Министерство образования
и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

А. Ю. Коврижных,
Е. А. Конончук, Г.Е. Лузина,
Ю.А. Меленцова.

# Практикум по численным методам:

## задания для расчетно – графических работ
## Учебное электронное текстовое издание

Пособие предназначено для учебно-методического обеспечения практических занятий для бакалавров, специалистов и магистрантов естественнонаучного профиля
Подготовлено: кафедрой вычислительной математики ИМКН.

Екатеринбург

2012

# Оглавление

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

**Тема: приближенное вычисление суммы числового ряда. Улучшение сходимости числового ряда.**

***Постановка задачи.***

Найти приближенно сумму числового ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными, монотонно убывающими членами $a_n$ с заданной степенью точности $\varepsilon = 10^{-7}$ — $S_N$.

Указать число слагаемых $N$, которые нужно сложить, чтобы гарантировать вычисление суммы исходного ряда с заданной степенью точности $\varepsilon$.

Два раза улучшить сходимость исходного числового ряда методом Куммера. Записать $S = B_1 + P$, $S = B_1 + B_2 + Q$, где

$B_1$ *и* $B_2$ суммы эталонных рядов,

ряд с суммой $P$ сходится быстрее, чем ряд с суммой $S$,

ряд с суммой $Q$ сходится быстрее, чем ряд с суммой $P$.

Вычислить сумму $S$ приближенно. Для каждого случая указать количество слагаемых $M$ *и* $L$ вспомогательных рядов $P$ *и* $Q$ соответственно, которые нужно сложить, чтобы вычислить исходный ряд с заданной степенью точности $\varepsilon$.

Результаты оформить в виде таблицы:

| | | |
|---|---|---|
| N | $S_N$ | $S_N$ |
| M | $P_M$ | $S_M$ |
| L | $Q_L$ | $S_L$ |

***Варианты заданий.***

| | |
|---|---|
| 1. | $a_n = \dfrac{r(n+1)}{n^3 - r}$, $r$=0.15 |
| 2. | $a_n = \dfrac{n}{(n^2 + r)^2}$, $r$=0.3 |
| 3. | $a_n = \dfrac{1}{n^2 + r}$, $r$=0.15 |
| 4. | $a_n = \dfrac{n+1}{n^3 + r}$, $r$=0.06 |
| 5. | $a_n = \dfrac{n+1}{n(n^2 + r)}$, $r$=0.15 |
| 6. | $a_n = \dfrac{1}{(n-r)^2 + 1}$, $r$ = - 0.15 |
| 7. | $a_n = \dfrac{n-r}{n^3 + 1}$, $r$=1.3 |
| 8. | $a_n = \dfrac{n^2 - rn - 1}{n^4 + 1}$, $r$=1.3 |
| 9. | $a_n = \dfrac{n^3 + n^2 + r}{(n^2 + r)^3}$, $r$=0.3 |
| 10. | $a_n = \dfrac{n-1}{n^3 - r}$, $r$=0.15 |
| 11. | $a_n = \dfrac{n^2 + rn + 1}{n^2(n^2 + r) + 2}$, $r$=0.12 |
| 12. | $a_n = \dfrac{n(n-r)}{(n^2 + r)^2}$, $r$=0.3 |
| 13. | $a_n = \dfrac{n}{(n+r)^3}$, $r$=0.15 |
| 14. | $a_n = \dfrac{2r}{(n-r)^2}$, $r$= - 0.6 |
| 15. | $a_n = \dfrac{n^2 + r}{n^4 + nr}$, $r$=1.15 |
| 16. | $a_n = \dfrac{r(n+1)}{n^3 - r}$, $r$=0.4 |

| | |
|---|---|
| 17. | $a_n = \dfrac{n}{(n^2 + r)^2}$, $r$=0.8 |
| 18. | $a_n = \dfrac{1}{n^2 + r}$, $r$=0.4 |
| 19. | $a_n = \dfrac{n+1}{n^3 + r}$, $r$=0.16 |
| 20. | $a_n = \dfrac{n+1}{n(n^2 + r)}$, $r$=0.4 |
| 21. | $a_n = \dfrac{1}{(n-r)^2 + 1}$, $r$ = - 0.4 |
| 22. | $a_n = \dfrac{n-r}{n^3 + 1}$, $r$=1.8 |
| 23. | $a_n = \dfrac{n^2 - rn - 1}{n^4 + 1}$, $r$=1.8 |
| 24. | $a_n = \dfrac{n^3 + n^2 + r}{(n^2 + r)^3}$, r=0.8 |
| 25. | $a_n = \dfrac{n-1}{n^3 - r}$, $r$=0.4 |
| 26. | $a_n = \dfrac{n^2 + rn + 1}{n^2(n^2 + r) + 2}$, $r$=0.32 |
| 27. | $a_n = \dfrac{n(n-r)}{(n^2 + r)^2}$, $r$=0.8 |
| 28. | $a_n = \dfrac{n}{(n+r)^3}$, $r$=0. |

***Методические указания.***

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Составим для него последовательность частичных сумм

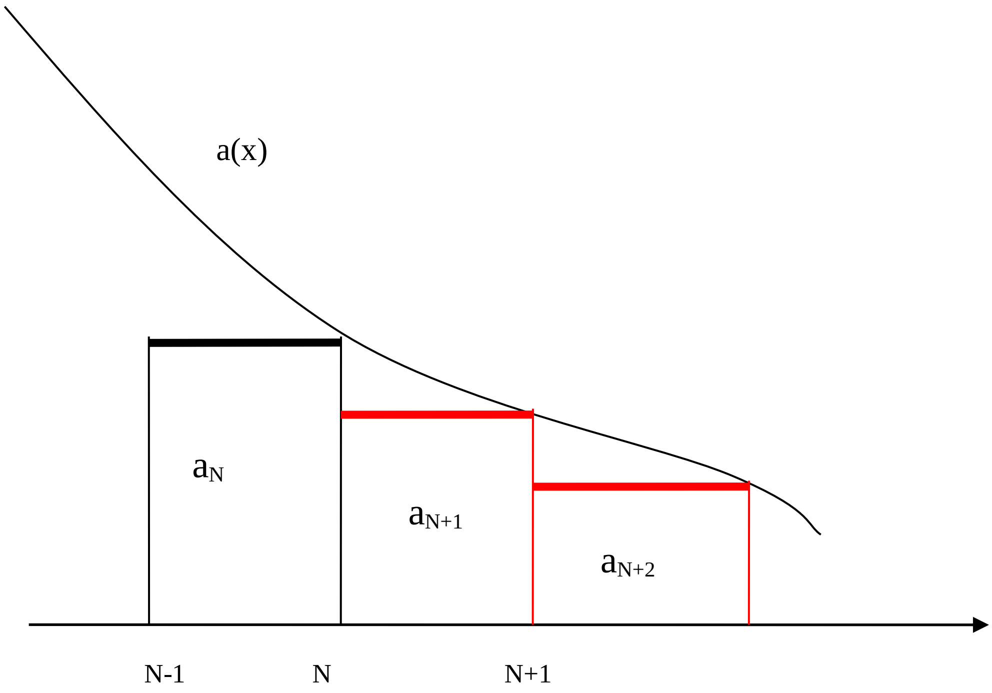
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
.................. .
$S_n = a_1 + ... + a_n$
..................

Если существует предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, то говорят, что ряд сходится и $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Очевидно, $S = S_N + R_N$, где $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ — остаток ряда. Для нахождения суммы S с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ нужно выбрать число слагаемых N столь большим, чтобы $|R_N| < \varepsilon$. Тогда $S \approx S_N$ .

$a_n$ — это функция натурального аргумента. Ее можно записать как $a(n)$ и предполагать, что она определена для всех $x \in [0, \infty)$ .

Для сходящихся рядов с положительными, монотонно убывающими членами $a_n$ справедлива оценка $\int_{N+1}^{\infty} a(x)dx < R_N < \int_{N}^{\infty} a(x)dx$, которая легко получается из геометрических соображений.

Ширина каждого прямоугольника на рисунке равна 1, тогда площадь первого прямоугольника равна $a_N$, второго — $a_{N+1}$, третьего — $a_{N+2}$ и т.д. Поэтому $R_N$ равно сумме площадей прямоугольников, начиная со второго. А эта площадь меньше, чем $\int_{N}^{\infty} a(x)dx$. Другое неравенство получается аналогично.




Таким образом, задача свелась к отысканию такого N, чтобы $\int_N^\infty a(x)dx < \varepsilon$. Если ряд сходится медленно, то число N будет велико. Ситуация ухудшается еще и оттого, что при сложении большого числа слагаемых накапливается вычислительная погрешность. Поэтому имеет смысл улучшить сходимость ряда.

В дальнейшем будем предполагать, что $a_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$, где $p(n), q(n)$ — многочлены и степень $q(n)$ не меньше, чем 2+степень $p(n)$.

Пусть сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n$ известна: $B = \sum_{n=1}^\infty b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$. Тогда $S = \sum_{n=1}^\infty a_n - c\sum_{n=1}^\infty b_n + cB = \sum_{n=1}^\infty a_n\left(1 - c\dfrac{b_n}{a_n}\right) + cB$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n\left(1 - c\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ сходится быстрее исходного, т.к. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $1 - c\dfrac{b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n$ называется эталонным.

В качестве эталонных обычно рассматриваются ряды

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668..., \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = 1.2020569032..., \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.0823232337...$$

***Пример.***

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-0.3}{(n+0.4)^3}$. При $x \ge 1$ функция $a(x)=\frac{2x-0.3}{(x+0.4)^3}$ положительна и монотонно стремится к 0 при $x\to\infty$. Остаток ряда $R_N<\int_N^{\infty}\frac{2x-0.3}{(x+0.4)^3}dx$. Оценим интеграл сверху, увеличив числитель и уменьшив знаменатель. $\int_N^{\infty}\frac{2x-0.3}{(x+0.4)^3}dx \le \int_N^{\infty}\frac{2}{x^2}dx=-\frac{2}{x}\Big|_N^{\infty}=\frac{2}{N}$. Потребуем, чтобы $\frac{2}{N}\le\varepsilon$. Тогда $R_N<\varepsilon$. Найдем N: $N=\frac{2}{\varepsilon}=20000000$. Таким образом, $S\approx S_{20000000}$, т.е. нужно сложить 20000000 слагаемых. Найдем, что $S_{20000000}=1.50669234$.

Улучшим сходимость ряда на порядок. Общий член ряда ведет себя, как $\frac{1}{n^2}$.

Поэтому эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-0.3)n^2}{(n+0.4)^3}=2$. Итак,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-0.3}{(n+0.4)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-0.3}{(n+0.4)^3}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{2\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-0.3}{(n+0.4)^3}-\frac{2}{n^2}\right)+\frac{\pi^2}{3}=$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.7n^2+0.96n+0.128}{(n+0.4)^3n^2}+\frac{\pi^2}{3}=-P+\frac{\pi^2}{3}$$

Теперь найдем сумму улучшенного ряда $P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.7n^2+0.96n+0.128}{(n+0.4)^3n^2}$ с точностью ε. Остаток ряда $R_M<\int_M^{\infty}\frac{2.7x^2+0.96x+0.128}{(x+0.4)^3x^2}dx<2.7\int_M^{\infty}\frac{x+1}{(x+0.4)^3x}dx<2.7\int_M^{\infty}\frac{x+1}{x^4}dx=2.7\left(-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_M^{\infty}$.

Потребуем, чтобы $2.7\left(\frac{1}{2M^2}+\frac{1}{3M^3}\right)\le 10^{-7}$. При $M\ge 3675$ это неравенство будет выполняться. $P\approx P_{3675}=1.78317560$. Получим $S\approx -P_{3675}+\frac{\pi^2}{3}=1.50669254$.

Улучшим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.7n^2+0.96n+0.128}{(n+0.4)^3n^2}$. Его общий член ведет себя, как $\frac{1}{n^3}$. Поэтому эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=B$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2.7n^2+0.96n+0.128)n}{(n+0.4)^3}=2.7\,.$$

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.7n^2+0.96n+0.128}{(n+0.4)^3n^2}-2.7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}+2.7B=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.28n^2+1.168n+0.1728}{(n+0.4)^3n^3}+2.7B\,.$$

Найдем сумму ряда $Q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.28n^2+1.168n+0.1728}{(n+0.4)^3n^3}$ с точностью ε. Остаток ряда $R_L<\int_L^{\infty}\frac{2.28x^2+1.168x+0.1728}{(x+0.4)^3x^3}dx<2.28\int_L^{\infty}\frac{x+1}{x^5}dx=2.28\left(\frac{1}{3L^3}+\frac{1}{4L^4}\right)$. При $L\geq 197$ это неравенство будет выполняться. $Q\approx Q_{197}=1.46237784$. Тогда $S\approx Q_{197}-2.7B+\frac{\pi^2}{3}=1.50669234$.

| | | |
|---|---|---|
| N=20000000 | $S_N=1.50669234$ | $S\approx 1.50669234$ |
| M=3675 | $P_M=1.78317560$ | $S\approx 1.50669254$ |
| L=197 | $Q_L=1.46237784$ | $S\approx 1.50669234$ |

Вывод: дважды улучшив сходимость ряда, мы получили возможность, просуммировав 197 слагаемых, вычислить заданный ряд с точностью $10^{-7}$.

***Литература.***


1. Демидович Б. П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. ─ М.: Наука, 1970.
2. Хемминг Р. В. Численные методы. ─ М.: Наука, 1968.

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

**Тема: численное решение нелинейных уравнений.**

***Постановка задачи.***

Дано уравнение $f(x) = 0$. Найти наименьший положительный корень этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, используя указанные методы отыскания корня, сравнить их скорости сходимости.

***Варианты заданий.***

| | |
|---|---|
| 1. $f(x) = e^x - 1{,}6 + x^2$.<br>Метод половинного деления, метод простой итерации. | 2. $f(x) = e^{-x} - 1{,}9 + x^2$.<br>Метод Ньютона, метод половинного деления. |
| 3. $f(x) = 1 + \sin(x) - 1{,}14e^{-x}$.<br>Метод хорд, метод Ньютона. | 4. $f(x) = x - 1{,}4\cos^2(x)$.<br>Метод подвижных хорд, метод Ньютона. |
| 5. $f(x) = \sin(x) + 0{,}1 - 1{,}4x^2$.<br>Метод Ньютона, метод половинного деления. | 6. $f(x) = \mathrm{ctg}(x + 0{,}4) - x^2$.<br>Метод хорд, метод подвижных хорд. |
| 7. $f(x) = \lg(x) - 0{,}13 / x$.<br>Метод простой итерации, метод хорд. | 8. $f(x) = e^x - 4{,}4x$.<br>Метод простой итерации, метод Ньютона. |
| 9. $f(x) = e^x - 0{,}44 / x$.<br>Метод половинного деления, метод хорд. | 10. $f(x) = \cos(x) - 4{,}4x$.<br>Метод подвижных хорд, метод половинного деления. |
| 11. $f(x) = \sin(x) - x + 2{,}4$.<br>Метод хорд, модифицированный метод Ньютона. | 12. $f(x) = 1{,}4\cos(x) - e^x$.<br>Модифицированный метод Ньютона, метод половинного деления. |

| | |
|---|---|
| 13. $f(x) = \mathrm{tg}(x) - 0{,}44 / x$.<br>Метод подвижных хорд, модифицированный метод Ньютона. | 14. $f(x) = \mathrm{tg}(x) - 1 + 0{,}4x$.<br>Метод простой итерации, модифицированный метод Ньютона. |
| 15. $f(x) = \lg(x) - 1{,}6 + x^2$.<br>Метод половинного деления, метод хорд. | 16. $f(x) = e^x - 2{,}2 + x^2$.<br>Метод половинного деления, метод хорд. |
| 17. $f(x) = e^{-x} - 2{,}5 + x^2$.<br>Метод простой итерации, метод хорд. | 18. $f(x) = 1 + \sin(x) - 1{,}2e^{-x}$.<br>Метод хорд, метод Ньютона. |
| 19. $f(x) = x - 2\cos x^2$.<br>Метод подвижных хорд, метод Ньютона. | 20. $f(x) = \sin(x) + 0{,}1 - 2x^2$.<br>Метод Ньютона, метод половинного деления. |
| 21. $f(x) = \mathrm{ctg}(x + 1) - x^2$.<br>Метод хорд, метод подвижных хорд. | 22. $f(x) = e^x - 5$.<br>Метод простой итерации, метод хорд. |
| 23. $f(x) = e^x - 0{,}5 / x$.<br>Метод простой итерации, метод Ньютона. | 24. $f(x) = 2\cos(x) - e^x$.<br>Метод половинного деления, метод хорд. |
| 25. $f(x) = \sin(x) - 2x + 0{,}5$.<br>Метод подвижных хорд, метод половинного деления. | 26. $f(x) = \mathrm{ctg}(x) - x^2$.<br>Метод хорд, модифицированный метод Ньютона. |
| 27. $f(x) = \mathrm{tg}(x) + \lg(x)$.<br>Модифицированный метод Ньютона, метод половинного деления. | 28. $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$.<br>Метод подвижных хорд, модифицированный метод Ньютона. |
| 29. $f(x) = \lg(x) - 0{,}19 / x$.<br>Метод простой итерации, | 30. $f(x) = \ln(x) + (x+1)^3$.<br>Метод простой итерации, метод |

| | |
|---|---|
| модифицированный метод Ньютона. | Ньютона. |

***Методические указания.***

***Отделение корней.***

Определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.

При отделении корней уравнения общего вида часто используется следующая теорема: пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и на концах отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует такая точка ξ, принадлежащая интервалу (a,b) , в которой функция обращается в нуль. Заметим, что корень будет единственным, если $f'(x)$ и $f''(x)$ существуют и сохраняют знак на рассматриваемом отрезке.

***Метод половинного деления.***

Для непрерывной монотонной функции $f(x)$ условие $f(a) \cdot f(b) < 0$ означает существование на отрезке$[a,b]$ корня уравнения $f(x) = 0$. Определив знак $f(x)$ в средней точке $c = \frac{a+b}{2}$, можно выбрать из отрезков $[a\ ,c]$ и $[c,\ b]$ тот, на котором $f(x)$ меняет знак, а, значит, имеет корень. Далее, на новом отрезке вдвое меньшей длины следует взять среднюю точку, определить в ней знак $f(x)$ и т.д. Итерационный процесс заканчивается, когда найдется отрезок длины меньше ε: $|b - a| < \varepsilon$. Тогда приближенное значение корня уравнения – середина последнего найденного отрезка.

***Методика решения задачи.***

1. Задать малое положительное число ε.
2. Найти отрезок [a,b], на котором существует единственный корень уравнения f(x) = 0.
3. Найти середину текущего отрезка [a,b], $c = \frac{a+b}{2}$.

4. Если f(a) · f(c) < 0, то положить b = c, а если f(c) · f(b) < 0, то a=c. В результате находится текущий отрезок локализации корня [a,b], в два раза меньше предыдущего.
5. Если |b – a| < ε, то процесс завершить и положить приближенным значением корня уравнения ξ середину последнего найденного отрезка, в противном случае перейти к п.3.

***Метод Ньютона.***

Пусть на [a, b] существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$, $f(x)$ – функция непрерывная вместе с первой производной на $[a, b]$ и $f'(x)$ сохраняет знак на отрезке [a, b].

Пусть $x_0$ – некоторое значение на отрезке [a, b]. Будем рассматривать его в качестве начального приближения к корню.

Тогда значение корня на $(n+1)$-й итерации вычисляется следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Итерационный процесс заканчивается, когда $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Тогда $x_{n+1}$ – приближенное значение корня уравнения.

За начальное приближение $x_0$ принимается один из концов отрезка $[a, b]$. Если на $[a, b]$ $f''(x)$ сохраняет знак, то

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{если } f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}.$$

***Методика решения задачи.***

1. Задать малое положительное число ε.
2. Найти отрезок [a,b], на котором существует единственный корень уравнения f(x) = 0.
3. Задать начальное приближение $x_0$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.
4. Положить n=0.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5. Вычислить xn+1 по формуле .
6. Если $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x_{n+1}$ приближенным значением корня уравнения $\xi$. В противном случае положить $n = n + 1$ и перейти к п.5.

***Модифицированный метод Ньютона.***

Методика применения модифицированного (или упрощенного) метода Ньютона совпадает с изложенной для метода Ньютона, но для расчета $x_{n+1}$ используется формула:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

***Метод хорд.***

В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить касательную хордой, один из концов которой неподвижен.

Тогда рекуррентная формула для решения уравнения $f(x) = 0$ по методу хорд примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

В качестве неподвижного конца $x_0$ принимается один из концов отрезка $[a, b]$, а именно

$$x_0 = \begin{cases} a, & если\ \ f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & если\ \ f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}.$$

За $x_1$ выбирается второй конец отрезка.

***Методика решения задачи***

1. Задать малое положительное число $\varepsilon$.
2. Найти отрезок [a,b], на котором существует единственный корень уравнения f(x) = 0.
3. В качестве $x_0$ задать один из концов отрезка [a, b] так, чтобы выполнялось неравенство $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. За $x_1$ выбрать второй конец отрезка.
4. Положить n=1.

5. Вычислить $x_{n+1}$ по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0).$$

6. Если $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x_{n+1}$ приближенным значением корня уравнения $\xi$. В противном случае положить n = n + 1 и перейти к п.5.

***Метод подвижных хорд.***

Если хорду заменить секущей, которая строится по двум последним итерациям, получим следующую итерационную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Этот метод называется методом подвижных хорд или методом секущих. В отличие от рассмотренных ранее методов, он является двухшаговым. В качестве $x_0$ принимается один из концов отрезка $[a,\ b]$, а именно

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если } f(a)\cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{если } f(b)\cdot f''(b) > 0 \end{cases}.$$

За $x_1$ выбирается второй конец отрезка.

***Методика решения задачи.***

1. Задать малое положительное число ε.
2. Найти отрезок [a,b], на котором существует единственный корень уравнения f(x) = 0.
3. В качестве $x_0$ задать один из концов отрезка [a, b] так, чтобы выполнялось неравенство $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$. За $x_1$ выбрать второй конец отрезка.
4. Положить n=1.
5. Вычислить $x_{n+1}$ по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

6. Если $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x_{n+1}$ приближенным значением корня уравнения ξ. В противном случае положить $n = n + 1$ и перейти к п.5.

***Метод простой итерации.***

Метод простой итерации уточнения корня уравнения $f(x) = 0$ состоит в замене этого уравнения эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ и построении последовательности приближений к корню уравнения ξ по формуле: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, где $x_0 \in (a, b)$.

Итерационный процесс заканчивается, когда $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

***Достаточное условие сходимости метода простой итерации.***

Пусть ξ - корень уравнения и $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогда существует отрезок $[\xi - r, \xi + r]$ такой, что для любого $x_0 \in [\xi - r, \xi + r]$ метод простой итерации сходится к корню ξ.

***Методика решения задачи.***

1. Задать малое положительное число ε.
2. Найти отрезок $[a,b]$, на котором существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.
3. Уравнение $f(x) = 0$ равносильным преобразованием привести к виду $x = \varphi(x)$. Это преобразование может быть осуществлено различными путями, но для сходимости метода нужно обеспечить условие $|\varphi'(x)| \le q < 1$ при $x \in [a, b]$, ($q$ – некоторая константа).
4. Задать начальное приближение $x_0 \in [a, b]$.
5. Положить $n = 0$.
6. Вычислить следующее приближение по формуле
   $x_{n+1} = \varphi(x_n)$
7. Если $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x_{n+1}$ приближенным значением корня уравнения ξ. В противном случае положить $n = n + 1$ и перейти к п.6.

***Пример выполнения работы.***

Методом Ньютона найти наименьший положительный корень уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$ с точностью ε = 0,001.

***Решение***: Необходимо найти отрезок $[a,b]$, на котором существует единственный корень данного уравнения. Для этого преобразуем уравнение к равносильному виду $x^2 = e^{-x}$ и найдем точки пересечения графиков $y = x^2$ и $y = e^{-x}$ (см. рис.9).

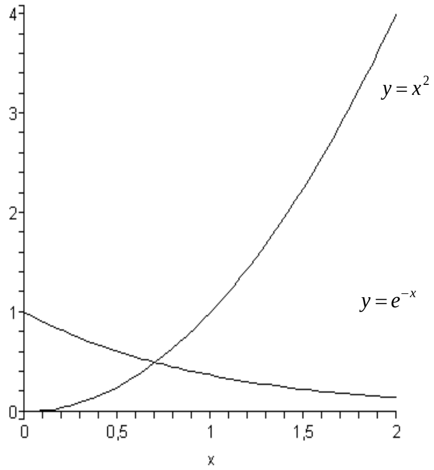



**Рис. 1**

Очевидно, корень уравнения $\zeta \in [0{,}5;\ 1]$. Выберем начальное приближение к корню $x_0$ из условия:. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$f''(x) = 2 - e^{-x} > 0$ на [0,5; 1];

$f(a) = f(0{,}5) < 0;\ f(b) = f(1) > 0 \Rightarrow x_0 = 1.$

Результаты расчетов по формуле метода Ньютона: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

приведены в таблице:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1,000 | 0,73304 | 0,70381 | 0,703467 |
| $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ | - | 0,27 | 0,029 | 0,00034 |
| $f(x_n)$ | 0,63212 | 0,05690 | 0,00065 | $8{,}25 \cdot 10^{-7}$ |

***Вывод***: Наименьший положительный корень уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$, равный 0,703467, был найден методом Ньютона с требуемой точностью за три итерации.

## РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

**Тема: численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.**

***Постановка задачи.***

Решить систему линейных уравнений вида $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

методами:

a) Метод Гаусса;
b) Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице;
c) Метод Якоби;
d) Метод Зейделя.

Для методов a), b):

прокомментировать результаты решения.

Для методов c),d):

проверить сходимость метода;

в случае сходимости найти решение с точностью $0.5 \cdot 10^{-4}$;

сравнить количество итераций.

*Задания.*

| | |
|---|---|
| 1. $A=\begin{pmatrix}1.5 & -0.2 & 0.1\\ -0.1 & 1 & -0.1\\ -0.3 & 0.2 & -0.5\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1.4\\ 1.6\\ -1.4\end{pmatrix}$ | 15. $A=\begin{pmatrix}1.65 & -0.05 & 0.2\\ -0.1 & 0.85 & 0.3\\ -0.15 & -0.35 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2.15\\ 2.5\\ -2.35\end{pmatrix}$ |
| 2. $A=\begin{pmatrix}1.49 & -0.2 & 0.1\\ -0.1 & 1 & -0.09\\ -0.3 & 0.2 & -0.5\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1.39\\ 1.63\\ -1.4\end{pmatrix}$ | 16. $A=\begin{pmatrix}1.66 & -0.04 & 0.2\\ -0.1 & 0.84 & 0.32\\ -0.14 & -0.36 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2.18\\ 2.54\\ -2.36\end{pmatrix}$ |
| ***3.*** $A=\begin{pmatrix}1.51 & -0.2 & 0.4\\ -0.1 & 1 & 0.1\\ -0.3 & -0.2 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2.31\\ 2.2\\ -2.2\end{pmatrix}$ | 17. $A=\begin{pmatrix}1,67 & -0,03 & 0,2\\ -0,1 & 0,83 & 0,34\\ -0,13 & -0,37 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,21\\ 2,58\\ -2,37\end{pmatrix}$ |
| *4.* $A=\begin{pmatrix}1.54 & -0.16 & 0.8\\ -0.4 & 0.96 & 0.08\\ -0.26 & -0.24 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}3.62\\ 1.76\\ -2.24\end{pmatrix}$ | 18. $A=\begin{pmatrix}1,68 & -0,02 & 0,2\\ -0,1 & 0,82 & 0,36\\ -0,12 & -0,38 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,24\\ 2,62\\ -2,38\end{pmatrix}$ |
| 5. $A=\begin{pmatrix}1.55 & -0.15 & 1\\ -0.5 & 0.95 & 0.1\\ -0.25 & -0.25 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}4.25\\ 1.7\\ -2.25\end{pmatrix}$ | 19. $A=\begin{pmatrix}1,69 & -0,01 & 0,2\\ -0,1 & 0,81 & 0,38\\ -0,11 & -0,39 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,27\\ 2,66\\ -2,39\end{pmatrix}$ |
| 6. $A=\begin{pmatrix}1.56 & -0.14 & 1.2\\ -0.6 & 0.94 & 0.12\\ -0.24 & -0.26 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}4.88\\ 1.64\\ -2.26\end{pmatrix}$ | 20. $A=\begin{pmatrix}1,7 & 0 & 0,2\\ -0,1 & 0,8 & 0,4\\ -0,1 & -0,4 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,3\\ 2,7\\ -2,4\end{pmatrix}$ |
| 7. $A=\begin{pmatrix}1.57 & -0.13 & 1.4\\ -0.7 & 0.93 & 0.14\\ -0.23 & -0.27 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}5.51\\ 1.58\\ -2.27\end{pmatrix}$ | 21 $A=\begin{pmatrix}1,71 & 0,01 & 0,2\\ -0,1 & 0,79 & 0,42\\ -0,09 & -0,41 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,33\\ 2,74\\ -2,41\end{pmatrix}$ |
| 8. $A=\begin{pmatrix}1.58 & -0.12 & 1.6\\ -0.8 & 0.92 & 0.16\\ -0.22 & -0.28 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}6.14\\ 1.52\\ -2.28\end{pmatrix}$ | 22. $A=\begin{pmatrix}1,72 & 0,02 & 0,2\\ -0,1 & 0,78 & 0,44\\ -0,08 & -0,42 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,36\\ 2,78\\ -2,42\end{pmatrix}$ |
| 9. $A=\begin{pmatrix}1.59 & -0.11 & 1.8\\ -0.9 & 0.91 & 0.18\\ -0.21 & -0.29 & -0.5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}6.77\\ 1.46\\ -2.29\end{pmatrix}$ | 23. $A=\begin{pmatrix}1,73 & 0,03 & 0,2\\ -0,1 & 0,77 & 0,46\\ -0,07 & -0,43 & -0,5\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}2,39\\ 2,82\\ -2,43\end{pmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| 10. A=$\begin{pmatrix} 1.6 & -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.9 & 0.2 \\ -0.2 & -0.3 & -0.5 \end{pmatrix}$;b=$\begin{pmatrix} 2 \\ 2.3 \\ -2.3 \end{pmatrix}$ | 24. A=$\begin{pmatrix} 1{,}74 & 0{,}04 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}76 & 0{,}48 \\ -0{,}06 & -0{,}44 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2{,}42 \\ 2{,}86 \\ -2{,}44 \end{pmatrix}$ |
| 11. A=$\begin{pmatrix} 1.61 & -0.09 & 0.2 \\ -0.1 & 0.89 & 0.22 \\ -0.19 & -0.31 & -0.5 \end{pmatrix}$;b=$\begin{pmatrix} 2.03 \\ 2.34 \\ -2.31 \end{pmatrix}$ | 25. A=$\begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}05 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ -0{,}05 & -0{,}45 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2{,}45 \\ 2{,}9 \\ -2{,}45 \end{pmatrix}$ |
| 12. A=$\begin{pmatrix} 1.62 & -0.08 & 0.2 \\ -0.1 & 0.88 & 0.24 \\ -0.18 & -0.32 & -0.5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2.06 \\ 2.38 \\ -2.32 \end{pmatrix}$ | 26. A=$\begin{pmatrix} 1{,}76 & 0{,}06 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}74 & 0{,}52 \\ -0{,}04 & -0{,}46 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2{,}48 \\ 2{,}84 \\ -2{,}46 \end{pmatrix}$ |
| 13. A=$\begin{pmatrix} 1.63 & -0.07 & 0.2 \\ -0.1 & 0.87 & 0.26 \\ -0.17 & -0.33 & -0.5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2.09 \\ 2.42 \\ -2.33 \end{pmatrix}$ | 27. A=$\begin{pmatrix} 1{,}77 & 0{,}07 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}73 & 0{,}54 \\ -0{,}03 & -0{,}47 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2{,}51 \\ 2{,}98 \\ -2{,}47 \end{pmatrix}$ |
| 14. A=$\begin{pmatrix} 1.64 & -0.06 & 0.2 \\ -0.1 & 0.86 & 0.28 \\ -0.16 & -0.34 & -0.5 \end{pmatrix}$;b=$\begin{pmatrix} 2.12 \\ 2.46 \\ -2.34 \end{pmatrix}$ | 28. A=$\begin{pmatrix} 1{,}78 & 0{,}08 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}72 & 0{,}56 \\ -0{,}02 & -0{,}48 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; b=$\begin{pmatrix} 2{,}54 \\ 3{,}02 \\ -2{,}48 \end{pmatrix}$ |

***Методические указания.***

***Метод Гаусса.***

В основе метода Гаусса лежит идея последовательного исключения неизвестных. В процессе реализации этого метода получаем представление исходной матрицы ***A*** в виде произведения двух треугольных матриц: **B** – нижняя треугольная матрица и **C** –верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Компактная схема предполагает запись элементов этих двух матриц в виде одной (единицы на диагонали матрицы C подразумеваются).

Рассмотрим вычислительную схему этого метода на примере решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ ($a_{11}$ - «главный элемент»). Разделив первое уравнение системы на $a_{11}$, получим

$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = y_1$

где $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j$ = 2, 3. $y_1 = b_1/ a_{11}$ .

Пользуясь первым уравнением, можно исключить неизвестное $x_1$ из второго и третьего уравнений системы. Для этого следует умножить первое уравнение сначала на $a_{21}$, затем на $a_{31}$ и вычесть результаты соответственно из второго и третьего уравнений.

В результате получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ вычисляются по формуле

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\, c_{1j}$ ; $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}\, y_1$ ($i$ = 2, 3; $j$ = 2, 3, 4).

Далее первое уравнение полученной системы делим на $a_{22}^{(1)}$ и т. д.

Таким образом, исходную систему мы привели к эквивалентной системе с треугольной матрицей (прямой ход):

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = y_1 \\ \qquad\quad x_2 + c_{23}x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = y_3 \end{cases}$$

Или в матричной форме

$\boldsymbol{Cx = y}$

Здесь матрица **C** имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратный ход заключается в последовательном вычислении значений неизвестных в обратном порядке:

$x_3 = y_3$

$x_2 = y_2 - c_{23}\, x_3,$

$x_1 = y_1 - c_{12}\, x_2 - c_{13}\, x_3.$

Диагональными элементами матрицы **B** будут элементы:

$a_{11}$, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$ – «главные» элементы.

Так как определитель матрицы С всегда равен единице, то det(A) = $a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)}$

Очевидно, рассмотренный метод применим лишь при условии, что все «главные элементы» отличны от нуля. Если же какой-либо из них обращается в нуль, то в соответствующей системе достаточно провести перестановку уравнений с тем, чтобы сделать «главный элемент» отличным от нуля (разумеется, в предположении, что матрица *A* невырожденная).

***Метод Гаусса с выбором главного элемента.***

Этот метод отличается от метода Гаусса тем, что «главный элемент» определяется на каждом шаге. Сначала исключается переменная с наибольшим по абсолютной величине коэффициентом, затем определяется следующий «главный элемент», равный на $k$ – м шаге $max\{ |a_{ij}^{(k)}| \}, j = k+1, \dots, n; i = k, \dots, n$.

***Пример***. Методом Гаусса решить систему:

$1{,}2357x_1 + 2{,}1742\, x_2 - 5{,}4834\, x_3 = -\, 2{,}0735$

$3{,}4873x_1 + 6{,}1365x_2 - 4{,}7483x_3 = 4{,}8755$

$6{,}0696x_1 - 6{,}2163x_2 - 4{,}6921x_3 = -4{,}8388$

Легко проверить, что ее решение:

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$

Прямой ход реализуется с помощью преобразований:

$x_1 + 1{,}7595x_2 - 4{,}4375x_3 = -1{,}6780$ (делим все коэффициенты первого уравнения и свободный член на $a_{11}$ и вычитаем первое уравнение из второго, умножая его на $a_{21}$ и из третьего, умножая его на $a_{31}$)

Теперь проделываем те же операции для системы из двух уравнений (результаты приводим с пятью значащими цифрами в форме с плавающей точкой):

$0{,}0006\, x_2 + 10{,}726\, x_3 = 10{,}727$

$-16{,}892x_2 + 22{,}242\, x_3 = 5{,}3462$

Затем:

$x_2 + 17927x_3 = 17878$

$-30282x_3 = -30200$

Обратный ход: решаем системуы с треугольной матрицей, начиная с последнего уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}7595 & -4{,}4375 \\ 0 & 1 & 17927 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6780 \\ 17878 \\ 0{,}99730 \end{pmatrix};$$

$x_3 = 0{,}99730$

$x_2 = 17878 - 17927x_3 = -0{,}5971$; $x_1 = -1{,}6780 + 4{,}4375x_3 - 1{,}7595x_2 = -4{,}3564$.

Полученные результаты можно объяснить потерей точности из-за большого коэффициента $c_{23}$, который был получен в результате деления на малое значение $a_{22}^{(1)} = 0{,}0006$.

Решим ту же систему методом Гаусса с выбором главного элемента по строке.

В нашем примере максимальный по абсолютной величине коэффициент – $a_{13}$, поэтому вначале исключаем $x_3$ с помощью первого уравнения (меняем местами первый и третий столбцы):

$-5{,}4834\,x_3 + 2{,}1742\,x_2 + 1{,}2357x_1 = -2{,}0735$

$-4{,}7483x_3 + 6{,}1365x_2 + 3{,}4873x_1 = 4{,}8755$

$-4{,}6921x_3 - 6{,}2163x_2 + 6{,}0696x_1 = -4{,}8388$

Делим все коэффициенты первого уравнения на – 5,4834:

$x_3 - 0{,}39651x_2 - 0{,}22535x_1 = 0{,}37814$, исключаем $x_3$ из остальных уравнений:

$4{,}2508x_2 + 2{,}4173x_1 = 6{,}671$

$-8{,}0768x_2 + 5{,}0122x_1 = -3{,}0645$

Здесь максимальный по абсолютной величине коэффициент при $x_2$, поэтому:

$x_2 + 0{,}56867x_1 = 1{,}5694$ и

$9{,}6052\, x_1 = 9{,}6113$

Обратный ход:

$x_1 = 1{,}0006$;

$x_2 = 1{,}5695 - 0{,}56867\, x_1 = 1{,}0004$; $x_3 = 0{,}37814 + 0{,}39651x_2 + 0{,}22535x_1 = 1{,}0003$.

Полученные результаты хорошо согласуются с точностью вычислений.

***Метод Якоби и метод Зейделя.***

Оба метода относятся к методам простой итерации. Идея этого метода в том, что система уравнений $Ax = b$ преобразуется к виду $x = B{\cdot}x + c$ и ее решение находится как предел последовательности $x^{k+1} = B{\cdot}x^k + c$

***Критерий сходимости*** метода простой итерации – все собственные числа матрицы B по абсолютной величине меньше 1. Иногда удобно использовать достаточные условия. Например, норма матрицы B меньше 1 (хотя бы одна). Рассмотрим эти методы на примере системы из трех уравнений с тремя неизвестными.

***Метод Якоби.*** Если на главной диагонали матрицы $A$ нет нулевых элементов, можно выразить $x_i$ из $i$ – го уравнения. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases}$$

Итерационный процесс будет иметь вид:

$$\begin{cases} {x_1}^{k+1} = (b_1 - a_{12}{x_2}^k - a_{13}{x_3}^k)/a_{11} \\ {x_2}^{k+1} = (b_2 - a_{21}{x_1}^k - a_{23}{x_3}^k)/a_{22} \\ {x_3}^{k+1} = (b_3 - a_{31}{x_1}^k - a_{32}{x_2}^k)/a_{33} \end{cases}$$

Матрица B = $\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$

Этот метод называется методом Якоби. Можно показать, что достаточным условием сходимости этого метода является диагональное преобладание в матрице А системы ($|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots, n$)

***Пример.*** Исследовать сходимость метода Якоби для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными и в случае сходимости получить для нее приближенное решение этим методом.

$2x_1 - x_2 + x_3 = -3$

$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$

$x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0$

Построим итерационный процесс как было описано выше:

$x_1^{(k+1)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(k)} - 0{,}5\, x_3^{(k)}$

$x_2^{(k+1)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(k)} + 0{,}4\, x_3^{(k)}$

$x_3^{(k+1)} = -0{,}1\, x_1^{(k)} + 0{,}4\, x_2^{(k)}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0 & 0.4 \\ -0.1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Достаточное условие диагонального преобладания не выполняется для первой строки $A$, в этом случае требуется вычислить норму матрицы $B$.

$\|B\|_\infty = 1$; $\|B\|_1 = 0.9$ ,

следовательно, метод сходится.

Точное решение этой системы: $x_1 = -1{,}(21)$; $x_2 = 1{,}(16)$; $x_3 = 0{,}(58)$.

Возьмем $x^0 = c = (-1{,}5;\ 0{,}2;\ 0)^{т}$ , тогда

$x_1^{(1)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(0)} - 0{,}5\, x_3^{(0)} = -1{,}4$;

$x_2^{(1)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(0)} + 0{,}4\, x_3^{(0)} = 1{,}1$;

$x_3^{(1)} = -0{,}1\, x_1^{(0)} + 0{,}4\, x_2^{(0)} = 0{,}23$;

$x_1^{(2)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(1)} - 0{,}5\, x_3^{(1)} = -\ 1{,}065$;

$x_2^{(2)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(1)} + 0{,}4\, x_3^{(1)} = 1{,}132$;

$x_3^{(2)} = -0{,}1\, x_1^{(1)} + 0{,}4\, x_2^{(1)} = 0{,}58$;

и т.д.

Итерации 12 и 11 будут отличаться в четвертом знаке после запятой.

***Метод Зейделя.***

В итерационном методе Зейделя, в отличие от метода Якоби, при уточнении $i$ – й компоненты решения используются уже уточненные значения $x_1$, $x_2$, . . . ,$x_{i-1}$. Итерационный процесс имеет вид

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^{k} - a_{13}x_3^{k})/a_{11} \\ x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^{k})/a_{22} \\ x_3^{k+1} = (b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1})/a_{33} \end{cases}$$

Чтобы получить матрицу B, представим матрицу $A$ в виде суммы трех матриц

$A = L + D + R$, где $L$ – левая треугольная матрица, $R$ – правая треугольная матрица, $D$ – диагональная матрица. Тогда итерационный процесс Зейделя можно записать в виде

$(L+D)x^{(k+1)} + Rx^{(k)} = b$, отсюда имеем

$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1} Rx^{(k)} + (L+D)^{-1} b$

Очевидно, что матрица $B = -(L+D)^{-1} R$. Необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя:

все корни уравнения $\det(R + (L + D)\lambda) = 0$ должны быть по модулю меньше 1. Иногда используются более удобные для проверки условия.

***Пример.*** Исследовать сходимость метода Зейделя для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными и в случае сходимости получить для нее приближенное решение этим методом. Возьмем ту же систему, что и для метода Якоби

$2x_1 - x_2 + x_3 = -3$

$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$

$x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0$

Построим итерационный процесс следующим образом:

$x_1^{(k+1)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(k)} - 0{,}5\, x_3^{(k)}$

$x_2^{(k+1)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(k+1)} + 0.4\, x_3^{(k)}$

$x_3^{(k+1)} = -0{,}1\, x_1^{(k+1)} + 0{,}4\, x_2^{(k+1)}$.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь:

Уравнение $\det(R + (L + D)\lambda) = 0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 5\lambda & -2 \\ \lambda & -4\lambda & 10\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или: $100\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$,

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3}$ – корни квадратного уравнения $\lambda^2 - 0{,}03\lambda + 0{,}02 = 0$.

$\lambda_{2,\ 3}$ – комплексные числа, по модулю меньше 1 и метод Зейделя сходится.

Возьмем $x^0 = \boldsymbol{c} = (-1{,}5;\ 0{,}2;\ 0)^{т}$, тогда

$x_1^{(1)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(0)} - 0{,}5\, x_3^{(0)} = -1{,}4$;

$x_2^{(1)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(1)} + 0{,}4\, x_3^{(0)} = 1{,}04$; $x_3^{(1)} = -0{,}1\, x_1^{(1)} + 0{,}4\, x_2^{(1)} = 0{,}556$;

$x_1^{(2)} = -1{,}5 + 0{,}5\, x_2^{(1)} - 0{,}5\, x_3^{(1)} = -1{,}258$; $x_2^{(2)} = 0{,}2 - 0{,}6\, x_1^{(2)} + 0{,}4 \cdot x_3^{(1)} = 1{,}1772$;

$x_3^{(2)} = -0{,}1\, x_1^{(2)} + 0{,}4\, x_2^{(2)} = 0{,}59668$;

$x_1^{(3)} = -1{,}21113$; $x_2^{(3)} = 1{,}161391$; $0{,}58567$;

$x_1^{(4)} = -1{,}21214$; $x_2^{(4)} = 1{,}161551$; $x_3^{(4)} = 0{,}585834$.

Требуемая точность достигнута на четвертой итерации.

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

**Тема: приближенное вычисление определенного интеграла.**

***Постановка задачи.***

Вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по двум составным формулам с шагом 0,1; 0,05; 0,025. Указать погрешность по Рунге. Также найти значение интеграла по формуле Гаусса, используя 2 узла и веса, оптимальные для отрезка [-1; 1].

***Варианты заданий.***

| | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 \sin(x^2)dx$. формула правых прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса | 2. $\int_0^1 \cos(x^3)dx$. формула Грегори, формула средних прямоугольников, формула Гаусса |
| 3. $\int_0^1 e^{x^2}dx$ формула правых прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса | 4. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ формула левых прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса |
| 5. $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ формула левых прямоугольников, формула Эйлера, формула Гаусса | 6. $\int_1^2 \sin(x^3)dx$ формула левых прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса |
| 7. $\int_1^2 \cos(x^2)dx$. формула средних прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса | 8. $\int_0^1 e^{x^3}dx$. формула средних прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса |
| 9. $\int_1^2 e^{-x^3}dx$. формула средних прямоугольников, формула 3/8., формула Гаусса | 10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. формула 3/8, формула левых прямоугольников |

| | |
|---|---|
| | формула Гаусса |
| 11. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^4}$. формула Эйлера, формула Симпсона, формула Гаусса | 12. $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx$. формула Грегори, формула правых прямоугольников, формула Гаусса |
| 13. $\int_1^2 \sqrt{1+x^4}dx$. формула трапеций., формула 3/8, формула Гаусса | 14. $\int_2^3 \sin(1+x^2)dx$. формула Эйлера, формула средних прямоугольников, формула Гаусса |
| 15. $\int_2^3 \cos(x+x^2)dx$. формула Грегори, формула Симпсона, формула Гаусса | 16. $\int_2^3 e^{\sin x}dx$. формула правых прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса |
| 17. $\int_2^3 e^{-\cos x}dx$. формула Грегори, формула средних прямоугольников, формула Гаусса | 18. $\int_2^3 \ln(1+\sin x)dx$. формула правых прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса |
| 19. $\int_2^3 \ln(1+\cos x)dx$. формула левых прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса | 20. $\int_0^2 \sqrt{1+x^2+\sin(x)}dx$. формула левых прямоугольников, формула Эйлера, формула Гаусса |
| 21. $\int_0^2 \sin(e^{x/3}+x)dx$. формула левых прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса | 22. $\int_0^2 \sin(\sqrt{1+x^2+x})dx$. формула средних прямоугольников, формула Симпсона, формула Гаусса |

| | |
|---|---|
| 23. $\int_0^2 \cos(e^{x/3}+x)dx$. формула средних прямоугольников, формула трапеций, формула Гаусса | 24. $\int_0^2 \cos(\frac{\sqrt{1+x^2+x}}{3})dx$. формула средних прямоугольников, формула 3/8., формула Гаусса |
| 25. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. формула 3/8, формула левых прямоугольников формула Гаусса | 26. $\int_{0.5}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$. формула Эйлера, формула Симпсона, формула Гаусса |
| 27. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. формула Грегори, формула правых прямоугольников, формула Гаусса | 28. $\int_2^3 \frac{\cos x}{x+1}dx$. формула трапеций., формула 3/8, формула Гаусса |
| 29. $\int_1^2 \sqrt{x}\cos(x^2)dx$. формула Эйлера, формула средних прямоугольников, формула Гаусса | 30. $\int_0^1 \sqrt{2x^2+3}dx$. формула Грегори, формула Симпсона, формула Гаусса |

***Методические указания.***

Составная формула левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i);\ |\mathrm{R[f]}| \le \max_{[a,b]}|f'(x)|\frac{(b-a)}{2}h$$

Составная формула правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i);\ |\mathrm{R[f]}| \le \max_{[a,b]}|f'(x)|\frac{(b-a)}{2}h$$

Составная формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2});\quad |\mathrm{R[f]}| \le \max_{[a,b]}|f''(x)|\frac{(b-a)}{24}h^2$$

Составная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right);$$

$$|\mathrm{R[f]}| \le \max_{[a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)}{12} h^2$$

Составная формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1/2}) + f(x_n));$$

где $x_{i+1/2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

$$|R[f]| \le \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)}{2880} h^4 .$$

Составная формула Эйлера:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{h^2}{12}\big(f'(x_0) - f'(x_n)\big)$$

Погрешность составной формулы Эйлера:

$$|R[f]| \le \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)}{720} h^4$$

Составная формула Грегори:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_n)\big)$$
$$+ h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$
$$+ \frac{h}{24}\big(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2) - f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})$$
$$- 3f(x_n)\big)$$

Погрешность составной формулы Грегори:

$$|R[f]| \le \left(\max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)}{720} + \max_{[a,b]} |f^{(3)}(x)| \frac{1}{18}\right) h^4$$

Составная формула «трех восьмых»

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+f(x_5)+\dots+f(x_{N-2})+f(x_{N-1})\right]+\right.$$

$$\left.+2\left[f(x_3)+f(x_6)+\dots+f(x_{N-3})\right]+f(x_N)\right]$$

Погрешность составной формулы «трех восьмых»

$$|R[f]| \le \max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| \frac{(b-a)}{80} h^4$$

( здесь $h=\frac{b-a}{n}$ )

Если погрешность квадратурной формулы $R[f] \le Ch^p$ , где C – некоторая постоянная, то говорят, что формула имеет порядок погрешности по h  равный p.

***Метод Рунге оценивания погрешности.***

Пусть $I_h$ – приближенное значение интеграла, посчитанное по составной формуле с шагом $h$, а $R_h$ – его погрешность; $I_{h/2}$ - приближенное значение интеграла, посчитанное по составной формуле с шагом $h/2$, и $R_{h/2}$ – его погрешность. Пусть порядок погрешности этой формулы $m$ . Тогда справедливо следующее правило Рунге:

$$R_{h/2}=\frac{I_{h/2}-I_h}{2^m-1}.$$

***Формулы Гаусса.***

Квадратурную формулу Гаусса строим следующим образом:

1) Из системы

$$a_1\int_a^b p(x)x^n dx + a_2\int_a^b p(x)x^{n-1}dx + \dots + a_{n+1}\int_a^b p(x)dx = -\int_a^b p(x)x^{n+1}dx$$

$$a_1\int_a^b p(x)x^{n+1} dx + a_2\int_a^b p(x)x^{n}dx + \dots + a_{n+1}\int_a^b p(x)xdx = -\int_a^b p(x)x^{n+2}dx$$

…

$$a_1\int_a^b p(x)x^{2n} dx + a_2\int_a^b p(x)x^{2n-1}dx + \dots + a_{n+1}\int_a^b p(x)x^n dx = -\int_a^b p(x)x^{2n+1}dx$$

находим коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n+1}$ полинома

$G(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \cdots + a_n x + a_{n+1}$,

2) Находим $n+1$ корней $x_0, \ldots, x_n$ полинома $G(x)$ и берем их в качестве узлов квадратурной формулы;
3) Находим коэффициенты $A_k$ квадратурной формулы

$I[f] = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx S_n[f] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$,

$A_k = \int_a^b p(x) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{(x_k - x_i}) dx$.

4) Остаточный член $R[f]$ формулы Гаусса для функции $f(x) \in W_{2n+2}$ равен

$$R[f] = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \int_a^b p(x) \omega_n^2(x) dx, \quad \xi \in (a, b)$$

***Пример выполнения работы.***

1. Найти значение интеграла $\int_0^{1,8} arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ по составной формуле левых прямоугольников с шагом 0,1; 0,05; 0,025. Указать погрешность по Рунге для каждого случая.
2. Найти значение интеграла по формуле Гаусса, используя 2 узла и веса, оптимальные для отрезка [-1; 1].

1. Формула левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i);$$

Порядок погрешности р=1. Значит погрешность по Рунге $R_{h/2} = I_{h/2} - I_h$.

Занесем результаты в таблицу:

| Шаг | Число n элементарных отрезков | Приближенное значение интеграла $I_h$ | Погрешность по Рунге $R$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 18 | 1,6888809 | |
| 0,05 | 36 | 1,6618106 | $-2,71 \cdot 10^{-2}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,025 | 72 | 1,6483949 | $-1{,}34 \cdot 10^{-2}$ |

2. Построим квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для отрезка [-1; 1].

$$p(x) \equiv 1 \text{ на } [-1; 1]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1);\ x_0 \neq x_1$$

$G(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 + bx + c.$

Найдем оптимальные узлы. Узлы $x_0$, $x_1$ должны быть такими, чтобы многочлен $\omega(x)$ был ортогонален с весом $p(x) \equiv 1$ любому многочлену степени не выше $n$=1:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (x^2 + bx + c)dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (x^2 + bx + c)x dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{bx^2}{2} + cx\right|_{-1}^{1} = 0 \\ \left.\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{bx^3}{3} + \dfrac{cx^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Таким образом, $G(x) = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Методом неопределенных коэффициентов найдем веса $A_0$ и $A_1$.

$$f(x) \equiv 1, \int_{-1}^{1} 1dx = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1$$

$$f(x) = x, \int_{-1}^{1} xdx = A_0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Т.е. имеем: $\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ -A_0 + A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = 1,\ A_1 = 1.$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

Чтобы найти значение искомого интеграла, нужно осуществить линейное отображение отрезка [0; 1,8] на отрезок [-1; 1].

$$\varphi(t) = at + b$$

$$\begin{cases} \varphi(-1) = 0 = -a + b \\ \varphi(1) = 1.8 = a + b \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.9$$

$$\int_{0}^{1.8} arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \begin{bmatrix} x = 0.9t + 0.9; & dx = 0.9dt \\ 0.9t + 0.9 = 0 \Rightarrow t = -1; & 0.9t + 0.9 = 1.8 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-1}^{1} 0.9 \cdot arcsin\frac{1}{\sqrt{1+0.81(t+1)^2}}dt.$$

Значение, посчитанное по формуле Гаусса: 1,63889719.

## РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

**Тема: численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

***Постановка задачи.***

На отрезке [0, 1] решить задачу Коши $y' = f(x, y),\ y(0) = y_0$ указанными методами.

Результаты представить в печатном виде или в виде exe-файла, выполняющего следующее: пользователь задает количество точек разбиения N, на экран выводятся графики решений, полученных данными методами, и точное решение (если оно есть). Сравнить, какой метод быстрее сходится, объяснить почему. Описать методы решения (выписать формулы; указать порядок точности; для неявных методов пояснить как решается нелинейное уравнение, для многошаговых – как делается разгон и т.п.)

Перечень задач:

а) $f(x,y)=30y(x-0.2)(x-0.7)$, $y_0=0.1$

б) $f(x,y)=50y(x-0.6)(x-0.85)$, $y_0=0.1$

в) $f(x,y)=-20y^2(x-0.4)$, $y_0=0.5$

Перечень методов:

1) Эйлера явный

2) Эйлера с пересчетом

3) Коши

4) Рунге-Кутта четвертого порядка

5) Эйлера неявный

6) Тейлора второго порядка

7) Тейлора третьего порядка

8) Тейлора четвертого порядка

9) Трапеций

10) Адамса двушаговый явный

11)Адамса трехшаговый явный

12) Симпсона

***Задания.***

| **№** | **Задача** | **Методы** | **№** | **Задача** | **Методы** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | а) | 1, 3, 8 | **15.** | в) | 1, 3, 12 |
| **2.** | б) | 1, 4, 9 | **16.** | а) | 1, 4, 11 |
| **3.** | в) | 1, 5, 10 | **17.** | б) | 1, 5, 10 |
| **4.** | а) | 1, 6, 11 | **18.** | в) | 1, 6, 9 |
| **5.** | б) | 1, 7, 12 | **19.** | а) | 1, 4, 12 |
| **6.** | в) | 1, 3, 8 | **20.** | б) | 1, 3, 12 |
| **7.** | а) | 1, 4, 9 | **21.** | в) | 1, 4, 11 |
| **8.** | б) | 1, 5, 10 | **22.** | а) | 1, 5, 10 |
| **9.** | в) | 1, 6, 11 | **23.** | б) | 1, 6, 9 |
| **10.** | а) | 1, 7, 12 | **24.** | в) | 1, 6, 9 |
| **11.** | б) | 1, 3, 8 | **25.** | а) | 1, 3, 12 |
| **12.** | в) | 1, 4, 9 | **26.** | б) | 1, 4, 11 |
| **13.** | а) | 1, 5, 10 | **27.** | в) | 1, 5, 10 |
| **14.** | б) | 1, 6, 11 | **28.** | а) | 1, 6, 9 |

***Методические указания.***

Для примера рассмотрим решение задачи Коши:

$$y' = -\frac{3y}{x+1}, y(0) = 2$$

Найдем приближенные значения решения в точках 0,1; 0,2; 0,3 по методу Эйлера и по методу Коши

Найдем точное решение этой задачи:

$$\frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x+1}$$

$$y = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$y(0) = y_0 = 2$ для каждого метода .

1.Вычислим приближенные значения решения по методу Эйлера в точках 0,1; 0,2; 0,3.

$y(0) = y_0 = 2$

Приближенные значения вычисляем по формуле:

$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j)$, ее одношаговая погрешность – $O(h^2)$, метод нуль – устойчив, не является А – устойчивым.

$$y(0{,}1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0{,}1(-\frac{3 \cdot 2}{0+1}) = 1{,}4$$

$$y(0{,}2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}4 + 0{,}1(-\frac{3 \cdot 1{,}4}{0{,}1+1}) \approx 1{,}0182$$

$$y(0{,}3) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}0182 + 0{,}1(-\frac{3 \cdot 1{,}0182}{0{,}2+1}) \approx 0{,}7636$$

2.Вычислим приближенные значения решения по методу Коши в тех же точках.

Приближенные значения вычисляем по формуле:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j))$$

ее одношаговая погрешность – $O(h^3)$, метод нуль – устойчив, не является А – устойчивым.

$$y(0{,}1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)) =$$

$$= 2 + 0{,}1(-\frac{3(2 + 0{,}05(-\frac{3 \cdot 2}{0+1}))}{0{,}05+1}) \approx 1{,}5143$$

$$y(0{,}2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1)) =$$

$$= 1{,}5143 + 0{,}1(-\frac{3(1{,}5143 + 0{,}05(-\frac{3 \cdot 1{,}5143}{0{,}1+1}))}{0{,}15+1}) \approx 1{,}1731$$

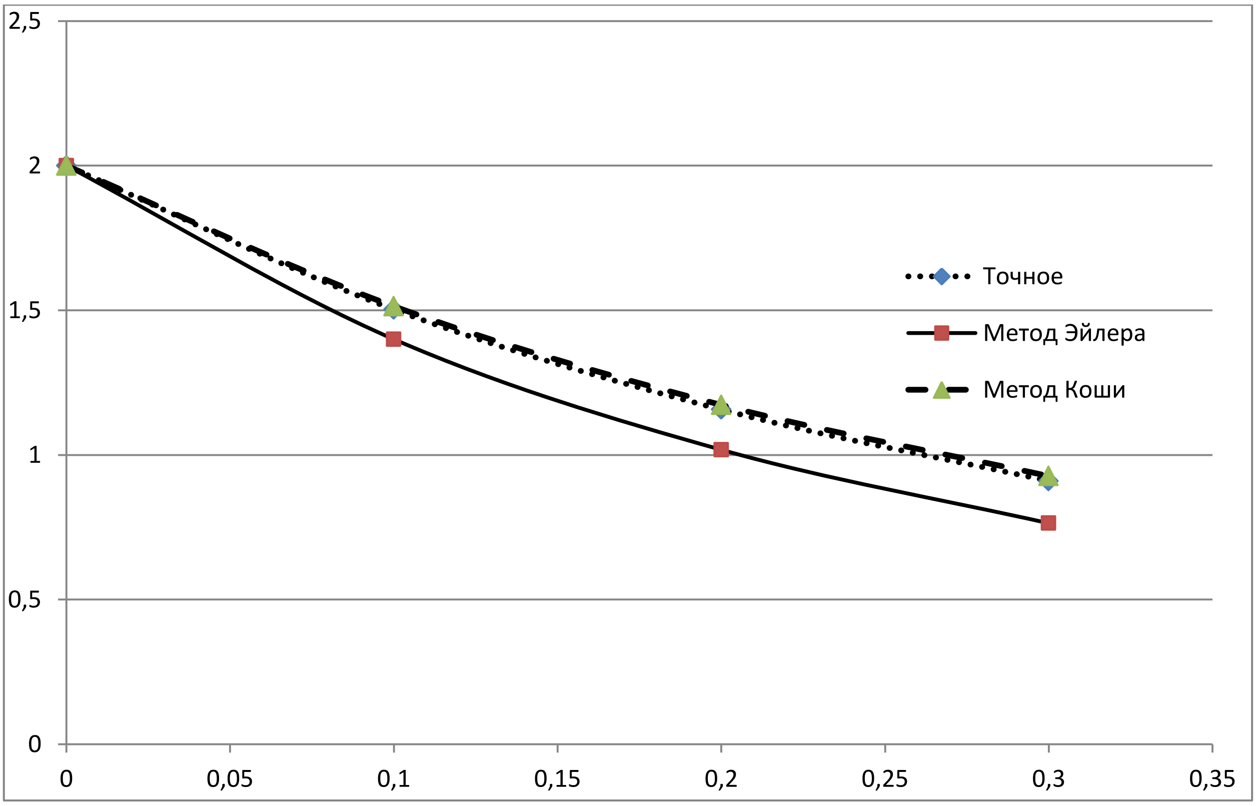
$$y(0{,}3) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} f(x_2, y_2)) =$$

$$= 1{,}1731 + 0{,}1(-\frac{3(1{,}1731 + 0{,}05(-\frac{3 \cdot 1{,}1731}{0{,}2+1}))}{0{,}25+1}) \approx 0.926$$

Чтобы сравнить результаты, занесем их в таблицу.

| $x_i$ | Точное | Метод Эйлера | Метод Коши |
|---|---|---|---|
| 0 | 2,000 | 2,000 | 2,000 |
| 0,1 | 1,503 | 1,400 | 1,514 |
| 0,2 | 1,157 | 1,018 | 1,173 |
| 0,3 | 0,910 | 0,764 | 0,927 |

Соответствующие графики представлены ниже.



## РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

**Тема: численные методы решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

***Постановка задачи.***

Для уравнения $y'' = y + 2\alpha + 2 + \alpha x(1-x), \;\; \alpha = 2 + 0{,}1\mathrm{N}$ на отрезке [0, 1] решить краевую задачу методом стрельбы и методом прогонки .

Результаты представить в виде exe-файла, выполняющего следующее: пользователь задает количество точек разбиения N(10, 20), на экран выводятся графики решений, полученных данными методами, и точное решение (если оно есть). Сравнить, какой метод быстрее сходится, объяснить почему. Описать методы решения (выписать алгоритм метода стрельбы с заданной комбинацией методов решения задач Коши и нелинейного уравнения; выписать формулы для аппроксимации краевых условий в методе прогонки, привести матрицу к диагональному виду, рассмотреть условия диагонального преобладания;)

***Краевые условия:***

а) $y(0)=0$; б) $y'(0)= -\alpha$; в) $y'(0)-y(0)= -\alpha$;

г) $y'(1)=e-\frac{1}{e}+\alpha$; д) $y(1)=e+\frac{1}{e}-2$; е) $y'(1)+y(1)=2e+\alpha-2$.

*Задания.*

| № | Краевые условия | Решение задачи Коши в методе стрельбы | Решение нелинейного уравнения в методе стрельбы | Аппроксимация краевых условий в методе прогонки |
|---|---|---|---|---|
| **1** | а), г) | Метод Эйлера | Метод Ньютона | по двум узлам |
| **2** | а), е) | Метод Эйлера с пересчетом | Метод деления отрезка пополам | по трем узлам |
| **3** | б), г) | Метод Эйлера с пересчетом | Метод Ньютона | фиктивный узел |
| **4** | б), д) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Метод Ньютона | по двум узлам |
| **5** | в), г) | Метод Эйлера | Метод хорд | фиктивный узел |
| **6** | в), д) | Метод Коши | Метод хорд | по двум узлам |
| **7** | в), е) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Метод подвижных хорд | по трем узлам |
| **8** | а), д) | Метод Коши | Метод деления отрезка пополам | фиктивный узел |
| **9** | а), е) | Метод 3 порядка, основанный на разложении в ряд Тейлора | Метод хорд | по двум узлам |
| **10** | б), г) | Метод 3 порядка, основанный на разложении в ряд Тейлора | Метод деления отрезка пополам | по трем узлам |
| **11** | б), д) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Ньютона | фиктивный узел |
| **12** | б), е) | Метод Коши | Метод деления отрезка пополам | по двум узлам |
| **13** | в), г) | Метод Эйлера | Метод подвижных хорд | по трем узлам |
| **14** | в), д) | Метод Коши | Метод Ньютона | фиктивный узел |
| **15** | в), е) | Метод Адамса 3 порядка | Ньютона | по двум узлам |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **16** | а), г) | Метод Коши | Метод хорд | по трем узлам |
| **17** | а), е) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Метод Ньютона | фиктивный узел |
| **18** | б), г) | Метод Адамса 2 порядка | Метод деления отрезка пополам | по двум узлам |
| **19** | б), д) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Ньютона модифицированый. | по трем узлам |
| **20** | б), е) | Метод Коши | Метод деления отрезка пополам | фиктивный узел |
| **21** | в), г) | Метод Эйлера | Метод Ньютона | по двум узлам |
| **22** | в), д) | Метод Коши | Метод Ньютона | |
| **23** | в), е) | Метод Адамса 2 порядка | Метод Ньютона | фиктивный узел |
| **24** | а), г) | Метод Рунге-Кутта 4 порядка | Ньютона | по двум узлам |
| **25** | а), е) | Метод Коши | Метод деления отрезка пополам | по трем узлам |
| **26** | б), г) | Метод Эйлера | Метод Ньютона | фиктивный узел |