Paper-ID: VGI_200504

Vergleich zweier Berechnungsverfahren zur Gauß-Krüger Abbildung breiter Meridianstreifen

Peter Schuhr[1]

[1] *Fachhochschule Frankfurt am Main Fachbereich 1; Nibelungenplatz 1; D-60318 Frankfurt am Main*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **93** (1), S. 45–48

2005

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schuhr_VGI_200504,
Title = {Vergleich zweier Berechnungsverfahren zur Gau{\ss}-Kr{\"u}ger
   Abbildung breiter Meridianstreifen},
Author = {Schuhr, Peter},
Journal = {VGI -- {\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessung und
   Geoinformation},
Pages = {45--48},
Number = {1},
Year = {2005},
Volume = {93}
}
```

Vergleich zweier Berechnungsverfahren zur Gauß-Krüger Abbildung breiter Meridianstreifen

Peter Schuhr, Frankfurt am Main

Zusammenfassung

Mit dem bevorstehenden Übergang von der Gauß-Krüger – zur UTM-Abbildung sind die lediglich für 3° breite Meridianstreifen entwickelten Formeln durch genauere zu ersetzen. Für diesen Zweck werden zwei leistungsfähige Algorithmen zur Hin- und Rücktransformation geographischer Koordinaten in Gauß-Krüger Koordinaten für sehr breite Meridianstreifen miteinander verglichen.

Summary

The paper compares two powerful algorithms that transform geographical coordinates into UTM coordinates and the respective inverse algorithms.

1. Hintergrund

Die deutschen und österreichischen Gauß-Krüger Koordinaten werden künftig durch UTM-Koordinaten ersetzt. Damit ist ein Übergang von 3° auf 6° breite Meridianstreifen verbunden. Beiden Koordinatensystemen liegt das gleiche Abbildungsgesetz zugrunde. Darüber hinaus verwenden sie lediglich unterschiedliche Maßstabsfaktoren und additive Zuschläge. Deshalb wird hier nur die Gauß-Abbildung im engeren Sinne, d. h. die Abhängigkeit des auf den Bezugsmeridian bezogenen Rechtswertes y und des vom Äquator zählenden Hochwertes x von der geographischen Breite B und dem Längenunterschied ΔL ohne Maßstabskorrektur, betrachtet.

Wegen der Verdoppelung des Abstandes vom Bezugsmeridian reichen die für 3° breite Streifen vorgesehenen Reihenentwicklungen und Näherungsformeln zur Berechnung von UTM-Koordinaten nicht mehr aus. Bretterbauer hat deshalb in dieser Zeitschrift vorgeschlagen, anstelle der Näherungsformeln von Hirvonen (BRETTERBAUER 1995) die Formeln von Krüger (BRETTERBAUER 2003) zu verwenden. Seine Berechnungen hat er mit einem Programm von Heindl kontrolliert. Da die Grundlagen des Kontrollprogramms unbekannt sind (BRETTERBAUER 2003), ist naturgemäß nicht völlig auszuschließen, daß Heindl und Bretterbauer die gleichen Formeln benutzt haben. Deshalb ist eine durchgreifende Kontrolle der Berechnungsgenauigkeit sinnvoll.

Dieser Beitrag enthält eine Zusammenstellung der Formeln des extrem genauen Berechnungsverfahrens von Klotz und dessen Nutzung für unabhängige Vergleichsberechnungen.

2. Algorithmus von Klotz

2.1 Gauß-Abbildung

Bei der konformen Gauß-Abbildung $(B, \Delta L) \to (y, x)$ von KLOTZ 1991 und 1993 (vgl. auch SCHUHR 1995) werden zuerst die vom aktuellen Ellipsoid mit den Halbachsen a und b abhängigen Konstanten

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad M0 = a \cdot (1 - e^2) \qquad (1)$$

sowie die Anfangswerte [1])

$$\mathbf{w} = q + i \cdot \Delta L = \qquad (2)$$

$$= \operatorname{arth}(\sin B) - e \cdot \operatorname{arth}(e \cdot \sin B) + i \cdot \Delta L,$$

$$\mathbf{b}_0 = \arcsin(\tanh \mathbf{w}), \qquad (3)$$

$$x_1 = y_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad d_0 = K_0 = 1 \qquad (4)$$

angesetzt. Nach dem Iterationszyklus für $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$d_n = d_{n-1} \cdot \frac{(2 \cdot (n-1) + 1) \cdot (2 \cdot (n-1) + 3)}{(2 \cdot (n-1) + 2)^2} \cdot e^2, \qquad (5)$$

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, \qquad (6)$$

$$K_n = K_{n-1} \cdot \frac{2 \cdot (n-1) + 2}{2 \cdot (n-1) + 3}, \qquad (7)$$

1) Die komplexen Variablen sind fett gedruckt

$$\mathbf{E}_n = \sum_{k=1}^{n} \left(d_k \cdot \sum_{l=0}^{k-1} K_l \cdot \sin^{2l} \mathbf{b}_{n-1} \right), \tag{8}$$

$$\mathbf{b}_n = \arcsin(\tanh(\mathbf{w} + e \cdot arth(e \cdot \sin \mathbf{b}_{n-1}))) \tag{9}$$

und

$$\mathbf{z}_n = M0 \cdot (1 + D_n) \cdot \mathbf{b}_n - \tfrac{M0}{2} \cdot \sin(2\mathbf{b}_n) \cdot \mathbf{E}_n \tag{10}$$

$$= x_n + i \cdot y_n$$

bis $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$ und $|y_n - y_{n-1}| < 10^{-6}$ folgen die gesuchten Resultate zu

$$x = x_n \quad \text{und} \quad y = y_n. \tag{11}$$

2.2 Inverse Gauß-Abbildung

Zur Umkehrung $(y, x) \rightarrow (B, \Delta L)$ werden (KLOTZ 1991 und 1993, vgl. auch SCHUHR 1995) neben den wiederum aus a und b resultierenden Konstanten (1) die Anfangswerte

$$\mathbf{z} = x + i \cdot y, \tag{12}$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{z}}{M0}, \tag{13}$$

$$d_0 = K_0 = 1 \quad \text{und} \quad B_0 = \Delta L_0 = 0 \tag{14}$$

angesetzt. Nach dem Iterationszyklus für $n = 1, 2, 3 \ldots$ mit (5) bis (8) sowie

$$\mathbf{b}_n = \frac{\mathbf{z}}{M0 \cdot (1 + D_n)} + \sin(2\mathbf{b}_{n-1}) \cdot \frac{\mathbf{E}_n}{2 \cdot (1 + D_n)}, \tag{15}$$

$$\mathbf{w}_n = \mathrm{arth}(\sin \mathbf{b}_n) - e \cdot \mathrm{arth}(e \cdot \sin \mathbf{b}_n) \tag{16}$$

$$= q_n + i \cdot \Delta L_n,$$

$$\varphi_0 = q_n, \tag{17}$$

der Iteration

$$\varphi_k = \arcsin(\tanh(q + e \cdot \mathrm{arth}(e \cdot \sin \varphi_{k-1}))) \tag{18}$$

für $k = 1, 2, 3 \ldots$ bis $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| < 10^{-12}$

und

$$B_n = \varphi_k \tag{19}$$

bis $|B_n - B_{n-1}| < 10^{-12}$ und $|\Delta L_n - \Delta L_{n-1}| < 10^{-12}$ folgen die gesuchten Resultate zu

$$B = B_n \quad \text{und} \quad \Delta L = \Delta L_n. \tag{20}$$

2.3 EDV-Programm

In einer problemorientierten Programmiersprache, die über komplexe Bibliotheksfunktionen verfügt, lassen sich kompakte Quellcodefunktionen zur Lösung der originären und inversen Gauß-Abbildung nach 2.1 und 2.2 formulieren. Eine derartige FORTRAN-SUBROUTINE ist in SCHUHR 1995 abgedruckt. Ein auf dem Algorithmus von Klotz basierendes Programm ist auch auf dem vom Verfasser betriebenen Server gauss.fb1.fh-frankfurt.de/ zu benutzen.

3. Berechnungsergebnisse

Für die beiden von BRETTERBAUER 2003 ausgewählten Beispiele

- $B = 48°$ und $\Delta L = 8°$ sowie
- $B = 48°$ und $\Delta L = 50°$

ergeben sich für eine Berechnung nach Klotz und Krüger mit 6 Nachkommastellen die in den Tabellen 1 und 2 abgedruckten Resultate. Die inverse Berechnung mit den Formeln von Klotz führt im Rahmen der Berechnungsgenauigkeit auf die ursprünglichen Ausgangsdaten. Das ist ein deutliches Indiz für die Exaktheit des zugrunde liegenden Berechnungsverfahrens.

Mit den Formeln von Krüger ergeben sich für

- $\Delta L = 8°$ Abweichungen von 0.01 mm für y und x (Tabelle 1, oben) und
- $\Delta L = 50°$ Abweichungen von 0.3 mm in $y-$ und 0.6 mm in $x-$Richtung (Tabelle 2, oben).

Bei der Umkehrung mit den y- und x-Werten der vorherigen Gauß-Abbildung nach Klotz sind die Abweichungen deutlich kleiner. Sie betragen nur bis zu $(1.2 \cdot 10^{-9})°$ (Tabellen 1 und 2, unten). Das entspricht lediglich ca 0.13 mm.

Eine weitere Vergleichsberechnung von Gauß-Abbildungen für $B = 48°$ und $\Delta L = 15°$, 30°, 45°, 60° bzw. 75° führt auf die in der Tabelle 3 abgedruckten Resultate. Die Abweichungen betragen bis zu

- 0.1 mm für $\Delta L = 30°$ und
- 0.5 mm für $\Delta L = 45°$.

Erst darüber hinaus werden mm-Beträge erreicht.

Die Umkehrung mit den Klotz-Ergebnissen y und x ist wieder erheblich genauer (Tabelle 4). Die Differenzen sind alle kleiner als $(3 \cdot 10^{-9})°$ bzw. 0.3 mm.

Abbildung für $B = 48°$ und $\Delta L = 8°$ nach		
Klotz Krüger	$y = 596724.109615$ $y = 596724.109603$ $\Delta = 0.000012$	$x = 5348940.145629$ $x = 5348940.145621$ $\Delta = 0.000008$
Umkehrung mit y und x (Klotz-Resultate) nach		
Klotz Krüger	$B = 48.00000000000°$ $B = 47.99999999882°$ $\Delta = 0.00000000118°$	$\Delta L = 8.00000000001°$ $\Delta L = 8.00000000002°$ $\Delta = -0.00000000001°$

Tab. 1: Beispiel 1 von BRETTERBAUER 2003

Abbildung für $B = 48°$ und $\Delta L = 50°$ nach		
Klotz Krüger	$y = 3617710.791314$ $y = 3617710.791658$ $\Delta = -0.000344$	$x = 6649901.176674$ $x = 6649901.176041$ $\Delta = 0.000633$
Umkehrung mit y und (Klotz-Resultate) nach		
Klotz Krüger	$B = 48.00000000000°$ $B = 47.99999999930°$ $\Delta = 0.00000000070°$	$\Delta L = 50.00000000000°$ $\Delta L = 50.00000000015°$ $\Delta = -0.00000000015°$

Tab. 2: Beispiel 2 von BRETTERBAUER 2003

ΔL	nach Klotz	nach Krüger	Differenz
15°	$y = 1117784.1134$ $x = 5427815.7486$	$y = 1117784.1134$ $x = 5427815.7486$	0.0000 0.0000
30°	$y = 2223268.3647$ $x = 5770052.2140$	$y = 2223268.3647$ $x = 5770052.2139$	0.0000 0.0001
45°	$y = 3284859.7509$ $x = 6379494.9561$	$y = 3284859.7510$ $x = 6379494.9556$	−0.0001 0.0005
60°	$y = 4227161.0673$ $x = 7299651.6103$	$y = 4227161.0688$ $x = 7299651.6099$	−0.0015 0.0004
75°	$y = 4911361.6871$ $x = 8539469.0217$	$y = 4911361.6881$ $x = 8539469.0253$	−0.0010 −0.0036

Tab. 3: Gauß-Abbildungen für $B = 48°$

ΔL	nach Klotz	nach Krüger	Differenz
15°	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 15.000000000°$	$B = 47.999999999°$ $\Delta L = 15.000000000°$	0.000000001° 0.000000000°
30°	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 30.000000000°$	$B = 47.999999999°$ $\Delta L = 30.000000000°$	0.000000001° 0.000000000°
45°	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 45.000000000°$	$B = 47.999999999°$ $\Delta L = 45.000000000°$	0.000000001° 0.000000000°
60°	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 60.000000000°$	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 59.999999999°$	0.000000000° 0.000000001°
75°	$B = 48.000000000°$ $\Delta L = 75.000000000°$	$B = 47.999999999°$ $\Delta L = 74.999999997°$	0.000000001° 0.000000003°

Tab. 4: Inverse Gauß-Abbildungen mit y und x nach Klotz aus Tabelle 3

4. Ausblick

Die durchgeführten unabhängigen Vergleichsberechnungen belegen die hohe Leistungsfähigkeit der in BRETTERBAUER 2003 abgedruckten Formeln von Krüger. Die Berechnungsgenauigkeit beträgt immerhin 0.01 mm für 16° breite Meridianstreifen mit $-8^\circ \leq \Delta L \leq +8^\circ$. Für praktische Anwendungen zur UTM-Abbildung mit 6° breiten Meridianstreifen gilt $-3^\circ \leq \Delta L \leq +3^\circ$, und die Abweichungen vom Sollwert sind noch viel geringer.

Literaturverzeichnis

Bretterbauer, K.: Die Gauß-Krüger Abbildung einfach dargestellt. Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation 83(1995)3,146...150.

Bretterbauer, K.: Gebrauchsformeln für die UTM-Projektion nach Krüger. Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation 91(2003)3,163...165.

Bronstein, I. N. und *Semendjajew, K. A.*: Taschenbuch der Mathematik. Harri Deutsch Verlag, Zürich und Frankfurt(M), 6. Auflage (1966).

Klotz, J.: Eine analytische Lösung kanonischer Gleichungen der geodätischen Linie zur Transformation ellipsoidischer Flächenkoordinaten. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 385 (1991).

Klotz, J.: Eine analytische Lösung der Gauß-Krüger-Abbildung. Zeitschrift für Verämesäsungsäweäsen 118(1993)3,106...116.

Mittermayer, E.: Die numerischen Werte der Besselschen Erdkonstanten. Zeitäschrift für Vermessungswesen 89(1964)12,469...470.

Schuhr, P.: Transformationen zwischen ellipsoidischen geographischen Koordinaten und konformen Gauß-Krüger – bzw. UTM-Koordinaten. FORUM – Zeitschrift des Bundes der öffentlich bestellten Vermessungsingenieure 21(1995)4,258...264.

Anschrift des Autors

Prof. Dr.-Ing. Peter Schuhr, Fachhochschule Frankfurt am Main Fachbereich 1; Nibelungenplatz 1; D-60318 Frankfurt am Main; Email: schuhr@fb1.fh-frankfurt.de

vgi

Recht und Gesetz

Zusammengestellt und bearbeitet von
Univ.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.jur. Christoph Twaroch

Berichtigung des Grenzkatasters; §§ 8 und 13 VermG

Beim Grenzverlauf handelt es sich um eine Tatsache und bei den gemäß § 39 VermG zu bescheinigenden Plänen um ein Beweismittel über die Tatsache des Grenzverlaufes. Der gemäß § 39 VermG bescheinigte Plan ist wiederum Grundlage für die Eintragung der Grenze im Grenzkataster, die gemäß § 8 Z 1 VermG den verbindlichen Nachweis der Grenzen des Grundstückes darstellt.

Für den Grenzverlauf ist im Falle der Eintragung in den Grenzkataster bis zu der Anmerkung der Einleitung eines Berichtigungsverfahrens diese Eintragung des Grenzverlaufes maßgeblich und verbindlich. Dieser durch den Grenzkataster fixierte Grenzverlauf ist im Bauverfahren ein Sachverhaltselement, bei dessen späterer Änderung eine neue Tatsache gegeben ist.

Ein neues Beweismittel über den Grenzverlauf liegt immer erst dann vor, wenn eine Berichtigung des Grenzkatasters gemäß § 13 VermG durchgeführt wurde; die Berichtigung wirkt auch nicht zurück.

(VwGH, 11.Juli 2003, GZ 2001/06/0011)

Sachverhalt:

In einem rechtskräftig abgeschlossenen Baubewilligungsverfahren wurde von den Nachbarn (im Weiteren: BF) ein ua auf § 69 Abs.1 Z 2 AVG (Vorliegen neuer Tatsachen) und § 69 Abs.1 Z 3 AVG (unrichtige Beurteilung einer Vorfrage) gestützter Wiederaufnahmeantrag gestellt und begründend ausgeführt, ein dem Bauverfahren zugrunde gelegter Plan sei unrichtig gewesen. Aus dem Vermessungsakt ergibt sich, dass in der Vermessungsurkunde, die der Eintragung in den Grenzkataster für das verfahrensgegenständliche Baugrundstück zu Grunde gelegen ist, für die Koordinaten des Punktes 46 ME irrtümlich die Koordinaten des aus der Geländeaufnahme stammenden Punktes 46 OKT (Oberkante Terrasse) verwendet worden seien. Weiters sei hervorgekommen, dass für die Berechnung der neuen Teilungslinie 46 ME nach 51 ER irrtümlich nicht die Koordinaten des Mauereckes 31, sondern die Koordinaten des Punktes 34 (Spannvorrichtung für Zaun, Mauermitte) verwendet worden seien. In der Folge hätten sich falsche Koordinaten für die berechneten Schnittpunkte 50, 302 ER und 51 ER ergeben.

Aus der Begründung des VwGH:

Zur Rüge der BF, es sei von der belangten Behörde nicht festgestellt worden, ob eine Tatsache oder ein Beweismittel über eine Tatsache vorliege, ist festzustellen, dass es sich beim Grenzverlauf um eine Tatsache und bei den gemäß § 39 VermG zu bescheinigenden Plänen um ein Beweismittel über die Tatsache des Grenzverlaufes handelt. Der gemäß § 39 VermG bescheinigte Plan ist wiederum Grundlage für die Eintragung der Grenze im Grenzkataster, die gemäß § 8 Z 1 VermG den verbindlichen Nachweis der Grenzen des Grundstükkes darstellt. Steht jedoch die Neuanlegung des Grenzkatasters und eine in diesem enthaltene Einverleibung oder Anmerkung mit ihrer Grundlage nicht im Einklang oder ist sie fehlerhaft, so ist gemäß § 13 Abs. 1