.3 特殊矩阵

数学系 梁卓滨

2016 - 2017 学年 I 暑修班

# 教学要求



# 提要

- 单位矩阵    数量矩阵    对角矩阵    三角矩阵

# 提要

- 单位矩阵  $\subset$  数量矩阵  $\subset$  对角矩阵  $\subset$  三角矩阵

# 提要

- 单位矩阵  $\subset$  数量矩阵  $\subset$  对角矩阵  $\subset$  三角矩阵
- 对称矩阵

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为单位矩阵，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ）

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为单位矩阵，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 单位矩阵

**定义** 对角线元素都是 1，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为单位矩阵，记为  $I_n$ （有时简记为  $I$ ），即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

**性质** 对任意  $n$  阶方阵  $A$ ，都有

$$I_n A = A I_n = A$$



$$I_n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 I_n A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}
 \end{aligned}$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵



# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

$$1. \quad kI_n + lI_n = (k + l)I_n, \quad kI_n - lI_n = (k - l)I_n$$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$

2.  $(kI_n)(lI_n) =$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$

2.  $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_n$

# 数量矩阵

**定义** 对角线元素都是同一个数  $k$ ，其余元素均为 0 的  $n$  阶矩阵称为数量矩阵，即

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}_{n \times n} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = kI_n$$

可见，数量矩阵可表示为  $kI_n$ 。

**性质** 两个数量矩阵的和、差、乘积仍是数量矩阵，例如

1.  $kI_n + lI_n = (k + l)I_n$ ,  $kI_n - lI_n = (k - l)I_n$
2.  $(kI_n)(lI_n) = (kl)I_nI_n = (kl)I_n$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**



# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 对角矩阵

**定义** 除了对角线，其余位置都是 0 的  $n$  阶矩阵，称为**对角矩阵**，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \underline{\underline{\text{或写成}}} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**性质** 两个对角矩阵的和、差、乘积仍是对角矩阵

## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & & & \\ & a_{22} + b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & & & \\ & a_{22} - b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$



## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 对角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 三角矩阵

- 上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵

- 上三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 下三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵

- 上三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 下三角矩阵 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**性质** 两个上（下）三角矩阵的和、差、乘积仍是上（下）三角矩阵

## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} + b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$



## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} - b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

## 三角矩阵的和、差

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

# 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 三角矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22}b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。



# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称, 等价于它满足  $A^T = A$ 。

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素		

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素	$a_{ij}$	

# 对称矩阵

**定义** 如果  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称为**对称矩阵**。

**例**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  都是对称矩阵。

**注** 方阵  $A$  对称，等价于它满足  $A^T = A$ 。这是：

	$A$	$A^T$
位置 $(i, j)$ 上的元素	$a_{ij}$	$a_{ji}$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T =$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C =$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$  方阵,  $D^TD$  为  $n \times n$  方阵

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  $(DD^T)^T =$



## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
$$(D^TD)^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
$$(D^TD)^T = D^T (D^T)^T =$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
$$(D^TD)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$$

## 性质

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $A \pm B, kA$  也是  $n$  阶对称矩阵。
2. 设  $C$  为任一  $n$  阶方阵, 则  $C + C^T$  为  $n$  阶对称矩阵。
3. 设  $D$  为任一  $m \times n$  矩阵, 则  $DD^T$  为  $m$  阶对称方阵;  $D^TD$  为  $n$  阶对称方阵

## 证明

1.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T = A \pm B$ , 所以  $A \pm B$  对称  
 $(kA)^T = kA^T = kA$ , 所以  $kA$  对称
2.  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ , 所以  $C + C^T$  对称
3.  $D$  为  $m \times n$ ,  $D^T$  为  $n \times m$ , 所以  $DD^T$  为  $m \times m$ ,  $D^TD$  为  $n \times n$ 。此外:  
$$(DD^T)^T = (D^T)^T D^T = DD^T$$
$$(D^TD)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$$

所以  $DD^T, D^TD$  均对称。

# 对称矩阵

注 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。

# 对称矩阵

注 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# 对称矩阵

注 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

# 对称矩阵

注 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## 对称矩阵

注 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

# 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$AB$  对称

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T =$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T =$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$



## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = AB,$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = AB,$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB,$$

## 对称矩阵

**注** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 然而  $AB$  未必对称。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ 却不是对称。}$$

**性质** 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  对称的充分必要条件是交换 (i.e.  $AB = BA$ )。

**证明**

$$AB \text{ 对称} \implies AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

反之,

$$AB = BA \implies (AB)^T = B^T A^T = BA = AB, \text{ i.e. } AB \text{ 对称}$$