

**Gauß-Krüger**

—

**Von Mercator über die komplexe  
Meridianbogenlänge**

**von**

**Rolf Quaiser**

erstellt von:

Sebastian Besch

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Geschichte der Gauß'schen Abbildung . . . . .	3
2.2	Theorie der Gauß'schen Abbildung . . . . .	3
2.3	Hauptschritte zur Gauß'schen Abbildung . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Konzeption</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Umsetzung</b>	<b>9</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>12</b>

# 1 Einleitung

Hier soll eine verständlichen Methode zur Berechnung der Gauß-Krüger-Abbildung<sup>1</sup> vorgestellt werden, die einerseits einen Einblick in die Theorie dieser Abbildung ermöglicht und andererseits erlaubt den Formelapparat bis zu einer beliebigen Genauigkeit und damit auch Streifenbreite selbst zu entwickeln.

Zur Anfertigung dieses Artikel wurden verschiedene Quellen konsultiert. Zum einen KLOTZ (1993), zum anderen SEIDEL (2006) und GLASMACHER (1987)

Der Kern der Lösung nach KLOTZ (1993) ist die Verwendung komplexer Arithmetik für die Berechnung der Gauß- Krüger-Abbildung. Die seit Gauß und Schreiber verwendete klassische Methode auf der Grundlage einer Taylorreihe kann im Prinzip auch als eine komplexe Lösung betrachtet werden. Die Glieder der Taylorreihe mit geradem Exponenten sind dem reellen Teil zuzuordnen und die mit ungeradem Exponenten stellen den imaginären Teil dar. Der komplexe Charakter dieser Taylorreihe wird aber nicht direkt sichtbar und dies war auch gewollt. Eine direkte Verwendung komplexer Arithmetik wäre im Vor-Computerzeitalter viel zu aufwendig gewesen. Heute kann man diese dem Computer überlassen und dann genauso "einfach" wie mit reellen Zahlen rechnen, was zu einer sehr nachvollziehbaren Lösung führt.

Die Entwicklung einer solchen Taylorreihe ist mit großem Aufwand verbunden<sup>2</sup>. Die Koeffizienten der Taylorreihe werden deshalb meist der Literatur entnommen. Die Nachteile dabei sind:

- es gibt Unterschiede zwischen den Autoren
- Druckfehler oder Fehler des Autors sind nicht ausgeschlossen
- die eigentliche Autorenschaft ist unklar
- Die Genauigkeit einer Taylorreihe lässt sich schwer einschätzen
- Die Streifenbreite ist meist auf 3 bzw. 6 Grad begrenzt, was besonders in höheren Breiten ungünstig ist

---

<sup>1</sup>Koordinaten-Transformationen durch mathematische Funktionen werden auch als Abbildungen bezeichnet. Der Abbildungsbegriff schließt außerdem die gegenseitige Zuordnung von Koordinatensystemen auf verschiedenen Bezugsflächen ein. In Verbindung mit einem ebenen kartesischen System erzeugen die Gaußschen Koordinaten eine konforme Abbildung des Ellipsoids (GLASMACHER, 1987).

<sup>2</sup>Der Gültigkeitsbereich und die Genauigkeit der Taylorreihe hängen dabei von der Konvergenz der Reihe und der Anzahl und Genauigkeit der Koeffizienten ab. Die Bestimmung der Koeffizienten ist jedoch relativ aufwendig, da der gegebenen DQU (Differentialquotient) zur Berechnung der Koeffizienten wiederholt differenziert werden muss. Die höheren Ableitungen werden oft sehr kompliziert, wodurch ein großer Aufwand sowohl bei der analytischen Ableitung als auch bei der numerischen Berechnung der Koeffizienten entsteht. Um die Koeffizienten möglichst einfach formulieren zu können, müssen außerdem durch Restglied- und Genauigkeitsabschätzungen meistens gezielt zusätzliche Vernachlässigungen eingeführt werden (GLASMACHER, 1987).

Der Entwicklungspunkt der Taylorreihe wird mit der Breite des zu berechnenden Punktes auf den Hauptmeridian gelegt, durch diesen „Trick“ sind die Breitenunterschiede zwischen diesen beiden Punkten gleich Null. Die isometrische Breite bzw. Mercatorbreite tritt dadurch nicht in Erscheinung, man gewinnt den Eindruck, es würde eine direkte Berechnung der Gauß-Krüger-Koordinaten aus den geographischen Koordinaten erfolgen. Neben der Taylorreihe muss bei dieser Methode aber noch die Meridianbogenlänge vom Koordinatenursprung bis zum Entwicklungspunkt berechnet werden. Die Taylorreihe bildet das Ellipsoid also nicht „im Ganzen“ ab. Die Entwicklung der Taylorreihe mit dem Computer ist grundsätzlich möglich aber alles andere als trivial.

### Noch einige Hinweise:

- in dieser Abhandlung wird die in der Geodäsie übliche Achsenbezeichnung für die kartesischen Koordinatensysteme verwendet. Normalerweise zeigt die x-Achse (Abszisse) nach rechts und die y-Achse (Ordinate) ergibt sich durch drehen um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn, diese zeigt dann nach oben (rechtshändige Koordinatensysteme). In der Geodäsie werden meist linkshändige Koordinatensysteme eingesetzt. Die x-Achse (Abszisse) zeigt hier nach oben und die y-Achse (Ordinate) ergibt sich durch drehen um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn, diese zeigt dann nach rechts.
- in der Gauß'schen Zahlenebene, einer geometrischen Darstellung komplexer Zahlen, ist es normalerweise üblich die horizontale Achse dem Realteil  $\Re$  und die vertikale Achse dem Imaginärteil  $\Im$  zuzuordnen. Dies wird sinnvoller Weise ebenfalls an die in der Geodäsie gängige Praxis angeglichen,
- falls das verwendete Computeralgebrasystem oder Programmiersprache nicht oder nur teilweise im Komplexen rechnen kann, können die erforderlichen komplexen Funktionen auch selbst programmiert werden,
- der Unterschied zwischen der UTM-Projektion und der Gauß-Krüger-Abbildung liegt im Maßstabsfaktor des Hauptmeridians  $m_0$  und in der größeren Streifenbreite, letzteres führte bisher dazu, dass die Taylorreihe bei UTM weiter als bei Gauß-Krüger entwickelt werden musste,
- die Gauß-Krüger-Abbildung und die UTM-Projektion sind, anders als häufig der Eindruck vermittelt wird, an kein bestimmtes Ellipsoid oder Datum gebunden,
- für die näherungsweise Lösung der geodätischen Hauptaufgaben in der Ebene ist es am günstigsten, wenn der Hauptmeridian in die Mitte der Punktmeridiane gelegt wird.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Geschichte der Gauß'schen Abbildung

Die Gauß-Krüger-Abbildung geht auf Carl Friedrich Gauß zurück, der sie für seine Berechnung des Hannoverschen Dreiecksnetzes entwickelte. Gauß hat die dafür verwendeten Berechnungsmethoden aber nie in einer zusammenhängenden Darstellung veröffentlicht. Nach dem Tod von Gauß 1855, erfolgte 1866 durch Oskar Schreiber, dem späteren Chef der preußischen Landesaufnahme, quasi eine Neuentwicklung dieser Abbildung auf der Grundlage des Gauß'schen Nachlasses (SCHREIBER, 1866). Louis Krüger sichtete für seine Arbeit an der Gauß Werkausgabe diesen Nachlass nochmals, was ihn dazu anregte sich ebenfalls mit dieser Abbildung zu befassen und den Formelapparat weiterzuentwickeln (KRÜGER, 1912). Daraufhin wurde die Gauß'sche Abbildung der hannoverschen Landesvermessung als Gauß-Krüger-Abbildung bekannt. Gustav Baumgart schlug 1919 die Einführung der Meridianstreifen vor (BAUMGART, 1919), die heute hauptsächlich mit der Gauß-Krüger-Abbildung bzw. deren Derivat der UTM-Abbildung verbunden werden.

### 2.2 Theorie der Gauß'schen Abbildung

In der tatsächlich ersten zusammenhängenden Darstellung der Berechnungsmethoden der Gauß'schen Abbildung benennt SCHREIBER (1866) drei Bedingungen, die der Projektion der Hannoverschen Landesvermessung zugrunde liegen:

- die Projektion soll konform sein,
- die x-Achse soll den Hauptmeridian darstellen und zwar derart, dass jeder auf ihr genommene Abschnitt dem elliptischen Bogen, dessen Bild er ist, an Länge gleich ist,
- der Anfangspunkt der x und y soll dem Punkte des Hauptmeridians von der Breite  $\varphi_0$  entsprechen

Eine in der Abhandlung von SCHREIBER (1866) gegebene Gleichung, die auf Gauß zurückgeht, bildet die Grundlage für die nachfolgende Betrachtung. Diese Gleichung ist eigentlich die Hauptgleichung der Gauß'schen Abbildung:

$$(x + y \cdot i) = f(q + L \cdot i). \quad (1)$$

$x, y$  : Koordinaten

$q$  : isometrische Breite oder Mercator-Breite

Wie an der imaginäre Einheit „i“ zu erkennen ist, handelt es sich hier um eine Gleichung mit komplexen Zahlen. Die Verwendung komplexer Zahlen bei der Gauß'schen Abbildung ist also keine Neuigkeit, sondern deren Grundlage und geht auf Gauß zurück. Die Funktion  $f$  kann willkürlich gewählt werden, wird aber hier durch die Bedingung festgelegt, dass der Hauptmeridian längentreu abgebildet werden soll. Dafür wird die Funktion der Meridianbogenlänge verwendet, die sich aus einem elliptischen Integral ergibt.

## 2.3 Hauptschritte zur Gauß'schen Abbildung

Zwei geniale Eigentümlichkeiten der komplexen Arithmetik ermöglichen eine sehr elegante Lösung, bei Gauß eigentlich auch nicht anders zu erwarten:

- ein Punkt in einer Ebene kann durch zwei reelle Zahlen identifiziert werden. Vorteilhafter ist es die zwei reellen Zahlen zu einer komplexen Zahl zusammenzufassen, mit der dann der Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene identifiziert wird. Eine Funktion mit nur einem reellen Argument kann dann im Komplexen die ursprünglich zwei reellen Argumente abbilden.
- das Folgende kann man als Axiom auffassen. Für den, der sich damit nicht zufrieden gibt und auf einen Beweis nicht verzichten will, sei auf die Funktionentheorie in der einschlägigen Literatur verwiesen. Einer beliebigen konformen Abbildung des Ellipsoides in die Ebene kann im Komplexen mit Hilfe einer stetig differenzierbaren Funktion eine weitere willkürliche Eigenschaft aufgezwungen werden. Das Ergebnis ist dann automatisch wieder eine konforme Abbildung in die Ebene. Diese Abbildung einer Ebene in eine andere Ebene im Komplexen kann je nach Anzahl der geforderten Eigenschaften auch mehrmals erfolgen.

Die Gauß'sche Abbildung setzt sich nun aus folgenden Abbildungen zusammen:

- **konforme Abbildung des Ellipsoides in die Mercator-Ebene:**  
Dazu wird bei der Gauß'schen Abbildung die normalachsige Mercator-Abbildung<sup>3</sup> verwendet, deren Koordinaten werden im Bogenmaß<sup>4</sup> belassen. Für die weitere Berechnung werden die Koordinaten zur komplexen Mercator-Variablen  $w = q + L \cdot i$  zusammengefasst.
- **im Komplexen die konforme Abbildung der Mercator-Ebene in die Ebene der komplexen Breite (auch verallgemeinerte querachsige Mercator-Ebene):**  
Deren wesentliche Eigenschaft ist, dass die komplexe Breite auf dem Hauptmeridian in die geographische Breite übergeht und damit das Argument für die in der

nachfolgenden Abbildung verwendete Funktion zur Berechnung der Meridianbogenlänge liefert.

- **im Komplexen die konforme Abbildung der Ebene der komplexen Breite in die Gauß-Ebene (auch komplexer Meridianbogen):**

Deren wesentliche Eigenschaft ist die längentreue Abbildung des Hauptmeridians.

#### **Vorteile der hier beschriebenen Lösung:**

- die Lösung ermöglicht ein tieferes Verständnis für das Prinzip der Gauß'schen Abbildung;
- die erzielbare Genauigkeit ist nur von der verwendeten Software abhängig;
- durch die hohe Genauigkeit kann die Lösung zur „Eichung“ einer Taylorreihe, also zur Überprüfung ihrer Genauigkeit abhängig von der Streifenbreite verwendet werden;
- es kann problemlos in allen Quadranten bis zu einer Breite von 89,999 Grad und einer Streifenbreite von 160 Grad gerechnet werden, teilweise auch darüber hinaus;
- die Möglichkeit in höheren Breiten auch Streifenbreiten größer 6 Grad zu verwenden, ist der Grund für das besondere Interesse an solchen Lösungen z.B. in Kanada, Dänemark (Grönland) oder Finnland;
- bei der Verwendung von Programmiersprachen oder Computeralgebrasystemen die mit komplexen Zahlen rechnen können, ist der Programmieraufwand kaum größer als bei der klassischen Lösung mit der Taylorreihe. Ist dies nicht der Fall mag die klassische Lösung noch Ihre Berechtigung haben.

---

<sup>3</sup>Dazu kurz das Prinzip der Mercator-Abbildung: Auf dem Ellipsoid bilden die Linien des geographischen Gitters Rechtecke (eigentlich Trapeze, die im Kleinsten zu ebenen Rechtecken werden), die am Äquator so gut wie quadratisch, in Richtung der Pole bei fast gleichbleibender Höhe immer schmaler werden. Bei der Mercator-Abbildung werden die Gitterlinien geradlinig und rechtwinklig in der Ebene dargestellt. Um wieder zu den gleichen Seitenverhältnissen der Rechtecke (Bedingung für Winkeltreue) wie auf dem Ellipsoid zu kommen, bleibt nur die Möglichkeit die Abstände der Abbildungen der Breitenkreise entsprechend zu vergrößern. Die dazu erforderlichen Abstände der Breitenkreise ergeben sich aus der Mercatorfunktion.

<sup>4</sup>Durch Multiplikation der Mercator-Breite und der Länge mit der großen Halbachse  $a$  ergeben sich die metrischen Koordinaten der Mercator-Abbildung, der Äquator wird längentreu. Es kann aber auch der Radius eines anderen Breitenkreises verwendet werden dieser und sein Pendant auf der anderen Halbkugel werden dann längentreu abgebildet.

### 3 Konzeption

Nachfolgend wird die konkrete Berechnung der GK-Abbildung mittels komplexen Zahlen gezeigt. Es werden die dabei erforderlichen numerische Näherungsverfahren vorgestellt, dabei wird auf die numerischen Integration genauer eingegangen. Zunächst wird der intuitiv leichtere Weg vom Ellipsoid zur Gauß-Ebene gezeigt, danach der inverse Weg.

Gegeben sind die ellipsoidischen Koordinaten Breite  $B$  und Länge  $L$ . Die Breite  $B$  wird nun mittels der Mercatorfunktion (siehe Anhang) in die Mercator-Breite  $q$  überführt. Die Länge  $L$  bleibt unangetastet. Nach KLOTZ (1993) lassen sich diese beiden Koordinaten in einem komplexen Ausdruck überführen:  $w = q + L \cdot i$  (Mercator-Variable).

Diese komplexe Mercator-Variable wird mittels der inversen Mercatorabbildung (siehe Anhang) in die komplexe Breite  $b$  überführt, die dann das Argument für die nachfolgende Berechnung der einheitlichen Gaußvariablen  $z$  mit Hilfe der Funktion der Meridianbogenlänge bildet. Die Funktion der Meridianbogenlänge ergibt sich hier aus dem Integral über den von der komplexen Breite  $b$  abhängigen Meridiankrümmungsradius. Dieses Integral ist ein elliptisches Integral. Für dessen Berechnung gibt es verschiedene Möglichkeiten, z.B. mittels der Simpson-Regel oder durch trigonometrische Reihen (Wallis Integrale). Formeln sind im Anhang gegeben.

Wird die komplexe einheitliche Gauß-Variable  $z$  mit dem Meridiankrümmungsradius am Äquator multipliziert, ergibt sich die komplexe metrische Gauß-Variable  $g$ .

Die komplexe metrische Gauß-Variable  $g$  beinhaltet schon die Koordinaten. Der Realteil  $\Re$  ist die X-Koordinate und der Imaginärteil  $\Im$  ist die Y-Koordinate.

In Abbildung 1 ist ein Entwurf des Berechnungsprozesses veranschaulicht. In Abbildung 2 wird schematisch der inverse Vorgang von der komplexen Gauß-Abbildung zum Ellipsoid gezeigt.



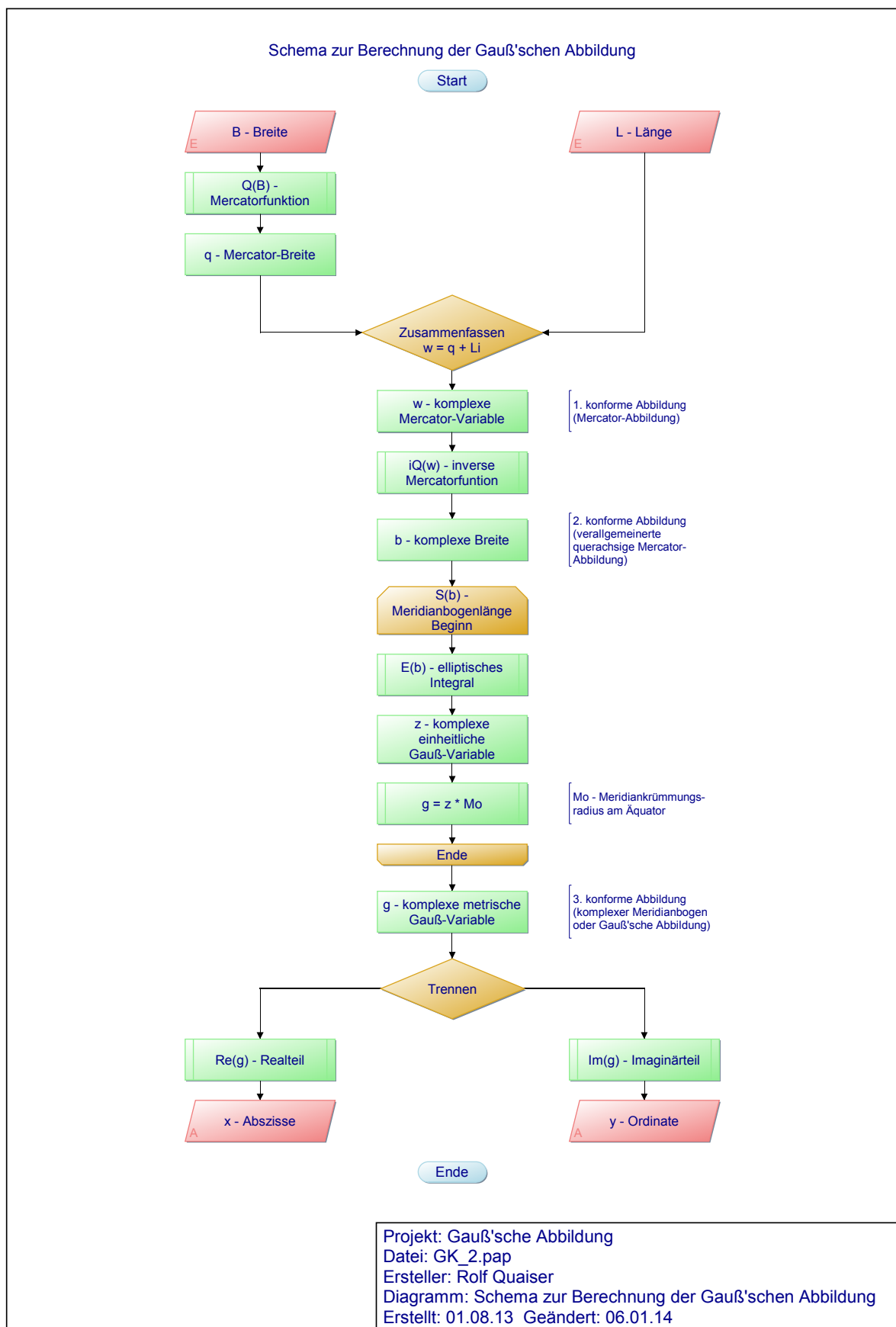


Abbildung 1: Berechnung der komplexen GK-Abbildung.

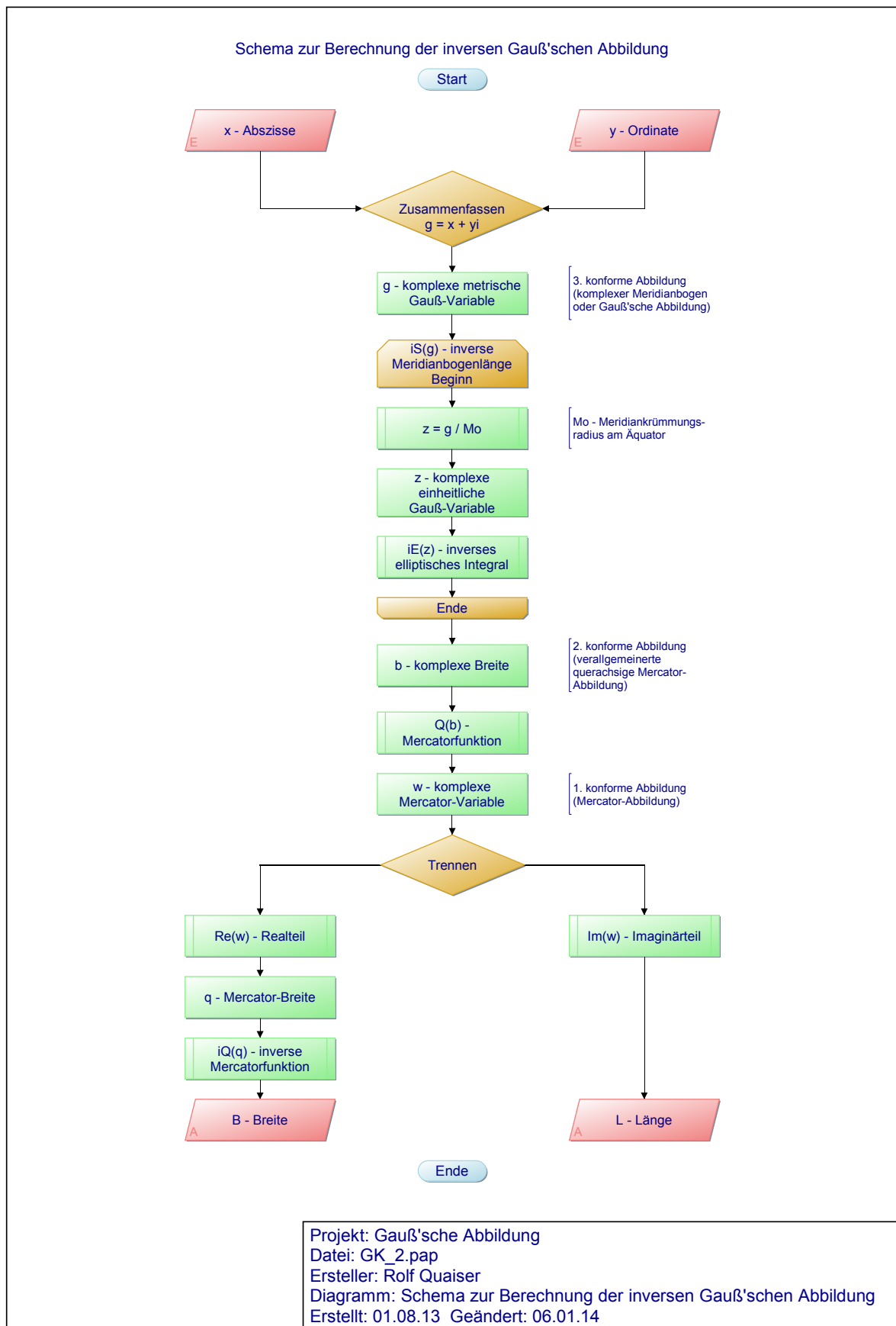


Abbildung 2: Berechnung der inversen komplexen GK-Abbildung.

## 4 Umsetzung

Nachfolgend soll Schritt für Schritt die Konzeption des Berechnungsprozesses nachvollzogen werden. Im Anhang findet sich die Umsetzung mittels MathCADs.

### Gauß'sche Abbildung vom Ellipsoid auf die Ebene

Testkoordinaten nach Klotz (auch von Dorrer und Staufbergen verwendet)

Breite  $B := 52 \text{ Grad}$

Länge  $L := 30 \text{ Grad}$

Maßstabsfaktor Hauptmeridian: UTM  $m_0 := 0.9996$

GK  $m_0 := 1$

Breite des Nullpunktes (GK und UTM = 0 Grad)  $B_0 := 0 \text{ Grad}$

Meridianbogenlänge des Nullpunktes

$$x_0 := E_S(B_0)_{1,1} \cdot M_0 \cdot m_0 \quad x_0 = 0$$

#### 1. Mercator Breite

$$q := Q(B) \quad q = 60.7826164063265 \text{ Grad}$$

#### 2. Komplexe Mercator-Variable

$$w := q + L \cdot i \quad w = 60.7826164063265 + 30i \text{ Grad}$$

#### 3. Komplexe Breite

$$b := iQ(w) \quad b = 55.9549186493 + 18.2612589048i \text{ Grad}$$

#### 4. Komplexe einheitliche Gauß-Variable

Simpsonregel (S - Anzahl der Stützstellen)

$$I(0, b) = \begin{matrix} \text{"S"} & \text{"Z"} \\ 4097 & 0.978694866653521 + 0.320979580515361i \\ z_N := I(0, b)_{1,1} & z_N = 56.0750852903656 + 18.3907752734098i \text{ Grad} \end{matrix}$$

Lösung nach Klotz (p - Ordnung von eq<sub>1</sub>)

$$E_K(b) = \begin{matrix} \text{"p"} & \text{"z"} \\ 8 & 0.978694866653521 + 0.320979580515361i \\ z_K := E_K(b)_{1,1} & z_K = 56.0750852903656 + 18.3907752734098i \text{ Grad} \end{matrix}$$

Lösung nach Staufbergen (p - Ordnung von eq<sub>1</sub>)

$$E_S(b) = \begin{matrix} \text{"p"} & \text{"z"} \\ 7 & 0.978694866653521 + 0.320979580515361i \\ z_S := E_S(b)_{1,1} & z_S = 56.0750852903656 + 18.3907752734098i \text{ Grad} \end{matrix}$$

#### 5. Komplexe metrische Gauß-Variable

Simpsonregel

$$g := z_N \cdot M_0 \cdot m_0 \quad g = 6200529.35513597 + 2033568.76509429i$$

Lösung nach Klotz

$$g := z_K \cdot M_0 \cdot m_0 \quad g = 6200529.35513597 + 2033568.76509429i$$

Lösung nach Staufbergen

$$g := z_S \cdot M_0 \cdot m_0 \quad g = 6200529.35513597 + 2033568.76509429i$$

Alle drei Varianten führen hier zum gleichen Ergebnis.

## 6. Gauß-Koordinaten

$$x := \operatorname{Re}(g) - x_0$$

$$x = 6200529.35513597$$

$$6200529.35513598$$

[Dorner 1999]

$$y := \operatorname{Im}(g)$$

$$y = 2033568.76509429$$

$$2033568.76509429$$

[Dorner 1999]

## 7. Meridiankonvergenz

$$c := C(b, B)$$

$$c = 24.469356395842 \text{ Grad}$$

$$24.469356395842$$

[Stuifbergen 2009]

## 8. Maßstabsfaktor

$$m := MF(b, B) m_0$$

$$m = 1.0511296998468$$

$$1.0511296998133$$

[Stuifbergen 2009]

**Gauß'sche Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid**

## 1. Komplexe metrische Gauß-Variable

$$g := (x + x_0) + y i$$

$$g = 6200529.35513597 + 2033568.76509429i$$

## 2. Komplexe einheitliche Gauß-Variable

$$z := \frac{g}{M_0 m_0}$$

$$z = 56.0750852903656 + 18.3907752734098i \text{ Grad}$$

## 3. Komplexe Breite

Lösung mit Simpsonregel und Newton-Raphson-Verfahren (n - Schleifendurchläufe)

$$iI(z) = \frac{1}{3} \left( \begin{matrix} "n" & "b" \\ 0.976597563116054 & + 0.318719093447726i \end{matrix} \right)$$

$$b := iI(z)_{1,1}$$

$$b = 55.9549186493109 + 18.2612589047904i \text{ Grad}$$

Lösung nach Stuifbergen und Newton-Raphson-Verfahren (n - Schleifendurchläufe)

$$iE_S(z) = \frac{1}{3} \left( \begin{matrix} "n" & "b" \\ 0.976597563116054 & + 0.318719093447726i \end{matrix} \right)$$

$$b := iE_S(z)_{1,1}$$

$$b = 55.9549186493109 + 18.2612589047904i \text{ Grad}$$

## 4. Komplexe Mercator-Variable

$$w := Q(b)$$

$$w = 60.7826164063265 + 30i \text{ Grad}$$

## 5. Mercator Breite

$$q := \operatorname{Re}(w)$$

$$q = 60.7826164063265 \text{ Grad}$$

## 6. geographische Koordinaten

$$B := iQ(q)$$

$$B = 52.0000000000000 \text{ Grad}$$

$$L := \operatorname{Im}(w)$$

$$L = 30.0000000000000 \text{ Grad}$$

## 7. Meridiankonvergenz

$$c := C(b, B)$$

$$c = 24.469356395842 \text{ Grad}$$

## 8. Maßstabsfaktor

$$m := MF(b, B) m_0$$

$$m = 1.0511296998468$$

---

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 1	Berechnung der komplexen GK-Abbildung . . . . .	7
Abb. 2	Berechnung der inversen komplexen GK-Abbildung . . . . .	8

## Literatur

- BAUMGART, GUSTAV (1919). *Die Bezifferung des Mildegitternetzes in Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Koordinatenwerten*. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 187–192.
- GLASMACHER, HANS (1987). *Die Gaußsche ellipsoide Abbildung mit komplexer Arithmetik und numerischen Näherungsverfahren*. Technischer Bericht Heft 29, Universität der Bundeswehr München.
- KLOTZ, JÜRGEN (1993). *Eine analytische Lösung der Gauß-Krüger-Abbildung*. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 106–116.
- KRÜGER, LOUIS (1912). *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*. Artikel. Verfügbar unter <http://bib.gfz-potsdam.de/pub/digi/krueger2.pdf>, besucht am 22.11.2014.
- SCHREIBER, OSKAR (1866). *Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung*. Artikel. Verfügbar unter <http://reader.digitale-sammlungen.de/resolve/display/bsb10054065.html>, besucht am 22.11.2014.
- SEIDEL, HENDRIK (2006). *Die Mathematik der Gauß-Krüger-Abbildung*. Artikel. Verfügbar unter <http://henrik-seidel.gmxhome.de/gausskrueger.pdf>, besucht am 26.11.2014.

---

## A Anhang

# A1 Praktische Berechnung der Gauß-Koordinaten mit dem Computeralgebrasystem Mathcad

## Ellipsoid Parameter (Beispiel Hayford)

große Halbachse	Abplattung
$a := 6378388$	$f := \frac{1}{297}$

Quadrat der 1. numerische Exzentrizität	1. numerische Exzentrizität	Meridiankrümmungsradius am Äquator
$eq_1 := 2 \cdot f - f^2$	$e_1 := \sqrt{eq_1}$	$M_0 := a \cdot (1 - eq_1)$

## Funktionsdefinitionen (auch als Unterprogramme)

**Hilfsfunktion** (Die Länge des Lotes vom Mittelpunkt der Ellipse auf die Tangente in der Breite B ist das Produkt aus W(B) und der großen Halbachse a.)

$$W(B) := \sqrt{1 - eq_1 \cdot \sin(B)^2}$$

<b>Meridiankrümmungsradius</b>	<b>Querkrümmungsradius</b>	<b>Parallel- oder Breitenkreisradius</b>
$M(B) := \frac{M_0}{W(B)^3}$	$N(B) := \frac{a}{W(B)}$	$P(B) := \cos(B) \cdot N(B)$

## Differentialquotient der Mercator-Abbildung

$Q'(B) := \frac{M(B)}{P(B)}$	$Q'(B) := \frac{1 - eq_1}{\cos(B) \cdot W(B)^2}$
------------------------------	--

## Mercatorfunktion

$Q(B) := \int_0^B Q'(B) \, dB$	$Q(B) := \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \cdot \frac{1 - e_1 \cdot \sin(B)}{1 + e_1 \cdot \sin(B)} \cdot \frac{e_1}{2}$
--------------------------------	---

## Inverse Mercatorfunktion

Die inverse Mercatorfunktion ist nicht direkt, sondern nur iterativ lösbar.

$$iQ(q) := \left| \begin{array}{l} b_m \leftarrow 0 \\ b \leftarrow q \\ Tol \leftarrow 10^{-16} \\ \text{while } |Re(b_m) - Re(b)| > Tol \vee |Im(b_m) - Im(b)| > Tol \\ \quad \left| \begin{array}{l} b_m \leftarrow b \\ b \leftarrow 2 \cdot \operatorname{atan} \left( e^q \cdot \frac{1 - e_1 \cdot \sin(b)}{1 + e_1 \cdot \sin(b)} - \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

---

### Meridianbogenlänge

Die Meridianbogenlänge ergibt sich aus dem Integral über den breitenabhängigen Meridiankrümmungsradius.

Meridianbogenlänge vom Äquator bis zur Breite - B

$$S(B) = \int_0^B M(B) \, dB$$

$$S(B) = M_0 \cdot \int_0^B \frac{1}{W(B)^3} \, dB$$

Aus dem Integral der Meridianbogenlänge kann der Meridiankrümmungsradius am Äquator als konstanter Faktor herausgezogen werden. Das verbleibende Integral ist ein sogenanntes elliptisches Integral. Dessen Ergebnis ist die komplexe einheitliche Gauß-Variable - z (in Anlehnung an den Einheitskreis, bei Stumpfbergen unitary). Diese Bezeichnung ist eigentlich nicht ganz richtig, da der Meridiankrümmungsradius am Äquator neben der großen Halbachse, die damit gleich Eins gesetzt wird, auch das Quadrat der 1. numerischen Exzentrizität enthält, das damit gleich Null gesetzt wird.

Differentialquotient

$$E'(B) := \frac{1}{W(B)^3}$$

Elliptisches Integral

$$E(B) = \int_0^B E'(B) \, dB$$

Das Integral ist nicht geschlossen, sondern nur numerisch lösbar. Dafür sollen hier zwei Varianten gegeben werden.



### Variante 1: Universelle numerische Integration mit der Simpsonregel

Die zumindest bei der hier verwendeten Mathcadversion implementierten numerischen Integrationsverfahren ermöglichen keine Integration mit komplexen Integrationsgrenzen, deshalb ist hier ein eigenes Programm erforderlich. Als Beispiel soll hier die bekannte Simpsonregel verwendet werden. Eine Berechnung der Gauß-Koordinaten ist damit auch ohne komplizierte "Spezialentwicklungen" möglich.

Um Konvergenzprobleme sicher zu verhindern wird als Abbruchsbedingung die Streifenbreite und nicht der Unterschied des Integrationsergebnisses verwendet. Dies scheint gerechtfertigt, da die zu integrierende Funktion außerhalb der Umgebung einiger spezieller Punkte s.h. Anhang A2 durchgängig gutmütig und stetig ist.

Eine Streifenbreite im Bereich von  $2^{-12} = 0.014\text{Grad}$  bis  $2^{-11} = 0.028\text{Grad}$  hat sich gut bewährt.

zu integrierende Funktion

$f(B) := E'(B)$

Simpsonregel

```
I(xu, xo) :=
n ← 1
h ←  $\frac{x_o - x_u}{2}$ 
rand ← f(xu) + f(xo)
gerade ← 0
ungerade ← f(xu + h)
I ← (rand + 4 · ungerade) ·  $\frac{h}{3}$ 

while |h| > 2-11
    h ←  $\frac{h}{2}$ 
    n ← 2 · n
    gerade ← gerade + ungerade
    ungerade ← 0
    x ← xu + h
    for t ∈ 1 .. n
        ungerade ← ungerade + f(x)
        x ← x + 2 · h
    I ← (rand + 2 · gerade + 4 · ungerade) ·  $\frac{h}{3}$ 

Tabelle ← erweitern("S", "z")
Zeile ← erweitern(2n + 1, I)
Tabelle ← stapeln(Tabelle, Zeile)
```

### Hinweis!

Mathcad-Programme können normalerweise nur eine Variable zurückgeben. Um neben dem Ergebnis auch noch die Anzahl der Schleifendurchläufe ausgeben zu können, werden diese Variablen zu einer Matrix zusammengefaßt, dies ist die Aufgabe der letzten drei Programmzeilen. Das eigentliche Ergebnis muß dann zur Weiterverarbeitung indiziert werden.

## Variante 2: Spezielle numerische Integration mit trigonometrischen Reihen auf der Grundlage des Wallis Integrals

Klotz und auch Stuißberg, der die Klotz'sche Abhandlung als Anregung nahm, entwickelten ihre Verfahren zur numerischen Lösung des elliptischen Integrals auf der Grundlage des sogenannten Wallis Integrals [Wikipedia]. Da hier nur die geraden Potenzen  $2p$  benötigt werden ergibt sich.

$$E(B, 2p) = \int_0^B \sin(B)^{2p} dB$$

Die entsprechende Rekursionsformel lautet:

$$E(B, 2p) = \frac{-\cos(B) \cdot \sin(B)^{2p-1} + (2p-1) \cdot E(B, 2p-2)}{2p}$$

[Klotz 1993]	Seite 108	Gleichung (5) (Achtung Nummer fehlt!)
[Stuißberg 2009]	Seite 8	

Klotz entwickelte daraus eine Lösung mit zwei aus Reihenentwicklungen hervorgegangenen Koeffizienten. Während Stuißberg nur eine Reihenentwicklung verwendet. Für die Inverse Aufgabe ist bei Klotz eine direkte iterative Lösung möglich. Stuißberg nutzt dazu das Newton-Raphson-Verfahren welches sehr schnell konvergiert.

### Variante 2a: Integration auf der Grundlage des Wallis Integrals und zwei Koeffizienten nach Klotz

Die zwei Koeffizienten wurden hier mit Mathcad bis zur 7. Ordnung von  $eq_1$  entwickelt.

$$K_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot eq_1 + \frac{45}{64} \cdot eq_1^2 + \frac{175}{256} \cdot eq_1^3 + \frac{11025}{16384} \cdot eq_1^4 + \frac{43659}{65536} \cdot eq_1^5 + \frac{693693}{1048576} \cdot eq_1^6 + \frac{2760615}{4194304} \cdot eq_1^7$$

$$K_2 = \frac{3}{4} \cdot eq_1 \dots$$

$$+ \frac{45}{64} \cdot eq_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 \right) \dots$$

$$+ \frac{175}{256} \cdot eq_1^3 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 + \frac{8}{15} \cdot \sin(b)^4 \right) \dots$$

$$+ \frac{11025}{16384} \cdot eq_1^4 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 + \frac{8}{15} \cdot \sin(b)^4 + \frac{16}{35} \cdot \sin(b)^6 \right) \dots$$

$$+ \frac{43659}{65536} \cdot eq_1^5 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 + \frac{8}{15} \cdot \sin(b)^4 + \frac{16}{35} \cdot \sin(b)^6 + \frac{128}{315} \cdot \sin(b)^8 \right) \dots$$

$$+ \frac{693693}{1048576} \cdot eq_1^6 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 + \frac{8}{15} \cdot \sin(b)^4 + \frac{16}{35} \cdot \sin(b)^6 + \frac{128}{315} \cdot \sin(b)^8 + \frac{256}{693} \cdot \sin(b)^{10} \right) \dots$$

$$+ \frac{2760615}{4194304} \cdot eq_1^7 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \sin(b)^2 + \frac{8}{15} \cdot \sin(b)^4 + \frac{16}{35} \cdot \sin(b)^6 + \frac{128}{315} \cdot \sin(b)^8 + \frac{256}{693} \cdot \sin(b)^{10} + \frac{1024}{3003} \cdot \sin(b)^{12} \right) \dots$$

Keine Angst, diese Koeffizienten müssen nicht abgetippt werden, ihre Entwicklung geschieht rekursiv bis zur vorgegebenen Ordnung mit Hilfe des folgenden Programmes. Durch weitere Glieder höherer Ordnung kann jede beliebige Genauigkeit (nur begrenzt durch die Genauigkeit der verwendeten Software) erreicht werden.

### Elliptisches Integral nach Klotz

```

E_K(b) :=
  p ← 0
  F_1 ← 1
  F_2 ← 1
  K_1 ← 1
  K ← 1
  K_2 ← 0
  z_m ← 0
  z_n ← b
  Tol ← 10-16
  while |Re(z_m) - Re(z_n)| > Tol ∨ |Im(z_m) - Im(z_n)| > Tol
  |
    F_1 ← F_1 ·  $\frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)(2p+2)}$  · eq1
    K_1 ← K_1 + F_1
    F_2 ← F_2 ·  $\frac{2(p-1)+2}{2(p-1)+3}$  · sin(b)2
    K ← K + F_2
    F_2 ← 1 if p = 0
    K_2 ← K_2 + F_1 · K
    p ← p + 1
    z_m ← z_n
    z_n ← K_1 · b - K_2 ·  $\frac{\sin(2b)}{2}$ 
  |
  Tabelle ← erweitern("p", "z")
  Zeile ← erweitern(p, z_n)
  Tabelle ← stapeln(Tabelle, Zeile)

```

Aus der oben verwendeten Gleichung

$$z = K_1 \cdot b - K_2(b) \cdot \frac{\sin(2b)}{2}$$

ergibt sich für die inverse Aufgabe folgende iterative Lösung.

$$b_n = \frac{z}{K_1} + \frac{K_2(b_m)}{K_1} \cdot \frac{\sin(2b_m)}{2}$$

Diese muss mit relativ hohem Aufwand programmiert werden und ist bei Koeffizienten mit geringer Ordnung von eq<sub>1</sub> instabil. Aus diesem Grund empfiehlt sich auch hier, das von Stuißberger vorgeschlagene Newton-Raphson-Verfahren.

### Variante 2b: Integration auf der Grundlage des Wallis Integrals mit einer Reihenentwicklung nach Stuißbergen

Die Lösung von Stuißbergen führt zu einer besonders stabilen und gleichzeitig eleganten Lösung. Diesem Verfahren sollte der Vorzug gegeben werden. Um einen besseren Einblick in das Verfahren zu bekommen, wurde auch diese Reihe mit Mathcad entwickelt, aus Platzgründen aber nur bis zur 4. Ordnung von  $eq_1$ .

$$\begin{aligned}
 E_S = b \dots \\
 + \frac{3}{2} \cdot eq_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b - \frac{1}{2} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b) \dots \\
 + \frac{15}{8} \cdot eq_1^2 \cdot \frac{3}{8} \cdot b - \frac{3}{8} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b) - \frac{1}{4} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^3 \dots \\
 + \frac{35}{16} \cdot eq_1^3 \cdot \frac{5}{16} \cdot b - \frac{5}{16} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b) - \frac{5}{24} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^3 - \frac{1}{6} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^5 \dots \\
 + \frac{315}{128} \cdot eq_1^4 \cdot \frac{35}{128} \cdot b - \frac{35}{128} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b) - \frac{35}{192} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^3 - \frac{7}{48} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^5 - \frac{1}{8} \cdot \cos(b) \cdot \sin(b)^7
 \end{aligned}$$

### Elliptisches Integral nach Stuißbergen

```

E_S(b) :=
  p ← 0
  F ← 1
  W ← b
  Glied ← 1
  Reihe ← b
  Tol ← 10-16
  while |Re(Glied)| > Tol ∨ |Im(Glied)| > Tol
    p ← p + 1
    F ←  $\frac{2 \cdot p + 1}{2 \cdot p} \cdot eq_1 \cdot F$ 
    W ←  $\frac{(2 \cdot p - 1) \cdot W - \cos(b) \cdot \sin(b)^{2 \cdot p - 1}}{2 \cdot p}$ 
    Glied ← F · W
    Reihe ← Reihe + Glied
    z ← Reihe
  Tabelle ← erweitern("p", "z")
  Zeile ← erweitern(p, z)
  Tabelle ← stapeln(Tabelle, Zeile)

```

## Inverse elliptische Integrale - numerische Lösung mit dem Newton-Raphson-Verfahren

Simpsonregel

```
iI(z) :=
  n ← 0
  b ← z
  Δb ← 1
  Tol ← 10-15
  while |Re(Δb)| > Tol ∨ |Im(Δb)| > Tol
    Δb ←  $\frac{I(0, b)_{1,1} - z}{E'(b)}$ 
    b ← b - Δb
    n ← n + 1
  Tabelle ← erweitern("n", "b")
  Zeile ← erweitern(n, b)
  Tabelle ← stapeln(Tabelle, Zeile)
```

Stuifbergen

```
iES(z) :=
  n ← 0
  b ← z
  Δb ← 1
  Tol ← 10-16
  while |Re(Δb)| > Tol ∨ |Im(Δb)| > Tol
    Δb ←  $\frac{E_S(b)_{1,1} - z}{E'(b)}$ 
    b ← b - Δb
    n ← n + 1
  Tabelle ← erweitern("n", "b")
  Zeile ← erweitern(n, b)
  Tabelle ← stapeln(Tabelle, Zeile)
```

### Meridiankonvergenz und Maßstabsfaktor nach [Glasmacher 1987]

Der Maßstabsfaktor- $m$  ist als das Verhältnis eines differentiellen Bogenelementes in der ebenen Abbildung der Gauß'schen Koordinaten und auf der Ellipsoid-Oberfläche definiert. Die Meridiankonvergenz- $c$  gibt die geographische Nordrichtung bezüglich der positiven Abszissenrichtung an ...

Der Maßstabsfaktor hat den Betrag des Verhältnisses des Differentialquotienten der Gesamtabbildung eines Punktes in der komplexen Gauß-Ebene zu dem Differentialquotienten der Gesamtabbildung eines Punktes mit gleicher Breite auf dem reellen Hauptmeridian (auf dem Hauptmeridian ist die komplexe Breite gleich der geographischen Breite). Die Meridiankonvergenz ergibt sich aus dem negativen Argument des Differentialquotienten der Gesamtabbildung eines Punktes in der Gauß-Ebene.

	Hauptmeridian (= Ellipsoidmeridian)	Gauß-Ebene
Differentialquotient der Mercatorabbildung	$\frac{dq}{dB} = Q'(B) = \frac{M(B)}{P(B)}$	$\frac{dw}{db} = Q'(b) = \frac{M(b)}{P(b)}$
Differentialquotient der Meridianbogenlänge	$\frac{dx}{dB} = M(B)$	$\frac{dz}{db} = M(b)$
Differentialquotient der Gesamtabbildung	$\frac{\frac{dx}{dB}}{\frac{dq}{dB}} = \frac{dx}{dq} = \frac{M(B)}{Q'(B)} = P(B)$	$\frac{\frac{dz}{db}}{\frac{dw}{db}} = \frac{dz}{dw} = \frac{M(b)}{Q'(b)} = P(b)$
Maßstabsfaktor		Meridiankonvergenz
$m = \left  \frac{\frac{dz}{dw}}{\frac{dx}{dq}} \right  = \left  \frac{P(b)}{P(B)} \right $		$c = -\arg \frac{dz}{dw} = -\arg(P(b))$
$MF(b, B) := \left  \frac{P(b)}{P(B)} \right $		$C(b, B) := -\arg(P(b))$

### Hinweis!

Die Funktion  $\arg$  liefert das Argument einer komplexen Zahl, dies ist neben dem Betrag ein Teil der trigonometrischen Form komplexer Zahlen (Winkel der Polarkoordinaten).

Es gilt  $\arg(x + yi) = \text{atan2}(x, yi)$ .

### **Verhalten des Maßstabsfaktors in der Gauß-Ebene**

- Von der X-Achse in Richtung Gitter-Ost und Gitter-West nimmt der Maßstabsfaktor zu.
- Der Maßstabsfaktor ist entlang der senkrechten Gitterlinien so gut wie konstant. Aber mit einer geringen Abnahme von der Y-Achse in Richtung Gitter-Nord und Gitter-Süd. Dieser Effekt verstärkt sich mit zunehmender Entfernung von der X-Achse.
- (s.h. Diagramm "Isolinien des Maßstabsfaktors" im Anhang)

*Hier stellt sich die Frage, wäre es bei der Gauß-Krüger oder UTM Abbildung nicht besser bei der Einteilung der Erde in Zonen, statt der "Apfelsinenschale" (Sphärisches oder elliptisches Zweieck) ein Band konstanter metrischer Breite von ca. 334 km bzw. 668 km vom Äquator bis kurz vor den Polen zu verwenden. Während das Band z.B. bei UTM am Äquator eine Länge von 6° abdeckt, sind es bei einer Breite von ca. 87° eine Länge von fast 180°. Der Maßstabsfaktor ist dabei parallel zum Hauptmeridian im gesamten Band so gut wie konstant.*

Analog zum Kartenmaßstab kann der Maßstabsfaktor der Gauß'schen Abbildung in folgender Form dargestellt werden (Höhenreduktion unberücksichtigt):

konforme Abbildung	:	Natur (eigentlich Ellipsoid)
m	:	1
1	:	1/m.

### **Verhalten des Meridiankonvergenz in der Gauß-Ebene**

- Die Meridiankonvergenz ändert sich entlang eines Meridians-L von 0° am Äquator bis L an den Polen.
- Die Abbildung der Meridiane und die Isolinien der Meridiankonvergenz gleichen Winkels nähern sich an den Polen an.
- Die Isolinien der Meridiankonvergenz nähern sich mit kleiner werdenden Meridiankonvergenz der X- und Y-Achse an und fallen bei Null schließlich mit diesen zusammen.
- (s.h. Diagramm "Isolinien der Meridiankonvergenz" im Anhang)

Die sich aus den Punktkoordinaten ergebenden Verschiebewerte, die Meridiankonvergenz und der Maßstabsfaktor sind die vier Parameter für eine örtliche Ähnlichkeitstransformation.

## A2 Vergleich der sphärischen Gauß'schen Abbildung mit der sphärischen querachsige (transversale) Mercator-Abbildung (a - hier Kugelradius)

### sphärische Gauß'sche Abbildung im Komplexen

$$G_K(B, L) := \begin{cases} q \leftarrow \ln \tan \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \\ w \leftarrow q + L \cdot i \\ b \leftarrow 2 \cdot \operatorname{atan}\left(e^w\right) - \frac{\pi}{2} \\ g \leftarrow b \cdot a \end{cases}$$

### sphärische querachsige (transversale) Mercator-Abbildung (reell mit komplexer Ausgabe)

$$TM_K(B, L) := \begin{cases} B_q \leftarrow \operatorname{atan} \frac{\tan(B)}{\cos(L)} \\ L_q \leftarrow \operatorname{asin}(\cos(B) \cdot \sin(L)) \\ y_q \leftarrow B_q \\ x_q \leftarrow \ln \tan \frac{\pi}{4} + \frac{L_q}{2} \\ TM \leftarrow (y_q + x_q \cdot i) \cdot a \end{cases}$$

Hilfsfunktionen zur Tabellenbildung

$$\text{Zelle}(B, L) := \text{Zelle} \leftarrow \begin{matrix} G_K(B, L) \\ TM_K(B, L) \end{matrix}$$

$$\text{Zeile}(B) := \begin{cases} \text{Zeile} \leftarrow \begin{matrix} \frac{B}{\text{Grad}} & \text{"G"} \\ "" & \text{"TM"} \end{matrix} \\ \text{for } L \in 0\text{Grad}, 30\text{Grad}..90\text{Grad} \\ \text{Zeile} \leftarrow \text{erweitern}(\text{Zeile}, \text{Zelle}(B, L)) \end{cases}$$

$$\text{Kopf} := \begin{cases} \text{Kopf} \leftarrow (\text{"B"} \quad \text{"L"}) \\ \text{for } K \in 0, 30..90 \\ \text{Kopf} \leftarrow \text{erweitern}(\text{Kopf}, K) \end{cases}$$

$$\text{Tab} := \begin{cases} \text{Tab} \leftarrow \text{Kopf} \\ \text{for } B \in 0\text{Grad}, 30\text{Grad}..90\text{Grad} \\ \text{Tab} \leftarrow \text{stapeln}(\text{Tab}, \text{Zeile}(B)) \end{cases}$$

Tabelle

	"B"	"L"	0	30	60	90
	0	"G"	0	3503688i	8400068i	-13899731 + 237481335i
	""	"TM"	-0i	3503688i	8400068i	238117274i
	30	"G"	3339716	3750509 + 2957012i	5466737 + 6205885i	-30057445 + 8400068i
Tab =	""	"TM"	3339716	3750509 + 2957012i	5466737 + 6205885i	-10019148 + 8400068i
	60	"G"	6679432	7061824 + 1629122i	8226599 + 2957012i	-30057445 + 3503688i
	""	"TM"	6679432	7061824 + 1629122i	8226599 + 2957012i	-10019148 + 3503688i
	90	"G"	10019148	10019148	10019148	-30057445
	""	"TM"	-10019148	-10019148	-10019148	10019148

## Spezielle Punkte der Gauß'schen Abbildung nach [Gerstel 1984]

bis auf den Nullpunkt kommt es an diesen Punkten bzw. deren Umgebung zu Konvergenzproblemen

1. Nullpunkt:  $B := 0$   $L := 0$
2. Pole  $B := 90\text{Grad}$
3. Verzweigungspunkte  $B := 0$   $L := \left(1 - e_{q1}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$   $L = 89.395 \text{ Grad}$
4. Querpole  $B := 0$   $L := 90\text{Grad}$

## A3 Zusammenfassung des Formelapparates der Gauß'schen Abbildung

### Mercatorfunktion und ihre Inverse

$$Q(B, e_1) := \ln \tan \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \cdot \frac{1 - e_1 \cdot \sin(B)}{1 + e_1 \cdot \sin(B)} \quad \frac{e_1}{2}$$

$$iQ(q, e_1) := \left| \begin{array}{l} b_m \leftarrow 0 \\ b \leftarrow q \\ \text{Tol} \leftarrow 10^{-16} \\ \text{while } |\operatorname{Re}(b_m) - \operatorname{Re}(b)| > \text{Tol} \vee |\operatorname{Im}(b_m) - \operatorname{Im}(b)| > \text{Tol} \\ \quad \left| \begin{array}{l} b_m \leftarrow b \\ b \leftarrow 2 \cdot \operatorname{atan} e^q \cdot \frac{1 - e_1 \cdot \sin(b)}{1 + e_1 \cdot \sin(b)} - \frac{e_1}{2} - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### Elliptisches Integral und seine Inverse

$$E(b, eq_1) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 0 \\ F \leftarrow 1 \\ W \leftarrow b \\ \text{Glied} \leftarrow 1 \\ \text{Reihe} \leftarrow b \\ \text{Tol} \leftarrow 10^{-16} \\ \text{while } |\operatorname{Re}(\text{Glied})| > \text{Tol} \vee |\operatorname{Im}(\text{Glied})| > \text{Tol} \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + 1 \\ F \leftarrow \frac{2p+1}{2p} \cdot eq_1 \cdot F \\ W \leftarrow \frac{(2p-1) \cdot W - \cos(b) \cdot \sin(b)^{2p-1}}{2p} \\ \text{Glied} \leftarrow F \cdot W \\ \text{Reihe} \leftarrow \text{Reihe} + \text{Glied} \\ z \leftarrow \text{Reihe} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



---


$$iE(z, eq_1) := \left| \begin{array}{l} b \leftarrow z \\ \Delta b \leftarrow 1 \\ Tol \leftarrow 10^{-16} \\ \text{while } |\operatorname{Re}(\Delta b)| > Tol \vee |\operatorname{Im}(\Delta b)| > Tol \\ \quad \left| \begin{array}{l} E' \leftarrow \frac{1}{\sqrt{1 - eq_1 \cdot \sin(b)^2}^3} \\ \Delta b \leftarrow \frac{E(b, eq_1) - z}{E'} \\ b \leftarrow b - \Delta b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### Parallelkreisradius

$$P(B, a, eq_1) := \cos(B) \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - eq_1 \cdot \sin(B)^2}}$$

### Gauß'sche Abbildung und ihre Inverse

$XY(B, L, B_0, m_0, a, f) := \left  \begin{array}{l} eq_1 \leftarrow 2 \cdot f - f^2 \\ e_1 \leftarrow \sqrt{eq_1} \\ M_0 \leftarrow a \cdot (1 - eq_1) \\ x_0 \leftarrow E(B_0, eq_1) \cdot M_0 \cdot m_0 \\ q \leftarrow Q(B, e_1) \\ w \leftarrow q + L \cdot i \\ b \leftarrow iQ(w, e_1) \\ z \leftarrow E(b, eq_1) \\ g \leftarrow z \cdot M_0 \cdot m_0 \\ x \leftarrow \operatorname{Re}(g) - x_0 \\ y \leftarrow \operatorname{Im}(g) \\ m \leftarrow \left  \frac{P(b, a, eq_1)}{P(B, a, eq_1)} \right  m_0 \\ c \leftarrow -\arg(P(b, a, eq_1)) \\ \quad x \\ XY \leftarrow \quad y \\ \quad m \\ \quad c \end{array} \right.$	$BL(x, y, B_0, m_0, a, f) := \left  \begin{array}{l} eq_1 \leftarrow 2 \cdot f - f^2 \\ e_1 \leftarrow \sqrt{eq_1} \\ M_0 \leftarrow a \cdot (1 - eq_1) \\ x_0 \leftarrow E(B_0, eq_1) \cdot M_0 \cdot m_0 \\ g \leftarrow (x + x_0) + y \cdot i \\ z \leftarrow \frac{g}{M_0 \cdot m_0} \\ b \leftarrow iE(z, eq_1) \\ w \leftarrow Q(b, e_1) \\ q \leftarrow \operatorname{Re}(w) \\ B \leftarrow iQ(q, e_1) \\ L \leftarrow \operatorname{Im}(w) \\ m \leftarrow \left  \frac{P(b, a, eq_1)}{P(B, a, eq_1)} \right  m_0 \\ c \leftarrow -\arg(P(b, a, eq_1)) \\ \quad B \\ \quad L \\ BL \leftarrow \quad m \\ \quad c \end{array} \right.$
---	--

## A4 Die Gauß'sche Abbildung an einem historischen Beispiel

nach Gauß [Gauß 1873], Schreiber [Schreiber 1866] und Krüger [Krüger 1912]

### Grad, Minuten, Sekunden in Bogenmaß

$$\text{rad}(D, M, S) := D + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600} \text{ Grad}$$

Gauß verwendete für die Berechnung des Hannoverschen Dreiecksnetzes das Ellipsoid Walbeck 1819. Er leitete die dabei verwendete Lineareinheit aus dem zehnmillionsten Teil des Quadranten und der Abplattung dieses Ellipsoides ab, daraus ergibt sich die Abmessung der große Halbachse in Gauß'schen Metern.

$$f := \frac{1}{302.78} \quad a := \begin{cases} MQ \leftarrow 10^7 \\ n \leftarrow \frac{f}{2-f} \\ a \leftarrow \frac{MQ \cdot (1+n)}{\frac{\pi}{2} \cdot 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}} \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= 6376723.661 \\ \log(a) &= 6.8045975970 \\ m_0 &:= 1 \end{aligned}$$

Nullpunkt der Gauß'schen Vermessung ist der Mittelpunkt der Achse des Reichenbach'schen Meridiankreises der Sternwarte Göttingen.  $B_0 := \text{rad}(51, 31, 47.85)$

**Testkoordinaten: Borkum, Leuchtturm** (Vorzeichen an die heutigen Konventionen angepaßt)

Gauß Koordinatenverzeichnis  $x := 234139.343$   $y := -216659.508$  \*2

Breite und Länge nach Schreiber und Krüger

$B := \text{rad}(53, 35, 22.9881)$   $B = 53.58971892 \text{ Grad}$   $L := \text{rad}(3, 16, 23.6135)$   $L = 3.27322597 \text{ Grad}$  \*2

Maßstabsfaktor und Meridiankonvergenz nach Krüger

$m := 1.20057613$  \*1  $c := \text{rad}(2, 38, 6.9630)$  \*2  $c = 2.63526750 \text{ Grad}$  \*2

\*1 Druckfehler bei Krüger      \*2 Vorzeichenfehler bei Krüger

Berechnung von Breite, Länge, Maßstabsfaktor und Meridiankonvergenz

$B := \text{BL}(x, y, B_0, m_0, a, f)_0$   $B = 53.58971891 \text{ Grad}$   $L := \text{BL}(x, y, B_0, m_0, a, f)_1$   $L = -3.27322597 \text{ Grad}$   
 $m := \text{BL}(x, y, B_0, m_0, a, f)_2$   $m = 1.00057613$   $c := \text{BL}(x, y, B_0, m_0, a, f)_3$   $c = -2.63526748 \text{ Grad}$

Berechnung von Gauß-Koordinaten, Maßstabsfaktor und Meridiankonvergenz

$x := \text{XY}(B, L, B_0, m_0, a, f)_0$   $x = 234139.343$   $y := \text{XY}(B, L, B_0, m_0, a, f)_1$   $y = -216659.508$   
 $m := \text{XY}(B, L, B_0, m_0, a, f)_2$   $m = 1.00057613$   $c := \text{XY}(B, L, B_0, m_0, a, f)_3$   $c = -2.63526748 \text{ Grad}$

## A5 Alternative Funktionen

Mercatorfunktion und inverse Mercatorfunktion mit hyperbolischen Funktionen

$$Q(B) := \operatorname{artanh}(\sin(B)) - e_1 \cdot \operatorname{artanh}(e_1 \cdot \sin(B))$$

$$iQ(q) := \begin{array}{|l} b_m \leftarrow 0 \\ b \leftarrow q \\ \text{Tol} \leftarrow 10^{-16} \\ \text{while } |\operatorname{Re}(b_m) - \operatorname{Re}(b)| > \text{Tol} \vee |\operatorname{Im}(b_m) - \operatorname{Im}(b)| > \text{Tol} \\ \quad \left| \begin{array}{l} b_m \leftarrow b \\ b \leftarrow \operatorname{asin}(\tanh(q + e_1 \cdot \operatorname{artanh}(e_1 \cdot \sin(b)))) \end{array} \right. \end{array}$$

Inverse Mercatorfunktion mit dem Newton-Raphson-Verfahren

$$iQ(q) := \begin{array}{|l} b \leftarrow q \\ \Delta b \leftarrow 1 \\ \text{Tol} \leftarrow 10^{-15} \\ \text{while } |\operatorname{Re}(\Delta b)| > \text{Tol} \vee |\operatorname{Im}(\Delta b)| > \text{Tol} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \Delta b \leftarrow \frac{Q(b) - q}{Q'(b)} \\ b \leftarrow b - \Delta b \end{array} \right. \end{array}$$

## A6 Komplexe Funktionen

[König und Weise 1951], [Glasmacher 1987], [Klotz 1993], [Stuifbergen 2009]

$$z = a + b \cdot i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cdot \cos(\arg(z))$$

$$\arg(z) = \operatorname{atan2}(a, b)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \cdot \sin(\arg(z))$$

Grundrechenarten

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{(\arg(z_1) + \arg(z_2)) \cdot i}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{(\arg(z_1) - \arg(z_2)) \cdot i}$$

Exponentialfunktion

$$e_c^z = e^a \cdot (\cos(b) + \sin(b) \cdot i)$$

$$\ln_c(z) = \ln(|z|) + \arg(z) \cdot i$$

Quadrat

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2ab \cdot i$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| + a)} + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (|z| - a)} \cdot i$$

## Potenzfunktion

$$z^n = |z| (\cos(n \cdot \arg(z)) + \sin(n \cdot \arg(z)) \cdot i)$$

## Winkelfunktionen

$$\sin_c(z) = \frac{e_c^{z \cdot i} - e_c^{-z \cdot i}}{(2 \cdot i)}$$

$$\cos_c(z) = \frac{e_c^{z \cdot i} + e_c^{-z \cdot i}}{2}$$

$$\tan_c(z) = \frac{1}{i} \cdot \frac{e_c^{2z \cdot i} - 1}{e_c^{2z \cdot i} + 1}$$

$$\tan_c(z) = -\tanh_c(z \cdot i) \cdot i$$

$$\operatorname{asin}_c(z) = \frac{1}{i} \cdot \ln_c \left( z \cdot i + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\operatorname{acos}_c(z) = \frac{1}{i} \cdot \ln_c \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{atan}_c(z) = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \ln_c \frac{1 + z \cdot i}{1 - z \cdot i}$$

$$\operatorname{atan}_c(z) = -\operatorname{atanh}_c(z \cdot i) \cdot i$$

## Hyperbolicusfunktionen

$$\sinh_c(z) = \frac{e_c^z - e_c^{-z}}{2}$$

$$\cosh_c(z) = \frac{e_c^z + e_c^{-z}}{2}$$

$$\tanh_c(z) = \frac{e_c^{2z} - 1}{e_c^{2z} + 1}$$

$$\operatorname{asinh}_c(z) = \ln_c \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

$$\operatorname{acosh}_c(z) = \ln_c \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{atanh}_c(z) = \frac{1}{2} \cdot \ln_c \frac{1 + z}{1 - z}$$

## Direkter Zerlegung in Real- und Imaginärteil

### Winkelfunktionen

$$\sin_c(z) = \sin(a) \cdot \cosh(b) + \cos(a) \cdot \sinh(b) \cdot i$$

$$\cos_c(z) = \cos(a) \cdot \cosh(b) - \sin(a) \cdot \sinh(b) \cdot i$$

$$\tan_c(z) = \frac{\sin(2a)}{\cos(2a) + \cosh(2b)} + \frac{\sinh(2b)}{\cos(2a) + \cosh(2b)} \cdot i$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$$

$$\operatorname{asin}_c(z) = \operatorname{asin}(A - B) - \ln \frac{A + B}{\sqrt{(A + B)^2 - 1}} \cdot i$$

### Hyperbolicusfunktionen

$$\sinh_c(z) = \sinh(a) \cdot \cos(b) + \cosh(a) \cdot \sin(b) \cdot i$$

$$\cosh_c(z) = \cosh(a) \cdot \cos(b) - \sinh(a) \cdot \sin(b) \cdot i$$

$$\tanh_c(z) = \frac{\sinh(2a)}{\cosh(2a) + \cos(2b)} + \frac{\sin(2b)}{\cosh(2a) + \cos(2b)} \cdot i$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

$$\operatorname{atan}_c(z) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{A}{B} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \frac{2 \cdot b}{1 - b^2 - a^2} \cdot i$$

## A7 Diagramme des ersten Quadranten

1. Abbildung der geographischen Gitterlinien in der Mercator-Ebene
2. Abbildung der geographischen Gitterlinien in der Ebene der komplexen Breite
3. Abbildung der geographischen Gitterlinien in der einheitlichen Gauß-Ebene (Im Gegensatz zur den vorhergehenden Berechnung wird nur die große Halbachse  $a = 1$  gesetzt)
4. Abbildung der geographischen Gitterlinien in der metrischen Gauß-Ebene
5. Isolinien des Maßstabsfaktors in der metrischen Gauß-Ebene
6. Änderung des Maßstabsfaktors in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelmeridian
7. Isolinien der Meridiankonvergenz in der metrischen Gauß-Ebene
8. Graphische Darstellung der Meridiankonvergenz in der metrischen Gauß-Ebene mit Hilfe der Tangente im Testpunkt- $P_T$  an das Bild des Meridians- $L_T$

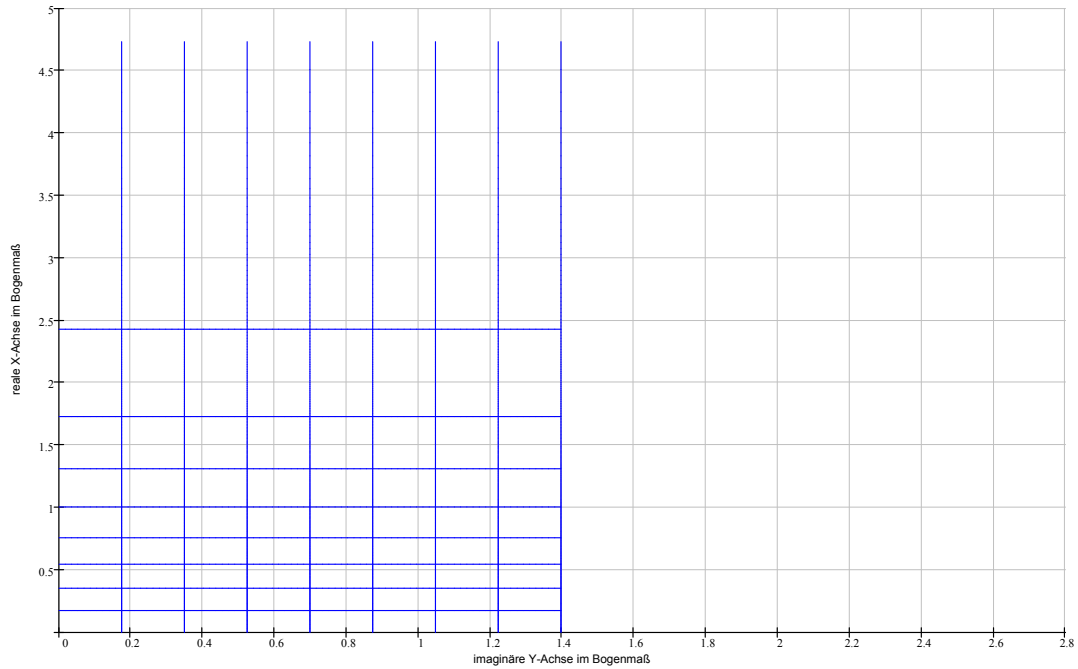
Die Diagramm 2 und 3 können als "Daumenkino" betrachtet werden, dabei auch die geringe Verschiebung der Breitenkreise am Hauptmeridian beachten.

**Abbildung der geographischen Gitterlinien in der Mercator-Ebene**  
**(10° Linien von 10°- 80°)**

Der Hauptmeridian  $L = 0^\circ$  fällt mit der X-Achse und der Äquator mit der Y-Achse des Koordinatensystems zusammen.

$x(B, L) := \operatorname{Re}(ME(B, L))$   
 $L := 0^\circ, 1^\circ \dots 80^\circ$   
 $a := 1$

$y(B, L) := \operatorname{Im}(ME(B, L))$   
 $B := 0^\circ, 0.25^\circ \dots 89^\circ$

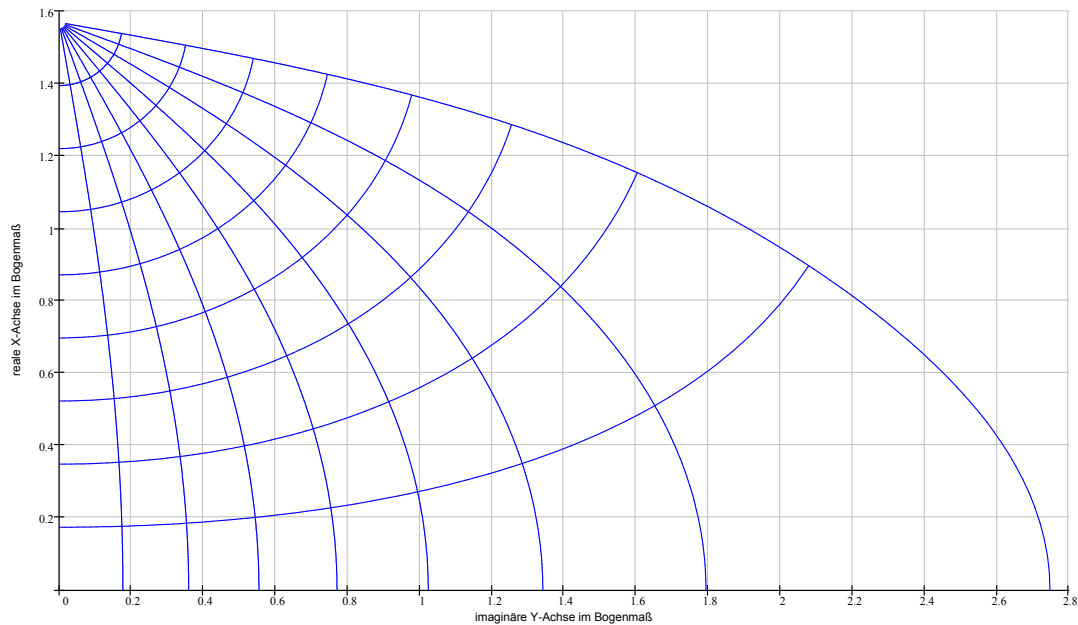


**Abbildung der geographischen Gitterlinien in der Ebene der komplexen Breite**  
**(10° Linien von 10°- 80°)**

Der Hauptmeridian  $L = 0^\circ$  fällt mit der X-Achse und der Äquator mit der Y-Achse des Koordinatensystems zusammen.

$x(B, L) := \operatorname{Re}(BE(B, L))$   
 $L := 0^\circ, 1^\circ \dots 80^\circ$   
 $a := 1$

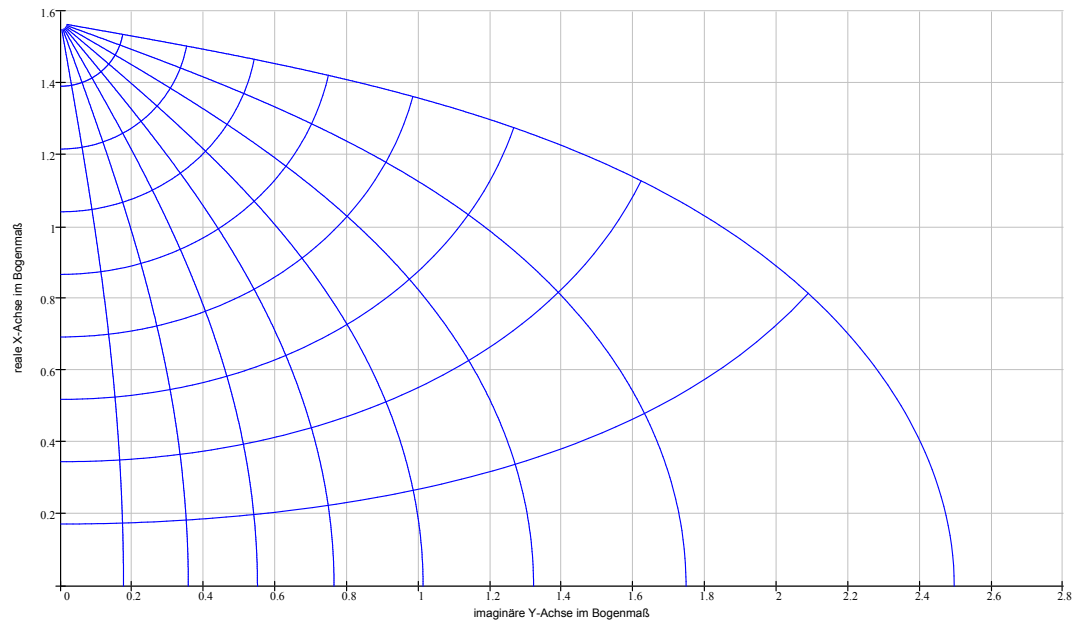
$y(B, L) := \operatorname{Im}(BE(B, L))$   
 $B := 0^\circ, 0.25^\circ \dots 89^\circ$



**Abbildung der geographischen Gitterlinien in der einheitlichen Gauß-Ebene**  
**(10° Linien von 10° - 80°)**

Der Hauptmeridian  $L = 0^\circ$  fällt mit der X-Achse und der Äquator mit der Y-Achse des Koordinatensystems zusammen.

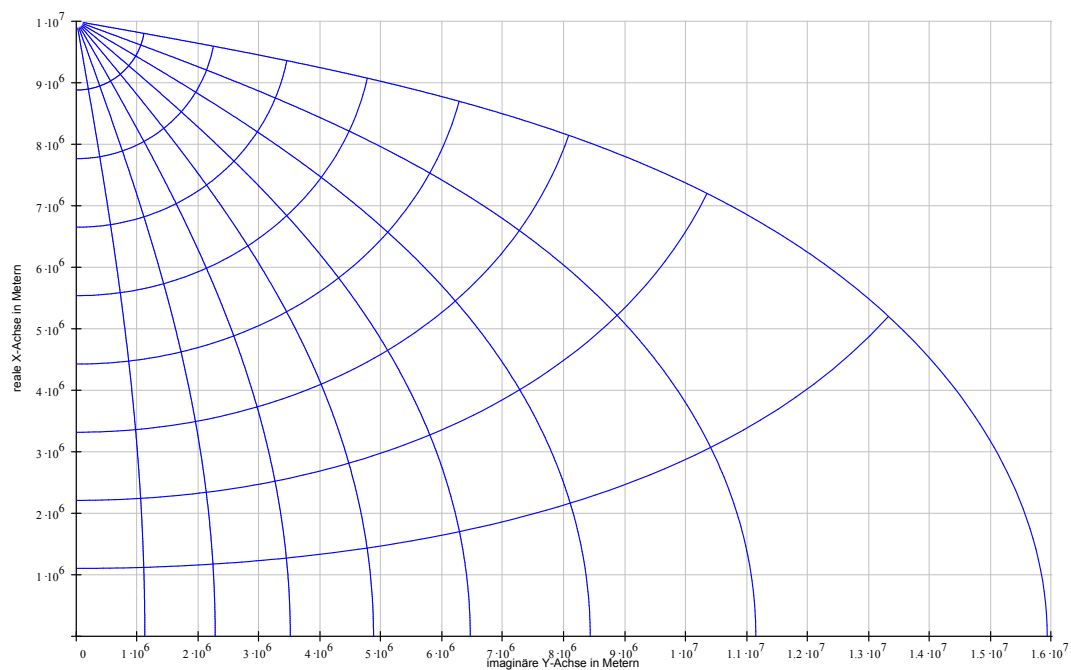
$$\begin{aligned} x(B, L) &:= \operatorname{Re}(uGE(B, L)) & y(B, L) &:= \operatorname{Im}(uGE(B, L)) \\ L &:= 0^\circ, 1^\circ \dots 80^\circ & B &:= 0^\circ, 0.25^\circ \dots 89^\circ \\ a &:= 1 \end{aligned}$$



**Abbildung der geographischen Gitterlinien in der metrischen Gauß-Ebene**  
**(10° Linien von 10° - 80°)**

Der Hauptmeridian  $L = 0^\circ$  fällt mit der X-Achse und der Äquator mit der Y-Achse des Koordinatensystems zusammen.

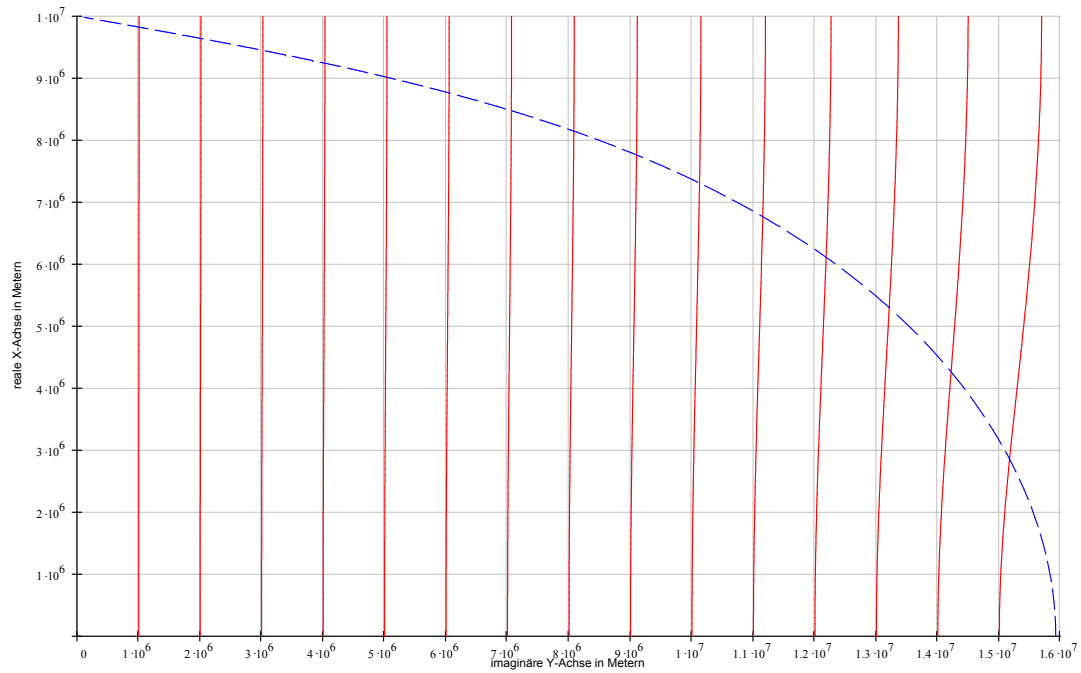
$$\begin{aligned} x(B, L) &:= \operatorname{Re}(GE(B, L)) & y(B, L) &:= \operatorname{Im}(GE(B, L)) \\ L &:= 0^\circ, 1^\circ \dots 80^\circ & B &:= 0^\circ, 0.25^\circ \dots 89^\circ \end{aligned}$$



# **Isolinien des Maßstabsfaktors und der 80° Meridian in der metrischen Gauß-Ebene**

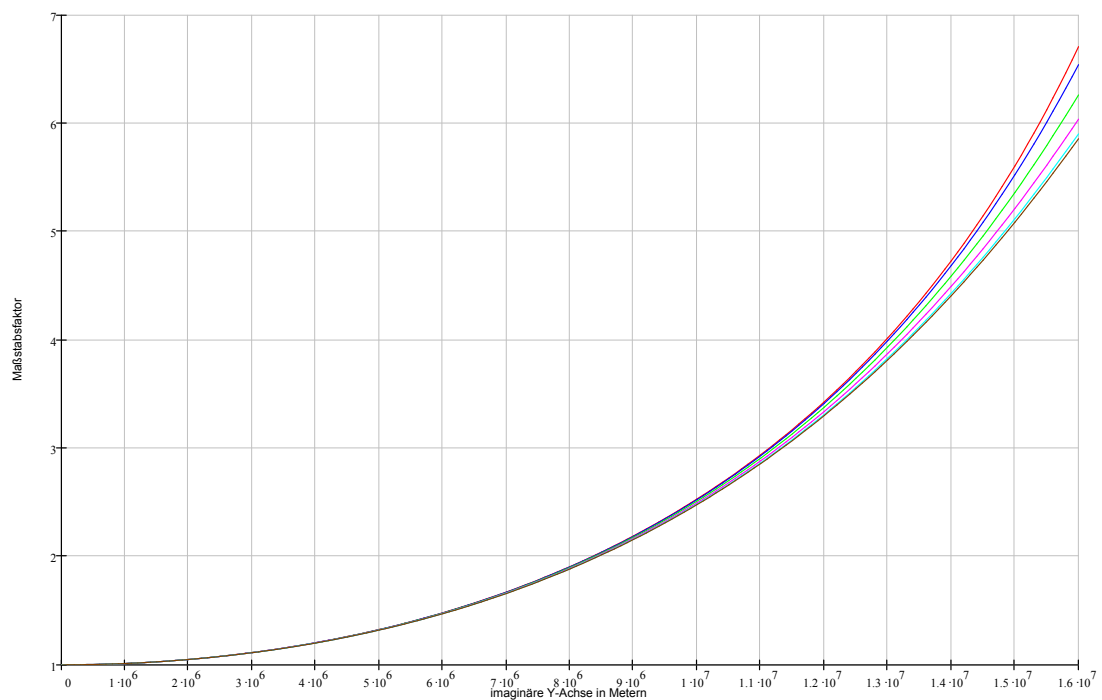
$$x(\xi, m) := \operatorname{Re}(iM(\xi, m)) \quad y(\xi, m) := \operatorname{Im}(iM(\xi, m)) \quad \xi := 0, 1 \cdot 10^5 \dots E \frac{\pi}{2} \cdot M_0$$

Maßstabsfaktoren = "y \* 10<sup>-6</sup>" 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 bei x = 0  
 "m" 1.0124 1.0499 1.1135 1.2048 1.3261 1.4807 1.6727 1.9071 2.1906 2.5314 2.94 3.4298 4.0189 4.7325 5.6081



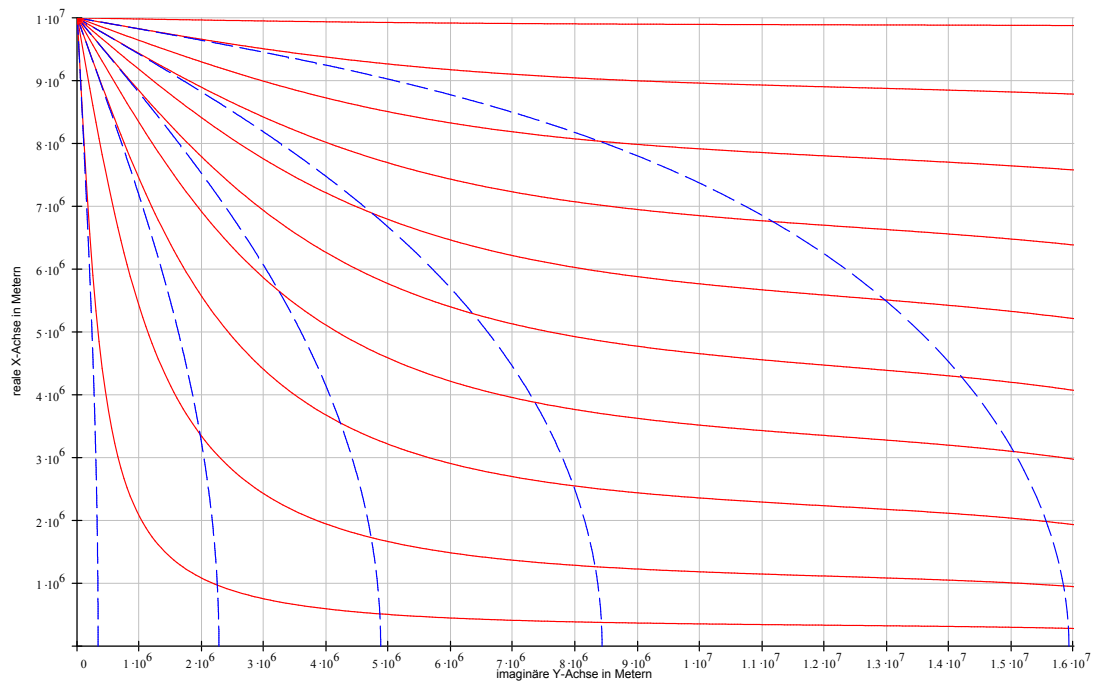
## **Änderung des Maßstabsfaktors in Abhängigkeit vom Abstand zum Mittelmeridian** **Kurven von oben nach unten Abstand zum Äquator ( 0, 2, 4, 6, 8, 10 ) \*10<sup>6</sup> m**

$$y' := 0, 10^5 \dots 1.6 \cdot 10^7$$



Isolinien der Meridiankonvergenz und die Meridiane 3°, 20°, 40°, 60° und 80° in der metrischen Gauß-Ebene  
(Isolinie 3°, 10° Isolinien von 10°- 80° und Isolinie 89°)

$$x'(\psi, c) := \operatorname{Re}(iC(\psi, c)) \quad y'(\psi, c) := \operatorname{Im}(iC(\psi, c)) \quad \psi := 0,5 \cdot 10^4 \dots 1,6 \cdot 10^7$$



Graphische Darstellung der Meridiankonvergenz in der metrischen Gauß-Ebene mit Hilfe der Tangente im Testpunkt- $P_T$  an das Bild des Meridians- $L_T$   
Die Meridiankonvergenz ist hier der kleinere Winkel zwischen den senkrechten Gitterlinien und der Tangente.

Testpunkt  $B_T := 30,4^\circ$   $L_T := 40^\circ$

Meridiankonvergenz  $c(B_T, L_T) = 23,053^\circ$

Steigung der Tangente

Verschiebungskonstante der Tangente

Gleichung der Tangente

$$m_T(B, L) := \tan \frac{\pi}{2} + c(B, L)$$

$$n_T(B, L) := x(B, L) - m_T(B, L) \cdot y(B, L)$$

$$x_T(B, L, y) := m_T(B, L) \cdot y + n_T(B, L)$$

