2016-2017 学年第 1 学期《线性代数》（暑修班）试卷 A 答案与评分标准

一、计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -10 & -12 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$ 及 4 阶 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -10 & -12 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+7r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\times(-3)\times(-4) = 12 \qquad (4分)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -7 & -10 & -12 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -10 & -12 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} = (-2)\times 12 = -24 \qquad (5分)$$

二、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$，

(1) 计算行列式 $|A|$ 及 A 的特征值。
(2) 计算 $3A-B$ 和 AB。

解 1. 特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)-(-2)(-3) = \lambda^2-5\lambda-2 = 0 \qquad (2分)$$

所以特征值是 $\lambda_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$ (1分)。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \qquad (2分)$$

2.

$$3A-B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (2分)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad (3分)$$

三、设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，分别计算 A^2, A^3, A^4, A^5。对任意自然数 n，归纳 A^n 等于什么？问 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ 等于什么？

解 1.

$$
\begin{aligned}
A^2 &= A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I,\\
A^3 &= A^2\cdot A=(-I)\cdot A=-A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\\
A^4 &= A^3\cdot A=(-A)\cdot A=-A^2=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\\
A^5 &= A^4\cdot A=I\cdot A=A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}. \qquad (5分)
\end{aligned}
$$

2. 归纳地，

$$
A^n=\begin{cases} I & \text{if } n=4m,\\ A & \text{if } n=4m+1,\\ -I & \text{if } n=4m+2,\\ -A & \text{if } n=4m+3.\end{cases} \qquad (2分)
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n &= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(4m)!}A^{4m}+\frac{1}{(4m+1)!}A^{4m+1}+\frac{1}{(4m+2)!}A^{4m+2}+\frac{1}{(4m+3)!}A^{4m+3}\right]\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(4m)!}I+\frac{1}{(4m+1)!}A-\frac{1}{(4m+2)!}I-\frac{1}{(4m+3)!}A\right]\\
&= \left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots\right)I+\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots\right)A\\
&= (\cos 1)I+(\sin 1)A\\
&= \begin{pmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{pmatrix}. \qquad (2分)
\end{aligned}
$$

四、计算 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&4&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解

$$
(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&4&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&2&2&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&0&-2&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

五、求解以下线性方程组的通解

$$
\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1\\ 3x_1+5x_2-6x_3-x_4=1\\ -2x_1+2x_2-4x_3+6x_4=-6\end{cases}
$$

解对增广矩阵进行初等行变换

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\3&5&-6&-1&1\\-2&2&-4&6&-6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&2&-3&2&-2\\0&4&-6&4&-4\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&2&-3&2&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{1}{2}&-2&2\\0&1&-\frac{3}{2}&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \qquad (5分)
$$

所以原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 = 2 \\ \quad + x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= -1 + \frac{3}{2}x_3 - x_4 \end{cases}. \qquad (2分)$$

取 x_3, x_4 作为自由变量，所以通解是

$$\begin{cases} x_1 &= 2 - \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 \\ x_2 &= -1 + \frac{3}{2}c_1 - c_2 \\ x_3 &= c_1 \\ x_4 &= c_2 \end{cases} \qquad (2分)$$

其中 c_1, c_2 是任意常数。

六、求以下向量组的秩和一个极大无关组，并将其它向量用该极大无关组线性表示：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1,\, r_4 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{2})\times r_2,\, \frac{1}{2}\times r_4]{(-\frac{1}{4})\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 2r_3]{r_1 - 4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5分$$

可见

向量组的秩是 3，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 构成一个极大无关组，$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$，$\alpha_5 = -\alpha_1 + \alpha_4$。

七、将向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (3, -1, -1, 3), \alpha_3 = (-3, 5, 7, -1)$$

单位正交化。

解 1. 利用施密特正交化方法：

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 = (1, 1, 1, 1) \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1}\beta_1 = (3, -1, -1, 3) - \frac{4}{4}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, -2, 2) \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2}\beta_2 \\ &= (-3, 5, 7, -1) - \frac{8}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{-32}{16}(2, -2, -2, 2) = (-1, -1, 1, 1) \end{aligned}$$

2.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

八、求矩阵 $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 1.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-9 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-7 & 4 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-9)\begin{vmatrix} \lambda-7 & 4 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-9)^2 = 0$$

所以特征值是 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 9$。

2. 求 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量。求 $(\lambda_1 I - A)x = 0$ 的非零解:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times r_3]{-\frac{1}{4}\times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

取 x_3 为自由变量，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为 $c_1\xi_1 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c_1 是任意非零常数。

3. $\lambda_2 = 9$ 的特征向量。求 $(\lambda_2 I - A)x = 0$ 的非零解:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组等价于

$$x_1 = -x_2 - 2x_3$$

取 x_2, x_3 为自由变量，得基础解系

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ 的全部特征向量为 $c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 c_2, c_3 是任意不全为零的常数。

九、将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

化为标准型，并指出该二次型的秩、正惯性指标、负惯性指标，以及符号差。

解

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 - x_3)^2 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= 2(x_1 - x_3)^2 - 2(x_2 - 2x_3)^2 + 6x_3^2 \end{aligned}$$

该二次型的秩 $= 3$、正惯性指标 $= 2$、负惯性指标 $= 1$，符号差 $= 1$。

十、正交矩阵

线性代数中的一个定理是说：设 A 是 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵。

下面给出证明这一定理的步骤。证明的方法，除了用到线性代数的知识，还将涉及到微积分和数学归纳法。**请将相应的证明细节补充、并认真填写在方框中**。

符号说明：下面所出现的向量都是列向量。

Step 1. 先对 2 阶实对称证明这一结论。

设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 为平面上 2 维向量，$f(x)$ 为对称矩阵 A 所确定的二次型，即

$$f(x) = x^TAx.$$

设 C 是平面上以坐标原点为中心半径为 1 的圆周，即

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = 1\right\}.$$

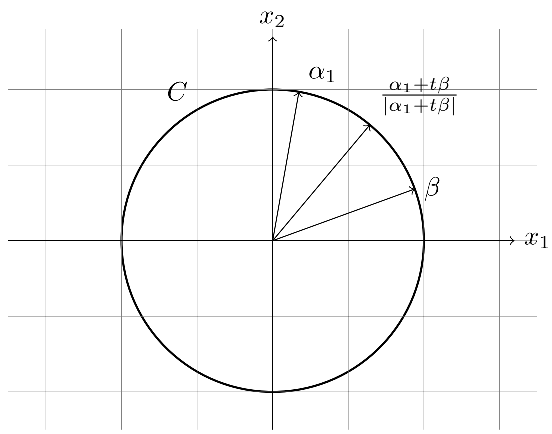
因为 f 是连续函数，C 是有界闭集，所以当 $f(x)$ 限制 C 在上时能取到最大值，即：存在 $\alpha_1 \in C$，使得

$$f(\alpha_1) \geq f(\beta) \qquad \forall \beta \in C.$$

这可以说明 $t = 0$ 是函数

$$g(t) = f\left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right) = \left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right)^T A \left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right)$$

的驻点，其中 β 是 C 中任一向量。所以 $g'(0) = 0$。



1.1. 证明

$$g(t) = \frac{\alpha_1^TA\alpha_1 + 2(\beta^TA\alpha_1)t + (\beta^TA\beta)t^2}{1 + 2(\beta^T\alpha_1)t + t^2},$$

并计算 $g'(0)$。

这是：

$$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right) = \left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right)^T A \left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right) = \frac{(\alpha_1 + t\beta)^TA(\alpha_1 + t\beta)}{(\alpha_1 + t\beta)^T(\alpha_1 + t\beta)} \\ &= \frac{\alpha_1^TA\alpha_1 + 2(\beta^TA\alpha_1)t + (\beta^TA\beta)t^2}{\alpha_1^T\alpha_1 + 2(\beta^T\alpha_1)t + (\beta^T\beta)t^2} = \frac{\alpha_1^TA\alpha_1 + 2(\beta^TA\alpha_1)t + (\beta^TA\beta)t^2}{1 + 2(\beta^T\alpha_1)t + t^2}. \end{aligned}$$

所以

$$g'(0) = \frac{2(\beta^TA\alpha_1) - 2(\beta^T\alpha_1)\cdot(\alpha_1^TA\alpha_1)}{1} = 2\beta^T\left[A\alpha_1 - \left(\alpha_1^TA\alpha_1\right)\alpha_1\right].$$

1.2. 证明 $\lambda_1 = \alpha_1^TA\alpha_1$ 是 A 的一个特征值，而 α_1 刚好是相应的特征向量。

这是:
$$g'(0) = 2\beta^T \left[A\alpha_1 - \left(\alpha_1^T A\alpha_1\right)\alpha_1\right] = 0.$$
由 β 的任意性可知
$$A\alpha_1 = \left(\alpha_1^T A\alpha_1\right)\alpha_1.$$
所以 $\alpha_1^T A\alpha_1$ 是 A 的一个特征值，而 α_1 是相应的特征向量。

1.3. 设 α_2 是平面上与 α_1 垂直的单位向量。证明 α_2 是 A 的特征向量。

这是:
$$\alpha_1^T A\alpha_2 = (A\alpha_1)^T\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2 = 0.$$
说明 $A\alpha_2$ 与 α_1 垂直，所以 $A\alpha_2$ 与 α_2 在平面上是平行关系，存在 $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$。这就证明了 α_2 也是特征向量。

1.4. 令 $Q = (\alpha_1\,\alpha_2)$，证明 Q 是正交矩阵，且 $Q^T AQ$ 是对角矩阵。

这是: 因为 Q 的列向量 α_1 α_2 是单位正交，所以 Q 是正交矩阵。另外
$$\begin{aligned} A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \quad (i=1,2) \quad &\Rightarrow \quad A(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad AQ = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Step 2.

假设结论对任意 n 阶实对称，下面需要根据归纳假设证明：如果 A 是 $n+1$ 阶实对称矩阵，则存在 $n+1$ 阶正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 为对角矩阵。

2.1 证明：存在单位向量 $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$，是 A 的特征向量。证明方法与上述 $n=2$ 的情形相似，请扼要写出解释:

这是:
1. 令 $f(x) = x^T Ax$，$C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, |x| = 1\}$ 则 C 是有界闭集，所以当 $f(x)$ 限制 C 在上时能取到最大值，即：存在 $\alpha_1 \in C$，使得
$$f(\alpha_1) \geq f(\beta) \qquad \forall \beta \in C.$$
这说明 $t=0$ 是函数 $g(t) = f\left(\frac{\alpha_1 + t\beta}{|\alpha_1 + t\beta|}\right)$ 的驻点，其中 β 是 C 中任一向量。
2. 所以 $0 = g'(0) = 2\beta^T\left[A\alpha_1 - \left(\alpha_1^T A\alpha_1\right)\alpha_1\right]$。
3. 由 β 的任意性可知 $A\alpha_1 = \left(\alpha_1^T A\alpha_1\right)\alpha_1$. 所以 $\alpha_1^T A\alpha_1$ 是 A 的一个特征值，而 α_1 是相应的特征向量。

2.2 将 α_1 扩充为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一组单位正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$。令
$$P = (\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_{n+1}),$$
则 P 是 $n+1$ 阶正交矩阵。

2.3 由上述 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ 的选取，可以证明
$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & B \end{pmatrix}$$
其中 λ_1 是 A 的特征值满足 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$，而 B 是某个 n 阶实对称矩阵。

2.4 由归纳假设存在 n 阶正交矩阵 S 使得，$S^T BS$ 为对角矩阵 Λ。

2.5 证明：存在 $n+1$ 阶正交矩阵 Q，使得 $Q^T AQ$ 为对角矩阵。

这是：令 $Q=P\begin{pmatrix}1 & \\ & S\end{pmatrix}$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}1 & \\ & S^T\end{pmatrix}P^TP\begin{pmatrix}1 & \\ & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & S^TS\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & I_n\end{pmatrix}$$

说明 Q 是正交矩阵。并且

$$\begin{aligned}Q^TAQ&=\begin{pmatrix}1 & \\ & S^T\end{pmatrix}P^TAP\begin{pmatrix}1 & \\ & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & S^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & S\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & S^TBS\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \Lambda\end{pmatrix}\end{aligned}$$

是对角矩阵。

这样就证明了定理。

这个定理的一个简单推论是，实对称矩阵 A 一定可以对角化。

这是：$Q^TQ \Rightarrow Q^T=Q^{-1}$，所以 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ$ 是对角矩阵，A 可以对角化。