§3.5 线性方程组解的结构

数学系 梁卓滨

2016 - 2017 学年 I 暑修班

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad +2x_3-3x_4=0 \\ \qquad x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量
x_3, x_4

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3\qquad\ =0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\qquad\ \ 2x_3-3x_4=0 \\ \qquad x_2-\ x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1= \\ x_2= \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量

x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3-3x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1+3c_2 \\ x_2=c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3-3x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1+3c_2 \\ x_2=c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3-3x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1+3c_2 \\ x_2=c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3-3x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_3+3x_4 \\ x_2=x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1+3c_2 \\ x_2=c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2 基础解系

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

ξ_1, ξ_2 基础解系

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2基础解系

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3\qquad\ =0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_1+2c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_1+2c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_1+2c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_1 + 2c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_1+2c_2 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2 基础解系

引入

例 解齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3 \qquad =0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2 \qquad + x_4=0 \\ \quad -x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-x_4 \\ x_3=x_2+2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2= \quad c_1 \\ x_3= \quad c_1+2c_2 \\ x_4= \qquad c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ \boxed{x_4} \end{pmatrix}}_{x} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2基础解系

引入

例 解齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3\quad\ \ =0\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\2&3&1&0&0\\3&5&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&0\\0&-1&1&-2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2\qquad+\ \ x_4=0\\ \quad-\ x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4\\ x_3=x_2+2x_4\end{cases}$$

自由变量 x_2, x_4

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2c_1-c_2\\ x_2=\quad c_1\\ x_3=\quad c_1+2c_2\\ x_4=\qquad\quad c_2\end{cases}\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \boxed{x_2}\\ x_3\\ \boxed{x_4}\end{pmatrix}}_{x}=c_1\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\ \boxed{1}\\ 1\\ \boxed{0}\end{pmatrix}}_{\xi_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\ \boxed{0}\\ 2\\ \boxed{1}\end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$$

ξ_1, ξ_2基础解系

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组 $$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有 $n - r$ 个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \qquad (s = n - r)$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组 $$Ax = 0$$

满足

$$r(A) = r < n$$

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有 $n-r$ 个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \qquad (s = n-r)$$

并且，方程组的任意解 x，均可由基础解系线性表示：

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

齐次线性方程组的基础解系

定义 如果 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解向量组的一个极大无关组，则称

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 若齐次线性方程组 $Ax = 0$

满足

$$r(A) = r < n$$

也是自由变量个数

则方程组的基础解系存在，且每个基础解系恰恰有 $\boxed{n-r}$ 个向量组成：

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \qquad (s = n - r)$$

并且，方程组的任意解 x，均可由基础解系线性表示：

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad x_2 - \;\; x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2：

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2：$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax=0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n-r(A)$ 作类似操作，便得 $n-r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

基础解系表示齐次方程组 $Ax = 0$ 的通解

1. $(A \vdots 0) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 简化的阶梯型矩阵，写出同解的方程组；
2. 确定自由未知变量；
3. 求基础解系：
   - 将一个自由变量取值为 1，其余取 0，得到一个解向量；
   - 对所有自由变量 $n - r(A)$ 作类似操作，便得 $n - r(A)$ 个解向量，构成基础解系
4. 通解就是：基础解系的线性组合

例

1. 假设求得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$
2. 自由变量为 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2：$\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$
4. 通解：$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 + \quad 3x_3 + \quad 5x_3 - \quad 5x_4 \quad = 0 \\ 3x_1 + \quad 5x_3 + \quad 6x_3 - \quad 7x_4 \quad = 0 \end{cases}$ 的通解

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{array}\right.$ 的通解

解

$$(A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 + \quad 3x_3 + \quad 5x_3 - \quad 5x_4 \quad = 0 \\ 3x_1 + \quad 5x_3 + \quad 6x_3 - \quad 7x_4 \quad = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 + \quad 3x_3 + \quad 5x_3 - \quad 5x_4 \quad = 0 \\ 3x_1 + \quad 5x_3 + \quad 6x_3 - \quad 7x_4 \quad = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \qquad 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ \end{cases}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ \quad x_3+ \quad 4x_3- \quad 3x_4 = 0 \\ 2x_1+ \quad 3x_3+ \quad 5x_3- \quad 5x_4 = 0 \\ 3x_1+ \quad 5x_3+ \quad 6x_3- \quad 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1=-7x_3+4x_4 \\ x_2=3x_3-x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2: ,

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1=-7x_3+4x_4 \\ x_2=3x_3-x_4 \end{cases}$

2. 自由变量 x_3, x_4

3. 基础解系 ξ_1, ξ_2: $\xi_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & x_3+ & 4x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 3x_3+ & 5x_3- & 5x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 5x_3+ & 6x_3- & 7x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2: $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ \quad x_3+ \quad 4x_3- \quad 3x_4 = 0 \\ 2x_1+ \quad 3x_3+ \quad 5x_3- \quad 5x_4 = 0 \\ 3x_1+ \quad 5x_3+ \quad 6x_3- \quad 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_3, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2: $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + \quad x_3 + \quad 4x_3 - \quad 3x_4 \quad = 0 \\ 2x_1 + \quad 3x_3 + \quad 5x_3 - \quad 5x_4 \quad = 0 \\ 3x_1 + \quad 5x_3 + \quad 6x_3 - \quad 7x_4 \quad = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 \end{cases}$

2. 自由变量 x_3, x_4

3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 通解： $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & 2x_3- & x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 4x_3- & x_3- & 7x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 6x_3- & x_3- & 11x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+2x_3-x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+4x_3-x_3-7x_4=0 \\ 3x_1+6x_3-x_3-11x_4=0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + & 2x_3 - & x_3 - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_3 - & x_3 - & 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & 6x_3 - & x_3 - & 11x_4 & = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+ & 2x_3- & x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 4x_3- & x_3- & 7x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 6x_3- & x_3- & 11x_4 & =0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + & 2x_3 - & x_3 - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_3 - & x_3 - & 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & 6x_3 - & x_3 - & 11x_4 & = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_1 + 3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 \quad - \ 4x_4 = \ 0 \\ \end{cases}$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_1 + 3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

例 用基础解系表示 $\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1+ & 2x_3- & x_3- & 3x_4 & =0 \\ 2x_1+ & 4x_3- & x_3- & 7x_4 & =0 \\ 3x_1+ & 6x_3- & x_3- & 11x_4 & =0 \end{array}\right.$ 的通解

解

$$(A\vdots 0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1+ & 2x_2 & & -\ 4x_4 = & 0 \\ & & x_3- & x_4 = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-2x_2+4x_4 \\ x_3=x_4 \end{array}\right.$$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2: ,

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1+2x_3-x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+4x_3-x_3-7x_4=0 \\ 3x_1+6x_3-x_3-11x_4=0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \boxed{1} \\ \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \boxed{0} \\ \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{1} \\ \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \boxed{0} \\ \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + & 2x_3 - & x_3 - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_3 - & x_3 - & 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & 6x_3 - & x_3 - & 11x_4 & = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \boxed{0} \\ \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \boxed{0} \\ \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + & 2x_3 - & x_3 - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_3 - & x_3 - & 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & 6x_3 - & x_3 - & 11x_4 & = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

例 用基础解系表示 $\begin{cases} x_1 + & 2x_3 - & x_3 - & 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + & 4x_3 - & x_3 - & 7x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & 6x_3 - & x_3 - & 11x_4 & = 0 \end{cases}$ 的通解

解

$$(A \vdots 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. 同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
2. 自由变量 x_2, x_4
3. 基础解系 ξ_1, ξ_2： $\xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \boxed{0} \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$
4. 通解： $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

证明

$$A\xi$$

$$= 0$$

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质:

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

证明

$$A\xi = A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s)$$

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \end{aligned}$$

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_s 0 \end{aligned}$$

定理 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

的解有下列性质：

1. 若 ξ_1, ξ_2 是解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是解
2. 若 ξ 是解，则对 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也是解
3. 更一般地，若 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ 是解，$c_1, c_2, \ldots, c_s$ 是任意常数，则解的线性组合

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

也是解

证明

$$\begin{aligned} A\xi &= A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s) \\ &= c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \cdots + c_sA\xi_s \\ &= c_10 + c_20 + \cdots + c_s0 = 0 \end{aligned}$$

例 假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

例 假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解

例 假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解
2. 是否包含 3 个解（基础解系包含向量的个数是定值）

例 假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，问如下各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2 + \xi_3$
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$
3. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_1 - \xi_3$
4. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

提示 判断

1. 是否为解
2. 是否包含 3 个解（基础解系包含向量的个数是定值）
3. 是否为线性无关

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A \vdots b)$
$= 2$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2 \\ 2&3&1&0&-1 \\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2 \\ 0&1&-1&2&-5 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad +2x_3-3x_4=2 \\ \qquad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A \vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad +2x_3-3x_4=2 \\ \qquad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2 \\ 2&3&1&0&-1 \\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2 \\ 0&1&-1&2&-5 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad 2x_3-3x_4=2 \\ x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

例 解非齐次线性方程组： $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A \vdots b)$
$= 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ \quad x_2 - \ x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2 \\ 2&3&1&0&-1 \\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2 \\ 0&1&-1&2&-5 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3-3x_4=2 \\ \quad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2 \\ 2&3&1&0&-1 \\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2 \\ 0&1&-1&2&-5 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\vdots b)=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3-3x_4=2 \\ \quad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3c_2 \\ -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2\\ 2&3&1&0&-1\\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2\\ 0&1&-1&2&-5\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \quad r(A)=r(A\vdots b)=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad +2x_3-3x_4=2 \\ \qquad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases} \quad \text{自由变量 } x_3, x_4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\-5\\0\\0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A \vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3-3x_4=2 \\ x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量
x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}=\underset{\eta}{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}+c_1\underset{\xi_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}+c_2\underset{\xi_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

例 解非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A \vdots b)$
$=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3-3x_4=2 \\ \quad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1= 2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3= c_1 \\ x_4= c_2 \end{cases} \Rightarrow \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}=\underset{\eta}{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}+c_1\underset{\xi_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}+c_2\underset{\xi_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$$

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A\vdots b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&-1&2 \\ 2&3&1&0&-1 \\ 3&5&1&1&-4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&2&-3&2 \\ 0&1&-1&2&-5 \\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\vdots b)=2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3-3x_4=2 \\ \quad x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_3+3x_4 \\ x_2=-5+x_3-2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2-2c_1+3c_2 \\ x_2=-5+c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}}=\underset{\eta}{\begin{pmatrix} 2\\-5\\0\\0 \end{pmatrix}}+c_1\underset{\xi_1}{\begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0 \end{pmatrix}}+c_2\underset{\xi_2}{\begin{pmatrix} 3\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$

$\eta: Ax=b$一个解

$\xi_1,\xi_2: Ax=0$基础解系

例 解非齐次线性方程组: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A \vdots b) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -5 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

自由变量 x_3, x_4

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = -5 + c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\eta} + c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\xi_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\xi_2}$$

$$\Rightarrow x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

$\eta : Ax = b$一个解

$\xi_1, \xi_2 : Ax = 0$基础解系

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中，用 0 代替 b，所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 $Ax = b$ 的导出组。

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中，用 0 代替 b，所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 $Ax = b$ 的导出组。

如 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$ 的导出组是

定义 在非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

中，用 0 代替 b，所得到的齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

称为原方程组 $Ax = b$ 的导出组。

如 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$ 的导出组是

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

$$\xi \qquad\qquad c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以 $A(x - \eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$，说明 $x - \eta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

定理 如果 η 是非齐次线性方程组

$$Ax = b$$

的一个解，则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi$$

其中 ξ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。

进一步，设导出组 $Ax = 0$ 的基础解系是

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$$

则原方程组的任意解 x 可以表示成

$$x = \eta + \xi = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

证明 因为

$$Ax = b, \quad A\eta = b$$

所以 $A(x-\eta) = Ax - A\eta = b - b = 0$，说明 $x-\eta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解。所以 $x - \eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$.

用基础解系表示 $Ax = b$ 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解 η；
- 求出导出组 $Ax = 0$ 的基础解系：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$

则 $Ax = b$ 的通解是

用基础解系表示 $Ax = b$ 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解 η：
- 求出导出组 $Ax = 0$ 的基础解系：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$

则 $Ax = b$ 的通解是

$$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s$$

用基础解系表示 $Ax=b$ 通解

先是

- 将增广矩阵 (A, b) 化为简化的阶梯形矩阵，写出同解方程组；
- 确定自由未知变量；

然后

- 求出一个特解 η：可取自由未知量全为 0 得到
- 求出导出组 $Ax=0$ 的基础解系：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$

则 $Ax=b$ 的通解是

$$x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_s\xi_s$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

的通解。

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=1 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4-x_5=3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

例 用"特解 + 基础解系的线性组合"的形式，求出

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=1 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4-x_5=3 \end{cases}$$

的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 + x_4 \quad\;\; = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ \quad\ \ x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1. 同解于：$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad\quad\quad = 1 \\ \quad\ \ x_2 + x_3 \quad\quad - x_5 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

例 用“特解 + 基础解系的线性组合”的形式，求出

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=1 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4-x_5=3 \end{cases}$$ 的通解。

解

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1. 同解于：$\begin{cases} x_1-x_3=1 \\ x_2+x_3-x_5=-1 \\ x_4+x_5=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=-1-x_3+x_5 \\ x_4=2-x_5 \end{cases}$

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 \quad\quad\quad = 1 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad -x_5 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 \quad\quad\quad = 1 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad -x_5 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad = 1 \\ x_2 \quad +x_3 \quad -x_5 = -1 \\ x_4 \quad +x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$.

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad = 1 \\ x_2 \quad +x_3 \quad -x_5 = -1 \\ x_4 \quad +x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$.分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. 原方程组同解于：

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad = 1 \\ x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2. 自由变量：x_3, x_5

3. 原方程组特解：取自由变量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 导出组 $Ax = 0$同解于 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$.分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. 通解：$x = \eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ 其中 c_1, c_2 为任意常数。