第 01 周《线性代数》(外招)作业

- 这次作业是关于 $\S 1.1,\ 1.2$

练习 1. 利用公式

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

求解二元线性方程

$$\begin{cases} 2x & +5y & =1 \\ 3x & +7y & =2 \end{cases}$$

解

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{-3}{-1}=3,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{1}{-1}=-1$$

练习 2. 按下列步骤求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x & +y & +z & =6 & \qquad (1) \\ x & +2y & -z & =2 & \qquad (2) \\ 2x & -3y & -z & =-7 & \qquad (3) \end{cases}$$

(1) 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ 及 $D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}$,再利用 $x=\frac{D_1}{D}$ 求出 x。

(2) 将第一步求解出的 x,代入方程 (1)、(2),得到关于 y, z 的二元线性方程组。此时利用**练习 1**的公式,求解 y 和 z。

解 (1)

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=(-2)+(-2)+(-3)-3-(-1)-4=-13$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix}=(-12)+7+(-6)-18-(-2)-(-14)=-13$$

所以 $x=1$。

(2) 将 $x=1$ 代入方程 (1)、(2) 得:

$$\begin{cases} y & +z & =5 \\ 2y & -z & =1 \end{cases}$$

所以

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-6}{-3}=2,\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}=\frac{-9}{-3}=3$$

总结 $x=1,\ y=2,\ z=3$。

练习 3. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 k 满足什么条件？

解 利用

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2 - 4 = k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) \neq 0$$

所以 $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$。

练习 4. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$。利用行列式的基本性质计算：以下两个行列式分别是多少？

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的基本性质，可得：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - 2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} - 2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} - 2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{可加性}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} a_{11} & -2a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -2a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & -2a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}}_{\text{两列成比例，故为零}} \xlongequal{\text{交换2, 3列}} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6$$

以及

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3 \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{数乘性}} 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$$