§5.1 不定积分的概念与性质

数学系　　梁卓滨

2016-2017 学年 II

教学要求

- ◇ “原函数”的概念，“不定积分”的概念
- ♣ 会计算简单的不定积分
- ♡
- ♠

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程- 速度 路程函数：$s = s(t)$，则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程- 速度 路程函数：$s = s(t)$，则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

曲线图形- 斜率 曲线：$y = f(x)$，则

$$f'(x) = k(x)$$

为曲线在点 $(x, f(x))$ 处的斜率。

回顾导数

函数的导数，即是函数的变化率：

$$F'(x) = f(x)$$

不少概念是通过导数来定义

路程- 速度 路程函数：$s = s(t)$，则

$$s'(t) = v(t)$$

为速度函数。

曲线图形- 斜率 曲线：$y = f(x)$，则

$$f'(x) = k(x)$$

为曲线在点 $(x, f(x))$ 处的斜率。

成本- 边际成本 成本函数：$C = C(x)$，则

$$C'(x) = MC$$

为边际成本函数。

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' =$ ______; $(x^{7/5})' =$ ______; $(x^{-1/2})' =$ ________;
2. $(x^\alpha)' =$ ______;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{\qquad}$; $(x^{7/5})' = \underline{\qquad}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^?}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' =$ ______; $(x^{7/5})' =$ ______; $(x^{-1/2})' =$ ______;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^?}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\qquad}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\qquad}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\quad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^?}$; $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\qquad}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{\qquad\qquad}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{?}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\qquad}$;　$(\cos x)' = \underline{\qquad}$;
   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$;　$(\cot x)' = \underline{\qquad}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$;　$(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$;　$(\cos x)' = \underline{\qquad}$;
   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$;　$(\cot x)' = \underline{\qquad}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$;　$(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$; $(\cot x)' = \underline{\qquad}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$; $(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$；　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$；　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$；　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$；
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$；　$(\cot x)' = \underline{\qquad}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$；　$(\arctan x)' = \underline{\qquad}$；

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$;　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;　$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad\qquad}$;　$(\arctan x)' = \underline{\qquad\qquad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\qquad}$;

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$； $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$； $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$； $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$；
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$； $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$；
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$； $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$；

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{\qquad}$; $(a^x)' = \underline{\qquad\qquad}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{\qquad\qquad}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\qquad}$ $(x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\qquad\quad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{\qquad\qquad}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{\qquad\qquad}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\quad}$ $(x > 0)$; $\big(\ln(1+x^2)\big)' = \underline{\qquad\quad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^{\alpha})' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$;　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;　$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$;　$(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$;　$(a^x)' = \underline{a^x \ln a}\ (a > 0)$;　$(5^x)' = \underline{\qquad\qquad}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\quad}\ (x > 0)$;　$\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\qquad\qquad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\quad}$ $(x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\qquad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$；　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$；　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$；

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$；

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$；　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$；

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$；　$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$；

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$；　$(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$；

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$；　$(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$；　$(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$；

6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$；　$\big(\ln(1+x^2)\big)' = \underline{\qquad}$.

求导练习

- 求导的方法：基本公式，运算法则，复合函数求导法

回顾性练习

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $\quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $\quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;

2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $\quad (\cos x)' = \underline{-\sin x}$;

   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $\quad (\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $\quad (\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $\quad (a^x)' = \underline{a^x \ln a}\ (a > 0)$; $\quad (5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;

6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$; $\quad \left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$d\ln(1+x^2) = \underline{\qquad\qquad\qquad} dx$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$d\ln(1+x^2) = \big(\ln(1+x^2)\big)' dx$$

$$\underline{\hspace{6cm}}$$

回顾微分

函数 $F(x)$ 的微分是

$$dF(x) = F'(x)dx$$

例

$$d\ln(1+x^2) = \underline{\big(\ln(1+x^2)\big)'}dx = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}dx$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
$$F'(x) = ?$$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
  $$F'(x) = ?$$
- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；

  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
  $$F'(x) = ?$$

本学期

- 问：
  $$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；

  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：

  $$F'(x) = ?$$

- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；

  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：

  $$(?)' = f(x)$$

- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；

  $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$。

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
  $$F'(x) = ?$$
- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；
  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：
  $$(?)' = f(x)$$
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；
  $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
  $$F'(x) = ?$$
- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；
  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：
  $$(?)' = f(x)$$
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；
  $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数；

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
  $$F'(x) = ?$$
- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；
  $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：
  $$(?)' = f(x)$$
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；
  $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数；

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$ $f(x)$ 是斜率 $k(x)$ 的原函数；

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$

原函数的概念

$$F'(x) = f(x)$$

上学期

- 求：
$$F'(x) = ?$$
- $F(x)$ 的导数是 $f(x)$；
$f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数。

本学期

- 问：
$$(?)' = f(x)$$
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；
$f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$。

例子

路程- 速度 $s'(x) = v(x)$ 路程 $s(x)$ 是速度 $v(x)$ 的原函数；

曲线图形- 斜率 $f'(x) = k(x)$ $f(x)$ 是斜率 $k(x)$ 的原函数；

成本- 边际成本 $C'(x) = MC$ 成本 $C(x)$ 是边际成本 MC 的原函数。

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' =$ ____; $(x^{7/5})' =$ ____; $(x^{-1/2})' =$ ____;
2. $(x^\alpha)' =$ ____;
3. $(\sin x)' =$ ____; $(\cos x)' =$ ____; ;
   $(\tan x)' =$ ____; $(\cot x)' =$ ____;
4. $(\arcsin x)' =$ ____; $(\arctan x)' =$ ____;
5. $(e^x)' =$ ____; $(a^x)' =$ ____ $(a > 0)$; $(5^x)' =$ ____;
6. $(\ln x)' =$ ____ $(x > 0)$; $\big(\ln(1 + x^2)\big)' =$ ____.

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $\quad (x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $\quad (x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\qquad}$; $\quad (\cos x)' = \underline{\qquad}$; $\quad$;

   $(\tan x)' = \underline{\qquad}$; $\quad (\cot x)' = \underline{\qquad}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\qquad}$; $\quad (\arctan x)' = \underline{\qquad}$;
5. $(e^x)' = \underline{\quad}$; $\quad (a^x)' = \underline{\qquad}\ (a > 0)$; $\quad (5^x)' = \underline{\qquad}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\quad}\ (x > 0)$; $\quad \big(\ln(1+x^2)\big)' = \underline{\qquad}$.

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$; $(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; ;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{\qquad}$; $(a^x)' = \underline{\qquad\qquad}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{\qquad\qquad}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\quad}$ $(x > 0)$; $\big(\ln(1+x^2)\big)' = \underline{\qquad\quad}$.

原函数的例子

上学期

1. $(x^3)' = \underline{3x^2}$;　$(x^{7/5})' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$;　$(x^{-1/2})' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(x^\alpha)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$;　$(\cos x)' = \underline{-\sin x}$;　;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$;　$(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$;　$(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(e^x)' = \underline{e^x}$;　$(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$;　$(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$;　$\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的例子

本学期

1. $(\qquad)' = \underline{3x^2}$; $(\qquad\quad)' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(\qquad\qquad)' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(\qquad)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\sin x)' = \underline{\cos x}$; $(\cos x)' = \underline{-\sin x}$; ;
   $(\tan x)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\cot x)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\arcsin x)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\arctan x)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\big(\ln(1+x^2)\big)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的例子

本学期

1. $(\quad)' = \underline{3x^2}$; $(\quad)' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(\quad)' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(\quad)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;

3. $(\quad)' = \underline{\cos x}$; $(\quad)' = \underline{-\sin x}$; ;
   $(\quad)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\quad)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\quad)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\quad)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;

5. $(e^x)' = \underline{e^x}$; $(a^x)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(5^x)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的例子

本学期

1. $(\quad)' = \underline{3x^2}$; $(\qquad)' = \underline{\frac{7}{5}x^{2/5}}$; $(\qquad\qquad)' = \underline{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}$;
2. $(\quad)' = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$;
3. $(\qquad)' = \underline{\cos x}$; $(\qquad)' = \underline{-\sin x}$; ;
   $(\qquad)' = \underline{\frac{1}{\cos^2 x}}$; $(\qquad)' = \underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;
4. $(\qquad\qquad)' = \underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $(\qquad\qquad)' = \underline{\frac{1}{1+x^2}}$;
5. $(\quad)' = \underline{e^x}$; $(\quad)' = \underline{a^x \ln a}$ $(a > 0)$; $(\quad)' = \underline{5^x \ln 5}$;
6. $(\quad)' = \underline{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$; $\left(\qquad\qquad\right)' = \underline{\frac{2x}{1+x^2}}$.

原函数的准确定义

定义 设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上，如果存在一个函数 $F(x)$ 满足:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数。

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \ \Rightarrow\ (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (-\cos x)' = \sin x$，
   所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；

现阶段求原函数：猜

例 求下列函数的一个原函数：

1. $f(x) = x^2, \ x \in (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sin x, \ x \in (-\infty, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

作如下“猜”（主要是求导基本公式的运用）

1. $(x^3)' = 3x^2 \ \Rightarrow \ (\frac{1}{3}x^3)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数；
2. $(\cos x)' = -\sin x \ \Rightarrow \ (-\cos x)' = \sin x$，
   所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数；
3. 直接验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数。

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' =$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时,

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) =$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$。

验证 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

验证

- 当 $x > 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- 当 $x < 0$ 时，

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

总之，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$。

所以，$\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)'$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha}$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数

2. $\left(e^{2x+1}\right)'$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数
2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$，

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$，

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$，
   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数
2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$，
   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数？

练习

1. 求 x^{α} 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数？

解 $e^{\sin x}$ 是$(e^{\sin x})'$ 的原函数

练习

1. 求 x^α 的一个原函数，其中 $\alpha \neq -1$。
2. 求 e^{2x+1} 的一个原函数？

解

1. $\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

   所以 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数

2. $\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}e^{2x+1}\right)' = e^{2x+1}$,

   所以 $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ 是 e^{2x+1} 的一个原函数

练习 问 $e^{\sin x}$ 是哪个函数的原函数？

解 $e^{\sin x}$ 是$(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cos x$的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi$$

是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3-1, \quad \frac{1}{3}x^3+\pi, \quad \frac{1}{3}x^3+C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数

注

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 - 1, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi, \quad \frac{1}{3}x^3 + C, \ldots$$

都是 x^2 的原函数

问题 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不唯一，如何求出全部原函数？

如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C，C \text{ 为任意常数}$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C，C \text{ 为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C，C \text{ 为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))' =$$

如何求出全部原函数?

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C,\ C \text{ 为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))' = G'(x)-F'(x) =$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C, \quad C \text{ 为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C，\ C \text{ 为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x)-F(x)=C.$$

如何求出全部原函数？

性质 设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数是

$$F(x)+C,\ C\ \text{为任意常数}$$

证明

- 设函数 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$(G(x)-F(x))' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0.$$

- 所以利用拉格朗日中值定理的推论得到

$$G(x)-F(x) = C.$$

所以

$$G(x) = F(x)+C$$

不定积分 $\int f(x)dx$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 "$\int f(x)dx$" 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号“$\int f(x)dx$”表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分
- “$\int$”：积分号；

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 "$\int f(x)dx$" 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- "$\int$"：积分号；$f(x)$：被积函数；

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 "$\int f(x)dx$" 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- "$\int$"：积分号；$f(x)$：被积函数；$f(x)dx$：被积表达式(微分形式)

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “$\int f(x)dx$” 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- “$\int$”：积分号；$f(x)$：被积函数；$f(x)dx$：被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx =$$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 "$\int f(x)dx$" 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- "$\int$"：积分号；$f(x)$：被积函数；$f(x)dx$：被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 "$\int f(x)dx$" 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- "$\int$"：积分号；$f(x)$：被积函数；$f(x)dx$：被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为积分常数。

不定积分 $\int f(x)dx$

- 符号 “$\int f(x)dx$” 表示：$f(x)$ 的任意一个原函数

  读作：$f(x)$ 的不定积分

- “$\int$”：积分号；$f(x)$：被积函数；$f(x)dx$：被积表达式(微分形式)

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 是任意常数，称为积分常数。

总结 求不定积分 $\int f(x)dx$ 的步骤：

1. 求出一个原函数 $F(x)$；
2. $\int f(x)dx = F(x) + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$,

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2 dx; \qquad (2)\ \int \sin x dx; \qquad (3)\ \int \frac{1}{x} dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\int x^2dx;\qquad (2)\int \sin x dx;\qquad (3)\int \frac{1}{x}dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. 因为 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，

不定积分例子

例子 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^2dx;\qquad (2)\ \int \sin x dx;\qquad (3)\ \int \frac{1}{x}dx$$

解

1. 因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
2. 因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
3. 因为 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$，所以 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x}dx; \qquad (3)\ \int 0dx$$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\int x^{\alpha}dx\quad(\alpha\neq-1);\qquad(2)\int e^{3x}dx;\qquad(3)\int 0dx$$

答案

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^\alpha dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x} dx; \qquad (3)\ \int 0 dx$$

答案

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
2. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

不定积分练习

练习 求下列不定积分：

$$(1)\ \int x^{\alpha}dx \quad (\alpha \neq -1); \qquad (2)\ \int e^{3x}dx; \qquad (3)\ \int 0dx$$

答案

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
2. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$
3. $\int 0dx = 0 + C = C$

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]'$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx =$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x)}$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C}$$

;

;

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' =$ ________;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) =$ ________________;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) =$ ________________

暨南大學 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' =$ $\underline{\quad e^{\sin x} \quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) =$ ________________;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) =$ ________________

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \qquad \text{or} \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad \text{or} \qquad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) \quad}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{\qquad\qquad}$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x} \quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) + C \quad}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2 e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{\qquad\qquad}$

不定积分与微分/导数关系：互为逆运算

- $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的（任意一个）原函数，所以

$$\boxed{\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \quad \text{or} \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx}$$

- $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，所以

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{or} \quad \int dF(x) = F(x) + C}$$

例子 (1) $\left(\int e^{\sin x}dx\right)' = \underline{\quad e^{\sin x}\quad}$;

(2) $\int d\arcsin(\sqrt{x}) = \underline{\quad \arcsin(\sqrt{x}) + C\quad}$;

(3) 若 $\int f(x)dx = x^2e^{3x} + C$，则 $f(x) = \underline{2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}}$

暨南大学 JINAN UNIVERSITY

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $\int \left(2\cos x - \dfrac{1}{3x} + e^x\right)dx$

$=$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解
$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx =$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$=$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\qquad\qquad) - \frac{1}{3}(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解
$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\qquad\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解
$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + (\qquad\qquad)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + (e^x + C_3)$$

$$=$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$

解
$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right)dx$$
$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x}dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx$$
$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + (e^x + C_3)$$
$$= 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3\right)$$

不定积分的线性运算性质

性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，$k \neq 0$ 为常数

性质 2 $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（对多个函数情形也成立）

例 求不定积分 $\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$

解 $$\int \left(2\cos x - \frac{1}{3x} + e^x\right) dx$$

$$= \int 2\cos x dx - \int \frac{1}{3x} dx + \int e^x dx = 2\int \cos x dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx$$

$$= 2(\sin x + C_1) - \frac{1}{3}(\ln|x| + C_2) + (e^x + C_3)$$

$$= 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + \left(2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + C_3\right) = 2\sin x - \frac{1}{3}\ln|x| + e^x + C$$

补充：不定积分的存在性

如果 $f(x)$ 是连续函数，则 $f(x)$ 一定存在原函数，从而不定积分 $\int f(x)dx$ 也一定存在

问题是 如何把 $\int f(x)dx$ 求出来？

We are here now...

1. “原函数”与“不定积分”的概念

2. 不定积分的性质

3. 不定积分的几何意义

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x) = 2x$$

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$，所以

例子 设 $y=f(x)$ 的图形经过点 $(1,3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x)=2x \quad\Longrightarrow\quad f(x)=x^2+C$$

又因为 $f(1)=3$，所以 $3=f(1)=1^2+C$,

例子 设 $y=f(x)$ 的图形经过点 $(1,3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x)=2x \quad \Longrightarrow \quad f(x)=x^2+C$$

又因为 $f(1)=3$，所以 $3=f(1)=1^2+C$，$C=2$。所以

例子 设 $y = f(x)$ 的图形经过点 $(1, 3)$，并且其切线的斜率为 $2x$。试求出 $f(x)$。

解

$$f'(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = x^2 + C$$

又因为 $f(1) = 3$，所以 $3 = f(1) = 1^2 + C$，$C = 2$。所以

$$f(x) = x^2 + 2$$