

第 7 章 α : 微分方程的概念

数学系 梁卓滨

2016-2017 学年 II

- ◆ 常微分方程的基本概念
- ♣ 应用 I: “指数式增长-衰减” 方程
- ♥ 应用 II: 电感、电容方程
- ♠ 应用 III: 阻尼运动方程

We are here now...

◆ 常微分方程的基本概念

♣ 应用 I: “指数式增长-衰减” 方程

♥ 应用 II: 电感、电容方程

♠ 应用 III: 阻尼运动方程

常微分方程定义

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \dots$$

都是所谓常微分方程

常微分方程定义

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \dots$$

都是所谓常微分方程

- 注 $x dy + y dx = 0$ 也是常微分方程

常微分方程定义

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \dots$$

都是所谓常微分方程

- 注 $x dy + y dx = 0$ 也是常微分方程：

$$x dy + y dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

常微分方程定义

- 设 $y = f(x)$ 为未知函数，如下方程

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x, \quad y' - 2xy + e^x = 0,$$

$$(y''')^4 - (y'')^2 = 5 - y, \dots$$

都是所谓常微分方程

- 注 $x dy + y dx = 0$ 也是常微分方程：

$$x dy + y dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

- 实际问题 $\xrightarrow{\text{建模}}$ 微分方程 $\xrightarrow{\text{求解方程}}$ 实际问题

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k$$

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad \Rightarrow \quad y'(t) = k \cdot y(t)$$

常微分方程

例 在理想实验条件下，任何时刻，培养皿中细菌数目满足

$$\frac{\text{细菌分裂速度}}{\text{细菌数目}} = k.$$

问细菌数目随时间变化规律。

探讨 设 $y(t)$ 为 t 时刻细菌数目，则 $y'(t)$ 为细菌分裂速度，并且

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad \Rightarrow \quad y'(t) = k \cdot y(t)$$

如何求出 $y(t)$?

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	
$x dy + y dx = 0$	
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	
$x dy + y dx = 0$	
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$x dy + y dx = 0$	
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$x dy + y dx = 0$	1
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 7x = 0$	

常微分方程的阶

- 常微分方程中，未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶

例

常微分方程	阶数
$y' - 2xy^3 + e^x = 0$	1
$(y''')^{400} - (y'')^2 + y' = 5e^x - y$	3
$x dy + y dx = 0$	1
$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 7x = 0$	2

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解 $\frac{dy}{dx} - 3y$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} =$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解

$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} -$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解

$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x}$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解

$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$ 。

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$ 。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} =$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$ 。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} = C$

常微分方程的解 I

- 若一个函数代入常微分方程后，使方程成为恒等式，则称该函数为该微分方程的解

例 验证 $y = Ce^{3x}$ 是否微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 的解，其中 C 为任意常数。

解
$$\frac{dy}{dx} - 3y = (Ce^{3x})' - 3Ce^{3x} = C \cdot 3e^{3x} - 3Ce^{3x} = 0$$

注 通常，满足微分方程的函数可以有很多。这时要对方程附加额外条件，才有可能得到唯一解。一般添加所谓“初始条件”。

例 求 $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ 在初始条件 $y(0) = 2$ 下的解。

解 已知 $y = Ce^{3x}$ 。将 $y(0) = 2$ 代入，得 $2 = C \cdot e^{3 \cdot 0} = C$ ，所以

$y = 2e^{3x}$ 。

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' =$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' =$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x =$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore y'' - 2y' + y =$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

常微分方程的解 II

例 验证 $y = xe^x$ 是否微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解?

解

$$\because y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$$

$$y'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\therefore y'' - 2y' + y = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0$$

所以 $y = xe^x$ 是微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解？其中 c_1, c_2 是任意常数

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\therefore y' =$$

$$y'' =$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\begin{aligned}\therefore y' &= (c_1x + c_2x^2)' = \\ y'' &= \end{aligned}$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' =$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' =$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y =$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2)$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\begin{aligned}\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y &= (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2) \\ &= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2\end{aligned}$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\begin{aligned}\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y &= (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2) \\ &= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 = 0\end{aligned}$$

常微分方程的解 III

例 验证 $y = c_1x + c_2x^2$ 是否微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ 的解? 其中 c_1, c_2 是任意常数

解

$$\because y' = (c_1x + c_2x^2)' = c_1 + 2c_2x$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2x)' = 2c_2$$

$$\begin{aligned}\therefore y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y &= (2c_2) - \frac{2}{x}(c_1 + 2c_2x) + \frac{2}{x^2}(c_1x + c_2x^2) \\ &= 2c_2 - \frac{2c_1}{x} - 4c_2 + \frac{2c_1}{x} + 2c_2 = 0\end{aligned}$$

所以 $y = c_1x + c_2x^2$ 是微分方程 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

比较:

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的通解

比较：

- $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
- $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
- $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）， $y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）， $y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）， $y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解（通解）

常微分方程的解 IV

- 如果常微分方程的解含有相互独立的任意常数，且数目与常微分方程的阶相同，则称此解是微分方程的**通解**
- 如果常微分方程的解不包含有任意取值的常数，则称此解是微分方程的**特解**

比较：

1. $y = Ce^{3x}$ 是 $y' - 3y = 0$ 的解（通解）， $y = 2e^{3x}$ 是特解
2. $y = xe^x$ 是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解（特解）
3. $y = c_1x + c_2x^2$ 是 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的解（通解）

注 通常，添加初始条件后，可确定出通解中的常数，从而得出特解。

We are here now...

◆ 常微分方程的基本概念

♣ 应用 I: “指数式增长-衰减” 方程

♥ 应用 II: 电感、电容方程

♠ 应用 III: 阻尼运动方程

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。
2. 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' =$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' =$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……
- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} =$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……
- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解

2. 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

- 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

- 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
- C 是初始值

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
2. 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

1. 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
2. C 是初始值： $f(0) = Ce^{\gamma \cdot 0} = C$ 。

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

1. 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
2. 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

1. 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
2. C 是初始值： $f(0) = Ce^{\gamma \cdot 0} = C$ 。所以

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

- 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
- C 是初始值： $f(0) = Ce^{\gamma \cdot 0} = C$ 。所以

$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

“增长-衰减”系统

- 不少物理系统中，物理量的变化率正比于该时刻的物理量，从而

$$f'(t) = \gamma f(t) \quad (\gamma \text{ 为常数})$$

这是一阶常微分方程。

- 应用 放射性物质衰变；温度交换；生物繁殖……

- 练习

- 验证 $f(t) = e^{\gamma t}$ 是方程的解。特解
- 验证 $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 也是解（ C 是任意常数）。通解

解 2. 这是 $f'(t) = (Ce^{\gamma t})' = C(e^{\gamma t})' = C \cdot \gamma e^{\gamma t} = \gamma f(t)$

- 注

- 可以证明， $f(t) = Ce^{\gamma t}$ 给出了所有解。
- C 是初始值： $f(0) = Ce^{\gamma \cdot 0} = C$ 。所以

$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

（说明该物理系统中，物理量 $f(t)$ 由初始值唯一确定）

“增长-衰减”系统

总结

- 一阶常微分方程

的所有解是

(C 是任意常数)

$$f'(t) = \gamma f(t)$$

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

“增长-衰减”系统

总结

- 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t)$$

的所有解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

(C 是任意常数)

- 如果给定初始值 $f(0)$, 则方程有唯一解

$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

“增长-衰减”系统

总结

- 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t)$$

的所有解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

(C 是任意常数)

- 如果给定初始值 $f(0)$, 则方程有唯一解

$$f(t) = f(0)e^{\gamma t}.$$

注

- $\gamma > 0$ 时, $f(t)$ 是指数增长;
- $\gamma < 0$ 时, $f(t)$ 是指数衰减。

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ （牛顿冷却定律）。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ （牛顿冷却定律）。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界（ 20°C ）的温度差，

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ （牛顿冷却定律）。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界（ 20°C ）的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837.$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t}$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$,

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t}$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$ ，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$ ，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

粥为 50°C 时，温度差 $f(t) = 50 - 20 = 30$ ，

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$ ，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

粥为 50°C 时，温度差 $f(t) = 50 - 20 = 30$ ，求解

$$30 = f(t) = 60e^{-0.0837t}$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$ ，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

粥为 50°C 时，温度差 $f(t) = 50 - 20 = 30$ ，求解

$$30 = f(t) = 60e^{-0.0837t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.0837} \ln \frac{1}{2}$$

例 假设

- 室温恒为 20°C ；刚开始时粥的温度是 80°C ；
- $\frac{\text{粥的冷却速度}(^{\circ}\text{C}/\text{mins})}{\text{粥当前温度与室温之间的温差}(^{\circ}\text{C})} = -0.0837$ (牛顿冷却定律)。

小明希望在粥为 50°C 时才喝，问需要等多长时间？

解 设 $f(t)$ 表示在 t 时刻粥与外界 (20°C) 的温度差，则粥在时刻 t 的温度是 $f(t) + 20$ ，并且：

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -0.0837. \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -0.0837f(t).$$

注意到初始温度差为 $f(0) = 80 - 20 = 60$ ，所以

$$f(t) = f(0)e^{-0.0837t} = 60e^{-0.0837t}.$$

粥为 50°C 时，温度差 $f(t) = 50 - 20 = 30$ ，求解

$$30 = f(t) = 60e^{-0.0837t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0.0837} \ln \frac{1}{2} \approx 8.28(\text{minutes})$$

We are here now...

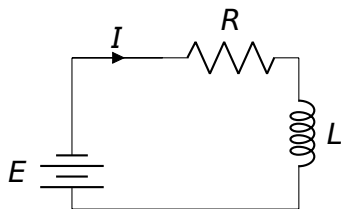
◆ 常微分方程的基本概念

♣ 应用 I: “指数式增长-衰减” 方程

♥ 应用 II: 电感、电容方程

♠ 应用 III: 阻尼运动方程

电路系统

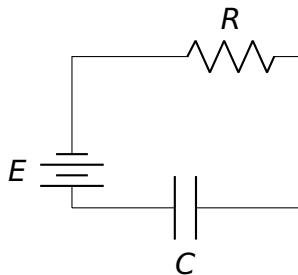


E 电压

I 电流

L 电感

R 电阻



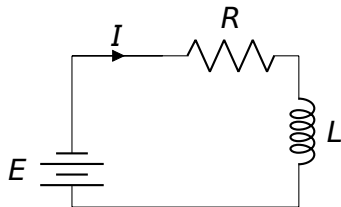
C 电容

E 电压

Q 电量

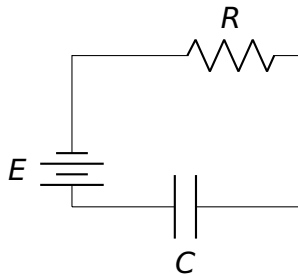
R 电阻

电路系统



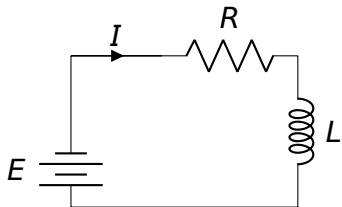
E 电压
 I 电流
 L 电感
 R 电阻

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$



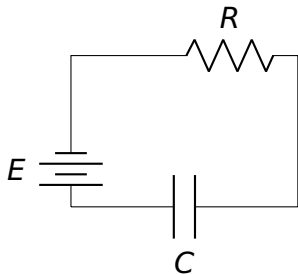
C 电容
 E 电压
 Q 电量
 R 电阻

电路系统



E 电压
I 电流
L 电感
R 电阻

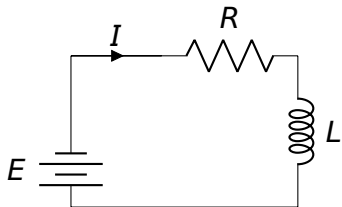
$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$



C 电容
E 电压
Q 电量
R 电阻

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

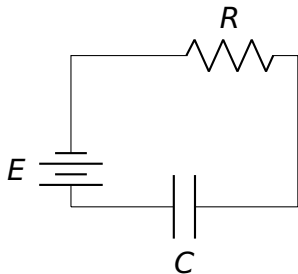
电路系统



E 电压
I 电流
L 电感
R 电阻

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

一阶常微分方程

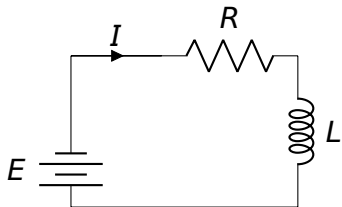


C 电容
E 电压
Q 电量
R 电阻

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

一阶常微分方程

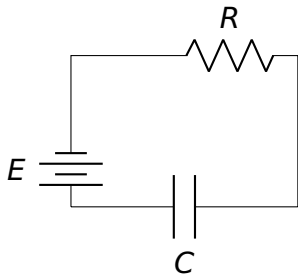
电路系统



E 电压
I 电流
L 电感
R 电阻

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

一阶常微分方程



C 电容
E 电压
Q 电量
R 电阻

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

一阶常微分方程

注 这是可分离变量的一阶常微分方程，需要熟练求解

We are here now...

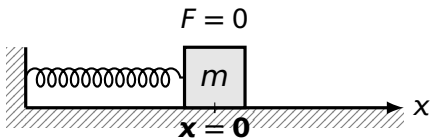
◆ 常微分方程的基本概念

♣ 应用 I: “指数式增长-衰减” 方程

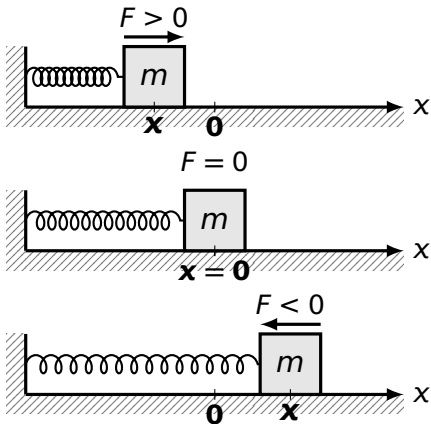
♥ 应用 II: 电感、电容方程

♠ 应用 III: 阻尼运动方程

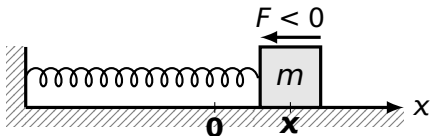
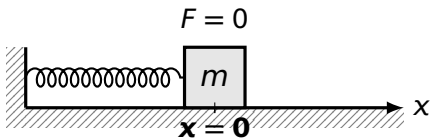
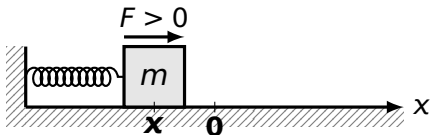
“弹簧-重物”系统



“弹簧-重物”系统

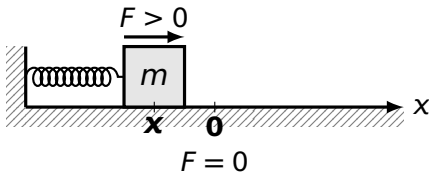


“弹簧-重物”系统



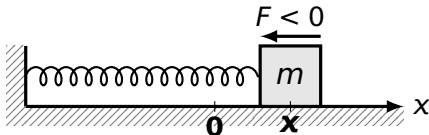
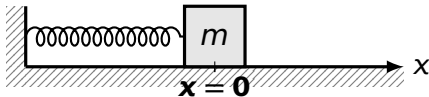
牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

“弹簧-重物”系统

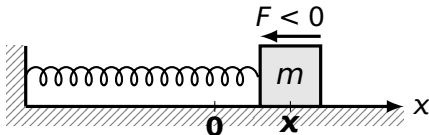
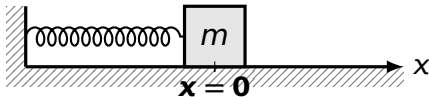
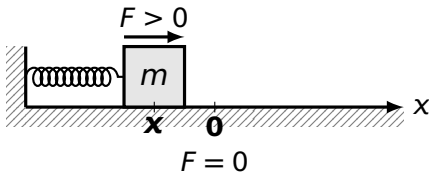


牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$



“弹簧-重物”系统

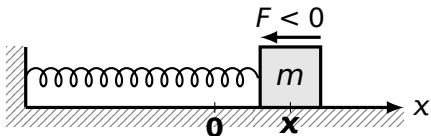
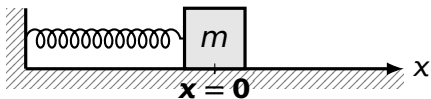
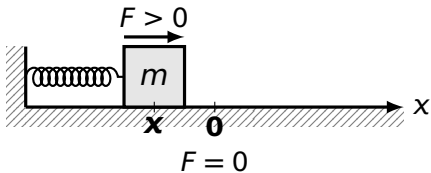


牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$

“弹簧-重物”系统

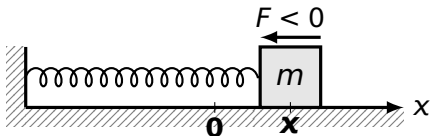
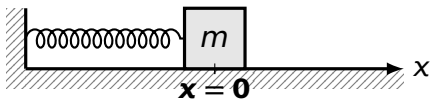
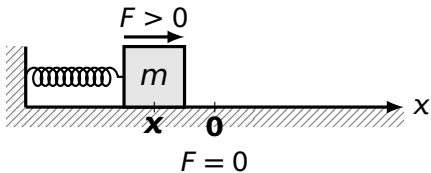


牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$
 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

“弹簧-重物”系统



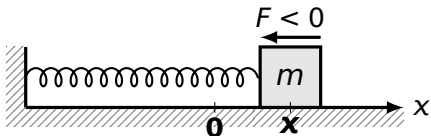
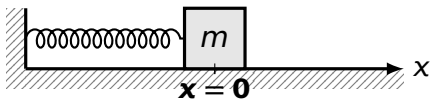
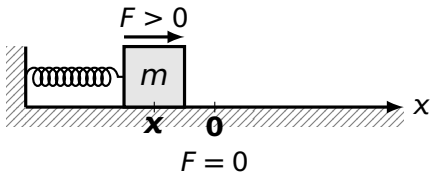
牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$ $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m})$$

“弹簧-重物”系统



牛顿2nd定律 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

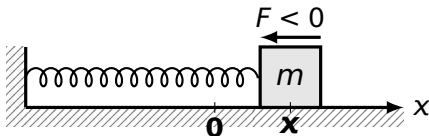
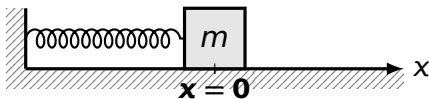
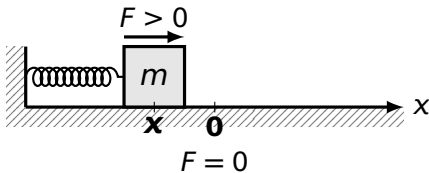
胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$ $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m})$$

二阶常微分方程

“弹簧-重物”系统



牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$ $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

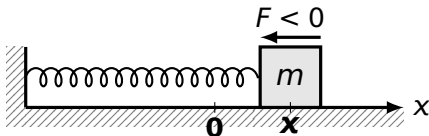
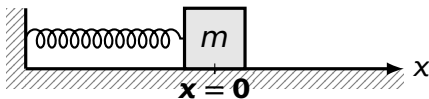
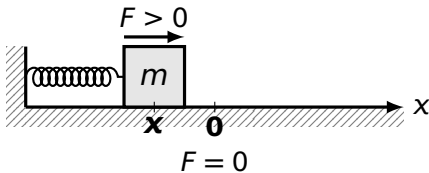
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m})$$

二阶常微分方程

练习

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。

“弹簧-重物”系统



牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

无摩擦
 $\xrightarrow{F_{\text{合}} = F_{\text{弹}}}$ $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega = \sqrt{k/m})$$

二阶常微分方程

练习

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$1. x = \cos(\omega t) \xRightarrow{\text{代入}} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

$$x = \sin(\omega t) \xRightarrow{\text{代入}} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$1. \ x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$1. \quad x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) - \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad &\stackrel{\text{代入}}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$x = \sin(\omega t) \quad \stackrel{\text{代入}}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad &\stackrel{\text{代入}}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \sin(\omega t) \quad \stackrel{\text{代入}}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x &= \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t)$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x &= \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x &= \frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) \\ &\quad - \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x &= \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x &= \frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

练习 对于二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

$$\begin{aligned} 1. \quad x = \cos(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= \frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 \cos(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \sin(\omega t) \quad \xRightarrow{\text{代入}} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= \frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 \sin(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \right] + \omega^2 \left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \right] \end{aligned}$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \right] + \omega^2 \left[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \right] \\ &= C_1 \left[\frac{d^2 \cos(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \cos(\omega t) \right] \end{aligned}$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] + \omega^2 [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ &= C_1 \left[\frac{d^2 \cos(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \cos(\omega t) \right] + C_2 \left[\frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\omega t) \right] \end{aligned}$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] + \omega^2 [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ &= C_1 \left[\frac{d^2 \cos(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \cos(\omega t) \right] + C_2 \left[\frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\omega t) \right] \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

练习 对于二阶常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, 验证

1. 验证 $x = \cos(\omega t)$, $x = \sin(\omega t)$ 均是方程的解。
2. 验证 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 是解 (C_1, C_2 是任意常数)。

解

2. 将 $x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ 代入方程进行验证:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \\ &= \frac{d^2}{dt^2} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] + \omega^2 [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \\ &= C_1 \left[\frac{d^2 \cos(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \cos(\omega t) \right] + C_2 \left[\frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\omega t) \right] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x(0) =$$

$$x'(0) =$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) =$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t)$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0}$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 所以

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 所以

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- 条件 “ $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ ” 称为初始条件

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 所以

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- 条件 “ $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ ” 称为初始条件
- 给定初始条件，解则唯一确定！

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 所以

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- 条件 “ $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ ” 称为初始条件
- 给定初始条件，解则唯一确定！

- 可以验证：二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 参数 C_1 和 C_2 的物理含义：

$$x_0 = x(0) = C_1$$

$$v_0 = x'(0) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \Big|_{t=0} = C_2 \omega$$

- 所以

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

- 条件 “ $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ ” 称为初始条件
- 给定初始条件，解则唯一确定！（物理：运动方式完全确定）

总结

- 二阶常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

的所有解是

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

(C_1, C_2 是任意常数)

- 如果规定初始条件

$$x(0) = x_0, x'(0) = v_0$$

则

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$x(0) =$$

$$x'(0) =$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) =$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \Big|_{t=0}$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$x(0) = C_1$$

$$x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \Big|_{t=0} = 3C_2$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$1 = x(0) = C_1$$

$$6 = x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \Big|_{t=0} = 3C_2$$

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$1 = x(0) = C_1$$

$$6 = x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \Big|_{t=0} = 3C_2$$

所以该特解是：

例 求解二阶微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ 在初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 6$ 下的特解。

解

(1) 方程的通解为：

$$x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

(2) 将 $t = 0$ 代入，并结合初始条件，以求出 C_1, C_2 ：

$$1 = x(0) = C_1$$

$$6 = x'(0) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t) \Big|_{t=0} = 3C_2$$

所以该特解是：

$$x = \cos(3t) + 3 \sin(3t).$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

- 无摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

摩擦力 $F_{\text{摩}} = -\delta m \frac{dx}{dt} \quad (\delta > 0)$

- 无摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- 有摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} + F_{\text{摩}}$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

摩擦力 $F_{\text{摩}} = -\delta m \frac{dx}{dt} \quad (\delta > 0)$

- 无摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- 有摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} + F_{\text{摩}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

摩擦力 $F_{\text{摩}} = -\delta m \frac{dx}{dt} \quad (\delta > 0)$

- 无摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- 有摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} + F_{\text{摩}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = ?$$

“弹簧-重物”系统 II：阻尼运动

牛顿2nd定律 $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{合}}$

胡克定律 $F_{\text{弹}} = -kx \quad (k > 0)$

摩擦力 $F_{\text{摩}} = -\delta m \frac{dx}{dt} \quad (\delta > 0)$

- 无摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

- 有摩擦

$$F_{\text{合}} = F_{\text{弹}} + F_{\text{摩}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

阻尼运动
方程

$$\Rightarrow \quad x(t) = ?$$