

Capítulo 1

Introdução à Teoria dos Grafos

Edmilson Marmo Moreira

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologia da Informação - IESTI

“Os homens são como os vinhos: a idade azeda os maus e apura os bons”.

Cícero

1 Considerações Iniciais

No século XVIII, os cidadãos da cidade de Königsberg (uma cidade antiga da Prússia, mais tarde chamada de Kaliningrado, na Rússia) tinham um pequeno problema. O rio Pregel que passava pela cidade formava uma ilha. Diversas pontes atravessavam o rio, como mostra a figura 1. O problema era determinar se uma pessoa poderia passear pela cidade passando apenas uma vez por cada ponte.

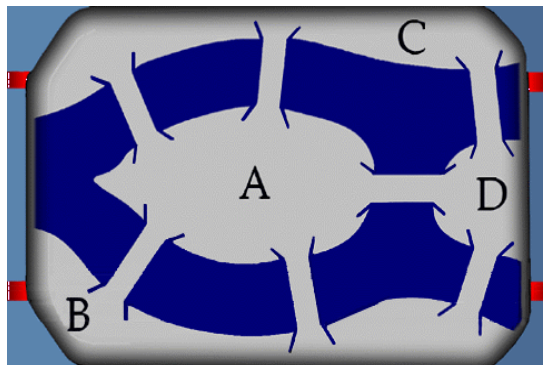


Figura 1: Ilustração das pontes de Königsberg

O matemático Leonhard Euler (1707-1783) ficou curioso com esta situação e resolveu o problema geral apresentando a solução em um artigo publicado em 1736 denominado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. A ideia de Euler foi simples. Primeiro, ele representou o mapa de Königsberg através de um diagrama como o da figura 2. Os pontos *b* e *c* representam as duas margens do rio, os pontos *a* e *d* representam as duas ilhas e os 7 arcos conectando estes pontos representam as 7 pontes.

Euler pôde então caracterizar o **problema das pontes de Königsberg**, como é conhecido hoje, da seguinte forma: *é possível, partindo de um dos quatro pontos a, b, c ou d, percorrer todos os arcos do diagrama uma única vez e retornar ao ponto de partida?*

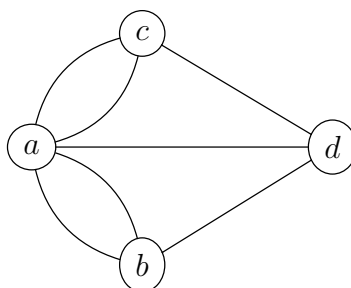


Figura 2: O problema das pontes de Königsberg representado por um Grafo

Euler demonstrou que a resposta para esta questão é: “**não**” pela razão que se segue. Suponha que é possível realizar a tarefa descrita pelo problema. Então, qualquer pessoa que percorrer o caminho deve entrar e sair de cada um dos pontos a , b , c e d um número par de vezes.

Se a viagem começa no ponto a , por exemplo, então cada vez que a pessoa entrar em um dos pontos b , c e d , ela deve também deixá-lo. Desta forma, o número de vezes que ela entra e sai de cada ponto b , c e d deve ser par. O mesmo é verdade para o ponto de partida a , mas, neste caso, deve-se também incluir o ponto de partida original de a e o ponto final em a . Por razões idênticas, a situação se repetirá utilizando os pontos b , c e d como ponto de partida.

Portanto, uma vez que a pessoa deve entrar e sair de cada um destes quatro pontos percorrendo arcos diferentes e deve utilizar todas as conexões entre os pontos para finalizar a tarefa, deve existir um número par de arcos conectados em cada um dos pontos a , b , c e d . Como pode ser observado na figura 2, esta situação não ocorre.

O diagrama da figura 2 é chamado de **Grafo** e o artigo de Euler foi o marco inicial de um novo ramo da matemática conhecido como **Teoria dos Grafos**. A Teoria dos Grafos é uma das áreas de maior aplicação da Matemática, sendo usada na Computação, Ciência, Engenharia, Química, Biologia, Economia, Pesquisa Operacional, Linguística, etc.

2 Conceitos Básicos

Um grafo é uma estrutura bastante útil na representação e solução de diversos tipos de problemas. Intuitivamente, um grafo é uma coleção de pontos e um conjunto de arcos que conectam pares destes pontos. De uma forma geral, permite-se mais de um arco conectando os mesmos pares de pontos, conforme ilustração da figura 3.

A forma como o grafo é representado não é importante. O que é significativo são os pontos do grafo e o número de arcos entre cada par de pontos (incluindo *loops*). Por exemplo, os diagramas das figuras 4 e 5 representam exatamente o mesmo grafo.

Por causa disto, as características importantes do grafo da figura 3 podem ser descritas

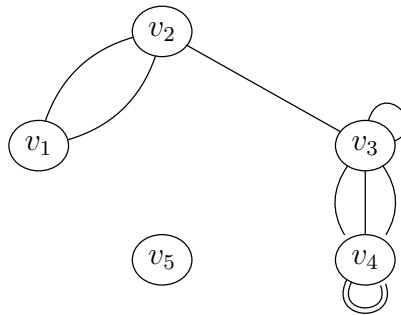


Figura 3: Exemplo de grafo com vários arcos conectando os mesmos pontos

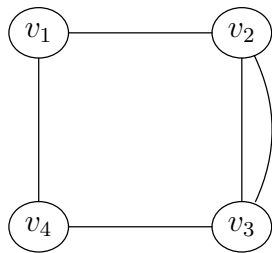


Figura 4: Exemplo de grafo

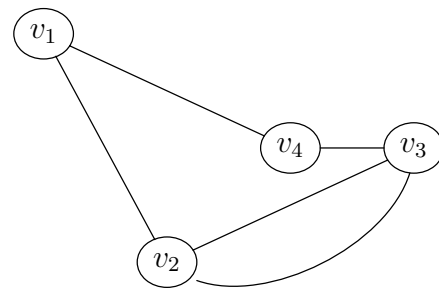


Figura 5: O mesmo grafo da Fig. 4

através do conjunto

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$$

de seus pontos, e do conjunto

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4\}, \{v_4\}\}$$

de seus arcos.

Os elementos do conjunto V são chamados de **vértices** ou **nós** do grafo e os elementos do conjunto E são chamados de **arestas** do grafo. Um arco da forma $\{v\}$ é chamado de *loop* de $\{v\}$.

Definição 2.1 (Grafo) Um grafo $G = (V, A, g)$ é uma tripla ordenada onde:

V = um conjunto não-vazio de **vértices** (**nós**);

A = um conjunto de **arestas** (**arcos**);

g = uma função que associa cada aresta a um par não ordenado x - y de vértices chamados de **extremos** de a .

Por uma questão de simplificação, uma vez que o conjunto de arestas de um grafo está diretamente relacionado com o conjunto de vértices, a maioria dos autores desta área define um grafo como sendo uma **dupla ordenada** (V, A) . Neste caso, a função de mapeamento está implícita na descrição dos elementos dos dois conjuntos.

Sendo e uma aresta e v, w dois vértices, escreve-se $e = \{v, w\}$ ou $e = \{w, v\}$ dizendo-se, então, que e é uma aresta entre v e w ou que a aresta e liga os vértices v e w que, por este fato, se dizem **adjacentes**.

2.1 Terminologia

Duas arestas que tenham os mesmos extremos são chamadas de **arestas paralelas** ou **arestas múltiplas**. As arestas a_1 e a_2 da figura 6 são paralelas.

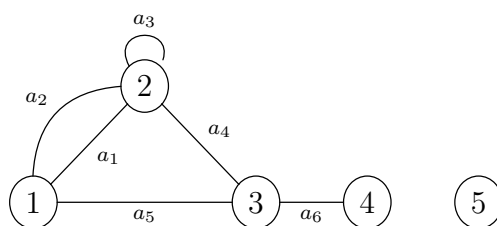


Figura 6: Exemplo de grafo com arestas rotuladas

Se entre dois vértices existir mais que uma aresta então, se for necessário distinções, o grafo correspondente toma o nome de **multigrafo**. Grafos que não possuem *loops* nem arestas paralelas são denominados **grafos simples**. No presente texto e ao longo deste curso, sempre que o termo **grafo** for empregado, implicitamente o conceito referido será o de **grafo simples**. Um grafo que contém no mínimo um laço é denominado **pseudografo**. Um pseudografo onde todos os vértices possuem um laço associado é denominado **grafo reflexivo**. Um **vértice isolado** não é adjacente a qualquer outro vértice; na figura 6, o nó 5 é um vértice isolado. O **grau** de um vértice é o número de arestas que o tem como ponto extremo. Na figura 6, os vértices 1 e 3 possuem grau 3, o vértice 2 tem grau 5, o vértice 4 tem grau 1 e o vértice 5 possui grau 0.

Um grafo G é **regular de grau k** ou **k -regular** se todo vértice tem grau k . Em outras palavras, um grafo é regular se todo vértice tem o mesmo grau. O grafo conexo 0-regular é o **grafo trivial** com um vértice e nenhuma aresta. O grafo conexo 1-regular é o grafo com dois vértices e uma aresta que os conecta, e assim por diante. A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de G . Por sua vez, denomina-se **tamanho** de um grafo a cardinalidade de seu conjunto de arestas.

Como a função g , que relaciona cada aresta a seus extremos, é entendida como uma função propriamente dita, cada aresta tem um único par de pontos extremos. Se g for uma função injetiva, então haverá apenas uma aresta associada a cada par de vértices e o grafo não terá arestas paralelas.

Um **grafo vazio** é aquele que contém exclusivamente vértices. Um grafo é dito **nulo** quando não possui vértices. Como foi dito, um grafo é dito **trivial** ou **singleton** quando possui somente um vértice.

Um **grafo completo** é aquele no qual todos os vértices distintos são adjacentes. Neste caso, g é quase uma função sobrejetora – todo par $x - y$ de vértices distintos está no conjunto imagem de g –, mas não há um laço em cada vértice, de forma que pares do tipo $x - x$ não devem ter imagem. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Destaca-se que grafos completos são grafos simples, ou seja, não possuem arestas paralelas ou laços.

Teorema 2.2 (Número de arestas de um grafo K_n) *O número de arestas em um grafo completo é $n(n - 1)/2$.*

Demonstração: A prova é realizada por indução matemática. Supondo K_n um grafo que contém n vértices. O caso base é K_1 . Neste caso, como existe somente um vértice, não existem arestas, pois os grafos completos são grafos simples e, portanto, não possuem laços. Desta forma, verifica-se que $n(n - 1)/2 = 0$.

Supondo que a hipótese é verdadeira para K_n , onde $n \geq 1$. Seja, agora, o grafo K_{n+1} . É necessário mostrar que o número de vértices neste grafo é $n(n + 1)/2$. Fazendo v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em K_{n+1} e não em K_n . O número máximo de arestas no grafo K_{n+1} é igual ao número máximo no grafo K_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de K_n . Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em K_n , tem-se:

$$\text{Número máximo} = \frac{n(n - 1)}{2} + n = \frac{n(n - 1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Isso prova o teorema.

A figura 7 apresenta alguns exemplos de grafos completos.

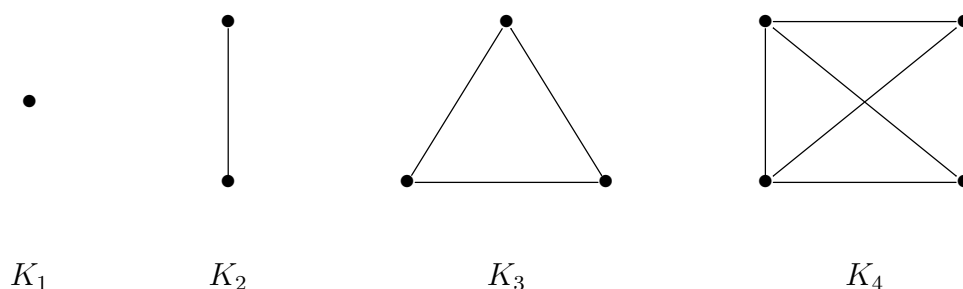


Figura 7: Exemplos de Grafos Completos

Um **subgrafo** de um grafo consiste em um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas originais, respectivamente, nos quais os extremos de qualquer aresta precisam ser os mesmos que no grafo original. Em outras palavras, é um grafo obtido apagando-se parte do grafo original e deixando o restante sem alterações. Um tipo especial de subgrafo é denominado **clique**. Um clique

é um subgrafo que é completo. As figuras 8 e 9 mostram subgrafos da figura 6. O grafo na figura 8 é simples e também completo.

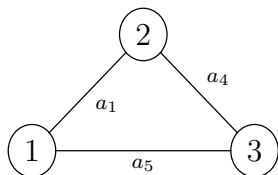


Figura 8: Um subgrafo do grafo da figura 6

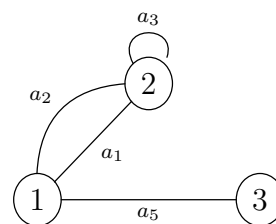


Figura 9: Outro subgrafo do grafo da figura 6

Um **caminho** ou **passeio** de um vértice v_0 a um vértice v_k é uma sequência:

$$v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_{k-1}, a_{k-1}, v_k$$

de vértices e arestas onde, para cada i , os extremos da aresta a_i são $v_i - v_{i+1}$. No grafo da figura 6, um caminho do vértice 2 ao vértice 4 consiste na sequência: 2, a_1 , 1, a_2 , 2, a_4 , 3, a_6 , 4. O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém. Se uma aresta for usada mais de uma vez, ela deve ser contada tantas vezes quantas for usada. O **comprimento** do caminho que acabou de ser descrito entre os nós 2 e 4 é 4. Um grafo é dito conexo se houver um caminho entre quaisquer dois vértices. Os grafos das figuras 8 e 9 são conexos, mas o grafo da figura 6 não é.

Um **ciclo** em um grafo é um caminho de comprimento igual ou maior que 3 de algum vértice v_0 até v_0 de novo de forma que nenhum vértice ocorra mais de uma vez no caminho, sendo v_0 o único vértice que ocorre mais de uma vez e este ocorre apenas nos extremos do caminho. No grafo da figura 8, $[1, a_1, 2, a_4, 3, a_5, 1]$ é um ciclo. Um grafo sem ciclos é dito **acíclico** e um ciclo de comprimento k é chamado de **k -ciclo**. Observe na Figura 10 que um laço é também chamado de 1-ciclo e duas arestas paralelas foram um 2-ciclo.

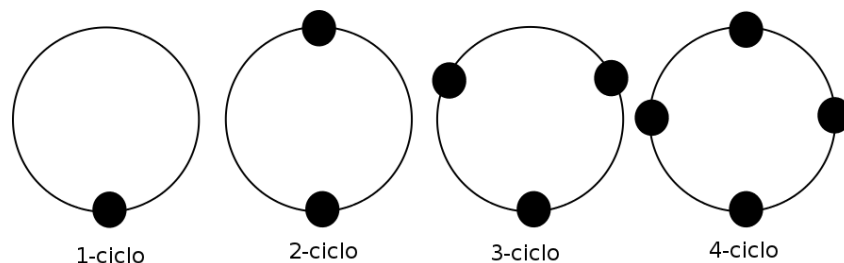


Figura 10: Exemplos de k -ciclos

Um **caminho simples** é um caminho em que todos os vértices são distintos. Um caminho em que todas as arestas são distintas é chamado **trilha**.

Um grafo G é dito um **grafo rotulado** se estão associados dados de algum tipo às suas arestas e/ou vértices. Em particular, G é **grafo ponderado** se a cada aresta e de G está

associado um número não negativo $w(e)$ dito **peso** ou **comprimento** de e . A figura 11 mostra um grafo ponderado onde o comprimento de cada aresta está descrito de maneira óbvia. O peso ou comprimento de um caminho em um grafo ponderado G é definido como sendo a soma dos pesos das arestas no caminho. Um problema importante na teoria dos grafos é encontrar o **menor caminho**, isto é, um caminho de peso (comprimento) mínimo entre quaisquer dois vértices. O comprimento do caminho mínimo entre P e Q na figura 11 é 14; um tal caminho é

$$P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q.$$

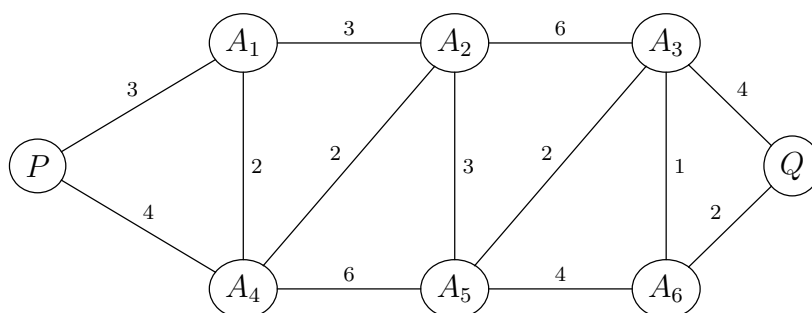


Figura 11: Exemplo de grafo ponderado

Um grafo G é dito **biparticionado** ou **bipartido** se o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos M e N tais que cada aresta de G conecta um vértice de M a um vértice de N . Um grafo é **completo e biparticionado** se cada vértice de M é conectado a cada vértice de N . Esse tipo de grafo é denotado por $K_{m,n}$, onde m é o número de vértices em M , e n é o número de vértices em N . A figura 12 apresenta o grafo $K_{2,3}$.

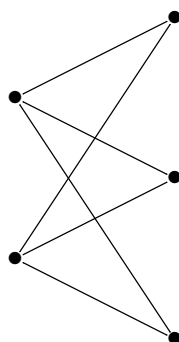


Figura 12: Grafo $K_{2,3}$

Existe um teorema interessante em relação aos grafos bipartidos.

Teorema 2.3 (Grafo bipartido) *Um grafo G é um grafo bipartido se, e somente se, todo ciclo de G possuir caminho par.*

Demonstração: *Ida:* Seja X e Y as duas partições de G . Todo caminho em G alterna um vértice de X com um vértice de Y . Isso é a consequência da definição de grafo bipartido. Supondo que um ciclo contém um vértice v_i em uma das duas partições. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes.

Volta: Seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice v_i de G . Coloca-se num conjunto X o vértice v_i e todos os outros vértices que estão a uma distância par de v_i . Os outros vértices formam o conjunto Y . Se não tivesse nenhuma aresta ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y , seria respeitado as condições para que o grafo fosse bipartido. Supondo agora que existe uma outra aresta entre dois vértices a e b de X (ou de Y). Já existe um caminho par entre a e b . Acrescentando a nova aresta, obtêm-se um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto, não pode existir outra aresta entre quaisquer par de vértices que já está em X (igualmente para Y) e o grafo é bipartido.

Isso prova o teorema.

A definição de grafo como uma tripla ordenada, constituído por um conjunto de vértices, um conjunto de arestas e uma função de mapeamento, permite que dois grafos que se parecem muito diferentes em suas representações gráficas, sejam, ainda assim, o mesmo grafo. Isto foi observado nos grafos representados pelas figuras 4 e 5, pois eles possuem os mesmos vértices, as mesmas arestas e a mesma função de associação entre arestas e vértices. Desta forma, dois grafos $G(V_1, A_1, g_1)$ e $G(V_2, A_2, g_2)$ são **isomorfos** se existirem bijeções $f_1 : V_1 \rightarrow V_2$ e $f_2 : A_1 \rightarrow A_2$ tais que para cada aresta $a \in A_1$, $g_1(a) = x - y$ se, e somente se, $g_2[f_2(a)] = f_1(x) - f_1(y)$. Em outras palavras, tem-se $|V_1| = |V_2|$ e existe uma função unívoca: $f : V_1 \rightarrow V_2$, tal que (i, j) é elemento de A_1 se, e somente se, $(f(i), f(j))$ é elemento de A_2 . A figura 13 ilustra o exemplo de dois grafos isomorfos entre si. Pode-se observar que:

$$f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 8, f(e) = 5, f(f) = 6, f(g) = 7, f(h) = 4.$$

O conceito de grafo pode ser generalizado para o caso em que a relação entre os vértices permite a consideração de mais de um par de nós ou vértices. Quando um grafo possui uma ou mais arestas que correspondam a relações que envolvam mais de dois vértices, esse grafo é denominado **hipergrafo**. Hipergrafos não serão tratados neste curso.

2.2 Grafos Planares

Um grafo ou multigrafo que pode ser desenhado no plano de tal modo que suas arestas não se cortem é dito **planar**. O grafo da figura 4 é um exemplo de grafo planar. Uma representação particular de um multigrafo planar finito é chamado **mapa**.

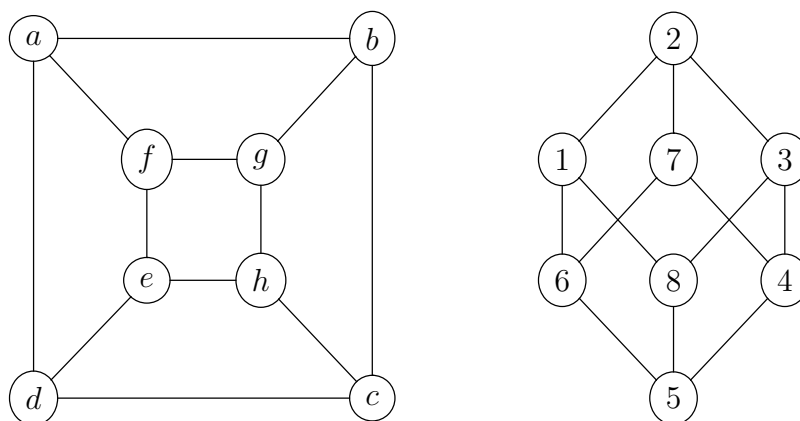


Figura 13: Grafos isomorfos

Um fato sobre grafos planares foi descoberto pelo matemático Leonhard Euler. Um grafo simples, conexo e planar divide o plano em um número de regiões, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior. Euler observou uma relação entre o número v de vértices, o número a de arestas e o número r de regiões neste tipo de grafos. Esta relação é denominada **fórmula de Euler**.

Teorema 2.4 (Fórmula de Euler) $v - a + r = 2$

Demonstração: Suponha que o mapa M consiste de um único vértice v . Então, $v = 1$, $a = 0$ e $r = 1$. Logo, $v - a + r = 2$. Caso contrário, M pode ser montado a partir de um vértice isolado usando as seguintes duas construções:

1. Acrescente um novo vértice q_2 e conecte-o a um vértice existente q_1 por uma aresta que não corte nenhuma aresta existente, como na figura 14.
2. Conecte dois vértices existentes q_1 e q_2 por uma aresta a que não cruze nenhuma aresta existente, como na figura 15.

Nenhuma das operações muda o valor de $v - a + r$. Logo, M tem o mesmo valor para $v - a + r$ do que no mapa com um único vértice, isto é, $v - a + r = 2$. Isso prova o teorema.

Existem duas consequências da fórmula de Euler, se for incluído mais restrições no grafo. Supondo que seja preciso que o grafo não seja apenas simples, conexo e planar, mas tenha, pelo menos, três vértices. Em uma representação planar deste grafo, pode-se contar o número de arestas que são adjacentes a cada região (formam a fronteira de cada região), incluindo a região exterior. Arestas que estão totalmente dentro de uma região contribuem com duas arestas para esta região. Por exemplo, ao percorrer a fronteira da região interior ilustrada na figura 16, percorre-se seis arestas, incluindo o arco que sai do nó de grau 1 e depois o mesmo arco de volta. Arestas que separam duas regiões contribuem

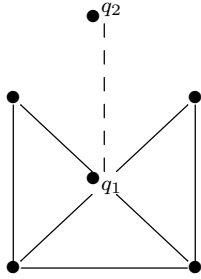


Figura 14: Grafo auxiliar 01

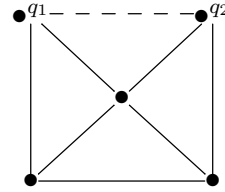


Figura 15: Grafo auxiliar 02

com uma aresta para cada região. Portanto, se houver a arestas no grafo, o número de arestas de regiões é $2a$.

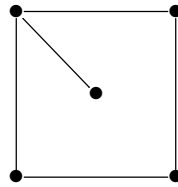


Figura 16: Fronteira de uma região

Não existem regiões com apenas uma aresta adjacente, porque não há laços no grafo. Não há regiões com exatamente duas arestas adjacentes porque não existem arestas paralelas e o grafo consistindo apenas em uma aresta ligando dois vértices (que tem duas arestas adjacentes à região exterior) foi excluído. Portanto, em cada região existem pelo menos três arestas adjacentes, de forma que $3r$ é o número mínimo de arestas em cada região. Por isso,

$$2a \geq 3r$$

ou pelo teorema 2.4:

$$2a \geq 3(2 - v + a) = 6 - 3v + 3a$$

ou seja,

$$a \leq 3v - 6.$$

Se for imposta uma última restrição de que não haja ciclos de comprimento 3, cada região terá pelo menos quatro arestas adjacentes, portanto $4r$ será o número mínimo de arestas de região. Isto leva à desigualdade

$$2a \geq 4r$$

que pode ser escrita como

$$a \leq 2v - 4.$$

2.3 Grafo Orientado

Um grafo também pode possuir arestas dirigidas, como no exemplo da figura 17. Neste caso, o grafo é denominado **grafo orientado** ou **dígrafo**.

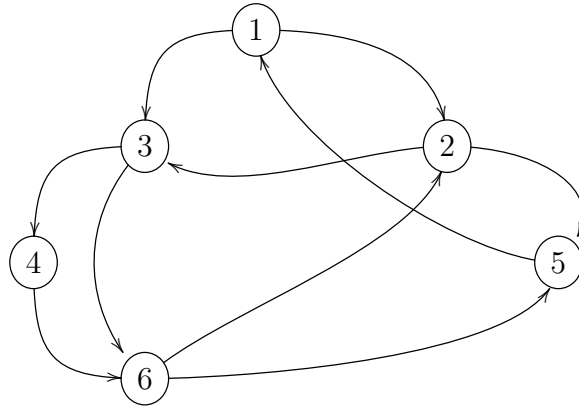


Figura 17: Exemplo de um grafo orientado – dígrafo

Definição 2.5 (Dígrafo) Um dígrafo $G = (V, A, g)$ é uma tripla ordenada onde:

V = um conjunto não-vazio de **vértices** (**nós**);

A = um conjunto de **arestas** (**arcos**);

g = uma função que associa cada aresta a um par ordenado (x, y) de vértices.

Da mesma forma que na definição de grafo não orientado, um dígrafo também pode ser definido, de forma simplificada, como uma dupla ordenada (V, A) , deixando implícita a função de mapeamento entre arestas e vértices.

Num dígrafo, escreve-se $a \equiv (v, w)$ para significar que a é um arco que liga v a w orientado de v para w . Neste caso, diz-se que v é **adjacente** ao vértice w e que o arco a é **incidente** sobre w e **emergente** de v .

Em grafos dirigidos há pequenas diferenças nas definições de grau, caminhos e conectividade. Suponha que G é um grafo orientado. O **grau de saída** de um vértice v de G é o número de arestas começando em v , e o **grau de entrada** é o número de arestas terminando em v . Como cada aresta começa e termina em um vértice, a soma dos graus de saída dos vértices de um grafo orientado G é igual à soma dos graus de entrada dos vértices, que é igual ao número de arestas em G .

Um vértice v com grau de entrada zero é dito uma **fonte**, e um vértice v com grau de saída zero é dito um **sumidouro**.

Os conceitos de caminho, caminho simples, trilha e ciclo são os mesmos dos grafos não orientados, exceto pelo fato de que a direção da aresta deve coincidir com a direção do caminho. Especificamente, seja G um grafo orientado, então:

1. Um **caminho** orientado P em G é uma sequência alternada de vértices e arestas orientadas, por exemplo,

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n)$$

tal que cada aresta a_i começa em v_{i-1} e termina em v_i . Quando não existem ambiguidades, denota-se P por sua sequência de vértices ou por sua sequência de arestas.

2. O **comprimento** do caminho P é n , seu número de arestas.
3. Um **caminho simples** é um caminho com vértices distintos. Uma **trilha** é um caminho com arestas distintas.
4. Um **caminho fechado** tem os vértices primeiro e último iguais.
5. Um **caminho gerador** contém todos os vértices de G .
6. Um **ciclo** ou **circuito** é um caminho fechado com vértices distintos (exceto o primeiro e o último).
7. Um **semicaminho** é o mesmo que um caminho, a não ser pelo fato de que a aresta a_i pode iniciar em v_{i-1} ou v_i e terminar no outro vértice. **Semitrilhas** e caminhos **semisimples** são definidos de maneira análoga.

Um vértice v é **alcançável** a partir de um vértice u se existir um caminho de u para v . Se v é alcançável a partir de u , então (eliminando as arestas redundantes) existe um caminho simples de u para v .

Existem três tipos de conectividades em um grafo orientado G :

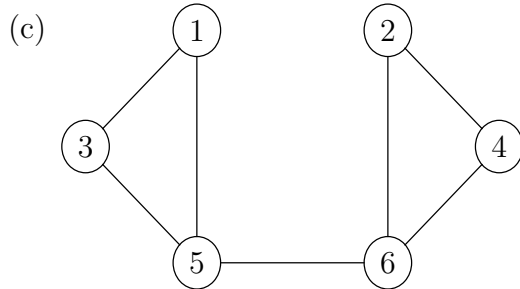
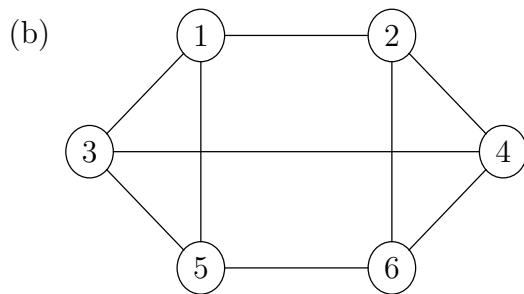
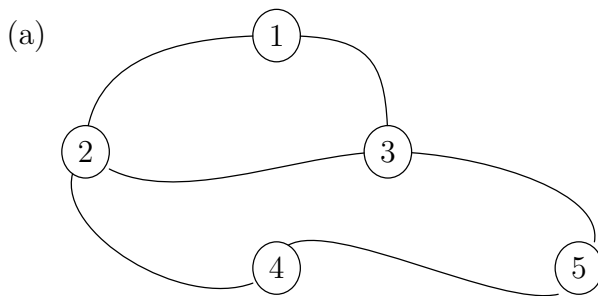
1. G é **fortemente conexo** ou **forte** se, para qualquer par de vértices u e v em G , existe um caminho de u para v e um caminho de v para u , isto é, se cada um deles é alcançável a partir do outro.
2. G é **unilateralmente conexo** ou **unilateral** se, para qualquer par de vértices u e v em G , existe um caminho de u para v ou um caminho de v para u , isto é, se algum deles é alcançável a partir do outro.
3. G é **fracamente conexo** ou **fraco** se existe um semicaminho entre quaisquer dois vértices u e v em G .

Seja G' um grafo (não orientado), obtido do grafo orientado G considerando todas as arestas de G como não orientadas. Claramente, G é fracamente conexo se, e somente se, o grafo G' é conexo.

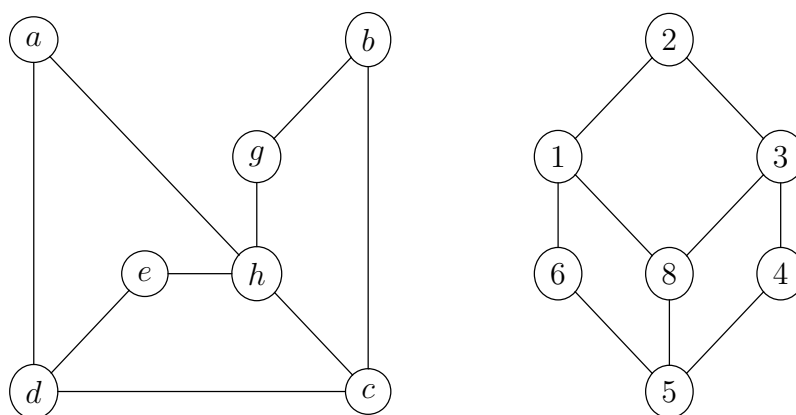
É importante notar que conectividade forte implica conectividade unilateral, e que conectividade unilateral implica em conectividade fraca. Diz-se que G é **estritamente unilateral** se é unilateral mas não forte, e é **estritamente fraco** se é fraco mas não unilateral.

3 Exercícios

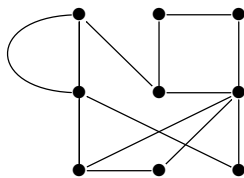
1. Cite as principais características de cada grafo abaixo:



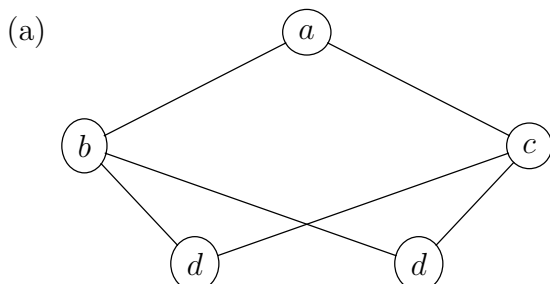
2. O complemento de um grafo simples $G = (V, A, g)$ é o grafo simples $G' = (V, A', g')$ no qual existe uma aresta entre dois vértices se, e somente se, não existe uma aresta entre os mesmos vértices em G . Desenhe o complemento dos seguintes grafos:

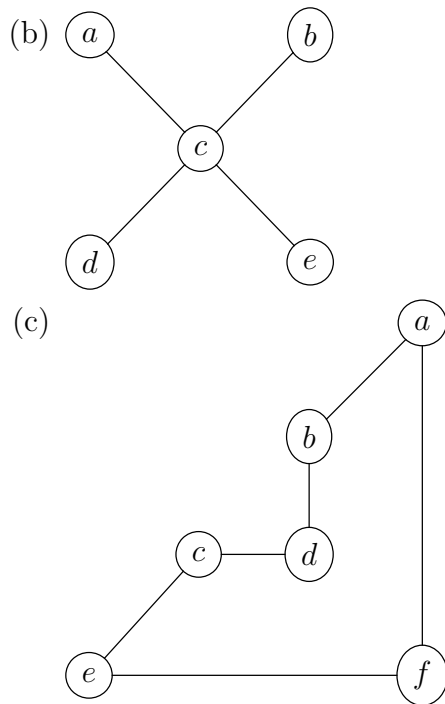


3. Seja G um grafo com v vértices e a arestas. Quantas arestas contém o grafo G' ?
4. Um grafo com quatro vértices ímpares pode ser conexo?
5. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.
 - (a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$; $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$.
 - (b) $A_1 = \{x \mid x < 0\}$; $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$; $A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$; $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$; $A_5 = \{x \mid x > -1\}$; $A_6 = \mathbb{R}$.
6. Um grafo cúbico é um grafo simples regular de grau 3. Construa 2 grafos cúbicos não-isomorfos.
7. Determinar um circuito euleriano no seguinte grafo:



8. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido:





9. Mostre que não é possível ter um grupo de 7 pessoas no qual cada um conhece exatamente 3 outras pessoas.
10. Prove que um grafo com n vértices não é bipartido se ele possuir um número de arestas maior que $\frac{n^2}{4}$.
11. Considere um grafo G tal que os vértices possuem grau k ou $k + 1$, prove que se G possui n_k vértices de grau k e n_{k+1} vértices de grau $k + 1$, então $n_k = (k + 1)n - 2a$. Considere a o número de arestas do grafo.
12. Mostre que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.
13. Mostre que todo grafo não orientado e conexo com n vértices contém pelo menos $n - 1$ arestas.

Referências

GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos Para a Ciência da Computação*. 5a. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2008. 597 p.

GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. 1a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Teoria e Problemas de Matemática Discreta*. Porto Alegre: Bookman, 2004. 511 p.

PINTO, J. S. *Tópicos de Matemática Discreta*. [S.l.], 2005.

ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 5th. ed. New York: McGraw Hill, 2005.