§4.2　相似矩阵与矩阵对角化

数学系　梁卓滨

2016 - 2017 学年 I 暑修班

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B相似，记为 $A \sim B$。

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B相似，记为 $A \sim B$。

注

1. $A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \exists$ 可逆Q，使$QAQ^{-1} = B$

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B相似，记为 $A \sim B$。

注

1. $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ 可逆Q，使$QAQ^{-1} = B$
（令 $P := Q^{-1}$，则 $P^{-1}AP = B$）

相似矩阵

定义 设 A, B 是 n 阶方阵。若存在 n 阶可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B.$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B$。

注

1. $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ 可逆Q，使$QAQ^{-1} = B$

   （令 $P := Q^{-1}$，则 $P^{-1}AP = B$）

2. $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad B \sim A$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \qquad\qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似?

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似？

例

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 45 \\ -7 & -17 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以 $A \sim B$

问题 怎样有效判断两个矩阵是否相似?

1. “λ 矩阵” 的方法，但并不简单的。。。
2. 下面只给出两个矩阵相似的必要条件

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| =$

$$|\lambda I - A|$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| =$
$$|\lambda I - A|$$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| =$
   $|P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| \quad |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = \qquad\qquad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = \qquad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| \quad |A|$

两个矩阵相似的必要条件

定理 设 $A \sim B$，则

1. A 与 B 有相同特征值；
2. $r(A) = r(B)$；
3. $|A| = |B|$，特别地，A 与 B 同时可逆或不可逆

证明 存在可逆矩阵 P，满足

$$P^{-1}AP = B$$

1. $|\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$
2. $r(B) = r(P^{-1}AP) = r(A)$
3. $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |A|$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$P^{-1}AP=\Lambda$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, \qquad, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, \qquad) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\qquad, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \qquad, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \qquad)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\ldots,\lambda_n\alpha_n)$$

$\Leftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$ （λ_i是特征值，α_i是特征向量）

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A 可对角化

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ （λ_i是特征值，α_i是特征向量）

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

可对角化矩阵

定义 若方阵 $A_{n\times n}$ 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则称 A **可对角化**

$$P^{-1}AP = \Lambda \Leftrightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Leftrightarrow A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Leftrightarrow (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$$ （λ_i是特征值，α_i是特征向量）

定理 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

推论 若方阵 $A_{n\times n}$ 有 n 不同特征值，则 A 可对角化。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$）则

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$）则

$$A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$）则

$$A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad AP=P\Lambda$$

问题 判断 n 阶方阵 A 是否可以对角化？若能，确定可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

步骤

1. 求出 A 的所有特征值，及相应特征向量
2. 若有 n 个线性无关特征向量，则 A 可对角化；否则，不能对角化
3. 假设存在 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，记对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（即：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$）则

$$A\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \quad AP=P\Lambda \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP=\Lambda$$

例 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$,
- 特征值 $\lambda_2 = -2$,

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，

例 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)$
- 特征值 $\lambda_1=4$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=-2$，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)$
- 特征值 $\lambda_1=4$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=-2$，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$

所以 A 可以对角化，且

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & \\ & -2\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)$
- 特征值 $\lambda_1=4$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=-2$，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

所以 A 可以对角化，且

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

这是因为：

$(A\alpha_1, A\alpha_2)=(4\alpha_1, -2\alpha_2)$

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$
- 特征值 $\lambda_1 = 4$，特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2 = -2$，特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

所以 A 可以对角化，且

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

这是因为：

$$(A\alpha_1, A\alpha_2) = (4\alpha_1, -2\alpha_2) \quad \Rightarrow \quad A(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-4)$
- 特征值 $\lambda_1=4$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=-2$，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

所以 A 可以对角化，且

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

这是因为：

$$(A\alpha_1, A\alpha_2)=(4\alpha_1, -2\alpha_2) \quad \Rightarrow \quad A(\alpha_1, \alpha_2)=(\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

所以

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|$

例 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0 = |\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重）
- 特征值 $\lambda_2=6$

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$

所以

$$A\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$$

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\end{array}}_{P}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\end{array}}_{P}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}}_{P}=\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}}_{P}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

即，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$
- 特征值 $\lambda_1=2$（二重），特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 特征值 $\lambda_2=6$，特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}}_{P}=\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}}_{P}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

即，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$，或 $A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ▸ Det

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

所以

$$A\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&4&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}\end{array}}_{P}=\underbrace{\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}\end{array}}_{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$$

例 判断 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&4&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Det

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\end{array}}_{P}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\end{array}}_{P}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$$

即，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

例 判断 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能对角化？若能，写出 P 和 Λ

- 特征方程：$0=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_1=1$，特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ▸ Details
- 特征值 $\lambda_2=2$(二重)，特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ▸ Det

所以

$$A\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{P} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{P} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

即，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，或 $A=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	
λ_2	n_2	
$\vdots$	$\vdots$	
λ_s	n_s	
	共 n	

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$
λ_2	n_2	
$\vdots$	$\vdots$	
λ_s	n_s	
	共 n	

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数	$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$
$\vdots$	$\vdots$	
λ_s	n_s	
	共 n	

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数		$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	
	共 n		

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$		
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I-A$ 的秩是 $n-n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I-A)x=0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I-A)=n-n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\cdots,\alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I-A)=n-n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\cdots,\alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I-A)=n-n_s$		
	共 n			

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$
	共 n			

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是：每个 n_i 重的特征值 λ_i，矩阵 $\lambda_i I - A$ 的秩是 $n - n_i$。

图解如下：

不同特征值	重数			$(\lambda_i I - A)x = 0$ 基础解系/线性无关特征向量
λ_1	n_1	$r(\lambda_1 I - A) = n - n_1$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{n_1}^{(1)}$
λ_2	n_2	$r(\lambda_2 I - A) = n - n_2$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_{n_2}^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
λ_s	n_s	$r(\lambda_s I - A) = n - n_s$	$\Rightarrow$	$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \cdots, \alpha_{n_s}^{(s)}$
	共 n			共 n 个无关特征向量

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Longleftrightarrow$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix} A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow$ $r(I-A) =$ 且 $r(2I-A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow$ $r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) =$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$				
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$			
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似?

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$				
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2			
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix} A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1 \text{ 且 } r(2I-A)=3-1=2$$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2		
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$				
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1$ 且 $r(2I-A) = 3-1 = 2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$r(2I-A)$				

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$			$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	
$r(2I-A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$$\Leftrightarrow r(I-A) = 3-2 = 1 \text{ 且 } r(2I-A) = 3-1 = 2$$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$r(2I-A)$			2	

例 下列哪个矩阵与 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似？

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

提示 若 A 与 Λ 相似 $\Leftrightarrow$ A 可对角化

$\Leftrightarrow r(I-A)=3-2=1$ 且 $r(2I-A)=3-1=2$

解

	A_1	A_2	A_3	A_4
$I-A$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$
$r(I-A)$	2	2	1	2
$2I-A$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
$r(2I-A)$	2	2	2	2

应用

例 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$$

应用

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。

应用

例 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A=P\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。应用：

$$A^n=$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个"好的"分解。应用：

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。应用：

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}$$

$$=$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。应用：

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$$

$$=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。应用：

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1} \\ &= P\Lambda^n P^{-1} \\ &= \qquad \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

应用

例 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A=P\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

这相当对 A 作了一个“好的”分解。应用：

$$\begin{aligned}A^n&=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\\&=P\Lambda\cdot\Lambda\cdot\cdots\cdot\Lambda P^{-1}\\&=P\Lambda^nP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

The End

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| =$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - r_2}}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + 2c_3}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+2c_3}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+2c_3}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

Back

- 求解特征方程

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+2c_3}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}$$

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\2&-3&2&0\\2&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\2&-3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases}x_1 \quad -\frac{1}{2}x_3=0\\ \end{cases}$

Back

- 当 $\lambda_1 = 1$，求解 $(\lambda_1 I - A)x = 0$：

$$(1I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以
$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

Back

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\2&-3&2&0\\2&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\2&-3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $$\begin{cases}x_1 \quad -\frac{1}{2}x_3=0\\ \quad x_2-\quad x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\2&-3&2&0\\2&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\2&-3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases}x_1 \qquad -\frac{1}{2}x_3=0\\ \qquad x_2-\ \ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$

基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}\\ \\ 2\end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_1=1$，求解 $(\lambda_1 I-A)x=0$：

$$(1I-A\vdots 0)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&0\\2&-3&2&0\\2&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\2&-3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&1&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以 $\begin{cases}x_1 \quad -\frac{1}{2}x_3=0\\ \quad x_2-\quad x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$

基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) =$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

▸ Back

- 当 $\lambda_2=2$，求解 $(\lambda_2 I-A)x=0$：

$$(2I-A\,\vdots\,0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1-x_2+x_3=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2-x_3$$

基础解系：$\alpha_2=\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back

- 当 $\lambda_2 = 2$，求解 $(\lambda_2 I - A)x = 0$：

$$(2I - A \vdots 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - x_3$$

基础解系：$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Back