

§ 14 Interpolationsfehlerabschätzungen

Zur Erinnerung: Céas Lemma ([Satz 9.2](#)) führt die Fehlerabschätzung zurück auf die Aufgabe der Bestapproximation von u in V_h :

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

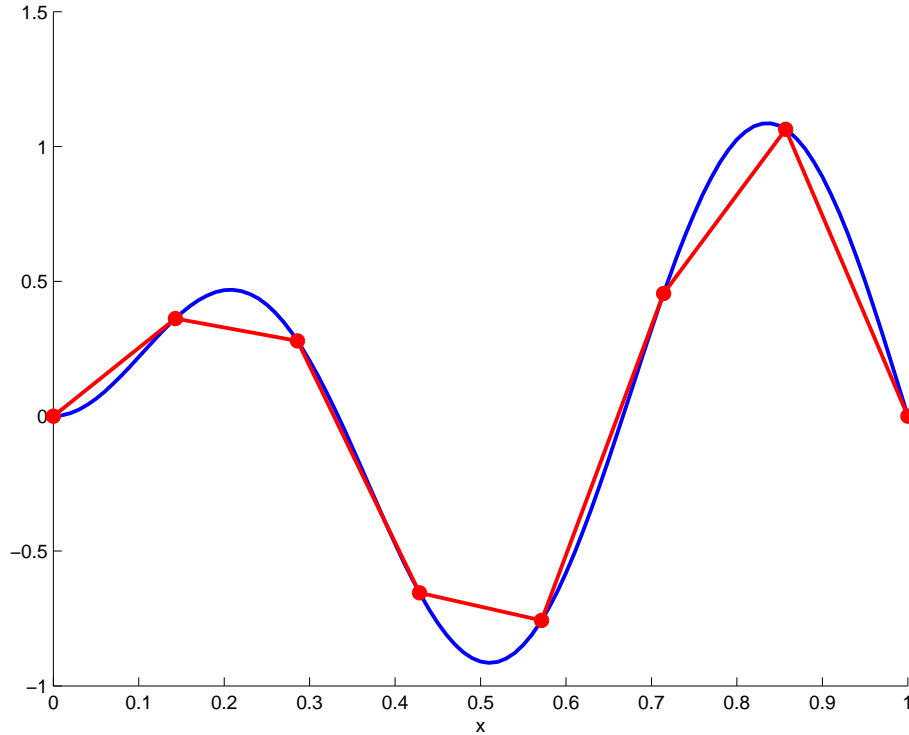
Da letztere schwer zu lösen ist, schätzt man weiter ab:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_V,$$

wobei $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ eine einfach zu handhabende Projektion auf V_h ist. In der Regel wählt man dabei Π_h als Interpolation \mathcal{I}_{V_h} in V_h , siehe ([12.6](#)), falls u zum Unterraum L'_T gehört (hinreichend glatt ist), siehe ([12.5](#)). Abschätzungen für den Interpolationsfehler sind beispielsweise von folgendem Typ:

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C h^m |v|_{H^m(\Omega)} \\ |v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^1(\Omega)} &\leq C h^{m-1} |v|_{H^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies wird im Hauptresultat dieses Abschnitts ([Satz 14.16](#)) bewiesen.



§ 14.1 Interpolation auf einem Element

In diesem und den folgenden Abschnitten schreiben wir $H^m(K)$ statt $H^m(\text{int}(K))$. Außerdem sei $|\cdot|_{H^m(K)}$ die **Standard-Seminorm**

$$|v|_{H^m(K)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_K |D^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

auf $H^m(K)$. Wir machen folgende Generalvoraussetzung:

Voraussetzung 14.1 (Generalvoraussetzung)

Es sei (K, P, Σ, L_K) ein FE und $m \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $P_{m-1}(K) \subset P$
- (b) $P \subsetneq L_K = H^m(K)$. ◇

Insbesondere gilt also (vgl. [Definition 11.10](#)) $|\sigma(v)| \leq c_b \|v\|_{H^m(K)}$ für $v \in H^m(K)$ und alle $\sigma \in \Sigma$.

Bemerkung 14.2 (Bedeutung der Voraussetzung)

- (a) Annahme (a) ist eine Annahme über die Reichhaltigkeit des Ansatzraumes P . Um sie für ein gegebenes FE zu erfüllen, darf m nicht zu groß sein, für Annahme (b) dagegen m nicht zu klein.
- (b) Die [Voraussetzung 14.1](#) vererbt sich von einem FE $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}, H^m(\hat{K}))$ auf seine affin äquivalenten Kopien $(K, P, \Sigma, H^m(K))$.¹¹⁸ ◇

Beispiel 14.3 ([Voraussetzung 14.1](#) für Standard-Elemente)

- (a) Für Lagrange-Elemente \mathbb{P}_k und \mathbb{Q}_k ist [Voraussetzung 14.1](#) erfüllt, falls

$$\begin{cases} k \geq m-1 \text{ und } m \geq 1 & \text{in 1D} \\ k \geq m-1 \text{ und } m \geq 2 & \text{in 2D und 3D} \end{cases}$$

gewählt wird, denn:

$$P = P_k(K) \supset P_{m-1}(K) \quad \text{bzw.} \quad P = Q_k(K) \supset P_k(K) \supset P_{m-1}(K).$$

Und: Der Sobolevsche Einbettungssatz¹¹⁹ zeigt $H^m(K) \hookrightarrow C(K)$ für $m \geq 1$ in 1D bzw. $m \geq 2$ in 2D und 3D, sodass Punktauswertungen definiert sind und stetige lineare Funktionale auf $H^m(K)$ darstellen.

Beispiel in 2D/3D: Mit \mathbb{P}_1 -Elementen oder besser (mit höheren Polynomgraden) erreicht man $m = 2$, mit \mathbb{P}_2 -Elementen oder besser $m = 3$.

- (b) Für kubische Hermite-Elemente (also $P = P_3(K)$) ist die [Voraussetzung 14.1](#) erfüllt, falls gilt:

$$\begin{cases} m \in \{2, 3, 4\} & \text{in 1D} \\ m \in \{3, 4\} & \text{in 2D und 3D} \end{cases}$$

Denn: Es gilt $H^m(K) \hookrightarrow C^1(K)$ für $m \geq 2$ in 1D bzw. $m \geq 3$ in 2D und 3D. ◇

Für den Rest von [§ 14.1](#) kann $K \subset \mathbb{R}^d$ ein beliebiges beschränktes Gebiet oder dessen Abschluss sein, z. B. das Elementgebiet eines FE ([Definition 11.1](#)).

¹¹⁸denn: $P_{m-1}(\hat{K}) \subset \hat{P} \Rightarrow \underbrace{P_{m-1}(\hat{K}) \circ T_K^{-1}}_{P_{m-1}(K)} \subset \hat{P} \circ T_K^{-1} = P$, also gilt (a). Für (b): Für alle

Freiheitsgrade σ_i von (K, P, Σ) und $v \in H^m(K)$ sowie $\hat{v} = v \circ T_K$ gilt:

$$\begin{aligned} |\sigma_i(v)|_{H^m(K)} &= |\hat{\sigma}_i(v \circ T_K)| && \text{nach Konstruktion, [Lemma 11.13](#)} \\ &\leq \hat{c}_b \|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})} && \text{Voraussetzung 14.1 (b)} \\ &\leq c \|v\|_{H^m(K)} && \text{wegen (14.4a).} \end{aligned}$$

Das heißt, $H^m(K)$ ist ein lokaler Interpolationsbereich für (K, P, Σ) .

¹¹⁹siehe Skript Sobolevräume, [Satz 4.8](#)

Lemma 14.4 (Polynomprojektion)

Zu jeder Funktion $v \in H^{m-1}(K)$ existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $q \in P_{m-1}(K)$ mit der Eigenschaft

$$\int_K D^\alpha q \, dx = \int_K D^\alpha v \, dx \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m-1,$$

d. h., v und q und ihre Ableitungen besitzen gleiche Mittelwerte über K . Die Abbildung $H^{m-1}(K) \ni v \mapsto q \in P_{m-1}(K)$ ist eine Projektion.

Beweis: Der Ansatz

$$q(x) = \sum_{|\beta| \leq m-1} c_\beta x^\beta \in P_{m-1}(K)$$

mit unbekannten Koeffizienten c_β führt auf das LGS

$$\int_K D^\alpha q(x) \, dx = \sum_{|\beta| \leq m-1} c_\beta \int_K D^\alpha x^\beta \, dx \stackrel{!}{=} \int_K D^\alpha v \, dx, \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m-1.$$

Die Koeffizientenmatrix (mit Zeilenindex α , Spaltenindex β)

$$M = \left(\int_K D^\alpha x^\beta \, dx \right)_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1}$$

ist regulär: Es sei $\vec{c} = (c_\beta)_{|\beta| \leq m-1}$ ein Vektor mit $M \vec{c} = \vec{0}$. Das damit gebildete Polynom $q \in P_{m-1}(K)$ hat also die Eigenschaft

$$\int_K D^\alpha q \, dx = 0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m-1.$$

Für $|\alpha| = m-1$ folgt zunächst¹²⁰

$$0 = \int_K D^\alpha q \, dx = \alpha! \int_K c_\alpha \, dx = \alpha! |K| c_\alpha,$$

also $c_\alpha = 0$. Analog zeigt man $c_\alpha = 0$ für alle $|\alpha| = m-2, \dots, 1, 0$. Insgesamt folgt $\vec{c} = \vec{0}$, d. h. M ist regulär.

Die Linearität, Stetigkeit¹²¹ und Idempotenz der Abbildung $v \mapsto q$ ist klar. \square

Lemma 14.5 (Eine verallgemeinerte Poincarésche Ungleichung, vgl. Lemma 8.9)

Es existiert eine Konstante $c_0(d, m, K)$, sodass für jede Funktion $v \in H^m(K)$ mit der Eigenschaft

$$\int_K D^\alpha v \, dx = 0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m-1 \tag{14.1}$$

gilt:

$$\|v\|_{H^m(K)} \leq c_0 \|v\|_{H^m(K)}.$$

Das heißt, auf dem durch (14.1) beschriebenen Unterraum von $H^m(K)$ sind $|\cdot|_{H^m(K)}$ und $\|\cdot\|_{H^m(K)}$ äquivalente Normen.

¹²⁰ $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$

¹²¹Gemeint ist die Stetigkeit $H^m(K) \ni v \mapsto \text{Koeffizientenvektor } (c_\beta)_{|\beta| \leq m-1}$ und damit natürlich auch auf andere Konvergenzbegriffe, z. B. gleichmäßige Konvergenz auf K .

Beweis: Wir zeigen mit Hilfe des Sobolevschen Normierungssatzes (Skript Sobolevräume, [Satz 5.6](#)), dass für beschränkte Gebiete Ω und messbare Teilmengen $\Omega_1 \subset \Omega$ gilt, dass

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} \left| \int_{\Omega_1} D^\alpha u \, dx \right|^p + |u|_{W^{m,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

auf $W^{m,p}(\Omega)$ eine zur Standard-Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ äquivalente Norm ist, falls $|\Omega_1| > 0$.¹²² Die Behauptung folgt dann mit $\Omega_1 = \Omega = \text{int}(K)$ und $p = 2$.

Wir setzen

$$f_\alpha : W^{m,p}(\Omega) \ni u \mapsto f_\alpha(u) := \left| \int_{\Omega_1} D^\alpha u \, dx \right| \in [0, \infty)$$

für Multiindizes $|\alpha| \leq m-1$.

Schritt (i): Wir zeigen: $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq m-1}$ ist ein System von Seminormen ([Definition 4.1](#)) auf $W^{m,p}(\Omega)$, die schwächer als die Standard-Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ sind.

Die Seminorm-Eigenschaft ist klar. Außerdem gilt¹²³

$$0 \leq f_\alpha(u) \leq \int_{\Omega_1} |D^\alpha u| \, dx \leq \|u\|_{W^{m,1}(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

insbesondere für alle $|\alpha| \leq m-1$, also ist jedes f_α schwächer als $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Schritt (ii): Wir zeigen: Aus $v \in P_{m-1}(\Omega)$ und $f_\alpha(v) = 0$ für alle $|\alpha| \leq m-1$ folgt $v = 0$.

Es sei $v = \sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$. Wir betrachten zunächst ein f_α mit $|\alpha| = m-1$. Wie im Beweis von [Lemma 14.4](#) gilt

$$f_\alpha(v) = \left| \int_{\Omega_1} D^\alpha v \, dx \right| = \alpha! \left| \int_{\Omega_1} c_\alpha \, dx \right| = \alpha! |c_\alpha| |\Omega_1|.$$

Aus $f_\alpha(v) = 0$ folgt also $c_\alpha = 0$ für alle Multiindizes $|\alpha| = m-1$, d. h., $v \in P_{m-2}(\Omega)$. Mehrmalige Wiederholung des Arguments zeigt schließlich $v = 0$. \square

Satz 14.6 (Bramble-Hilbert-Lemma)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $F : H^m(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ein (nichtlineares) Funktional mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $|F(v)| \leq c_1 \|v\|_{H^m(K)}$ (Beschränktheit)
- (b) $|F(u+v)| \leq c_2 (|F(u)| + |F(v)|)$ (Sublinearität)
- (c) $F(q) = 0$ für alle $q \in P_{m-1}(K)$ (Annullierungseigenschaft auf $P_{m-1}(K)$).

Dann gilt mit der (unspezifischen!) Konstante $c_0(d, m, K)$ aus [Lemma 14.5](#)

$$|F(v)| \leq c_0 c_1 c_2 |v|_{H^m(K)}.^{124}$$

¹²²Klar ist: $\left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} \left| \int_{\Omega_1} D^\alpha u \, dx \right|^p + |u|_{W^{m,p}(\Omega)}^p \right) \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p$

¹²³Hier wird $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,1}(\Omega)$ benutzt, siehe Skript Sobolevräume, [Bemerkung 3.14](#)

¹²⁴ F ist also bereits bzgl. der Seminorm beschränkt.

Beweis: Es sei $v \in H^m(K)$ und $q \in P_{m-1}(K)$ beliebig. Dann gilt

$$|F(v)| = |F(v - q + q)| \stackrel{(b)}{\leq} c_2 (|F(v - q)| + \underbrace{|F(q)|}_{=0 \text{ wegen (c)}}) \stackrel{(a)}{\leq} c_1 c_2 \|v - q\|_{H^m(K)}. \quad (*)$$

Wir wählen speziell $q \in P_{m-1}(K)$ wie in Lemma 14.4, sodass also $\int_K D^\alpha(v - q) dx = 0$ gilt für alle $|\alpha| \leq m - 1$.

$$\begin{aligned} \|v - q\|_{H^m(K)} &\leq c_0 \|v - q\|_{H^m(K)} \quad \text{wegen Lemma 14.5} \\ &= c_0 \|v\|_{H^m(K)} \quad \text{da } D^\alpha q = 0 \text{ für } |\alpha| = m. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (*)

$$|F(v)| \leq c_0 c_1 c_2 \|v\|_{H^m(K)}.$$

□

Das Bramble-Hilbert-Lemma wird u. a. benutzt, um Abschätzungen des lokalen (elementweisen) Interpolationsfehlers zu zeigen:

Folgerung 14.7 (Lokale Interpolationsfehlerabschätzung)

Es sei $(K, P, \Sigma, H^m(K))$ ein FE, das Voraussetzung 14.1 erfüllt. Weiter sei $|\cdot|_\#$ eine beliebige Seminorm (Definition 4.1) auf $H^m(K)$ mit der Eigenschaft¹²⁵

$$|v|_\# \leq c_\# \|v\|_{H^m(K)} \quad (14.2)$$

mit einer Konstanten $c_\#$, d. h., $|\cdot|_\#$ ist *schwächer* als $\|\cdot\|_{H^m(K)}$.¹²⁶ Für jede Funktion $v \in H^m(K)$ und ihre lokale Interpolierende (siehe Definition 11.10) $\mathcal{I}_K(v) \in P$ gilt dann:

$$|v - \mathcal{I}_K(v)|_\# \leq c_{\mathcal{I}} |v|_{H^m(K)} \quad (14.3)$$

mit einer Konstanten $c_{\mathcal{I}}$, die nicht von v , aber vom Element $(K, P, \Sigma, H^m(K))$ sowie von m und $|\cdot|_\#$ abhängt.

Beweis: Wir definieren durch $F(v) = |v - \mathcal{I}_K(v)|_\#$ ein nichtlineares Funktional auf $H^m(K)$ und weisen die Voraussetzungen des Bramble-Hilbert-Lemmas nach.

¹²⁵**Beachte:** Damit ist $|\cdot|_\#$ automatisch (Lipschitz-)stetig auf $H^m(K)$, denn es gilt

$$||v|_\# - |w|_\#| \stackrel{\text{Dreiecks-Ugl.}}{\leq} |v - w|_\# \stackrel{(14.2)}{\leq} c_\# \|v - w\|_{H^m(K)}.$$

¹²⁶Es ist auch klar, dass die Seminorm $|\cdot|_\#$, in der wir den Interpolationsfehler messen wollen, nicht stärker sein darf als die Norm des Raumes $H^m(K)$, in dem die zu interpolierende Funktion liegt.

Beschränktheit (a): Es gilt wegen [Voraussetzung 14.1](#) (b): $p_i \in P \subset L_K = H^m(K)$ und weiter

$$\begin{aligned}
 |F(v)| &\leq |v|_{\#} + |\mathcal{I}_K(v)|_{\#} = |v|_{\#} + \left| \sum_{i=1}^s \sigma_i(v) p_i \right|_{\#} && \text{Definition 11.10 von } \mathcal{I}_K \\
 &\leq |v|_{\#} + \sum_{i=1}^s |\sigma_i(v)| |p_i|_{\#} \\
 &\leq |v|_{\#} + \sum_{i=1}^s c_b \|v\|_{H^m(K)} |p_i|_{\#} && \text{Voraussetzung 14.1 (b)} \\
 &\leq \underbrace{\left(c_{\#} + c_b \sum_{i=1}^s |p_i|_{\#} \right)}_{=c_1} \|v\|_{H^m(K)} \quad \text{nach (14.2).}
 \end{aligned}$$

Sublinearität (b):

$$|F(u+v)| = |u - \mathcal{I}_K(u) + v - \mathcal{I}_K(v)|_{\#} \leq |u - \mathcal{I}_K(u)|_{\#} + |v - \mathcal{I}_K(v)|_{\#} = |F(u)| + |F(v)|,$$

also gilt (b) mit $c_2 = 1$.

Annullierungseigenschaft (c): Wegen $\mathcal{I}_K(v) = v$ für alle $v \in P \supset P_{m-1}(K)$ ([Voraussetzung 14.1](#) (a), [Lemma 11.11](#)) gilt

$$F(q) = 0 \quad \text{für alle } q \in P_{m-1}(K).$$

Aus dem Bramble-Hilbert-Lemma ([Satz 14.6](#)) folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 14.8 (zur lokalen Interpolationsfehlerabschätzung)

(a) [Folgerung 14.7](#) erlaubt die Abschätzung des lokalen Interpolationsfehlers einer beliebigen Funktion $v \in H^m(K)$ (z. B. der Lösung einer PDE) in verschiedenen (Semi-)Normen gegen die m -ten Ableitungen der Funktion v im Term $|v|_{H^m(K)}$. Welches $m \in \mathbb{N}$ (maximal) wählbar ist, hängt von der Glattheit von v sowie von der Reichhaltigkeit des Ansatzraumes P ab, da nach [Voraussetzung 14.1](#) (a) $P_{m-1}(K) \subset P$ gelten muss.

(b) Ohne Benutzung des Bramble-Hilbert-Lemmas würden wir unter den Voraussetzungen von [Folgerung 14.7](#)

$$|v - \mathcal{I}_K(v)|_{\#} \leq c_1 \|v\|_{H^m(K)}$$

erhalten, wie wir im Beweis der Voraussetzung (a) (Beschränktheit) gezeigt haben. Wenn wir damit aber in die weiteren Abschätzungen gehen ([Satz 14.12](#) und schließlich [Satz 14.16](#)), dann dominieren dort die „schlechten“ Potenzen von h . \diamond

§ 14.2 Transformation auf ein Referenzelement

Da die Konstante $c_{\mathcal{I}}$ in [\(14.3\)](#) in unspezifischer Weise vom Element K abhängt, können wir daraus keine sinnvolle Interpolationsfehlerabschätzung in einem Approximationsraum $P_{\mathcal{T}}$ bzw. FE-Raum V_h erhalten. Außerdem kommt in [\(14.3\)](#) die Elementgröße nicht explizit vor, sondern nur unspezifisch in der Konstanten $c_{\mathcal{I}}$. Deshalb nutzen wir die Abschätzung [\(14.3\)](#) nur auf dem Referenzelement \hat{K} .

Es sei dazu wieder $T_K : \hat{K} \ni \hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K \in K$ eine bijektive affine Abbildung, die das Element $(K, P, \Sigma, H^m(K))$ aus dem Referenzelement $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}, H^m(\hat{K}))$ erzeugt, vgl. [Lemma 11.13](#).

Beachte: Es gilt $v \in H^m(K) \Leftrightarrow \hat{v} = v \circ T_K \in H^m(\hat{K})$.

Lemma 14.9 (Transformationssatz für Standard-Seminormen)

Es sei $m \in \mathbb{N}_0$. Für $v \in H^m(K)$ und $\hat{v} = v \circ T_K \in H^m(\hat{K})$ gelten¹²⁷

$$|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \leq c_{d,m} \|B_K\|^m |\det B_K|^{-1/2} |v|_{H^m(K)} \quad (14.4a)$$

$$|v|_{H^m(K)} \leq c_{d,m} \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/2} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}. \quad (14.4b)$$

Hierbei bezeichnet $\|B_K\|$ die Spektralnorm (durch die Euklidische Norm induzierte Matrixnorm, größter Singulärwert), und $c_{d,m}$ hängt nur von m und d ab.

Beweis: für den Fall $m = 1$ in der Übung¹²⁸ □

Frage: Wie können wir $\|B_K\|$ und $\|B_K^{-1}\|$ durch Geometriegrößen (insbesondere die Zellgröße) von K abschätzen?

Definition 14.10 (Geometriegrößen)

Es sei K eine FE-Zelle, d. h., ein kompaktes Polyeder mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

(a) Mit

$$h_K = \text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} |x - y|$$

bezeichnen wir den **Durchmesser** von K .¹²⁹

(b) Es sei ϱ_K der Durchmesser einer größten Kugel¹³⁰, die in K eingeschrieben werden kann.

(c) Der Quotient $\gamma_K = h_K / \varrho_K \geq 1$ bezeichnet das **Aspektverhältnis** von K .¹³¹ ◇

Beachte: In der Literatur (z. B. [\[Braess, 1997, Kapitel II, § 5\]](#)) werden h_K und ϱ_K manchmal als Radien statt Durchmesser definiert.¹³²

¹²⁷Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten durch Vertauschen von K und \hat{K} .

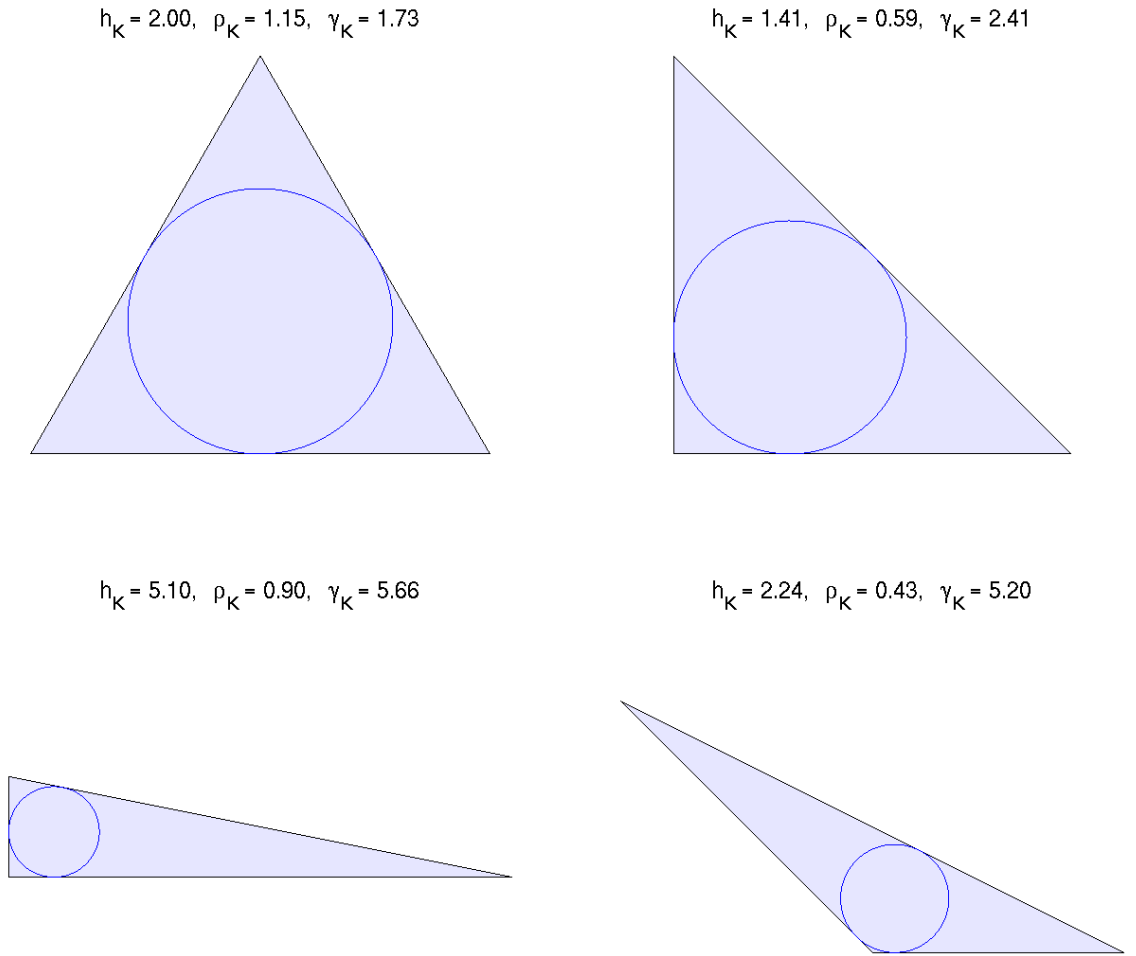
¹²⁸[Übung 12, Aufgabe 30](#)

¹²⁹Bei Simplexes wird der Durchmesser gerade durch eine Kante erzeugt, beim allgemeinen Polyeder durch die Verbindung von zwei Ecken.

¹³⁰Offenbar spricht man nur dann von einer **Inkugel**, wenn sie alle Facetten von K berührt. Das ist aber bei beliebigen Polyedern nicht der Fall.

¹³¹analytische Berechnung an einigen Beispielmengen in [Übung 13, Aufgabe 31 \(a\)](#)

¹³²Bei [\[Ainsworth and Oden, 2000, p.9\]](#) werden übrigens für Vierecke die Größen h_K und ϱ_K definiert als die Maxima der entsprechenden Größen in allen Dreiecken, die man aus den Ecken formen kann.



Lemma 14.11 (Abschätzung von $\|B_K\|$ und $\|B_K^{-1}\|$)

Für die bijektive affine Transformation $T_K : \hat{K} \ni \hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K \in K$ gilt:

- (a) $|\det B_K| = |K|/|\hat{K}|$
- (b) $\|B_K\| \leq h_K/\varrho_{\hat{K}}$
- (c) $\|B_K^{-1}\| \leq h_{\hat{K}}/\varrho_K$

Beweis: (a): siehe (13.7)

(b): Es gilt

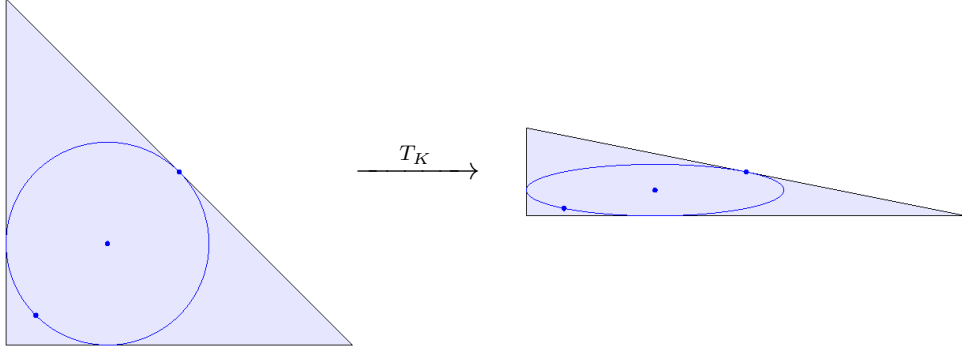
$$\|B_K\| = \max_{|\hat{x}|=1} |B_K \hat{x}| = \max_{|\hat{x}|=\varrho_{\hat{K}}} \frac{|B_K \hat{x}|}{\varrho_{\hat{K}}}.$$

Jeder Punkt $\hat{x} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\hat{x}| = \varrho_{\hat{K}}$ kann dargestellt werden als $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ mit

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_M + \hat{x}/2 \in \hat{K}$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_M - \hat{x}/2 \in \hat{K},$$

wobei \hat{x}_M der Mittelpunkt einer größten Kugel in \hat{K} ist.



Damit gilt

$$|B_K \hat{x}| = |B_K(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)| = \underbrace{|T_K(\hat{x}_1)|}_{\in K} - \underbrace{|T_K(\hat{x}_2)|}_{\in K} \leq h_K.$$

(c): analog durch Vertauschen von K und \hat{K} □

Beachte: Die Abschätzungen (b) und (c) drücken zwar $\|B_K\|$ und $\|B_K^{-1}\|$ durch die anschaulichen Geometriegrößen h_K , ϱ_K und $h_{\hat{K}}$, $\varrho_{\hat{K}}$ aus, sind aber u.U. nicht sehr scharf.¹³³

Satz 14.12 (Interpolationsfehlerabschätzung für die Standard-Seminormen auf einer Zelle)

Das FE $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}, H^m(\hat{K}))$ erfülle [Voraussetzung 14.1](#). Das Element $(K, P, \Sigma, H^m(K))$ gehe daraus durch die affine Transformation T_K mit Jacobimatrix B_K hervor. Dann gilt für alle $v \in H^m(K)$:

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{I}_K(v)|_{H^k(K)} &\leq \hat{c}_{d,m,k} \|B_K^{-1}\|^k \|B_K\|^m |v|_{H^m(K)} \\ &\leq \hat{c}_{d,m,k} \left(\frac{h_{\hat{K}}}{\varrho_K}\right)^k \left(\frac{h_K}{\varrho_{\hat{K}}}\right)^m |v|_{H^m(K)} \\ &= \hat{c}_{d,m,k} h_K^{m-k} \gamma_K^k |v|_{H^m(K)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq m \end{aligned} \quad (14.5)$$

mit Konstanten, die nur vom Referenzelement \hat{K} sowie von d , m und k abhängen.

Beweis: Es sei $\hat{v} = v \circ T_K$. Für die Seminormen $|\cdot|_{H^k(K)}$ gilt jeweils [\(14.2\)](#) mit $c_{\#} \leq 1$. Aus [\(14.3\)](#) in [Folgerung 14.7](#) (lokale Interpolationsfehlerabschätzung mittels Bramble-Hilbert-Lemma) folgt deshalb

$$|\hat{v} - \mathcal{I}_{\hat{K}}(\hat{v})|_{H^k(\hat{K})} \leq c_{\hat{\mathcal{I}}} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \quad \text{für } 0 \leq k \leq m. \quad (*)$$

¹³³Deshalb wird Formregularität auch gelegentlich als $h_K^{-1} \|B_K\| + h_K \|B_K^{-1}\| \leq \gamma$ formuliert. Siehe dazu auch [\[Shewchuk, 2002, p.8\]](#) und die Originalarbeit [Syngue \[1957\]](#).

Außerdem gilt: $\mathcal{I}_{\hat{K}}(\hat{v}) = (\mathcal{I}_K(v)) \circ T_K$, siehe Lemma 11.18. Wir können abschätzen:

$$|v - \mathcal{I}_K(v)|_{H^k(K)} \leq c_{d,k} \|B_K^{-1}\|^k |\det B_K|^{1/2} |\hat{v} - \mathcal{I}_{\hat{K}}(\hat{v})|_{H^k(\hat{K})} \quad \text{wegen (14.4b)}$$

$$\leq c_{d,k} \underbrace{c_{\hat{\mathcal{I}}}}_{\text{hängt von } \hat{K} \text{ ab}} \|B_K^{-1}\|^k |\det B_K|^{1/2} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \quad \text{wegen (*)}$$

$$\leq \underbrace{c_{d,k} c_{d,m} c_{\hat{\mathcal{I}}}}_{=: \hat{c}_{d,m,k}} \|B_K^{-1}\|^k \|B_K\|^m |v|_{H^m(K)} \quad \text{wegen (14.4a)}$$

$$\leq \hat{c}_{d,m,k} \left(\frac{h_{\hat{K}}}{\varrho_K} \right)^k \left(\frac{h_K}{\varrho_{\hat{K}}} \right)^m |v|_{H^m(K)} \quad \text{wegen Lemma 14.11}$$

$$= \underbrace{\hat{c}_{d,m,k} \frac{h_{\hat{K}}^k}{\varrho_{\hat{K}}^m}}_{\gamma_K^k} h_K^{m-k} \frac{h_K^k}{\varrho_K^k} |v|_{H^m(K)}$$

$$=: \hat{c}_{d,m,k} h_K^{m-k} \gamma_K^k |v|_{H^m(K)}.$$

□

Beachte: Hätten wir beim Übergang zu (*) die Abschätzung aus Bemerkung 14.8 (ohne Benutzung des Bramble-Hilbert-Lemmas)

$$|\hat{v} - \mathcal{I}_K(\hat{v})|_{\#} \leq c_{\hat{\mathcal{I}}} \|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})} \quad \text{mit } |\cdot|_{\#} = |\cdot|_{H^k(\hat{K})}$$

verwendet, so hätten wir überall dort, wo in den obigen Abschätzungen ein m steht, i. W. eine Summe über die entsprechenden Terme über $\ell = 0, \dots, m$ stehen. Dadurch würde sich als dominierende h -Potenz sogar h_K^{0-k} ergeben.

Folgerung 14.13 (Interpolationsfehlerabschätzung für die volle Norm auf einer Zelle)

Unter den Voraussetzungen von Satz 14.12 gilt auch

$$\|v - \mathcal{I}_K(v)\|_{H^k(K)} \leq C_{d,m,k} h_K^{m-k} \gamma_K^k |v|_{H^m(K)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq m$$

mit einer Konstanten, die zusätzlich noch von einer oberen Schranke $h_K \leq h_0$ für die Zelldurchmesser abhängt.

Beweis: eigene Übung

□

Fazit: Bei fortlaufender Gitterverfeinerung ist man also gut beraten, das Aspektverhältnis γ_K aller Zellen über alle Gitter zu beschränken. Dem trägt die folgende Definition Rechnung.

Definition 14.14 (Diskretisierungsparameter, Formregularität, Quasi-Uniformität)

(a) Einem Gitter \mathcal{T} wird der **Diskretisierungsparameter (Gitterweite)**

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K,$$

also der Durchmesser der größten Zelle zugeordnet.¹³⁴ Man sagt dann: Das Gitter \mathcal{T} gehört¹³⁵ zur Klasse \mathcal{T}_h .

¹³⁴Dieser eine Parameter sagt natürlich praktisch nichts aus über die Gestalt des Gitters.

¹³⁵ \mathcal{T} gehört dann auch zur Klasse $\mathcal{T}_{h'}$ für alle $h' \geq h$.

- (b) Das Symbol $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ oder $\{\mathcal{T}_h\}_{h\searrow 0}$ bezeichnet eine Familie von Gittern mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Folge $h_n \searrow 0$, sodass zu jedem h_n ein Gitter der Klasse \mathcal{T}_{h_n} in der Familie existiert.
- (c) Eine solche Familie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ heißt **formregulär** (engl.: *shape regular*), wenn eine Konstante $\gamma > 0$ existiert mit der Eigenschaft

$$\gamma_K = \frac{h_K}{\varrho_K} \leq \gamma \quad \text{für alle } K \in \mathcal{T} \quad \text{und alle Gitter } \mathcal{T} \text{ der Familie.}$$

- (d) Die Familie heißt **quasi-uniform**¹³⁶, wenn sogar gilt:

$$\frac{h}{\varrho_K} \leq \gamma \quad \text{für alle } K \in \mathcal{T} \quad \text{und alle Gitter } \mathcal{T} \text{ der Familie.}$$

◇

Bemerkung 14.15 (zur Formregularität und Quasi-Uniformität)

- (a) Es gilt (eigene Übung)

Quasi-Uniformität

$$\Leftrightarrow \text{Formregularität und } \frac{h}{h_K} \leq c \text{ für alle } K \in \mathcal{T} \text{ und alle Gitter } \mathcal{T} \text{ der Familie,}$$

d. h., dass die Größenverhältnisse (Durchmesser) $\max_{K \in \mathcal{T}} h_K / \min_{K \in \mathcal{T}} h_K$ der jeweils größten und kleinsten Zellen über alle Gitter beschränkt bleiben.

- (b) Man kann Formregularität äquivalent auch definieren als

$$c_1 h_K^d \leq |K| \leq c_2 h_K^d \quad (14.6)$$

für alle Zellen K auf allen Gittern, wobei die rechte Abschätzung trivial ist (für alle beschränkten Mengen $K \subset \mathbb{R}^d$ gilt).¹³⁷

- (c) Analog bedeutet Quasi-Uniformität

$$c_1 h^d \leq |K| \leq c_2 h^d, \quad (14.7)$$

wobei die rechte Abschätzung wiederum trivial ist.¹³⁸

- (d) Auf quasi-uniformen Gittern kann man die Eigenwerte von Massenmatrizen¹³⁹ und Steifigkeitsmatrizen durch h abschätzen, siehe Übung.¹⁴⁰

- (e) In 1D sind alle Gitterfamilien formregulär, da $h_K = \varrho_K$ gilt.

- (f) In einem Dreieck K gilt:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{\alpha_K}{2} \leq \gamma_K \leq \cot \frac{\alpha_K}{2} \leq \frac{2}{\sin \alpha_K} \quad (14.8)$$

¹³⁶Quasi-Uniformität wird z. B. benötigt beim Beweis von globalen inversen Abschätzungen, siehe [Ern and Guermond, 2004, Corollary 1.141, p.76].

¹³⁷Beim Beweis der Äquivalenz in Übung 13, Aufgabe 31 (c) wird der Begriff der Breite d_K der Zelle gebraucht. (14.6) bedeutet, dass jede einzelne Zelle durch h_K ausreichend gut beschrieben werden kann. Es kann jedoch auf verschiedenen Gittern beliebig große Größenverhältnisse der Zellen im jeweiligen Gitter geben.

¹³⁸(14.7) bedeutet, dass das Volumenverhältnis zwischen größtem und kleinsten Element beschränkt bleibt. Der Gitterparameter $h = \max h_K$ ist also die einzige relevante Zahl im Gitter.

¹³⁹erzeugt durch die Bilinearform $a[u, v] = \int_{\Omega} u v \, dx$

¹⁴⁰Übung 12, Aufgabe 32

wobei α_K der kleinste Winkel von K ist.¹⁴¹ Das Aspektverhältnis im Dreieck ist also genau dann schlecht, wenn ein Winkel von K klein ist.¹⁴²

- (g) (14.5) zeigt den Einfluss der Qualität von Gittern auf die Konstante in der Interpolationsfehlerabschätzung. Darauf ist bei der Generierung und Verfeinerung von Gittern zu achten. \diamond

Im Folgenden brauchen wir häufiger die Voraussetzungen

Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eine formreguläre Familie von Gittern auf dem Gebiet Ω mit P-Rand (Bemerkung 12.2). (SRF)

und

Auf jedem Gitter \mathcal{T} sei $\{(K, P_K, \Sigma_K)\}_{K \in \mathcal{T}}$ eine affine Familie von FE mit dem gemeinsamen Referenzelement $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, das die Voraussetzung 14.1 mit $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Auf jedem Gitter werde ein FE-Raum (Definition 12.11) gebildet. Dabei gelte (MAX1), d. h., bei der Bildung der globalen Freiheitsgrade enthalte jede Äquivalenzklasse von jedem Element maximal einen Freiheitsgrad. (AF)

Außerdem soll das Symbol V_h ab sofort für einen FE-Raum stehen, der zu einem Gitter der Klasse \mathcal{T}_h gehört.

Wir kommen zu unserem zentralen Resultat für die Interpolationsfehlerabschätzung in FE-Räumen.

Satz 14.16 (Interpolationsfehlerabschätzung für die Standard-Seminormen auf formregulären Gittern)

Es seien die Voraussetzungen (SRF) und (AF) erfüllt.

- (a) Für jedes Gitter \mathcal{T} sei $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ der globale Interpolationsoperator (Definition 12.3) auf den zugehörigen Approximationsraum $P_{\mathcal{T}}$. Dann gelten die folgenden Interpolationsfehlerabschätzungen für $v \in \prod_{K \in \mathcal{T}} H^m(K)$:

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v)|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \leq C h^m \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2 \right)^{1/2} \quad (14.9a)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v)|_{H^1(K)}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{m-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2 \right)^{1/2} \quad (14.9b)$$

$$\text{allgemein: } \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v)|_{H^k(K)}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{m-k} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2 \right)^{1/2} \quad (14.9c)$$

für $0 \leq k \leq m$. Diese zellweise gebildeten Seminormen heißen **gebrochene Sobolev-Seminormen**.¹⁴³

¹⁴¹siehe [Bornemann, 1993, Proposition 3] und Übung 13, Aufgabe 31 (b)

¹⁴²Aber wie schon bei Lemma 14.11 bemerkt, sind diese Geometrie Größen nur Hilfsgrößen bei der Abschätzung der eigentlich relevanten Größen $\|B_K\|$ und $\|B_K^{-1}\|$.

¹⁴³Die letzte Abschätzung ist natürlich für $k = m$ wertlos, siehe jedoch Folgerung 14.18.

(b) Insbesondere gilt (14.9) für $v \in H^m(\Omega)$. In der rechten Seite ist dann jeweils

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2 \right)^{1/2} = |v|_{H^m(\Omega)}.$$

(c) Für jedes Gitter \mathcal{T} sei \mathcal{I}_{V_h} der globale Interpolationsoperator auf einen (durch Identifikation von Freiheitsgraden) aus $P_{\mathcal{T}}$ erzeugten FE-Raum V_h (siehe Definition 12.11).¹⁴⁴ \mathcal{I}_{V_h} sei **wohldefiniert** auf $H^m(\Omega)$, also $H^m(\Omega) \subset L^p_{\mathcal{T}}$, vgl. (12.5).¹⁴⁵ Dann gilt für $v \in H^m(\Omega)$:

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^k(K)}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{m-k} |v|_{H^m(\Omega)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq m, \quad (14.10)$$

d. h., die Interpolation in den FE-Raum V_h hat dieselbe Fehlerordnung wie die Interpolation in den Approximationsraum $P_{\mathcal{T}}$.¹⁴⁶

(d) Falls zusätzlich der FE-Raum V_h $H^k(\Omega)$ -konform¹⁴⁷ ist für ein $0 \leq k \leq m$, dann bedeutet (14.10)

$$|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^k(\Omega)} \leq C h^{m-k} |v|_{H^m(\Omega)}. \quad (14.11)$$

Beweis:

(a) Aus der Definition 12.3 von $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ und Satz 14.12 folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v)|_{H^k(K)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K - \mathcal{I}_K(v_K)|_{H^k(K)}^2 \\ &\stackrel{(14.5)}{\leq} c_{d,m,k}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^{2(m-k)} \gamma_K^{2k} |v_K|_{H^m(K)}^2 \\ &\leq (c_{d,m,k} h^{m-k} \gamma^k)^2 \sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2, \quad \text{da } h_K \leq h, \gamma_K \leq \gamma \\ &=: (C h^{m-k})^2 \sum_{K \in \mathcal{T}} |v_K|_{H^m(K)}^2 \end{aligned}$$

für $0 \leq k \leq m$.

(b) klar

(c) Die obige Abschätzung basiert alleine auf Eigenschaften der *lokalen* Interpolationen \mathcal{I}_K . Die V_h -Interpolation besteht aber (genau wie $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$) zellweise aus lokalen Interpolationen \mathcal{I}_K , siehe (12.7) in Lemma 12.15:

$$[\mathcal{I}_{V_h}(v)]|_K = \mathcal{I}_K(v|_K). \quad (12.7)$$

Damit folgt die Behauptung aus Teil (a).¹⁴⁸

¹⁴⁴Zur Erinnerung: Ab sofort weist das Symbol V_h immer darauf hin, dass ein FE-Raum zu einem Gitter der Klasse \mathcal{T}_h gehört.

¹⁴⁵Das heißt, für jedes $v \in H^m(\Omega)$ liefere jeder der zu einer Äquivalenzklasse gehörenden lokalen Freiheitsgrade denselben Wert.

¹⁴⁶obwohl der FE-Raum nur ein Unterraum ist

¹⁴⁷Hierfür wird dann natürlich typischerweise benötigt, dass die Gitter geometrisch konform sind.

¹⁴⁸Hier geht die Voraussetzung (MAX1) ein, dass bei der Bildung von V_h jede Äquivalenzklasse von jedem Element **maximal einen** Freiheitsgrad enthält. Dies ist unschädlich für die Approximationsqualität beim Übergang vom Approximationsraum zum (kleineren) FE-Raum. Wenn man

- (d) Wegen $V_h \subset H^k(\Omega)$ liegt $\mathcal{I}_{V_h}(v) \in H^k(\Omega)$, und es gilt

$$|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} |v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^k(K)}^2.$$

Die Behauptung folgt aus Teil (c). □

Bemerkung 14.17 (zur Interpolationsfehlerabschätzung)

- (a) Für $k = 0$ wird die Formregularität nicht benötigt.
 (b) Die Abschätzungen (14.9)–(14.11) sind für $k = m$ wertlos. ◇

Folgerung 14.18 (Dichtheit von Approximationsräumen)

Es seien die Voraussetzungen (SRF) und (AF) erfüllt.

- (a) Zu gegebenem $v \in L^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ existieren $h > 0$, ein zugehöriges Gitter \mathcal{T} der Klasse \mathcal{T}_h aus der Familie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ (Definition 14.14) und ein $v_h \in P_{\mathcal{T}}$, sodass gilt:

$$\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Das heißt: Die Vereinigung der zur Gitterfamilie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ gehörenden Approximationsräume liegt dicht in $L^2(\Omega)$.

Man schreibt auch: Für $v \in L^2(\Omega)$ und Gitter \mathcal{T} der Klasse \mathcal{T}_h gilt

$$\inf_{v_h \in P_{\mathcal{T}}} \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } h \rightarrow 0.$$

- (b) Es sei V_h wieder $H^k(\Omega)$ -konform für ein $0 \leq k \leq m - 1$. Dann gilt für $v \in H^k(\Omega)$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^k(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } h \rightarrow 0. \quad \diamond$$

Beweis: Für Teil (a) sei $v \in L^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Da $H^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, existiert $v^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ mit $\|v - v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon/2$. Setze $v_h := \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v^\varepsilon)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} &= \|v - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v - v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|v^\varepsilon - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon/2 + C h |v^\varepsilon|_{H^1(\Omega)} \quad \text{wegen (14.9c) in Satz 14.16 (a)} \\ &\leq \varepsilon \quad \text{für } h \text{ hinreichend klein.} \end{aligned}$$

Teil (b) folgt analog unter Benutzung von Satz 14.16 (c) und der Dichtheit von $H^{k+1}(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$, eigene Übung. □

Beispiel 14.19 (Anwendung für \mathbb{P}_1 - und \mathbb{Q}_1 -Elemente)

Es gelte die Voraussetzung (SRF). Die Voraussetzung (AF) erfüllen wir, indem wir auf jedem Gitter den Standard-FE-Raum V_h aus „global stetigen \mathbb{P}_1 - oder \mathbb{Q}_1 -Elementen“ in 1D, 2D oder 3D wählen, siehe Beispiel 12.12. Voraussetzung 14.1 ist dann mit $m = 2$ erfüllt. Außerdem sind die Räume V_h $H^1(\Omega)$ -konform.

jedoch versucht, etwa aus CR-Elementen durch Identifikation *aller* Freiheitsgrade einen $H^1(\Omega)$ -konformen Raum zu erzeugen, so ist dies schädlich für die Approximationseigenschaft (also die Abschätzung des Interpolationsfehlers), wie schon in der Fußnote auf Seite 89 bemerkt.

Satz 14.16 (d), also die Abschätzung (14.11) zeigt dann z. B. für $v \in H^2(\Omega)$:

$$|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{2-0} |v|_{H^2(\Omega)},$$

$$|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{2-1} |v|_{H^2(\Omega)},$$

$$\text{also auch } \|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{2-1} |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Falls v nur in $H^1(\Omega)$ liegt, so erhält man aus **Folgerung 14.18** (b) immerhin noch

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } h \rightarrow 0$$

und damit natürlich auch

$$\|v - \mathcal{I}_{V_h}(v)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } h \rightarrow 0. \quad \diamond$$

§ 15 A-priori-Fehlerabschätzungen (Konformer Fall)

Wir geben nun Fehlerabschätzungen für die FEM-Lösung einer linearen elliptischen PDE 2. Ordnung in schwacher Formulierung

$$\text{Finde } u \in V \text{ mit } a[u, v] = F(v) \quad \text{für alle } v \in V \quad (15.1)$$

mit einem Hilbertraum $V \subset H^1(\Omega)$ (je nach Art der Randbedingungen) an. Wir benutzen auf V die Norm von $H^1(\Omega)$. Die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram (**Satz 8.2**) seien erfüllt.

Voraussetzung 15.1 (konforme Approximation)

Wir gehen von einer konformen Approximation aus, d. h., es gelten die (starken) Annahmen

- $V_h \subset V$ (konformer FE-Raum), d. h.
 - ▷ Ω hat einen P-Rand und wird exakt trianguliert
 - ▷ ein evtl. Dirichlet-Rand wird durch die Triangulierung ebenfalls exakt aufgelöst
 - ▷ keine Fehler bei Homogenisierung inhomogener Dirichlet-RB, vgl. (8.9).
- LGS aufgestellt ohne Q-Fehler
- Lösung des LGS ohne Fehler ◇

Satz 15.2 (Abschätzung des $H^1(\Omega)$ -Fehlers, konformer Fall)

Es seien die Voraussetzungen (SRF) und (AF) mit $m \geq 2$ erfüllt.¹⁴⁹ Die zugehörigen FE-Räume V_h seien V -konform¹⁵⁰, und $u \in V$ und $u_h \in V_h$ seien die Lösungen der Aufgabe (15.1) in V bzw. V_h . Dann gilt:

(a) Konvergenz (ohne Ordnung):

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{wenn } h \rightarrow 0.$$

(b) Falls zusätzlich $u \in V \cap H^m(\Omega)$ liegt, dann gilt¹⁵¹

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)}. \quad (15.2)$$

¹⁴⁹z. B. mit Standard- \mathbb{P}_1 - oder \mathbb{Q}_1 -Räumen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$

¹⁵⁰Damit erfüllen wir die Voraussetzungen der Interpolationsfehlerabschätzung, **Satz 14.16** (c).

¹⁵¹experimentelle Konvergenzordnung dazu in Aufgabe (noch nicht gestellt): **NPDE_aufgabe052**

Beweis: Céas Lemma (Satz 9.2) zeigt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &= \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha_0}{\beta_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus Folgerung 14.18 (b) mit $1 = k \leq m - 1$ folgt Behauptung (a). Hier geht $m \geq 2$ ein. Falls $u \in V \cap H^m(\Omega)$ liegt, können wir weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\alpha_0}{\beta_0} \|u - \mathcal{I}_{V_h}(u)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{\alpha_0}{\beta_0} (\|u - \mathcal{I}_{V_h}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u - \mathcal{I}_{V_h}(u)|_{H^1(\Omega)}^2)^{1/2} \\ &\leq \frac{\alpha_0}{\beta_0} (\|u - \mathcal{I}_{V_h}(u)\|_{L^2(\Omega)} + |u - \mathcal{I}_{V_h}(u)|_{H^1(\Omega)}) \quad \text{denn } \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \\ &\leq \frac{\alpha_0}{\beta_0} (C h^m |u|_{H^m(\Omega)} + C h^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)}) \quad \text{wegen Satz 14.16 (c)} \\ &\leq 2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} C' h^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)} \quad \text{wegen } h \leq h_0 = \text{diam}(\Omega). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 15.3 (zur Konvergenzabschätzung (15.2))

- (a) Die A-priori-Abschätzung (15.2) hat wieder die typische Struktur, vgl. Bemerkung 5.11.
- (b) Die Konstante c in der Konvergenzabschätzung (15.2) hängt insbesondere ab
 - von α_0/β_0 mit den Konstanten der Bilinearform $a[\cdot, \cdot]$ und
 - von der Formregularitätskonstante γ (siehe Beweis von Satz 14.16).
- (c) Die maximale Konvergenzordnung $m - 1$ bzgl. h hängt ab
 - vom verwendeten Polynomgrad $P_{m-1}(\widehat{K}) \subset \widehat{P}$
 - von der Regularität der Lösung $u \in H^m(\Omega)$.
- (d) Es gilt zum Beispiel für die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-RB (8.1)

$$a[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

mit $V = H_0^1(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$:

- Wenn Ω konvex ist, dann liegt die schwache Lösung u in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
- Wenn Ω hinreichend glatten Rand und $a[\cdot, \cdot]$ hinreichend glatte Koeffizienten besitzt, dann liegt die schwache Lösung u in $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, falls $f \in H^{m-2}$ ist (maximale Regularität).

Außerdem hängt u stetig in diesen Normen von f ab.

Beachte jedoch: Wir können glatt berandete Gebiete Ω nicht exakt triangulieren. Wenn wir Ω durch eine Approximation Ω_h mit P-Rand ersetzen, ergeben sich zusätzliche Fehler.¹⁵² \diamond

Beispiel 15.4 (Typische Konvergenzordnungen)

- (a) Falls $u \in H^m(\Omega)$ mit $m \geq 2$ liegt, so erzielen wir z. B. mit den Standard- \mathbb{P}_k - und $-\mathbb{Q}_k$ -Räumen in 1D, 2D und 3D mit $k = m - 1$ die Konvergenzordnung $m - 1$ bzgl. der H^1 -Norm. Diese Wahl von k ist optimal.
- (b) Kubische Hermite-Elemente lohnen sich wegen der Einschränkung $m \in \{2, 3, 4\}$ in 1D und $m \in \{3, 4\}$ in 2D und 3D (siehe [Beispiel 14.3](#) (b)) erst bei hoher Glattheit der Lösung.¹⁵³ \diamond

Aufgrund von Céas Lemma erhalten wir für elliptische PDEs 2. Ordnung eine Fehlerabschätzung bzgl. der $H^1(\Omega)$ -Norm. Die offensichtliche Beziehung

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)}$$

liefert nicht die richtige Fehlerordnung. Für eine bessere Abschätzung des L^2 -Fehlers wendet man folgende Technik („**Nitsche-Trick**“) an:

Zunächst ein Beispiel: Angenommen, die Lösung $u \in V$ von (15.1) mit $F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ gehört für jedes $f \in L^2(\Omega)$ sogar zu $H^2(\Omega)$, und es gilt die A-priori-Abschätzung $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Idee: Wir benutzen ein sogenanntes **Dualitätsargument** zur Abschätzung von $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$.

Dazu sei $z \in V$ die eindeutige Lösung der **adjungierten Gleichung**¹⁵⁴

$$a[v, z] = \int_{\Omega} (u - u_h) v \, dx \quad \text{für alle } v \in V. \quad (*)$$

Falls $a[\cdot, \cdot]$ symmetrisch ist, so besitzt auch z die Regularität $z \in H^2(\Omega)$, sonst muss man dies extra fordern. Es gilt also $\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$. Wir verwenden nun $v = u - u_h \in H^1(\Omega)$ als Testfunktion in (*):

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (u - u_h, u - u_h)_{L^2(\Omega)} \\ &= a[u - u_h, z] && \text{wegen } (*) \\ &= a[u - u_h, z - \mathcal{I}_{V_h}(z)] && \text{Galerkin-Orthog., } \mathcal{I}_{V_h}(z) \in V_h \\ &\leq \alpha_0 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|z - \mathcal{I}_{V_h}(z)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \alpha_0 c h |u|_{H^2(\Omega)} C h |z|_{H^2(\Omega)} && \text{Satz 15.2 und Satz 14.16 (c) (} m = 2 \text{)} \\ &\leq c' h^2 |u|_{H^2(\Omega)} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} && \text{A-priori-Abschätzung für } z. \end{aligned}$$

Daraus folgt die verbesserte Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c h^2 |u|_{H^2(\Omega)} \\ & \text{zum Vergleich: } \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h |u|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

¹⁵²Außerdem wird die Approximation wegen $V_h \not\subset V$ zusätzlich nicht-konform, außer wenn z. B. $\Omega_h \subset \Omega$ gilt und $V = H_0^1(\Omega)$ ist.

¹⁵³Mit den besprochenen Methoden können wir für $u \in H^2(\Omega)$ in 2D/3D nur Konvergenz beweisen und nicht einmal Ordnung 1. Für $u \in H^3(\Omega)$ bekommen wir dann schon Ordnung 2.

¹⁵⁴Der Fehler $u - u_h$ tritt als rechte Seite auf.