

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程
- 可分离变量的一阶微分方程
- 齐次微分方程
- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

- 齐次微分方程

- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

- 齐次微分方程

- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

- 一阶线性微分方程

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

- 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

提要

假设 $y = y(x)$ 为未知函数，本节探讨如何求解以下四种一阶微分方程：

- 变量分离的一阶微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx$$

- 可分离变量的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad y' = f(x) \cdot g(y)$$

- 齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

- 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y' + p(x)y = q(x)$$

We are here now...

◆ 变量分离的一阶微分方程

♣ 可分离变量的一阶微分方程

♥ 齐次微分方程

♠ 一阶线性微分方程

变量已分离的一阶微分方程：

$$g(y)dy = f(x)dx$$

变量已分离的一阶微分方程:

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

变量已分离的一阶微分方程:

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y)y' = f(x)$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$g(y)dy = f(x)dx \implies$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned} g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\ &\implies \end{aligned}$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned} g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\ &\implies \end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数,

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数,

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证:

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot y'$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot y' = F'(x)$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot y' = F'(x) \implies g(y)y'$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$g(y)dy = f(x)dx \implies \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

$$\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot y' = F'(x) \implies g(y)y' = f(x)$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$g(y)dy = f(x)dx \implies \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

$$\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$G'(y) \cdot y' = F'(x) \implies g(y)y' = f(x) \implies y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$\begin{aligned}G'(y) \cdot y' = F'(x) &\implies g(y)y' = f(x) \implies y' = \frac{f(x)}{g(y)} \\&\implies dy = \frac{f(x)}{g(y)}dx\end{aligned}$$

变量已分离的一阶微分方程: $g(y)dy = f(x)dx$

计算通解的方法:

$$\begin{aligned}g(y)dy = f(x)dx &\implies \int g(y)dy = \int f(x)dx \\&\implies G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\&\implies G(y) = F(x) + C \quad (\text{不必写成 } y = y(x))\end{aligned}$$

其中 $F(x)$, $G(y)$ 分别是 $f(x)$, $g(y)$ 的一个原函数, $C = C_2 - C_1$

验证: 对关系式 $G(y(x)) = F(x) + C$

两边求 x 关于的导数:

$$\begin{aligned}G'(y) \cdot y' = F'(x) &\implies g(y)y' = f(x) \implies y' = \frac{f(x)}{g(y)} \\&\implies dy = \frac{f(x)}{g(y)}dx \implies g(y)dy = f(x)dx\end{aligned}$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 +$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y +$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 =$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x +$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Rightarrow$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 =$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\Rightarrow$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 2(C_2 - C_1)$$

$$\Rightarrow$$

例 求 $(y + 1)dy = e^x dx$ 的通解

解 两边积分

$$\int (y + 1)dy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + y = e^x + C$$

例 求 $ydy = xdx$ 的通解

解 两边积分

$$\int ydy = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 2(C_2 - C_1)$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = x^2 + C$$

We are here now...

◆ 变量分离的一阶微分方程

♣ 可分离变量的一阶微分方程

♥ 齐次微分方程

♠ 一阶线性微分方程

可分离变量的一阶微分方程: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

计算通解的方法:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies$$

可分离变量的一阶微分方程: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

计算通解的方法:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies dy = f(x) \cdot g(y) dx$$

\implies

可分离变量的一阶微分方程: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

计算通解的方法:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies dy = f(x) \cdot g(y) dx$$

$$\implies \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\implies$$

可分离变量的一阶微分方程: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

计算通解的方法:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies dy = f(x) \cdot g(y) dx$$

$$\implies \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\implies \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么?

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \implies$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么?

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么?

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \gamma f &\implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt \\ &\implies \end{aligned}$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \gamma f &\implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt \\ &\implies \ln |f| = \end{aligned}$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么?

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \gamma f &\implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt \\ &\implies \ln |f| = \gamma t + \end{aligned}$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt$$

$$\implies \ln |f| = \gamma t + C_1$$

$$\implies$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} df = \gamma dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt$$

$$\Rightarrow \ln |f| = \gamma t + C_1$$

$$\Rightarrow |f| = e^{\gamma t + C_1}$$

$$\Rightarrow$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt$$

$$\implies \ln |f| = \gamma t + C_1$$

$$\implies |f| = e^{\gamma t + C_1}$$

$$\implies f = \pm e^{C_1} \cdot e^{\gamma t}$$

回忆 一阶常微分方程

$$f'(t) = \gamma f(t), \quad \gamma \text{是常数}$$

的通解是

$$f(t) = Ce^{\gamma t}$$

请问为什么？

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{df}{dt} = \gamma f \implies \frac{1}{f} df = \gamma dt \implies \int \frac{1}{f} df = \gamma \int dt$$

$$\implies \ln |f| = \gamma t + C_1$$

$$\implies |f| = e^{\gamma t + C_1}$$

$$\implies f = \pm e^{C_1} \cdot e^{\gamma t} = Ce^{\gamma t}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$
$$\implies$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} &\implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx \\ &\implies \frac{1}{2}y^2 =\end{aligned}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} &\implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx \\ &\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 +\end{aligned}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

所以

- 通解为 $x^2 + y^2 = C$ (C 为任意常数)

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

所以

- 通解为 $x^2 + y^2 = C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 1$ 时 $y = 3$, 则

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

所以

- 通解为 $x^2 + y^2 = C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 1$ 时 $y = 3$, 则 $1^2 + 3^2 = C \implies$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

所以

- 通解为 $x^2 + y^2 = C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 1$ 时 $y = 3$, 则 $1^2 + 3^2 = C \Rightarrow C = 10$

例 求 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \implies ydy = -xdx \implies \int ydy = \int -xdx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\implies x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

所以

- 通解为 $x^2 + y^2 = C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 1$ 时 $y = 3$, 则 $1^2 + 3^2 = C \Rightarrow C = 10$
所以特解是 $x^2 + y^2 = 10$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies$$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

\implies

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies$$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y$$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2} e^{2x}$$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ (C 为任意常数)

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 则

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 则 $1 = \frac{1}{2} + C \implies$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 则 $1 = \frac{1}{2} + C \implies C = \frac{1}{2}$

例 求 $y' = e^{2x-y}$ 的通解及在初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 下的特解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{-y} \implies e^y dy = e^{2x} dx$$

$$\implies \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\implies e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

所以

- 通解为 $e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ (C 为任意常数)
- 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 则 $1 = \frac{1}{2} + C \implies C = \frac{1}{2}$
所以特解是 $e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2}$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} &\implies \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \implies \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx \\ &\implies\end{aligned}$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} &\implies \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \implies \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx \\ &\implies \ln|y|\end{aligned}$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} &\implies \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \implies \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx \\ &\implies \ln|y| = -\ln|x| + C\end{aligned}$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} &\implies \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx \implies \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx \\ &\implies \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\implies\end{aligned}$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln |y| = -\ln |x| + C_1$$

$$\implies \ln |xy| = C_1$$

$$\implies$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln |y| = -\ln |x| + C_1$$

$$\implies \ln |xy| = C_1$$

$$\implies |xy| = e^{C_1}$$

$$\implies$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln |y| = -\ln |x| + C_1$$

$$\implies \ln |xy| = C_1$$

$$\implies |xy| = e^{C_1}$$

$$\implies xy = \pm e^{C_1} =$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln |y| = -\ln |x| + C_1$$

$$\implies \ln |xy| = C_1$$

$$\implies |xy| = e^{C_1}$$

$$\implies xy = \pm e^{C_1} = C$$

例 求 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \implies \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln |y| = -\ln |x| + C_1$$

$$\implies \ln |xy| = C_1$$

$$\implies |xy| = e^{C_1}$$

$$\implies xy = \pm e^{C_1} = C$$

所以通解就是

$$xy = C$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \frac{1}{y - 3} dy = 2x dx$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = 2x(y-3) &\implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx \\ &\implies\end{aligned}$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = 2x(y-3) &\implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx \\ &\implies \ln |y-3| =\end{aligned}$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x(y-3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx \\ &\implies \ln |y-3| = x^2 + C_1 \\ &\implies\end{aligned}$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y - 3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y - 3| = e^{x^2 + C_1} =$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y - 3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y - 3| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y - 3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y - 3| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies y - 3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2} =$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y-3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y-3| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies y-3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2} = Ce^{x^2}$$

$$\implies$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y - 3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y - 3| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies y - 3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2} = C e^{x^2}$$

$$\implies y = C \cdot e^{x^2} + 3$$

例 求 $y' = 2xy - 6x$ 的通解

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 3) \implies \int \frac{1}{y-3} dy = \int 2x dx$$

$$\implies \ln |y - 3| = x^2 + C_1$$

$$\implies |y - 3| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

$$\implies y - 3 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2} = C e^{x^2}$$

$$\implies y = C \cdot e^{x^2} + 3$$

所以通解就是

$$y = C \cdot e^{x^2} + 3$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \frac{1}{y}dy = -p(x)dx$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies\end{aligned}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| =\end{aligned}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} =\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} \\ &\implies\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx$$

$$\implies \ln |y| = -P(x) + C_1$$

$$\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)}$$

$$\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} =$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx$$

$$\implies \ln |y| = -P(x) + C_1$$

$$\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)}$$

$$\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx$$

$$\implies \ln |y| = -P(x) + C_1$$

$$\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)}$$

$$\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} \\ &\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。所以通解就是

$$y = Ce^{-P(x)}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} \\ &\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。所以通解就是

$$y = Ce^{-P(x)}$$

注 上述的通解也写作

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

例 求 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是已知函数。

解 这是可分离变量微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 &\implies \int \frac{1}{y} dy = \int -p(x) dx \\ &\implies \ln |y| = -P(x) + C_1 \\ &\implies |y| = e^{-P(x)+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} \\ &\implies y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}\end{aligned}$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数。所以通解就是

$$y = Ce^{-P(x)}$$

注 上述的通解也写作

$$y = Ce^{-\int p(x) dx}$$

这里 $\int p(x) dx$ 仅表示 $p(x)$ 的一个原函数, 不含积分常数。

We are here now...

◆ 变量分离的一阶微分方程

♣ 可分离变量的一阶微分方程

♥ 齐次微分方程

♠ 一阶线性微分方程

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, 并代入原方程:

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, 并代入原方程:

$$= \varphi(u)$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$= \varphi(u)$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx}$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \implies x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \implies x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

2. 分离变量:

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \implies x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

2. 分离变量:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \implies x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

2. 分离变量:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

齐次微分方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

计算通解步骤:

1. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 并代入原方程:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \varphi(u) \implies u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \implies x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

2. 分离变量:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

3. 还原变量: 求出积分后, 将 $\frac{y}{x}$ 代替 u

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} =$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{d}{dx}(\quad) = \frac{u^2}{u-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(\quad) = \frac{u^2}{u-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{x} dx$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\begin{aligned} \frac{u-1}{u} du &= \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow u - \ln|u| = \end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\begin{aligned} \frac{u-1}{u} du &= \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x| \end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\begin{aligned} \frac{u-1}{u} du &= \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + C_1 \end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow e^u = Cux$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow e^u = Cux$$

4. 还原变量(代回 $u = y/x$):

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解

解 1. 化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2/x^2}{y/x-1}$$

2. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$\frac{d}{dx}(ux) = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow u'x = \frac{u}{u-1}$$

3. 分离变量

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + C_1$$

$$\Rightarrow e^u = Cux$$

4. 还原变量(代回 $u = y/x$):

$$e^{y/x} = Cy$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$

$$(\quad)' = \frac{1}{u} + u$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(\quad)' = \frac{1}{u} + u$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$\begin{aligned} udu &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int udu = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \end{aligned}$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$\begin{aligned} udu &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int udu = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| \end{aligned}$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$\begin{aligned} udu &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int udu = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \end{aligned}$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$\begin{aligned} udu &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int udu = \int \frac{1}{x}dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}u^2} = Cx \end{aligned}$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$):

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$):

$$e^{\frac{y^2}{2x^2}} = Cy$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$):

$$e^{\frac{y^2}{2x^2}} = Cy$$

4. 代入初始值

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2} u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$):

$$e^{\frac{y^2}{2x^2}} = Cy$$

4. 代入初始值

$$e = 2C$$

例 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $y|_{x=1} = 2$ 的解

解 1. 变量代换: $u = \frac{y}{x}$ ($y = ux$)

$$(ux)' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u}$$

2. 分离变量

$$u du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = \ln|x| + C_1 \Rightarrow e^{\frac{1}{2} u^2} = Cx$$

3. 还原变量(代回 $u = y/x$):

$$e^{\frac{y^2}{2x^2}} = Cy$$

4. 代入初始值

$$e = 2C$$

$$\text{所以 } e^{\frac{y^2}{2x^2}} = \frac{1}{2} ey$$

We are here now...

◆ 变量分离的一阶微分方程

♣ 可分离变量的一阶微分方程

♥ 齐次微分方程

♠ 一阶线性微分方程

- 一阶线性微分方程形的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$			
$y' = y \sin x + e^x$			
$y' = \frac{2y}{x+1}$			

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$			
$y' = \frac{2y}{x+1}$			

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓		
$y' = \frac{2y}{x+1}$			

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	
$y' = \frac{2y}{x+1}$			

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$			

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓		

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓	$-\frac{2}{x+1}$	

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓	$-\frac{2}{x+1}$	0

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓	$-\frac{2}{x+1}$	0

- 当 $q(x) \equiv 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓	$-\frac{2}{x+1}$	0

- 当 $q(x) \equiv 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

称为一阶齐次线性微分方程

- 一阶线性微分方程形的标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 是已知函数, $y = y(x)$ 是未知函数。

例

	是否一阶线性?	$p(x)$	$q(x)$
$y' = y^2 + \sin x$	×		
$y' = y \sin x + e^x$	✓	$-\sin x$	e^x
$y' = \frac{2y}{x+1}$	✓ (齐次)	$-\frac{2}{x+1}$	0

- 当 $q(x) \equiv 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

称为一阶齐次线性微分方程

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解，步骤：

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

2. 常数变易:

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

2. 常数变易:

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

2. 常数变易:

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx$$

2. 常数变易:

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易:

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow (u(x)e^{\int -p(x)dx})' +$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx}$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx} = q(x)$$
$$\Rightarrow$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + p(x)y &= q(x) \Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx} = q(x) \\ &\Rightarrow u'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)\end{aligned}$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) &\Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx} = q(x) \\ &\Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \end{aligned}$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow \left(u(x)e^{\int -p(x)dx}\right)' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int [q(x)e^{\int p(x)dx}] dx + C$$

求解一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

利用常数变易法求解, 步骤:

1. 求解齐次部分:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx}$$

2. 常数变易: 假设 $y = u(x)e^{\int -p(x)dx}$, 代入原方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow (u(x)e^{\int -p(x)dx})' + p(x)u(x)e^{\int -p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int [q(x)e^{\int p(x)dx}] dx + C$$

$$\therefore y = u(x)e^{\int -p(x)dx} = \left(\int [q(x)e^{\int p(x)dx}] dx + C \right) e^{\int -p(x)dx}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2}{x+1} dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln |y| =$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x+1| + C_1$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

\Rightarrow

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ &\Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' -\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow u(x) &= \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx =\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow u(x) &= \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = (x+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow u(x) &= \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow u(x) &= \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x+1| + C_1 \\ &\Rightarrow y = C(x+1)^2\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot (x+1)^2$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow [u \cdot (x+1)^2]' - \frac{2}{x+1} \cdot u \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ \Rightarrow u' \cdot (x+1)^2 &= (x+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow u(x) &= \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

因此 $y = u(x) \cdot (x+1)^2 = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right] (x+1)^2$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| =$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$$

\Rightarrow

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ &\Rightarrow (u \cdot x)' -\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \frac{1}{x} \ln x dx =\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \frac{1}{x} \ln x dx = \int \ln x d \ln x =\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \frac{1}{x} \ln x dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \frac{1}{x} \ln x dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

因此 $y = u(x) \cdot x =$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \ln x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = Cx\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= \ln x \\ \Rightarrow (u \cdot x)' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u' \cdot x &= \ln x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \frac{1}{x} \ln x dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

因此 $y = u(x) \cdot x = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \right] x$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| =$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易:

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ &\Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ &\Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' -\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ &\Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ \Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x &= e^x \sin x \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ \Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x &= e^x \sin x \\ \Rightarrow u' &= \sin x \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ &\Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x = e^x \sin x \\ &\Rightarrow u' = \sin x \\ &\Rightarrow u(x) = \int \sin x dx =\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ \Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x &= e^x \sin x \\ \Rightarrow u' &= \sin x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \sin x dx = -\cos x + C\end{aligned}$$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ \Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x &= e^x \sin x \\ \Rightarrow u' &= \sin x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \sin x dx = -\cos x + C\end{aligned}$$

因此 $y = u(x) \cdot e^x =$

例 求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = e^x \sin x$ 的通解

解 1. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \\ &\Rightarrow y = Ce^x\end{aligned}$$

2. 常数变易：假设 $y = u(x) \cdot e^x$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= e^x \sin x \\ \Rightarrow (u(x) \cdot e^x)' - u(x) \cdot e^x &= e^x \sin x \\ \Rightarrow u' &= \sin x \\ \Rightarrow u(x) &= \int \sin x dx = -\cos x + C\end{aligned}$$

因此 $y = u(x) \cdot e^x = (-\cos x + C)e^x$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow$$

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| =$$

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

\Rightarrow

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易:

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' +$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x}$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

\Rightarrow

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = -\frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow u(x) = \int -\frac{1}{x} dx =\end{aligned}$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = -\frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow u(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C\end{aligned}$$

例 求 $x^2y' + xy + 1 = 0$ 的满足初始条件 $y(2) = 1$ 的特解。

解 1. 化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2. 先求解齐次部分

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Rightarrow y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

3. 常数变易：假设 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，代入原方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow \left(\frac{u}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = -\frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow u(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C\end{aligned}$$

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \Rightarrow$

⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \Rightarrow 1 =$

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

$$4. \quad y(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C)$$

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

$$4. \ y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C) \Rightarrow C = 2 + \ln 2$$

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C) \Rightarrow C = 2 + \ln 2$ 。所以

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C) \Rightarrow C = 2 + \ln 2$ 。所以

$$y = \frac{u(x)}{x} =$$

⋮
⋮
⋮

因此 $y = \frac{1}{x}(-\ln|x| + C)$

4. $y(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + C) \Rightarrow C = 2 + \ln 2$ 。所以

$$y = \frac{u(x)}{x} = \frac{1}{x}(-\ln|x| + 2 + \ln 2)$$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程:

$$(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

2. 求解齐次部分

3. 常数变易:

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程:

$$(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x}$$

2. 求解齐次部分

3. 常数变易:

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y^2 - 6x}{2y}\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分

3. 常数变易：

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分

3. 常数变易：

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分

3. 常数变易：

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程:

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0$

3. 常数变易:

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程:

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易: 假设 $x = u(y) \cdot y^3$, 代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y$$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$ ，代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-2}$$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$ ，代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}y^{-1} + C$$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$ ，代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}y^{-1} + C$$

因此 $x = uy^3 =$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$ ，代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}y^{-1} + C$$

因此 $x = uy^3 = \left[\frac{1}{2}y^{-1} + C\right]y^3$

例 求微分方程 $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ 的通解

解 1. 转化为一阶线性微分方程：

$$\begin{aligned}(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{y^2 - 6x}{2y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{y}x \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x &= -\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

2. 求解齐次部分 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = 0 \Rightarrow x = Cy^3$

3. 常数变易：假设 $x = u(y) \cdot y^3$ ，代入方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}y^{-1} + C$$

因此 $x = uy^3 = \left[\frac{1}{2}y^{-1} + C\right]y^3 = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3$