

Ф.Н.КРАСОВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ  
СОЧИНЕНИЯ

том I

ГЕОДЕЗИЗДАТ  
МОСКВА • 1953

*Н.К.*

Ф. Н. Красовский

# ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ

Под общей редакцией  
проф. д-ра техн. наук В. В. Данилова

Том 1

Под редакцией и с комментариями  
проф. д-ра техн. наук А. А. Изотова



Издательство геодезической литературы  
МОСКВА \* 1953

528

Р

4

Печатается по постановлению Ученого совета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Председатель комиссии по изданию трудов Ф. Н. Красовского

проф. д-р техн. наук В. В. Данилов



Редактор А. А. Изотов

Техн. редактор И. А. Шленский

Корректор А. Д. Грудзинский

Т-04296

Сдано в набор 9/II 1953 г.

Подп. к печати 28/VIII 1953 г.

Объем 23,25 п. л.

Колич. знаков в п. л. 56 000

Уч.-изд. листов 32,5

Формат 70×108<sup>1/16</sup>

Тираж 2000 экз.

Зак. № 592

Цена 17 р. 75 к.

Рига, Картфабрика, ул. Алтонавас, 43.



## ПРЕДИСЛОВИЕ

С именем выдающегося советского геодезиста и ученого Феодосия Николаевича Красовского связана яркая эпоха развития отечественной научной мысли в области геодезии, эпоха возникновения и развития советской геодезической науки, основоположником и долголетним руководителем которой он являлся. На протяжении своей почти полувековой деятельности он разработал главнейшие научные и методические принципы, на которых начали и продолжают развиваться основные астрономо-геодезические работы СССР. В течение первых 30 лет развития советской геодезии он являлся активным участником почти всех важнейших научных, технических и организационных мероприятий в области геодезии.

Как известно, Ф. Н. Красовский принадлежал к числу тех крупных ученых, которые в своих работах не только широко охватывают избранную ими область науки, но занимаются и вопросами смежных с нею областей знания, взаимно развивая их и внося в них свой большой вклад. Так, работая главным образом в области высшей геодезии, он много занимался также вопросами картографии, практической астрономии и гравиметрии. При этом в каждом из указанных направлений его исследования ознаменовались постановкой и решением ряда принципиальных научных вопросов, имеющих большое практическое значение.

По имеющимся данным, Ф. Н. Красовским опубликовано более 120 научных работ, которые охватывают период с 1901 г. по 1947 г. Следует особо отметить, что из них 100 работ, притом наиболее важных, опубликованы в годы Советской власти, вызвавшей широкое развитие геодезических работ в нашей стране и создавшей благоприятные условия для творческой работы во всех областях науки и практики. Среди научных трудов Ф. Н. Красовского имеются как капитальные многотомные руководства по высшей геодезии и учебные пособия, ставшие настольными книгами советских геодезистов, так и брошюры и журнальные статьи, представляющие замечательные исследования по основным вопросам геодезии.

Научные труды Ф. Н. Красовского являются гордостью советской геодезии, занимающей теперь ведущее положение в мире, и крупнейшим вкладом в развитие геодезической науки. Они должны быть не только бережно сохранены для будущих поколений советских геодезистов, но и широко использованы для новых достижений советской геодезии. Для того, чтобы содействовать этому и передать советским геодезистам наиболее важные части обширного научного наследства Ф. Н. Красовского в собранном виде, коллектив его ближайших учеников, объединяемых ныне кафедрой высшей геодезии Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (МИИГАиК), долголетним руководителем которой он являлся, принял решение об издании его избранных сочинений.

Избранные сочинения Ф. Н. Красовского составят несколько томов. В них будут включены те его наиболее важные научные труды и статьи, которые имеют большую научную ценность не только для настоящего, но и для будущего времени или характеризуют отдельные

этапы развития научной деятельности автора. При этом каждый том будет включать одну или несколько групп работ и статей, относящихся соответственно к одной или нескольким группам вопросов, которые между собой тесно связаны. Такое крупнейшее сочинение, как, например, известное «Руководство по высшей геодезии», части I и II, которое является выдающимся произведением в области геодезии, будет издано в двух томах.

Данный том избранных сочинений Ф. Н. Красовского включает его труды по вопросам изучения фигуры Земли и уравнивания астрономо-геодезической сети и в соответствии с этим делится на две части. Труды и статьи в той и другой части этого тома располагаются в хронологическом порядке, который наилучшим образом характеризует последовательность развития исследований автора по указанным вопросам. Так как время написания большинства статей точно не известно и установить невозможно, то в соответственных частях этого тома их пришлось расположить в последовательности выхода в свет того издания, в котором они впервые были напечатаны.

При подготовке посмертного издания ранее опубликованных трудов ученого редактор сильно ограничен в своих правах вносить в эти труды какие-нибудь значительные редакционные изменения. Поэтому мы ограничились тщательной проверкой текста всех статей, включенных в данный том избранных сочинений Ф. Н. Красовского, и устранили явные опечатки, которые в них оказались и которые удалось обнаружить. Кроме того, тексты статей дореволюционного времени приведены в соответствие с современными нормами правописания, но без нарушения особенностей стиля автора.

Каждая статья, включенная в данный том сочинений Ф. Н. Красовского, сопровождается краткими примечаниями или комментариями, составленными редактором тома. В этих примечаниях приводятся общие сведения о времени и месте опубликования данной статьи, а иногда указываются и те обстоятельства, которые обусловили ее написание. Для тех случаев, когда то или иное место данной статьи, по нашему мнению, нуждалось в разъяснении, даны особые комментарии. Эти места в пределах каждой статьи отмечены надстрочным порядковым номером, под которым даны и соответствующие комментарии, помещенные после всех статей. Все сноски, встречающиеся в тексте статей и отмеченные «звездочкой», если это особо не оговорено, принадлежат самому автору.

В этот том включена статья проф. В. В. Данилова, в которой дан очерк жизни и деятельности Ф. Н. Красовского как ученого, педагога и общественного деятеля. В ней очерчены те исторические условия, в которых началась и развивалась многогранная деятельность Ф. Н. Красовского, создавшего самобытную советскую школу геодезии и внесшего в нее огромный научный вклад.

Научные труды Ф. Н. Красовского не только легли в основу развития геодезических работ в нашей стране, но и послужили толчком для развития научной творческой деятельности его учеников, которыми прямо или косвенно являются все советские геодезисты. В его трудах содержится еще не использованное до конца богатство научной мысли, относящейся к различным коренным вопросам геодезии и заслуживающей дальнейшей широкой разработки. Издание сочинений Ф. Н. Красовского будет способствовать всестороннему использованию его научного наследства и достижению новых выдающихся успехов советской геодезии.

*А. Изотов*

## Феодосий Николаевич Красовский

Феодосий Николаевич Красовский является выдающимся геодезистом нашего времени; он создал советскую школу геодезистов и в большой мере способствовал ее блестящим успехам. Чтобы полнее осветить достижения советской геодезии и значение работ Феодосия Николаевича Красовского, мы дадим краткую характеристику состояния геодезического дела в России к началу XX столетия.

Начало геодезических работ в России относится еще к первым десятилетиям XVIII века, когда Петром I впервые был поставлен вопрос о картографировании страны на основе инструментальных съемок и была создана первая школа геодезистов в Москве. Далее эта мысль не забывалась на всем протяжении того же века и претворилась в так называемые «кописания» земель Российской империи, опиравшиеся на сравнительно редкую сеть астрономических пунктов. Однако только в XIX веке картографирование страны получило свою настоящую базу в виде мензульной съемки, опиравшейся на сеть пунктов триангуляции соответственной густоты и точности.

Наиболее крупной организацией, исполнявшей геодезические работы в дореволюционной России, был Корпус Военных Топографов (КВТ), насчитывающий более 150 лет своего существования. Свои кадры он комплектовал из воспитанников Военно-топографического училища в Ленинграде, которое выпускало высококвалифицированных топографов (с двухлетним образованием), в совершенстве владевших искусством мензульной съемки, и топографов-триангуляторов, оканчивавших дополнительный третий курс того же училища, специализировавшихся в построении опорной геодезической сети в виде триангуляции разных классов. Руководящие кадры КВТ состояли из небольшого числа военных геодезистов, оканчивавших геодезическое отделение Академии Генерального Штаба и потом специализировавшихся главным образом в астрономических наблюдениях, а в последние годы перед Великой Октябрьской социалистической революцией — также и в постановке высокоточных угловых и линейных измерений, связанных с построением триангуляции I класса. Военные геодезисты выполняли первоклассные астрономо-геодезические работы и несли функции руководящего инженерного состава в постановке топографо-геодезических и картографических работ КВТ.

В основу составления карт КВТ были положены инструментальные съемки масштабов от  $\frac{1}{2}$  до 3 верст в дюйме, опирающиеся на пункты триангуляции или астрономической сети. Первоначально эти съемки, начатые в 1819 г. в западной пограничной полосе К. И. Теннером в полуверстном масштабе (бывшая Виленская губерния) и Ф. Ф. Шубертом в масштабе 200 саж. в дюйме, носили полуинструментальный характер и сводились к прокладке съемочных ходов между пунктами триангуляции астролябии или буссолю с измерением линий цепью и с зарисовкой контуров на глаз и рельефа — штриховой, однако малый продвиг работ заставил с 1844 г. перейти на более мелкий масштаб съемки (1 верста в дюйме); так были засняты 27 губерний Европейской части России, весь Привисленский край, а также большая часть Финляндии и Кавказа. Параллельно, с 1848 г. к этим работам, под руководством генерала Менде, были привлечены и чины Межевого ведомства, которыми, совместно с КВТ, были засняты дополнительно еще восемь центральных губерний. Указанные съемки послужили материалом для составления карт в масштабах  $3\frac{1}{2}$  и 10 верст в дюйме на Европейскую часть России и Кавказ (кроме районов к северу от параллели  $60^{\circ}$ ).

С 1870 г., когда первые потребности государства в картах были удовлетворены, военно-топографические съемки стали вести на более точной основе — мензульной съемки в масштабе  $\frac{1}{2}$  версты в дюйме, а с 1907 г. — 1 верста в дюйме, с применением кипрегеля и рисовкой рельефа горизонтальными, опираясь только на пункты тригонометрической сети. Съемки эти выполнялись в западном пограничном пространстве,

на юге Финляндии, в Крыму и на Кавказе, имели высокую, вполне современную точность и служили отличным материалом для картографирования страны. Разумеется, выполнение их требовало дальнейшего развития триангуляционных и нивелирных сетей.

Построенные КВТ в XIX в. триангуляционные сети носили разрозненный характер, покрывали с большими проблесками только Европейскую часть территории России и не представляли из себя единой системы государственной триангуляции. Попытка военного геодезиста К. Шарнгорста, предпринятая в 1897—1907 гг., упорядочить эту сеть путем уравнивания ее методом последовательного нанизывания окончилась неудачей. В результате КВТ пришел к выводу о необходимости приступить к построению триангуляции I класса заново, по схеме и программе, разработанной комиссией И. И. Померанцева в 1907—1909 гг., в виде вполне современных по точности и методам выполнения рядов триангуляции I класса из простых треугольников, прокладываемых по меридианам и параллелям на расстоянии 300—350 верст один от другого, с измерением базисов, астрономических азимутов и широт в местах пересечения рядов. Как мы видим, азимуты Лапласа по этой программе не определялись. С 1910 г. по 1916 г. были проложены ряды триангуляции I класса по меридиану от Пулкова до Николаева на Черном море с поперечными рядами, связывающими этот меридиональный ряд с проходящей к западу дугой Струве; образовались таким образом пять полигонов I класса, из которых южный полигон, из-за начавшейся первой мировой войны (1914—1918 гг.), не был замкнут.

Из старых триангуляций, не считая дуги Струве, сохранили некоторое значение только ряды градусных измерений по параллелям  $52^{\circ}$  (до Орска) и  $47\frac{1}{2}^{\circ}$  (до Астрахани) широты, да и то подавляющее число пунктов этой триангуляции было утеряно на местности. В лучшей сохранности были только пункты триангуляции Кавказа, Средней Азии и Маньчжурии.

С высотным обоснованием топографических съемок дело обстояло несколько лучше: к 1916 г. КВТ было проложено около 45 000 км нивелировок точных и «высокой точности» по линиям железных дорог и по берегам рек, связывающих водомерные посты Балтийского, Черного и Каспийского морей; предварительно уравненные отметки нивелирных марок и измеренные разности их высот были опубликованы в известном каталоге С. Д. Рыльке и дополнениях к нему, с отнесением высот к среднему уровню Балтийского и Черного морей.

К 1917 г. КВТ были созданы карты: 10 верст в дюйме — на Европейскую часть России и западную часть Сибири и Среднюю Азию, 40 верст в дюйме — на большую часть Сибири и 100 верст в дюйме — на всю Сибирь, 5 верст в дюйме — на террито-рию Кавказа и значительную часть Средней Азии, 3 версты в дюйме — на западную часть Европейской России; 1 и 2 версты в дюйме — вдоль западной и южной пограничных полос Европейской России, включая Кавказ, частично Среднюю Азию и Маньчжурию. Указанные карты были составлены частью на основе инструментальных съемок, по большей части в результате полуинструментальных и глазомерных съемок, опирающихся на астрономические пункты.

Вторым ведомством, располагавшим значительными кадрами геодезистов, было Межевое ведомство Министерства юстиции. Свои кадры оно черпало из воспитанников бывшего Межевого института в Москве (инженерный состав) и землемерных училищ с трехлетним образованием. Целевым назначением геодезических работ Межевого ведомства было юридическое оформление границ землевладений. Начало им было положено еще при Екатерине II; они продолжались вплоть до Великой Октябрьской социалистической революции. Заключались они в обходе окружной межи землевладения при помощи астролябии и цепи, позже — теодолита и ленты, с закреплением поворотных пунктов деревянными столбами и межевыми ямами; на каждое землевладение составлялся межевой план, на котором указывалось положение окружной межи, смежных владений и положение дорог, населенных пунктов и основных уголов, без рельефа. Подобными съемками была покрыта почти вся Россия, но картографической ценности такой материал не имел: попытки составления карт по губерниям результатов не дали. Несколько лучше обстояло дело со съемками Межевого ведомства на Кавказе, где в основу работ была положена так называемая углеромно-мензульная съемка, опирающаяся на сеть триангуляции, с изображением рельефа горизонтальными.

Остальные ведомства, как Лесное, Путей сообщения, Переселенческое управление, Гидрографическое, Геологическое и другие, также вели топографо-геодезические работы, но последние носили разрозненный характер и могли быть мало использованы в целях картографирования страны.

Говоря о развитии научной геодезической мысли в царской России, нельзя пройти мимо следующих двух фактов. Под руководством астронома Юрьевского (Дерптского) университета В. Я. Струве с 1816 г. по 1855 г. было исполнено знаме-

нитое градусное измерение по «Дуге меридиана» от мыса Фугленес на северной оконечности Скандинавского полуострова до устья Дуная (по  $27^{\circ}$  долготы от Гринвича), с широтной амплитудой около  $25^{\circ}$ . Эта работа обратила на себя внимание высокой точностью угловых и линейных измерений, а главное — тщательностью разработки методических вопросов, благодаря чему труд Струве «Дуга меридиана» стал классическим; его и до сих пор с пользой изучают советские геодезисты. Вторым фактом явились работы, исполненные в 80-х годах прошлого века, по теории фигуры Земли профессора Московского университета Ф. А. Слудского, на много опередившего свое время. Как известно, им впервые были даны дифференциальное уравнение геоида и идея совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических данных для определения формы и размеров Земли, а также указано, что геоид на сущее располагается ниже уровенной поверхности нормального сфероида, а на море — выше.

Таким образом, к 1917 г. геодезические работы на обширной территории России находились в неудовлетворительном состоянии: не было построено достаточной по точности, в единой системе для всей страны опорной геодезической сети, горизонтальной и высотной; отсутствовала общегосударственная карта достаточно крупного масштаба — десятиверстка покрывала только Европейскую часть России и во многих частях устарела, пятиверстка и топографические карты крупных масштабов, как  $\frac{1}{2}$  версты, 1, 2 и 3 версты в дюйме, покрывали только незначительные территории, преимущественно в пограничных районах. Ведомственные геодезические работы выполнялись от случая к случаю и поглощали большие государственные средства, не давая удовлетворительных результатов для картографирования страны.

Нужна была срочная реформа геодезического дела в нашей стране. Это и было осуществлено после Великой Октябрьской социалистической революции декретом В. И. Ленина от 15 марта 1919 г. о создании Высшего геодезического управления, которому поручалось объединить все геодезические работы в нашей стране, организовать их в целях наиболее полного удовлетворения многообразных нужд страны и разрешения задачи ее картографирования в приемлемом масштабе в кратчайшие сроки.

С этими годами развития геодезического дела в СССР и совпало начало деятельности профессора Ф. Н. Красовского как геодезиста.

\* \* \*

Нам известно очень немногое из ранних лет жизни Ф. Н. Красовского. Он родился 26 сентября 1878 г. в г. Галиче, бывшей Костромской губ., в семье служащего. Потеряв отца в раннем детстве, он натерпелся достаточно лишений. Начальное образование получил в том же Галиче, в уездном училище.

В школе обратили внимание на выдающиеся способности мальчика и всячески старались способствовать углублению его знаний. По окончании уездного училища Ф. Н. Красовский поступил в общеобразовательные классы при бывшем Межевом институте в качестве казенномкоштного воспитанника, благодаря стараниям своего дяди М. О. Красовского — старшего землемера. Здесь, в интернате Межевого института, и протекала вся дальнейшая жизнь Феодосия Николаевича в период роста и формирования его творческих сил.

За общеобразовательными классами, соответствовавшими примерно курсу бывших реальных училищ, следовали три землемерных курса и два инженерных. Успешно окончив общеобразовательные классы, Ф. Н. Красовский перешел на старшие специальные курсы, где с увлечением стал заниматься высшей математикой, механикой, геодезией, астрономией и другими специальными дисциплинами. Этому в значительной мере способствовали лекции таких блестящих профессоров, как И. А. Иверонов, В. К. Церасский (астрономия), будущий академик С. А. Чаплыгин (механика), Л. К. Лахтин (математика). В руках учащихся была уникальная фундаментальная библиотека Межевого института с ее 150 000 томов, в которой были собраны не только классики художественной русской и иностранной литературы XIX столетия, но и классики геодезии, математики и астрономии на русском, немецком и французском языках того же периода. Было у кого учиться, и молодой Красовский с жаром отдался изучению гениальных творений основоположников геодезии, астрономии и математики в лице В. Струве, Чебышева, Граве, Маркова, Цингера, Гаусса, Бесселя, Лагранжа, Лапласа. Уже на студенческой скамье серьезный, молчаливый юноша пользовался заслуженным авторитетом среди товарищей за свои глубокие знания и высокие моральные качества.

В 1900 г. Ф. Н. Красовский окончил с золотой медалью Институт и был оставлен при нем для подготовки к научной и преподавательской деятельности. Последующие два года прошли в усиленном изучении математики, теоретической механики, геодезии и практической астрономии. Руководя практическими занятиями студентов

по этим дисциплинам, Ф. Н. Красовский одновременно состоял вольнослушателем физико-математического факультета Московского университета, где посещал лекции лучших профессоров университета и пополнял пробелы в своем образовании. С благодарностью вспоминал впоследствии Феодосий Николаевич профессоров С. А. Чаплыгина, В. К. Церасского и И. А. Иверонова, которые зажгли в нем неугасимую жажду знания и дух исследователя. Пребывание в Московском университете наложило глубокий отпечаток на интеллект молодого ученого в период его формирования и сделало из него того неутомимого борца и исследователя, которым он был и остался в нашей памяти.

Для завершения подготовки Ф. Н. Красовский был послан на десять месяцев в Пулковскую обсерваторию, где работал по практической астрономии под руководством Ф. Ф. Витрама и А. П. Соколова и по геодезии, участвуя вместе с Ф. Ф. Витрамом и А. С. Васильевым в обработке материалов по Шпицбергенскому градусному измерению. К сожалению, по некоторым привходящим обстоятельствам, научная командировка Ф. Н. Красовского в Пулково, вместо намеченных десяти месяцев, продолжалась всего пять с половиной месяцев. Вернувшись в Москву в 1903 г., Ф. Н. Красовский представил обстоятельный отчет об исполненных им работах в Пулковской обсерватории, напечатанный в «Памятной книжке Константиновского Межевого института» за 1902—1903 гг.

Из этого отчета мы узнаем, что в области геодезии Ф. Н. Красовскому, кроме участия в обработке Шпицбергенского градусного измерения, удалось выполнить следующие работы: 1) принять участие в исследовании Пулковского горизонтального круга, 2) ознакомиться с составлением карт стран, мало исследованных, 3) ознакомиться с различными видами издания карт в Корпусе Военных Топографов. Остальные работы касались практической астрономии и состояли главным образом в ознакомлении с ведущимися в Пулковской обсерватории звездными наблюдениями и методами их обработки, а также в ознакомлении с работой на переносном пассажном инструменте с регистрирующим микрометром, с определением прямых восхождений звезд, с вопросом об изменении широт и собственном движении звезд и приведения разных каталогов к одной эпохе. Все эти работы, по словам Ф. Н. Красовского, расширили его научный горизонт и дали ему «возможность шире понимать дело и яснее представлять себе задачи современной практической астрономии» (см. стр. 110 отчета). Сам отчет Ф. Н. Красовского о своей научной командировке очень поучителен показывает того, как нужно относиться к работе всем аспирантам.

Как следует из «Списка трудов Ф. Н. Красовского», к 1904 г. он имел уже шесть опубликованных работ, из которых первой была небольшая заметка: «Работы Г. Н. Шебуева по высшей геодезии», напечатанная в 13 выпусксе «Трудов Топографо-геодезической комиссии» за 1901 г. В этой заметке внимание Ф. Н. Красовского было привлечено тремя работами Г. Н. Шебуева, из которых первые две дают строгое рассмотрение геометрических свойств произвольной поверхности (в аналитической форме) и далее, как частный случай, автор рассматривает расстояния, азимуты и треугольники на поверхности трехосного эллипсоида, мало отличающегося от сферы, применение которого в геодезии особенно интересовало Феодосия Николаевича, так как непосредственно связано с вопросом изучения фигуры Земли. Третья работа Г. Н. Шебуева привлекла внимание Ф. Н. Красовского тем, что в ней впервые был поставлен и решен вопрос о влиянии аномалий потенциала земного притяжения на невязки в нивелирных полигонах, сначала для любой поверхности, а затем — для поверхности, мало отличающейся от сферы; при этом автор в качестве примера воспользовался методом модели, который широко применяется в настоящее время. Автор дал формулу подсчета невязки в замкнутом нивелирном полигоне, обусловленной аномалиями потенциала земного притяжения. К сожалению, эти исследования Г. Н. Шебуева не нашли впоследствии никакого практического применения (по вполне понятной причине — отсутствия в стране гравиметрической съемки), но сам факт появления этой работы закрепляет приоритет русских ученых в области так называемой «геодезической гравиметрии», которая создана в настоящее время трудами советских геодезистов, главным образом трудами М. С. Молоденского, при некотором участии и самого Феодосия Николаевича. Теперь вопрос, поднятый Г. Н. Шебуевым, нашел теоретическое разрешение\* и вошел в практику геодезических работ.

Первая оригинальная научная работа Ф. Н. Красовского «Определение размеров трехосного эллипсоида из русских градусных измерений» была напечатана в 1902 г. в «Памятной книжке Константиновского межевого института» за 1900—1901 гг. Это как бы кандидатская диссертация Феодосия Николаевича, свидетельствующая о полной его зрелости как инженера и молодого научного работника.

\* М. С. Молоденский. «Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли». Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., т. XII, № 3, М., 1948.

Любопытно, что в этой первой своей научной работе Феодосий Николаевич исходил из идеи о трехосном земном эллипсоиде как тела, наиболее приближающе- гося по форме к телу Земли. Эта идея пронизывает все последующие работы Ф. Н. Красовского на протяжении более 40 лет и находит наиболее яркое выражение в его работе «Обзор и результаты градусных измерений», в которой убедительно показано, что при введении трехосного эллипса результаты разных градусных измерений гораздо лучше между собой согласуются, чем без использования его, т. е. так называемые крупные волны геоида наилучшим образом отображаются в простейшей из правильных геометрических форм — поверхности трехосного эллипса. Можно думать, что идея наибольшей близости поверхности трехосного эллипса к поверхности геоида была широко распространена в кругах геодезистов того времени: этим обстоятельством можно объяснить как появление указанных выше работ Г. Н. Шебуева, так и выбор темы первой своей научной работы Ф. Н. Красовским.

Значение этой работы, конечно, не в полученных результатах, а в методической части: введением вспомогательного неизвестного Ф. Н. Красовский свел задачу к решению уравнений градусных измерений, составленных не для поверхности искомого трехосного эллипса, а на более простой поверхности двухосного эллипса. Этим приемом, значительно упрощавшим задачу, всегда пользовались впоследствии как сам Ф. Н. Красовский, так и его ученики.

По возвращении из Пулкова, вступив в коллектив преподавателей Межевого института, Феодосий Николаевич Красовский занялся вопросами преподавания геодезии и организации лабораторной базы.

Нужно иметь в виду, что в дореволюционной России в Межевом институте не было нужной базы для развития высшей геодезии как науки: преподавание высшей геодезии и астрономии было поставлено скромно и ограничивалось удовлетворением нужд Межевого и других ведомств в построении сетей III класса. Сообразно с этим высшая геодезия и астрономия проходились в Межевом институте только в течение двух лет при незначительном числе часов, с одной летней учебной практикой.

С 1907 г. Ф. Н. Красовский, в звании младшего преподавателя, стал читать самостоятельный курс высшей геодезии на третьем и четвертом курсах института, чередуясь по годам с проф. И. А. Ивероновым, а с 1912 г. стал заведывать кафедрой высшей геодезии, получив звание старшего преподавателя; в 1917 г. он имел уже звание ординарного профессора по той же кафедре. С 1907 г. по 1917 г. он преподавал также, по совместительству, геодезию в Московском высшем техническом училище. Вместе с тем, он читает теорию фигуры Земли и ведет практические занятия по астрономии, курс которой читал в то время проф. И. А. Иверонов.

Одновременно проф. Ф. Н. Красовский принимал личное участие в геодезических работах по съемке ряда городов, выполнение которых брал на себя Межевой институт силами студентов, как Курск, Казань, Ревель, Москва, в изысканиях по гидромелиоративным работам в Поволжье, руководил астрономическими работами Переселенческого управления в Сибири, давшими ценный картографический материал для картографирования страны, и пр.

Однако главное внимание в эти дореволюционные годы Ф. Н. Красовский уделял вопросам преподавания: прежде всего, он улучшил постановку зимних и летних практических занятий; создал геодезическую лабораторию, пополнил геодезический кабинет современными высокоточными теодолитами для измерения углов в триангуляциях I класса, построил вышку на здании института с четырьмя столбами для упражнений в угловых измерениях; пополнил тригонометрическую сеть в Перерве, где проводились летние практические занятия по геодезии студентами института, несколькими новыми геодезическими деревянными сигналами и приблизил таким образом летние практические занятия к условиям производства.

Интересуясь сам вопросами так называемой «большой геодезии» и предвидя предстоящее сильное повышение требований к высшей геодезии со стороны народного хозяйства страны после революции, приближение которой в России ясно чувствовалось наиболее передовыми деятелями того времени, к которым относился и Ф. Н. Красовский, он поставил своей целью вести преподавание так, чтобы подготовить своих учеников к выполнению точных геодезических работ на обширных пространствах России, применительно к ее физико-географическим условиям, и дать им необходимое развитие для ясного представления об общих задачах геодезии и особых условиях, в которых находилась отсталая царская Россия.

К решению этой задачи Феодосий Николаевич подошел с двух сторон. Во-первых, надо было разработать методы полевых работ, начиная с методов построения триангуляций I класса. В России был уже опыт построения триангуляции по дуге В. Струве

\* Помещена в данном томе.

и КВТ в течение XIX столетия, а главное — прокладки ряда I класса Пулково — Николаев и прилегающих к нему на западе пяти полигонов I класса, выполненных в 1910—1914 гг. КВТ под общим руководством И. И. Померанцева вполне современными методами и инструментами. Сюда же относится и опыт построения ведомственных триангуляций младших классов, а также опыт по построению триангуляций за рубежом.

Результатом разработки этих вопросов и чтения лекций явился известный труд Ф. Н. Красовского: «О тригонометрических сетях», вышедший в литографированном издании в 1916 г. В нем впервые обстоятельно были изложены методы полевых работ по построению опорных геодезических сетей, включая постройку знаков, базисные и угловые измерения и высокоточное нивелирование, с разделом обработки и уравнивания тригонометрических сетей.

Во-вторых, надо было разработать математическую часть всех вычислений, связанных с обработкой астрономо-геодезических сетей; далее, надо было изучить основные задачи высшей геодезии, стоящие перед русской геодезией, наметить принципиальные схемы и методы их решения, исходя из специфики территории и уровня развития геодезических работ в России.

Все это должно было расширить кругозор учащихся и подготовить их к грядущему практическому решению поставленных задач, выдвигаемых жизнью.

Результаты работы Феодосия Николаевича по этим разделам высшей геодезии вылились в ряд литографированных изданий курса его лекций по высшей геодезии и монографий по отдельным вопросам, характерным для этого предреволюционного периода его научной деятельности.

Стала выявляться характерная и оригинальная особенность школы самого Красовского — исчерпывающая полнота и обстоятельность изложения, с доведением в се<sup>х</sup> выводов до производственных результатов. В своих трудах Ф. Н. Красовский никогда не оставлял недосуменных вопросов, напротив, он как бы предвидел их и шел им навстречу: не случайно поэтому все инженеры производства и научные работники именно у Красовского искали и находили ответы на все возникавшие у них вопросы, — с той конкретностью их постановки, исчерпывающей ясностью и полнотой освещения, которые так характерны для Феодосия Николаевича и его школы. Сам автор разработку каждого вопроса считал законченной и действительно заканчивал ее только тогда, когда получал исчерпывающие ясные ответы на все поставленные им вопросы или вопросы, которые могут быть поставлены или возникнут у его читателей или слушателей. Здесь сказался большой опыт преподавания у Феодосия Николаевича и замечательные черты его как выдающегося методиста своего времени.

Особенно широко развернулась деятельность Ф. Н. Красовского после Великой Октябрьской социалистической революции. Озабоченный правильной постановкой геодезического образования, Ф. Н. Красовский, став в 1919 г. первым выборным ректором Московского межевого института, встал на путь выделения особых факультетов по специальностям: геодезическая, землеустроительная, картографическая и инженерно-мелиоративная. Это мероприятие позволило значительно усилить преподавание геодезии, астрономии и картографических дисциплин. В учебный план геодезического факультета были введены курсы гравиметрии, теории фигуры Земли, фотограмметрии и математической картографии. Были созданы геодезический и гравиметрический кабинеты, построено новое здание астрономической обсерватории, во дворе института построен 240-метровый контрольный базис.

Решающее значение для последующего развития Межевого института как высшего геодезического учебного заведения имело создание в 1919 г. декретом, подписанным В. И. Лениным, Высшего геодезического управления (ВГУ), которому было поручено вести все основные астрономо-геодезические работы, работы по съемке и картографированию страны, объединять и направлять геодезические работы всех ведомств. Создание большой гражданской геодезии в России изменило целевое назначение геодезического факультета Московского межевого института. Питомцам этого факультета предстояло вести все астрономо-геодезические и гравиметрические работы на всем пространстве обширной страны, во всем их многообразии. Нужно было не только освоить уже существующие методы работ и аппаратуру, но и разрешить ряд новых сложнейших вопросов теории и практики геодезического дела, вызванных обширными размерами территории Советского Союза и грандиозностью предстоящих задач социалистического строительства.

Основной задачей института стала подготовка высококвалифицированных кадров геодезистов и картографов для системы ВГУ. Эта задача привела в 1930 г. к дальнейшей дифференциации Межевого института: он распался на два самостоятельных

института — Геодезический и Землеустроительный. К последнему отошел землеустроительный факультет. Инженерно-мелиоративный факультет был передан в Тимирязевскую сельскохозяйственную академию. Геодезический факультет Московского геодезического института (МГИ) был разделен на два отделения: астрономо-геодезическое и аэрофотогеодезическое; последнее отделение вскоре выделилось в самостоятельный факультет. Необходимость организовать отечественное геодезическое инструментостроение заставило открыть факультет оптико-механический, без которого, по мысли Ф. Н. Красовского, развитие русской геодезической школы нельзя было считать законченным. Картографический факультет разделился вскоре на отделения: картографическое, полиграфическое и картографо-геодезическое; последнее было переведено впоследствии на геодезический факультет.

Так постепенно образовался четырехфакультетный вуз, переименованный в 1936 г. в Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (МИГАиК). Эта эволюция явилась, прежде всего, результатом перестройки школы в связи с новыми требованиями жизни и свидетельствует о полнокровности нового геодезического вуза. Проф. Ф. Н. Красовский был душой этого процесса роста высшей геодезической школы. Он лично разрабатывал или участвовал в разработке новых учебных планов и профилей отдельных факультетов, программ курсов, проектов новых кабинетов и лабораторий, создавал учебные пособия, писал фундаментальные учебники по курсу высшей геодезии, читал лекции, организовал и направлял практические занятия студентов, руководил дипломниками и аспирантами и одновременно вел большую научную работу.

Создание Высшего геодезического управления, поставившего новые, невиданные до Октябрьской революции по размаху и своему значению задачи перед гражданской геодезией в России, явилось переломным этапом в формировании Ф. Н. Красовского как геодезиста. Если до этого он решал только отдельные частные задачи геодезии, связанные с городскими съемками, с нивелировками на больших площадях в Заволжье: если самой значительной работой в производстве, которую ему приходилось выполнять до этого, было руководство астрономическими работами Переселенческого управления в Восточной Сибири (1909—1917 гг.) и руководство работами по созданию триангуляции г. Москвы (1919—1921 гг.), то теперь объектом его деятельности как геодезиста стала обширная территория от западных границ СССР до берегов Тихого океана на востоке, во всем разнообразии своих природных факторов и сложности постановки основных геодезических работ на столь обширной территории.

Феодосий Николаевич Красовский одним из первых вступил в число сотрудников Высшего геодезического управления и с тех пор навсегда слился с деятельностью этого учреждения всеми своими помыслами и идеальными устремлениями. Весь предреволюционный период деятельности Феодосия Николаевича можно считать подготовительным к последующей его кипучей деятельности как выдающегося теоретика и практика советской геодезии: в процессе преподавания он разработал методы производства полевых работ при построении основных геодезических опорных сетей и установил математическую основу для обработки результатов этих работ — до вычисления геодезических координат на поверхности принятого референц-эллипсоида включительно, дал принципиальное и методическое решение вопроса о предстоящем установлении исходных геодезических дат и наметил пути научного использования результатов астрономо-геодезических работ в вопросе изучения размеров и формы Земли. Поэтому выпускники Московского межевого института были теоретически вполне подготовлены к решению предстоящих больших задач по геодезическому освоению обширной территории Советского Союза и нуждались только в приобретении практических навыков и в научном руководстве, которое осуществлялось Ф. Н. Красовским с непревзойденным мастерством.

1921 год можно считать годом начала работы Ф. Н. Красовского в ВГУ, когда, освободившись от обязанностей ректора МГИ, он занял сначала должность инспектора работ Московского округа, а затем должность председателя научно-технического совета ВГУ. С 1924 г. по 1930 г. Феодосий Николаевич непосредственно руководил геодезическими работами в должности заместителя начальника Высшего геодезического управления. В эти годы ему пришлось провести огромную организационную и научно-техническую работу по постановке, по существу заново, первоклассных астрономо-геодезических работ: создавать кадры, приобретать оборудование, разрабатывать схему и программу основных геодезических работ, непосредственно ставить их в поле, иногда при личном своем участии, как например, измерение Рязанского базиса I класса в 1923 г., инструктировать руководящий персонал, разрабатывать основные инструкции по производству полевых и камеральных работ и т. д. Трудности

эти были особенно велики, поскольку ВГУ создавалось в наиболее тяжелые первые годы становления Советской власти.

Из научных работ этого периода особенно значительную роль сыграла работа: «Схема и программа государственной триангуляции» (М., 1928), в которой Ф. Н. Красовский, развивая и углубляя опыт работ КВТ, предложил и научно обосновал новую схему построения государственной триангуляции в СССР:

1. Размеры полигонов I класса были уменьшены почти вдвое — с 350 верст до 220 км\*.

2. В узловых фигурах триангуляции астрономические азимуты и широты были заменены двусторонними азимутами Лапласа; кроме того, были запроектированы односторонние азимуты Лапласа в середине каждого звена триангуляции I класса (правда, впоследствии эта часть проекта триангуляции не была осуществлена).

3. Исходя из масштаба съемки в 1 : 25 000, заполнение первоклассных полигонов было запроектировано в виде сплошной сети триангуляции II класса, контролируемой вставкой двух взаимно пересекающихся основных рядов триангуляции II класса, с измерением в месте их пересечения базиса и двустороннего азимута Лапласа. В 1939 г. были сделаны некоторые дополнения особой комиссией ГУГК, в результате которых заполняющая сеть II класса стала достаточно точной и для съемки масштаба 1 : 10 000.

Достоинства схемы и программы государственной триангуляции I класса Ф. Н. Красовского особенно себя выявили много позже, в 1942—1944 гг., когда построенная к тому времени астрономо-геодезическая сеть (на пространстве  $\frac{2}{3}$  территории Советского Союза) была совместно строго уравнена по способу, разработанному проф. Ф. Н. Красовским и усовершенствованному Д. А. Ларином. Оказалось, что только астрономо-геодезическая сеть СССР была строго совместно уравнена, тогда как во всех других странах мира она в лучшем случае уравнивалась приближенными способами. Причина этого состояла в том, что только схема Ф. Н. Красовского позволяла обширную сеть уравнивать строго совместно; в этом проявилось глубокое предвидение Ф. Н. Красовского: разрабатывая свою схему построения астрономо-геодезической сети в СССР, он до известной степени уже предвидел и метод ее уравнивания, хотя вплотную подошел к разрешению этого вопроса значительно позже — в 1931 г. Учитывая этот замечательный успех СССР, некоторые другие страны, как например Франция, стали переделывать свою астрономо-геодезическую сеть, применяя схему Ф. Н. Красовского.

В 1928—1929 гг. основные геодезические работы шли уже полным ходом. Создана была достаточная геодезическая основа на значительной территории, что позволило Высшему геодезическому управлению, а потом Главному геодезическому комитету приступить к плановому картографированию страны. Ф. Н. Красовский занялся вопросом установления масштаба государственной карты. В своей работе: «О масштабах государственной топографической съемки» (М., 1924) он, исходя из потребностей ведомств и народного хозяйства, пришел к выводу, что надо стремиться к получению государственной карты в масштабе 1 : 100 000, хорошо обосновал это положение и остановился на масштабе съемки в 1 : 25 000 крупными массивами как исходного материала для составления указанной выше карты. Вместе с тем, учитывая необходимость составления карты в масштабе 1 : 100 000 в возможно непродолжительные сроки, он выдвинул предложение использовать для ее составления обширные материалы землестроительных и лесных съемок, внеся в них небольшие дополнительные работы по связи между собой отдельных дач и ориентированию их окружных меж хотя бы путем определения астрономических азимутов\*. Для определения таких азимутов он предложил в 1924 г. особый способ\*\*.

К этому периоду относятся и работы Ф. Н. Красовского по математической картографии, в которых он разработал несколько новых проекций, наилучше приспособленных к конфигурации и широтному расположению данной страны, и вопрос об участии географов в составлении топографических карт. В этом последнем вопросе Ф. Н. Красовский, вместе с географом А. А. Борзовым, создал новое направление в картографии, выразившееся в совместной работе при составлении государственных карт картографов с географами и геоморфологами, что в большой мере обогатило содержание карт и подняло их общенаучную ценность. Этим в значительной мере объясняется и тот успех, который выпал на долю первых же капитальных картографических

\* Ф. Н. Красовский. К вопросу об использовании материалов землеустройства и лесоустройства при создании топографической карты. «Землестроитель», 1924.

\*\* Он же. Определение азимута из измерения горизонтального угла между Полярной и вспомогательной звездой, М., 1924.

произведений советских картографов, как карты масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 5 000 000. К этому же времени относится привлечение географов в системе ВГУ к собиранию материалов еще в процессе топографических съемок и к составлению географических описаний к отдельным листам карты масштаба 1 : 100 000. Эти идеи и предложения нашли свое отражение и в учебных планах картографического факультета МГИ — в усилении преподавания геологии, геоморфологии и географии, что значительно подняло ценность специалистов-картографов, выпускемых институтом.

К концу тридцатых годов основная часть геодезических полигонов I класса в Европейской части СССР была уже проложена (к югу от 60-й параллели), и геодезические работы распространялись за Урал. Здесь перед советскими геодезистами возникли новые задачи и трудности, вызванные суровостью и неожитостью Сибири и особыми условиями севера Европейской части Советского Союза, а именно, надо было: пересмотреть и уточнить методы высокоточных линейных и угловых измерений; заново разработать вопрос о выгоднейших типах центров и реперов для разных и чрезвычайно многообразных физико-географических условий обширной территории Советского Союза, две трети которой лежат в области глубокого промерзания и вечной мерзлоты; пересмотреть вопрос о постройке геодезических сигналов; рассмотреть вопрос о методах высокоточного геометрического нивелирования; разработать методы наземной и воздушной фотосъемки, без чего вопрос о картографировании территории Советского Союза не мог быть разрешен; разработать методы обработки и уравнивания первоклассных астрономо-геодезических сетей на больших территориях; установить исходные геодезические даты; наметить программу и методы научного использования полученных обширных геодезических материалов, и т. д.

Весь этот комплекс сложных научных задач требовал неотложного решения и заставил Ф. Н. Красовского поднять вопрос о создании в системе Главного управления геодезии и картографии научно-исследовательского института геодезии и картографии. Последний, названный впоследствии Центральным научно-исследовательским институтом геодезии, аэросъемки и картографии (ЦНИИГАиК), был создан в конце 1928 г.; первым директором его был Ф. Н. Красовский. С 1930 г., освободившись от обязанностей заместителя начальника Главного геодезического управления, Ф. Н. Красовский полностью отдался делу развития научно-исследовательских работ и воспитания необходимых для этого кадров — сначала в должности директора ЦНИИГАиК, а потом — заместителя директора по научной части (1930—1937 гг.).

Несмотря на большие трудности — отсутствие помещения, лабораторий, достаточных кадров, переброска института из Москвы в Ленинград и обратно, к 1937 г. ЦНИИГАиК развился в крупное научно-исследовательское учреждение и приобрел заслуженный авторитет во всесоюзном масштабе и за рубежом. В его составе были секции: геодезическая, аэрофотогеодезическая, картографическая и инструментальная.

Главнейшими достижениями ЦНИИГАиК за первое десятилетие его деятельности были: установление правильных методов высокоточного измерения углов в триангуляции I класса; исследование влияния вертикальной рефракции на результаты высокоточного геометрического нивелирования и установление методики последнего; фундаментальная разработка вопроса оснащения основных рядов триангуляции I класса астрономическими наблюдениями, благодаря чему СССР оказался единственной страной, в которой астрономические наблюдения нашли наиболее эффективное использование в геодезических целях; разработка строгого метода уравнивания больших астрономо-геодезических сетей (способы Ф. Н. Красовского, Н. А. Урмава); разработка методов и аппаратуры аэрофотосъемки, в результате чего этот метод стал основным в государственных съемках до крупных масштабов включительно и значительно ускорил работы по получению государственной топографической карты. Это сыграло огромную роль в деле картографирования страны, удовлетворения нужд ее социалистического хозяйства и успешного выполнения сталинских пятилеток. Были составлены инструкции по всем основным видам астрономо-геодезических работ, давшие твердые научные основы для их постановки в СССР. Ф. Н. Красовским в эти же годы дан основной методический подход к постановке работ по градусным измерениям и сделан первый надежный вывод размеров земного эллипсоида (эллипсоид Красовского 1936 г.). Следует также отметить начало в 1932 г. общей гравиметрической съемки страны, которая оказала большое влияние на надлежащую постановку основных геодезических работ в последующем.

Указанные значительные научные достижения ЦНИИГАиК, являясь плодом работы большого коллектива талантливых советских геодезистов, едва ли были бы возможны без направляющего и, часто, личного участия в них Феодосия Николаевича Красовского, обладавшего громадным диапазоном научного творчества, глубиной и оригинальностью мышления. Этими личными качествами и объясняется непрекращаемый

авторитет Ф. Н. Красовского и его значение для советской геодезии. Блестящие достижения советской картографии также в значительной мере обязаны руководящему влиянию Ф. Н. Красовского, оплодотворившего эту область знания своей идеей о геоморфологическом и географическом подходе к картографическим материалам, что чрезвычайно обогатило советскую карту и вывело ее на первое место в мировой картографии.

Когда ЦНИИГАиК полностью окреп, Ф. Н. Красовский в начале 1937 г. сложил с себя обязанность заместителя директора института и обратил главное свое внимание на работу по кафедре высшей геодезии МИИГАиК, продолжая в то же время руководить в ЦНИИГАиК интересующими его темами по установлению геодезических дат и изучению фигуры геоида; непосредственная разработка этих тем находилась в руках его ученика А. А. Изотова. Используя обширные дуги градусных измерений СССР, простирающиеся от западных границ до меридиана Новосибирска, и материалы градусных измерений Европы и США, А. А. Изотов к 1940 г. получил, под общим руководством Ф. Н. Красовского, наиболее достоверные элементы общего земного эллипсоида ( $a = 6\ 378\ 245\ \text{м}$ ;  $\alpha = 1/298,3$ ), названного впоследствии «эллипсоидом Красовского» и положенного в основу всех астрономо-геодезических работ СССР, вместо применявшегося ранее эллипсоида Бесселя. Позже А. А. Изотов получил элементы ориентирования этого эллипсоида, наилучше подходящие к поверхности геоида на территории СССР, с исходным началом в Пулкове, но с принятием во внимание пункта Мапласа во всех узловых пунктах астрономо-геодезической сети СССР. Этим самым были установлены исходные даты для предстоящего совместного строгого уравнивания всей первоклассной сети Советского Союза. В те же годы Ф. Н. Красовский предложил и разработал метод проектирования при обработке астрономо-геодезической сети СССР, вместо применявшегося ранее во всех странах метода развертывания.

Значение этого нового метода проектирования огромно: в обработку первоклассной тригонометрической сети была внесена полная математическая строгость и ясность и устранены те дополнительные искажения в сети, которые свойственны методу развертывания и в десятки раз понижают точность астрономо-геодезической сети против той, которая свойственна полевым работам. Одновременно по указаниям Ф. Н. Красовского и под его руководством М. С. Молоденский разработал метод астрономо-гравиметрического нивелирования, применение которого позволило получить профили геоида по рядам триангуляции I класса и, тем самым, обусловило возможность применения в последующем, при уравнивании астрономо-геодезической сети СССР, метода проектирования. Это совместное строгое уравнивание сети, выполненное в 1942—1944 гг. Центральной вычислительной частью ГУГК, под общим руководством Ф. Н. Красовского, как бы завершило первый период построения астрономо-геодезической сети СССР. Советский Союз обладает теперь единственной в мире наиболее точной первоклассной сетью, совместно строго уравненной и покрывающей две трети всей его территории. Ни одна другая страна до сих пор не смогла решить удовлетворительно этой основной задачи геодезии.

В своей работе этого периода по МИИГАиК Феодосий Николаевич написал известное «Руководство по высшей геодезии»\*. Вторая часть Руководства была удостоена Сталинской премии первой степени. Этот его труд явился фундаментальным пособием для студентов МИИГАиК, инженеров производства и научных работников. Первая часть посвящена методам полевых работ при построении основных опорных сетей, как горизонтальных, так и высотных, и включает в себя весь опыт полевых работ, накопленный в системе ГУГК до 1937 г., и зарубежный, а также результаты лабораторных и теоретических исследований советских геодезистов; исчерпывающая полнота и ясность изложения привели к тому, что часть I со времени ее первого издания в 1926 г. стала настольным пособием всех геодезистов, в котором они находили ответы на все возникавшие перед ними вопросы. Часть II охватывает геометрию сфероида, решение всех задач на нем и научные вопросы геодезии, связанные с использованием результатов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений для изучения размеров и формы Земли и строения верхней оболочки земной коры. Глубоко оригинальный по своему содержанию и изложению, он концентрирует в себе результаты всей научной деятельности Ф. Н. Красовского. Поэтому значение его выходит далеко за рамки учебного пособия: это — выдающийся научный труд, ведущий, как мы увидим ниже, в вопросах геодезии. Особенно велико значение последних

\* Ф. Н. Красовский. Руководство по высшей геодезии. Ч. I. вып. 1. Геодезиздат, М., 1938. Он же. «Руководство по высшей геодезии». Ч. I. Вып. 2. Геодезиздат, М., 1939. Он же. Руководство по высшей геодезии. Ч. II. Геодезиздат, М., 1942.

глав. IX, X и XI второй части Руководства по высшей геодезии, в которых с большой полнотой освещены все основные проблемы, связанные с уравниванием обширных астрономо-геодезических сетей, с обработкой градусных измерений и получением из них научных выводов о размерах и форме Земли, т. е. проблемы, разработкой которых главным образом занимался Ф. Н. Красовский в последние годы своей жизни.

В главе XI изложен метод Ф. Н. Красовского строгого уравнивания обширных астрономо-геодезических сетей с надлежащей полнотой, с теми дополнениями, которые были внесены автором в последние годы. Стремясь максимально обеспечить независимость вывода длин и азимутов геодезических линий из отдельных звеньев, Ф. Н. Красовский, тщательно анализируя источники погрешностей, пришел к выводу о необходимости повысить точность азимутов Лапласа путем установления так называемых «фундаментальных» азимутов Лапласа через каждые 1000—1200 км, выбираемых и наблюдавшихся с особой тщательностью: предварительное уравнивание между ними промежуточных азимутов Лапласа позволяет заметно повысить их точность.

После того, как Ф. Н. Красовский вывел строгие азимутальные уравнения, дающие к аналогичным уравнениям Гельмерта добавочные члены за деформацию астрономо-геодезической сети при развертывании ее на поверхности референц-эллипсоида, и проанализировал размеры этих членов, он пришел к выводу, что происходящие отсюда искажения в уравненных азимутах Лапласа непренебрежимо малы, приводят к систематическому «закручиванию» геодезических рядов и порождают, тем самым, серьезные деформации в астрономо-геодезической сети в целом. До сих пор в практике всех стран было принято при обработке астрономо-геодезической сети, спроектированной на поверхность геоида, развертывать ее на поверхности принятого референц-эллипсоида, оставляя полученные на уровневой поверхности геоида линии и углы без изменений. Понятно, что при таком развертывании неправильной поверхности геоида на криволинейной поверхности эллипсоида астрономо-геодезическая сеть деформируется. Любопытно, что усилия западноевропейских и, особенно, американских геодезистов были направлены на то, чтобы доказать, что искажения эти незначительны и не имеют практического значения. Если это верно для малых территорий, то для больших, как убедительно показали соответственные исследования, проведенные в 1939 г. профессорами Ф. Н. Красовским и В. В. Даниловым, это совсем не так: довольно указать, что происходящая отсюда ошибка взаимного положения двух пунктов, например Хабаровска и Пулкова, в 30—40 раз превышает ошибку их взаимного положения, обусловленную погрешностями полевых работ. Очевидно, с такими деформациями, вызываемыми дефектами примененного метода уравнивания сети, согласиться нельзя. В результате дальнейшего изучения этого вопроса, в главе XI, проф. Ф. Н. Красовский показывает, что «метод развертывания» не только существенно деформирует астрономо-геодезическую сеть, но искажает и выводимые из обработки ее элементы референц-эллипсоида и его ориентирования; получается не строго математическая обработка, вносящая в координаты пунктов сети неизвестные значительные погрешности. Если с точки зрения картографирования страны с этими погрешностями практически и можно было бы примириться, то принципиально, в целях получения правильных научных выводов с такой «произвольной» обработкой астрономо-геодезической сети соглашаться нельзя. Дефекты метода развертывания особенно остро почувствуются в будущем, когда произойдет соединение астрономо-геодезических сетей разных стран: в местах контакта координаты общих пунктов так разойдутся, что даже «карографическое» контактирование сетей разных стран между собой станет невозможным. В силу всех этих соображений проф. Ф. Н. Красовский предложил метод «развертывания» заменить методом «проектирования» элементов, расположенных на поверхности геоида, на поверхность референц-эллипсоида нормальми к поверхности последнего: получится совершенно точная, строго математически обработанная сеть, свободная от каких-либо дополнительных искажений или деформаций. Метод проектирования впервые был применен при совместном строгом уравнивании всей астрономо-геодезической сети СССР в 1942—1944 гг. и потребовал предварительного установления взаимного положения поверхностей геоида и принятого референц-эллипсоида. Методика составления таких «профилей» геоида и проектирования его элементов (линий и углов) на поверхность референц-эллипсоида тщательно разработана проф. Ф. Н. Красовским в главе IX. Мы видим, таким образом, что в вопросах уравнивания астрономо-геодезических сетей научная мысль советских геодезистов, в лице проф. Ф. Н. Красовского и его учеников, сделала значительный шаг вперед и выдвинула СССР на первое место.

Вопросы градусных измерений и вывода из них элементов земного эллипсоида и его ориентирования интересовали проф. Ф. Н. Красовского, начиная с первой его научной работы 1901 г. о выводе трехосного эллипса из русских градусных изме-

рений. После 1930 г. он вернулся к этому вопросу и в своих многочисленных трудах основательно разработал методику постановки градусных измерений и научного использования их. Тщательно анализируя и критически сопоставляя между собой материалы и выводы главнейших градусных измерений, проф. Ф. Н. Красовский пришел к ряду существенных выводов и предложений: о необходимости надлежащего географического расположения дуг градусных измерений и соединения их между собой в единую систему дуг площадного охвата; о ряде органических недостатков и проис текающей отсюда слабой эффективности гипотезы изостазии при использовании ее в целях вывода поправок к астрономическим пунктам за уклонения отвесных линий; о необходимости учитывать трехосность земного эллипсоида при обработке градусных измерений; о целесообразности отказаться от произвольных предположений и базировать обработку градусных измерений на данных гравиметрической съемки. В результате он предложил новую программу градусных измерений, целесообразно комбинирующую астрономо-геодезические и гравиметрические материалы наблюдений. По этой программе и стали выполняться градусные измерения в СССР. Таким образом, труды Ф. Н. Красовского внесли полную ясность в сложные и тонкие вопросы методики постановки и использования градусных измерений, в частности, фундаментально освещена роль гравиметрии в градусных измерениях и разработана методика использования гравиметрических наблюдений. Все указанные вопросы с исчерпывающей полнотой изложены в главах IX и X.

Работая над вопросом вывода размеров земного эллипсоида и элементов его ориентирования, Ф. Н. Красовский дал оригинальный метод решения этой задачи по превышениям поверхности геоида над поверхностью принятого референц-эллипсоида, изложенный в его работах 1936 г. и в главе IX «Руководства по высшей геодезии», часть II. Метод этот не был еще ни разу применен на практике, но сулит большие выгоды в будущем — по своей простоте и точности.

Из всего изложенного следует, что труд проф. Ф. Н. Красовского «Руководство по высшей геодезии», части I и II, представляет исключительное явление как в русской, так и в зарубежной геодезической литературе. При исключительной ясности и полноте изложения, насыщенности новыми идеями он дает, вместе с тем, исчерпывающие ответы на все вопросы, выдвигаемые советским геодезическим производством. Это и неудивительно, так как Ф. Н. Красовский вложил в свой труд опыт не только более чем сорока летней педагогической деятельности, но и почти десятилетней непосредственной работы на производстве, в должности заместителя начальника ГГУ по научной части, а также опыт почти десятилетнего руководства научной работой ЦНИИГАиК.

Ведя большую научную и педагогическую работу, Ф. Н. Красовский одновременно выполнял и большую общественную работу: принимал участие в ряде геодезических конференций (1921—1929 гг.); работал в Геодезическом комитете при Госплане СССР, в трех геодезических совещаниях при нем (1925—1929 гг.); участвовал в работах Балтийской геодезической комиссии (на VI конференции в Варшаве в 1932 г. и на VII конференции в Москве в 1934 г.); в 1933 г. был избран вице-президентом этой комиссии, а в 1936 г. — ее президентом; писал и делал многочисленные доклады по основным вопросам астрономо-геодезии; читал лекции в разные годы в Военно-инженерной академии им. Куйбышева, на механико-математическом факультете Московского государственного университета; в 1939 г. был назначен членом коллегии Главного управления геодезии и картографии, с 1922 г. состоял экспертом по присвоению учесных званий сначала при Главпрофобре, а затем при Всесоюзном комитете по делам высшей школы, и т. д. Можно сказать, что ни одно крупное мероприятие в области геодезии не проходило без прямого или косвенного участия Ф. Н. Красовского: организация сплошной гравиметрической съемки СССР, составление программы этой съемки; реформа высшего и среднего геодезического образования в Советском Союзе; организация геодезических работ в системе ГУГК и в отдельных ведомствах; рассмотрение планов научно-исследовательских работ ЦНИИГАиК и постановки отдельных исследований и пр. В январе 1939 г. Феодосий Николаевич Красовский был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по отделению физико-математических наук и с 1941 г. работал по линии Института теоретической геофизики АН СССР.

Особо должно быть отмечено пребывание проф. Ф. Н. Красовского в составе коллегии Главного управления геодезии и картографии. Благодаря своему большому авторитету он мог существенно влиять на решения Коллегии по основным вопросам организации геодезических работ в Советском Союзе и методики их выполнения и, тем самым, успешно продолжать проведение генеральной линии, намеченной им еще во время пребывания в Главном геодезическом управлении. Феодосий Николаевич очень дорожил этой возможностью и потому до самой смерти был одним из активнейших членов Коллегии ГУГК.

Последнее десятилетие своей жизни (1939—1948 гг.) Ф. Н. Красовский посвящает, по линии Академии наук СССР, изучению основных вопросов высшей геодезии, связывающих ее со смежными дисциплинами, как гравиметрия, астрономия, геология, геофизика, а именно: продолжает разработку программы и методов градусных измерений, привлекая данные не только астрономо-геодезии, но и геологии, геофизики и гравиметрии; выдвигает вопрос об изучении строения верхней оболочки Земли, пользуясь данными всего комплекса указанных выше дисциплин. Эти два направления работ хорошо представлены в его докладах Академии наук от 1941 и 1947 гг.: «Современные задачи и развитие градусных измерений» и «О некоторых научных задачах астрономо-геодезии в связи с изучением твердой оболочки Земли». Первое из этих направлений, связанное с разработкой нового раздела высшей геодезии — так называемой «геодезической гравиметрии», представлено в настоящее время известными работами члена-корреспондента АН СССР М. С. Молоденского; второе направление ярко представляется учеником Ф. Н. Красовского проф. В. А. Магницким.

Подводя итоги почти полувековой деятельности Феодосия Николаевича Красовского — крупнейшего геодезиста современности, следует сказать, что он сделал огромный вклад в науку, значение которого сейчас трудно даже оценить. Своими блестящими достижениями в постановке обширных геодезических работ и в научном использовании полученных материалов, сделавшими нашу страну социализма ведущей и в области практики геодезии, и в области теории, советская геодезия в значительной мере обязана именно Ф. Н. Красовскому, идеально возглавившему большой коллектив советских геодезистов, которые в основной своей массе являются прямыми или косвенными его учениками.

Другим, еще более важным фактором было то обстоятельство, что весь этот сильный коллектив советских геодезистов был спаян в одну дружную семью пафосом социалистического строительства, единым чувством любви и преданности своему народу, для блага и счастья которого он работал. Находясь где-либо в глухих болот Васюганья, на снежных вершинах Алтая или в дебрях тайги Якутии, советский геодезист не чувствовал себя одиноким — он знал, что за ним стоит весь советский народ, партия, правительство, что он делает большое общественное дело, что он закладывает фундамент величественного здания коммунизма в СССР.

Разве можно от имени Ф. Н. Красовского отделить имена его славных учеников и соратников по работе, таких, как учены-геодезисты М. С. Молоденский, Н. А. Урмаев, А. М. Вироевец, А. А. Изотов, А. С. Чеботарев, В. А. Магницкий, А. И. Дурнев, О. Г. Дитц, К. А. Цветков, Д. А. Ларин, И. Ю. Пранис-Праневич, П. С. Закатов, Н. М. Александровский, Б. В. Фефилов и др., имена энтузиастов геодезического производства, как А. Н. Баранов, С. Г. Судаков, М. К. Кудрявцев, А. В. Рытов, В. Ф. Павлов, П. И. Поваляев и многие другие. Все они, одинаково ревностно работая на своих постах, внесли свой вклад в общее дело славной советской геодезии.

Ф. Н. Красовский так много дал советской геодезии и советскому народу потому, что не будь предшествующей славной культуры русского народа, успехов русской геодезии XIX столетия, не будь Великой Октябрьской социалистической революции, порожденного ею нового социалистического строя и созданных им условий для развития советской геодезии, Ф. Н. Красовский не смог бы развить и выявить в полной мере своих талантов, мы не имели бы того Красовского, каким он является для нас в настоящее время.

Просматривая основные этапы развития научного творчества Ф. Н. Красовского, мы видим, что вся тематика его работ выдвинута жизнью, продиктована ее требованиями к советской геодезии.

Тесная связь советской геодезии с жизнью, с ее требованиями характерна не только для Ф. Н. Красовского, но и для всех советских геодезистов. Это не может быть иначе. Истинная наука не может оторваться от жизни, в противном случае она порвёт связь с той почвой, которая питает ее своими соками. В любой области знания, в том числе и в геодезии, ученый не творит в одиночестве: он опирается на коллектив геодезистов-современников и представителей смежных дисциплин, на результаты лабораторных и полевых исследований, в особенности на материалы обширных полевых работ, так как поле, природа — главная лаборатория для геодезистов. Большие полевые материалы могут быть получены только трудом мощного коллектива геодезистов, который поддерживает государство — весь народ. Таким образом успехи Ф. Н. Красовского — это успехи всего коллектива советских геодезистов и от него неотделимы.

Живая связь с жизнью, с производством оплодотворила не только научную работу Ф. Н. Красовского, но и его педагогическую деятельность: именно поэтому устное и печатное слово Феодосия Николаевича и отличаются такой конкретностью и ясностью изложения, а само научное творчество так полно новыми идеями и так поражает глубиной и силой интуиции.

В связи с этим невольно вспоминается определение передовой науки, данное И. В. Сталиным, — «той науки, которая не отгораживается от народа, не держит себя вдали от народа, а готова служить народу, готова передать народу все завоевания науки, которая обслуживает народ не по принуждению, а добровольно, с охотой»\*.

Несомненно, Ф. Н. Красовский был истинным представителем той науки, о которой говорил И. В. Сталин, которая процветает в Советском Союзе и имеет такие замечательные достижения.

Теперь, когда Феодосия Николаевича среди нас нет, совершенно особое значение приобретают его труды. Собранные вместе в одном издании, они долгие годы будут служить нейссякяемым источником новых мыслей и идей в геодезии для современных нам геодезистов и для будущих поколений. В свое время Ф. Н. Красовский прекрасно сказал: «беседа через книгу «Дуга меридиана» с этим большим умом (В. Струве. — Прим. ред.), талантливым теоретиком и большим практиком, действительно необходима для воспитания начинающего геодезиста и полезна опытному, много работавшему геодезисту для проверки самого себя»\*\*. Эти слова в не меньшей степени относятся и к трудам самого Ф. Н. Красовского.

Москва, декабрь 1952 г.

В. Данилов

---

\* И. В. Сталин. Речь тов. Сталина на приеме в Кремле работников высшей школы 17 мая 1938 г. Госполитиздат, М., 1938, стр. 3.

\*\* Ф. Н. Красовский. Руководство по высшей геодезии. Ч. II. Геодезиздат. М., 1942, стр. 441.

## Часть I

# **РАБОТЫ ПО ВОПРОСАМ ИЗУЧЕНИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ**

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЗЕМНОГО ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА ИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РУССКИХ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ\*

§ 1. Меридиан и первый вертикаль на трехосном эллипсоиде. Зависимость между широтою и долготою точки эллипсоида и углами, образуемыми нормалью, проведеною в этой точке, с главными осями эллипсоида

Допустив, что поверхность Земли есть поверхность трехосного эллипсоида с малою осью, расположенной по оси мира, — отнесем этот земной эллипсоид к системе  $XOYZ$ , в которой начало лежит в центре эллипсоида  $O$ , ось  $OZ$  совпадает с его малою осью  $s$  и направлена, следовательно, по оси мира; ось  $X$  и ось  $Y$  направлены соответственно по большой и средней осям эллипсоида; плоскость  $XOY$  — плоскость экватора и плоскость  $ZOX$  — плоскость наибольшего меридиана. Вообразим теперь в точке  $m$  эллипсоида другую систему прямоугольных координат —  $\zeta m \xi \eta$ , — в которой: ось  $\zeta m$  направлена по нормали в  $m$ ; ось  $m \eta$  — перпендикулярна к  $\zeta m$  и  $OZ$ ; ось же  $m \xi$  — перпендикулярна к  $\zeta m$  и  $m \eta$ .

Конечно, ось  $m \eta$  параллельна той прямой, которая служит кратчайшим расстоянием между двумя, не лежащими в одной плоскости прямыми  $\zeta m$  и  $OZ$ .

В этой левой системе координат плоскость  $\zeta m \xi$  есть меридиан места  $m$ , а плоскости  $\zeta m \eta$  и  $\xi m \eta$  суть соответственно первый вертикаль и горизонт точки  $m$ .

Чтобы убедиться в справедливости сказанного о значении плоскостей системы  $\zeta \eta \xi$ , предварительно посмотрим, какое определение должно дать меридианной плоскости в случае трехосного эллипсоида.

В астрономии меридианом места наблюдения называется плоскость, проходящая через полюс мира и зенит. Считая за идеальную земную поверхность ту, которая везде нормальна к направлению силы тяжести, так что в каждом месте этой поверхности зенит усматривается по направлению нормали, — предыдущее определение меридиана, очевидно, можно выразить и так: *меридианом места называется плоскость, проходящая через нормаль этого места и параллельная оси мира*. Когда при изучении вопросов геодезии, отрешаются от представления Земли, как тела вращения, тогда только что приведенное определение меридиана должно заменить то обычное определение, в основании которого лежит признак прохождения меридианной плоскости через полюсы Земли.

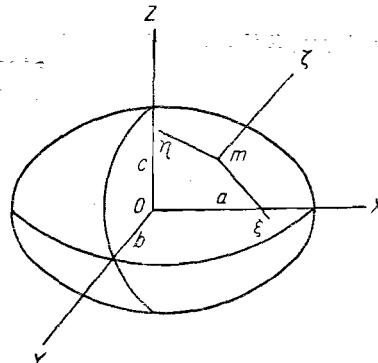
\* Литература. Г. Н. Шебуев. Геометрические основания геодезии на трехосном эллипсоиде, весьма мало отличающемся от сфероида. Труды топ.-геод. комиссии, вып. V. Г. Н. Шебуев. Расстояния, азимуты и треугольники на трехосном эллипсоиде, мало отличающемся от сферы. Труды топ.-геод. комиссии, вып. VIII. Кларк. Геодезия, перевод В. Витковского. Записки Военно-топографического отдела Главного Штаба. Томы XVII и L.

Обращаясь теперь к системе  $\zeta\eta\xi$ , мы, из перпендикулярности  $m\eta$  к плоскости  $\zeta m\xi$  и линии  $OZ$ , заключаем, что плоскость  $\zeta m\xi$  параллельна  $OZ$ . Итак, плоскость  $\zeta m\xi$  параллельна оси мира и проходит через нормаль  $m\xi$ ; другими словами, плоскость  $\zeta m\xi$  есть *меридиан* пункта  $m$ . Вертикаль  $\zeta m\eta$ , перпендикулярный к меридиану  $\zeta m\xi$ , — есть, очевидно, *первый вертикаль* пункта  $m$ ; очевидно также, что плоскость  $m\eta$  есть горизонт  $m$ .

Обозначим теперь косинусы углов нормали  $m\xi$  с осями  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  через  $L$ ,  $M$  и  $N$ , мы будем иметь следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\eta x) \cdot 0 + \cos(\eta y) \cdot 0 + \cos(\eta z) \cdot 1 &= 0 \\ \cos(\eta x) \cdot L + \cos(\eta y) \cdot M + \cos(\eta z) \cdot N &= 0 \\ \cos^2(\eta x) + \cos^2(\eta y) + \cos^2(\eta z) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

из которых два первых выражают условие перпендикулярности  $m\eta$  к  $OZ$  и  $m\xi$ . Из равенств (1) следует:



Заметим теперь, что угол между  $m\xi$  и плоскостью  $XOY$  (как угол между нормалью и плоскостью экватора) равен геодезической широте  $\varphi$  точки  $m$ , так что угол  $(\zeta z) = 90 - \varphi$ .

Условившись, кроме того, долготы отсчитывать от плоскости  $XOY$ , т. е. от плоскости наибольшего меридiana, видим, что долгота  $\lambda$  точки  $m$  есть угол между плоскостями  $\zeta m \xi$  и  $ZOX$ ; конечно,

тот же угол  $\lambda$  образуется и между перпендикулярами к этим плоскостям, т. е. долгота  $\lambda$  точки  $m$  есть угол между  $oy$  и  $m\eta$ .

На основании сказанного о широте и долготе точки  $m$ , а также равенств (1) и (2), мы можем написать следующие равенства:

$$\cos(\zeta z) = N = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi;$$

$$\cos(\eta y) = \cos \lambda = \frac{L}{\sqrt{1 - N^2}} = \frac{L}{\cos \varphi},$$

или

$$\left. \begin{aligned} N &= \sin \varphi; \quad L = \cos \varphi \cos \lambda \\ M^2 &= 1 - N^2 - L^2 = \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda; \quad M = \cos \varphi \sin \lambda \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

## § 2. Зависимость между прямоугольными координатами, широтою и долготою точки трехосного эллипсоида

На основании равенств (3)  $\cos \varphi \cos \lambda$ ,  $\cos \varphi \sin \lambda$  и  $\sin \varphi$  представляют косинусы углов, образуемых нормалью  $m\xi$  к эллипсоиду с его главными осями.

Уравнение земного эллипсоида есть

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где  $a > b > c$ .

Положим:

$$a^2 = \rho^2(1+i); \quad b^2 = \rho^2(1-i); \quad c^2 = \rho^2(1-e^2).$$

Уравнение нормали пишется так:

$$\frac{x-\zeta}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{y-\eta}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{z-\xi}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

При прямоугольной системе координат  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$  пропорциональны косинусам углов, образуемых нормалью с соответствующей осью, почему в данном случае мы можем написать:

$$\frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\sin \varphi}{\frac{z}{c^2}},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\frac{x}{a}} &= \frac{b \cos \varphi \sin \lambda}{\frac{y}{b}} = \frac{c \sin \varphi}{\frac{z}{c}} = \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + c^2 \sin^2 \varphi}; \\ \frac{x}{a^2} &= \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\rho \Delta}; \quad \frac{y}{b^2} = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\rho \Delta}; \quad \frac{z}{c^2} = \frac{\sin \varphi}{\rho \Delta}, \end{aligned} \quad (4)$$

т.е.

$$\rho \Delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + c^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя в равенство (4) вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно  $\rho \sqrt{1+i}$ ,  $\rho \sqrt{1-i}$ ,  $\rho \sqrt{1-e^2}$ , получаем искомую зависимость между  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\rho(1+i) \cos \varphi \cos \lambda}{\Delta} \\ y &= \frac{\rho(1-i) \cos \varphi \sin \lambda}{\Delta} \\ z &= \frac{\rho(1-e^2) \sin \varphi}{\Delta} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}.$$

### § 3. Определение длины дуг меридиана и параллели на трехосном эллипсоиде

Систему равенств (5) можно рассматривать как эквивалентную уравнению трехосного эллипсоида. Дифференциал дуги кривой, заданной уравнением

$$\lambda = f(\varphi),$$

получится из выражения

$$\left[ \frac{ds}{d\varphi} \right]^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 + \\ + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 = F + 2G \frac{d\lambda}{d\varphi} + H \cdot \left( \frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2. \quad (6)$$

Если же кривая имеет уравнение:  $\varphi = f(\lambda)$ , то дифференциал ее дуги получится из выражения

$$\left[ \frac{ds}{d\lambda} \right]^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \\ + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = F \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + 2G \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} + H. \quad (7)$$

В обеих формулах (6) и (7) знак « $\partial$ » указывает на частную производную и в обеих же формулах через  $F$ ,  $G$  и  $H$  обозначены одни и те же, именно, следующие величины

$$\left. \begin{aligned} F &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \\ G &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ H &= \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Когда кривая  $\lambda = f(\varphi)$  есть меридиан некоторой поверхности ( $\lambda = \text{const}$ ), выражение (6) значительно упрощается, так как в этом случае  $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$ .

Для меридианной кривой просто будем иметь

$$ds = \sqrt{F} d\varphi.$$

В случае параллели ( $\varphi = \text{const}$ ) значительно упростится выражение (7); для параллели просто будет

$$ds = \sqrt{H} d\lambda.$$

Таким образом вычисление дифференциалов дуг меридиана и параллели сводится к вычислению  $F$  и  $H$  или же к вычислению:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial \lambda}.$$

При этом вычислении мы будем пренебрегать степенями  $e$ , высшими четвертой, степенями  $i$ , высшими первой, а также произведениями  $ie^2$ ,  $ie^3\dots$  и т. д., так как величины  $i$  и  $e$ , характеризующие экваториальное сжатие и полярный эксцентриситет эллипсоида, суть величины очень малые.

Приступим к вычислению величин  $F$  и  $H$ .

Во-первых, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} &= -\frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi + i \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\lambda}{\Delta}; \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} &= -i \frac{\cos^2 \varphi \sin 2\lambda}{\Delta}; \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \rho (1+i) \cos \lambda \frac{-\sin \varphi \cdot \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \rho (1-i) \sin \lambda \frac{-\sin \varphi \cdot \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \cdot \cos \varphi}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= \rho (1-e^2) \frac{\cos \varphi \cdot \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \cdot \sin \varphi}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \rho (1+i) \cos \varphi \cdot \frac{-\sin \lambda \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \cos \lambda}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \rho (1-i) \cos \varphi \cdot \frac{\cos \lambda \cdot \Delta - \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} \cdot \sin \lambda}{\Delta^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \rho (1-e^2) \sin \varphi \left( \frac{-\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}}{\Delta^2} \right).\end{aligned}$$

Теперь путем простого алгебраического подсчета не трудно убедиться, что:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\frac{\rho (1+i) \cos \lambda \sin \varphi (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}; \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -\frac{\rho (1-i) \sin \lambda \sin (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= \frac{\rho (1-e^2) \cos \varphi (1+i \cos 2\lambda)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}; \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\frac{\rho (1+i) \cos \varphi \sin \lambda (1-e^2 \sin^2 \varphi - i \cos^2 \varphi)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}; \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \frac{\rho (1-i) \cos \varphi \cos \lambda (1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \rho (1-e^2) \sin \varphi \cdot \frac{i \cos^2 \varphi \sin 2\lambda}{(1-e^2 \sin^2 \varphi + i \cos^2 \varphi \cos 2\lambda)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, получим:

$$F = \frac{\rho^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \left\{ (1 - i \cos 2\lambda (1 - 3 \sin^2 \varphi)) \right\}; \quad (9)$$

$$H = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \left\{ 1 - 2i \cos 2\lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \right\}. \quad (10)$$

Теперь можно написать такие равенства:

$$ds = \sqrt{F} \cdot d\varphi = \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \sqrt{1 - i (1 - 3 \sin^2 \varphi) \cos 2\lambda} \cdot d\varphi; \quad (11)$$

$$ds_1 = \sqrt{H} \cdot d\lambda = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \left\{ 1 - 2i \cos 2\lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \right\}^{1/2} d\lambda, \quad (12)$$

из которых (11) выражает дифференциал дуги меридиана, а (12) — дифференциал дуги параллели.

Чтобы получить длины  $S$  и  $S_1$  самых дуг меридиана и параллели, нужно, считая в (11) переменным интеграции  $\varphi$  и изменяя его от  $\varphi$  до  $\varphi_1$ , а в (12) принимая за переменное интеграции  $\lambda$  и изменяя его от  $\lambda$  до  $\lambda_1$  — обинтегрировать эти оба равенства. В результате первой интеграции, получим  $S$  — дугу меридиана с долготою  $\lambda$ , конечные точки которой имеют широты  $\varphi$  и  $\varphi_1$ ; в результате же второй интеграции получим  $S_1$  — дугу параллели под широтою  $\varphi$ , долготы конечных точек которой от плоскости наибольшего меридиана суть  $\lambda$  и  $\lambda_1$ .

Выполним сперва интеграцию формулы (11):

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (1 - i [1 - 3 \sin^2 \varphi] \cos 2\lambda)^{1/2} d\varphi = \\ &= \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi - \frac{i}{2} \cos 2\lambda \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi + \\ &\quad + \frac{3}{2} i \cos 2\lambda \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2) \sin^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, пренебрегая в последнем члене произведениями  $i e^2$ , получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi - \frac{i \cos 2\lambda}{2} \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \\ &\quad + \frac{3}{4} i \rho \cos 2\lambda \int_{\varphi}^{\varphi_1} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi; \\ S &= \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi - \frac{i \cos 2\lambda}{2} \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2) d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \\ &\quad + \frac{3}{4} i \rho \cos 2\lambda (\varphi_1 - \varphi) - \frac{3}{8} i \rho \cos 2\lambda (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Обратим внимание на

$$\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi;$$

не трудно видеть, что это выражение есть дуга меридиана, рассчитанная на сфероиде с большою полуосью  $\rho$  и эксцентриситетом  $e$ ; такой сфероид мы получим, полагая в уравнениях трехосного эллипсоида  $i = 0$ . Обозначим

$$\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi \text{ через } S_0.$$

Тогда (13) перепишется так:

$$S = S_0 - \frac{i}{2} S_0 \cos 2\lambda + \frac{3}{4} i\rho \cos^2 \lambda \left\{ (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi \right\}. \quad (14)$$

Это выражение можно считать окончательным для дуги меридиана трехосного эллипсоида.

Всматриваясь в формулу (14), мы видим, что длина  $S$  дуги меридиана трехосного эллипсоида зависит не только от широт конечных точек меридианной кривой, но и от положения этой кривой относительно плоскости наибольшего меридиана, т. е. от долготы  $\lambda$ , что вполне понятно, так как кривизна различных (с разными долготами) меридиановых кривых трехосного эллипсоида различна. Кроме того, замечаем, что эта длина  $S$  получается из  $S_0$  посредством прибавления к этой последней величине незначительных поправок, в которые и входит долгота  $\lambda$ ; отсюда следует, что ошибка в определении  $\lambda$  может быть допущена несравненно большая, чем в определении широт.

Займемся теперь интегрированием (12):

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \left\{ 1 - 2i \cos \lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \right\}^{1/2} d\lambda = \\ &= \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} d\lambda - \frac{i\rho \cos \varphi \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \int_{\lambda}^{\lambda_1} \cos 2\lambda d\lambda; \\ S_1 &= S'_0 - \frac{i\rho \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right)}{2 \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} (\sin 2\lambda_1 - \sin 2\lambda) \cos \varphi; \\ S_1 &= S'_0 - \frac{i\rho \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda) \cos(\lambda_1 + \lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Формулу (15) можно считать окончательной для длины  $S_1$  дуги параллели трехосного эллипсоида, имеющей широту  $\varphi$  и долготы конечных точек которой есть  $\lambda_1$  и  $\lambda$ .

Через  $S'_0$  в этой формуле обозначено выражение, равное

$$\int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} d\lambda,$$

которое есть не что иное, как дуга параллели, конечные точки которой имеют ту же разность долгот  $\lambda_1 - \lambda$ , но которая вычислена на сфероиде с размерами, получающимися из размеров трехосного эллипсоида при  $i = 0$ ; из формулы (15) видно, что дуга  $S_1$  параллели трехосного эллипсоида получается из  $S'_0$  прибавлением незначительного поправочного члена. В этот поправочный член входит  $\cos(\lambda' + \lambda)$ , что указывает на

то, что длина дуги параллели трехосного эллипсоида есть функция не только широты ее и величины разности долгот конечных точек, но и абсолютных величин этих долгот, т. е. положения этой дуги относительно наибольшего меридиана.

Впрочем, так как  $\cos(\lambda' + \lambda)$  входит лишь в поправочный член, то, для вычисления  $S_1$ , значения  $\lambda_1$  и  $\lambda$  нужно знать с несравненно меньшей точностью, чем разность  $\lambda_1 - \lambda$ , которая и наблюдается.

*Замечание.* Формулы (14) и (15) могут быть несколько упрощены. Именно, в (15) во втором члене можно отбросить, без ущерба принятой точности, знаменатель  $\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}$ . В формуле же (14), в третьем члене можно выделить  $\left[ +\frac{3}{4} i\rho \cos 2\lambda (\varphi_1 - \varphi) \right]$  и, считая, что

$$-\frac{1}{2} i \cos 2\lambda S_0 = -\frac{1}{2} i \cos 2\lambda \rho (\varphi_1 - \varphi),$$

привести  $-\frac{1}{2} \cos 2\lambda \rho (\varphi_1 - \varphi)$  с  $\cos 2\lambda \frac{3}{4} i\rho (\varphi_1 - \varphi)$ , чтобы в результате получить

$$S = S_0 + \frac{1}{4} i\rho \cos 2\lambda [(\varphi_1 - \varphi) - 3 \sin(\varphi_1 - \varphi) \cos(\varphi_1 - \varphi)].$$

#### § 4. Определение размеров трехосного эллипсоида из градусных измерений

Дуга меридиана эллипсоида, на основании формулы (14), равна:

$$S = S_0 - \frac{i}{2} S_0 \cos 2\lambda + \frac{3}{4} i\rho \cos 2\lambda \left\{ (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin^2 \varphi) \right\}.$$

Дуга параллели, на основании формулы (15) равна:

$$S = S'_0 - \frac{i\rho \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin(\lambda_1 - \lambda) \cos(\lambda_1 + \lambda).$$

Градусные измерения обычно доставляют такие данные: длины  $S$  и  $S_1$  меридианов и параллелей, широты  $\varphi$  и  $\varphi_1$  и разность долгот астрономических точек градусного измерения. Долгота  $\lambda$  пункта градусного измерения от плоскости наибольшего меридиана не может быть определена, если неизвестно положение этой плоскости относительно какого-нибудь пункта земной поверхности. А так как определение положения плоскости наибольшего меридиана и составляет нашу задачу, то величины  $\lambda$ , входящие в (14) и (15), нам неизвестны.

Обозначив долготу пункта градусного измерения от какого-либо пункта земной поверхности через  $\lambda'$ , можем написать, что долгота  $\lambda$  того же пункта градусного измерения от плоскости наибольшего меридиана равна  $(\lambda' + x)$ , где  $x$  есть долгота относительно плоскости наибольшего меридиана того пункта, от которого считается  $\lambda'$ . Подставляя же в (14) и (15)  $\lambda' + x$  везде вместо  $\lambda$ , получим:

$$S = S_0 - \frac{i}{2} S_0 \cos 2(\lambda' + x) + \frac{3}{4} i\rho \cos 2(\lambda' + x) \left\{ (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 - \sin^2 \varphi \right\}; \quad (16)$$

$$S_1 = S'_0 - \frac{i\rho \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin(\lambda'_1 + \lambda') \cos(\lambda'_1 + \lambda' + 2x). \quad (17)$$

В этих формулах неизвестными являются  $\rho$ ,  $i$ ,  $e$  и  $x$ . Величины  $S_0$  и  $S'_0$  рассчитываются на сфериоде, размеры которого получаются из размеров трехосного эллипсоида, полагая  $i = 0$ ; если же размеры трехосного эллипсоида неизвестны и подлежат сами определению, то и этот сфериод, в отношении его размеров, остается нам неизвестным. Однако можно заранее сказать, что если определить сперва большую ось и эксцентриситет сфериода из каких-нибудь градусных измерений, а затем, пользуясь тем же материалом, определить размеры трехосного эллипсоида, то  $\rho$  и  $e$  этого последнего будут весьма мало отличаться от большой полуоси и эксцентриситета определенного прежде сферонида.

Мы прямо допустим, что размеры такого сферонида равны  $i$  и  $e$  трехосного эллипсоида, вычисленного из того же материала, как и этот сферонид. Благодаря этому допущению, нам придется иметь дело лишь с определением  $i$  и  $x$ , так как вместо  $\rho$  и  $e$  трехосного эллипсоида, выведенного из русских градусных измерений, мы можем взять большую полуось и эксцентриситет сферонида, определенные профессором Ждановым также из русских градусных измерений.

Приняв все сказанное во внимание, мы все вычисления будем вести по следующему плану. Будем искать прежде всего приближенные значения для величин  $i$  и  $x$ , которые обозначим через  $i_m$  и  $x_m$ .

Основываясь на том, что, по определению Кларка, плоскость наибольшего меридиана проходит вблизи Гринвича, сперва допустим, что эта плоскость проходит через Париж. Тогда, подставив в (16) и (17) instead вместо  $\lambda' + x$  просто долготу от Парижа, мы получим возможность определить величину  $i_0$  из уравнений такого вида:

$$S = S_0 - \frac{i_0}{2} S_0 \cos 2\lambda_\pi + \frac{3}{4} i_0 \rho \cos 2\lambda_\pi \left\{ \varphi_1 - \varphi - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\},$$

$$S_1 = S'_0 - \frac{i_0 \rho \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi),$$

где через  $\lambda_\pi$  обозначена долгота от Парижа.

Эти равенства напишем так:

$$\frac{S - S_0}{\rho} = - \frac{i_0 - S_0}{2\rho} \cos 2\lambda_\pi + \left\{ \varphi_1 - \varphi - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\}; \quad (18)$$

$$\frac{S_1 - S'_0}{\rho} = - \frac{i_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi). \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$\frac{S - S_0}{\rho} = A; - \frac{S_0}{2\rho} = B;$$

$$\frac{3}{4} \left\{ \varphi_1 - \varphi - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\} = C; B + C = D.$$

Тогда уравнение (18) напишется так:

$$A = i_0 D \cos 2\lambda_\pi, \text{ откуда } i_0 = \frac{A}{D \cos 2\lambda_\pi}. \quad (20)$$

Каждая дуга меридиана даст нам уравнение вида (20) для определения  $i_0$ .

Введем теперь обозначения для уравнения (19):

$$\frac{S_1 - S'_0}{\rho} = A_1; \quad \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = B_1.$$

Уравнение (19) напишется так:

$$A_1 = -i_0 B_1 \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi),$$

откуда

$$i_0 = -\frac{A_1}{B_1 \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi)}. \quad (21)$$

Каждая дуга параллели приведет нас к уравнению вида (21) для определения  $i_0$ .

За искомую приближенную величину  $i_m$  примем среднее арифметическое из всех полученных указанным путем значений  $i_0$ . Теперь, подставив  $i_m$  в равенства (16) и (17) вместо  $i$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{S - S_0}{\rho} &= -\frac{i_m}{2} \frac{S_0}{\rho} \cos 2(\lambda_\pi + x) + \\ &+ \frac{3}{4} i_m \cos 2(\lambda_\pi + x) \left\{ \varphi_1 - \varphi - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\}; \\ \frac{S_1 - S'_0}{\rho} &= -i_m \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi\right) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x), \end{aligned}$$

где  $\lambda_\pi$  — долгота пункта от Парижа, а  $x$  — долгота Парижа от плоскости наибольшего меридиана. Пользуясь прежними обозначениями, два только что написанные уравнения можно переписать так:

$$A = D i_m \cos 2(\lambda_\pi + x); \quad (22)$$

$$A_1 = -i_m B_1 \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x). \quad (23)$$

Величины  $A$ ,  $D$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $\sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi)$ ,  $i_m$ , стоящие в формулах (22) и (23), уже вычислены при определении  $i_m$ . Каждая дуга меридиана доставит нам уравнение вида (22) и каждая дуга параллели — уравнение вида (23) для определения значения  $x_0$ . За искомую приближенную величину  $x_m$  принимаем среднее из всех вычисленных указанным путем значений  $x_0$ .

Обозначая теперь поправки величин  $i_m$  и  $x_m$  через  $\Delta i$  и  $\Delta x$ , можем написать такие уравнения:

$$A - D i_m \cos 2(\lambda_\pi + x_m) - \Delta i \cdot D \cos 2(\lambda_\pi + x_m) + \\ + 2 D i_m \sin 2(\lambda_\pi + x_m) \Delta x = 0;$$

$$A_1 + B_1 i_m \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m) + \\ + \Delta i B_1 \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m) - \\ - 2 B_1 i_m \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \sin(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m) \Delta x = 0.$$

Эти два уравнения приведем к такому виду:

$$\frac{A}{D \cos 2(\lambda_\pi + x_m)} - i + 2 i_m \operatorname{tg} 2(\lambda_\pi + x_m) \cdot \Delta x_m = 0; \quad (24)$$

$$\frac{A_1}{B_1 \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m)} + i - \\ - 2 i_m \operatorname{tg}(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m) \cdot \Delta x = 0. \quad (25)$$

Уравнение вида (24) доставит каждая дуга меридиана; уравнение вида (25) — каждая дуга параллели. Решая все подобные уравнения по способу наименьших квадратов, получим вероятнейшие значения величин  $i$  и  $\Delta x$ . Обозначая теперь большую полуось и эксцентриситет сфероида через  $\rho$  и  $e$ , определим размеры трехосного эллипсоида по следующим формулам:

$$a^2 = \rho^2 (1 + i); \quad \mu = \frac{a - b}{a} = i;$$

$$b^2 = \rho^2 (1 - i); \quad \mu' = \frac{a - c}{a};$$

$$c^2 = \rho^2 (1 - e^2); \quad \mu'' = \frac{b - c}{b},$$

где  $\mu$  — сжатие экваториальное,

$\mu'$  — сжатие наибольшего меридиана,

$\mu''$  — сжатие наименьшего меридиана.

Угол  $x$  определит, кроме того, положение плоскости наибольшего меридиана относительно Парижа.

Таков план вычисления при упрощающих задачу допущениях, приведенных в этом параграфе.

### § 5. Вычисление размеров трехосного эллипсоида из русских градусных измерений

В записках военно-топографического отдела Главного Штаба (часть 1) приведены окончательные результаты русских градусных измерений двух параллелей под широтами  $47\frac{1}{2}^\circ$  и  $52^\circ$  и трех меридианов, связывающих эти параллели. Эти результаты следующие:

## Дуги меридианов

| Названия точек                                 | Астрономические широты | S,<br>в метрах |
|--|------------------------|----------------|
| 1. Водолуй . . . . .                           | 47° 1'25",2            | 192093,2       |
| 2. Супрунковцы . . . . .                       | 48 45 3 ,1             | 149591,2       |
| 3. Кременец . . . . .                          | 50 5 50 ,0             | 124894,6       |
| 4. Ковель, собор . . . . .                     | 51 13 9 ,3             | 91875,0        |
| 5. Белиц . . . . .                             | 52 2 42 ,2             | 181924,0       |
| 6. Гродно, астрономическая точка . . . . .     | 53 40 46 ,1            |                |
| 1. Петровская . . . . .                        | 47 44 9 ,14            | 252026,8       |
| 2. Харьков, временная обсерватория . . . . .   | 50 0 9 ,68             | 328013,1       |
| 3. Орел . . . . .                              | 52 57 2 ,81            |                |
| 1. Сарепта, пирамида . . . . .                 | 48 29 52 ,76           | 1508,1         |
| 2. Сарепта, кирха . . . . .                    | 48 30 41 ,59           | 335454,1       |
| 3. Саратов, колокольня нового собора . . . . . | 51 31 37 ,5            |                |

## Дуги параллелей

| Названия точек              | Астрономические разности долгот | S,,<br>в метрах |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------|
| 1. Ченстохов . . . . .      | 1°53'57",60                     | 130 452,4       |
| 2. Варшава . . . . .        | 2 47 53 ,50                     | 192 314,5       |
| 3. Гродно . . . . .         | 5 23 46 ,50                     | 370 463,3       |
| 4. Бобруйск . . . . .       | 6 50 23 ,70                     | 469 605,9       |
| 5. Орел . . . . .           | 3 32 18 ,15                     | 243 133,1       |
| 6. Липецк . . . . .         | 6 26 25 ,35                     | 442 099,2       |
| 7. Саратов . . . . .        | 4 2 21 ,60                      | 277 682,2       |
| 8. Самара . . . . .         | 5 1 35 ,85                      | 345 068,0       |
| 9. Оренбург . . . . .       |                                 |                 |
| 1. Кишинев . . . . .        | 3 8 10 ,23                      | 236 446,4       |
| 2. Николаев . . . . .       | 3 12 38 ,94                     | 241 854,5       |
| 3. Александровск . . . . .  | 4 31 46 ,05                     | 341 221,9       |
| 4. Ростов-на-Дону . . . . . | 4 50 31 ,08                     | 364 509,0       |
| 5. Сарепта, кирха . . . . . | 3 28 48 ,81                     | 262 430,5       |
| 6. Астрахань . . . . .      |                                 |                 |

Пользуясь одним этим материалом, профессор Жданов определил размеры того сфероида, поверхность которого всего ближе подходит к

поверхности зоны, охваченной приведенными измерениями. Эти размеры суть:

$$\rho = a = 6377717 \pm 307 \text{ м} \lg \varphi = 6.8046653$$

и

$$\mu = \frac{1}{299,7 \pm 6,9}.$$

Имея в своем распоряжении все эти данные, приступим сперва к вычислению коэффициентов  $A, B, C, D, A_1$  и  $B_1$  формул § 4.

При вычислении  $\frac{S_0}{\rho}$  будем пользоваться формулой, данной проф. Ждановым:

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{\rho} = & \left(1 - n + \frac{5}{4} n^2\right) (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2} (3n - 3n^2) [\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi] + \\ & + \frac{15}{16} n^2 [\sin 4\varphi_1 - \sin 4\varphi], \end{aligned}$$

подставляя в нее следующую величину  $n$ , соответствующую размерам сфероида Жданова:

$$n = 0,0016714 \text{ и } \lg n = 7.22308.$$

С этими данными:

$$1 - n + \frac{5}{4} n^2 = 0,9983321; \lg \left[1 - n + \frac{5}{4} n^2\right] = 9.9992750;$$

$$\lg \frac{1}{2} (3n - 3n^2) = 7.39844; \lg \frac{15}{16} n^2 = 4.41813.$$

Для вычисления разностей  $[\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi]$  и  $[\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi]$ , представляем их в виде:

$$\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi = 2 \sin (\varphi' - \varphi) \cos (\varphi' + \varphi);$$

$$\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi = 2 \sin 2(\varphi' - \varphi) \cos 2(\varphi' + \varphi).$$

Следующие две таблицы (1 и 2) содержат все величины, необходимые для вычисления  $A, B$  и  $C$  для девяти выписанных раньше дуг меридианов.

Как видно, в первой таблице  $\lg \sin (\varphi_1 - \varphi)$  и  $\lg \cos (\varphi_1 + \varphi)$  даны с пятью знаками; этих пяти знаков вполне достаточно для вычисления второго, малого по своей величине, члена равенства (26). Но так как  $\sin (\varphi_1 - \varphi)$  и  $\cos (\varphi_1 + \varphi)$  входят еще и в коэффициент  $C$ , то для вычисления этого последнего с той же точностью, с какою вычисляется  $A$ , мы в таблице 2 даем семизначные логарифмы  $\sin (\varphi_1 - \varphi)$  и  $\cos (\varphi_1 + \varphi)$ .

Наконец таблица 3 содержит коэффициенты:

$$\begin{aligned} A &= \frac{S - S_0}{\rho}, \quad B = -\frac{S_0}{2\rho}, \quad C = \frac{3}{4} \left\{ (\varphi_1 - \varphi) \cdot \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi) \right\}, \\ D &= B + C, \end{aligned}$$

и, кроме того,  $\lambda'$ ,  $2\lambda'$  и  $\lg \cos 2\lambda'$ ..., т. е. долготы девяти меридианов, считаемые от Парижа. Другими словами, таблица 3 содержит все данные к вычислению приближенных значений  $i$  по формуле:

$$i_0 = \frac{A}{D \cos 2\lambda'}.$$

Таблица 1

| Дуги                          | $\varphi_1 - \varphi$     | $2(\varphi_1 - \varphi)$ | $\frac{(\varphi_1 + \varphi)}{2(\varphi_1 + \varphi)}$ | $\lg (\varphi_1 - \varphi)''$ | $\lg \sin (\varphi_1 - \varphi)$ | $\lg \cos (\varphi_1 + \varphi)$ |
|-------------------------------|---------------------------|--------------------------|--|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| { Водолуй . . . . .           | 1°43'37", 9 = 6217", 9    | 3°27'15", 8              | 95°46'28", 3   | 3.7936437                     | 8.47915                          | 9.00266n                         |
| { Супрунковцы . . . . .       | 1 20 46 , 9 = 4846 , 9    | 2 41 33 , 8              | 98 50 53 , 1   | 3.6854641                     | 8.37100                          | 9.18700n                         |
| { Кременец . . . . .          | 1 7 19 , 3 = 4039 , 3     | 2 14 38 , 6              | 101 18 59 , 3  | 3.6063061                     | 8.29185                          | 9.29276n                         |
| { Ковель . . . . .            | 0 49 32 , 9 = 2972 , 9    | 1 39 5 , 8               | 103 15 51 , 5  | 3.4731803                     | 8.15574                          | 9.36686n                         |
| { Белин . . . . .             | 1 38 3 , 9 = 5883 , 9     | 3 16 7 , 8               | 105 43 28 , 3  | 3.7696653                     | 8.45518                          | 9.43299n                         |
| { Гродно . . . . .            | 2 16 0 , 54 = 8160 , 54   | 4 32 1 , 08              | 211 26 56 , 6  |                               |                                  |                                  |
| { Петровская . . . . .        |                           |                          | 97 47 18 , 82  | 3.9117189                     | 8.59778                          | 9.12922n                         |
| { Харьков . . . . .           |                           |                          | 195 28 37 , 64   |                               |                                  |                                  |
| { Харьков . . . . .           | 2 56 53 , 13 = 10613 , 13 | 5 53 46 , 26             | 102 57 12 , 49   | 4.0258435                     | 8.71123                          | 9.35056n                         |
| { Орел . . . . .              |                           |                          | 205 54 24 , 98   |                               |                                  |                                  |
| { Сарепта, пирамида . . . . . | 0 0 48 , 83 = 48 , 83     | 0 1 37 , 66              | 97 0 34 . 35   | 1.6886867                     | 6.37255                          | 9.08648n                         |
| { Сарепта, кирха . . . . .    |                           |                          | 194 1 8 70   |                               |                                  |                                  |
| { Сарепта, кирха . . . . .    | 3 0 55 , 91 = 10855 , 91  | 6 1 51 , 82              | 100 2 19 , 09  | 4.0356662                     | 8.72104                          | 9.24133n                         |
| { Саратов . . . . .           |                           |                          | 200 4 38 , 18  |                               |                                  |                                  |

Таблица 2

| Дуги                          | $\lg \sin (\varphi_1 - \varphi)$ | $\lg \cos (\varphi_1 + \varphi)$ | $\lg \sin 2(\varphi' - \varphi)$ | $\lg \cos 2(\varphi' + \varphi)$ | $\lg \frac{S}{\rho} \text{ и } \frac{S}{\rho}$ | $\frac{S_0}{\rho}$ |
|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|--------------------|
| Водолуй . . . . .             | 8.4791528                        | 9.0026584n                       | 8.77998                          | 9.99112n                         | 8.4788467<br>0,03011943                        | 0,03010982         |
| { Супрунковцы . . . . .       | 8.3709989                        | 9.1869990n                       | 8.67191                          | 9.97895n                         | 8.3702408<br>0,02345529                        | 0,02347710         |
| { Кременец . . . . .          | 8.2918523                        | 9.2927611n                       | 8.59280                          | 9.96520n                         | 8.2918794<br>0,01958301                        | 0,01956947         |
| { Ковель . . . . .            | 8.1587401                        | 9.3606756n                       | 8.45972                          | 9.95168n                         | 8.1585321<br>0,01440562                        | 0,01440540         |
| { Белин . . . . .             | 8.4551813                        | 9.4329894n                       | 8.75603                          | 9.93100n                         | 8.4552246<br>0,02852494                        | 0,02851681         |
| { Гродно . . . . .            | 8.5971803                        | 9.1292164n                       | 8.89787                          | 9.98396n                         | 8.5967814<br>0,03951676                        | 0,03952369         |
| { Харьков . . . . .           | 8.7112267                        | 9.3505576n                       | 9.01168                          | 9.95400n                         | 8.7112259<br>0,05143111                        | 0,05142531         |
| { Орел . . . . .              | 6.3725486                        | 9.0864830n                       | 6.67546                          | 9.98687n                         | 6.3737648<br>0,00023646                        | 0,00023649         |
| { Сарепта, пирамида . . . . . | 8.7210406                        | 9.2413278n                       | 9.02147                          | 9.97277n                         | 8.7209678<br>0,05259783                        | 0,05258853         |

Таблица 3

| Дуги                        | $A \text{ и } \lg A$       | $B$         | $C$         | $D \text{ и } \lg D$     | $\lambda_\pi \text{ и } 2\lambda_\pi$ | $\cos 2\lambda_\pi$ |
|-----------------------------|----------------------------|-------------|-------------|--------------------------|---------------------------------------|---------------------|
| Водолуй . . . . .           | +0,0000961<br>4.9827234    | -0,01505491 | +0,02488335 | +0,00982844<br>7.9924846 | 26°44'12",3<br>53 28 24 ,6            | 9,7746580           |
| Супрунковцы . . . . .       | -0,00002181<br>53.3865557n | -0,01173855 | +0,02033439 | +0,00859584<br>7.9342883 | 24 27 49 ,8<br>48 55 39 ,6            | 9,8175729           |
| Кременец . . . . .          | +0,00001354<br>5.1316187   | -0,00978473 | +0,01756918 | +0,00778445<br>7.8912279 | 23 21 37<br>46 43 14                  | 9,8360437           |
| Ковель . . . . .            | +0,00000022<br>3.3424227   | -0,00720270 | +0,01277982 | +0,00557712<br>7.7464100 | 22 21 31<br>44 43 2                   | 9,8516178           |
| Белин . . . . .             | +0,00000813<br>4.910905    | -0,01425841 | +0,02719185 | +0,01293344<br>8.1117140 | 22 52 48 ,9<br>45 45 37 ,8            | 9,8436429           |
| Гродно . . . . .            | -0,00000693<br>4.8407332n  | -0,01976184 | +0,03366703 | +0,01390519<br>8.1431769 | 32 56 17<br>65 52 34                  | 9,6114164           |
| Харьков . . . . .           | +0,00000580<br>4.7634280   | -0,02571266 | +0,04723704 | +0,02152438<br>8.3329369 | 33 53 51<br>67 47 42                  | 9,5774017           |
| Орел . . . . .              | -0,00000003<br>2.4771213n  | -0,00011824 | +0,00019913 | +0,00008089<br>5.9078948 | 42 10 59 ,4<br>84 21 58 ,8            | 8,9919642           |
| Сарепта, пирамида . . . . . | +0,00000930<br>4.96384829  | -0,02639427 | +0,04635070 | +0,02005644<br>8.3022538 | 42 13 9<br>84 26 18                   | 8,9864000           |

Величины  $\lambda_\pi$  получены следующим образом: рассматривая том L Записок военно-топографического отдела, именно статью 13: «Вычисление проекций геодезических линий на меридиан», мы видим, что для получения длин девяти дуг меридианов:

| Геодезические кривые:                  | Проектировались на меридиан |
|--|-----------------------------|
| Водолуй—Супрунковцы . . . . .          | Водолуя                     |
| Супрунковцы—Кременец . . . . .         | Супрунковцев                |
| Кременец—Ковель . . . . .              | Кременца                    |
| Ковель—Белин . . . . .                 | Ковеля                      |
| Белин—Гродно . . . . .                 | Белина                      |
| Петровская—Харьков . . . . .           | Петровской                  |
| Харьков—Орел . . . . .                 | Харькова                    |
| Сарепта, пир.—Сарепта, кирха . . . . . | Сарепты, пир.               |
| Сарепта, кирха—Саратов . . . . .       | Сарепты, кирхи              |

Другими словами, чтобы знать величины  $\lambda_\pi$ , фигурирующие в таблице 3, нам нужно знать долготы от Парижа следующих пунктов градусного измерения: Водолуя, Супрунковцев, Кременца, Ковеля, Белина, Петровской, Харькова, Сарепты пирамиды, Сарепты кирхи, в «*Connaissance des temps*» находим следующие величины:

|                |                             |           |
|----------------|-----------------------------|-----------|
| Гродно—        | долгота от Парижа . . . . . | 21°29'29" |
| Харьков, собор | " " "                       | 33 53 51  |
| Сарепта, кирха | " " "                       | 42 13 9   |
| Ковель         | " " "                       | 22 21 31  |

Долготы от Парижа для всех других из перечисленных выше точек найдены вычислением по формулам Гаусса, пользуясь геодезическою связью точек, для которых  $\lambda_\pi$  выписаны из „*Connaissance des temps*“ с остальными пунктами; при этом вычисленные и все геодезические данные почерпнуты были в том же томе L Записок отдела.

Пользуясь данными таблицы 3, получаем следующие значения  $i_0$ :

|                                       |   |           |
|---------------------------------------|---|-----------|
| Водолуй—Супрунковцы . . . . .         | + | 0,0016427 |
| Супрунковцы—Кременец . . . . .        | - | 38618     |
| Кременец—Ковель . . . . .             | + | 25372     |
| Ковель—Белин . . . . .                | + | 555       |
| Белин—Гродно . . . . .                | + | 9010      |
| Петровская—Харьков . . . . .          | - | 12177     |
| Харьков—Орел . . . . .                | + | 7130      |
| Сарепта, пир.—Сарепта кирха . . . . . | - | 37781     |
| Сарепта, кирха—Саратов . . . . .      | + | 47844     |

Среднее значение  $i_0$  из девяти выписанных = + 0,000197.

Приступим теперь к вычислению коэффициентов  $A_1$  и  $B_1$ .

При вычислении  $\frac{S'_0}{\rho}$  будем пользоваться формулой, данной профессором Ждановым, для дуги параллели сфероида:

$$\frac{S'_0}{\rho} = (\lambda'_1 - \lambda') \cos \varphi \left( 1 + n + \frac{1}{4} n^2 - (n + n^2) \cos 2\varphi + \frac{3}{4} n^2 \cos 4\varphi \right). \quad (27)$$

Заметим предварительно, что для параллели с широтою  $47\frac{1}{2}^\circ$  коэффициент:

$$k = \cos \varphi \sin 1'' \left( 1 + n + \frac{1}{4} n^2 - (n + n^2) \cos 2\varphi + \frac{3}{4} n^2 \cos 4\varphi \right)$$

получает следующее значение:

$$\lg k_{47\frac{1}{2}} = 4.5160461 (-10), \text{ а для параллели с } \varphi = 52^\circ:$$

$$\lg k_{52} = 4.4758173, \text{ причем } \lg n = 7.2230780.$$

$$\text{Коэффициент } B' = \frac{\left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \text{ для параллелей } 47\frac{1}{2}^\circ \text{ и } 52^\circ$$

имеет следующее значение:

$$\lg B'_{47\frac{1}{2}} = 9.9213168; \lg B'_{52} = 9.8653372.$$

Если коэффициенты  $k$  известны, то вычисление  $A'$  для дуг параллелей не представит затруднений. Что касается  $\cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi)$ , входящего в знаменателе формулы (21), то для вычисления его аргумента для различных дуг нами было принято, что долгота Варшавы от Парижа равна  $18^\circ 41' 35''$  и долгота Кишинева от Парижа равна  $26^\circ 30' 2''$ . Долготы от Парижа всех остальных пунктов параллелей получатся тогда простым сложением разности долгот этих пунктов с долготами Варшавы или Кишинева.

Прилагаемая таблица 4 содержит в себе все необходимые величины для вычисления  $A'$ , а также и полученные нами значения  $A'$ ,  $\sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi)$  и  $\cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi)$ .

Теперь мы располагаем всеми данными для вычисления правой части формулы (21):

$$i_0 = - \frac{A'}{B' \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi)}.$$

Приводим найденные нами значения  $i_0$  из 13 перечисленных выше дуг параллелей:

| Дуги:                                   | $i_0$       |
|---|-------------|
| Кишинев—Николаев . . . . .              | — 0,0010683 |
| Николаев—Александровск . . . . .        | + 3043      |
| Александровск—Ростов-на-Дону . . . . .  | + 1279      |
| Ростов-на-Дону—Сарепта, кирха . . . . . | + 33899     |
| Сарепта, кирха—Астрахань . . . . .      | — 202744    |
| Ченстохов—Варшава . . . . .             | — 1561      |
| Варшава—Гродно . . . . .                | — 8858      |
| Гродно—Бобруйск . . . . .               | + 3855      |
| Бобруйск—Орел . . . . .                 | + 4051      |
| Орел—Липецк . . . . .                   | — 15189     |
| Липецк—Саратов . . . . .                | + 18981     |
| Саратов—Самара . . . . .                | + 346779    |
| Самара—Оренбург . . . . .               | — 16752     |

Таблица 4

| Название дуг параллели $47^{\circ} \pm$ | $\lambda'_{\pi} - \lambda_{\pi}$ | $\lg (\lambda'_{\pi} - \lambda_{\pi})''$ | $\lg \cos(\lambda'_{\pi} - \lambda_{\pi})$ | $(\lambda'_{\pi} + \lambda_{\pi})$ и<br>$\lg \sin(\lambda'_{\pi} + \lambda_{\pi})$ | $\lg \frac{S'_0}{\rho} \text{ и } \frac{S'_0}{\rho}$ | $\lg A' \text{ и } A'$ |
|---|----------------------------------|--|--|--|--|------------------------|
| Кишинев . . . . .                       | $3^{\circ} 8' 10'' , 23$         | 4.0527028                                | 8.7380608                                  | $56^{\circ} 8' 14'' , 23$  | 8.5690674  | 8.5687489              |
| Николаев . . . . .                      | $= 11290'' , 23$                 |  |  | 9.7460150  | 0.03707382   | $+0.00002717$          |
| Николаев . . . . .                      | $3^{\circ} 12' 38'' , 94$        | 4.0629180                                | 8.7482656                                  | $62^{\circ} 29' 3'' , 40$  | 8.5788889  | 4.8175654n             |
| Александровск . . .                     | $= 11558'' , 94$                 |  |  | 9.6646345  | 0.03792180   | $-0.00000657$          |
| Александровск . . .                     | $4^{\circ} 31' 46'' , 05$        | 4.2123487                                | 8.8974712                                  | $70^{\circ} 13' 28'' , 39$   | 8.7283716  | 4.4548449n             |
| Ростов-на-Дону . .                      | $= 16306'' , 05$                 |  |  | 9.5293464  | 0.05350220   | $-0.00000285$          |
| Сарепта, кирха . .                      | $4^{\circ} 50' 31'' , 08$        | 4.2413243                                | 8.9263821                                  | $79^{\circ} 35' 45'' , 52$   | 8.7570429  | 8.7573704              |
| Ростов-на-Дону . .                      | $= 17431'' , 08$                 |  |  | 8.2566894  | 0.05719662   | $-0.00004311$          |
| Сарепта, кирха . .                      | $3^{\circ} 28' 48'' , 81$        | 4.0979098                                | 8.7832176                                  | $87^{\circ} 55' 5'' , 41$  | 8.6143490  | 8.6139559              |
| Астрахань . . . . .                     | $= 12528'' , 81$                 |  |  | 8.5602271  | 0.041114805  | $+0.00003730$          |

(Продолжение табл. 4)

| Название дуг параллели 52° | $\lambda' - \lambda_\pi$ | $\lg (\lambda' - \lambda_\pi)$ | $\lg \sin (\lambda' - \lambda_\pi)$ | $\lg \cos (\lambda' + \lambda_\pi) \text{ и } \lg \cos (\lambda' + \lambda_\pi)$ | $\lg \frac{S'}{\rho} \text{ и } \frac{S'_0}{\rho}$ | $\lg \frac{S'_0}{\rho} \text{ и } \frac{S'_0}{\rho}$ | $\lg A' \text{ и } A'$ |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--|--|--|------------------------|
| Ченстохов . . . . .        | 1°53'57", 60             | 3.8349037                      | 8.5203989                           | 35°29'12", 4   | 8.3707868  | 8.3107210  | 4.4899585              |
| Варшава . . . . .          | = 6337", 60              |                                |                                     | 9.9107575  | 0.02045440   | 0.02045131   | +0.00000309            |
| Варшава . . . . .          | 2°47'53", 50             | 4.0031803                      | 8.6885826                           | 40°11'3", 5  | 8.4793468  | 8.4789976  | 5.3843534              |
| Гродно . . . . .           | = 10073", 50             |                                |                                     | 9.8830779  | 0.03015413   | 0.03012990   | +0.00002423            |
| Гродно . . . . .           | 5°23'46", 50             | 4.2883946                      | 8.9733272                           | 48°22'43", 5   | 8.7648799  | 8.7642119  | 5.2469907n             |
| Бобруйск . . . . .         | = 19426", 50             |                                |                                     | 9.8923012  | 0.05808713   | 0.05810479   | -0.00001766            |
| Бобруйск . . . . .         | 6°50'23", 70             | 4.3913533                      | 9.0758950                           | 60°36'53", 7   | 8.8670682  | 8.8671706  | 5.2395497n             |
| Орел . . . . .             | = 24623", 70             |                                |                                     | 9.6907957  | 0.07363227   | 0.07364963   | -0.00001736            |
| Орел . . . . .             | 3°32'18", 15             | 4.1051063                      | 8.7904051                           | 70°59'35", 55  | 8.5811788  | 8.5809236  | 5.3500541              |
| Липецк . . . . .           | = 12738", 15             |                                |                                     | 9.5127914  | 0.03812223   | 0.03809988   | +0.00002234            |
| Липецк . . . . .           | 6°26'25", 35             | 4.3652136                      | 9.0498745                           | 79°58'19", 05  | 8.8408544  | 8.8410309  | 5.4344092n             |
| Саратов . . . . .          | = 23185", 35             |                                |                                     | 9.2408740  | 0.06931933   | 0.06934652   | -0.00002719            |
| Саратов . . . . .          | 4° 2'21", 60             | 4.1626122                      | 8.8478273                           | 91°27'6", 0  | 8.6388827  | 8.6384295  | 5.6572471              |
| Самара . . . . .           | = 14541", 60             |                                |                                     | 8.4036978n   | 0.04353943   | 0.04349401   | +0.00004542            |
| Самара . . . . .           | 5° 1'35", 85             | 4.2575790                      | 8.9425965                           | 100°31'3", 45  | 8.7332394  | 8.7333968  | 5.2933626n             |
| Оренбург . . . . .         | = 18095", 85             |                                |                                     | 9.2613536n   | 0.05410524   | 0.05412489   | -0.00001955            |

Конечно, для вычисления  $\lg \frac{S'_0}{\rho}$  нужно просто сложить  $\lg (\lambda' - \lambda_\pi)'' \cdot \lg k$ .

Среднее значение  $i_0$  равно  $+0,001201$  (из 13 дуг параллелей). Среднее значение  $i_0$ , выведенное из девяти дуг меридианов, было найдено нами равным  $+0,000197$ , за приближенное значение величины  $i_0$  примем:

$$i_m = \frac{0,001201 + 0,000197}{2} = +0,000699,$$

или, округляя результат, при всех дальнейших вычислениях будем принимать:

$$i_m = +0,0007.$$

Теперь приступаем к вычислению правых частей равенств:

$$\cos 2(\lambda_\pi + x_0) = \frac{A}{D i_m}; \quad (28)$$

$$\cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_0) = -\frac{A'}{B' i_m \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi)}. \quad (29)$$

получающихся из выведенных выше уравнений (22) и (23).

Все коэффициенты формул (28) и (29) уже находятся в таблицах 3 и 4. Вычисление достаточно вести с пятизначными или даже с четырехзначными логарифмами, так как, благодаря значительным колебаниям отдельных определений величины  $x_0$ , на среднее его значение не окажут почти никакого влияния даже ошибки в десятках минут в отдельных определениях.

Результаты нашего вычисления величины  $x_0$  мы помещаем в таблицах 5 и 6.

При определении четверти  $\cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + x_0)$  мы полагали, что  $\lambda'_\pi + \lambda_\pi + x_0 < 180^\circ$ .

Вероятнейшее значение приближенной величины  $x_0$ :

$$x_m = \frac{+7^{\circ}44',4 + 13^{\circ}55'}{2} = +10^{\circ}49',7.$$

Прежде мы обозначили долготу точки от плоскости наибольшего меридиана через  $\lambda$ , причем  $\lambda = \lambda_\pi + x$ , где  $x$  — восточная долгота точки от Парижа. Так как  $x_m$  у нас получилось со знаком  $+$ , то, следовательно, чтобы получить долготы точек градусного измерения от плоскости наибольшего меридиана, нам нужно будет восточные долготы тех же точек, считаемые от Парижа, увеличить на  $10^{\circ}49',7$ . Отсюда ясно, что плоскость наибольшего меридиана лежит к западу от Парижа на  $10^{\circ}49',7$ , или же к западу от Гринвича на  $8^{\circ}29',5$ . Заметим, что Кларк для той же величины  $x$ , считаемой от Гринвича, нашел  $8^{\circ}15'$  (к западу).

В следующем за сим определении величин  $x$  и  $i$  по способу наименьших квадратов мы примем  $x_m = +11^{\circ}0'$  (при счете долгот  $\lambda_\pi$  от Парижа).

Формулы (24) и (25) представляют начальные уравнения для меридиана и параллели в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{A}{D \cos 2(\lambda_\pi + x_m)} - i + 2i_m \operatorname{tg} 2(\lambda_\pi + x_m) \Delta x = 0; \\ \frac{A'}{B' \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi) \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m)} + \\ + i - 2i_m \operatorname{tg}(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m) \Delta x = 0. \end{aligned}$$

Таблица 5

| Название                                   | $\lg \cos 2(\lambda_\pi + x_0)$ | Дуги меридианов        |                                 |  | $x_0$       |
|--|---------------------------------|------------------------|---------------------------------|--|-------------|
|  |                                 | $2(\lambda_\pi + x_0)$ | $2\lambda_\pi$<br>(см. табл. 3) | $2x_0 = 2(\lambda_\pi + x_0) - 2\lambda_\pi$ |             |
| Водолуй . . . . .                          | 0.14514                         | —                      | 53°28', 4                       | —  | —           |
| Супрунковцы . . . . .                      | 0.55927π                        | —                      | 48 55 ,7                        | —  | —           |
| Кременец . . . . .                         | 0.39529                         | —                      | 46 43 ,2                        | —  | —           |
| Ковель . . . . .                           | 8.7501                          | 86°46', 2              | 44 43 ,0                        | + 42° 3', 2                                  | + 21° 1', 6 |
| Белин . . . . .                            | 26 6 ,2                         | 45 45 ,6               | — 19 39 ,4                      | — 9 49 ,7                                    |             |
| Гродно . . . . .                           | 9.95329                         | 135 23 ,7              | 65 52 ,6                        | + 69 31 ,1                                   | + 34 45 ,6  |
| Петровская Харьков . . . . .               | 9.85246π                        | 67 2 ,2                | 67 47 ,7                        | — 0 45 ,1                                    | — 0 22 ,5   |
| Орел . . . . .                             | 9.58540                         | 9.72413π               | 84 22 ,0                        | + 37 37 ,6                                   | + 18 48 ,8  |
| Сарепта, пирамида Сарепта, кирха . . . . . | 9.82113                         | 48 30 ,9               | 84 26 ,4                        | — 35 55 ,4                                   | — 17 57 ,7  |

Среднее значение  $x_0$  из шести дуг меридианов получается равным  $+7^{\circ}44', 4$ . При определении четверти  $\cos 2(\lambda_\pi + x_0)$  предполагали, что  $2(\lambda_\pi + x_0) < 180^\circ$ .

Таблица 6

| Название                 | Дуги параллелей                               |  |  |            | $x_0$      |
|--------------------------|---|--|--|------------|------------|
|                          | $\lg \cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_0)$ | $\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2 + x_0$ | $\lambda'_\pi + \lambda_\pi$<br>(см. табл. IV) | $2x_0$     |            |
| Кипинев . . . . .        | 9.92961 <i>n</i>                              | 148°15',2                              | 56° 8',2                                       | + 92° 7',0 | + 43° 3',5 |
| Николаев . . . . .       | 9.30289                                       | 78 24 ,8                               | 62 29 ,1                                       | + 15 55 ,7 | + 7 57 ,8  |
| Александровск . . . . .  | 8.79096                                       | 86 27 ,4                               | 70 13 ,5                                       | + 16 13 ,9 | + 8 7 ,0   |
| Ростов-на-Дону . . . . . | 9.94178                                       | 29 0 ,5                                | 79 35 ,8                                       | - 50 35 ,2 | - 25 17 ,6 |
| Сарата, кирха . . . . .  | 0.02208 <i>n</i>                              | -                                      | 87 55 ,1                                       | -          | -          |
| Астрахань . . . . .      | 9.25912 <i>n</i>                              | 100 27 ,7                              | 35 29 ,2                                       | + 64 58 ,5 | + 32 29 ,3 |
| Ченстохов . . . . .      | 9.98534 <i>n</i>                              | 165 11 ,6                              | 40 11 ,1                                       | +125 0 ,5  | + 62 30 ,2 |
| Варшава . . . . .        | 9.56323                                       | 68 32 ,6                               | 48 22 ,7                                       | + 20 9 ,9  | + 10 5 ,0  |
| Гродно . . . . .         | 9.45322                                       | 73 30 ,3                               | 60 36 ,9                                       | + 12 53 ,4 | + 6 26 ,7  |
| Бобруйск . . . . .       | 9.84921 <i>n</i>                              | 134 57 ,9                              | 70 59 ,6                                       | + 63 58 ,3 | + 31 59 ,1 |
| Орел . . . . .           | 9.67410                                       | 61 49 ,5                               | 79 58 ,3                                       | - 18 8 ,8  | - 9 4 ,4   |
| Липецк . . . . .         | 0.09898 <i>n</i>                              | -                                      | 91 27 ,1                                       | -          | -          |
| Саратов . . . . .        | 9.64033                                       | 64 5 ,8                                | 100 31 ,0                                      | - 36 25 ,2 | - 18 12 ,6 |

Среднее значение  $x_0$  из 11 дуг параллелей = + 13°55'.

Здесь  $i_m = +0,0007$ ;  $x_m = +11^{\circ}0'$ ;  $\lg B'_{47.1_2^{\circ}} = 9.9213168$ ;  $\lg B'_{52^{\circ}} = 9.8653372$ ; величины  $A$ ,  $A'$ ,  $D$  и  $\lg \sin(\lambda'_\pi - \lambda_\pi)$  содержатся в таблицах 3 и 4. Таким образом для вычисления коэффициентов начальных уравнений остается лишь подыскать значения  $\cos 2(\lambda_\pi + x_m)$ ,  $\operatorname{tg} 2(\lambda_\pi + x_m)$ ,  $\cos(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m)$  и  $\operatorname{tg}(\lambda'_\pi + \lambda_\pi + 2x_m)$ .

#### Таблица начальных уравнений

|                                    |            |                |                |
|------------------------------------|------------|----------------|----------------|
| Водолуй—Супрунковцы . . . . .      | + 0,005403 | $\Delta x - i$ | + 0,003898 = 0 |
| Супрунковцы—Кременец . . . . .     | + 0,004049 | $\Delta x - i$ | - 0,007765 = 0 |
| Кременец—Ковель . . . . .          | + 0,003595 | $\Delta x - i$ | + 0,004793 = 0 |
| Ковель—Белин . . . . .             | + 0,003253 | $\Delta x - i$ | + 0,000100 = 0 |
| Белин—Гродно . . . . .             | + 0,003424 | $\Delta x - i$ | + 0,001661 = 0 |
| Петровская—Харьков . . . . .       | + 0,037750 | $\Delta x - i$ | - 0,013448 = 0 |
| Харьков—Орел . . . . .             | + 0,391291 | $\Delta x - i$ | + 0,075313 = 0 |
| Сарепта, пир.—Сарепта, кирха . . . | - 0,004767 | $\Delta x - i$ | + 0,001316 = 0 |
| Сарепта, кирха—Саратов . . . . .   | - 0,004745 | $\Delta x - i$ | - 0,001639 = 0 |
| Ченстохов—Варшава . . . . .        | - 0,002196 | $\Delta x + i$ | + 0,000237 = 0 |
| Варшава—Гродно . . . . .           | - 0,002654 | $\Delta x + i$ | + 0,001450 = 0 |
| Гродно—Бобруйск . . . . .          | - 0,003927 | $\Delta x + i$ | - 0,000763 = 0 |
| Бобруйск—Орел . . . . .            | - 0,010802 | $\Delta x + i$ | - 0,001546 = 0 |
| Орел—Липецк . . . . .              | + 0,026787 | $\Delta x + i$ | - 0,009477 = 0 |
| Липецк—Саратов . . . . .           | + 0,006602 | $\Delta x + i$ | + 0,001593 = 0 |
| Саратов—Самара . . . . .           | + 0,003227 | $\Delta x + i$ | - 0,002209 = 0 |
| Самара—Оренбург . . . . .          | + 0,002196 | $\Delta x + i$ | + 0,000569 = 0 |
| Кишинев—Николаев . . . . .         | - 0,006665 | $\Delta x + i$ | + 0,002896 = 0 |
| Николаев—Александровск . . . . .   | - 0,014498 | $\Delta x + i$ | - 0,001463 = 0 |
| Александровск—Ростов . . . . .     | + 0,036041 | $\Delta x + i$ | + 0,001115 = 0 |
| Ростов—Сарепта, кирха . . . . .    | + 0,006823 | $\Delta x + i$ | + 0,003047 = 0 |
| Сарепта, кирха—Астрахань . . . . . | + 0,003480 | $\Delta x + i$ | - 0,001973 = 0 |

Обозначая коэффициенты при  $\Delta x$  через  $a$ , при  $i$  — через  $b$ , а известный член — через  $c$ , составим произведения  $aa$ ,  $ab$ ,  $bb$ ,  $ac$ ,  $bc$ . Значения этих последних величин мы помещаем в таблице 7.

В силу таблицы 7, нормальные уравнения:

$$[aa] \Delta x + [ab] i + [ac] = 0;$$

$$[ab] \Delta x + [bb] i + [bc] = 0,$$

напишутся так:

$$+ 0,157195 \Delta x - 0,394839 i + 0,028798 = 0;$$

$$- 0,394839 \Delta x + 22 i - 0,070753 = 0.$$

Решая эти последние уравнения по схеме Гаусса, находим для  $i$  и  $\Delta x$  следующие величины:

$$i = -0,0000754; \Delta x = -10^{\circ},508.$$

При этом веса величин  $i$  и  $\Delta x$  получаются следующие:

$$Pi = 21,00825; P \Delta x = 0,1501087.$$

Таблица 7

| Название дуг                 | $aa$       | $bb$         | $ab$       | $ac$         | $bc$       |
|------------------------------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
| Водолуй—Супрунковы           | + 0,000029 | + 1          | - 0,005403 | + 0,000021   | - 0,003898 |
| Супрунковы—Кременец          | 16         | + 1          | - 0,004049 | - 31         | + 0,007765 |
| Кременец—Ковель              | 13         | + 1          | - 0,003595 | + 17         | - 0,004793 |
| Ковель—Белин                 | 11         | + 1          | - 0,003253 | + 0          | - 0,001000 |
| Белин—Гродно                 | 12         | + 1          | - 0,003424 | + 6          | - 0,001661 |
| Петровская—Харьков           | 1425       | + 1          | - 0,037750 | - 508        | + 9,013448 |
| Харьков—Орел                 | 153109     | + 1          | - 0,391291 | 29469        | - 0,075313 |
| Сарепта, пир.—Сарепта, кирха | 23         | + 1          | + 0,004767 | - 6          | - 0,001316 |
| Сарепта, кирха—Саратов       | 23         | + 1          | + 0,004745 | + 8          | + 0,001639 |
| Кишинев—Николаев             | 44         | + 1          | - 0,006655 | 19           | + 0,002896 |
| Николаев—Александровск       | 210        | + 1          | - 0,014498 | 21           | - 0,001463 |
| Александровск—Ростов         | 1299       | + 1          | + 0,036041 | 40           | + 0,001115 |
| Ростов—Сарепта, кирха        | 47         | + 1          | + 0,006823 | 21           | + 0,003047 |
| Астрахань—Сарепта            | 12         | + 1          | + 0,003480 | 7            | - 0,001973 |
| Ченстохов—Варшава            | 5          | + 1          | - 0,002196 | - 1          | + 0,000237 |
| Варшава—Гронно               | 7          | + 1          | - 0,002654 | 4            | + 0,001450 |
| Гронно—Бобруйск              | 15         | + 1          | - 0,003927 | 3            | - 0,000763 |
| Бобруйск—Орел                | 117        | + 1          | - 0,010802 | + 17         | - 0,001546 |
| Орел—Липецк                  | 718        | + 1          | + 0,026787 | - 254        | - 0,009477 |
| Липецк—Саратов               | 44         | + 1          | + 0,006602 | 11           | + 0,001593 |
| Саратов—Самара               | 10         | + 1          | + 0,003227 | 7            | - 0,002209 |
| Самара—Оренбург              | 5          | + 1          | + 0,002196 | 1            | + 0,000569 |
| Сумма $[aa]$                 | + 0,157195 | Сумма $[bb]$ | + 22,000   | Сумма $[ab]$ | - 0,394839 |
|                              |            |              |            | Сумма $[ac]$ | + 0,028798 |
|                              |            |              |            | Сумма $[bc]$ | - 0,070753 |

Так как для  $x_m$  нами была принята величина  $+11^\circ$ , то

$$x = x_m + \Delta x = +0^\circ,492.$$

Подставляя найденные значения неизвестных в начальные уравнения, получаем в правых их частях следующие величины поправок  $\delta$ :

|   |   |          |
|---|---|----------|
| Водолуй—Супрунковцы . . . . .           | + | 0,002982 |
| Супрунковцы—Кременец . . . . .          | - | 8433     |
| Кременец—Ковель . . . . .               | + | 4209     |
| Ковель—Белин . . . . .                  | - | 422      |
| Белин—Гродно . . . . .                  | + | 1108     |
| Петровская—Харьков . . . . .            | - | 20296    |
| Харьков—Орел . . . . .                  | + | 3629     |
| Сарепта, пир.—Сарепта, кирха . . . . .  | - | 2265     |
| Сарепта, кирха—Саратов . . . . .        | + | 690      |
| Кишинев—Николаев . . . . .              | + | 4043     |
| Николаев—Александровск . . . . .        | + | 1121     |
| Александровск—Ростов-на-Дону . . . . .  | - | 5569     |
| Ростов-на-Дону—Сарепта, кирха . . . . . | + | 1600     |
| Сарепта, кирха—Астрахань . . . . .      | - | 2686     |
| Ченстохов—Варшава . . . . .             | + | 565      |
| Варшава—Гродно . . . . .                | + | 1862     |
| Гродно—Бобруйск . . . . .               | - | 118      |
| Бобруйск—Орел . . . . .                 | + | 360      |
| Орел—Липецк . . . . .                   | - | 14464    |
| Липецк—Саратов . . . . .                | + | 707      |
| Саратов—Самара . . . . .                | - | 2876     |
| Самара—Оренбург . . . . .               | + | 91       |

Сумма  $\xi^2 = 0,000809$ ; ошибка, соответствующая единице веса

$$m = \sqrt{\frac{0,000809}{22 - 2}} = 0,006360,$$

поэтому средняя ошибка  $m_i$  величины  $i$  равна

$$\frac{m}{\sqrt{P_i}} = \pm 0,0013876;$$

средняя ошибка  $m_x$  величины  $\Delta x$  равна

$$\frac{m}{\sqrt{P \Delta x}} = \pm 0^\circ,941.$$

Таким образом результаты всех предыдущих вычислений выражаются двумя равенствами:

$$x = +0^\circ,492 \pm 0^\circ,941.$$

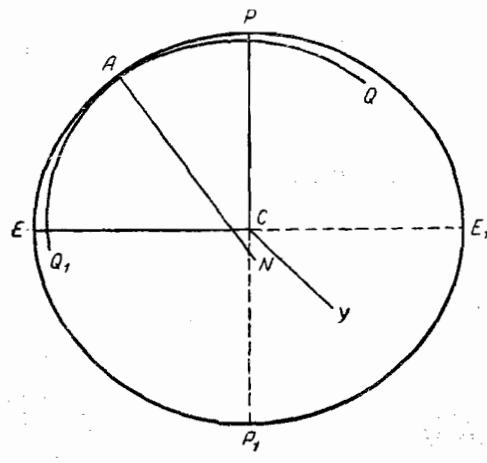
Так как наибольшая ось эллипсоида  $a = \sqrt{1+i}$ , то величина  $i$  — существенно положительная. Между тем мы получили отрицательное значение, которое не имеет, очевидно, геометрического смысла; однако средняя ошибка полученного числа столь велика, что определение  $i$  из данного материала не может иметь реального значения. С другой стороны, величина, найденная для долготы  $x$  наибольшего меридиана, получилась довольно хорошо; она указывает, что плоскость наибольшего меридиана лежит к западу от Парижа на  $0^{\circ}5$  или к востоку от Гринвича на  $1^{\circ}8$ . Принимая во внимание, что по выводу Кларка плоскость наибольшего меридиана проходит к западу от Гринвича на  $8^{\circ}15'$ , нельзя не подметить близости нашего вывода величины  $x$  с выводом Кларка.

## СООБРАЖЕНИЯ ПО УСТАНОВЛЕНИЮ ЭЛЛИПСОИДА ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ В СССР

### § 1. Связь между высотой $h$ геоида над поверхностью референц-эллипсоида, поправками полусосей этого эллипса и поправками его ориентирования

Допустим, что в данной стране при обработке триангуляций принят в качестве референц-эллипсоида эллипс  $PEP_1E_1$  (фиг. 1) с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b = a\sqrt{1-e^2}$ .

Пусть этот референц-эллипс ориентирован в теле Земли при помощи астрономических данных в точке  $A$ , т. е. с принятием равенства геодезической широты, долготы и азимута соответственно астрономическим широте  $\varphi_0$ , долготе  $\lambda_0$  и астрономическому азимуту  $\alpha_0$  в точке  $A$ .



Фиг. 1

В точке  $A$  пусть поверхность эллипса  $PEP_1E_1$  касается поверхности геоида. Эллипсом, наиболее подходящим к геоиду в пределах данной страны, будет называться такой, который при параллельности его малой оси с осью вращения Земли дает наименьшую сумму квадратов отклонений по высоте его поверхности от поверхности геоида для нашей страны.

Размеры полусосей этого эллипса назовем через

$$a_1 = a + \Delta a, \quad b_1 = b + \Delta b, \quad b_1 = a_1 \sqrt{1 - e_1^2}.$$

Взяв эллипс  $QAQ_1$  (фиг. 1) с размерами полусосей  $a_1$  и  $b_1$ , ориентируем его в теле Земли по тем же данным  $\varphi_0, \lambda_0$  и  $\alpha_0$ , как и референц-эллипс  $PEP_1E_1$ , с касанием его поверхности в  $A$  к поверхности геоида.

Конечно, малая ось эллипсоида  $QAQ_1$  будет параллельна оси вращения Земли и параллельна оси  $PP_1$  референц-эллипсоида.

Возьмем начало координат в центре  $C$  эллипса  $PEP_1E_1$ . Направим ось  $x$  по большой оси  $CE$  меридианного эллипса  $PAEP_1$ , ось  $Z$  — по малой его оси  $CP$ , а ось  $y$  — в плоскости экватора эллипса  $PEP_1E_1$  по перпендикуляру в  $C$  к плоскости меридиана точки  $A$ . Напишем еще:

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= 2\mu, \quad e_1^2 = e^2 + 2\mu_1 - 2\mu \\ e_1^2 &= 2\mu_1, \quad ede = \mu_1 - \mu = \Delta\mu \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

причем очевидно, что  $\Delta\mu$  можно принять за поправку сжатия референц-эллипса.

Для точки  $A$ , отнесенной к эллипсу  $PEP_1E_1$ , имеем:

$$x_A = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}; \quad y_A = 0; \quad z_A = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}.$$

Центр  $C_1$  эллипса  $QAQ_1$  будет лежать в той же плоскости  $PAEP_1$  и будет иметь такие координаты относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= - \left\{ \frac{\Delta a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} + \frac{a \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} \Delta\mu \right\}; \\ y_{C_1} &= 0; \\ z_{C_1} &= - \left\{ \frac{\Delta a (1 - e^2) \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} - \frac{2a \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \Delta\mu + \frac{a \sin^3 \varphi_0 (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} \right\} \Delta\mu \end{aligned} \right\}.$$

Полагая

$$k_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0},$$

напишем еще:

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= \frac{\Delta a \cos \varphi_0}{k_0} + \frac{a \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{k_0^3} \Delta\mu \\ y_{C_1} &= 0 \\ z_{C_1} &= \frac{(1 - e^2) \sin \varphi_0}{k_0} \Delta a - \frac{a \sin \varphi_0}{k_0^3} (1 + \cos^2 \varphi_0 - e^2 \sin^2 \varphi_0) \Delta\mu \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Уравнение эллипса  $QAQ_1$  относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с началом координат в точке  $C$  напишется так:

$$\frac{(x - x_{C_1})^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{(z - z_{C_1})^2}{b_1^2} = 1. \quad (3)$$

Координаты некоторой точки  $B$  эллипса  $PEP_1E_1$ , имеющей широту  $\varphi$  и долготу  $\omega$  относительно меридиана точки  $A$ , напишутся так:

$$x_B = \frac{a \cos \varphi \cos \omega}{k}; \quad y_B = \frac{a \cos \varphi \sin \omega}{k}; \quad z_B = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{k},$$

где

$$k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Если возьмем точку  $B'$ , принадлежащую эллипсоиду  $QAQ_1$  и лежащую на продолжении нормали в  $B$  к эллипсоиду  $PEP_1E_1$  в расстоянии от  $B$  по этой нормали, равном  $h'$ , то координаты  $B'$  будут равны:

$$\left. \begin{array}{l} x_{B_1} = x_B + h' \cos \varphi \cos \omega \\ y_{B_1} = y_B + h' \cos \varphi \sin \omega \\ z_{B_1} = z_B + h' \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (4)$$

В (4) величина  $h$  положительна, если  $B_1$  выше  $B$ . Подставляя (4) в (3), получим

$$\frac{(x_B + h' \cos \varphi \cos \omega - x_{C_1})^2}{a_1^2} + \frac{(y_B + h' \cos \varphi \sin \omega)^2}{a_1^2} + \frac{(z_B + h' \sin \varphi - z_{C_1})^2}{b_1^2} = 1.$$

Отсюда

$$(x_B + h' \cos \varphi \cos \omega - x_{C_1})^2 + (y_B + h' \cos \varphi \sin \omega)^2 + \frac{(a + \Delta a)^2}{(b + \Delta b)^2} (z_B + h' \sin \varphi - z_{C_1})^2 = a^2 + 2a \Delta a + \Delta a^2.$$

Пренебрегая в дальнейшем вторыми степенями  $\Delta a$ ,  $h'$ ,  $x_{C_1}$ ,  $y_{C_1}$  и произведениями  $h'x_{C_1}$ ,  $h'z_{C_1}$ , получим

$$x_B^2 + 2h' x_B \cos \varphi \cos \omega - 2x_B x_{C_1} + y_B^2 + 2h' y_B \cos \varphi \sin \omega + \frac{1}{1 - e_1^2} (z_B^2 + 2h' z_B \sin \varphi - 2z_B z_{C_1}) = a^2 + 2a \Delta a.$$

Но

$$\frac{1}{1 - e^2} = \frac{1}{1 - e^2 - 2 \Delta \mu} = \frac{1}{1 - e^2} + \frac{2 \Delta \mu}{(1 - e^2)^2}; \quad x_B^2 + y_B^2 + \frac{Z_B^2}{1 - e^2} = a^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & h' x_B \cos \varphi \cos \omega - x_B x_{C_1} + h' y_B \cos \varphi \sin \omega + \frac{h' z_B \sin \varphi}{1 - e^2} - \\ & - \frac{Z_B Z_{C_1}}{1 - e^2} + \frac{Z_B^2 \Delta \mu}{(1 - e^2)^2} = a \Delta a; \\ & \frac{h' a \cos^2 \varphi \cos^2 \omega}{k} + \frac{a \Delta a \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega}{k \cdot k_0} + \frac{a^2 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega}{k_0^3 k} \Delta \mu + \\ & + \frac{h' \cdot a \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}{k} + \frac{h' \cdot a \sin^2 \varphi}{k} + \frac{a \Delta a \cdot \sin \varphi \sin \varphi_0}{kk_0} (1 - e^2) - \\ & - \frac{a^2 \sin \varphi_0 \sin \varphi}{kk_0^3} (1 + \cos^2 \varphi_0 - e^2 \sin^2 \varphi_0) \Delta \mu + \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{k^2} \Delta \mu = a \Delta a. \end{aligned}$$

Далее

$$\frac{h'}{k} + \frac{\Delta a}{k \cdot k_0} (\cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega + \sin \varphi \sin \varphi_0 - e^2 \sin \varphi \sin \varphi_0 - kk_0) + \\ + \frac{a \sin^2 \varphi_0}{kk_0^3} \left[ \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} (1 + \cos^2 \varphi_0 - \right. \\ \left. - e^2 \sin^2 \varphi_0) + \frac{\sin^2 \varphi k_0^3}{\sin^2 \varphi_0 k} \right] \Delta \mu = 0.$$

Наконец

$$h' = \frac{\Delta a}{k_0} \left[ kk_0 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \omega) + e^2 \sin \varphi \sin \varphi_0 \right] - \\ - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ (\cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \omega + \sin \varphi \sin \varphi_0) - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{k_0^3 \sin^2 \varphi}{k \sin^2 \varphi_0} \right] \Delta \mu. \quad (5)$$

Вводя обозначение

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \omega, \quad (6)$$

напишем окончательно:

$$h' = \left[ k - \frac{\cos \psi}{k_0} + e^2 \sin \varphi \sin \varphi_0 \right] \Delta a - \\ - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \left( 2 - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right) \right] \Delta \mu. \quad (7)$$

Неощущимо понижая точность уравнения (7), напишем:

$$h' = \left( 1 - \frac{\cos \psi}{k_0} \right) \Delta a - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \left( 2 - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right) \right] \Delta \mu. \quad (8)$$

Теперь допустим, что исходные в  $A$  координаты  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  должны иметь при переходе к наилучше подходящему эллипсоиду поправки  $\delta \varphi_0$  и  $\delta \lambda_0$ . Увеличение широты  $\varphi_0$  на  $\delta \varphi_0$  вызовет поступательный сдвиг эллипсоида  $PEP_1E_1$  на величину  $\frac{M_0 \delta \varphi_0''}{\rho''}$  по направлению касательной в  $A$  к эллипсу  $PEP_1$  (фиг. 1).

При этом координаты центра  $C$  изменятся на:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x_0 = + M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''} \\ \Delta y_0 = 0 \\ \Delta z_0 = - M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Увеличение долготы на  $\delta \lambda_0$  обусловит поступательное движение эллипсоида  $PEP_1E_1$  на величину  $N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho}$  по направлению касательной к эллипсоиду, лежащей в плоскости первого вертикала точки  $A$ , т. е. параллельно оси  $y$ -ков, но к западу.

Изменения координат точки  $C$ , обусловленные этим движением, будут:

$$\begin{aligned}\Delta x_0' &= 0; \\ \Delta y_0' &= -N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho''}; \\ \Delta z_0' &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, в результате изменения и  $\varphi_0$ , и  $\lambda_0$  новые координаты центра  $C_1$  эллипсоида будут:

$$\begin{aligned}x_{C_1} &= +M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''}; \\ y_{C_1} &= -N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho''}; \\ z_{C_1} &= -M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''}.\end{aligned}$$

Поэтому уравнение эллипса, отнесенного к прежним осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с началом в точке  $C$ , но иначе ориентированного, напишется так:

$$\frac{(x - M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''})^2}{a^2} + \frac{(y + N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho''})^2}{a^2} + \frac{(z + M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''})^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Берем опять-таки две точки  $B$  и  $B_1$ , принадлежащие: одна — эллипсоиду  $PAEP_1E_1$  (фиг. 1), а другая — эллипсоиду, дающему для  $A$  координаты  $\varphi_0 + \delta \varphi_0$  и  $\lambda_0 + \delta \lambda_0$ , причем  $BB_1 = h''$  и  $B_1$  лежит на нормали точки  $B$ ; тогда от (10) перейдем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{(x_B + h'' \cos \varphi \cos \omega - M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''})^2}{a^2} + \\ &+ \frac{(y_B + h'' \cos \varphi \sin \omega + N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho''})^2}{a^2} + \\ &+ \frac{(z_B + h'' \sin \varphi + M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''})^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}2h'' x_B \cos \varphi \cos \omega - 2x_B M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''} 2h'' y_B \cos \varphi \sin \omega + \\ + 2N_0 y_B \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda_0''}{\rho''} + \frac{2h'' z_B \sin \varphi + 2M_0 z_B \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi_0''}{\rho''}}{1 - e^2} = 0.\end{aligned}$$

Или, подставляя значения  $x_B$ ,  $y_B$  и  $z_B$ , выраженные через  $\varphi$  и  $\omega$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{h'' \cos^2 \varphi \cos^2 \omega}{k} - \frac{M_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega}{\rho'' k} \delta \varphi_0 + \frac{h'' \cos^2 \varphi \sin^2 \omega}{k} + \\ + \frac{N_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \omega}{\rho'' k} \delta \lambda_0 + \frac{h'' \sin^2 \varphi}{k} + \frac{M_0 \sin \varphi \cos \varphi_0}{\rho'' k} \cdot \delta \varphi_0'' = 0; \\ h'' - \frac{M_0}{\rho''} (\sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \omega - \sin \varphi \cos \varphi_0) \delta \varphi_0 + \\ + \frac{N_0}{\rho''} \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \omega \cdot \delta \lambda_0'' = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Называя через  $\alpha$  азимут с исходной точки  $A$  на точку с координатами  $\varphi$  и  $\omega$ , напишем еще

$$h'' = - \frac{M_0}{\rho''} \sin \psi \cos \alpha \cdot \delta \varphi_0'' - \frac{N_0 \cos \varphi_0}{\rho''} \sin \psi \sin \alpha \delta \lambda_0''. \quad (12)$$

При этом  $\psi$  в (12) вычисляется по (6).

Если мы зададимся задачей определения эллипсоида, наилучшим образом подходящего к геоиду, то в исходном пункте  $A$  этот эллипсoid должен иметь некоторую надлежащую подобранную высоту  $h_0$  относительно  $A$ .

Перемещая поступательно эллипсoid  $PEP_1E_1$  на  $h_0$  (вверх) по направлению нормали  $NA$ , мы получим координаты его центра  $C_1$ :

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= h_0 \cos \varphi_0; \\ y_{C_1} &= 0; \\ z_{C_1} &= h_0 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение сдвинутого по высоте эллипса в прежней системе координат будет таково:

$$\frac{(x - h_0 \cos \varphi_0)^2 + y^2}{a^2} + \frac{(z - h_0 \sin \varphi_0)^2}{a^2 (1 - e^2)} = 1.$$

Применяя прежние рассуждения, напишем, обозначая через  $h'''$  сдвиг по высоте точки  $B$  с координатами  $\varphi$  и  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{(x_B + h''' \cos \varphi \cos \omega - h_0 \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(y_B + h''' \cos \varphi \sin \omega)^2}{a^2} + \\ + \frac{(z_B + h''' \sin \varphi - h_0 \sin \varphi_0)^2}{a^2 (1 - e^2)} = 1; \\ h''' x_B \cos \varphi \cos \omega - h_0 x_B \cos \varphi_0 + h''' \cdot y_B \cos \varphi \sin \omega + \frac{h''' \cdot z_B \sin \varphi}{(1 - e^2)} - \\ - \frac{h_0 z_B \sin \varphi_0}{1 - e^2} = 0; \quad h''' - h_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \omega + \sin \varphi \sin \varphi_0) = 0; \\ h''' = \cos \psi \cdot h_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Складывая (8), (12) и (13), мы получим в виде суммы

$$h_r = h' + h'' + h'''$$

высоту точки наилучше подходящего к геоиду эллипсоида (и притом надлежаще ориентированного) над поверхностью референц-эллипса. Эта высота будет отличаться от высоты геоида над поверхностью референц-эллипса на величину  $\delta h$ , представляющую уклонение поверхности геоида от поверхности наилучше подходящего эллипса.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} h = h_r + \delta h = & \left(1 - \frac{\cos \psi}{k_0}\right) \Delta a - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi - \frac{\sin \psi}{\sin \varphi_0} \left(2 - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right) \right] \Delta \mu - \\ & - \frac{M_0}{\rho''} \sin \psi \cos \alpha \cdot \delta \varphi'' - \frac{N_0}{\rho''} \cos \varphi_0 \sin \psi \sin \alpha \delta \lambda'' + \cos \psi \cdot h_0. \quad (14) \end{aligned}$$

Понятно, что  $h_r + \delta h$  есть высота  $h$  геоида над референц-эллипсом, получаемая из наблюдений.

Использование формулы (14) прежде всего может пойти по линии подсчета ожидаемых величин  $h_r$ , соответствующих ожидаемым значениям величин  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\delta \varphi_0$ ,  $\delta \lambda_0$ ,  $h_0$ , и, конечно, здесь можно притти к небезинтересным выводам. Так, из предварительной обработки триангуляции Европейской части СССР, выполненной Институтом геодезии и картографии<sup>1</sup>, для принятого в настоящее время в СССР референц-эллипса с исходным пунктом в Пулкове и размерами осей, по Бесселю, получено

$$\Delta a = +684 \text{ м.}$$

Принимая все остальные поправки  $\Delta \mu$ ,  $\delta \varphi_0$ ,  $\delta \lambda_0$ ,  $h_0$  равными нулю, получим из (14) для районов Дальнего Востока, для которых  $\varphi = 50^\circ$  и  $\omega = 120^\circ$ :

$$h_r = 684 \times 0,49 = 335 \text{ м.}$$

Для Южного Урала (при  $\varphi = 50^\circ$  и  $\omega = 30^\circ$ )  $h_r = 684 \times 0,05 = 34,2 \text{ м.}$  Если возьмем исходный пункт на меридиане  $100^\circ$  и ча параллели  $52^\circ$ , то для пункта с долготой  $30^\circ$  и широтой  $60^\circ$  получим

$$h_r = 684 \times 0,21 = 143,6 \text{ м.}$$

При  $\delta \lambda_0 = \pm 2''$ ;  $\omega = 70^\circ$ ;  $\varphi = 60^\circ$  и  $\varphi_0 = 52^\circ$  значение члена с  $\delta \lambda_0$  в (14) равно  $\pm 18 \text{ м.}$

При  $\delta \lambda_0 = \pm 2''$ ;  $\omega = 120^\circ$ ;  $\varphi = 60^\circ$  и  $\varphi_0 = 52^\circ$  значение того же члена с  $\delta \lambda_0$  в (14) равно  $\pm 17 \text{ м.}$

По исследованиям Хирфонена, для общего земного эллипса среднее квадратическое значение  $\delta h$  равно  $\pm 50 \text{ м.}$  Конечно, для наилучше подходящего к геоиду в пределах СССР эллипса такое среднее квадратическое значение  $\delta h$  в (14) должно оказаться заметно меньшим. Хотя материалами по определениям  $h$  в СССР мы и не располагаем<sup>2</sup>, но все-таки можно утверждать, что средняя погрешность в установлении исходной широты не должна превышать  $\pm 1''$ , а средняя погрешность в исходной геодезической долготе не должна превышать  $\pm 1,5'$ , чтобы суммарное влияние  $\delta \varphi_0$  и  $\delta \lambda_0$  в (14) было бы одного порядка с  $\delta h$ .

Очевидно также, что величина  $\Delta a$  должна быть не более  $\pm 50 \text{ м}$ , если мы ориентируем референц-эллипсоид в Пулкове, и не более  $\pm 120 \text{ м}$ , если мы ориентируем его по пункту, взятому в середине страны для того, чтобы иметь в (14), для удаленных от исходного пункта районов, влияние члена с  $\Delta a$  одного порядка с  $\delta h$ .

Но, конечно, использование уравнения (14) должно будет пойти также и притом главным образом по линии определения  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\Delta \varphi_0$ ,  $\Delta \lambda_0$ , т. е. по линии определения наилучше подходящего эллипсоида, когда из наблюдений будет собран достаточный материал по определениям действительных высот  $h$  геоида над принятым референц-эллипсоидом. Система уравнений (14) требует иного материала, чем градусные измерения; но при широком развитии в СССР триангуляций, астрономических определений и гравиметрических работ этот материал может быть получен в течение нескольких лет, и тогда явится возможность такой постановки исследований при помощи уравнений (14) положения геоида относительно референц-эллипса, которое не осуществляется методом градусных измерений.

## § 2. Требования, предъявляемые к установлению поверхности проекции в высшей геодезии

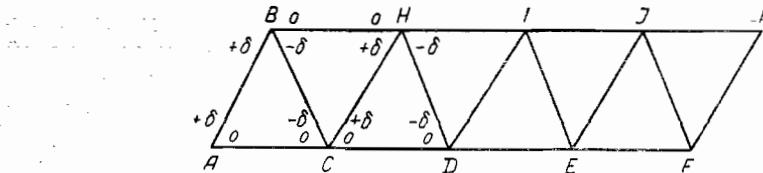
В высшей геодезии, при решении вопросов точной обработки больших триангуляций, вводят поверхность проекции в виде поверхности эллипса вращения с некоторыми известными размерами его осей; этот эллипс вращения получает вполне определенное положение в теле земного шара, если исходные данные, необходимые для связи его поверхности с телом земли, безошибочны. Погрешности в исходных данных вносят, конечно, некоторую небольшую неопределенность в положении этого эллипса проекции или референц-эллипса.

При обработке триангуляций нам нужно измеренные в ней базисы проектировать не на поверхность океана, как это до сих пор делается в геодезии, а на принятую поверхность проекции, или на поверхность референц-эллипса, точно так же измеренные в триангуляции направления должно относить к поверхности референц-эллипса. Следовательно, нам нужно при обработке триангуляции знать высоту геодезических точек над поверхностью референц-эллипса и положение отвесной линии в каждой геодезической точке относительно нормали в ней же к поверхности эллипса проекции (референц-эллипса). Но когда ставится вопрос, с какой точностью нужно знать высоты пунктов триангуляции относительно поверхности референц-эллипса и с какой точностью нужно знать расположение отвесных линий на пунктах триангуляции относительно нормалей в них же к поверхности референц-эллипса для проектирования базисов и углов триангуляции на поверхность этого эллипса, то по существу отчетливого, ясного ответа на этот вопрос мы не имеем, в особенности, когда дело идет об обработке очень больших триангуляций, вроде триангуляции I класса СССР, простирающейся от Польши до Японии.

Остановимся на этом вопросе и, прежде всего, на той его части, которая относится к определению поправки в наблюденное направление за высоту наблюдаемого с данного пункта предмета.

Пусть все пункты данного ряда триангуляции (фиг. 2), распространяющегося по земной параллели, имеют одну и ту же высоту  $H$  над поверхностью референц-эллипса.

Углы во всех треугольниках примем равными  $60^\circ$ ; обозначая поправку направления с  $A$  на  $B$  через  $\delta$ , получим распределение поправок в нашем ряде, показанное на фиг. 2. Другими словами, в каждом треугольнике так называемый промежуточный угол  $C$  получит поправку  $+2\delta$ , а углы связующие, т. е. углы  $H$  и  $B$  (фиг. 2), — поправки  $-\delta$ . Сумма углов в любом треугольнике не получит никакого искажения при неверном учете или неучете поправок  $\delta$ , точно так же нисколько не пострадают азимуты, передаваемые по ходовой линии  $ACDEF\dots$ ; азимуты же сторон  $AB$ ,  $CH$ ,  $HD$ ,  $\dots$  будут то увеличены на  $\delta$ , то уменьшены на  $\delta$ . Очевидно также, что стороны  $BC$ ,  $CH$ ,  $HD$ ,  $DI$ ,  $\dots$ , т. е. связующие стороны цепи, нисколько не пострадают от неучета поправок  $\delta$ . Но также



Фиг. 2

очевидно, что *однообразно* пострадают стороны  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  или *длина всей цепи*. Нетрудно видеть, что относительная ошибка диагонали  $AF$  или  $BK$  будет составлять  $3\delta \operatorname{ctg} 60^\circ$  или  $\frac{3\delta}{\sqrt{3}}$ . Так как  $\delta = \frac{H}{M} \cdot \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$ , то при  $\alpha = 30^\circ$  и при  $\varphi = 45^\circ$  имеем  $\delta = \frac{1}{690} \cdot \frac{H}{M}$ .

Относительная же ошибка в  $AF$  и  $BK$  будет:

$$\frac{1,73}{690} \cdot \frac{H}{M}.$$

Если даже неучитываемая высота поверхности референц-эллипсоида над уровнем океана в районе нашего ряда составит 400 м, то все-таки влияние этого неучета на вывод длины диагонали  $AF$  или  $BK$  даст только 1 : 6 500 000. Этот результат вполне убеждает, что при получении поправок в направлениях «за высоту» мы можем не считаться с отступлениями поверхности референц-эллипсоида от поверхности геоида.

Следующее влияние — это систематические ошибки в определении избытоков треугольников. Если вместо радиуса  $R$  при вычислении избытка мы принимаем радиус  $R + \Delta R$ , то погрешность в избытке  $\epsilon$  будет выражаться так:

$$\Delta\epsilon'' = \epsilon'' \cdot \frac{2\Delta R}{R}.$$

Приняв  $\epsilon = 4''$  и  $\Delta R = 800$  м, получим:

$$\Delta\epsilon = 0'',001.$$

Если систематические ошибки на  $0'',01$  в углах триангуляции не могут быть допускаемы, то, конечно, ошибки в десятитысячных секунды вообще будут сказываться неощутимо.

Сфероидическая трапеция, имеющая протяжение по меридиану 2000 км и по параллели — также 2000 км, будет иметь избыток  $\epsilon$  около 20 000 сек, и для нее при  $\Delta R = 400$  м будем иметь

$$\Delta\epsilon = 2'',5.$$

Понятно, если бы нам приходилось при обработке триангуляций определять сумму углов в полигоне, ограничивающем трапецию указанных размеров, то пришлось бы ввести требование, чтобы  $\Delta R$  было меньше 80 м. Однако приходится в действительности иметь дело с полигонами, по площади в 100 раз меньшими, для которых  $\Delta\epsilon$  при указанном  $\Delta R$  будет менее 0'',025. Кроме того, условия сумм углов в полигоне триангуляции обычно заменяются уравнениями Лапласа.

Таким образом, мы можем утверждать, что при  $\Delta R$ , меньшем 200 м, систематическими ошибками в определении избытков треугольников можно пренебречь.

Перейдем теперь к оценке действия уклонений нормалей к поверхности референц-эллипсоида от вертикальных линий в соответствующих точках, поскольку эти уклонения носят систематический характер и обусловлены неверностью принятых размеров референц-эллипсоида (или неверностью его ориентирования в теле Земли).

Называя через  $u$  — уклонение отвеса в точке  $A$ ; через  $\Theta$  — азимут вертикальной плоскости, в которой происходит это уклонение; через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — азимуты предметов  $B$  и  $C$ , наблюдавшихся в  $A$ ; через  $z_1$  — зенитное расстояние пункта  $B$ , наблюдаемого в  $A$ , и, полагая, что зенитное расстояние для точки  $C$  равно  $z_2$ , напишем следующую формулу для различия  $\Delta$  угла, образованного при  $A$  вертикальными плоскостями точек  $B$  и  $C$ , и угла, получаемого на референц-эллипсоиде при проекции точки  $A$  между нормальными сечениями, соединяющими эту проекцию с проекциями точек  $B$  и  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} z_m &= \frac{z_2 + z_1}{2} \\ \Delta &= u \operatorname{ctg} z_m \cdot 2 \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \Theta \right) + \\ &+ 2u(z_m - z_2) \sin \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \Theta \right) \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Возьмем для дальнейших расчетов цепь равносторонних треугольников, распространяющуюся по земной параллели и изображенную на фиг. 2.

Прежде всего отметим, что главную часть систематического отклонения отвесных линий от нормалей к референц-эллипсоиду, обусловленного неверностью принятых размеров этого эллипсоида, можно принять постоянной, если наша цепь треугольников имеет протяжение 200—300 км и достаточно удалена от исходного пункта общей триангуляции государства. Кроме того, если от этого исходного пункта мы очень значительно удалены на восток, то  $\Theta$  можно принять равным  $90^\circ$ , и тогда формула (15) перепишется так:

$$\Delta = u \operatorname{ctg} z_m \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - (z_m - z_2) \cdot u \sqrt{3} \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}. \quad (16)$$

Предположим, что точки  $B, H, I, J, K$  (фиг. 2) принадлежат более возвышенному хребту, чем точки  $A, C, D, E, F$ .

Другими словами, будем считать, что разности высот точек  $B$  и  $H$ ,  $H$  и  $I$ ,  $H$  и  $J$ ,  $J$  и  $K$ , а также точек  $C$  и  $A$ ,  $D$  и  $C$ ,  $E$  и  $D$  равны нулю. Далее будем считать, что по направлениям  $AB, CB, CH, DH, DI, EI, EJ, FJ$  имеем одно и то же зенитное расстояние  $z = 90^\circ - k$ , по направлениям  $BA, BC, HC, HD, ID, IE$  — зенитное расстояние  $z = 90^\circ + k$ .

Тогда из формулы (16) составляем следующую таблицу разностей  $\Delta$  между углами, измеренными в нашей цепи, и углами, им соответствующими на референц-эллипсоиде:

| Треугольник $ABC$           | Треугольник $BCH$           | Треугольник $CHD$           |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $A + uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $B - uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $C + uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $B \quad 0$                 | $C \quad 0$                 | $H \quad 0$                 |
| $C - uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $H + uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $D - uk \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| и т. д.                     |                             |                             |

Поэтому стороны  $CH, DI, EJ, FK$  (фиг. 2) не получат никаких искажений, стороны же  $BC, HD, IE \dots$  получают каждая искажения:

$$uk \sqrt{3} \operatorname{ctg} 60^\circ s = uks. \quad (17)$$

Относительное искажение длины диагонали  $AF$  нашего ряда будет равно  $\frac{uk}{2}$ . Если бы ряд располагался вдоль меридиана, то ошибка в  $AF$

была бы равна  $\frac{\sqrt{3}}{2} uk \cdot AF$ .

Если назовем через  $\Delta a$  ошибку в большой полуоси референц-эллипсоида и через  $S$  — расстояние нашей цепи от исходного пункта триангуляции, то приближенно

$$u = \frac{S}{a} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

При  $S = 4500 \text{ км}$ :

$$u = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta a}{a},$$

и, следовательно, ошибка  $q$  в  $AF$  для случая ряда по меридиану будет:

$$q = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\Delta a}{a} \cdot k \cdot AF. \quad (18)$$

Примем  $k = 1 : 100$ , тогда:

$$q = 10^{-6} \cdot \Delta a \cdot AF, \quad (19)$$

причем в (19)  $\Delta a$  выражено в километрах.

Отсюда определено можно заключить, что даже при  $\Delta a = 0,5 \text{ км}$  влияние систематических уклонений нормалей принятого референц-эллипсоида от отвесных линий оказывается на определении длины  $AF$  диагонали ряда триангуляции I класса незначительно, примерно в шесть раз менее, по сравнению с влиянием ошибок углов.

Следовательно, при самых строгих требованиях к обработке триангуляции достаточно потребовать, чтобы значение большой полуоси референц-эллипсоида отличалось от большой полуоси наилучше подходящего к геоиду эллипса от не более чем на 250 м, чтобы вовсе не считаться с влиянием вызванных этим отличием систематических уклонений нормалей референц-эллипса от отвесных линий.

Не останавливаясь на влиянии неверно принятых размеров референц-эллипса на определение свободных членов уравнений Лапласа, перейдем к самому существенному вопросу — к проектированию измеренных базисов на поверхность избранного референц-эллипса.

Как вытекает из § 1 [см. уравнение (14)], превышение поверхности геоида относительно поверхности референц-эллипса при исходном пункте в середине СССР для районов, удаленных от него по долготе на 75° и по широте к югу — на 15°, может быть приближенно выражено формулой

$$h_r = 0,30 \Delta a, \quad (20)$$

где  $\Delta a$  — поправка большой полуоси референц-эллипса по отношению к эллипсу, наилучше подходящему к геоиду в пределах СССР.

При современной точности геодезических работ в триангуляции I класса ошибки углов треугольников вызывают в длине диагонали триангуляционного ряда, заключенного между двумя базисами в расстоянии один от другого 300 км, среднюю ошибку около  $\pm 1 : 250\,000$ . Поэтому нельзя допустить действительной ошибки в определении высоты базиса над поверхностью референц-эллипса, большей  $a : 250\,000$ , или большей  $\pm 30$  м. Следовательно, из (20) имеем:

$$\frac{a}{250\,000} = 0,30 \Delta a; \Delta a < 80 \text{ м.}$$

Этот вывод может показаться излишне строгим, тем более, что при обработке триангуляций в полигонах, ближайших к исходному пункту, влияние  $\Delta a$  на редуцирование базисов будет ничтожно, и это благоприятно скажется и на следующих за ними полигонах. Но, с другой стороны, нужно иметь в виду, что при пользовании просто высотами базисов над уровнем океана, как это делается до сих пор, мы не учтываем влияние не только  $\Delta a$ , но и влияние  $\Delta \mu$ ,  $\delta \varphi_0$ ,  $\delta \lambda_0$  и  $h_0$ ; мы не учтываем, кроме того, влияние  $\delta h$  в (14). Между тем при расстоянии рассматриваемой точки от исходной в 4 500 км одно слагаемое с  $\Delta \mu$  в (14) при  $\Delta \mu = 1 : 29\,000$  в широте 52° имеет значение, равное  $\pm 33$  м. При средней ошибке в сжатии  $\mu$ , равной всего 1 : 60 000, при средних ошибках в  $\delta \varphi_0$  и  $\delta \lambda_0$  всего в  $\pm 0''$ , 5 и при средней ошибке  $a$ , равной  $\pm 40$  м, мы получим из (14) среднее квадратическое значение  $h_r$  для восточных и западных границ СССР, равное  $\pm 26$  м. Но, конечно, если бы мы идеально точно определили  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\delta \varphi_0$  и  $\delta \lambda_0$ , то нужно было бы считаться еще с величинами  $\delta h$ , которые остаются неизвестными. Если Хирфонен получил среднее квадратическое значение  $\delta h$  для всего земного шара равным  $\pm 50$  м, то для СССР эта величина по отношению к наилучше подходящему эллипсу будет, конечно, значительно менее, однако, все-таки для отдельных районов  $\delta h$  будет достигать нескольких десятков метров (Ферганы).

Только при совершенно невероятном предположении, что среднее квадратическое отступление геоида от наилучше подходящего эллипса

не превышает  $\pm 10$  м, и при условии, что большая полуось этого эллипсоида определена со средней ошибкой  $\pm 40$  м, а его сжатие — со средней ошибкой 1 : 60 000 и при условии высокой точности определения исходной геодезической широты и долготы, мы можем рассчитывать на получение выходных сторон большинства полигонов триангуляции СССР с погрешностью 1 : 250 000, допуская эту погрешность для окраинных полигонов в 1 : 160 000.

Все эти соображения и подсчеты приводят к следующему заключению: для обеспечения надлежащей точности в обработке такой значительной триангуляции, как триангуляция СССР, даже при определении с высокой степенью точности размеров и фигуры наилучше подходящего для СССР эллипсоида и при установлении исходных геодезических дат с точностью, вообще вряд ли достижимой, — все-таки требуется учет высот  $h$  геоида относительно поверхности такого эллипса. Другими словами, для обработки с надлежащей точностью триангуляции СССР мы должны ввести определение высот  $h = h_r + \delta h$  геоида над принятым референц-эллипсоидом, причем средняя ошибка определения не должна превышать  $\pm 10$  м. Нужно признать существующий метод редуцирования выходных сторон триангуляции на принятый референц-эллипсоид недостаточным (для СССР) и поставить работы по определению  $h$  с указанной точностью.

### § 3. Заключительные соображения

Существенный вывод из предыдущих параграфов состоит в том, что при обработке триангуляции СССР мы должны знать высоты геоида в тех местах, где располагаются базисные сети, относительно принятого эллипса, как бы совершенно ни был сделан его выбор и даже в том случае, если этот эллипс будет в точности совпадать с наилучше подходящим к геоиду в пределах СССР эллипсоидом.

Отсюда дальнейшие выводы можно сделать следующие:

1. Так как задача по выводу размеров и положения наилучше подходящего для СССР эллипса требует охвата астрономо-геодезическими и гравиметрическими работами всей территории этой огромной страны и, следовательно, может быть выполнена только через довольно продолжительный отрезок времени, то можно и следует при обработке общей триангуляции СССР отказаться от такого наилучше подходящего эллипса и заменить его референц-эллипсоидом, достаточно близким к наилучше подходящему эллипсу.

2. Необходимо сейчас же поставить и повести энергично работу по определению высот  $h$  геоида относительно поверхности такого референц-эллипса, сопровождая эту работу параллельно ведущимися исследованиями самих методов определения этих величин  $h$  (понятно, что в первую очередь определение величин  $h$  нужно выполнить по рядам триангуляции I класса).

Исходный пункт референц-эллипса должен взять в середине территории СССР. Такой выбор исходного пункта приводит к уменьшению в четыре раза ожидаемых наибольших отступлений поверхности референц-эллипса от поверхности наилучше подходящего эллипса по сравнению с теми отступлениями, которые имеют место при выборе исходного пункта где-нибудь на краю страны.

Достаточную близость принимаемого референц-эллипсоида можно было бы характеризовать следующими условиями: различие  $\Delta a$  его большой полуоси от экваториальной полуоси наилучше подходящего эллипсоида не должно превышать  $\pm 150$  м и различие его сжатия от сжатия наилучшего подходящего эллипсоида не должно превышать  $-1 : 22\,500$ .

При этих условиях, а также при условии тщательного определения исходных геодезических координат, отступления поверхности референц-эллипсоида от наилучшего подходящего эллипсоида не превзошли бы на западной и восточной границах СССР  $\pm 90$  м, а различия геодезических координат от астрономических, обусловленные размерами референц-эллипсоида, не превзошли бы для пунктов, лежащих на границе страны, по долготе  $\pm 10''$  и по широте  $\pm 3''$ .

Такой референц-эллипсоид вполне отвечал бы всем требованиям картографии и всем требованиям топографических съемок, исполняющихся в масштабах 1 : 25 000 и мельче.

Вывод размеров ссей референц-эллипсоида, отвечающего указанным требованиям, установление его правильной ориентировки и определение высот пунктов триангуляции I класса относительно поверхности такого эллипсоида — и составляют одну из существенных задач научной и научно-технической работы в СССР в области геодезии в течение самых ближайших лет. При этом получение в процессе этой работы высот  $h$  геоида относительно некоторого эллипсоида, например, относительно хотя бы принятого в настоящее время эллипсоида Бесселя, позволит использовать уравнение (14) для вывода размеров и положения референц-эллипсоида, наряду с применением обычных методов вывода этих величин.

В ближайшие два — три года триангуляцией I класса будет охвачена вся Европейская часть СССР, за исключением Северной области между Северным Уралом и Северной Двиной, а в Азиатской части будет закончено грандиозное измерение по параллели от Челябинска на Урале через Новосибирск, Красноярск, Иркутск, Читу — до Владивостока, вплоть до Тихого океана, и кроме того, в Западной Сибири и в Казахстане триангуляцией I класса будет охвачена территория, равная по площади Европейской части СССР, простирающаяся к югу от параллели  $56^\circ$  вплоть до Туркестана, где триангуляции также будут исполнены.

В этой обширной триангуляции будет определено более 300 пунктов Лапласа.

Одновременно в течение этих же ближайших трех лет будет сильно подвинута общая гравиметрическая съемка СССР, которая охватит за это время всю Европейскую часть СССР, всю территорию в Азиатской части, лежащую к югу от параллели  $60^\circ$ , и ряд районов, лежащих севернее этой параллели (в общей гравиметрической съемке определения силы тяжести выполняются на пунктах, отстоящих друг от друга на 30—35 км).

При выводе референц-эллипсоида следует использовать не только астрономо-геодезический, но и гравиметрический материал, выполнив для этого соответствующие научные изыскания. Но, конечно, нужно помнить, что указанный обширный астрономо-геодезический материал и огромный материал по общей гравиметрической съемке все-таки окажется еще недостаточным для вывода высот  $h$  геоида над референц-эллипсоидом. Не вдаваясь здесь в методику определения величин  $h$ , отметим только, что

для их определения придется выполнить, с одной стороны, определение астрономических широт и долгот на значительном числе пунктов триангуляции I класса, сверх выполняющихся через 80—100 км определений пунктов Лапласа, и, с другой стороны, выполнить дополнительные определения силы тяжести к определениям ее, исполняемым в общей гравиметрической съемке, сгущая пункты этой съемки в соответственных местах.

Понятно, что эти дополнительные астрономические и гравиметрические работы будут значительны по объему. Но, думается, что надлежащее использование гравиметрии в целях геодезических существенно облегчит задачу по определению величин  $h$ , необходимых как для обработки триангуляций, так и для изучения фигуры геоида.

## **ОБОСНОВАНИЕ ПРОЕКТА ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ РАБОТ, ОТВЕЧАЮЩИХ ЗАПРОСАМ ГЕОДЕЗИИ В СССР**

Общая гравиметрическая съемка СССР развертывается, начиная с 1932 г., в значительнейшем объеме. Планы работ по этой съемке до сих пор отражали, главным образом, требования, выдвигаемые геологическим изучением территории Союза и геологической разведкой; сплошность съемки подчинялась требованиям научной геологии, а срочное освещение отдельных районов — требованиям геологоразведки. Геодезические запросы к гравиметрической съемке до 1934 г. явно не выдвигались при планировании гравиметрических работ отчасти потому, что перспектива охвата астрономо-геодезическими работами всей территории СССР не была так близка, как это оказалось в действительности, отчасти потому, что самые методы использования гравиметрических материалов в целях геодезии только что отрабатывались Научным институтом геодезии и картографии в 1932—1934 гг. (и продолжают отрабатываться, конечно, и в настоящее время). Теперь эти методические вопросы достаточно выяснились для того, чтобы дать обоснование первоначального проекта гравиметрических работ, отвечающих целям научной геодезии и запросам геодезических работ, охватывающих территорию от границы с Польшей до Владивостока. Этот проект, конечно, должен быть учтен при планировании гравиметрических работ в 1936 и последующих годах. В настоящей статье мы и приводим обоснования этого проекта, поскольку они уже выявились к настоящему времени. Самый проект будет отработан в Научном институте геодезии и картографии и направлен в соответствующие отделы Главного управления Государственной съемки и картографии к октябрю 1935 г. Полагаю, что обсуждение этой статьи, составленной мною по линии работы в Научном институте геодезии и картографии, читателями «Геодезиста» принесет свои результаты при внесении изменений в планы общей гравиметрической съемки, вызываемые установками со стороны геодезии.

**§ 1.** При обработке астрономо-геодезической сети, распространяющейся на значительную территорию, необходимо с хорошей точностью установить так называемые исходные геодезические даты, т. е. исходную широту, долготу и азимут. Из работы Ф. Н. Красовского «Соображения по установлению эллипсоида для геодезических работ в СССР» вытекает, что определение редукций базисов при проектировании их на поверхность референц-эллипсоида требует определения исходной широты и исходной долготы со средней ошибкой, не превышающей  $\pm 0''.5$ . Так как эта исходная геодезическая широта  $B_0$  и исходная геодезическая долгота  $L_0$  должны быть отнесены к поверхности наилучше подходящего эллипсоида, то, естественно, задача по определению  $B_0$  и  $L_0$  неразрывно связывается обычно с задачей определения большой полуоси и сжатия

этого наилучше подходящего эллипсоида. При этом, кроме нахождения основных неизвестных — поправки  $\Delta a$  большой полуоси, поправки  $\Delta \mu$  сжатия эллипсоида и слагающих уклонения отвеса  $\xi_0$  и  $\eta_0$  в исходном пункте астрономо-геодезической сети, приходится иметь еще дело с ошибками астрономически определенных в этом пункте широты, долготы и азимута. Правда, ошибка  $\delta \varphi$  исходной широты  $\varphi_0$  входит нераздельно с неизвестным  $\xi_0$ ; кроме того, ошибки в  $\varphi_0$  и в исходной астрономической долготе  $\lambda_0$  могут быть в уравнениях для  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  и  $\delta x$  опущены, так как всегда возможно настолько тщательное определение астрономической широты  $\varphi_0$  и долготы  $\lambda_0$  в исходном пункте, при котором ошибки  $\lambda_0$  будут собственно очень малы. Но, с другой стороны, вследствие подтвержденной исследованиями Ф. Н. Красовского необходимости учитывать влияние трехосности земного эллипсоида, в эти же уравнения входят еще два неизвестных (долгота  $\omega_0$  наибольшего меридиана и экваториальное сжатие  $i$ ), которые раньше обычно не вводились. Таким образом в уравнения для вывода размеров и ориентировки эллипсоида входят семь неизвестных, вместо основных двух, соответствующих задаче определения только размеров двухосного эллипсоида, или вместо трех, соответствующих задаче только ориентирования эллипсоида. Конечно, такое положение невыгодно влияет на надежность определения всех неизвестных.

Формально из уравнений для определения  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\delta x_0$ ,  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ , составленных для астрономо-геодезической сети большой территории (например СССР, США), неизвестные  $\xi_0$  и  $\eta_0$  выводятся по способу наименьших квадратов со средней ошибкой  $\pm 0''.3 - \pm 0''.4$ . Но надежность установления этой средней ошибки невелика: ведь в основе вывода лежит или трактовка уклонений отвеса как случайных ошибок астрономических широт и долгот, или уверенность в правильности введения в эти широты и долготы топографо-изостатических редукций. С другой стороны, если мы вообразим раздельное определение  $\xi_0$  или  $\eta_0$  от других неизвестных, то, например, для США ошибка в  $\xi_0$  на  $\pm 1''$  будет обуславливать в дальнейшем определении  $\Delta a$  погрешность в  $\pm 40$  м; а погрешность в  $\eta_0$  в  $\pm 1''$  в сети СССР приведет при последующем определении  $\Delta a$  к погрешности в  $\pm 90$  м. Несомненно из сказанного, что нам следует поставить задачу определения  $\xi_0$  и  $\eta_0$  независимо от других неизвестных градусных измерений, но, очевидно, со средней ошибкой, меньшей  $\pm 0''.4$ ; мы повысим тогда заметно точность определения остальных неизвестных и получим контроль вывода исходных геодезических дат (которые тогда определяются дважды двумя методами), а также и возможность научных сопоставлений результатов, полученных из обычного приема решения задачи и при раздельном определении  $\xi_0$  и  $\eta_0$  от других неизвестных.

Несомненно, когда идет речь об очень значительной территории, то наиболее подходящий к геоиду эллипсoid для такой территории должен оказаться близким к нормальному сфероиду, фигура которого выводится из гравиметрических определений. Поэтому определение величин  $\xi_0$  и  $\eta_0$  может быть исполнено гравиметрическим путем. Это применение гравиметрии в целях чисто геодезический представляется в следующем виде:

1. Надлежит на территории СССР выбрать пять пунктов: пункт  $C$  — в середине страны; пункты  $A$  и  $B$  — на одном меридиане с  $C$ , к северу и югу от  $C$ , в расстоянии от него порядка 700—1000 км; пункты  $D$  и  $E$  — на параллели пункта  $C$ , к западу и востоку от  $C$ , в расстоянии от него

порядка около 2000 км. Желательно, чтобы эти пять пунктов приходились в районах, достаточно удаленных от горных хребтов и значительных горных массивов и вообще вдали от районов заметных возмущений силы тяжести. Пункты  $A, B, C, D$  и  $E$  принадлежат каждый астрономо-геодезической сети.

Вблизи каждого из пунктов  $A, B, C, D$  и  $E$  избирают в расстоянии около 60—100 км еще один пункт, принадлежащий астрономо-геодезической сети, эти добавочные пункты мы назовем соответственно  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $E_1$ .

2. В пунктах  $A, B, C, D$  и  $E$  и в пунктах  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $E_1$  выполняются фундаментальные астрономические определения широты, долготы и азимута, причем в пунктах  $C$  и  $C_1$  с особой тщательностью, добиваясь определения широты со средней ошибкой не более  $\pm 0'',1$ , определения долготы — со средней ошибкой не более  $\pm 0^{\circ},01$  времени и определения азимута — со средней ошибкой  $\pm 0'',3$  (в остальных пунктах эти ошибки могут быть допущены в 1,5 раза большими).

3. В районах, прилегающих к пунктам  $A - A_1, B - B_1, C - C_1, D - D_1$  и  $E - E_1$ , выполняют определения силы тяжести на таком количестве пунктов и с охватом такого радиуса относительно  $A - A_1, B - B_1, C - C_1, D - D_1$  и  $E - E_1$ , чтобы на основании этих определений силы тяжести и при наличии достаточного количества определений силы тяжести, выполненных в порядке общей гравиметрической съемки за пределами районов пунктов  $A, B, C, D$  и  $E$ , вывести с надежностью, характеризуемой средней ошибкой, вообще меньшей  $\pm 0'',4$ , слагающие уклонения отвеса в пунктах  $A - A_1, B - B_1, C - C_1, D - D_1$  и  $E - E_1$ . Желательно при этом, кроме маятниковых определений, выполнить еще вариометрические наблюдения в пунктах  $A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, E_1$  и в близких к ним пунктах, лежащих на радиусе 5—10 км\*.

При выводе уклонений отвеса используют, конечно, результаты общей гравиметрической съемки СССР, дополняя ее в «близких зонах» и отчасти в «средних зонах». Поэтому в планах общей гравиметрической съемки после выбора пунктов  $A - A_1, B - B_1, C - C_1, D - D_1$  и  $E - E_1$  должно провести и соблюдать соответствующую очередь и соответствующее обслуживание далеких для этих пунктов зон — хотя бы и редко расположенных маятниковых точками. Несомненно, что неизбежные погрешности учета влияния очень далеких зон при решении поставленной задачи не имеют существенного значения, так как эти погрешности придаут выведенным значениям  $\xi_0$  и  $\eta_0$  территориальный характер, что не противоречит задаче отнесения уклонений отвеса к эллипсоиду, наилучше подходящему к геоиду в пределах данной большой страны.

4. Для каждой пары пунктов, например для  $A$  и  $A_1$ , делаем такие сопоставления:

$$\begin{aligned} \varphi_{A_1} - \xi_{A_1} + B_A - B_{A_1} &= \varphi_A - \xi_A, \\ \lambda_{A_1} - \eta_{A_1} \sec \varphi_{A_1} + L_A - L_{A_1} &= \lambda_A - \eta_A \sec \varphi_A. \end{aligned} \quad (1)$$

\* Если на каком-нибудь из пунктов  $A, B, C, D, E$  будет обнаружен значительный ход аномалий силы тяжести, то указанные вариометрические наблюдения на таком пункте являются необходимыми к выполнению.

Здесь  $B_A, L_A, B_{A_1}$  и  $L_{A_1}$  — геодезические широты и долготы соответственно пунктов  $A$  и  $A_1$ . Несогласия левых и правых частей уравнений (1) дают возможность, при учете влияния ошибок астрономических определений, вывести среднюю ошибку определения  $\xi$  и  $\eta$ , которая будет характеризовать только «внутреннюю сходимость» определения уклонений отвеса гравиметрическим путем.

Получив на пункте  $A$  из уравнений (1)

$$\begin{aligned}\xi'_A &= (\varphi_A - \varphi_{A_1}) - (B_A - B_{A_1}) + \xi_{A_1}, \\ \eta'_A &= (\lambda_A - \lambda_{A_1}) \cos \varphi_A + \eta_{A_1} \sec \varphi_A \cos \varphi_A - (L_A - L_{A_1}) \cos \varphi_A,\end{aligned}\quad (2)$$

берем среднее из  $\xi'_A$  и  $\eta'_A$ ,  $\eta_A$  и  $\eta'_A$ . Так же поступаем по всем остальным парным пунктам.

5. Для сопоставления величин  $\xi$  и  $\eta$ , выведенных в  $C$ , с величинами  $\xi$  и  $\eta$ , полученными в  $A, B, D$  и  $E$ , поступаем следующим образом.

Исправляем астрономические широту, долготу и азимут в  $C$  соответственно на  $-\xi_C, -\eta_C \sec \varphi_C$  и  $-\eta_C \operatorname{tg} \varphi_C$ , причем под  $\xi_C$  и  $\eta_C$  понимаем выведенные в среднем значения из обработки материалов на пунктах  $C$  и  $C_1$ . С этими исправленными астрономическими координатами и азимутом в  $C$ , принимаемыми временно за исходные геодезические координаты  $B_C, L_C$  и за исходный азимут  $A_C$  в пункте  $C$ , вычисляем геодезические широты и долготы пунктов  $A, B, D$  и  $E$  на среднем эллипсоиде<sup>1</sup>, соответствующем выведенному из градусных измерений СССР, Европы, США трехосному эллипсоиду; затем приходим к следующим уравнениям (3) и (4), в которых через  $\xi_C$  и  $\eta_C$ ,  $\xi_A$  и  $\eta_A$ ,  $\xi_D$  и  $\eta_D$ ... обозначены полученные, как указано в разделе 4, значения  $\xi$  и  $\eta$  на пунктах  $C, A, D; \dots$  через  $\omega_C, \omega_A, \omega_D \dots$  обозначены долготы соответственно пунктов  $C, A, D \dots$  относительно наибольшего меридиана на трехосном эллипсоиде, имеющем экваториальное сжатие  $i$ .

$$\begin{aligned}\delta \eta_C &\left[ 1 - \frac{(B_C - B_A)}{\rho''} \cos \varphi_A \sin \varphi_C \right] - \frac{(L_C - L_A)}{\rho''} \operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_C \delta \xi_C = \\ &= (L_A - \lambda_A) \cos \varphi_C + \eta_A \sec \varphi_A \cos \varphi_C + \underline{\delta \eta_A \sec \varphi_A \cos \varphi_C} + \\ &+ i \cos \varphi_C \left[ (B_C - B_A) \operatorname{tg} \frac{(\varphi_A + \varphi_C)}{2} \sin (\omega_C + \omega_A) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} \right) \cos (\omega_C + \omega_A) (L_C - L_A) \right]; \\ \delta \eta_C &\left[ 1 - \frac{(B_C - B_B)}{\rho''} \cos \varphi_B \sin \varphi_C \right] - \frac{(L_C - L_B)}{\rho''} \operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_C \delta \xi_C = \\ &= (L_B - \lambda_B) \cos \varphi_C + \eta_B \sec \varphi_B \cos \varphi_C + \underline{\delta \eta_B \sec \varphi_B \cos \varphi_C} + \\ &+ i \cos \varphi_C \left[ (B_C - B_B) \operatorname{tg} \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2} \sin (\omega_C + \omega_B) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2} \right) \cos (\omega_C + \omega_B) (L_C - L_B) \right]; \\ \underline{\delta \eta_C} &= \underline{\delta \eta_C};\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta\eta_C & \left[ 1 - \frac{(B_C - B_D) \cos \varphi_D + (B_C - B_E) \cos \varphi_E}{2\rho''} \sin \varphi_C \right] - \\ & - \frac{(L_C - L_D) \operatorname{tg} \varphi_D + (L_C - L_E) \operatorname{tg} \varphi_E}{2\rho''} \cdot \cos \varphi_C \delta\xi_C = \\ & = \left[ \frac{(L_D + L_E)}{2} - \frac{(\lambda_D + \lambda_E)}{2} \right] \cos \varphi_C + \frac{\eta_D \sec \varphi_D + \eta_E \sec \varphi_E}{2} \cdot \\ & \cdot \cos \varphi_C + \frac{\delta\eta_D \sec \varphi_D + \delta\eta_E \sec \varphi_E \cos \varphi_C}{2} + \frac{i \cos \varphi_C}{2} \left[ (B_C - B_D) \operatorname{tg} \frac{\varphi_D + \varphi_C}{2} \right. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \sin (\omega_C + \omega_D) + (B_C - B_E) \operatorname{tg} \frac{\varphi_E + \varphi_C}{2} \sin (\omega_C + \omega_E) \right] - \\ & - \frac{i \cos \varphi_C}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_D + \varphi_C}{2} \right) \cos (\omega_D + \omega_C) (L_C - L_D) + \right. \\ & \left. + \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_E + \varphi_C}{2} \right) \cdot \cos (\omega_E + \omega_C) (L_C - L_E) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\xi_C \cos (L_C - L_D) + \frac{(L_C - L_D)}{\rho''} \cos \frac{\varphi_C + \varphi_D}{2} \operatorname{tg} \varphi_C \delta\eta_C & = B_D - \varphi_D + \\ + \xi_D + \delta\xi_D + i \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_D}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_D) \cos (\omega_C + \omega_D) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (L_C + L_D) \cdot \sin (\varphi_C + \varphi_D) \sin (\omega_C + \omega_D) \right]; \end{aligned}$$

$$\delta\xi_C = \underline{\delta\xi_C};$$

$$\begin{aligned} \delta\xi_C \cos (L_C - L_E) + \frac{(L_C - L_E)}{\rho''} \cos \frac{\varphi_C + \varphi_E}{2} \operatorname{tg} \varphi_C \delta\eta_C & = B_E - \varphi_E + \\ + \xi_E + \delta\xi_E + i \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_E}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_E) \cos (\omega_C + \omega_E) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (L_C - L_E) \sin (\varphi_C + \varphi_E) \cdot \sin (\omega_C + \omega_E) \right]; \end{aligned}$$

$$\delta\xi_C \cdot \frac{\cos (L_C - L_A) + \cos (L_C - L_B)}{2} +$$

$$\begin{aligned} + \frac{(L_C - L_A) \cos \frac{\varphi_C + \varphi_A}{2} + (L_C - L_B) \cos \frac{\varphi_C + \varphi_B}{2}}{2\rho''} \operatorname{tg} \varphi_C \delta\eta_C & = \\ & = \frac{(B_A - \varphi_A) + (B_B - \varphi_B)}{2} + \frac{\xi_A}{2} + \frac{\xi_B}{2} + \frac{\delta\xi_A}{2} + \frac{\delta\xi_B}{2} + \\ & + \frac{i}{2} \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_A}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_A) \cos (\omega_C + \omega_A) + \right. \\ & \left. + \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_B}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_B) \cos (\omega_C + \omega_B) \right] + \\ & + \frac{i}{4} \left[ (L_C - L_A) \sin (\varphi_C + \varphi_A) \sin (\omega_C + \omega_A) + \right. \\ & \left. + (L_C - L_B) \sin (\varphi_C + \varphi_B) \sin (\omega_C + \omega_B) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (4) и (3) члены с множителем  $i$  суть поправки (соответственно в геодезическую широту  $B$  или в геодезическую долготу  $L$ ) за трехосность эллипсоида; подчеркнутые члены играют роль погрешностей наблюдений.

Введение поправок за трехосность земного эллипса в уравнения (3) и (4) требует предварительного определения долготы  $\omega_0$  наибольшего меридиана и экваториального сжатия  $i$  из совместной обработки материалов по астрономо-геодезическим сетям СССР, США и Европы\*.

Свободные члены уравнений (3) и (4) при сделанном нами выборе пунктов  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $E$  относительно  $C$  будут в очень слабой степени зависеть от ошибок в принятых, при вычислении согласно разделу 5 геодезических координат, размеров эллипса. Перепишем еще эти уравнения в такой форме:

$$\begin{aligned} \delta\eta_A &= \delta\eta_C \left[ \cos \varphi_A \sec \varphi_C - \frac{B_C - B_A}{\rho''} \cos^2 \varphi_A \operatorname{tg} \varphi_C \right] - \\ &\quad - \frac{L_C - L_A}{\rho''} \sin \varphi_A \delta\xi_C - (L_A - \lambda_A) \cos \varphi_A - \\ &\quad - \eta_A - i \cos \varphi_A \left[ (B_C - B_A) \operatorname{tg} \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} \sin (\omega_C + \right. \\ &\quad \left. + \omega_A) - \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_A + \varphi_C}{2} \right) \cos (\omega_C + \omega_A) (L_C - L_A) \right]; \\ \delta\eta_B &= \delta\eta_C \cos \varphi_B \left[ \sec \varphi_C - \frac{B_C - B_B}{\rho''} \cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_C \right] - \\ &\quad - \frac{L_C - L_B}{\rho''} \sin \varphi_B \delta\xi_C - (L_B - \lambda_B) \cos \varphi_B - \eta_B - \\ &\quad - i \cos \varphi_B \left[ (B_C - B_B) \operatorname{tg} \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2} \sin (\omega_C + \omega_B) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2} \right) \cos (\omega_C + \omega_B) (L_C - L_B) \right]; \\ \delta\eta_C &= \delta\eta_C; \\ \frac{\delta\eta_D + \delta\eta_E}{2} &= \delta\eta_C \cos \varphi_m \left[ 1 - \frac{(B_C - B_D) + (B_C - B_E)}{2\rho''} \cos \varphi_m \sin \varphi_C \right] - \\ &\quad - \frac{(L_C - L_D) + (L_C - L_E)}{2\rho''} \sin \varphi_m \delta\xi_C - \frac{\eta_D + \eta_E}{2} - \\ &\quad - \left( \frac{L_D + L_E}{2} + \frac{\lambda_D + \lambda_E}{2} \right) \cos \varphi_m - \frac{i \cos \varphi_m}{2} \operatorname{tg} \varphi_m [(B_C - \right. \\ &\quad \left. - B_D) \sin (\omega_C + \omega_D) + (B_C - B_E) \sin (\omega_C + \omega_E)] + \frac{i \cos \varphi_m}{2} \left( 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_m \right) [(L_C - L_D) \cos (\omega_D + \omega_C) + (L_C - L_E) \cos (\omega_E + \omega_C)]; \end{aligned} \quad (5)$$

\* При этом следует использовать и результаты гравиметрические.

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_D &= \frac{(L_C - L_D)}{\rho''} \cos \frac{\varphi_C + \varphi_D}{2} \operatorname{tg} \varphi_C \cdot \delta\eta_C + \cos(L_C - L_D) \delta\xi_C - \\
 &- (B_D - \varphi_D) - \xi_D - i \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_D}{2} \right) \cdot (\varphi_C - \varphi_D) \cos(\omega_C + \omega_D) + \frac{1}{2} (L_C - L_D) \sin(\varphi_C + \varphi_D) \sin(\omega_C + \omega_D) \right]; \\
 \delta\xi_C &= \delta\xi_C; \\
 \delta\xi_E &= \frac{(L_C - L_E)}{\rho''} \cos \frac{\varphi_C + \varphi_E}{2} \operatorname{tg} \varphi_C \cdot \delta\eta_C + \cos(L_C - L_E) \delta\xi_C - \\
 &- (B_E - \varphi_E) - \xi_E - i \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_E}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_E) \cos(\omega_C + \omega_E) + \frac{1}{2} (L_C - L_E) \cdot \sin(\varphi_C + \varphi_E) \sin(\omega_C + \omega_E) \right]; \\
 \delta\xi_A + \delta\xi_B &= \frac{(L_C - L_A) \cos \frac{\varphi_C + \varphi_A}{2} + (L_C - L_B) \cos \frac{\varphi_C + \varphi_B}{2}}{2 \rho''} \operatorname{tg} \varphi_C \delta\eta_C + \\
 &+ \frac{\cos(L_C - L_A) + \cos(L_C - L_B)}{2} \delta\xi_C - \frac{(B_A - \varphi_A) + (B_B - \varphi_B)}{2} - \\
 &- \frac{\xi_A + \xi_B}{2} - \frac{i}{2} \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_A}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_A) \cos(\omega_C + \omega_A) + \right. \\
 &\left. + \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \frac{\varphi_C + \varphi_B}{2} \right) (\varphi_C - \varphi_B) \cos(\omega_C + \omega_B) \right] - \frac{i}{4} [(L_C - L_A) \cdot \\
 &\cdot \sin(\varphi_C + \varphi_A) \sin(\omega_C + \omega_A) + (L_C - L_B) \sin(\varphi_C + \varphi_B) \sin(\omega_C + \omega_B)];
 \end{aligned} \tag{6}$$

При указанном выборе точек  $A, B, D$  и  $E$  относительно  $C$  погрешности в значениях  $i$  и  $\omega_0$ , принимаемых при вычислении свободных членов уравнений (5) и (6), будут влиять незначительно на свободные члены нормальных уравнений для определения  $\delta\eta_C$  и  $\delta\xi_C$ , получаемых из уравнений (5) и (6).

Однако до решения системы (5) и (6) придется вывести из астрономо-геодезических материалов по СССР, по США, по Западной Европе и отчасти из гравиметрических определений, исполненных на всем земном шаре,  $i$  и  $\omega_0$ ; затем определить из системы уравнений (5) и (6) вероятнейшие значения  $\delta\eta_C$  и  $\delta\xi_C$ , а по ним  $\eta_C + \delta\eta_C$  и  $\xi_C + \delta\xi_C$ . Через  $\varphi_m$  в (5) и (6) обозначено:

$$\varphi_m = \frac{\varphi_E + \varphi_D}{2}$$

Уравнения (5) и (6) решаем под условием минимума суммы квадратов:

$$\delta\eta_A, \delta\eta_B, \delta\eta_C, \delta\eta_D, \delta\eta_E, \delta\xi_A, \delta\xi_B, \delta\xi_C, \delta\xi_D, \delta\xi_E.$$

Очевидно, дело сводится к тому, чтобы четвертому уравнению в группе (5) и четвертому уравнению в группе (6) придать двойной вес по сравнению с весами остальных уравнений. Конечно, до перехода от уравнений (5) и (6) к нормальным уравнениям для определения  $\delta\eta_C$  и  $\delta\xi_C$  нужно исследовать уравнения (5) и (6) в отношении даваемых ими в отдельности значений  $\delta\xi_C$  и  $\delta\eta_C$ .

Если пункт  $A$  или  $B$  нельзя взять вблизи меридиана точки  $C$ , то тогда один из них (или оба) заменяется парой пунктов, лежащих симметрично относительно меридиана точки  $C$ . Точно так же, если точку  $D$  или  $E$  нельзя взять вблизи параллели точки  $C$ , то один из них (или оба) заменяется парой пунктов, лежащих симметрично относительно этой параллели. Составление по таким парным пунктам соответствующих уравнений в группах (5) и (6) ясно из предыдущего.

6. После определения  $\delta\xi_C$  и  $\delta\eta_C$  и получения  $\xi_C + \delta\xi_C$  и  $\eta_C + \delta\eta_C$  следует сопоставление их с выведенными из обработки астрономо-геодезической сети значениями  $\xi_C$  и  $\eta_C$  и установление окончательных значений  $\xi_C$  и  $\eta_C$ , а по ним — исходной геодезической широты, долготы и азимута в  $C$ . Сказать наперед, как именно будет выполняться это только что указанное сопоставление величин, выведенных гравиметрически, и величин, выведенных астрономо-геодезическим путем, не имеется оснований, так как такая задача еще не решалась нигде, но, очевидно, только указанный путь дает надлежаще полный материал для установления исходных геодезических дат. Для СССР исходным следует принять пункт в Омске или Новосибирске; пункт  $D$  — в г. Свободном; пункт  $E$  дать парным: в Пулкове и в Полтаве; пункт  $A$  взять парным: в Березове на Оби и в Туруханске на Енисее; пункт  $B$  — вблизи г. Туркестана.

**§ 2.** Установление исходных  $\xi_0$  и  $\eta_0$  имеет существенное значение в вопросе вывода размеров наилучше подходящего для СССР эллипсоида, причем для СССР в этом вопросе более строгие требования предъявляются к  $\eta_0$ , чем  $\xi_0$ . Установление размеров эллипсоида необходимо, с другой стороны, для уравнивания триангуляции, а строгое установление  $\xi_0$  и  $\eta_0$  также необходимо для уравнивания триангуляции. Уравнения Лапласа, совершенно необходимые при уравнивании астрономо-геодезической сети, требуют установления исходной геодезической широты или, все равно, значения  $\xi_0$  с ошибкой, не превышающей  $\pm 0''.4$ ; только тогда и при исходном пункте в середине страны координаты наиболее удаленных от него пунктов астрономо-геодезической сети СССР будут искажены, вследствие обусловленных ошибочностью  $\xi_0$  систематических ошибок в свободных членах уравнений Лапласа, не более как на  $\pm 1,2$  м. Точно так же ошибка в  $\eta_0$  не должна превышать  $\pm 0''.5$ , чтобы систематические ошибки в координатах, наиболее удаленных от исходного пункта триангуляции СССР, обусловленные суммарным влиянием этой ошибки и  $\delta\xi_0$ , на свободные члены уравнений Лапласа не превышали бы\*  $\pm 1,4$  м.

При этих требованиях к точности определения  $\xi_0$  и  $\eta_0$  ошибки в координатах пунктов, наиболее удаленных от срединного исходного пункта, обусловленные ошибками составления уравнений Лапласа, будут примерно одного порядка с ошибками в координатах тех же пунктов, обусловленных ошибками углов и базисов триангуляции. Конечно, при приближении пункта к исходному влияние ошибок составления

\* Так как все азимуты Лапласа искажаются на  $-\delta\eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0$ , что вызывает общий поворот сети, то желательно для СССР иметь  $\delta\eta_0$ , не превышающее  $\pm 0''.4$ .

уравнений Лапласа будет быстро падать, и только поэтому можно принять  $\delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \pm 0'',4$ .

Уравнивание триангуляции I класса СССР, научно обоснованное, является в настоящее время делом совершенно неотложным, и поэтому очевидно, что с решением вопроса об установлении исходных геодезических дат нужно спешить, и вследствие этого намеченные в § 1 гравиметрические работы имеют в себе элемент неотложности.

Значительная часть этих работ в г. Свободном уже выполнена; для Пулкова эти работы будут выполнены в 1935 г. Научным институтом геодезии и картографии; в Полтаве значительная часть этих работ уже выполнена. Таким образом вопрос сводится к гравиметрическим работам в районе Новосибирска (или Омска) и в районах г. Березова и г. Туркестана. Дело, однако, осложняется тем, что г. Березов еще не включен в триангуляцию СССР и, следовательно, нужно срочно довести триангуляционные цепи с Урала до Оби на Самарово и затем выполнить их на Оби от Самарово до Березова.

Нужно еще отметить, что задача, поставленная в § 1 и 2 по гравиметрическому определению исходных геодезических дат, доставляет материал и для решения ряда других научных задач геодезии, о которых идет речь в § 5 и 6. Следует в связи с этой задачей гравиметрические пункты подразделить:

- a) на пункты общей гравиметрической съемки, отстоящие друг от друга примерно на 30 км и покрывающие район каждого из пунктов A, B, C, D и E радиусом 200—300 км;
- b) на пункты специальной съемки в районах пунктов A, B, C, D и E, необходимо дополняющие в близких и средних зонах общую гравиметрическую съемку;
- c) на редкие сравнительно пункты, освещающие гравиметрически территорию, удаленную от каждого из пунктов A, B, C, D и E более чем на 300 км.

В планах гравиметрических работ следует выделить освещение далеких территорий редкими пунктами как особый вид работ, выполняемый специальными экспедициями.

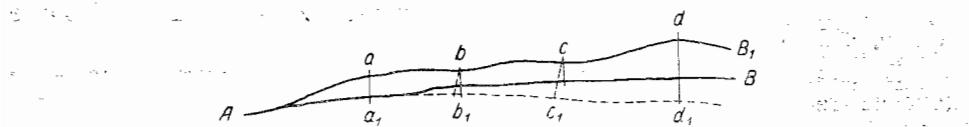
**§ 3.** Из работы Ф. Н. Красовского «Соображения по установлению эллипсоида для геодезических работ в СССР», доложенной им на VII Балтийской геодезической конференции, вытекает с полной определенностью, что для надлежащего перенесения на референц-эллипсоид измеренных в триангуляции элементов (в особенности базисов) необходимо поставить особые работы по определению высот геоида над референц-эллипсоидом. Конечно, нет нужды эти высоты определять во всех рядах триангуляции I класса. Однако это необходимо выполнить по следующим рядам:

- 1) Мурманск—Пулково—Шимск—Орша—Переяславль—Николаев;
- 2) Шимск—Кострома—Рязань—Ростов—Зугдиди—Тбилиси—Баку;
- 3) Переяславль (близ Киева) — Ростов;
- 4) Орша—Ульяновск—Уфа—Челябинск—Курган—Омск—Новосибирск—Иркутск—Чита—Хабаровск;
- 5) Омск—Семипалатинск—Алма-Ата—Ташкент—Казалинск—Оренбург—Уфа;
- 6) Курган—Тобольск—Березов.

С развитием триангуляции I класса к этим рядам прибавятся ряды, ответвляющиеся к северу от ряда Омск — Иркутск — Чита — Хабаровск

и направляющиеся по Енисею, Лене, Колыме и вдоль побережья Охотского моря. Очевидно, предстоит очень большая работа, хотя и дополнительная по отношению к основной астрономо-геодезической работе в триангуляции I класса СССР.

Мы не должны забывать, что эта дополнительная работа очень большая и совершенно необходимая и неотложная; мы должны бросить установившийся взгляд, что раз базисы и углы в триангуляции измерены и через 250 или 125 км определены по ее рядам пункты Лапласа, то полевая работа закончена. Это было бы верно, если бы работа ограничивалась Европейской частью СССР. Таким образом нужно сообразить возможно экономные и быстрые методы работы по определению высот геоида над принятым референц-эллипсоидом по указанным выше рядам. Готовый для этого метод — это метод так называемого астрономического нивелирования\*. Это нивелирование от Пулкова до Хабаровска покроет путь в 7500 км и при среднем расстоянии между смежными астрономическими пунктами в 30 км потребует 250 передач от Пулкова до Хабаровска. Если потребуем, чтобы накопление ошибок на этом пути не превысило  $\pm 10$  м (что для целей чисто геодезических достаточно), то средняя ошибка отдельной передачи высот не должна будет превышать  $\pm 0,30$  м. В огромном большинстве случаев в районах, достаточно удаленных от значительных горных массивов, при расстоянии между станциями астрономического нивелирования в 30 км наибольшая ошибка, вызванная в приращении высоты геоида неравномерным ходом уклонения отвеса между двумя смежными станциями, не превзойдет  $\pm 0,60$  м. Поэтому если бы действие таких неравномерностей в ходе уклонения отвесной линии можно было считать аналогичным действию случайных ошибок наблюдений,



то мы могли бы не в горных районах брать станции астрономического нивелирования через 30 км. Но такой подход к делу был бы необоснован. В самом деле, пусть на фигуре кривая  $AB$  принадлежит референц-эллипсоиду, а кривая  $AB_1$  — геоиду, причем  $A, a, b, c, d$  — станции астрономического нивелирования. Нетрудно видеть, что чередование волн геоида может приводить к таким чередованиям уклонений отвеса в  $A, a, b, c$  и  $d$ , при которых мы построим из нивелирования профиль  $Aa_1b_1c_1d_1$ , систематически отступающий от профиля геоида.

При расстоянии между станциями астрономического нивелирования в 30 км число их по СССР превзойдет тысячу; правда, две пятых этих станций будет падать на определяемые ГГГУ<sup>2</sup> в триангуляции I класса пункты Лапласа, т. е. не потребует добавочных затрат. Однако мы должны иметь в виду, что на Кавказе, в Приуральи и на значительной площади в Азиатской части СССР, где рельеф имеет полугорный и горный характер, расстояния между станциями астрономического нивелирования придется брать не в 30, а может быть всего в 10—15 км. С дру-

\* Конечно, с учетом соответствующих малых гравиметрических поправок.

гой стороны, приведенные выше соображения о возможности систематического действия неравномерностей в ходе уклонений отвесных линий лишают нас всякой уверенности, что в равнинных районах при расстоянии между станциями астрономического нивелирования в 30 км мы получим результат достаточной надежности. Нужно иметь еще в виду, что если расстояние между станциями астрономического нивелирования будем брать меньшее, чем сторона треугольника триангуляции I класса, т. е. если станции этого нивелирования не будут совпадать с пунктами триангуляции I класса, то возникает большая и тяжелая работа по точному определению геодезических координат станций нивелирования, которая по объему и стоимости может превзойти объем и стоимость работ по самому астрономическому нивелированию. Очевидно, что в поставленной задаче — вывода высот геоида относительно референц-эллипсоида — мы должны применить новые методы, которые основываются на комбинированном использовании астрономо-геодезических результатов и гравиметрической съемки.

Основная идея заключается в следующем: 1) гравиметрическая съемка, выполненная в пределах достаточно широкой полосы, продольной осью которой служит исследуемый профиль геоида, доставляет материал для выяснения этого профиля относительно некоторого, неизвестного по размерам и по положению нормального сфероида; 2) астрономические определения на пунктах триангуляции I класса, приходящихся вдоль того же профиля, позволяют этот профиль отнести по частям к поверхности референц-эллипсоида, путем увязки «абсолютных» уклонений отвесных линий, доставленных гравиметрически определенным профилем геоида, между «относительными» уклонениями отвесных линий, определенными на пунктах триангуляции астрономо-геодезическим путем. В этом методе ошибки редукций силы тяжести будут незначительно сказываться на выводе высот геоида относительно референц-эллипсоида, так как действие этих ошибок будет локализироваться на участках между каждыми двумя смежными астрономическими пунктами. Этот метод отрабатывается в 1935 г. Научным институтом геодезии и картографии. Выгода применения его вытекает прежде всего из того соображения, что основным при этом методе является материал, доставляемый общей гравиметрической съемкой СССР.

Если представить себе, что эта съемка уже выполнена, причем в ее сети пункты расположены через 30 км друг от друга, то для поставленной в настоящем параграфе задачи придется лишь выполнить некоторые дополнительные гравиметрические работы, беря дополнительные маятниковые точки по рядам триангуляции I класса, причем число и место этих пунктов будет уже указываться результатами общей гравиметрической съемки. При этом астрономические пункты в большинстве районов достаточно будет взять через 60—100 км, т. е., другими словами, в ряде районов ограничиться небольшими дополнениями к определяемым ГГГГУ пунктам Лапласа в триангуляции I класса. Выбор этих дополнительных астрономических пунктов будет делаться не вслепую, а также на основании выводов из материалов общей гравиметрической съемки и дополнительных гравиметрических работ по рядам триангуляции I класса. Конечно, и самое подразделение районов в смысле детальности их изучения будет основано на результатах общей гравиметрической съемки. Более детально мы не можем пока останавливаться на этом

вопросе определения высот геоида относительно референц-эллипсоида из комбинированного использования определений силы тяжести и астрономических определений в триангуляции, но нужно иметь в виду, что проведение общей гравиметрической съемки СССР — дело длительное.

Поэтому очевидно, что задачи геодезии требуют исполнения этой съемки в одну из первых очередей по указанным выше рядам триангуляции I класса и, кроме того, вдоль Енисея, Лены, Колымы и побережья Тихого океана. При этом исполнение гравиметрических работ вдоль линии Пулково — Орша — Москва — Челябинск — Новосибирск — Чита — Хабаровск является совершенно первоочередным и не подлежащим никаким откладываниям. Полоса, продольной осью которой является указанная линия, должна иметь ширину в среднем около 300 км, в пределах такой полосы определения силы тяжести должны быть выполнены на пунктах, отстоящих друг от друга через 25—30 км, и в соответствующих местах — чаще.

Параллельно с продвижением общей гравиметрической съемки по этой полосе на восток могут в отделанных уже западных ее частях производиться необходимые дополнительные гравиметрические определения и необходимые дополнительные определения астрономических пунктов в триангуляции I класса.

**§ 4.** Мы снова возвращаемся к вопросу определения наилучше подходящего для СССР эллипсоида, решение которого в практических целях обусловлено известной срочностью.

Работа Ф. Н. Красовского «Обзор и исследование результатов современных градусных измерений», доложенная на VIII конференции Балтийской геодезической комиссии в г. Таллине и имеющая быть напечатанной в трудах Балтийской комиссии, определенно подтверждает необходимость учитывать трехосность земного эллипса. Однако установление экваториального сжатия  $i$  и в особенности долготы  $\omega_0$  наибольшего меридиана выполняется из градусных измерений с малой надежностью. Причина этого заключается, главным образом, в том, что до сих пор связанные между собой геодезические измерения не образуют значительных и сплошных дуг по параллелям. Но определения силы тяжести вдоль достаточно значительной части некоторого меридиана доставляют вывод полярного сжатия соответствующего меридианного эллипса, и поэтому, теоретически рассуждая, измерения силы тяжести могут обнаружить и те колебания в значении полярного сжатия (от 1 : 296 до 1 : 301) для меридианов под разными долготами, которые обусловлены трехосностью земного эллипса. Так как наибольший меридиан предположительно проходит около Москвы, то следует определение силы тяжести выполнить на меридианах:

- 1)  $\lambda = 30^\circ$  (Мурманск — Пулково — Киев — Одесса — Черное море — побережье Малой Азии);
- 2)  $\lambda = 45^\circ$  (Канин — Горький — Сталинград — Каспий — южное побережье Каспия);
- 3)  $\lambda = 60—65^\circ$  (Земля Франца Иосифа — Новая Земля, Ямал — Тобольск, Казалинск — Бухара);
- 4)  $\lambda = 90—100^\circ$  (Северная Земля — устье Хатанги — Нижняя Тунгуска — Нижнеудинск — Красноярск);
- 5)  $\lambda = 125^\circ$  (усты Лены — Якутск — Благовещенск);
- 6)  $\lambda = 150^\circ$  (Новая Сибирь — устье Индигирки — В. Колымск — залив Ногаева — Сахалин).

При обработке материалов по определениям силы тяжести на указанных меридианах в пределах СССР, конечно, к ним должны быть присоединены и использованы материалы по определениям силы тяжести в Британской Индии, в Китае и в Японии, результаты работ Вейнинг Мейнеса на подводной лодке по его рейсу от Мадагаскара до Борнео и определения силы тяжести, выполненные англичанами по 30-му меридиану в Африке.

При обработке всех этих материалов по определениям силы тяжести существенную роль будет играть вопрос о редукциях силы тяжести, но, во всяком случае, указанные гравиметрические работы вместе с определениями силы тяжести на всем земном шаре дадут ценный материал для вывода  $i$  и в особенности  $\phi_0$ . Понятно, что все гравиметрические работы, служащие для выяснения трехосности земного эллипсоида, целиком и полностью входят в общую гравиметрическую съемку СССР. Поэтому здесь геодезия не требует новых и добавочных расходов, а лишь принятия в расчет геодезических требований при установлении очередностей в общей гравиметрической съемке СССР.

**§ 5.** Огромная территория СССР имеет очень разнообразное устройство поверхности: более трети этой поверхности имеет полугорный и горный характер и около половины ее принадлежит низменной равнине. Градусные измерения СССР в настоящее время пересекли Кавказ; к 1936 г. грандиозная дуга 52-й параллели пересечет горные хребты близ Байкала, направляясь далее к востоку по территории, окруженной с севера и с юга мощными горными образованиями. Не нужно также забывать, что к 1937 г. наши градусные измерения достигнут «крыши мира» — Памира. Как выполнять обработку градусных измерений в этих горных районах? Если следовать примеру американцев или последним работам Хейсканена, то надлежит применить ту или другую гипотезу изостатической компенсации.

Однако применяемые до сих пор схемы изостатической компенсации подвергаются в настоящее время серьезной критике со стороны геофизиков и геологов. Работы англичан за последние десятилетия в Британской Индии приводят английских геодезистов к отрицанию для самого Индостана изостатической компенсации, по крайней мере при применении построений Хейфорда — Пратта. По существу, последние работы Хейсканена по Кавказу приводят, в противоположность заключениям самого автора, к сомнениям относительно компенсации Кавказа по Хейфорду или Эйри. Судя по позднейшим материалам измерений силы тяжести, Урал также как будто не компенсирован изостатически.

Все эти сображения и факты приводят к необходимости поставить в горных и полугорных районах в надлежащем объеме гравиметрические работы с целью вывода из них «абсолютных» уклонений отвеса в астрономических пунктах градусных измерений в этих районах.

В гравиметрическом методе вывода уклонений отвеса для горных районов мы еще имеем некоторые неосвещенные стороны<sup>3</sup>. Но все-таки этот метод даст результаты, вероятно, более надежные, чем применение гипотезы изостатической компенсации, именно потому, что измеренная сила тяжести учитывает влияние наружных и внутренних масс сама по себе, без всяких гипотез; и только переход от нее к соответствующей ей величине на поверхности геоида опирается на те или иные предположения. Конечно, в горных районах вывод уклонений отвеса гравиметрическим путем потребует значительных дополнений общей гравиметрической съемки и притом с захватом значительной площади.

Эти гравиметрически определенные «абсолютные» уклонации отвеса послужат для введения в горных районах поправок в астрономические широты и долготы пунктов градусных измерений. Конечно, эти поправки следует сопоставить с топографо-изостатическими поправками для одних и тех же точек. Так как введение в астрономические координаты в качестве поправок слагающих уклонений отвеса, выведенных гравиметрически, приводит нас по существу к нормальному сфероиду, а не к отыскиваемому «наиболее подходящему» для данной страны эллипсоиду, то, может быть, потребуется для данного горного района введение в соответствующие уравнения градусных измерений добавочных неизвестных  $\xi$  и  $\eta$ .

Во всяком случае, при использовании гравиметрического материала в градусных измерениях новые методические вопросы неизбежны. Правильность вывода гравиметрическим путем уклонений отвеса можно проконтролировать на основании детально исполненного астрономического нивелирования вдоль дуги градусного измерения\*. Этот контроль основывается на сравнении профиля геоида, отнесенного к референц-эллипсоиду и полученного астрономическим нивелированием, с профилем геоида, полученным гравиметрически. Возможно, что этот контроль установит некоторые систематические расхождения, зависящие от характера горообразования. Вопрос о редукциях силы тяжести не должен останавливать проведения гравиметрических работ и попыток использования гравиметрического материала в горных районах в целях научной геодезии. В целях градусных измерений исполнение общей гравиметрической съемки должно быть признано первоочередным в следующих районах:

- 1) Кавказ с Северным Кавказом и Закавказьем и с захватом Черного и Каспийского морей;
- 2) район в границах: Иркутск — северный конец озера Байкал — Чита — р. Ингода — граница с Китаем до р. Уды, Нижнеудинск — Иркутск.

Остальные полугорные районы захватываются при исполнении плана, намеченного в § 3.

**§ 6.** В ближайшем пятилетии триангуляции I класса, с заменой, может быть, их в некоторых частях высокоточными траверсами, будут проложены по Оби, Енисею, Лене, Колыме, по берегу Охотского моря до Камчатки; возможно, что в дальнейшем будут проложены триангуляции на некоторых участках побережья Ледовитого океана. Применяя метод § 3, по указанным направлениям будут получены профили геоида, и этот материал для науки о Земле даст, конечно, много нового и ценного.

Однако для изучения геоида на огромной площади между Обью и Охотским морем, этих профилей, имеющих в общем меридиональное направление, все-таки будет недостаточно. Проложение же точных триангуляций между указанными большими реками Сибири — дело достаточно отдаленного будущего. Таким образом здесь возникает методический вопрос общего значения об изучении геоида в тех обширных районах, где по тем или другим причинам прокладка астрономо-геодезических сетей не представляется возможной для данного отрезка времени. Общая гравиметрическая съемка доставляет, конечно, материал для изучения фигуры геоида — независимо как будто бы от астрономо-геодезических

\* При этом следует включить три или четыре пункта, лежащие невдалеке от горного района и в разных от него сторонах, но в которых вывод абсолютных уклонений отвеса будет мало зависеть от ошибок редукций силы тяжести.

материалов, — но с отнесением этой фигуры или, вернее, волн поверхности геоида к некоторому фиктивному сфероиду с известным его сжатием, но с неизвестным размером его большой полуоси и с неизвестным положением его поверхности относительно земной поверхности. Для геологии и геофизики такое изучение геоида по отношению к фиктивному нормальному сфероиду дает нужный материал и притом как раз в том виде, как это и нужно, и вопрос сводится к правильному определению редукций силы тяжести. Но для геодезии задача заключается в том, чтобы эти волны или «ондуляции» геоида отнести сперва к поверхности референц-эллипсоида и затем найти наиболее подходящий к геоиду эллипсоид, т. е. определить его большую полуось, полярное сжатие и его ориентировку или отнесенные к его поверхности геодезическую широту, долготу, азимут и высоту в исходном пункте триангуляции.

Имея для ряда пунктов триангуляционных цепей, проложенных по Оби, Енисею, Лене, Колыме и отчасти по побережью океана, высоты их, отнесенные к поверхности референц-эллипсоида в результате работ, указанных в § 3, мы на некоторых из этих пунктов и в районах, к ним непосредственно прилегающих, выполняем дополнительные гравиметрические работы, чтобы с хорошей точностью вывести, вместе с использованием результатов общей гравиметрической съемки, высоты геоида для этих пунктов над нормальным сфероидом. Сравнение для каждого такого пункта высоты геоида над нормальным сфероидом с высотой геоида относительно референц-эллипсоида доставит материал для перечисления высот геоида, выведенных на основании гравиметрических работ для ряда пунктов, взятых внутри данного большого района, из системы нормального сфероида в систему референц-эллипсоида. Так как в данной задаче мы имеем дело с большими районами (например, район между Обью, Енисеем, Ледовитым океаном и параллелью  $58^{\circ}$ ), то указанные пункты сравнения должны располагаться в общем равномерно по границам каждого района, за исключением северной части границы, если там не имеется еще астрономо-геодезических рядов. Желательно эти пункты сравнения иметь расположенными для разных смежных районов примерно на одних и тех же параллелях в астрономо-геодезических рядах меридионального направления. В поставленной в настоящем параграфе задаче вопрос редукций силы тяжести будет, конечно, иметь существенное значение<sup>4</sup>, более узкий вопрос — перечисления высот геоида из системы нормального сфероида в систему референц-эллипсоида — также потребует методических разработок. В общем, вся задача является задачей не только математической, но и физической геодезии.

Мы, конечно, имеем все основания к тому, чтобы полагать, что решение этой задачи не остановит использования в целях геодезии тех гравиметрических работ, которые будут выполнены в районах между большими сибирскими реками вообще севернее  $58^{\circ}$  параллели, т. е. в районах, не обслуженных астрономо-геодезическими сетями. Но вследствие значительности каждого из этих районов надлежит проложить астрономо-геодезические ряды, может быть местами несколько пониженной точности, по следующей линии: устье Алдана — Вилуйск — Сунтар — владение Чоны в Вилуй — ход по Чоне с переброской на Нижнюю Тунгуску — Н. Тунгуска до ее устья; кроме того, следует геодезически связать Енисей и Обь по линии рек Сым и Тым.

По этим двум линиям астрономические и гравиметрические работы ставятся по программе, указанной в § 3. Что касается гравиметрических работ, доставляющих в рассматриваемых северных районах дополнитель-

ные профили геоида, то надлежит их в первую очередь выполнить по значительным рекам: Вах, Таз, Средняя Тунгуска, Хатанга, Анабар, Оленек, Яна, Индигирка, Анадырь, Пенжина, идя по каждой реке широкой полосой, т. е. проникая по притокам примерно на 100 км в обе стороны от реки и образуя из таких широкополосных гравиметрических ходов по разным рекам замкнутые полигоны, примыкающие непременно к гравиметрическим пунктам в районах астрономо-геодезических рядов. Проникновение по притокам до водоразделов является, конечно, крайне желательным.

**§ 7.** Мы еще не остановились на применении гравиметрии в полевых картографических работах. Составление карты масштаба 1 : 500 000 — первоочередная задача как раз в тех северных районах, о которых шла речь в § 6. Геодезическое обоснование при полевых работах по составлению этой карты представляется в виде ходов дальномерной полигонометрии, образующих замкнутые полигоны с периметром 120—160 км; точность определения расстояний порядка 40—160 км в такой полигонометрии лежит от 1 : 1000 до 1 : 1500 и обусловлена, главным образом, действием систематических ошибок. Ячейка из 12—16 полигонов, примыкающих друг к другу, представляющая схематически прямоугольник со сторонами 120—160 км и с периметром около 800 км, должна опираться на четыре пункта, располагающиеся по углам такого прямоугольника и определенные со средней ошибкой, не превышающей  $\pm 45$  м. В качестве таких опорных пунктов для дальномерных полигонов могут, следовательно, быть использованы астрономические пункты, если уклонения отвеса будут учтены со средней ошибкой, не превышающей  $\pm 1''$ , а в астрономически определенные широты и долготы этих пунктов будут вводиться поправки за уклонение отвеса на данном астрономическом пункте.

Конечно, нарисованная схема обоснования полевых картографических работ страдает отсутствием того постоянного контроля, который проводится обычно в геодезических работах; но цель — правильное построение карты масштаба 1 : 500 000 — будет и при таком обосновании в общем достигнута. Следовательно, перед гравиметрией ставится задача — дать вывод уклонения отвеса со средней ошибкой  $\pm 1''$  на астрономических пунктах, располагающихся друг от друга на расстоянии 120—160 км. Конечно, когда общая гравиметрическая съемка СССР, дающая маятниковые точки через 30 км, будет проведена и в этих северных районах, то задача сводится к небольшим дополнительным гравиметрическим работам в районе каждого астрономического пункта. Но так как до составления карты масштаба 1 : 500 000 в означенных районах гравиметрическая съемка будет проведена лишь частично, то для определения уклонения отвеса со средней ошибкой 1'' в районе каждого астрономического пункта придется выполнять гравиметрическую съемку на площади радиусом 90—120 км, давая вблизи самого пункта маятниковые точки через расстояния, значительно меньшие 30 км. Другими словами, поставленная задача потребует гравиметрических работ почти на всей площади картографических полевых работ. Отсюда ясно, что необоснованы предположения о замене в картографических целях настоящего геодезического обоснования астрономо-гравиметрическими сетями. Но если задаваться только правильным определением географического положения картографических съемок, то можно пойти на увеличение расстояния до 220 км между астрономическими пунктами, для которых будут определяться уклонения отвеса гравиметрически, и можно снизить среднюю ошибку определения уклонения отвеса до  $\pm 2''$ . В этом сужен-

иом виде задача применения гравиметрии в полевых картографических работах может ставиться и в настоящее время, тем более что тогда программа работ в районе каждого пункта становится близкой к программе работ при общей гравиметрической съемке. Следовательно, в планах общей гравиметрической съемки нужно предусматривать, хотя бы частично, возможность обслуживания интересов картографии и ставить ежегодно, соответственно планам полевых картографических работ, вывод уклонений отвеса на нескольких астрономических пунктах в северных районах.

## **ОБЗОР И РЕЗУЛЬТАТЫ СОВРЕМЕННЫХ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **Отдел I**

#### **ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ВОПРОСАМ ОБРАБОТКИ И ПРОГРАММЫ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

##### **Введение**

С конца прошлого столетия, а в особенности за последние десятилетия, наблюдается значительное оживление в области выполнения основных астрономо-геодезических работ в разных странах.

В США за последние 30 лет длина ежегодно исполняемых рядов триангуляции I класса выражалась с 1912 по 1922 год в среднем в 750 км, с 1922 по 1930 г. — в 1400 км и с 1931 г. — в 4000—5000 км. Таким образом к рядам триангуляции I класса общим протяжением около 20 000 км, которые были использованы к 1910 г. Хейфордом в известном его выводе земного эллипсоида, теперь следует по США прибавить более 30 000 км новых рядов I класса, которые, однако, еще не используются в целях исследования фигуры Земли и вывода размеров земного эллипсоида.

В результате указанной деятельности американских геодезистов некоторые короткие дуги по меридианам и по параллелям, вошедшие наряду с большими дугами в обработку Хейфорда, обращаются теперь также в дуги большой длины, что, конечно, очень важно. Кроме того, приходится отметить значительный объем новых триангуляций на территории Аляски, которые, с одной стороны, увеличивают амплитуду меридианных измерений США на целых  $15^\circ$ , доводя ее в пределах Северной Америки до  $35^\circ$ , а с другой стороны — заставляют вследствие подхода их к Берингову проливу поставить в порядок дня геодезическое соединение Нового и Старого Света. Эта задача огромного значения очевидно осуществляется исполнением соответствующих астрономо-геодезических работ на территории СССР.

Япония начала ставить астрономо-геодезические работы с 1888 г., т. е. предпосыпая их промышленной реконструкции страны. К 1910 г. Япония проложила сплошную триангуляцию I класса на территории своих островов; эти работы доставляют довольно большую дугу меридиана протяжением около  $16^\circ$ . Соединение этих триангуляций с триангуляциями СССР интересно с точки зрения исследования фигуры Земли.

Канада, начав свои работы с 1906 г., к настоящему времени имеет около 10 000 км рядов триангуляции I класса.

Мексика к 1922 г. закончила дугу 98-го меридиана протяжением в  $10^\circ$ , примкнув на севере к дуге того же меридиана в пределах США.

Бразилия и Аргентина к настоящему времени покрыли триангуляцией I класса значительные части своих государств.

В Африке англичане завершают измерение по 30-му меридиану от мыса Доброй Надежды до Каира, которое доставит дугу меридиана в  $61^{\circ}$ .

Новые государства — Финляндия, Польша энергично развиваются на своих территориях астрономо-геодезические работы. Эти измерения вместе с астрономо-геодезическими работами, ранее выполненными и вновь выполненными в Норвегии, Румынии, Венгрии, Югославии и Греции, дают основание проектировать новую дугу меридиана — от Ледовитого океана до Средиземного моря, дополняющую и заменяющую знаменитую дугу Струве. Эта новая дуга от северной границы Польши до острова Крита уже выполнена, а доведение ее до 62-й параллели в Финляндии — дело, может быть, одного года.

Заметим, что если осуществить геодезическое соединение острова Крита с берегом Африки, то новая дуга меридиана от Ледовитого океана до Средиземного моря составит одно целое с английской дугой в Африке по 30-му меридиану, и тогда получится сплошное меридианное градусное измерение с амплитудой в  $109^{\circ}$ . Трудность такого соединения, однако, слишком велика, и поэтому оно пока заменяется соединением по северному берегу Африки с триангуляциями Италии. Именно англичане в Египте на запад от Каира, итальянцы в Триполи и французы в Тунисе ведут градусное измерение по берегу Средиземного моря. Французы уже закончили эти работы в Тунисе и связали свою тринангацию там с триангуляцией Италии, выполнив переброску на остров Сицилию. Таким образом ясно, что в недалеком будущем астрономо-геодезические сети южной и средней Европы будут связаны с обширными измерениями англичан в Египте.

Следует еще отметить, что французы ведут геодезические работы (хотя и II класса) в Марокко и во Французском Конго.

В Сиаме исполнена обширная триангуляция, которая соединена через Бирму с геодезической сетью Индии, а на юг — с триангуляцией на Малаккском полуострове. Голландцы исполнили ряд триангуляций в Индонезии, которые могут быть соединены, и это соединение уже выполняется с одной стороны с Малаккой, а с другой — с Австралией.

Таким образом, в результате оживленного развития геодезической деятельности в азиатских странах в скором времени к грандиозным триангуляциям в Индии будут присоединены новые триангуляции, охватывающие территорию, не меньшую всей Европы.

Должно отметить выход на геодезическую сцену в последние годы Турции и Китая, которые начинают ставить астрономо-геодезические работы.

В СССР астрономо-геодезические работы получили значительный размах. К настоящему времени в СССР исполнено новых дуг градусных измерений общим протяжением более 30 000 км; ежегодно в СССР теперь выполняется 5000 км рядов триангуляции I класса. В 1936 г. в СССР заканчивается измерение по параллели  $52-54^{\circ}$  между меридианами  $27$  и  $137^{\circ}$ , т. е. заканчивается небывалая по протяжению дуга параллели протяжением в  $110^{\circ}$  по долготе. К этой же дуге прибавляется, конечно, дуга по 52-й параллели в пределах Западной Европы — протяжением в  $35^{\circ}$  по долготе. Следовательно, в сумме образуется дуга в  $145^{\circ}$ , начинающаяся в Ирландии и кончаящаяся в Хабаровске.

Очевидно, эта грандиозная дуга, три четверти которой выполнены в СССР, приведет к ряду ценных научных выводов.

Как видно из сделанного очерка, все страны и все государства в последнее время энергично развиваются триангуляции I класса и астрономические работы, обращающие эти триангуляции в градусные измерения. Естественно, что СССР — и по громадности своей территории и в силу того внимания, которое при социалистическом строевом уделяется работам научного значения, — идет в настоящее время впереди всех других стран в развитии градусных измерений. Приходится, кроме того, иметь в виду, что геодезическое соединение Старого и Нового Света возможно только через триангуляции СССР; что геодезическое соединение огромных триангуляций Индии и исполняющихся триангуляций в Индо-Китае и в Австралии с европейскими триангуляциями возможно также только через СССР, путем прокладки соединительных триангуляций от наших триангуляций в Средней Азии через Памир или юго-восточную часть Персии к северо-западной части Индостана. Мы должны также иметь в виду, что мощные триангуляции, уже проложенные в Европейской части СССР, сравнительно легко могут быть соединены с триангуляциями в Египте через Малую Азию и Сирию. Идя во главе современной геодезической деятельности, геодезисты СССР должны не только быстрыми темпами проложить целый ряд грандиозных дуг на своей территории, но именно они должны поставить в порядок дня вопрос о триангулировании всего земного шара, вопрос перехода от градусных измерений в отдельных частях света к градусным измерениям, охватывающим весь земной шар.

То внимание к науке, которым характеризуется социалистический строй в отличие от капиталистического, является прочным залогом разрешения поставленной проблемы именно геодезистами СССР.

То, что считалось 15 лет назад главным материалом в вопросе изучения фигуры Земли, становится теперь уже сравнительно небольшой частью материалов, собранных за последнее время в разных государствах, в особенности в СССР. Работы СССР сильно уже поколебали существовавшие масштабы и мерила в области геодезического изучения Земли, и, очевидно, в будущем геодезия СССР должна сильно влиять на выводы относительно фигуры и размеров Земли.

В 1881 г. английский ученый, геодезист Кларк, вывел размеры земного эллипсоида, используя индийские дуги, дугу Струве, дугу западноевропейского меридиана и ряд мелких дуг, причем сумма амплитуд всех использованных им дуг не превосходила и  $100^\circ$  (т. е. 11 000 км). В настоящее время мы имеем астрономо-геодезический материал, превышающий в 5—6 раз материал, использованный Кларком.

К 1910 г. американский ученый Хейфорд выполнил обработку градусных измерений, проложенных к тому времени в Северной Америке; свои выводы Хейфорд обосновал, как известно, на применении гипотезы изостатической компенсации по Пратту к использованию результатов градусных измерений для определения большой оси и сжатия земного эллипсоида. Работы Хейфорда получили известное признание, а выведенный им для территории Северной Америки (без Аляски) эллипсоид был принят даже за международный, т. е. размеры эллипсоида Хейфорда отожествлены с наилучше определенными размерами общего земного эллипсоида.

Важно отметить, что огромные материалы, собранные с 1881 г., общей обработке до сих пор никем не подвергались. В 1929 г. мы имеем, правда, в работе финляндского ученого, геодезиста Хейсканена, новую

попытку вывести общий земной эллипсоид, причем Хейсканен использовал астрономо-геодезическую сеть США, выполненную до 1910 г., дугу западно-европейского меридиана, дугу 52-й параллели в Западной Европе (от Ирландии до Бобруйска) и дугу Струве. Все новые материалы по США, все старые и новые материалы по Индии, новые материалы по СССР и ряд новых материалов по Африке и другим странам использованы Хейсканеном вовсе не были. Вывод Хейсканена, что градусные измерения Западной Европы дают результаты, очень хорошо согласующиеся с выводами Хейфорда по Америке, конечно, подтвердил «международную» позицию эллипса Хейфорда, но, как увидим ниже, это подтверждение совсем не прочно, так как дуги Западной Европы все-таки и в сумме дают небольшой материал.

Очевидно, в ближайшем будущем должно поставить работу по использованию в месте всех накопленных к настоящему времени астрономо-геодезических материалов. Значительность неиспользованных до сих пор материалов и обслуживание ими новых больших территорий, не входивших в обработку ни Кларка, ни Хейфорда, ни Хейсканена, уже, естественно, приводят к заключению о преждевременности постановлений по принятию эллипса Хейфорда в качестве международного и об открытом состоянии вопроса о размерах и сжатии общего земного эллипса. (Под общим земным эллипсом мы понимаем такой, который наилучше подходит к геоиду, т. е. дает наименьшую сумму квадратов отступлений  $h$  от геоида при условии, что центр эллипса совпадает с центром тяжести Земли, а малая ось эллипса соединяет с осью вращения Земли). Нужно еще отметить, что современные материалы, геодезические и геофизические, наталкивают нас на рецензию и изменение физических методов обработки градусных измерений, так как представления о строении Земли благодаря успехам геофизики изменились, а разработка вопросов об использовании определений силы тяжести в целях геодезических заметно развивается и дает новые методы, которые по крайней мере доставляют параллельные выводы с выводами, основанными на применении изостатической компенсации по Пратту или Эйри. Конечно, в обработке новых материалов будет существенную роль играть геодезическое соединение градусных измерений отдельных стран и континентов, которое, очевидно, будет осуществлено в недалеком будущем.

### § 1. Краткие теоретические соображения и основные формулы по градусным измерениям по меридианам и параллелям

Мы должны исходить из следующего уравнения для дуги меридиана\*, достаточно точного даже для очень больших дуг:

$$S = a(1 - e^2) \left[ \left( 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 \right) (\varphi_2 - \varphi_1) - \left( \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 \right) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2\varphi_m + \frac{15}{128}e^4 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 4\varphi_m \right] \quad (1)$$

\* См. проф. Красовский. «Высшая геодезия», 2-я часть, Л., 1932, стр. 21).

В уравнении (1):  $S$  — измеренная геодезическая длина дуги меридiana;  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  — широты конечных точек дуги;  $a$  и  $e$  — большая полуось и эксцентриситет земного эллипсоида;

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$S = \frac{a(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{4} + \frac{3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{4(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_m \right] e^2 - \right. \\ \left. - \left[ \frac{3}{64} + \frac{3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{16(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_m - \frac{15 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1)}{128(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 4\varphi_m \right] e^4 \right\}. \quad (2)$$

Полагая  $a = a_0 + \Delta a$  и  $e^2 = e_0^2 + \Delta e^2$ , мы приводим уравнение (2) к линейному виду относительно поправок  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ . Если представить себе, что мы разбили большую меридианную дугу на части  $AB, BC, CD, \dots$ , меньшие каждая 200 км, составили уравнения (2) для каждой такой части в численном виде, а затем путем суммирования получили в числовом виде уравнения для дуг  $AB, AC, AD, \dots$ , то тогда мы имеем право в уравнении (2) положить:

$$\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)} = 1$$

и

$$\frac{\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)} = 2,$$

Понимая под  $\varphi$  астрономические широты, под  $B$  — широты геодезические, отнесенные к эллипсоиду с размерами  $a_0$  и  $e_0^2$ ; под  $M_m$  — меридианный радиус кривизны на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e_0^2$  для средней широты

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

нашей дуги; под  $\xi$  — слагающую в меридиане уклона отвесной линии от нормали к эллипсоиду с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $e_0^2 + \Delta e^2$ , мы переходим в результате преобразований от уравнения (2) к следующему:

$$\xi_1 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{a_0} \Delta a_0 - (\varphi_2 - \varphi_1)'' \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{7}{16} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m \frac{3}{16} \cos 4\varphi_m \right) e_0^2 \right] \Delta e^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)'' - \frac{S\rho''}{M_m} = \xi_2, \quad (3)$$

если налагаем условие, что  $S < 200$  км.

Заметим, что  $S$  в (3) относится к эллипсоиду с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $e_0^2 + \Delta e^2$ , а  $M_m$  — к эллипсоиду с размерами  $a_0$  и  $e_0^2$ . Поэтому  $\frac{S \cdot \rho''}{M_m}$

не равно  $(B_2 - B_1)$ . Но дело в том, что при действительных вычислениях в триангуляции величину  $B_2$ , получаемую по формуле

$$B_2 = B_1 + \frac{S \cdot \rho''}{M_m},$$

в которой  $M_m$  отнесено к эллипсоиду с размерами  $a_0$  и  $e^2_0$ , а  $S$  — к геоиду, мы называем геодезической широтой на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e^2_0$  для точки 2. Другими словами, мы из обработки триангуляции получаем геодезические широты неправильно, и ошибки в них в точности равны тем ошибкам, если мы в уравнении (3) посчитаем  $\frac{S \cdot \rho''}{M_m}$  равной  $B_2 - B_1$ .

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_1 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{a_0} \Delta a - (\varphi_2 - \varphi_1) \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{7}{16} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m - \frac{3}{16} \cos 4\varphi_m \right) e^2_0 \right] \Delta e^2 + (\varphi_2 - \varphi_1) - (B_2 - B_1) = \xi_2, \quad (4) \end{aligned}$$

причем под  $B_2$  и  $B_1$  в (4) понимаются «геодезические» широты, выводимые из триангуляции таким образом, что  $S$  отнесено к геоиду (или, вернее, к эллипсоиду  $a_0 + \Delta a$  и  $e^2_0 + \Delta e^2$ ), а  $M_m$  — к эллипсоиду с размерами  $a_0$  и  $e^2_0$ . Чтобы от уравнения (4) перейти к уравнению между точкой 1 с широтой  $\varphi_1$  и точкой  $(n+1)$ , удаленной значительно от точки 1, мы, как сказано выше, должны промежуточными точками 2, 3, 4, ...,  $n$  разбить наше большое расстояние на части и, написав уравнения типа (4) для частей 1—2, 2—3, 3—4...  $n$  ( $n+1$ ), затем их суммировать. Но исследование показывает, что коэффициенты при  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$  получаются с достаточной точностью после такого суммирования в том именно самом виде, какой они имеют в уравнении (3) или (4) даже для дуги с разностью широт в  $40^\circ$ , и замена прямого вычисления уравнения (2) для случая большого расстояния вычислением по частям по упрощенным формулам с последующим суммированием оказывается только на получении свободного члена. Именно, при значительном расстоянии нельзя в свободном члене  $B_{n+1} - B_1$  вычислять, как  $\frac{S_{1,n+1} \rho''}{M_m^{1,n+1}}$ , где  $M_m^{1,n+1}$

относится к широте  $\frac{\varphi_{n+1} + \varphi_1}{2}$ . Этот свободный член должен быть получен так:

$$B_{n+1} - B_1 = \frac{S_{1,2}}{M_m^{1,2}} + \frac{S_{2,3}}{M_m^{2,3}} + \frac{S_{3,4}}{M_m^{3,4}} + \dots + \frac{S_{n,n+1}}{M_m^{n,n+1}}. \quad (5)$$

Но обычно при обработке современных градусных измерений мы выводим геодезические координаты астрономических пунктов градусного измерения таким образом, что решаем прямые геодезические задачи, идя каждый раз по сторонам треугольников триангуляции и затем суммируя получающиеся разности геодезических широт. Другими словами, мы проделываем то самое, что требуется уравнением (5). Поэтому мы можем написать такую систему уравнений:

В уравнениях (6)

$$\varphi_m^{1, n+1} = \frac{\varphi_1 + \varphi_{n+1}}{2};$$

$\xi_{n+1}$  — слагающая в меридиане уклонения отвеса в точке  $n + 1$  по отношению к эллипсоиду с размерами

$$a_0 + \Delta a \text{ и } e_0^2 + \Delta e^2.$$

Астрономические широты  $\phi$  должны быть приведены к уровню океана и к среднему полюсу. Величины  $B$  должны быть получены так, как получаются «геодезические широты» в триангуляции, о чём уже сказано выше; тогда уравнения (6) будут применимы даже для больших дуг, для которых  $\varphi_0 - \varphi_1 = 40^\circ$  и даже более градусов, и тогда получение этих уравнений постепенным суммированием отпадает.

Если применяется теория изостатической компенсации или гравиметрическое определение уклонений отвеса, то, обозначив через  $D_m^k$  слагающую уклонения отвеса в меридиане для пункта  $k$ , определенную изостатически или гравиметрически, и через

$$\delta \xi_k = \xi_k - D_m^k,$$

перепишем уравнения (6) в таком виде:

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_1 &= \delta\xi_1 \\
 \delta\xi_1 + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{a_0} \Delta a - (\varphi_2 - \varphi_1)'' \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m^{1,2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{7}{16} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m^{1,2} - \frac{3}{16} \cos 4\varphi_m^{1,2} \right) e^2 \right] \Delta e^2 + \\
 &\quad + [\varphi_2 - D_m^{(2)} - (\varphi_1 - D_m^{(1)})] - (B_2 - B_1) = \delta\xi_2 \\
 \delta\xi_1 + \frac{(\varphi_3 - \varphi_1)''}{a_0} \Delta a - (\varphi_3 - \varphi_1)'' \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m^{1,3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{7}{16} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m^{1,3} - \frac{3}{16} \cos 4\varphi_m^{1,3} \right) e^2 \right] \Delta e^2 + \\
 &\quad + [\varphi_3 - D_m^{(3)} - (\varphi_1 - D_m^{(1)})] - (B_3 - B_1) = \delta\xi_3 \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Для дуги по параллели имеем в геодезии такое уравнение:

$$S = a (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi, \tag{8}$$

где  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  — долготы, отнесенные к эллипсоиду с размерами  $a$  и  $e^2$ .

От уравнения (8) переходим к следующим, понимая в них под  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  уже астрономические долготы, а под  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — слагающие уклонения отвесной линии в первом вертикале для точек 1 и 2:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)''}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (1 + e^2 \sin^2 \varphi) (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi \Delta e^2 + \\
 + (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi - \frac{-S\varphi''}{N} \cos \varphi + \eta_1 = \eta_2 \\
 N = \frac{a_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\
 \eta_1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)''}{a_0} \cos \varphi \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (1 + e^2 \sin^2 \varphi) (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi \Delta e^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi - (L_2 - L_1)'' \cos \varphi = \eta_2
 \end{aligned} \tag{9}$$

При этом в (9) через  $(L_2 - L_1)$  обозначено  $\frac{S\varphi''}{N \cos \varphi}$  и под  $L_2$  и  $L_1$  понимаются «геодезические» долготы точек 1 и 2 на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e^2$ . Как уже указывалось, для получения с полной точностью геодезических долгот на этом эллипсоиде расстояние  $S$  должно заменить его проекцией на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e^2$ . Но в современной обработке триангуляций используют при этом расстояния  $S$ , отнесенные к геоиду (или к наиболее подходящему к нему эллипсоиду), и величины  $L_k$ , вычисленные по формуле

$$L_k = L_i + \frac{S_{ik} \cdot \rho''}{N_0 \cos \varphi},$$

в которой  $N$  отнесено к эллипсоиду с размерами  $a_0$  и  $e^2_0$ , а  $S$  — к эллипсоиду с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $e^2_0 + \Delta e^2_0$ , называют геодезическими долготами на эллипсоиде  $a_0$  и  $e^2_0$ . Для нас важна, конечно, не ошибочность или неточность названия, а правило получения величин  $B$  в уравнениях (6) и (7) и величин  $L$  в уравнениях (9), которое выяснено, конечно, с достаточной полнотой. В уравнениях (9) астрономические долготы  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  должны быть отнесены к среднему полюсу.

Для системы точек 1, 2, 3 …  $n+1$ , разбивающих общую дугу параллели на  $n$  частных дуг, будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta_1; \\ \eta_1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi (1 + & \\ &+ e^2_0 \sin^2 \varphi) \Delta e^2 + \{(\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2 - L_1)\} \cos \varphi = \eta_2 \\ \eta_1 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)'' \cos \varphi}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\lambda_3 - \lambda_1)'' \cos \varphi (1 + & \\ &+ e^2_0 \sin^2 \varphi) \Delta e^2 + \{(\lambda_3 - \lambda_1) - (L_3 - L_1)\} \cos \varphi = \eta_3 \\ \dots &\dots \\ \eta_1 + \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_1)'' \cos \varphi}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\lambda_{n+1} - \lambda_1)'' \cos \varphi (1 + & \\ &+ e^2_0 \sin^2 \varphi) \Delta e^2 + \{(\lambda_{n+1} - \lambda_1) - (L_{n+1} - L_1)\} \cos \varphi = \eta_{n+1} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Если назовем через  $D_p^k$  слагающую уклонения отвесных линий в первом вертикале для точки  $k$ , определенную или на основании применения теории изостатической компенсации, или гравиметрическим методом, то при обозначении

$$\delta \eta_k = \eta_k - D_p^k$$

уравнения (10) перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \delta \eta_1 &= \eta_1 - D_p^1 \\ \delta \eta_1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\lambda_2 - \lambda_1)'' \cos \varphi (1 + & \\ &+ e^2_0 \sin^2 \varphi) \Delta e^2 + [(\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2 - L_1)] \cos \varphi - & \\ &- (D_p^{(2)} - D_p^{(1)}) = \delta \eta_2 \\ \dots &\dots \\ \delta \eta_1 + \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_1)'' \cos \varphi}{a_0} \Delta a + \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\lambda_{n+1} - \lambda_1)'' \cos \varphi (1 + & \\ &+ e^2_0 \sin^2 \varphi) \Delta e^2 + [\lambda_{n+1} - \lambda_1] - (L_{n+1} - L_1)] \cos \varphi - & \\ &- (D_p^{(n+1)} - D_p^{(1)}) = \delta \eta_{n+1} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Уравнения (6), как известно, решаются под условием минимума суммы  $\xi^2$ , а уравнения (7) — под условием минимума суммы  $\delta\xi^2$ : в первом случае уклонения отвеса  $\xi$  рассматриваются как случайные величины, а во втором — случайными рассматриваются остаточные погрешности определения величин  $\xi$  или, вернее, величин  $D_m$  тем или иным методом.

Уравнения (10) или (11), в отличие от уравнений (6) или (7), позволяют определить, вследствие пропорциональности коэффициентов в них при неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ , или только неизвестное  $\Delta a$ , или только неизвестное  $\Delta e^2$ . Понятно, что уравнения (10) решаем под условием минимума  $\Sigma \eta^2$ , рассматривая, следовательно, величины  $\eta$  как случайные; уравнения (11) решаем под условием минимума  $\Sigma \delta\eta^2$ , понимая под  $\delta\eta$  остаточные погрешности в определении  $D_p$  тем или иным методом.

## § 2. О точности и значении выводов из отдельных градусных измерений по меридианам и по параллелям

При решении вопроса о точности определения неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$  мы имеем право уравнения (6) и (7) упростить, опустив в них вовсе член:

$$\left( \frac{7}{16} + \frac{3}{4} \cos 2\varphi_m - \frac{3}{16} \cos 4\varphi_m \right) e^2_0.$$

Далее, мы представим себе, что астрономические пункты на каждой дуге градусного измерения расположены через постоянный интервал:  $\Delta\varphi$  — для дуг меридианов и  $d = (\lambda_k - \lambda_1) \cos \varphi$  — для дуг параллелей.

Обозначая свободные члены уравнений (6), (7), (10) и (11) просто через  $l$ , будем теперь иметь:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1; \\ \xi_1 + \Delta\varphi \frac{\Delta a}{a_0} - \Delta\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi_m^{1,2}) \frac{\Delta\mu}{2} + l_1 &= \xi_2 \\ \xi_1 + 2\Delta\varphi \frac{\Delta a}{a_0} - 2\Delta\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi_m^{1,3}) \frac{\Delta\mu}{2} + l_2 &= \xi_3 \\ \xi_1 + 3\Delta\varphi \frac{\Delta a}{a_0} - 3\Delta\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi_m^{1,4}) \frac{\Delta\mu}{2} + l_3 &= \xi_4 \\ \vdots & \\ \xi_1 + n\Delta\varphi \frac{\Delta a}{a_0} - n\Delta\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi_m^{1,n+1}) \frac{\Delta\mu}{2} + l_n &= \xi_{n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (12) величина  $\Delta\mu$  есть поправка сжатия эллипсоида, причем

$$\Delta e^2 = 2\Delta\mu.$$

Для параллели напишем:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2; \\ \eta_1 + d \frac{\Delta a}{a_0} + d(1+e^2_0 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \Delta \mu + l_1 &= \eta_2 \\ \eta_1 + 2d \frac{\Delta a}{a_0} + 2d(1+e^2_0 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \Delta \mu + l_2 &= \eta_3 \\ \eta_1 + 3d \frac{\Delta a}{a_0} + 3d(1+e^2_0 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \Delta \mu + l_3 &= \eta_4 \\ \dots &\dots \\ \eta_1 + nd \frac{\Delta a}{a_0} + nd(1+e^2_0 \sin^2 \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \Delta \mu + l_n &= \eta_{n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения веса неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ , определяемых по способу наименьших квадратов из уравнений (12) и (13), следует применить обычный прием получения в гауссовом алгорифме величины [с. 2]. Мы не будем проделывать сложных выкладок, приводящих к определению весов неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ , а ограничимся приведением результатов, полученных Ф. Н. Красовским. Обозначая: через  $P_a$  и  $P_\mu$  соответственно веса неизвестных  $a$  и  $\mu$ ; через  $n$  — число астропунктов на дуге; через  $\varphi_m$  — среднюю широту меридианной дуги с  $n$  астрономическими точками на ней, имеем для  $P_a$  и  $P_\mu$  следующие формулы.

### *I. При совместном определении полуоси и сжатия*

а) Из отдельной дуги меридиана:

$$\left. \begin{aligned}
 1) & \quad P_a = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{20} \Delta\varphi^4 \sin^2 2\varphi_m \times \\
 & \quad \times \frac{1}{(1 + 3 \cos 2\varphi_m)^2 + \frac{3}{2}(n-2)\Delta\varphi^2 \left[ \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{5} \cos 2\varphi_m + \frac{n-13}{10} \cos 4\varphi_m \right]} ; \\
 & \quad 46^\circ < \varphi_m < 62^\circ .
 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

б) Из  $k$  меридианых дуг, не связанных геодезически, причем  $k \geq 2$ :

$$4) P_a = \frac{3(n+1)n(n-1)}{4} \cdot \left\{ \frac{k \sum_1^k \cos^2 2\varphi_m - \left( \sum_1^k \cos 2\varphi_m \right)^2}{k+6 \sum_1^k \cos 2\varphi_m + 9 \sum_1^k \cos^2 2\varphi_m} \Delta\varphi^2 \right\}. \quad (15)$$

$$5) P_p = \frac{3(n+1)n(n-1)}{16k} \left[ k \sum_1^k \cos^2 2\varphi_m - \left( \sum_1^k \cos 2\varphi_m \right)^2 \right] \Delta\varphi^2 \quad (15)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & k \sum_1^k \cos^2 2\varphi_m - \left( \sum_1^k \cos 2\varphi_m \right)^2 = \\ & = 4 \{ \sin^2(\varphi_m^{(2)} - \varphi_m^{(1)}) \sin^2(\varphi_m^{(2)} + \varphi_m^{(1)}) + \sin^2(\varphi_m^{(3)} - \varphi_m^{(1)}) \sin^2(\varphi_m^{(3)} + \varphi_m^{(1)}) + \dots + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(k)} - \varphi_m^{(1)}) \sin^2(\varphi_m^{(k)} + \varphi_m^{(1)}) + \sin^2(\varphi_m^{(3)} - \varphi_m^{(2)}) \sin^2(\varphi_m^{(3)} + \varphi_m^{(2)}) + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(2)} - \varphi_m^{(4)}) \sin^2(\varphi_m^{(2)} + \varphi_m^{(4)}) + \dots + \sin^2(\varphi_m^{(k)} - \varphi_m^{(2)}) \sin^2(\varphi_m^{(k)} + \varphi_m^{(2)}) + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(4)} - \varphi_m^{(3)}) \sin^2(\varphi_m^{(4)} + \varphi_m^{(3)}) + \sin^2(\varphi_m^{(5)} - \varphi_m^{(4)}) \sin^2(\varphi_m^{(5)} + \varphi_m^{(4)}) + \dots + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(k)} - \varphi_m^{(3)}) \sin^2(\varphi_m^{(k)} + \varphi_m^{(3)}) + \dots + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(k-1)} - \varphi_m^{(k-2)}) \sin^2(\varphi_m^{(k-1)} + \varphi_m^{(k-2)}) + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(k)} - \varphi_m^{(k-2)}) \sin^2(\varphi_m^{(k)} + \varphi_m^{(k-2)}) + \\ & + \sin^2(\varphi_m^{(k)} - \varphi_m^{(k-1)}) \sin^2(\varphi_m^{(k)} + \varphi_m^{(k-1)}) \} . \end{aligned}$$

в) Из дуги меридиана под средней широтой  $\varphi_m$  и из дуги параллели под широтой  $\varphi$ :

$$6) P_p = \frac{(n+1)n(n-1)}{96} \Delta\varphi_1 [(1+3 \cos 2\varphi_m)^2 - 2 \sin^2 \varphi (1+e^2 \sin^2 \varphi)^2]^2, \quad (16)$$

причем число астропунктов на обеих дугах принимается одинаковым ( $n$ ), а долготный интервал по дуге параллели принимается

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi \sec \varphi.$$

## II. При определении одной полуоси при заданном сжатии

а) Из отдельной дуги меридиана:

$$7) P'_a = \frac{(n+1)(n-1)n}{12} \Delta\varphi^2. \quad (17)$$

б) Из  $k$  меридианых дуг, геодезически не связанных:

$$8) P'_a = \frac{\Delta\varphi^2}{12} \sum_{i=1}^{i=k} (n_i + 1)(n_i - 1)n_i. \quad (18)$$

в) Из  $k$  меридианых дуг и из  $s$  дуг параллелей, геодезически не связанных:

$$(9) P'_a = \frac{\Delta\varphi^2}{12} \sum_{t=1}^{t=k} (n_t + 1)(n_t - 1) n_t + \frac{\Delta\lambda^2}{12} \sum_{t=1}^{t=s} (n_t + 1)(n_t - 1) n_t \cos^2 \varphi_t. \quad (19)$$

Дадим несколько характерных числовых расчетов.

1) Для дуги Струве имеем:

$$n = 13; \Delta\varphi = 7200''; \varphi_m = 58^\circ;$$

средняя ошибка единицы веса

$$\epsilon = 2'',5;$$

средняя ошибка сжатия  $\pm 14,8$  в знаменателе сжатия [по формулам (1) и (3)]

$$m_a = \pm 230 \text{ м};$$

при заданном сжатии

$$m_a = \pm 121 \text{ м}.$$

2) Для дуги Западноевропейского меридиана:

$$n = 34; \varphi_m = 47^\circ 19'; \Delta\varphi = 2950''; \epsilon = \pm 2^\circ,5;$$

средняя ошибка сжатия  $\pm 7,1$

средняя ошибка большой полуоси  $m_a = \pm 220 \text{ м}$ , при совместном определении  $a$  и  $\mu$ .

При заданном сжатии  $m_a = \pm 94 \text{ м}$ .

3) Для дуги 52-й параллели Западной Европы:

$$n = 42; \varphi = 52^\circ; \Delta\lambda \cos \varphi = 3400'' \times 0,616 = 2094''.$$

При заданном сжатии  $m_a = \pm 94 \text{ м}$ .

4) Дуга меридиана, эквивалентная дуге Струве, плюс дуга Выгозеро — Николаев, дуга Западноевропейского меридиана, дуга 98-го меридиана США: первая дуга имеет

$$\varphi_m = 57^\circ; \Delta\varphi = 2950''; n = 26,$$

вторая дуга имеет

$$\varphi_m = 47^\circ; \Delta\varphi = 2950''; n = 34,$$

третья дуга принимается имеющей

$$\varphi_m = 36^\circ; \Delta\varphi = 2950''; n = 26.$$

(В действительности дуга США имеет меньшее число астропунктов).

Принимая  $n$  общим для всех дуг и равным 26, получаем с малой погрешностью

$$m_a = \pm 104 \text{ м} (\epsilon = \pm 2'',5);$$

$m_\mu = \pm 3,1$  единицы в знаменателе сжатия.

При заданном сжатии те же дуги дают

$$m_a = \pm 69 \text{ м}.$$

5) Сеть СССР, исполненная до 1934 г., включает в себя:  
дугу Струве

$$n=13; \Delta\varphi = 7200''; \varphi_m = 58^\circ,$$

дугу Выгозеро — Николаев

$$n=12; \Delta\varphi = 3500''; \varphi_m = 56^\circ,$$

дугу Петрозаводск — Джанкой

$$n=12; \Delta\varphi = 3200''; \varphi_m = 54^\circ,$$

дугу Кострома — Армавир

$$n=12; \Delta\varphi = 3500''; \varphi_m = 49^\circ,$$

дугу параллели под широтой  $54^\circ$

$$n=32; \Delta\lambda \cos \varphi = 3800''; \varphi = 54^\circ,$$

дугу параллели под широтой  $52^\circ$

$$n=25; \Delta\lambda \cos \varphi = 4800''; \varphi = 52^\circ,$$

дугу параллели под широтой  $48^\circ$

$$n=9; \Delta\lambda \cos \varphi = 3200''; \varphi = 48^\circ,$$

дугу меридиана по Волге

$$n=12; \Delta\varphi = 2600''; \varphi = 51^\circ.$$

Сюда не вошли дуги по меридианам длиной от  $4$  до  $7^\circ$ , находящиеся между Волгой и меридианом ( $+84^\circ$ ) Новосибирска. При заданном сжатии эта сеть дает вывод большой полуоси с средней ошибкой  $m_a = \pm 54$  м (при  $\varepsilon = \pm 2'',5$ ). При совместном определении полуоси и сжатия из этой сети СССР имеем при условии геодезического соединения всех входящих в нее дуг:

$$m_a = \pm 95 \text{ м}; m_\mu = \pm 2,0 \text{ в знаменателе сжатия}.$$

Забегая вперед, из нормальных уравнений, составляемых по дугам и сетям разных стран, мы получаем следующие средние ошибки полуоси и сжатия при  $\varepsilon = \pm 2'',5$  и при условии геодезического соединения дуг в сетях США и СССР:

6) Западная Европа:

$$m_a = \pm 77 \text{ м}; m_\mu = \pm 2,4;$$

7) Северная Америка:

$$m_a = \pm 38 \text{ м}; m_\mu = \pm 1,2;$$

8) Северная Америка,  
Западная Европа и СССР:

$$m_a = \pm 35 \text{ м}; m_\mu = \pm 0,9.$$

Из формул (14) вытекает, что при совместном выводе большой полуоси и сжатия из отдельных меридианных дуг близэкваториальные дуги не работают ни на вывод большой полуоси, ни на вывод сжатия (они зато работают на вывод полярной оси  $b$ ); наилучше работают на вывод сжатия дуги в широтах около  $45^\circ$ , а на вывод большой полуоси — дуги с средней широтой около  $54^\circ$ . Вес вывода большой полуоси очень быстро падает с уменьшением или увеличением наивыгоднейшей средней широты  $54^\circ$  даже на  $10^\circ$ , понижаясь при этом почти в четыре раза. Аналогично с изменением наивыгоднейшей для вывода сжатия широты  $45^\circ$  на  $\pm 10^\circ$ , вес вывода сжатия также очень заметно уменьшается.

} в знаменателе  
сжатия

При совместном определении большой полуоси и сжатия из нескольких меридиановых дуг выгодно, чтобы северные и южные дуги, при возможно большей разности из средних широт, имели эти широты дополняющими друг друга до  $90^\circ$ . Следовательно, выгодно комбинировать дуги со средней широтой  $54-60^\circ$  с дугами, имеющими средние широты  $25-30^\circ$ . С этой точки зрения комбинация дуги Струве и дуги Западноевропейского меридиана с дугами меридианов в Британской Индии представляется особенно выгодной, но выгодным является и присоединение к указанным европейским дугам дуг американских, имеющих  $\varphi_m = 35^\circ$ .

Понятно, что дуги близэкваториальных параллелей работают только на вывод большой полуоси, и поэтому их присоединение к дуге Струве и к дуге Западноевропейского меридиана, а также к новым дугам меридианов, имеющих быть завершенными в ближайшие годы в СССР между параллелями  $62-64^\circ$  и  $45-47^\circ$ , является выгодным для повышения веса вывода большой полуоси. К сожалению, из более или менее значительных дуг по параллелям мы имеем только одну в южных широтах, именно — дугу параллели под широтой  $24^\circ$  в Индии. На выводе сжатия благоприятно оказывается участие дуг параллелей под широтами, большими  $45^\circ$ , и поэтому большие дуги параллелей в СССР под широтами  $48, 52, 54, 58^\circ$  являются очень ценными (конечно, предполагается, что вывод большой полуоси обеспечивается большими меридианными дугами).

Допустим, что при обработке градусных измерений мы не вводим в астрономические широты и долготы никаких поправок в виде топографо-изостатических редукций или уклонений отвеса, выведенных гравиметрически. Тогда при выводе эллипсоида из отдельной дуги мы в уравнениях (6) или (10) будем считать уклонения  $\xi$ , относящиеся к данной дуге (или уклонения  $\eta$ ), случайными. Решение уравнений (6) или (10) будет, давая  $\min_{\text{имит}} \Sigma \xi^2$  или  $\Sigma \eta^2$  по нашей дуге, приводить к почти полному соблюдению равенства  $\Sigma \xi = 0$  или  $\Sigma \eta = 0$ .

Несомненно, мы из такого решения находим эллипсоид, наилучше подходящий к геоиду в пределах того его профиля, который соответствует нашей дуге: мы получаем размеры большой полуоси и сжатия некоторого местного эллипса, связь которого с общим земным эллипсоидом и отступления размеров которого от соответствующих размеров общего земного эллипса остаются неизвестными. Вычисляя по выше-приведенным формулам средние ошибки большой полуоси и сжатия, мы должны относить эти ошибки к местному эллипсоиду; увеличивая число астропунктов на нашей дуге, мы можем для  $m_a$  и  $m_b$  получить очень небольшие размеры, но эти небольшие ошибки большой полуоси и сжатия будут лишь указывать на удачный подбор размеров местного эллипса; может случиться, что местный эллипсоид, выведенный с большим числом астропунктов на дуге, будет различаться от общего эллипса больше, чем в случае вывода того же местного эллипса с меньшим числом астропунктов на той же дуге.

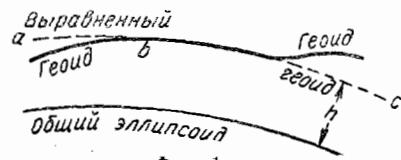
Если мы выводим эллипсоид по способу наименьших квадратов из ряда дуг меридианов и дуг параллелей, геодезически между собой не связанных, то по существу получаем столько эллипсоидов, сколько имеется дуг, между собой не связанных: все эти эллипсоиды имеют одни и те же размеры, но различно расположены в земном теле. Величины  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , устанавливаемые при этом для каждой отдельной дуги, указывают ориентировку каждого из таких отдельных эллипсоидов, имеющих общие размеры и малые оси, расположенные параллельно осям вращения Земли.

В отношении любой отдельной дуги эллипсоид, выведенный из ряда дуг, в число которых входила и эта дуга, и ориентированный по вычисленным для нее значениям  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , не будет уже наилучше подходящим для этой именно дуги. В какой степени выведенные из ряда отдельных, не связанных дуг большая полуось и сжатие приближаются соответственно к большой полуоси и сжатию общего земного эллипсоида, — не представляется возможным сказать. Дело зависит в полной мере от того, какие волны геоида по знаку и по величине имеют место на протяжении используемых дуг. Формулы (15), (16), (18) и (19) дают оценку точности вывода размеров эллипсоида, наилучше приближающегося к комплексу разъединенных и произвольно выбранных профилей геоида, но при этом степень влияния отдельных дуг на получение размеров этого эллипсоида будет весьма различна в зависимости от размера дуги, ее длины, частоты астропунктов на ней, географического положения дуги и распределения уклонений отвесных линий на ней.

Если мы вводим топографо-изостатические редукции или гравиметрически выведенные уклонения отвесных линий в качестве поправок в астрономические широты и долготы пунктов градусных измерений и затем решаем задачу под условием минимума суммы квадратов остаточных погрешностей  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , то необходимо иметь в виду, что в величинах  $\delta\xi$  или  $\delta\eta$ , относящихся к нашей дуге, будет в общем случае заключаться некоторая систематическая часть, обусловленная погрешностями метода определения редукций в астрономические широты и долготы, а также и чисто местными причинами. Кроме того, если на фиг. 1 «выравненный геоид»  $abc$ , т. е. полученный после введения редукций в астрономические координаты, окажется, при совершенстве вывода этих редукций, параллельным общему земному эллипсоиду на данном участке, то очевидно, что вывод из нашей дуги большой полуоси будет ошибочным на  $h$ , т. е. на уклонение по высоте нашей части геоида от общего земного эллипсоида; среднее квадратическое значение  $h$  равно  $\pm 50 \text{ м}$  (в некотором малом районе геоида).

Эти соображения позволяют заключить, что и при использовании теории изостатической компенсации или при пользовании гравиметрически определенными уклонениями отвесной линии выводы из отдельных несвязанных дуг меридианов и параллелей также не относятся к общему земному эллипсоиду, а дают местные эллипсоиды, наилучше подходящие к «выравненным» редукциям профилям геоида, причем следует, конечно, ожидать, что отступления размеров выведенного в этом случае эллипсоида от общего земного эллипсоида будут меньше, чем в том случае, когда мы берем просто минимум  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2$ . Другими словами, и при применении в обработке градусных измерений теории изостатической компенсации или гравиметрически определенных уклонений отвеса формулы (14) — (19) не дают ответа на вопрос о точности определения размеров общего земного эллипсоида.

Исследования знаменитого германского ученого Гельмерта (умершего в 1916 г.) приводили к выводу, что поверхность геоида не имеет отступлений общего характера от общего земного эллипсоида, хотя одновременно Гельмерт не отрицал существования крупных волн геоида, которые захватывают значительные территории, и в пределах которых



Фиг. 1

отступления геоида от общего эллипсоида имеют один знак. Размеры отступлений геоида от эллипса по Гельмерту выражаются вообще небольшим числом десятков метров (1, 2, 3) и только в отдельных исключительных местах Земли (например, Тибет — Гималайский район) могут достигать, может быть, 100 м.

Позднейшие геодезические исследования показывают достаточно определенно, что, кроме случайных, местного или районного значения, волны геоида, имеются отступления его от эллипса вращения общего характера, которые, например, для значительной части Земли будут удовлетворительно представлены, если за фигуру геоида принять трехосный эллипс — с разностью его экваториальных полуосей около 200—300 м.

При существовании отступлений геоида от эллипса вращения общего характера и в уклонениях отвесных линий соответственно заключается некоторая общая часть, которую мы назовем  $\delta_1$ . Уклонение отвеса  $\delta$  в данном пункте теперь представим так:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Под  $\delta_2$  понимается уклонение отвеса, соответствующее местным, районным волнам геоида, которые, однако, нередко имеют протяжение в несколько сот километров, приобретая иногда областной характер. Другими словами, нередко величины  $\delta_2$  имеют в пределах данного района или области характер величин, изменяющихся систематически: эти систематические изменения величин  $\delta_2$  соответствуют или вздутию геоида, или его понижению, охватывающему в виде мелкой волны довольно, однако, большую площадь. Но неучт в влияния общих отступлений геоида от эллипса, придавая выводимым из градусных измерений эллипсом значения местных эллипсов, может оказываться на выводе большой полуоси величиной порядка до 300 м и на выводе сжатия до 3—4 единиц в знаменателе сжатия.

Что касается влияния систематического хода в изменениях районной или областной части  $\delta_2$  уклонения отвеса, то при обработке материала под условием минимума  $\Sigma\eta^2 + \Sigma\xi^2$  оно может быть очень значительно на коротких дугах. Пренебрегая в уравнениях (6) членами с  $\Delta e^2$ , исключая  $\xi_1$ , мы в результате по способу наименьших квадратов получаем:

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{6}{n(n-1)(n+1) \Delta \varphi} [(n-3)(l_1 - l_{n-2}) + (n-5)(l_2 - l_{n-3}) + \dots - (n-1)l_{n-1}], \quad (20)$$

причем под  $l$  понимаются свободные члены уравнений (6).

Возьмем  $\Delta \varphi = 3600''$  и допустим, что случайные уклонения отвеса имеются на дуге только в четырех точках, из которых образуются всегда две пары, таким образом, что в пару входят смежные на дуге астропункты. Допустим, что в каждой из этих двух пар случайные уклонения отвеса таковы: для первой точки в паре  $+7''$  и для второй точки  $-6''$ . Тогда наибольшие возможные искажения в  $\Delta a$ , обусловленные такими уклонениями отвеса, будут:

|                                 |              |     |
|---------------------------------|--------------|-----|
| для дуги в $60^\circ$ . . . . . | $\pm 1340$ м | (a) |
| • • 12 . . . . .                | $\pm 292$ м  |     |
| • • 24 . . . . .                | $\pm 68$ м   |     |

Возьмем далее следующие, имеющие систематический ход, районные уклонения отвеса:

| Для дуги в $8^\circ$                         | Для дуги в $24^\circ$ | Для дуги в $20^\circ$ |
|--|-----------------------|-----------------------|
| $\xi_1 = -2''$                               | $\xi_1 = -2''$        | $\xi_1 = -0'',40$     |
| $\xi_2 = -7$                                 | $\xi_2 = -7$          | $\xi_2 = -0,36$       |
| $\xi_3 = -3$                                 | $\xi_3 = -3$          | $\xi_3 = -0,32$       |
| $\xi_4 = 0$                                  | $\xi_4 = 0$           | $\xi_4 = -0,28$       |
| $\xi_5 = +2$                                 | $\xi_5 = +2$          | $\xi_5 = -0,24$       |
| $\xi_6 = +4$                                 | $\xi_6 = +4$          | $\xi_6 = -0,20$       |
| $\xi_7 = +6$                                 | $\xi_7 = +6$          | $\xi_7 = -0,16$       |
| $\xi_8 = +2$                                 | $\xi_8 = +2$          | $\xi_8 = -0,12$       |
| $\xi_9 = 0$                                  | $\xi_9 = 0$           | $\xi_9 = -0,08$       |
| $\xi_{10} = \xi_{11} = \dots = \xi_{25} = 0$ |                       | $\xi_{10} = -0,04$    |
|  |                       | $\xi_{11} = 0,00$     |
|  |                       | $\xi_{21} = +0,40$    |

Мы получим для приведенных выше дуг по формуле (20):

для дуги в  $8^\circ$  . . . . .  $\pm 1180$  м  
 для дуги в  $24^\circ$  . . . . .  $\pm 330$  м  
 для дуги в  $20^\circ$  . . . . .  $\pm 123$  м

Приведенные подсчеты показывают, что при обработке материала просто под условием минимума  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2$  чисто случайные, совершенно местного характера, заметные по величине уклонения отвеса, имеющие место в малом числе точек дуги, влияют, однако, очень заметно на выводы из отдельных коротких дуг, чего нельзя сказать в отношении длинных дуг, где это влияние оказывается заметно меньше, чем искажения, подсчитываемые по формулам (14) или (17). Поэтому вес дуг длиной менее  $10^\circ$  определяется, очевидно, нередко для малых дуг с большим преувеличением.

Районный или областной характер местных уклонений отвеса  $\delta_2$ , сказывающийся всегда систематическими изменениями величин  $\xi_2$ , приводит к искажениям в выводах размеров эллипсоида, не учитываемых по формулам (14) — (19), причем эти искажения для дуг короче  $10^\circ$  могут быть даже несколько больше тех, которые определяются формулами (14) — (19) а для дуг больших — одного порядка с определяемыми по формулам (14) — (19) или даже заметно менее последних.

Последнее заключение, однако, предполагает, что на большой дуге областной характер уклонений отвеса захватывает только часть дуги. В действительности мы имеем обстановку, которая вообще соответствует только что сделанной оговорке: для короткой дуги однообразный ход в изменениях  $\delta_2$  на всей дуге, конечно, гораздо более вероятен, чем для длинной дуги, которая или только частью попадает в волну геоида областного характера, или проходит по областям с волнами геоида противоположного характера. Но, конечно, возможен случай, когда и большая дуга почти вся целиком будет лежать в значительной области однообразного систематического уклонения отвесных линий.

Примером может, думается, служить, хотя по ней и не имеется еще числовых материалов, дуга параллели под широтой  $52^\circ$  от Новосибирска

до Хабаровска: в ней вначале, казалось бы, должны иметь место постепенно нарастающие в западной ее части уклонения отвеса к востоку, обусловленные значительным рельефом от Стальнска до Читы, а в восточной ее части — уклонения отвеса к западу, обусловленные отчасти тем же рельефом, а отчасти влиянием глубин Тихого океана. Когда областная волна геоида охватывает целиком всю дугу, то влияние соответствующих уклонений отвеса на вывод полуоси эллипсоида и из большой дуги может быть очень заметным. Мы выше привели числовой пример для дуги в  $20^\circ$ , по которой систематические уклонения отвеса охватывают всю эту дугу, но изменения которых заключаются в пределах всего  $0''8$ ; искажение в полуоси, им соответствующее, составляет  $70 \text{ м}$ . Но если бы мы взяли на этой же дуге систематически изменяющиеся уклонения отвеса в пределах  $5''$ , то обусловленная ими ошибка в полуоси эллипсоида составила бы  $440 \text{ м}$ . Другими словами, в некоторых случаях из больших дуг возможно получить искажение систематического характера, не учитываемое формулами (14) — (19), одного порядка или даже большее, чем учитываемое этими формулами искажение вследствие случайных уклонений отвеса. Однако в этих случаях областной характер уклонений отвеса оказывается на столь большой территории, что причины, обуславливающие такие уклонения отвеса, теряют значение областных, а переходят собственно в общие для всей Земли.

Следует еще отметить, что наиболее сказывается влияние или крупных, но чисто случайных уклонений отвеса, или районных, имеющих систематический ход и заметных по величине уклонений отвеса тогда, когда те или другие приходятся на конечных, а не на серединных участках дуги.

Если мы пользуемся теорией изостатической компенсации, то ни чисто местные уклонения отвеса, ни районные уклонения, имеющие систематический ход, не будут выправлены при равнинном и низменном характере рельефа района, но они будут выправлены с той или иной погрешностью, остающейся неизвестной, в местностях с заметным рельефом.

При применении гравиметрически определенных уклонений отвеса представляется возможным учесть в большинстве случаев уклонения отвеса, обусловленные чисто местными причинами; уклонения же отвеса, составляющие в  $\delta_2$  некоторую районную, систематически изменяющуюся часть, будут вероятно довольно хорошо учтены в равнинных местностях, но, может быть, с теми или иными погрешностями, остающимися неизвестными, в районах с крупным рельефом.

Исполненный обзор вопроса о погрешностях выводов из отдельных градусных измерений приводит к следующим заключениям:

1. Формулы (14) — (19), давая оценку точности вывода размеров эллипсоида, наилучше приближающегося к комплексу отдельных не связанных между собой профилей геоида, не указывают степени приближения этих размеров к таковым же для общего земного эллипсоида.

2. Для дуг короче  $10^\circ$  искажения выводов из них по отношению к искомым размерам общего земного эллипсоида настолько могут быть значительны и так значительно превышать искажения, определяемые формулами (14) — (19), что совместное использование этих коротких дуг с длинными дугами при выводе размеров общего земного эллипсоида нужно производить с большой осторожностью, и лучше, если не имеется достаточного гравиметрического освещения районов таких дуг, их вовсе не использовать.

3. Для длинных дуг формулы (14) — (19), главным образом, при применении их к оценке точности вывода размеров общего земного эллипсоида, страдают от неучета влияния общих отступлений геоида от эллипсоида вращения.

Несомненно, существенное значение формул (14) — (19), кроме прочего, — в указаниях выгодного географического размещения дуг градусного измерения, на которых могут базироваться проекты новых градусных измерений.

### § 3. О методе площадей

Математическая сторона вопроса о методе площадей была собственно разработана в восьмидесятых годах прошлого столетия Гельмертом — в виде решения вопроса о выводе размеров эллипсоида из астрономо-геодезической сети, охватывающей ту или иную территорию. Но впервые в широком масштабе этот метод к выводу размеров эллипсоида был применен в 1907—1910 гг. американскими геодезистами под руководством Хейфорда. Несомненно, геодезическая связь отдельных градусных измерений по меридианам и по параллелям заставляет нас подыскивать эллипсOID, наилучше подходящий не к отдельным профилям геоида, не связанным геометрически друг с другом, а к некоторой части поверхности геоида, выясняемой в той или иной степени этими связанными между собой градусными измерениями. Метод площадей поэтому противопоставляется методу дуг: если в первом мы стремимся связанными геодезически между собой дугами осветить ту или иную довольно значительную часть поверхности геоида и затем подобрать наилучше подходящий к ней эллипсOID, то в методе дуг оперируем с отдельными профилями той же части поверхности геоида. Совершенно очевидны и понятны преимущества метода площадей. Однако надлежащее проведение его, очевидно, требует известной густоты связанных геодезически между собой профилей геоида. По Хейфорду, расстояние между астрономическими пунктами в астрономо-геодезической сети, используемой для вывода эллипсоида по методу площадей, должно быть около 70 км. Конечно, надлежащая густота профилей геоида или надлежащая частота дуг по меридианам и дуг по параллелям может быть осуществлена в настоящее время лишь на некоторых территориях. Нечего еще говорить о методе площадей по отношению к Африке, Австралии, а на ближайшие годы даже по отношению к частям территории СССР, лежащим севернее 64-й параллели.

Если применение метода площадей возможно для вывода наилучше подходящего эллипсоида для территории США, для территории Европы, включая в нее и Европейскую часть СССР, то говорить о применении этого метода, в специальном его понимании, к задаче установления общего земного эллипсоида в течение нескольких ближайших десятилетий вовсе не приходится. Возможно, что этот срок нужно еще отодвинуть, если включать в изучаемые части поверхности геоида поверхности океанов. Из § 2 следует, что в задаче определения общего земного эллипсоида нам следует располагать связанными между собой большими дугами, которые отразили бы в себе надежно различие влияний общих отступлений геоида от двухосного эллипсоида на выводы из дуг, взятых в очень различных местах земного шара, чтобы по этим различиям влияний установить характер и размер этих общих отступлений геоида.

Поэтому, если говорить о возможно большем приближении к истине в современных выводах общего земного эллипсоида, то необходимо стремиться: во-первых, к осуществлению измерений по большим дугам, которые должны пройти по территориям, до сих пор не освещенным градусными измерениями, т. е. в Африке, в Южной Америке, в Китае, в Восточной Сибири и т. д.; во-вторых, к надлежащему географическому распределению этих дуг соответственно указаниям § 2 и соответственно предполагаемому характеру общих отступлений геоида от двухосного эллипса; в-третьих, к геодезическому соединению градусных измерений, исполненных в различных странах.

В свете изложенного ясна неосновательность мнения некоторых даже видных геодезистов, по которому следует вообще признать «метод дуг» негодным. Этот метод требует введения поправок, но по существу он долго будет иметь еще применение в задаче отыскания размеров общего земного эллипса.

Понятно, что эллипсоид, выведенный для США по методу площадей, вследствие значительности использованной территории и сравнительной малости общих отступлений геоида от эллипса, будет уже заметно приближаться к общему земному эллипсу, хотя, конечно, вследствие общих отступлений геоида от эллипса вовсе не в такой степени, как это вытекает из рубрики 7 расчетов § 2; то же должно будет сказать и про советский эллипсоид, когда он будет выведен по методу площадей, распространенному на всю территорию СССР. Соединение таких материалов по СССР и по США в одно целое и общая их обработка, несомненно, весьма приблизят нас к истине при определении общего земного эллипса. Но все-таки останется неосвещенным все южное полушарие, при возможной несимметрии фигуры геоида в нем по сравнению с северным полушарием, и близэкваториальная зона северного полушария. Представляется поэтому очень важным получение новых больших дуг в этих неисследованных еще геодезически частях земного шара.

Уравнения для вывода размеров эллипса в случае обработки астрономо-геодезической сети будут, как известно, такие:

$$\begin{aligned} \xi_k &= p_{1,k} \cdot \xi_1 - p_{4,k} d\alpha_1 + p_{4,k} \cdot \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_{5,k} \frac{\Delta a}{a_0} - p_{6,k} \Delta \mu + (\varphi_k - B_k); \\ \eta_k &= q_{1,k} \cos \varphi_k \xi_1 - q_{4,k} \cos \varphi_k d\alpha_1 + \sec \varphi_1 (\cos \varphi_k + q_{4,k} \sin \varphi_1 \cos \varphi_k) \eta_1 - \\ &\quad - q_{5,k} \cos \varphi_k \frac{\Delta a}{a_0} - q_{6,k} \cos \varphi_k \Delta \mu + (\lambda_k - L_k) \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (21) относятся к геодезической линии, соединяющей точку  $k$  с исходной точкой триангуляции; свободные члены в нем получены в предположении, что для исходной точки триангуляции принято:

$$B_1 = \varphi_1,$$

$$L_1 = \lambda_1,$$

$$A_1 = \alpha_1.$$

В уравнениях (21)  $d\alpha_1$  — погрешность астрономического азимута в исходном пункте триангуляции; погрешность  $d\varphi_1$  не выделена в урав-

нениях (21) — она считается вошедшей в  $\xi$ , так как во всех уравнениях астрономо-геодезической сети  $d\varphi_1$  входит всегда с тем же самым коэффициентом, как собственно  $\xi$ , но лишь с обратным знаком (по аналогичным соображениям не выделена и погрешность  $d\lambda_1$ ). Величины  $B_k$ ,  $L_k$  суть «геодезические» широты и долготы на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $\mu_0$ , но вычисленные, однако, с расстояниями теми, которые получаются из звеньев триангуляции I класса без приведения базисов к поверхности эллипсоида с размерами  $a_0$  и  $\mu_0$ . Другими словами, эти величины  $B_k$  и  $L_k$  не являются в строгом смысле геодезическими широтами соответственных точек на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $\mu_0$ , причем различие этих величин  $B_k$  и  $L_k$  от геодезических координат на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $\mu_0$  может достигнуть заметных величин для большой страны. По существу, при выводе  $B_k$  и  $L_k$ , стоящих в (21), должно пользоваться базисами триангуляций, отнесенных к поверхности искомого эллипсоида с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $\mu_0 + \Delta \mu$ , но так как этого сделать нельзя, то приходится пренебречь высотой проекции базиса, расположенной на уровне океана, над поверхностью этого искомого эллипсоида. Это пренебрежение редукциями базисов за переход от поверхности геоида к поверхности искомого эллипсоида может вызывать систематические и случайные искажения в выводах размеров эллипсоида из астрономо-геодезических сетей разных стран, которые, вероятно, будут порядка  $\pm 40-50$  м. Здесь во всяком случае имеется слабая сторона современной методики обработки астрономо-геодезических сетей, об устранении которой будет сказано в одном из следующих параграфов.

Коэффициенты  $p_1, q_1, p_4, q_4, p_5, q_5, p_6$  и  $q_6$  могут быть названы дифференциальными коэффициентами.

Пользуясь выводами Гельмерта, мы напишем:

$$\begin{aligned}
 p_1^k &= \frac{M_1}{M_k} \cos(L_k - L_1); \quad p_4^k = \frac{m_{1,k}}{M_k} \sin A_{k,1}; \\
 q_1^k &= \frac{M_1}{N_k} \sin(L_k - L_1) \operatorname{tg} B_k; \quad q_4^k = -\frac{m_{1,k}}{N_k} \cdot \frac{\cos A_{k,1}}{\cos B_k}, \\
 m_{1,k} &= R \cdot \sin \frac{s_{1,k}}{R}; \\
 p_5^k &= \frac{s_{1,k} \cos A_{k,1}}{M_k} \rho''; \\
 p_6^k &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[ -\frac{3(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \frac{B_1+B_k}{2}} (B_k - B_1)'' \cdot \sin^2 \frac{B_k-B_1}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(B_k - B_1)'' + \frac{1}{2} \frac{(L_k - L_1)^2}{\rho''} \sin^2 \frac{B_k+B_1}{2} \cos \frac{B_k+B_1}{2} \right]; \\
 q_5^k &= \frac{s_{1,k} \sin A_{k,1}}{N_k \cos \psi_k} \cdot \rho''; \\
 q_6^k &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B_1} \sin^2 B_1 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} (L_k - L_1)''.
 \end{aligned} \tag{22}$$

В формулах (22):  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны меридиана и первого вертикала;  $m_{t,k}$  — «приведенная» длина геодезической линии  $s_{t,k}$ .

Еще более точные формулы ГельмERTA будут:

$$\begin{aligned} p_1^{1,k} &= \frac{M_1}{M_k} \left\{ \cos t + \left( 1 - \frac{dm}{ds} \right)_{k,1} \sin A_{1,k} \sin A_{k,1} \right\}; \\ q_1^{1,k} &= \frac{M_1}{N_k} \left\{ \sin t - \left( 1 - \frac{dm}{ds} \right)_{k,1} \sin A_{1,k} \cos A_{k,1} \right\}; \\ t &= A_{k,1} - A_{i,k} \pm 180^\circ; \\ m_{1,k} &= R \sin \frac{s_{1,k}}{R}; \\ p_4^{1,k} &= \frac{m_{1,k}}{M_k} \sin A_{k,1}; \\ q_4^{1,k} &= - \frac{m_{1,k}}{N_k} \frac{\cos A_{k,1}}{\cos B_k}; \\ p_5^{i,k} &= \frac{s_{1,k} \cos A_{k,1}}{M_k} \varphi''; \quad q_{\epsilon}^{i,k} = \frac{s_{1,k} \sin A_{k,1}}{N_k \cos \varphi_k} \varphi''; \\ \Sigma &= \frac{s_{1,k}}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{\cos \varphi_1}{W_1 W_k} \right) \cos \varphi_k \sin A_{1,k} \sin A_{k,1} - \right. \\ &\quad - 3 \left( 1 - \frac{s_{1,k}^2}{6a^2} \right) \left[ \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_k}{W_1 W_k} (1 - e^2) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_k}{W_1 W_k} \cos A_{1,k} \cos A_{k,1} \right] \right\}; \\ T &= s_{1,k} \left\{ \left( 1 - \frac{s_{1,k}^2}{6a^2} \right) \frac{\cos^2 \varphi_k}{W_1^2} \cos A_{1,k} \sin A_{1,k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos^2 \varphi_k}{W_k^2} \cos A_{k,1} \sin A_{k,1} \right\}; \\ p_6^{1,k} &= - \frac{\varphi''}{\sqrt{1-e^2}} \frac{W_k^2}{1-e^2} \left\{ \frac{\Sigma}{a} \cos A_{k,1} + \frac{T}{a} \sin A_{k,1} \right\}; \\ q_6^{1,k} &= - \frac{\varphi''}{\sqrt{1-e^2}} W_k \left\{ \frac{\Sigma}{a} \sin A_{k,1} - \frac{T}{a} \cos A_{k,1} \right\} \sec \varphi_k. \end{aligned}$$

Однако эти более точные формулы никогда не употребляются.

Вследствие незначительности величин  $\xi_1, \eta_1, \Delta\alpha, \Delta\mu$ , стоящих в уравнении (21) в качестве неизвестных, формулы (22) могут быть применены для значительных расстояний между точками  $I$  и  $k$ . Если это расстояние будет достигать величин около тысячи километров (например, 600, 800 км), то придется вводить некоторую промежуточную точку  $i$  и составить уравнения (21) для геодезической линии между точками  $I$  и  $i$ , а затем составлять те же уравнения для геодезической линии между точками  $i$  и  $k$ . Далее должно будет следовать исключение из полученных

четырех уравнений  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , и получение двух уравнений для геодезической линии между пунктами  $I$  и  $k$ . (При очень значительных расстояниях, может быть, придется вводить не одну, а две промежуточные точки  $i$ ). Вообще, коэффициенты уравнений (21) при очень больших территориях придется получать не сразу для геолинии  $I$ ,  $k$ , а путем введения промежуточных точек между  $I$  и  $k$  получать ход:  $I - i_1, i_1 - i_2, i_2 - i_k$ , а затем исключением  $\xi_{i,1}, \eta_{i,1}, \xi_{i,2}, \eta_{i,2}$  приходить к искомому уравнению между пунктами  $I$  и  $k$ .

Уравнения по геолинии  $i, k$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k - p_1^{i,k} (\varphi_i - B_i) - p_4^{i,k} (\alpha_{i,k} - A_{i,k}) + p_1^{i,k} \xi_i + \\ &+ p_4^{i,k} \eta_i \operatorname{tg} B_i - p_5^{i,k} \frac{\Delta\alpha}{a_0} - p_6^{i,k} \Delta\mu - (p_1^{i,k} p_4^{1,i} + p_4^{i,k} r_4^{1,i}) \Delta x_1; \\ \eta_k &= \cos B_k [\lambda_k - L_k] - (\lambda_1 - L_i) - q_1^{i,k} (\varphi_i - B_i) - q_4^{i,k} (\alpha_{i,k} - A_{i,k}) + q_1^{i,k} \cos B_k \xi_i + \sec B_i (\cos B_k + q_4^{i,k} \sin B_i \cos B_k) \eta_i - \\ &- q_5^{i,k} \cos B_k \frac{\Delta\alpha}{a_0} - q_6^{i,k} \cos B_k \cdot \Delta\mu - (q_1^{i,k} p_4^{1,i} + q_4^{i,k} r_4^{1,i}) \cos B_k \Delta x_1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Формулы (23) получены автором статьи — в таком виде их не приходилось где-нибудь находить. Они являются формулами общими, из которых формулы (21) получаются как частный случай. В формулы (21) и (23) не введены ошибки астрономических широт, долгот и азимутов — за исключением ошибки  $\Delta\alpha_1$  исходного астрономического азимута в начальном пункте триангуляции. Так приходится поступать по следующим соображениям.

а) Ошибки  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\lambda_1$  исходных астрономической широты и долготы (в начальном пункте триангуляции) всегда можно считать очень малыми, по крайней мере современная практическая астрономия позволяет получить в результате, конечно, длинного ряда тщательно проведенных наблюдений  $\delta\varphi_1 = \pm 0'',15$  и  $\delta\lambda_1 = \pm 0'',20$ ; далее, влияние этих малых ошибок, конечно характера систематического, складывается в уравнениях (21) с влиянием  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и учитывается, таким образом, изменением выводимых в результате значений для  $\xi_1$  и  $\eta_1$ .

б) Введение ошибок широт, долгот и азимутов на всех остальных пунктах триангуляции смешало бы задачу определения элементов и ориентировки эллипсоида с задачей стыкования ошибок астрономически определенных элементов в астрономо-геодезической сети и ошибок направлений диагоналей этой сети, обусловленных ошибками углов треугольников. Вследствие случайности ошибок астрономических широт, долгот и азимутов, рассматриваемых для всей совокупности значительного количества астронунктов в большой астрономо-геодезической сети, и вследствие малости этих ошибок по сравнению с значениями уклонений отвеса  $\xi_k$  и  $\eta_k$ , влияние их на вывод  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\mu$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  ничтожно; это подтверждается исследованиями Беррота (Berroth. Der Meridianbogen „Grossenhain — Pola“).

При введении в задачу определения  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\mu$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  еще и определения всех  $\delta\varphi$ ,  $\delta\lambda$  и  $\delta\alpha$  она крайне осложнилась бы, между тем результат для  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\mu$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  изменился бы очень мало и получил бы меньший вес.

в) Ошибка  $\Delta\alpha_1$  астрономического азимута в исходном пункте триангуляции, к сожалению, может достигать заметной величины — до  $\pm 0'',8$ ; здесь сказываются особенности местности. Эта крупная ошибка влияет систематически на все геодезические азимуты триангуляции, а через них на геодезические широты и долготы и на свободные члены уравнений (21) и (23). Поэтому ее следует определить и учесть, причем соединять ее с  $\gamma_1$  не следует; хотя это функционально и возможно, но крупность  $\Delta\alpha_1$  заметно тогда скажется на величинах  $\eta$ .

При пользовании топографо-изостатическими редукциями или определенными гравиметрическим методом отклонениями отвесных линий нужно представить себе, что

$$\begin{aligned}\xi_k - D_k^M &= \delta\xi_k, \\ \gamma_{lk} - D_k^P &= \delta\eta_k,\end{aligned}\quad (24)$$

где  $D^M$  и  $D^P$  — слагающие уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале, и заменить в (21) и в (23) величины  $\xi$  и  $\eta$  соответствующими выражениями по (24) через  $D$ ,  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ .

Из уравнений (21) легко обнаружить, что ряд точек, лежащих на одном меридиане, доставляет уравнения для  $\xi$ , работающие на вывод  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\varphi$ , и уравнения для  $\eta$ , которые сами по себе не работают на вывод  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\varphi$  и не работают на вывод одного  $\Delta\alpha$  или одного  $\Delta\varphi$ , если  $\Delta\varphi$  или  $\Delta\alpha$  принять соответственно даже известными; только при наличии рядов более чем по трем меридианам уравнения для  $\eta$ , составленные для точек по этим рядам, могут дать материал для вывода и  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\varphi$ , если эти ряды различно расположены по широте. Аналогичные рассуждения приходится привести в отношении уравнений для  $\xi$ , даваемых рядом точек, расположенных на одной параллели. Эти соображения, подкрепляемые еще соображениями § 2 о необходимости коротким дугам приписывать гораздо меньший вес, чем вытекающий из длины дуги и ее географического положения [т. е. вес, определяемый формулами (14) — (19)], заставляет нас и в методе площадей требовать образования сплошных профилей по меридианам и по параллелям, имеющих возможно большее протяжение, и не использовать уравнений для  $\eta$  по меридианным рядам, если точки этих рядов не входят в ряды по параллелям, а также не использовать уравнений для  $\xi$  по параллелям, если точки этих рядов по параллелям не входят в ряды по меридианам.

Мы уже указывали, что в настоящее время приходится в задаче определения общего земного эллипсоида стремиться к продолжению длининых дуг по меридианам и по параллелям в тех частях земного шара, которые до сих пор не были еще представлены геодезическими материалами. Но в отличие от прежней постановки работ, относящейся к прошлому столетию, когда астрономические пункты в градусных измерениях располагались или вдоль некоторого одного меридиана, или вдоль некоторой одной параллели, следует по новым дугам применять некоторый площадный охват. Именно, следует триангуляцией, астрономическими пунктами и гравиметрическими пунктами обслуживать некоторую достаточно широкую полосу вдоль избранного направления градусного измерения, и притом так, чтобы в результате образовались или две — три близкие друг к другу большие дуги по меридиану, или две — три близкие друг к другу по широте большие

дуги по параллели. Это требование приходится в такой форме выдвигать потому, что разные ученые говорят лишь о развитии астрономо-геодезической сети вдоль той или иной дуги (см. выступления Шумана и Кольшюттера на 4-й конференции Балтийской геодезической комиссии), что может быть сведено к образованию небольших размеров попечечных дуг, без образования, однако, сплошных больших дуг одного направления.

Фиг. 2 и 3 служат для пояснения построений, включающих в широкое понятие «сплошного охвата астрономо-геодезической сетью». Несколько смежных больших дуг  $AB$ ,  $DC$  и  $FE$  (фиг. 2) дадут в сумме вывод, значительно освобожденный от местных влияний (это, правда, не относится к горным районам), который, в соединении с таким же образом проведенными большими градусными измерениями в других широтах и долготах, даст материал для выявления общих отступлений геоида от эллипсоида. Схема, приведенная на фиг. 3, охватывая ту же площадь, даст существенно меньший эффект в поставленной задаче.



Фиг. 2



Фиг. 3

Следует исполняющиеся или ранее выполненные градусные измерения, по возможности, дополнить таким образом, чтобы по каждому из них получить в результате построения, приближающиеся к схеме фиг. 2: двойные или тройные дуги, каждая значительных размеров, геодезически соединенные друг с другом, дадут хороший материал для вывода общего земного эллипсоида. Наоборот, ряд коротких смежных дуг, которые появляются в результате применения «метода площадей», могут давать вывод, заметно искаженный районными влияниями, который войдет, однако, в образование общего вывода с преувеличенным весом. Очевидно, и в методе площадей нужно короткими дугами пользоваться с той осторожностью, на которую указано в § 2, в особенности, когда ставится задача определения общего земного эллипсоида, а не наилучше подходящего к данной стране. В этой задаче короткие перемычки по меридианам и по параллелям, которых имеется достаточно большое число в прежней сети США, не служат к пользе дела.

#### § 4. О методах определения абсолютных уклонений отвесных линий

В 1906—1909 гг. американские геодезисты под руководством Хейфорда применили гипотезу изостатической компенсации для определения уклонений отвеса в значительном числе пунктов астрономо-геодез-

зической сети США. При этом, как известно, была принятая схема изостатической компенсации по Пратту и, в частности, предполагалась полная компенсация в любой вертикальной колонне, как бы ни был мал размер ее поперечного сечения. Глубина компенсации из геодезических работ США получилась около 122 км, но по существу на основании признака, надежностью не отличающегося, именно на основании того, что сумма квадратов остающихся погрешностей в системе уравнений (21) при этом получается наименьшей (10063), в то время как при глубине компенсации в 162 км эта сумма равна 10297, а при глубине 113,7 км — 10 077. По существу результаты Хейфорда вряд ли позволяют говорить об установлении из них какого-либо определенного числа для глубины компенсации, и собственно на основании этих результатов можно лишь утверждать, что эта глубина менее 162 км и не на основании только значений  $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$ , а и вследствие явно неприемлемых размера большой полуоси и сжатия, получаемых при больших значениях глубины компенсации. Мы имеем такие результаты по Хейфорду:

| Глубина компенсации, км | $a$ , м  | $\mu$     | $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$ |
|-------------------------|----------|-----------|--|
| 162,2                   | 6378 493 | 1 : 296,3 | 10297                                      |
| 120,9                   | 6378 388 | 1 : 297,0 | 10063                                      |
| 113,7                   | 6378 370 | 1 : 297,1 | 10077                                      |
| 0,0                     | 6378 062 | 1 : 298,2 | 18889                                      |

Очевидно, что при глубине компенсации в 90 км мы получим столь малое возрастание  $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$  против 10 063, что обоснование этой глубины в 90 км надлежит считать столь же прочным или непрочным, как и для глубины в 122 км. Позднейшие работы американских ученых приводят к глубине компенсации между 90 и 100 км.

Позднейшие же выводы геофизиков, основанные на обработке результатов наблюдений сейсмических явлений, раскрывающих нам строение земной коры и глубже лежащих под ней слоев, устанавливают 60 км как наименьшую возможную глубину изостатической компенсации и одновременно указывают, однако, 120 км как высший, получаемый из геофизических исследований предел этой глубины, констатируя, кроме того, незначительность неправильностей в распределении масс в зоне ниже 60 км (Гутенберг. «Строение Земли»). Эта незначительность неправильностей в распределении масс в зоне ниже 60-км глубины позволяет Гутенбергу в первом приближении принять, что «массы, лежащие ниже 60-км глубины, везде одинаковы».

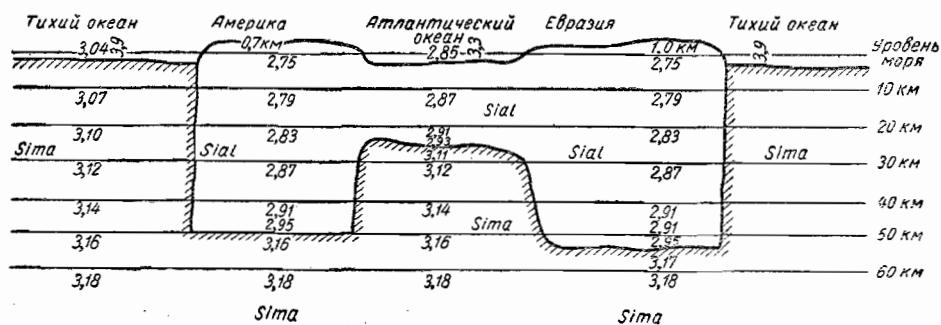
Таким образом, в свете современных достижений геофизики приходится, видимо, говорить о глубине компенсации, близкой к 60 км, так как незначительные нарушения этой компенсации в зоне ниже 60 км могут, думается, быть пренебрегаемы в целях геодезии. Далее приходится, конечно, остановить внимание на «локальной» компенсации по Хейфорду, которая требует влияния каждой отдельной возвышенности на значительную глубину в соответствующем ей вертикальном

столбце, как бы ни были малы его поперечные размеры, и которая совершенно игнорирует силы сцепления в земной коре.

Несомненно, процессы образования земной коры заключали в себе достаточно разнообразия, особенно в отношении самых верхних ее частей, чтобы их следствия можно было бы в отношении распределения масс представить очень простенькой схемой Хейфорда. Несомненно, региональная компенсация с точки зрения геофизики и геологии имеет более оснований, чем локальная.

Следует отметить попытки Хейсканена вводить при применении гипотезы Пратта различные глубины компенсации для различных районов, чтобы получить возможно больший эффект применения гипотезы. Так, для Кавказа он получает глубину 250 км, для области Швейцарских Альп — 107 км, для Северной Америки — 128 км. Но если для каждого района нужно вводить свою глубину компенсации, колеблющуюся значительно для разных районов, то, думается, от гипотезы Пратта ничего не остается. Из работ Хейсканена следует («Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie»), что лучше для объяснений существующих аномалий силы тяжести подходит гипотеза Эйри, а не Пратта. Действительно, эта гипотеза дает возможность оперировать и со значением толщины сиалического слоя, и с разностью плотностей слоя Sial и слоя Sima (магматического слоя) на нижней границе глыбы, соответствующей данному району. Здесь получается простор в подборе двух (а не одного, как у Пратта) параметров, и, конечно, этот простор позволяет лучше приспособить схему компенсации к аномалиям силы тяжести в данном районе; но насколько это приспособление каждый раз вяжется с данными геофизики, остается совершенно невыясняемым. Геодезистам следует брать данные о плотностях слоев земли на разных глубинах из геофизики, а не наоборот, для объяснения своих невязок изобретать эти данные.

На фиг. 4 изображено строение земной коры на основании обработки результатов современных сейсмологических наблюдений, приведенное в виде таблиц в труде известного современного авторитета Гутенберга «Строение Земли». Прежде всего приходится отметить факт, чрезвычайно важный, что дно Тихого океана, повидимому, и за исключением наносных образований образовано веществом Sima (Si — кремень, Ma — магний), а не Sial (Al — алюминий) с плотностью 3,05 на уровне океана и 3,07 — на глубине 10 км (Sima образует магматический слой, подстилающий земную кору на материках, образованную здесь из Sial). Далее, по Гутенбергу, Атлантический океан является впади-



Фиг. 4

ной, образованной провалом в общей материковой глыбе, состоящей из Sial; в противоположность Тихому, Атлантический океан имеет дно из Sial; толщина сиалического слоя здесь (или коры, по Эйри) около 22 км. Толщина материковой глыбы из Sial для Америки определяется примерно в 50 км, а толщина материковой глыбы для Евразии — около 55—60 км. На фиг. 4 показаны плотности земной коры на глубине 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60 км относительно уровня моря. Эти плотности одни и те же для континентов Америки и Евразии за исключением восточного берега Атлантического океана: здесь на глубине 25—55 км Sina переходит в Sial постепенно, и, следовательно, плотности на глубинах 30, 40 и 50 км вообще больше, чем плотности на тех же глубинах для континентов. Для части материковой глыбы, соответствующей Атлантическому океану, имеем плотности несколько большие, чем на тех же глубинах для континентов, что соответствует сжатию пород при произошедшем некогда опускании материка, занимавшего площадь Атлантического океана.

(Уменьшенная толщина сиалического слоя должна быть и в области Средиземного моря, но для выяснения этого нет еще достаточного материала). Поверхности раздела Sina и Sial для берегов Америки представляются, видимо, в большей части поверхностями с вертикальной прямолинейной образующей. На глубине 60 км давления могут быть представлены в условных единицах примерно так:

|   |       |
|---|-------|
| Тихий океан . . . . .                           | 178,7 |
| Америка . . . . .                               | 176,2 |
| Атлантический океан . . . . .                   | 176,1 |
| Восточный берег Атлантического океана . . . . . | 180,0 |
| Евразия . . . . .                               | 176,1 |

Следовательно, на этой глубине нарушения постоянства давления не превышают 2%.

Выделение сплошного материкового образования, состоящего из Sial, характерно для этой схемы Гутенберга.

Эта схема Гутенберга за недостатком наблюдений не распространяется на Африку, Индийский океан, Антарктику и на часть Арктики с прилегающими к ней северными частями СССР. Она до некоторой степени сохраняет в отношении материков черты гипотезы Эйри: именно Евразия, обладающая большей средней высотой над уровнем моря, чем Америка, имеет большую толщину сиалического слоя, чем Америка, а в Атлантическом «океане», соответствующем как раз идею образования океанов вследствие опускания соответствующих частей «земной коры» по Эйри, слой Sial наиболее тонок, а плотность его более плотности материков на тех же глубинах.

Думается, что схема Гутенberга, как основанная на данных наблюдений, должна послужить для выяснения общих отступлений геоида от эллипсоида вращения. Из схемы Гутенберга вытекают следующие заключения:

а) выделение сплошной глыбы Sial, материковой глыбы,— вот главный процесс, обусловивший общее распределение плотностей, наблюдаемое в толще земной коры;

б) образование гор и низменностей и в пределах континентов морей, включая в их число и Атлантику, являлось процессом второстепенным, который вносил заметное изменение в распределение плотностей

лишь в самом верхнем слое толщиной, вероятно, не более 30 км и очень слабо влияя на установившееся уже распределение плотностей на больших глубинах, внося в него только мелкие изменения даже при возникновении самых крупных горных образований. Работы Гутенберга, конечно, с теми существенными, может быть, поправками, которые дает геология, заставляют нас пересмотреть схемы изостатической компенсации, используемые в геодезии. Кроме того, они указывают на необходимость изучения самых верхних слоев глубиной до 20—30 км, в которых отразились особенности различных горообразований, существенно и, конечно, различно влиявшие на распределение плотностей в самом верхнем слое земной коры. Неправильности распределения масс в этих верхних слоях, конечно, заметно влияют на уклонение отвеса и на значение аномалий силы тяжести; изостатическая компенсация этих неправильностей имеет место, но для правильного ее учета мало знать рельеф горного образования, нужно располагать сменами плотностей, полученными из наблюдений; однако надлежащими методами для этого мы пока в отношении самых верхних слоев в геофизике не располагаем.

Если установившиеся схемы применения в геодезии гипотезы изостатической компенсации требуют пересмотра, переработки и существенных дополнений, то, с другой стороны, в настоящее время выдвигается новый метод определения абсолютных уклонений отвеса, который следует назвать гравиметрическим. Этот метод основан на использовании результатов определений силы тяжести для вывода уклонений отвеса, исходя из формулы Стокса для определения превышений геоида относительно «нормального сфероида». Формула Стокса предполагает по существу покрытие равномерно и достаточно густо гравиметрическими пунктами всей поверхности земного шара; при этом условии и при условии правильности редукций наблюденных значений силы тяжести, мы, исходя из формулы Стокса, получили бы в любом пункте земли «абсолютное» уклонение отвеса, отнесенное к нормальному сфероиду, с учетом всех влияний: надземных и подземных, близких и далеких.

Заметим теперь, что горное полукольцо высотой в 2000 м с внутренним радиусом 256 км и внешним радиусом 362 км, в центре которого находится станция, дает при наличии изостатических компенсаций слагающую уклонения отвеса в этой станции всего 0",2. Поэтому ясно, что если местность кругом интересующего нас пункта будет обслужена гравиметрически только всего в пределах радиуса 300 км, то неучт влияния всех зон земного шара за пределами такого радиуса даст сравнительно малую ошибку в значении абсолютного уклонения отвеса. В примерах, приведенных в труде Хейфорда «The Figure of the Earth and Isostasy», стр. 31—33, влияние зон между радиусами 300 и 1000 км не превосходит (для глубины компенсации 96 км) 1", а влияние всех последующих зон — 0",1. Представим рельеф, окружающий нашу станцию, в виде северного полукольца высотой +3800 м, заключенного между радиусами 1369 и 4126 км, и южного полукольца между теми же радиусами, занятого сплошной впадиной глубиной 4400 м. Применяя к такому рельефу формулы Хейфорда, а следовательно, и его теорию изостатической компенсации, получим, что влияние этого рельефа на уклонение отвеса не превзойдет ±0,6—0",8 при глубине компенсации 320 км и 0",1 — при глубине компенсации 114 км. С этими подсчетами стоят в противоречии выводы de Graaf Hunter в его труде

«Фигура Земли по наблюдениям силы тяжести», которые приводят к таким вероятным ошибкам в определении слагающих  $\xi$  или  $\eta$  уклонения отвеса, вычисляемых по результатам определений силы тяжести:

а) если гравиметрической мировой съемкой покрыть весь земной шар в виде равномерно распределенных 1700 пунктов на всей его поверхности (т. е. примерно через 500 км точка от точки), а в радиусе 1600 км от станции выполнена кругом специальная съемка, дающая еще 100 пунктов, то вероятная ошибка в  $\xi$  или  $\eta$  выражается величиной  $\pm 0'',35$ ;

б) если мировой съемкой охвачен район в радиусе  $60^\circ$  от станции, а специальная съемка выполнена, как указано в пункте а, то вероятная ошибка определения  $\xi$  или  $\eta$  достигает  $\pm 0'',67$ .

в) если мировая съемка ограничивается радиусом  $20^\circ$  от станции (2200 км), то при выполнении специальной съемки в числе 100 пунктов в пределах радиуса 1600 км вероятная ошибка  $\xi$  или  $\eta$  достигает  $\pm 1'',26$ .

Итак, по de Graaf Hunter неучет зон, лежащих за радиусом 2200 км, приводит к вероятному искажению  $\xi$  или  $\eta$  на  $\pm 1'',0$  или к предельному — на  $\pm 3'',0$ .

Мы не можем здесь входить в рассмотрение метода и исходных данных, положенных в основу расчетов de Graaf Hunter (главным образом в оценку правильности принятого им вероятного значения ошибки «представительства» в  $\pm 17,5$  мгл на основании только одного района гравиметрической съемки в Индии). Но все-таки позволим себе высказать мнение, что, вероятно, влияние далеких зон представляется, по de Graaf Hunter, значительно преувеличенным.

В настоящее время мы имеем хорошо обслуженными гравиметрически: Северную Америку, Западную Европу, почти всю европейскую часть СССР, Индию, Японию. В ближайшие годы будет хорошо обслужена и вся азиатская часть СССР. Но в Южной Америке, в Африке, в Китае и Индо-Китае определениями силы тяжести сплошные территории вовсе не охвачены, здесь гравиметрические пункты распределяются по берегам морей и океанов и, только в виде очень редких маршрутов, внутри этих стран. На океанах мы имеем определения силы тяжести на островах и знаменитые маршруты Вейнинг Мейнеса. Так как островные и береговые маятниковые точки лежат заведомо в районах значительных аномалий силы тяжести, то по существу для изучения общего распределения силы тяжести на океанах мы имеем только маршруты Вейнинг Мейнеса.

Другими словами, еще достаточно далеко до выполнения мировой гравиметрической съемки хотя бы с пунктами через 500 км друг от друга, но покрывающими равномерно всю поверхность земного шара. Однако раз методы и аппаратура для точного определения значений силы тяжести на океанах и морях, пользуясь подводными лодками, уже отработаны и созданы, то это уже представляет огромный шаг вперед и, конечно, изучение распределения силы тяжести на океанах будет из года в год заметно подвигаться. Но эти же методы и аппаратура, вероятно, лягут в основу разработки методов и аппаратуры для определения силы тяжести при помощи установок на кораблях. Таким образом возможно, что в ближайшие годы мировая гравиметрическая съемка на океанах значительно подвинется вперед; постепенно будет

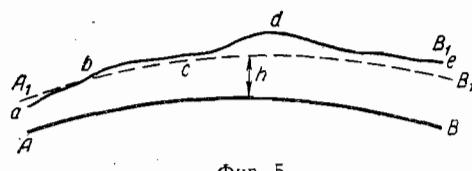
подвигаться выполнение такой же съемки и в пределах Африки, Австралии, Китая. Поэтому применение гравиметрического метода определения уклонений отвесных линий в целях обработки градусных измерений должно привлекать в настоящее время особенное внимание геодезистов.

Представим себе, что мы исполнили детальную гравиметрическую съемку вокруг астропункта градусного измерения в радиусе 300—350 км; допустим, далее, что для кольца, заключенного между радиусами 350 и 1200 км с центром в нашей станции, мы располагаем гравиметрической изученностью в виде редких маятниковых пунктов, но с достаточным расстоянием между ними.

Хотя ошибки порядка 1 или 2 сек в абсолютных уклонениях отвесных линий в пунктах градусных измерений, обусловленные неучетом далеких зон при применении формулы Стокса, являются очень небольшими, но влияние их на вывод эллипсоида будет иметь определенно систематический характер, и поэтому мы не можем не считаться с этими влияниями. Пусть на фиг. 5  $AB$ —поверхность нормального сфероида;  $abcde$ —поверхность геоида для рассматриваемой дуги градусного измерения;  $A_1B_1$ —поверхность того эллипсоида, который мы выводим из нашей дуги  $abcde$  после введения в астрономические координаты пунктов  $a, b, c, d, e$  поправок, равных гравиметрически определенным уклонениям отвеса в этих пунктах, взятым с обратным знаком. Вследствие того, что базисы триангуляции редуцируются на поверхности  $abcde$ , а не на поверхность  $AB$ , эллипсоид  $A_1B_1$  будет в районе нашей дуги лежать выше (или ниже) нормального эллипсоида на некоторую величину  $h$ , среднее квадратическое значение которой должно оценивать в  $\pm 50$  м. Далее неучет далеких зон вызовет в поправках в астрономические координаты пунктов  $a, b, c, d, e$  систематические ошибки, очень медленно изменяющиеся при переходе от пункта к пункту: постоянная часть  $\delta_0$  во всех этих систематических ошибках обусловит общий наклон дуги  $A_1B_1$  к дуге  $AB$ , который вызовет, как и величина  $h$ , отличие положения эллипсоида  $A_1B_1$  в земном теле от общего земного эллипсоида. Наконец, изменяющаяся однообразно часть ошибки в гравиметрически выведенных уклонениях отвеса вызовет различие кривизны дуг  $A_1B_1$  и  $AB$ , т. е. отличие размеров эллипсоида  $A_1B_1$  от размеров нормального эллипсоида.

В § 2 мы дали пример подсчета ошибки в размере полуоси  $a$  эллипсоида, выводимого из дуги меридiana в  $20^\circ$ , обусловленной систематическими изменениями величин  $\xi$  в пределах  $\pm 0''8$ ; эта ошибка  $\Delta a$  оказалась равной почти  $\pm 70$  м. Соответственно предположению о наибольшей ошибке в  $\xi$  или  $\eta \pm 1''$  нашей дуги  $A_1B_1$ , оставшаяся неучтенной систематическая часть ошибки в  $\xi$  или  $\eta$  будет изменяться на дуге  $A_1B_1$  в пределах  $\pm 1'',4$ , тогда ошибка  $\Delta a$  в полуоси эллипсоида  $A_1B_1$  выразится величиной 115 м. Так как из уравнений градусных измерений выводят совместно  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ , то для дуги в  $20^\circ$  предельная погрешность  $\Delta a$  будет не  $\pm 100$  м, а заметно больше, — вероятно, до  $\pm 170$  м.

С другой стороны, вводя гравиметрически определенные поправки в астрономические широты и долготы, мы тем самым устранием на



Фиг. 5

дуге  $abcde$  все волны геоида местного или областного характера, получаем «выравненный» профиль геоида, и оставшиеся средние случайные погрешности в уравнениях градусных измерений будут вообще менее  $\pm 0''$ ,5 вместо  $\pm 2''$ ,5 при чисто геометрической обработке вопроса. Следовательно, при использовании гравиметрического материала формулы (14) — (19) дадут совсем малые ошибки для выводимых из отдельных дуг и сетей размеров и сжатия эллипсоида.

Конечно, как и при других методах обработки градусных измерений, и при применении гравиметрически определенных редукций мы получаем из отдельных дуг или отдельных астрономо-геодезических сетей эллипсоиды, связь которых с общим земным эллипсоидом остается неизвестной и в размерах которых в известной степени отражается соответствующая местная форма геоида, но при этом влияния местного и областного характера скажутся при выводе размеров эллипсоида из дуг длиной порядка  $15^\circ$  совсем мало, в пять — шесть раз менее, чем при обычной обработке градусных измерений, главная же роль в обусловливании отступлений выведенных большой полуоси и сжатия от большой полуоси и сжатия общего земного эллипса переходит теперь к неучитываемым по формулам (14) — (19) влияниям систематического характера в виде неучета влияния далеких зон при применении формулы Стокса. Однако даже по отдельной дуге эти влияния сказываются на выводе полуоси таким образом, что среднеквадратическое значение ошибки полуоси нужно оценивать не более  $\pm 70$  м, если, как мы предположили, неучтенное влияние далеких зон не более  $\pm 1''$ ; предположение это, думается, близко к истине и при современной общей гравиметрической изученности Земли. Конечно, при вычислении действительного отступления выведенных из данной дуги размеров эллипсоида от таковых же для общего земного эллипса мы должны еще учитывать ошибку от редукций измеренных базисов на поверхность океана, а не на поверхность нормального сфероида, которая остается неучтеною и при других способах обработки градусных измерений и которая как среднеквадратическая ошибка в полуоси выражается величиной порядка  $\pm 40$ — $50$  м.

Напомним, что все сказанное предполагает гравиметрическую изученность для каждого астропункта градусного измерения в пределах радиуса 1200—1300 км. В настоящее время, как было уже обрисовано выше, гравиметрическая изученность Земли еще слишком мала. Поэтому говорить о дугах градусных измерений, для любых точек которых имеется достаточная гравиметрическая изученность в радиусе для каждой точки в 1200—1300 км, совсем не приходится.

Поэтому же не приходится говорить о достаточно полноценном применении формулы Стокса и вытекающих из нее формул для вычисления  $\xi$  и  $\eta$  к задаче вывода размеров и сжатия общего земного эллипса и изучения фигуры геоида в целом. Но следует принять во внимание, что нужно выполнить сравнительно небольшие дополнительные гравиметрические работы, чтобы указанную гравиметрическую изученность в радиусе 1200—1300 км получить для большей части дуги 52-й параллели в Западной Европе. Далее гравиметрические работы советских экспедиций в Арктике и общая гравиметрическая съемка СССР доставят через несколько лет, может быть через 3—4 года, такой же степени изученность по дуге 54-й параллели от меридиана  $+30^\circ$  до меридиана  $+75^\circ$  и по целому ряду меридианных дуг в СССР между параллелями 62 и  $48^\circ$  и между теми же меридианами  $+30$  и  $+75^\circ$ .

Можно, думается, считать небольшими для такого государства, как США, и те дополнительные гравиметрические работы, которые вместе с работами Канады дадут обусловленную выше гравиметрическую изученность по дуге 98-го меридиана (без Мексики) и по значительной части трансконтинентальной дуги по параллели  $36^{\circ}$ . Нужно надеяться и на значительный продвиг в ближайшее время в мировой гравиметрической съемке. Таким образом совсем не за горами то время, когда гравиметрический метод может быть применен к обработке целого ряда дуг, расположенных в разных частях земного шара, с совершенно различным расположением их относительно материкового и океанического распределения масс земной коры. Не дожидаясь выполнения полностью мировой гравиметрической съемки, мы из этих дуг получим размеры и сжатие общего земного эллипсоида с надежностью, вряд ли достижимо при применении топографо-изостатических редукций к обработке градусных измерений. Мы можем с особенным удовлетворением отметить, что реальная возможность применить использование гравиметрических материалов к обработке больших дуг градусных измерений возникнет прежде всего в СССР, и, конечно, из градусных измерений СССР будут получены при этом результаты значительного веса в отношении установления размеров общего земного эллипса.

Отметим теперь, что на территории СССР имеются пункты, для которых по выполнении общей гравиметрической съемки страны гравиметрическая изученность будет распространяться до радиуса почти в 2700 км. В середине Западной Европы и в центре США имеются пункты, для которых гравиметрическая изученность распространяется на радиус почти в 2000 км. Если для таких пунктов в радиусе 250 км выполнить детальную гравиметрическую съемку по особой программе, то затем, применяя вытекающие из теории Стокса формулы для  $\xi$  и  $\eta$ , мы определим в этих пунктах значения  $\xi_1$  и  $\eta_1$  со средней ошибкой, вряд ли превышающей  $\pm 0''.6$ . Приняв каждый такой пункт за исходный в соответствующей триангуляции и приписав ему координаты  $\varphi_1 - \xi_1$ ,  $\lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $a_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ , мы тем самым в известной степени ослабим те невыгодные влияния, которые сказываются очень заметно при определении размеров и сжатия общего земного эллипса из-за геодезической несвязанности астрономо-геодезических сетей разных государств. Понятно, что тогда и в уравнениях градусных измерений (21) нужно будет вместо  $\xi_1$  и  $\eta_1$  подставить те же гравиметрически определенные значения  $\xi$  и  $\eta$  для исходных пунктов триангуляций соответствующих государств и преобразовать соответственно эти уравнения. Конечно, ввиду ответственного значения величин  $\xi_1$  и  $\eta_1$  определение их следует выполнять как научно-исследовательскую работу, в которой нужно использовать сопоставления, вытекающие из гравиметрического материала, собранного по такой же программе, как в исходном пункте, для ряда других пунктов территории государства. В вопрос применения формулы Стокса для вывода абсолютных уклонений отвеса входит вопрос определения редукций наблюденных значений силы тяжести, особенно актуальный для горных районов; сравнение профилями, полученными на основании тщательно проведенного астрономического нивелирования,— вот, думается, один из путей выявления ошибок редукций силы тяжести в горных районах.

Важно отметить, что гравиметрически мы определяем уклонения отвеса там, где теория изостатической компенсации дает для  $\xi$  и  $\eta$  зна-

чения, близкие к нулю: это относится к местностям низменным и равнинным, значительно удаленным от горных районов или от берегов морей, где, однако, вследствие подземных залеганий наблюдаются в пределах сравнительно небольших площадей уклонения отвеса в 5—10 и даже 15''. Такие местности встречаются не так-то редко в СССР (Москва, Чернигов, Рязань, Хвалынск, Саратов и т. д.).

Только определения силы тяжести позволяют определить здесь абсолютные уклонения отвеса, главнейшая часть которых обусловлена именно местными подземными залеганиями.

Если мы не имеем возможности учитывать не только далекие, но даже и средние зоны и ограничиваемся радиусом гравиметрической изученности в 250 км, то все-таки в таких случаях местных подземных залеганий главнейшая часть поправки в астрономическую широту или долготу будет правильно выведена, и материал для определения размеров земного эллипсоида будет существенно улучшен. Уже по одному этому следует вдоль дуги градусного измерения иметь гравиметрически обслуженную полосу шириной в 400—500 км.

В негорных районах гравиметрические материалы позволяют, при наличии астропунктов на дуге градусного измерения через каждые 70 км, точно выявить профиль геоида при условии, что гравиметрические пункты обслуживаются полосу вдоль оси градусного измерения шириной около 200—250 км. Этот вывод основан на работах сотрудника научного института геодезии и картографии М. С. Молоденского.

Очевидно, и для правильного размещения астропунктов градусного измерения, и для определения профилей геоида по дугам градусного измерения, и для вывода чисто местных уклонений отвеса мы должны в программу современных градусных измерений включать выполнение гравиметрических работ, освещающих достаточно широкую полосу вдоль дуги градусного измерения. Ширина такой полосы, как минимум, — около 250 км в негорных районах; в горных районах она должна значительно увеличиваться, захватывая и предгорья.

Но, конечно, для определения общего земного эллипсоида ширина этой полосы должна быть доведена до громадных размеров, правда, при быстро убывающей густоте пунктов от ее середины к краям.

Проведение достаточно детального гравиметрического освещения в полосе шириной 250—300 км по дугам градусного измерения уже принято в СССР и выполняется Научным институтом геодезии и картографии с 1935 г. Такая программа работ была осуществлена в 1935 г. Институтом геодезии и картографии по дуге 30-го меридиана от Пулкова до Орши. В 1936 г. институт имеет надежду провести эту же программу астрономо-гравиметрических работ по дуге 54-й параллели от Орши до Новосибирска, пользуясь тем, что на значительной части дуги уже определенные астропункты расположены через 80—100 км и что геодезическое производство выполнит вдоль этой дуги в 1936 г. общую гравиметрическую съемку.

Использование при выводе размеров эллипсоида, кроме астрономо-геодезических, еще и гравиметрических материалов — вот новая постановка градусных измерений, которую надлежит проводить везде.

## § 5. О трехосности земного эллипсоида

Как известно, равновесие жидкой вращающейся массы при ограничении ее сверху, извне, поверхностью трехосного эллипсоида с ма-

льм экваториальным сжатием является невозможным. Так как трехосность Земли, если таковая существует, характеризуется очень малым экваториальным сжатием, то по существу обоснования этой трехосности как фигуры равновесия жидкой вращающейся планетарной массы отсутствуют. Тем не менее можно представить себе такое распределение масс в земной коре, при котором без нарушения равновесия в ней общие отступления геоида от эллипсоида будут для значительной части поверхности земного шара довольно хорошо представлены, если поверхность геоида заменить поверхностью трехосного эллипса с очень малым экваториальным сжатием порядка 1 : 20 000. С этой точки зрения земной трехосный эллипсoid можно считать просто удобной «интерполяционной» фигурой, вводимой для лучшего устранения противоречий результатов геодезических, астрономических и гравиметрических наблюдений и измерений с теоретическими результатами в случае отнесения последних к общей фигуре Земли в виде эллипса вращения.

Думается, однако, еще прежде времени говорить о трехосном эллипсоиде в геодезии, как только об «интерполяционной» фигуре.

Один из выводов трехосности эллипса принадлежит Кларку (1878 г.), который дает для экваториального сжатия 1 : 13 700 и для долготы  $\lambda_0$  наибольшего меридиана —  $8^\circ$  от Гринвича.

Гельмерт из наблюдений силы тяжести в 1915 г. определяет экваториальное сжатие равным 1 : 28 000 и положение наибольшего меридиана западной долготой от Гринвича в  $17^\circ$  ( $\lambda_0 = -17^\circ$ ). Хейсканен в 1924 г. также из обработки наблюдений силы тяжести дает  $\lambda_0 = +18^\circ$  и экваториальное сжатие 1 : 9275. Более точный вывод Хейсканена в 1928 г. дает для  $\lambda_0 = 0^\circ$  и для экваториального сжатия 1 : 26 500. Наконец, в 1929 г. Хейсканен из градусных измерений США и Западной Европы получает  $\lambda_0 = +38^\circ \pm 10^\circ$  и экваториальное сжатие 0,000026 (1 : 38 500). В 1934 г. проф. А. Я. Орлов из колебаний земного полюса получил  $\lambda_0 = +41^\circ$ .

Как видно, эти результаты настолько между собой не согласуются, что становится сомнительным и самое подтверждение земной трехосности из наблюдений. Но нужно иметь в виду, что использованные в каждом из приведенных выводов трехосности материалы недостаточны, чтобы из них уверенно получать очень малую величину экваториального сжатия. Если к 1928 г. Западная Европа и США были уже в известной степени освещены гравиметрически, то к этому же времени в Европейской части СССР было сделано еще мало определений силы тяжести, а в Азиатской части СССР, за исключением Туркестана, такие собственно отсутствовали; между тем в выявлении «долготных» членов в формуле нормальной силы тяжести участие материалов по СССР совершенно необходимо. Африка и Южная Америка также до 1928 г. представлены гравиметрически более чем слабо. В выводах Хейсканена из определений силы тяжести фактически влияние или вес материалов по маленькой Западной Европе был равен или даже более веса материалов по США.

Для выяснения трехосности из градусных измерений нужно иметь очень обширные материалы и притом соответственно размещенные географически. С этой точки зрения материалы по градусным измерениям, использованные Хейсканеном, не представляются значительными, и, кроме того, приходится отметить такую их особенность: градусные

измерения Западной Европы дают нормальные уравнения, в которых коэффициенты от 6 до 14 раз менее соответствующих им коэффициентов в нормальных уравнениях, доставляемых градусными измерениями Америки. Отсюда ясно, что собственно вывод Хейсканена трехосности из градусных измерений основывается, главным образом, на астрономо-геодезической сети США и в значительно меньшей степени — на дугах европейских градусных измерений. Между тем на выявление трехосности материал по США работает сам по себе слабо.

Таким образом все сделанные до сих пор выводы трехосности земного эллипсоида должны быть признаны основанными на материалах или просто недостаточных, или не вполне достаточных.

Присоединение к этим материалам новых больших материалов по градусным измерениям и гравиметрическим работам в СССР, полученных с 1924 г., существенно изменяет дело, и по существу только теперь можно поставить на прочную почву исследование вопроса о трехосности земного эллипсоида (а следовательно, и о выводе общего земного эллипсоида).

Эту роль астрономо-геодезических и гравиметрических работ, выполненных в СССР после Октябрьской революции, уместно особенно отметить.

Обозначим через  $a$ ,  $b$  и  $c$  полуоси трехосного эллипсоида, причем  $a > b > c$ ; через  $i$  — его экваториальное сжатие, равное  $\frac{a-b}{a}$ ; через  $\lambda_0$  — долготу наибольшего меридиана; через  $R$  — радиус экватора под долготой  $45^\circ$  от наибольшего или наименьшего меридиана; через  $e$  — эксцентриситет меридианного эллипса под долготой  $45^\circ$  от наибольшего меридиана, причем  $e^2 = \frac{R^2 - c^2}{R^2}$ . Тогда по формулам, выведенным еще в 1900 г. Ф. Н. Красовским на основании работ проф. Г. Н. Шебуева, имеем:

$$S = S_0 - \frac{i}{2} S_0 \cos 2(\lambda - \lambda_0) + \frac{3}{4} i R \cos 2(\lambda - \lambda_0) \{ (\varphi_k - \varphi_1) - \\ - \sin(\varphi_k - \varphi_1) \cos 2\varphi_m^k \}; \quad (25)$$

$$S' = S'_0 - \frac{iR \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_m\right)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}} \cos \varphi_m \sin(\lambda_k - \lambda_1) \cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0). \quad (26)$$

Здесь  $S$  — длина дуги меридиана с долготой  $\lambda$  между параллелями с широтами  $\varphi_k$  и  $\varphi_1$ ;  $\varphi_m^k = \frac{\varphi_k - \varphi_1}{2}$ ;  $S'$  — длина дуги по параллели с широтой  $\varphi_m$  между меридианами с долготами  $\lambda_k$  и  $\lambda_1$ . В (26):

$$\lambda_m^k = \frac{\lambda_k + \lambda_1}{2}.$$

$S_0$  и  $S'_0$  — длины дуг меридианов и параллелей на эллипсоиде вращения с большой полуосью  $R$  и эксцентриситетом  $e$ .

Для небольших дуг (25) и (26) можно еще написать так:

$$S = S_0 + \frac{i}{2} S_0 \cos 2(\lambda - \lambda_0) \cdot (2 - 3 \cos^2 \varphi_m); \quad (27)$$

$$S' = S'_0 - i S'_0 \cos 2(\lambda_m - \lambda_0) \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_m}{2} \right) \quad (28)$$

При долготах  $\lambda_m^k$ , близких к  $\lambda_0$  или к  $\lambda_0 + 180^\circ$ , в (27) и (28)  $\cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0)$  близок к единице. Следовательно, для дуг параллелей, расположенных недалеко от наибольшего меридиана,  $S' < S'_0$ . Наоборот, для дуг параллелей, находящихся вблизи наименьшего меридиана,  $\cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0)$  будет близок к  $-1$ , и следовательно,  $S' > S'_0$ .

Другими словами, обрабатывая дуги параллелей с долготной амплитудой до  $30-40^\circ$  как дуги эллипсоида вращения, т. е. без учета трехосности эллипсоида, мы вместо  $S'_0$  пользуемся измеренной величиной  $S'$ , уменьшая тем самым длину дуги параллели, соответствующую заданной астрономической разности долгот на двухосном эллипсоиде, при положении середины этой дуги вблизи наибольшего меридиана и увеличивая длину дуги параллели, если середина дуги приходится вблизи наименьшего меридиана. Следовательно, для  $R_1$ , которое при обработке градусных измерений без учета трехосности играет роль большой полуоси  $a$ , наиболее подходящего к дуге эллипсоида вращения, мы получим из дуг параллелей, расположенных вблизи наибольшего меридиана, преуменьшенное значение, а из дуг параллелей, расположенных вблизи наименьшего меридиана, — преувеличено значение; при этом искажение вывода будет наибольшим для дуг параллелей, лежащих близ экватора. При  $i = 1 : 20\,000$  разность искажений в выводах  $a$  из дуг параллелей, тяготеющих к наибольшему меридиану, и из дуг параллелей, тяготеющих к наименьшему меридиану, может составить около  $900\text{ м}$ , и следовательно, согласно расчетам § 2 и 3, может быть вообще охвачена при длинах дуг двух параллелей, каждой около  $2000-3000\text{ км}$ , если они находятся в южных широтах и каждая располагается симметрично относительно наибольшего и наименьшего меридиана. Для дуг меридианов из (27) при  $\cos \varphi_m < +\sqrt{\frac{2}{3}}$  будем иметь:

$$S > S_0 \text{ при } \lambda - \lambda_0 \text{, близком к нулю или к } 180^\circ;$$

$$S < S_0 \text{ при } \lambda - \lambda_0 \text{, близком к } 90^\circ \text{ или к } 270^\circ.$$

Следовательно, не учитывая влияния трехосности, мы при  $\varphi_m > 35^\circ$  из дуг меридианов, лежащих вблизи наибольшего меридиана, получаем преувеличено значение большой полуоси, а из дуг меридианов, лежащих вблизи наименьшего меридиана, — преуменьшенное значение большой полуоси; при этом наибольшие искажения выводов из дуг меридианов будут при средних широтах этих дуг, близких к  $90^\circ$ . При  $i = 1 : 20\,000$  разность искажений в выводах  $a$  из дуг меридианов, имеющих  $\lambda - \lambda_0 = 0^\circ$  и  $\lambda - \lambda_0 = 90^\circ$ , может достигнуть при средней широте этих дуг около  $60^\circ$  значения около  $400\text{ м}$ , и, следовательно, согласно расчетам § 2 и 3, вряд ли может быть схвачена из двух дуг длиной каждая в  $25^\circ$ ; нужно иметь две — три такие дуги вблизи и наибольшего, и наименьшего меридиана. При  $i = 1 : 16\,000$ , т. е. при различии экваториальных полуосей эллипсоида в  $400\text{ м}$ , мы

получим следующие различия выведенных при неучете трехосности значений большой полуоси от величины  $R$ , т. е. от большой полуоси среднего эллипсоида вращения, заменяющего трехосный эллипсоид при условии наибольшей близости поверхностей двух этих эллипсоидов:

а) вблизи наибольшего меридиана и при средней широте  $52^\circ$ :

$$\begin{array}{ll} \text{из дуг меридианов} & + 162 \text{ м}, \\ \text{из параллелей} & - 476 \text{ } \end{array}$$

б) вблизи наибольшего меридиана и при средней широте  $\varphi_m = 36^\circ$ :

$$\begin{array}{ll} \text{из дуг меридианов} & + 16 \text{ м}, \\ \text{из параллелей} & - 560 \text{ } \end{array}$$

Вблизи наименьшего меридиана знаки этих отклонений будут обратными.

В действительных вычислениях на различие получаемых из них величин  $\Delta R$  будет сказываться непременно еще ошибка принимаемого полярного сжатия.

Принимая ошибку сжатия в две единицы его знаменателя, получим, что в действительных вычислениях вышенаписанные значения  $\Delta R$  будут изменяться в ту или другую сторону так:

$$\begin{aligned} \text{для параллелей} & \left\{ \begin{array}{l} \text{число} - 476 \text{ м на} \pm 88 \text{ м}, \\ \text{число} - 560 \text{ м на} \pm 47 \text{ м} \end{array} \right. \\ \text{для меридианов} & \left\{ \begin{array}{l} \text{число} + 162 \text{ м на} \pm 20 \text{ м}, \\ \text{число} + 16 \text{ м на} \pm 162 \text{ м} \end{array} \right. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены значения ошибок в  $R$  при  $i = 1 : 32 000$ .

Первым обратил внимание на указанный выше характер искажений в выводах большой полуоси из-за неучета трехосности финляндский ученый Хейсканен в статье „Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid?“.

Он отмечает в этой статье, что градусные измерения по меридианам Европы дают для большой полуоси значение, заметно большее (6 378 540 м), чем меридианные градусные измерения США (6 378 240 м), и наоборот, градусное измерение по параллели Европы дает для большой полуоси значение (6 378 070 м), заметно меньшее, чем градусные измерения по параллелям в Северной Америке (6 378 546 м).

Примем экваториальное сжатие  $i = 1 : 32 000$  и предположим, что меридиан Гринвича совпадает с наибольшим меридианом трехосного эллипсоида ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ). Так как средняя широта меридианных дуг Европы близка к  $52^\circ$ , а средняя широта для градусных измерений Америки  $\varphi_m = 36^\circ$ , то, принимая для Европы  $\lambda_m - \lambda_0 = 15^\circ$  и для США  $\lambda_m - \lambda_0 = 90^\circ$ , получим из 3-й графы табл. 1:

а) градусные измерения по меридианам в Европе должны дать для большой полуоси результат на 30—40 м меньше, чем меридианные дуги США (а не больше на 300 м по Хейсканену);

б) градусные измерения по параллели Европы должны дать для большой полуоси значение на 540 м меньше, чем из измерений по параллелям США (на 476 м по Хейсканену).

В табл. 1 используется при этом графа 3-я потому, что Хейсканен при своих сопоставлениях исходил из полярного сжатия среднего эллипсоида около 1 : 296,8, между тем как по выводам Ф. Н. Красовского оно близко к 1 : 298,6; Хейсканен принимал, кроме того,  $i = 1 : 20 000$ .

Таблица 1

| Вывод $R$  | $\Delta R$ при безошибочном сжатии, м | $\Delta R$ при ошибке сжатия на $-2$ в знаменателе, м |
|--|---------------------------------------|---|
| Из дуг меридианов<br>$\lambda = \lambda_0; \varphi_m = 52^\circ$                           | + 81                                  | + 101   |
| Из дуг меридианов<br>$\lambda - \lambda_0 = 15^\circ; \varphi_m = 52^\circ$                | + 70                                  | + 87  |
| Из дуг параллелей<br>$\lambda_m = \lambda_0; \varphi_m = 52^\circ$                         | - 238                                 | - 326   |
| Из дуг меридианов<br>$\lambda = \lambda_0; \varphi_m = 36^\circ$                           | + 8                                   | + 145   |
| Из дуг параллелей<br>$\lambda_m = \lambda_0; \varphi_m = 36^\circ$                         | - 280                                 | - 325   |
| Из дуг меридианов<br>$\lambda = \lambda_0 \pm 90^\circ; \varphi_m = 36^\circ$              | - 8                                   | + 129   |
| Из дуг меридианов<br>$\lambda = \lambda_0 \pm 32^\circ + 90^\circ; \varphi_m = 36^\circ$   | - 4                                   | + 133   |
| Из дуг параллелей<br>$\lambda_m = \lambda_0 \pm 90^\circ; \varphi_m = 36^\circ$            | + 280                                 | + 235   |
| Из дуг параллелей<br>$\lambda_m - \lambda_0 = 90^\circ \pm 32^\circ; \varphi_m = 36^\circ$ | + 130                                 | + 85  |

Для более надежных сопоставлений следует принять согласно выводам Ф. Н. Красовского:

$$i = 1 : 32\,000;$$

$$\mu = 1 : 298,6;$$

$$\lambda_0 = + 15^\circ,$$

и, кроме того, следует учесть, что сеть Америки имеет протяжение по долготе несколько более  $50^\circ$  и поэтому  $\cos 2(\lambda_m - \lambda_0)$  для разных ее частей приобретает значения, заметно отличающиеся от  $-1$ . Приняв для дуги параллели Европы  $\lambda_m - \lambda_0 = 0$ , для дуги Струве  $\lambda_m - \lambda_c = \pm 12^\circ$ , для дуги Западноевропейского меридиана  $\lambda_m - \lambda_0 = - 15^\circ$ , разделив, кроме того, дугу параллели Америки на три части и перечислив выводы из градусных измерений на сжатие  $1 : 298,6$ , получим табл. 2. (При указанном перечислении исходными по Европе служили результаты, данные Хейсканеном в его статье «Die Erddimensionen nach Europäischen Gradmessungen», стр. 22, а исходными по США — результаты, полученные Ф. Н. Красовским и приведенные в следующих параграфах).

Разность  $R$  из дуг меридианов Европы и Америки по 3-й графе табл. 2  $+ 144$  м. Та же разность по 1-й графе табл. 2  $+ 228$  м. Разность  $R$  из дуг параллелей Европы и Америки по 3-й графе табл. 2  $+ 104$  м. Та же разность по 1-й графе табл. 2  $- 264$  м.

Несогласие чисел, стоящих в 1-й графе табл. 2, заключается в пределах 334 м, тогда как несогласие чисел, стоящих в 3-й графе той же

Таблица 2

| Вывод из градусных измерений                                    | Поправка за трехосность, м | Исправленные значения полуоси $R$ , м |
|---|----------------------------|---------------------------------------|
| 1. Меридианные дуги Европы:<br>$a = 6\ 378\ 500 \pm 80$ м       | - 80                       | 6 378 420                             |
| 2. Меридианные дуги США:<br>$a = 6\ 378\ 272 \pm 110$ м         | + 4                        | 6 378 276                             |
| 3. 52-я параллель Запад. Европы:<br>$a = 6\ 378\ 166 \pm 120$ м | + 238                      | 6 378 404                             |
| 4. Дуги параллелей и азимуты США:<br>$a = 6\ 378\ 430 \pm 45$ м | - 130                      | 6 378 300                             |

таблицы, заключается в пределах 144 м. Как видно, учет трехосности значительно улучшил сходимость результатов из градусных измерений Старого и Нового света и, кроме того, устранил систематический характер расхождений в выводах из меридианов Европы и Америки и из параллелей Европы и Америки, отмеченный Хейсканеном. В следующих параграфах будет установлено, что выводы по Европе, приведенные в табл. 2, увеличены каждый примерно на 80 м. Если это принять в расчет, то сходимость величин  $R$  в 3-й графе табл. 2 становится поразительной.

Но не нужно забывать, что случайные уклонения отвесной линии обусловливают средние квадратические ошибки чисел, стоящих в графе 1-й табл. 2, от  $\pm 46$  м до  $\pm 120$  м. Несогласие чисел 1-й графы табл. 2, а следовательно, и согласие чисел 3-й графы этой таблицы, устанавливаются со слишком крупной средней ошибкой до  $\pm 160$  м, для того, чтобы на основании полученной значительной сходимости чисел в 3-й графе табл. 2 заключать с полным основанием о трехосности земного эллипсоида. Материал по США плюс Западная Европа оказывается для этого не вполне достаточным, что мы уже и отмечали выше. Но, прибавляя к этому материалу материал по новой астрономо-геодезической сети СССР, мы получаем значительно большие основания в суждениях о трехосности.

Как увидим в следующих параграфах, материалы по СССР позволяют нам составить табл. 3 выводов  $R$  при сжатии 1 : 298,6.

Таблица 3

| Сети или дуги  | $R$ без учета трехосности, м | $R$ с учетом трехосности, м |
|--|------------------------------|-----------------------------|
| 1. Сеть США . . . . .  | 6 378 381 $\pm$ 38           | 6 378 268                   |
| 2. Дуги Западной Европы . . . . .                                      | 6 378 322 $\pm$ 77           | 6 378 360                   |
| 3. Новая сеть СССР до 1934 г. с включением в нее дуги Струве . . . . . | 6 378 140 $\pm$ 54           | 6 378 249                   |

В табл. 3 несогласие в главных выводах, т. е. из сетей СССР и США, равное 240 м, устанавливается со средней ошибкой  $\pm 66$  м, и поэтому установление полной сходимости в значениях  $R$  после введения поправок за трехосность по СССР и по США уже достаточно говорит за обоснование трехосности, конечно, вместе с улучшением сходимости в выводах из сетей СССР и Западной Европы, а также вместе с результатами табл. 2. Тот факт, что большие дуги параллелей в СССР, простирающиеся до долготы  $+82^\circ$ , дают для большой полуоси заметно преуменьшенное значение по сравнению с выводами из долготных градусных измерений по США (различие достигает 300 м), не может быть объяснено при ничтожности топографо-изостатических редукций по СССР иначе как невведением влияния трехосности земного эллипсоида. Конечно, крайне интересно иметь выводы по дугам параллелей СССР от 82 до 137-го меридиана, которые должны дать преувеличенное значение большой полуоси, но это дело еще двух — трех лет. Но, думается, не приходится спорить заключения, что материалы и по современным градусным измерениям подтверждают уместность введения в геодезию трехосного эллипсоида — по крайней мере для части геоида, соответствующей США, Западной Европе и части СССР до меридиана  $+84^\circ$ .

В 1933/34 г. финляндский ученый Хирфонен в своем труде «Ондуляции геоида» находит на основании использования определений силы тяжести, что эллиптичность земного экватора достаточно обосновывается ходом общих аномалий силы тяжести и выводит  $\lambda_0 = -19^\circ \pm 5^\circ$  и  $i = 1 : 45\,400$  ( $a - b = 140$  м). Разногласие выводов Хирфонена с теми, к которым приводят градусные измерения США, Западной Европы и СССР, происходит как оттого, что Хирфонен оперирует с материалами, охватывающими вообще весь земной шар, так и оттого, что этот материал на 70—80% гипотетический, полученный путем интерполяции сравнительно до сих пор небольшого материала и притом крайне неравномерно распределенного по определениям силы тяжести в разных странах.

Вовсе не предрешая вопроса о трехосном эллипсоиде, представляющем весь геоид в целом, мы ограничиваемся заключением, что часть геоида, соответствующая США и Евразии, причем последняя берется между параллелями 65 и  $40^\circ$  и до меридиана  $+80^\circ$ , наилучше представляется поверхностью трехосного эллипсоида, причем неучет этой трехосности сказывается заметно на геодезических выводах из отдельных градусных измерений и из астрономо-геодезических сетей отдельных больших стран, вследствие чего и самый вопрос определения элементов земного трехосного эллипсоида из градусных измерений получает актуальное значение. Это заключение можно считать достаточно подтвержденным современными астрономо-геодезическими материалами.

Что касается гравиметрических материалов, то они определенно подтверждают чередование двух максимумов и двух минимумов в общих аномалиях силы тяжести примерно через  $90^\circ$  по долготе, но не дают большой определенности в приурочивании этих максимумов или минимумов к определенной долготе; другими словами, гравиметрические результаты достаточно также подтверждают трехосность земного эллипсоида, но надежное определение  $i$  и  $\lambda_0$  из этих материалов — дело еще будущего, когда эти материалы значительно увеличатся и будут распределены не так случайно, как современные.

Для определения элементов земного трехосного эллипсоида из градусных измерений мы воображаем, что геодезические координаты  $B$  и  $L$  пунктов астрономо-геодезической сети отнесли к эллипсоиду вращения с большой полуосью  $R = \frac{a+b}{2}$  и полярным сжатием  $\mu_{45} = \frac{R-c}{R}$  путем введения в  $B$  и  $L$  соответствующих поправок за трехосность.

При этом можно применить следующие формулы Шмеля (Schmell „Untersuchungen über ein allgemeines Ellipsoid“) для введения этих поправок:

$$dB_k = -\frac{i\rho'' s_{ik} W_m}{R} \times \left[ \frac{W_m^2}{1-e^2} \left( 1 - \frac{3 \cos^2 \varphi_m^k}{2 W_m^2} \right) \cos 2\lambda_m^k \cos A_k + \sin \varphi_m^k \sin 2\lambda_m^k \sin A_k \right]; \quad (29)$$

$$dL_k = +\frac{i\rho'' s_{ik} W_m}{R \cos \varphi_m^k} \left[ \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_m^k}{2 W_m^2} \right) \cos 2\lambda_m^k \sin A_k - \sin \varphi_m^k \sin 2\lambda_m^k \sin A_k \right]. \quad (30)$$

В (29) и (30):

$s_{ik}$  — длина геодезической линии между пунктами 1 и  $k$ ;

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_k}{2};$$

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_k}{2} - \lambda_0,$$

причем долготы  $\lambda_1$ ,  $\lambda_k$  и  $\lambda_0$  считаются от Гринвичского меридиана;

$$A_k = \frac{A_{1,k} + A_{k,1} \pm 180^\circ}{2} \text{ — средний азимут геолинии } s_{ik}, \text{ считаемый от}$$

$K, k$ ;

$e$  — эксцентриситет меридианного эллипса под долготой  $\lambda = \lambda, \pm 90^\circ$ .

$$W_m = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}.$$

При вычислении  $dB_k$  и  $dL_k$  можно, понятно,  $R$  и  $e^2$  полагать равными приближенно известным большой полуоси  $a_0$  и эксцентриситету  $e_0$  земного двухосного эллипсоида (или принятого референц-эллипсоида). Очевидно, в (29) и (30) в качестве неизвестных входят  $\lambda_0$  и  $i$ . Вводя  $dB_k$  и  $dL_k$ , выраженные (а не вычисленные) по (29) и (30) в функции  $i$  и  $\lambda_0$ , в качестве поправок в величины  $B_k$  и  $L_k$ , стоящие в свободных членах уравнений градусных измерений (6), (7), (10), (11), мы напишем эти уравнения в том виде, который соответствует выводу из градусных измерений трехосного эллипсоида.

Но только в этих уравнениях под  $a_0 + \Delta a$  нужно будет понимать, конечно, величину  $R$ , т. е. большую полуось меридианного эллипса, отстоящего по долготе от наибольшего меридиана на  $\pm 45^\circ$ , а под  $\mu_0 + \Delta \mu$  — «сжатие»  $\mu_{45}$  этого же меридианного эллипса. После решения уравнений градусных измерений мы будем иметь:

$$a = R(1 + i); \quad b = R(1 - i); \quad c = R(1 - \mu_{45}),$$

и, кроме того, получим и  $\lambda_0$ .

Формулы (29) и (30) точны до малых величин 5-го порядка и могут быть в наших целях применены для очень больших расстояний  $s_{1,k}$  — до 2000 км и, вероятно, еще больших. Для еще больших расстояний от исходного пункта придется вводить промежуточный пункт  $z$  и, рассчитав по линии  $1-z$  величины  $dB_z$ ,  $dL_z$  и  $dA_{z \cdot 1}$ , затем рассчитывать:

$$\left. \begin{aligned} dB_k &= p_1^{z,k} \cdot dB_z + p_4^{z,k} + dA_{z \cdot 1} + dB_{z \cdot k}; \\ dL_k &= q_1^{z,k} dB_z + q_4^{z,k} \cdot dA_{z \cdot 1} + dL_z + dL_{z \cdot k} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

причем под  $dB_{z \cdot k}$  и  $dL_{z \cdot k}$  понимаются изменения широты и разности долгот за трехосность при передаче координат по линии  $zk$ , т. е. при применении формул (29) и (30) с принятием точки  $z$  за первую и с введением в эти формулы:

$$\begin{aligned} \varphi_m^k &= \frac{\varphi_z + \varphi_k}{2}; \\ \lambda_m^k &= \frac{\lambda_z + \lambda_k}{2} - \lambda_0; \\ A_k &= \frac{A_{z \cdot k} + A_{k \cdot z} \pm 180^\circ}{2}. \end{aligned}$$

В (31)  $p_1$ ,  $p_4$ ,  $q_1$  и  $q_4$  имеют те же значения, что в формулах (22). т. е. отнесены собственно к эллипсоиду вращения; возможность такого подхода аналитически не исследовалась, но она подтверждается тем соображением, что если различие величин  $p_1$ ,  $p_4$ ,  $q_1$  и  $q_4$  от соответствующих им на сфере почти ничтожно, то различие их на эллипсоиде вращения и на трехосном эллипсоиде становится пренебрежаемым.

Для случая  $\frac{\varphi_k - \varphi_1}{\rho} < \frac{1}{3}$  и  $\frac{\lambda_k - \lambda_1}{\rho} \cos < \frac{1}{3}$  Хейсканен считает возможным формулы (29) и (30) упростить и дать их в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} dB_k &= -i \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi_m^k \right) (\varphi_k - \varphi_1) \cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\lambda_k - \lambda_1) \sin 2\varphi_m^k \sin 2(\lambda_m^k - \lambda_0) \right]; \\ dL_k &= +i \left[ \left( 1 + \frac{\cos^2 \varphi_m^k}{2} \right) (\lambda_k - \lambda_1) \cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0) - \right. \\ &\quad \left. - (\varphi_k - \varphi_1) \operatorname{tg} \varphi_m^k \sin 2(\lambda_m^k - \lambda_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

или

$$\left. \begin{aligned} dB_k &= -\frac{i}{4} [(1 - 3 \cos 2\varphi_m^k) (\varphi_k - \varphi_1) \cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda_k - \lambda_1) \sin 2\varphi_m^k \sin 2(\lambda_m^k - \lambda_0)]; \\ dL_k &= +\frac{i}{4} [(5 + \cos 2\varphi_m^k) (\lambda_k - \lambda_1) \cos 2(\lambda_m^k - \lambda_0) - \\ &\quad - (\varphi_k - \varphi_1) \operatorname{tg} \varphi_m^k \sin 2(\lambda_m^k - \lambda_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Отдел II. Градусные измерения

## ОБЗОР ГЛАВНЕЙШИХ СОВРЕМЕННЫХ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ПОЛУЧЕННЫХ РАЗНЫМИ АВТОРАМИ ВЫВОДОВ ИЗ НИХ

### § 6. Западноевропейские градусные измерения

Западноевропейские градусные измерения представлены: 1) знаменитой дугой Струве, простирающейся от мыса Нордкап на Ледовитом океане (Норвегия) до устья Дуная; 2) западноевропейским градусным измерением по меридиану, начинающимся с Северошотландских островов, проходящим далее по территории Великобритании, Франции, Испании и заканчивающимся в Африке, в Алжире; 3) западноевропейским градусным измерением по 52-й параллели, начинающимся с пунктов на юго-западных берегах Ирландии и следующим далее через Ирландию, Великобританию, Бельгию, Германию и Польшу вплоть до Бобруйска, до меридиана  $+29^{\circ}$ ; 4) градусным измерением по 48-й параллели, которое, однако, до сих пор не закончено и лишь в части — от Вены до Кишинева — дает некоторый материал для составления уравнений градусных измерений.

#### § 6a. Дуга Струве

Самый северный пункт дуги имеет широту  $70^{\circ}40',2$  (Фугленес), самый южный —  $45^{\circ}20',0$  (Старонекрасовка); таким образом амплитуда дуги равна  $25^{\circ}20',2$ , а средняя ее широта равна  $58^{\circ}$ ; долгота (от Гринвича) может быть принята в среднем равной для дуги Струве  $+27^{\circ}$ . На протяжении этой большой дуги имеется всего 13 астрономических точек, располагающихся, следовательно, в среднем расстоянии друг от друга примерно в 230 км; на этих астрономических точках определены только широты и азимуты (астрономически определенные долготы отсутствуют, если не считать Дерпта). Астрономический азимут в большинстве случаев определялся для направления на марку, выставленную вблизи астрономической станции, которая находилась обычно в стороне от главной цепи треугольников иногда на 10—15 км. Поэтому передача астрономических азимутов на стороны главной цепи выполнялась путем прокладки вспомогательных триангуляций из мелких треугольников, соединяющих астропункты с треугольниками главной цепи. Такой прием имел следствием то, что астрономические азимуты для геодезических линий, соединяющих астрономические пункты градусного измерения, получены в дуге Струве с малой точностью. Вследствие близости азимутов указанных геодезических линий к  $0^{\circ}$  или к  $180^{\circ}$  это обстоятельство не имеет, однако, никакого влияния на строгость составления уравнений градусного измерения по меридиану для дуги Струве.

Однако последующее включение дуги Струве в астрономо-геодезическую сеть Западной Европы или СССР, конечно, сопровождалось бы составлением уравнений типа (23) (см. «Геодезист» № 6, стр. 24) для  $\xi$  и  $\eta$ , причем за неимением астрономически определенных долгот при составлении уравнений для  $\eta$  можно было бы воспользоваться астрономически определенными азимутами геодезических линий, соединяющих астрономические пункты дуги Струве. Понятно, что при указанной выше малой точности вывода этих азимутов эта возможность отпадает, и вследствие этого использование дуги Струве суживается,

ограничиваясь только составлением уравнений для  $\xi$  при включении этой большой дуги в смежные астрономо-геодезические сети. Понятно, этот старый прием расположения астрономических станций градусных измерений вблизи городов и в стороне от главного ряда треугольников давно уже осужден и теперь нигде не практикуется, но о нем полезно напомнить как о примере недочетов, происходящих непременно при отделении астрономической части градусных измерений от части геодезической вместо того, чтобы иметь одно астрономо-геодезическое задание.

Следующая табл. 4 дает по Хейсканену (Die Erddimensionen nach den Europäischen Gradmessungen) свободные члены уравнений градусного измерения Струве, отнесенные к эллипсоиду с размерами:

$$a_0 = 6378\ 321;$$

$$\mu_0 = 1 : 293,47.$$

Таблица 4

(Данные по дуге Струве)

| Наименование пунктов      | Широта    | $(\varphi - B) -$                | Топографо-изостатиче-<br>ские редук-<br>ции | Свободный<br>член с ре-<br>дукцией |
|---------------------------|-----------|----------------------------------|---|------------------------------------|
|                           |           | $\frac{\Sigma(\varphi - B)}{13}$ |   |                                    |
| Старонекрасовка . . . . . | 45°20', 0 | +3", 12                          | -0", 40                                     | +2", 71                            |
| Водолуй . . . . .         | 47 1 , 4  | -1 , 01                          | 0 , 00                                      | -1 , 02                            |
| Супрунковцы . . . . .     | 48 45 , 1 | -2 , 48                          | +1 , 43                                     | -1 , 06                            |
| Кременец . . . . .        | 50 5 , 8  | +2 , 32                          | -0 , 96                                     | +1 , 35                            |
| Белин . . . . .           | 52 2 , 7  | -0 , 05                          | +0 , 30                                     | +0 , 24                            |
| Немеж . . . . .           | 54 39 , 1 | +0 , 24                          | 0 , 00                                      | +0 , 23                            |
| Якобштадт . . . . .       | 56 30 , 1 | -2 , 25                          | +0 , 91                                     | -1 , 35                            |
| Дерпл . . . . .           | 58 22 , 8 | +1 , 45                          | -0 , 80                                     | +0 , 64                            |
| Хогланд . . . . .         | 60 5 , 2  | +0 , 36                          | +0 , 10                                     | +0 , 45                            |
| Кепнимяки . . . . .       | 62 38 , 1 | +1 , 20                          | +0 , 12                                     | +1 , 31                            |
| Торнео . . . . .          | 65 49 , 7 | -4 , 00                          | +1 , 53                                     | -2 , 48                            |
| Stuoroiivi . . . . .      | 68 41 , 0 | +1 , 30                          | +0 , 64                                     | +1 , 93                            |
| Фуглесес . . . . .        | 70 40 , 2 | -0 , 18                          | -2 , 77                                     | -2 , 96                            |

При этом  $\xi_1$  исключено из числа определяемых неизвестных на основании условия  $\Sigma\xi = 0$  (см. «Высшая геодезия», часть 2, проф. Красовского, стр. 549).

Графа 3-я табл. 4 дает свободные члены уравнений

$$\xi_k = - \left( p_{\xi^k} - \frac{\Sigma p_{\xi^k}}{n+1} \right) \Delta a - \left( p_{\mu^k} - \frac{\Sigma p_{\mu^k}}{n+1} \right)^* \Delta \mu + (\varphi_k - B_k) - \frac{\Sigma \varphi_k - (B_k)}{n+1}$$

без введения топографо-изостатических редукций в астрономические широты, графа 5-я — свободные члены тех же уравнений при введении топографо-изостатических редукций. Таблице 4 соответствуют следующие нормальные уравнения при введении топографо-изостатических редукций в астрономические широты:

$$\begin{aligned} 106,4 u' + 14,7 w' &= +19,1 \\ 4,9 w' &= +3,1 \end{aligned} \quad \left. \right\}, \quad (34)$$

\* Чрез  $p_{\xi^k}$  и  $p_{\mu^k}$  обозначены здесь коэффициенты при  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  в обычном уравнении для  $\xi_k$  в градусном измерении по меридиану, т. е. когда  $\xi_1$  не исключается.

в которых:

$$u' = \frac{\Delta a}{a} \cdot 10\,000; \quad w' = \Delta \mu \cdot 10\,000.$$

Мы имеем из этих уравнений (34):

$$\begin{aligned} u' &= +0,156; \quad w' = +0,17; \\ a &= 6\,378\,421 \pm 132 \text{ м}; \\ \mu &= 1 : 292,1 \pm 8,5. \end{aligned}$$

Задаваясь сжатием  $\mu_1 = 1 : 299,15$  и  $\mu_2 = 1 : 297,0$ , получим из того же материала:  $a_1 = 6\,378\,503 \pm 117 \text{ м}$  и  $a_2 = 6\,378\,481 \pm 117 \text{ м}$ .

Гельмерт, не вводя топографо-изостатических редукций в астрономические широты, получил, задаваясь сжатием  $1 : 299,15$ , для большой полуоси  $a$  из дуги Струве значение:

$$a = 6\,378\,455 \pm 127; \quad \mu = 1 : 299,15$$

(сжатие  $\mu = 299,15$  соответствует эллипсоиду Бесселя).

Географическое положение дуги Струве, как видно, таково, что перемены сжатия сравнительно мало влияют на значение большой полуоси, выводимое из этой дуги. Поэтому очевидна большая ценность материала по дуге Струве для вывода именно большой полуоси земного эллипсоида.

Замечательно, что введение топографо-изостатических редукций влияет на вывод большой полуоси всего на 48 м, и, следовательно, ошибочность в отношении принимаемой глубины компенсации мало оказывается на значении большой полуоси. Таким образом местность, по которой проходит дуга Струве, должна быть признана исключительно благоприятной для вывода размеров земного эллипсоида (не предрешая его двухосности).

Недостатком материала по дуге является сравнительно малое число астрономических пунктов или, все равно, слишком большое расстояние между ними (в среднем 230 км). Как уже выяснялось в предыдущих параграфах, и на большой дуге все-таки важно выяснить детально ход уклонений отвесных линий, в особенности на конечных участках дуги. К сожалению, получив от Струве его материал, до империалистической войны ученые в России не ставили вовсе вопроса о необходимости его дальнейшего пополнения, считая, видимо, этот материал и безупречным и исчерпывающим. При примыкании бывшим Корпусом военных топографов рядов новой гриангуляции I класса к дуге Струве в период 1906—1912 гг. к задаче подошли узко и производственно геодезически и никаких новых астрономических определений на дуге Струве не сделали. Во время империалистической войны согласно заявлениям польских геодезистов многие пункты на дуге Струве в той ее части, которая теперь находится на территории Польши, утрачены вследствие огромных разрушений, вызванных действием немецкой тяжелой артиллерии. Однако к настоящему времени на этой польской части дуги Струве все-таки найдено несколько пунктов нашего градусного измерения: некоторые с неповрежденными центрами, некоторые с утраченными центрами, но с несомненностью установления места пункта до одного метра.

Несомненный пункт Струве с сохранившимся центром найден в Латвии близ Якобштадта; центры Струве найдены при новых астрономо-геодезических работах в Финляндии. Несомненно, ряд пунктов Струве

будет найден при соответствующих розысках в той части дуги, которая находится на территории СССР.

Таким образом ясно, что препятствий к определению ряда дополнительных астрономических пунктов на дуге Струве по существу не имеется.

Этому не должно мешать и то соображение, что в настоящее-де время выполняется новое градусное измерение в Польше по меридиану Варшавы, которое вместе с выполненными уже астрономо-геодезическими работами в Чехословакии, Румынии, Болгарии и Греции и выполняющимися работами в Литве, Латвии, Эстонии, Финляндии\*, Швеции и Норвегии доставит новую большую дугу градусного измерения по меридиану, простирающемуся от острова Крит на Средиземном море до Ледовитого океана, значительно превышающую по амплитуде дугу Струве и имеющую впоследствии соединиться с большой меридианной дугой англичан в Африке. Как уже указывалось в § 3 («Геодезист» № 6), является крайне желательным расположение меридианых дуг группами с тем, чтобы в каждой группе иметь две-три больших дуги, близких друг к другу. С этой точки зрения новая большая дуга по меридиану  $+23^{\circ}$  вовсе не упраздняет дуги Струве, так как только вместе с последней она сама получит надлежащую ценность.

Ход уклонений отвеса по дуге Струве не выявляется детально взятыми на ней астрономическими пунктами, но все-таки обработка этого материала дает основание заключить, что конечные участки дуги Старонекрасовка — Водолуй и Stuoroiivi — Fuglenes, оба, и тот и другой, дают изменения в уклонениях отвеса, которые обусловливают заметное, более чем на 100 м, увеличение большой полуоси  $a$  по сравнению с тем результатом, который получается из дуги без этих конечных ее участков.

Ввиду того что по отношению к эллипсоиду, выводимому из дуги Струве, уклонения отвеса получаются очень небольшими, изменения этих уклонений на  $4''$  в пределах конечных участков являются согласно указаниям § 2 («Геодезист» № 6) сильно влияющими на вывод из дуги.

Поэтому с известным основанием можно сказать, что из дуги Струве мы выводим вследствие характера ее конечных участков несколько преувеличенное значение большой полуоси земного эллипсоида. К востоку от дуги Струве всего на  $4^{\circ}$  долготы находится новая дуга меридиана Выгозеро — Пулково — Николаев-на-Черном море, измеренная в СССР за последнее десятилетие и простирающаяся от 64 до  $46\frac{1}{2}^{\circ}$  широты. При сжатии 1 : 299,15 эта дуга, достаточно большая, дает для большой полуоси результат на 200 м меньший, чем из дуги Струве при том же сжатии. Это еще раз подтверждает в известной степени соображение, что благодаря местным влияниям вывод большой полуоси из дуги Струве получается несколько преувеличенным. Высокая точность геодезических результатов по дуге Струве за исключением самой северной ее части между широтами  $65$  и  $70^{\circ}$  неоднократно была подтверждена при различных последующих сопоставлениях. Сопоставления длин сторон некоторых треугольников Струве в Норвегии с длинами тех же сторон, полученными из связи их с новыми базисами и новой триангуляцией в Норвегии, показывают, что точность результатов в самой северной части дуги Струве заметно меньшая, чем общая точность геодезических результатов по этой дуге. Но включение некоторых сторон

\* С перекидкой через Ботнический залив в его южной части.

Струве в новую триангуляцию в северной части Финляндии и в новые триангуляции в Швеции и Норвегии даст возможность переработать геодезический материал по дуге Струве в этой самой северной ее части и заметно его улучшить. (Понижение качества результатов в северной части дуги Струве, севернее 65-й параллели, объясняется тем, что в первой половине прошлого столетия здесь находилась территория совершенно безлюдная, лишенная всяких средств связи и путей сообщения, вследствие чего при наблюдениях углов использовались легкие десятиsekундные теодолиты, а геодезическими сигналами служили просто большие вехи).

Приведенные уже выше соображения о значении дуги Струве и уважение к этому грандиозному культурному предприятию побуждают выразить на ближайшее время следующие пожелания:

1. Необходимо выполнить ряд дополнительных астрономических определений по дуге Струве как в той ее части, которая осталась на территории СССР, так и на найденных в Польше и Латвии пунктах Струве, и в особенности в Бессарабской части дуги и в Норвегии.

2. Надлежит в части дуги, лежащей севернее 65-й параллели, выполнить надежные связи некоторых сторон триангуляции Струве с новыми базисами и триангуляциями в Финляндии, Швеции и Норвегии. Нужно отметить, что в Финляндии это неукоснительно соблюдается в новых геодезических работах, проходящих под руководством проф. Бонсдорфа, причем старые центры Струве находятся неповрежденными; вероятно, и в Швеции, и в Норвегии также найдется достаточное число неповрежденных центров Струве.

3. Надлежит в порядке международных геодезических предприятий выполнить вдоль всей дуги Струве определения силы тяжести, захватывая при среднем расстоянии маятниковых пунктов в 30 км друг от друга полосу шириной около 300 км с продолжением этой полосы на 150—200 км к югу от Старонекрасовки и к северу от Фугленеса (пользуясь определениями силы тяжести на море). Значение указанных гравиметрических обследований указано уже в § 4 («Геодезист» № 6), и мы на этом здесь снова останавливаться не станем, указав лишь, что только этот материал даст возможность выпрямить влияние конечных участков дуги. В заключение укажем, что если ввести неизвестные

$$u = \frac{\Delta a}{a} \cdot 20\,000 \text{ и } w = \Delta \mu \cdot 20\,000$$

и отнести уравнение градусных измерений по дуге Струве к эллипсоиду Кларка 1866 г. ( $a = 6\,378\,206$  м.  $\mu = 1 : 295,0$ ), то нормальные уравнения по дуге Струве напишутся так:

$$\begin{aligned} 26,6 u + 3,7w - 20,3 &= 0, \\ + 1,2w - 3,3 &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

причем в астрономические широты введены топографо-изостатические редукции по Хейфорду с глубиной компенсации  $T = 96$  км.

### § 66. Дуга западноевропейского меридiana

Первые научно поставленные астрономо-геодезические работы по этой дуге относятся еще ко времени Великой французской революции. К 60-м гг. прошлого столетия были закончены работы по этой дуге в пределах Европы, а в 1897 г. было выполнено французскими геодезистами соединение испанской триангуляции с французскими треуголь-

никами в Алжире. Дуга начинается с пункта *Saxaford* на Северошетландских островах, имеющего широту  $60^{\circ}49',6$  и долготу  $-0^{\circ}51'$ , проходит через Шотландию, Англию, Францию, затем следует в Испании берегом Средиземного моря и заканчивается в Алжире пунктом *Laghouat*, имеющим широту  $33^{\circ}48',0$  и долготу  $+2^{\circ}53'$ . Средняя долгота для дуги может быть принята равной  $0^{\circ}$ , широтная амплитуда равна  $27^{\circ}$ , средняя широта дуги  $\varphi_m = 47^{\circ}18'$ . Вывод большой полуоси эллипсоида из этой дуги в значительно большей степени зависит от принимаемого сжатия, чем для дуги Струве.

На дуге имеется всего 38 астрономических пунктов, но два из них—*Balta* и *Rosendael*—нужно считать дополнительными, так как *Balta* находится всего в нескольких милях от *Saxaford*, а *Rosendael* от *Nieuport*. Местность, по которой пролегает дуга, не может быть признана благоприятной для получения из имеющихся по ней астрономических материалов вывода большой полуоси и сжатия эллипсоида, не искаженных заметно местными влияниями. В самом деле, на севере дуга входит в Атлантический океан, в южной своей части она проходит в районе Пиринейских гор и пересекает Средиземное море, т. е. в этой части дуга располагается на территории грандиозного разлома земной коры и грандиозных смещений, проишедших некогда в слоях, непосредственно примыкающих к дневной поверхности Земли.

Если по дуге Струве топографо-изостатические редукции колеблются всего в пределах от  $+1'',5$  до  $-2'',8$ , то по дуге Западноевропейского меридиана—от  $+22'',4$  до  $-20'',0$  в южной ее части, от  $+6'',8$  до  $-4'',9$  в средней ее части и от  $+1'',3$  до  $-6'',1$  в северной части. Очевидно, что при обработке материалов по Западноевропейской дуге вопрос правильности введения редукций в астрономические широты получает особую остроту, и слабые стороны применения изостатической компенсации по Пратту или Эйри, отмеченные уже в § 4 («Геодезист» № 6), здесь скажутся полностью на выводимых из этой дуги размерах земного эллипсоида.

Обработка материалов по дуге Западноевропейского меридиана выполнялась различными учеными и в разное время. Наиболее ценные выводы принадлежат Шумману (R. Schumann „Der neue Westeuropäische Meridianbogen“. Verhandlungen der 15-ten Konferenz der internationalen Erdmessung) и Хейсканену („Die Erddimensionen nach den Europäischen Gradmessungen“).

Мы приводим далее табл. 5, заимствованную от части из приведенного выше труда Хейсканена, а от части из труда Шуммана «Der neue Westeuropäische Meridianbogen». В этой таблице геодезические широты  $B$ , а следовательно, и величины  $\varphi - B$  (четвертая графа таблицы) отнесены к эллипсоиду Бесселя ( $a = 6\ 377\ 397$  м,  $\mu = 1 : 299,15$ ) с исходным пунктом Пантеон, для которого, следовательно,  $B_1 = \varphi_1$ . Величины  $\varphi - B$  будут представлять собой свободные члены уравнений для  $\xi$ , если обработку градусного измерения вести без введения редукций (топографо-изостатических) в астрономические широты; именно этими величинами  $\varphi - B$ , стоящими в 4-й графе табл. 5, и пользовался Шумман при своих выводах по дуге Западноевропейского меридиана.

В 5-й графе таблицы находятся топографо-изостатические редукции, вычисленные Хейсканеном для глубины компенсации  $T = 96$  км. В графе 6-й помещены свободные члены в уравнении для  $\delta\xi$ , полученные так:

$$l_k = \varphi_k - B_k + r_m^k - r_m^{1,k} \cdot p_1^{1,k},$$

Таблица 5

## Данные по дуге Западноевропейского меридиана

| Названия пунктов              | Широта   | Долгота | $\varphi - B$ | Топографо-изостатическая<br>редукция | Свободный член<br>с введением<br>редукции | $\delta \xi$ |
|-------------------------------|----------|---------|---------------|--------------------------------------|---|--------------|
| 1. Saxaford . . . . .         | 60°49',6 | - 0°51' | - 7",59       | - 2",38                              | - 9",87                                   | - 1",85      |
| 2. Balta . . . . .            | 45 ,0    | - 0 47  | - 9 ,67       | - 1 ,02                              | -10 ,59                                   | - 2 ,61      |
| 3. Ben Hutig . . . . .        | 58 33 ,1 | - 4 31  | - 2 ,61       | - 6 ,09                              | - 8 ,60                                   | - 2 ,28      |
| 4. Cowhythe . . . . .         | 57 41 ,1 | - 2 40  | + 4 ,60       | - 4 ,33                              | + 0 ,37                                   | + 6 ,04      |
| 5. Great Stirling . . . . .   | 27 ,8    | - 1 47  | - 4 ,87       | - 0 ,08                              | - 4 ,85                                   | + 0 ,68      |
| 6. Kellie Law . . . . .       | 56 14 ,9 | - 2 47  | - 5 ,89       | + 1 ,32                              | - 4 ,47                                   | + 0 ,18      |
| 7. Calton Hill . . . . .      | 55 57 ,4 | - 3 11  | + 1 ,41       | - 3 ,79                              | - 2 ,28                                   | + 2 ,16      |
| 8. Durham . . . . .           | 54 46 ,1 | - 1 35  | - 2 ,67       | - 0 ,60                              | - 3 ,17                                   | + 0 ,44      |
| 9. Burleigh Moor . . . . .    | 34 ,3    | - 1 03  | + 0 ,38       | - 3 ,57                              | - 3 ,09                                   | + 0 ,39      |
| 10. Chifton Beacon . . . . .  | 53 27 ,5 | - 1 13  | - 0 ,06       | - 0 ,97                              | - 0 ,93                                   | + 1 ,79      |
| 11. Arbury Hill . . . . .     | 52 13 ,4 | - 1 13  | - 4 ,01       | + 0 ,30                              | - 3 ,61                                   | + 1 ,70      |
| 12. Greenwich . . . . .       | 51 28 ,6 | 0 00    | - 3 ,24       | - 1 ,09                              | - 4 ,23                                   | - 2 ,82      |
| 13. Nieuport . . . . .        | 7 ,8     | + 2 45  | - 1 ,08       | - 0 ,86                              | - 1 ,84                                   | - 0 ,66      |
| 14. Rosendael . . . . .       | 2 ,7     | + 2 28  | - 1 ,58       | - 0 ,98                              | - 2 ,46                                   | - 1 ,33      |
| 15. Lihons . . . . .          | 49 49 ,9 | + 2 45  | + 0 ,22       | - 0 ,14                              | + 0 ,18                                   | + 0 ,53      |
| 16. Pantheon . . . . .        | 48 50 ,8 | + 2 21  | 0 ,00         | - 0 ,10                              | 0 ,00                                     | - 0 ,26      |
| 17. Chevry . . . . .          | 0 ,5     | + 2 37  | + 2 ,49       | - 0 ,50                              | + 2 ,09                                   | + 1 ,32      |
| 18. Saligny le Vif . . . . .  | 47 2 ,7  | + 2 46  | + 3 ,57       | - 0 ,78                              | + 2 ,89                                   | + 1 ,54      |
| 19. Arpheille St. Pr. . . . . | 46 13 ,7 | + 2 40  | + 7 ,12       | - 4 ,93                              | + 2 ,29                                   | + 0 ,46      |
| 20. Puy de Dome . . . . .     | 45 46 ,5 | + 2 58  | + 7 ,91       | - 4 ,36                              | + 3 ,65                                   | + 1 ,55      |
| 21. Redex . . . . .           | 44 21 ,4 | + 2 34  | + 3 ,13       | - 0 ,08                              | + 3 ,15                                   | + 0 ,25      |
| 22. Carcassonne . . . . .     | 43 13 ,3 | + 2 21  | + 2 ,45       | - 1 ,06                              | + 1 ,49                                   | - 2 ,03      |
| 23. Rivesaltes . . . . .      | 42 45 ,2 | + 2 52  | + 1 ,20       | - 0 ,14                              | + 1 ,16                                   | - 2 ,62      |
| 24. Montolar . . . . .        | 41 38 ,5 | - 1 14  | + 5 ,82       | - 3 ,41                              | + 2 ,51                                   | - 1 ,86      |
| 25. Lerida . . . . .          | 37 ,0    | + 0 37  | + 2 ,01       | + 2 ,86                              | + 4 ,97                                   | + 0 ,59      |
| 26. Javalon . . . . .         | 40 13 ,8 | - 1 25  | + 2 ,50       | + 1 ,32                              | + 3 ,92                                   | - 1 ,18      |
| 27. Desierto . . . . .        | 5 ,0     | + 0 02  | - 1 ,85       | + 6 ,79                              | + 5 ,04                                   | - 0 ,13      |
| 28. Chinchilla . . . . .      | 38 55 ,2 | - 1 44  | + 5 ,22       | - 1 ,04                              | + 4 ,28                                   | - 1 ,46      |
| 29. Mola de Formentera . .    | 39 ,9    | + 1 32  | + 1 ,97       | + 6 ,16                              | + 8 ,23                                   | + 2 ,36      |
| 30. Tetica . . . . .          | 37 15 ,2 | - 2 25  | + 7 ,02       | + 2 ,09                              | + 9 ,21                                   | + 2 ,67      |
| 31. Roldan . . . . .          | 36 56 ,6 | - 1 55  | - 2 ,31       | + 9 ,03                              | + 6 ,82                                   | + 0 ,13      |
| 32. Conguros . . . . .        | 44 ,4    | - 3 25  | - 8 ,92       | +22 ,36                              | +13 ,54                                   | + 6 ,76      |
| 33. Mt. Sabiha . . . . .      | 35 39 ,6 | - 0 51  | +10 ,51       | -10 ,59                              | + 0 ,02                                   | - 7 ,24      |
| 34. Nemour's . . . . .        | 5 ,8     | - 1 51  | +11 ,63       | -15 ,70                              | - 3 ,95                                   | -11 ,48      |
| 35. Bouzareah . . . . .       | 35 48 ,0 | + 3 02  | + 6 ,56       | -19 ,98                              | -13 ,32                                   | -20 ,08      |
| 36. Alger . . . . .           | 45 ,1    | + 3 02  | - 5 ,37       | -18 ,00                              | -23 ,27                                   | -30 ,05      |
| 37. Guelt es Stel . . . . .   | 35 7 ,8  | + 3 01  | + 3 ,16       | - 1 ,00                              | + 2 ,26                                   | - 5 ,25      |
| 38. Laghouat . . . . .        | 33 48 ,0 | + 2 53  | + 1 ,83       | + 4 ,93                              | + 6 ,86                                   | - 2 ,24      |

где  $r_m^k$  и  $r_m^{-1}$  — редукции в пункте  $k$  и в Пантеоне, обратные по знаку величинам  $D$  формул (24) (см. «Геодезист» № 6); при этом член  $-r_0^{-1} \operatorname{tg} \varphi_1 p_4^k$  отброшен ввиду его ничтожности в данном случае.

Нужно заметить, что в табл. 5 редукции для всех пунктов, лежащих южнее Rivesaltes, получены не с полной надежностью ввиду отсутствия надлежащего картографического материала. Материал, представленный табл. 5, можно использовать различно: или принимая во внимание все пункты дуги, или отбрасывая часть пунктов ввиду явных и значительных местных влияний в этих пунктах.

Вывод Шуманна, основанный на использовании всех пунктов дуги, дает (без применения изостазии):

$$a = 6\ 378\ 486 \pm 380 \text{ м};$$

$$\mu = 1:281 \pm 11,5.$$

Хейсканен при глубине компенсации  $T = 96 \text{ км}$  получает такие решения:

1. При использовании пунктов табл. 5 за № 1—31, т. е. при отбрасывании семи пунктов, лежащих южнее Roldan:

$$a = 6\ 378\ 622 \pm 184 \text{ м};$$

$$\mu = 1:293,1 \pm 7,2.$$

2. При использовании только северной и средней частей дуги с пунктами за № 1—23, т. е. при отбрасывании пятнадцати пунктов, лежащих южнее Rivesaltes:

$$a = 6\ 378\ 564 \pm 223 \text{ м};$$

$$\mu = 1:293,1 \text{ (заранее принятые).}$$

3. При отбрасывании только двух пунктов — Alger и Bouzaréah:

$$a = 6\ 378\ 596 \pm 275 \text{ м};$$

$$\mu = 1:288,4 \pm 8,7.$$

Задаваясь сжатием 1 : 297, мы получим следующие значения большой полуоси, соответствующие вышеприведенным выводам Шуманна и Хейсканена:

$$\text{Шуманн . . . . . } a = 6\ 378\ 018 \pm 155 \text{ м}$$

$$\text{Хейсканен, первое решение } a = 6\ 378\ 532 \pm 90 \text{ ,}$$

$$\text{, второе } " a = 6\ 378\ 522 \pm 148 \text{ ,}$$

$$\text{, третье } " a = 6\ 378\ 346 \pm 94 \text{ ,}$$

Как видно, введение топографо-изостатических редукций влияет заметно на увеличение результата для большой полуоси (более чем на 300 м).

Хейсканен считает первое из своих решений имеющим наибольший вес, и потому принимает из Западноевропейского меридиана следующий вывод:

$$a = 6\ 378\ 622 \pm 184 \text{ м; } \mu = 1:293,1 \pm 7,2$$

или

$$a = 6\ 378\ 532 \pm 90 \text{ м при сжатии 1:297,0.}$$

В графе 7-й табл. 5 приведены значения  $\xi$ , которые представляют собой уклонания отвеса, соответствующие эллипсоиду с размерами согласно первому решению Хейсканена ( $a = 6\ 378\ 622$ ;  $\mu = 1:293,1$ ).

Изменение величин  $\delta\xi$  и чисел 4-й и 5-й граф табл. 5 показывают, что в самой северной, конечной части дуги мы имеем местные влияния, приводящие к увеличению выводимого из нашей дуги значения большой полуоси. Точно так же для пунктов за № 29, 30, 31, 32 совершенно ясно имеем резко выраженный характер величин  $\delta\xi$  и чисел в 4-й и 5-й графе табл. 5, при котором местные влияния на этом участке дуги приводят также к заметному увеличению выводимого из нее значения большой полуоси. Таким образом дуга, взятая в первом решении Хейсканена, имеет конечные участки — и северный и южный — с определенно систематическим ходом уклонений отвеса, влияющим одинаково по каждому из этих участков на вывод большой полуоси. Как уже указывалось в § 2 («Геодезист» № 6), такие влияния, имеющие место именно на конечных участках дуги, сказываются особенно резко. Поэтому отбрасывание всей части дуги южнее Roldan является необоснованным и приводящим к искусственному завершению градусного измерения как раз на местной волне геоида, а не на ее спаде.

В решении втором Хейсканена пункты за № 29, 30, 31, 32 не участвуют, и влияние указанной южной волны не сказывается, но значительное укорочение всей дуги в этом решении делает то, что влияние самого северного участка сказывается в такой же степени на выводах из второго решения как суммарное влияние того же северного и южного участка в решении первом.

Всматриваясь в значение  $\delta\xi$ , мы видим, что отмеченная выше волна, начинающаяся между Chinchilla и Mola de Formentera и вредно сказывающаяся на выводе из первого решения Хейсканена, кончается между Congueros и Mt. Sabiha, и далее к югу мы уже имеем волну обратного знака, сопровождающуюся, однако, чрезмерно большими влияниями (этого знака) на пунктах Mt. Sabiha, Nemours, Bouzatéah, Alger.

Пункты Congueros (32) и Mt. Sabiha (33) подлежат выбрасыванию, чтобы устраниТЬ резкие и чисто местные искривления профиля геоида между Roldan и Mt. Sabiha. Но значения величин  $\delta\xi$  для Mt. Sabiha, Nemours (34), Bouzatéah (35), Alger (36) указывают еще на значительную неправильность вывода топографо-изостатических редукций для этих пунктов: отрицательные значения этих редукций от  $-11$  до  $-20''$ , видимо, должны бы быть сведены всего к нескольким секундам.

Здесь сказывается несоответствие схемы изостатической компенсации по Пратту (или по Эйри) той сложной картине распределения масс, которая в действительности имеет место в районе Средиземного моря, пересекаемом нашей дугой. Поэтому введение в обработку дуги Западноевропейского меридiana участка ее от Enguiros до Guelt es Stel равносильно принятию во внимание большой, но фиктивной волны геоида, обусловленной, можно полагать, в значительной степени неверностью редукций астрономических широт для пунктов за № 32—36 и в натуре имеющей значительно меньшие размеры. Пункты Guelt es Stel и Laghouat удалены от африканского берега Средиземного моря на 200 и 350 км, и здесь влияние дислокаций на дне и берегах моря сказывается на вывод топографо-изостатических редукций в малой степени.

Если неправильно обрывать дугу на пункте Roldan, то неправильно принимать в расчет и пункты Congueros, Mt. Sabiha, Nemours, Bouzatéah и Alger. Однако нет препятствий к использованию пунктов Guelt es Stel и Laghouat, так как широтный интервал между Roldan и Guelt es Stel составляет всего  $1^{\circ}50'$  (т. е. менее чем средний интервал по дуге

Струве), уклонение же по долготе Laghouat от Roldan, равное  $4^{\circ}48'$ , одного порядка, как и уклонение по долготе Ben Hutig от Balta. Между тем, включая Guelt es Stel и Laghouat, мы тем самым на участке от Roldan до Guelt es Stel имеем волну геоида противоположного знака с волной на участке Chinchilla — Roldan и с волной на северном конечном участке Saxaford — Ben Hutig (1—3). Таким образом мы имеем основания не принять первое и второе решения Хейсканена, а в третье решение внести существенный корректив в виде отбрасывания в нем не только пунктов за № 35 и 36, но и за № 32, 33, 34. Думается, что это наше решение будет наиболее обоснованным по вышеприведенным соображениям.

Кроме того, следует считать пункты Saxaford и Balta за один, а также за один пункт Nieuport и Rosendael: этим будет достигаться более равномерное распределение пунктов по дуге и уменьшение того перевеса, который при существующем расположении астрономических пунктов на дуге Западноевропейского меридиана имеют северная и средняя ее части по сравнению с южной ее частью, в которой мы добавили еще выбросили пять пунктов. При соединении пунктов Saxaford и Balta, Nieuport и Rosendael мы брали среднее из уравнений погрешностей для Saxaford и Balta, а также для Nieuport и Rosendael и этим средним уравнением погрешностей приписывали вес, равный единице, как и всем уравнениям по каждому из остальных пунктов дуги. Таким образом вместо табл. 5 мы пользовались табл. 6.

Нормальные уравнения, соответствующие этой таблице и отнесенные, следовательно, к эллипсоиду Бесселя, являются такими:

$$\left. \begin{aligned} 31,03\delta\xi_k - 18,04u' + 22,98w' + 23,91 &= 0; \\ + 241,99u' - 103,00w' - 358,95 &= 0; \\ + 59,41w' + 142,60 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$u' = 10\,000 \frac{\Delta a}{a}; \quad w' = 10\,000 \Delta \mu.$$

$\delta\xi_k$  и  $\delta\xi_1$  — остаточное уклонение отвеса в пункте с номером  $k$  и в Пантеоне по введении в астрономические широты топографо-изостатических редукций.

Отнесение уравнений к эллипсоиду Кларка 1866 г. приводит к таким результатам:

$$\left. \begin{aligned} 31,03\delta\xi_1 - 9,02u + 11,49w + 11,06 &= 0 \\ + 60,50u - 25,75w - 48,40 &= 0 \\ + 14,85w + 18,93 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$u = 20\,000 \frac{\Delta a}{a}; \quad w = 20\,000 \Delta \mu;$$

$$u = +1,316; \quad \Delta a = +420 \text{ м};$$

$$w = +1,381; \quad \Delta \mu = +0,0000691.$$

$$\delta\xi_1 = -0'',48;$$

Таблица 6

Данные по дуге Западноевропейского меридиана в решении  
проф. Красовского

| Название пунктов                 | Широта   | Долгота | $\varphi - B$ | Топографо-изостатическая редукция | Свободный член с зведением редукции | $\delta \xi$ |
|----------------------------------|----------|---------|---------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--------------|
| 1. Saxaford-Balta . . . . .      | 60°47',3 | — 0°49' | — 8",63       | — 1",70                           | — 10",23                            | — 2",47      |
| 2. Ben Hutig . . . . .           | 58 33 ,1 | — 4 31  | — 2 ,61       | — 6 ,09                           | — 8 ,60                             | — 2 ,55      |
| 3. Cowhythe . . . . .            | 57 41 ,1 | — 2 40  | + 4 ,60       | — 4 ,33                           | + 0 ,37                             | + 6 ,75      |
| 4. Great Stirling . . . . .      | 27 ,8    | — 1 47  | — 4 ,87       | — 0 ,08                           | — 4 ,85                             | + 0 ,37      |
| 5. Kellie Law . . . . .          | 56 14 ,9 | — 2 47  | — 5 ,89       | + 1 ,32                           | — 4 ,47                             | — 0 ,16      |
| 6. Calton Hill . . . . .         | 55 57 ,4 | — 3 11  | + 1 ,41       | — 3 ,79                           | — 2 ,28                             | + 2 ,83      |
| 7. Durham . . . . .              | 54 46 ,1 | — 1 35  | — 2 ,67       | — 0 ,60                           | — 3 ,17                             | + 0 ,10      |
| 8. Burleigh Moor . . . . .       | 34 ,3    | — 1 03  | + 0 ,38       | — 3 ,57                           | — 3 ,09                             | + 0 ,04      |
| 9. Chifton Beacon . . . . .      | 53 27 ,5 | — 1 13  | — 0 ,06       | — 0 ,97                           | — 0 ,93                             | + 1 ,45      |
| 10. Arbury Hill . . . . .        | 52 13 ,4 | — 1 13  | — 4 ,01       | + 0 ,30                           | — 3 ,61                             | — 2 ,04      |
| 11. Greenwich . . . . .          | 51 28 ,6 | 0 00    | — 3 ,24       | — 1 ,09                           | — 4 ,23                             | — 3 ,13      |
| 12. Nieuport-Rosendael . . . . . | 5 ,3     | + 2 36  | — 1 ,33       | — 0 ,92                           | — 2 ,15                             | — 1 ,20      |
| 13. Lihons . . . . .             | 49 49 ,9 | + 2 45  | + 0 ,22       | — 0 ,14                           | + 0 ,18                             | + 0 ,26      |
| 14. Pantheon . . . . .           | 48 50,8  | + 2 21  | 0 ,00         | — 0 ,10                           | 0 ,00                               | — 0 ,48      |
| 15. Chevry . . . . .             | 0 ,5     | + 2 37  | + 2 ,49       | — 0 ,50                           | + 2 ,09                             | + 1 ,14      |
| 16. Saligny le Vif . . . . .     | 47 2 ,7  | + 2 46  | + 3 ,57       | — 0 ,78                           | + 2 ,89                             | + 1 ,40      |
| 17. Arpheille St. Pr. . . . .    | 46 13 ,7 | + 2 40  | + 7 ,12       | — 4 ,93                           | + 2 ,29                             | + 0 ,40      |
| 18. Puy de Dome . . . . .        | 45 46 ,5 | + 2 58  | + 7 ,91       | — 4 ,36                           | + 3 ,65                             | + 1 ,52      |
| 19. Redex . . . . .              | 44 21 ,4 | + 2 34  | + 3 ,13       | — 0 ,08                           | + 3 ,15                             | + 0 ,32      |
| 20. Carcassonne . . . . .        | 43 13 ,3 | + 2 21  | + 2 ,45       | — 1 ,06                           | + 1 ,49                             | — 1 ,87      |
| 21. Rivesaltes . . . . .         | 42 45 ,2 | + 2 52  | + 1 ,20       | — 0 ,14                           | + 1 ,16                             | — 2 ,41      |
| 22. Montolar . . . . .           | 41 38 ,5 | — 1 14  | + 5 ,82       | — 3 ,41                           | + 2 ,51                             | — 1 ,74      |
| 23. Lerida . . . . .             | 37 ,0    | + 0 37  | + 2 ,01       | + 2 ,86                           | + 4 ,97                             | + 0 ,90      |
| 24. Javalon . . . . .            | 40 13 ,8 | — 1 25  | + 2 ,50       | + 1 ,32                           | + 3 ,92                             | — 0 ,73      |
| 25. Desierto . . . . .           | 5 ,0     | + 0 02  | — 1 ,85       | + 6 ,79                           | + 5 ,04                             | + 0 ,35      |
| 26. Chinchilla . . . . .         | 38 55 ,2 | — 1 44  | + 5 ,22       | — 1 ,04                           | + 4 ,28                             | — 0 ,85      |
| 27. Mola de Formentera . . . . . | 39 ,9    | + 1 32  | + 1 ,97       | + 6 ,16                           | + 8 ,23                             | + 2 ,98      |
| 28. Tetica . . . . .             | 37 15 ,2 | — 2 25  | + 7 ,02       | + 2 ,09                           | + 9 ,21                             | + 3 ,56      |
| 29. Roldan . . . . .             | 36 56 ,6 | — 1 55  | — 2 ,31       | + 9 ,03                           | + 6 ,82                             | + 1 ,00      |
| 30. Guelt es Stel . . . . .      | 35 7 ,8  | + 3 01  | + 3 ,16       | — 1 ,00                           | + 2 ,26                             | — 4 ,07      |
| 31. Laghouat . . . . .           | 33 48 ,0 | + 2 53  | + 1 ,83       | + 4 ,93                           | + 6 ,86                             | + 0 ,16      |

Следовательно, наш результат по дуге Западноевропейского меридиана будет таков:

$$a = 6\ 378\ 626 \text{ м} \pm 220 \text{ м};$$

$$\mu = 1:289,61 \pm 7,6.$$

Исключая из уравнений (37) известное  $\delta\xi_1$ , получим:

$$\begin{aligned} +57,88 u - 22,41 w - 45,19 &= 0 \\ -22,41 u + 10,60 w + 14,84 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда при сжатии  $1 : 297$  ( $w = +0,46$ ) получаем:

$$a = 6\ 378\ 398 \text{ м} \pm 90 \text{ м}.$$

В табл. 6  $\Sigma\xi^2 = 147,68$ . Отсюда ошибка единицы веса  $\epsilon = \pm 2'',29$ . Исходя из нее и были рассчитаны средние ошибки большой полуоси и сжатия в этом решении по Западноевропейскому меридиану, предлагающим Ф. Н. Красовским. Несомненно, оно имеет, в смысле приближения к размерам земного эллипсоида, больший вес, хотя средняя ошибка полуоси  $a$  получается несколько большей, чем в первом решении Хейканена.

Если для дуги Струве мы имеем недостаток астрономических пунктов, то этого нельзя сказать по отношению к дуге Западноевропейского меридиана, хотя и приходится указать на желательность определения новых астрономических пунктов в полосе, рассекаемой Западноевропейским меридианом, чтобы иметь вдоль него площадной охват.

Применение топографо-изостатических редукций при обработке этой дуги сопровождается определенным успехом в смысле заметного уменьшения остаточных уклонений отвеса и заметного повышения отсюда точности выводов ( $\pm 7,6$  для сжатия вместо  $\pm 11,5$  по Шуманну и  $\pm 220 \text{ м}$  вместо  $\pm 380 \text{ м}$  для большой полуоси по Шуманну). Но возможно, что глубину компенсации следует принимать равной не 96, а 60 км. Во всяком случае следует вычислить топографо-изостатические редукции по этой дуге и для глубины компенсации  $T = 60 \text{ км}$  и на основании полученного материала искать новое решение. Но это будет все-таки полумерой, так как, очевидно, для ряда точек по дуге, лежащих вблизи берегов и в районе Средиземного моря, топографо-изостатические редукции не дадут результата вследствие крупного несоответствия здесь действительного строения в верхних слоях земной коры схеме Пратта или Эйри. Если в Англии, Франции и Испании имеются уже значительные результаты по определениям силы тяжести, то все-таки они должны быть дополнены, и в особенности необходимо выполнить новые определения силы тяжести в Атлантическом океане, в Средиземном море и в Алжире, чтобы получить возможность вывода уклонений отвеса гравиметрическим путем, хотя бы ограничиваясь для каждой астрономической станции по дуге Западноевропейского меридиана учетом зон в радиусе 400 км\*. Только тогда при совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических результатов можно будет надежными методами подойти к вопросу определения редукций в астрономические широты пунктов Западноевропейского меридиана с целью получения по этой дуге уравнений, относящихся

\* Конечно, при учете влияния Альп, Аппенинского хребта и пр., для ряда пунктов этот радиус должен быть значительно увеличен, но обеспечивающие это увеличение гравиметрические материалы уже имеются.

к общему земному эллипсоиду. Современные же выводы (Хейсканена или Красовского), характеризующиеся при заданном сжатии средней ошибкой в большой полуоси всего в  $\pm 90$  м, не имеют, конечно, значения вывода размеров эллипса, наилучше подходящего к рассматриваемой дуге; приближение же их к размерам общего земного эллипса остается, с другой стороны, неизвестным, и на основании изложенного в § 2 («Геодезист» № 6) вовсе не может быть признано имеющим среднюю ошибку  $\pm 90$  м.

К сожалению, приходится констатировать, что получение надлежащего материала по дуге Западноевропейского меридиана есть все-таки еще дело будущего, хотя работы по этому меридиану и имеют за собой 130-летнюю давность.

Энергичные усилия международных геодезических организаций могут привести, однако, это дело к надлежащему концу в сравнительно небольшой срок.

### § 6в. Западноевропейская дуга по 52-й параллели

Как известно, еще по предложению В. Струве дуга по 52-й параллели должна была бы включить в себя не только западноевропейские триангуляции по этой параллели, но и русские — от Варшавы до Орска. Однако русские триангуляции, проложенные б. Корпусом военных топографов в 30 и 40-х гг. прошлого столетия в Польше до Бобруйска, а затем в 60 и 70-х гг. того же столетия от Бобруйска через Белоруссию на Орел, а далее на Липецк, Саратов, Самару и Оренбург до Орска, не доставили надлежащих по точности материалов для использования их в целях градусного измерения. В причинах неудачи этого большого предприятия со стороны России теперь трудно разбираться. Но одной из причин, несомненно, является то, что некоторые части этих старых русских триангуляций были проложены ранее, чем к ним было предъявлено требование использования результатов их в целях градусного измерения; другими словами, некоторые части триангуляций по 52-й параллели были проложены, считаясь лишь с картографическими требованиями к ним, имели характер местных «погубернских» триангуляций, лишь случайно попавших на 52-ю параллель или вблизи нее; соединение этих триангуляций в одну цепь по 52-й параллели не входили в планы работ при их исполнении, и, очевидно, впоследствии эти соединения были выполнены с дефектами, приведшими к невязкам в базисах до 1 : 4000 и к невязкам в уравнениях Лапласа до 30''. Только западная часть — от бывшей границы с Пруссией до Бобруйска, исполненная под непосредственным руководством Теннера, оказалась пригодной к использованию в целях градусного измерения из всех старых русских триангуляций по дуге 52-й параллели.

Таким образом дуга по 52-й параллели от юго-западных берегов Ирландии до Орска свелась к западноевропейской дуге по той же параллели от Feaghmain на юго-западном берегу Ирландии до Бобруйска, имея протяжение по долготе  $39^{\circ}30'$  вместо намеченного Струве протяжения в  $70^{\circ}$  по долготе.

Определения долгот по дуге как в России, так и в Западной Европе были исполнены русскими военными геодезистами. Но большая часть этих определений была переделана впоследствии германскими геодезистами под руководством Прусского геодезического института. Вообще, начиная с 80-х гг. прошлого столетия под руководством и при участии

Прусского геодезического института в Германии выполняются точные астрономические работы на ряде пунктов по дуге 52-й параллели и, кроме того, на ряде пунктов геодезической сети Германии, лежащих к северу и к югу от 52-й параллели; в результате в средней части дуги получилась астрономо-геодезическая сеть между параллелями от 50 до  $55^{\circ}$  широты, т.е. получился известный *площадной* охват территории, по которой пролегает средняя часть дуги 52-й параллели, что, конечно, является существенным. Соединение германских триангуляций с датскими позволило расширить эту астрономо-геодезическую сеть к северу в средней ее части, а соединение германских триангуляций с русскими дало расширение этой сети к северу в восточной ее части — до параллели  $58^{\circ}22'$  (Дерпта). Всего в результате на дуге получилось 48 астрономических пунктов.

Местность, по которой пролегает западноевропейская дуга 52-й параллели, в общем должна быть признана достаточно благоприятной для получения из астрономических материалов по ней достаточно надежных выводов.

Обработкой материала по этой дуге занимались Гельмерт, затем Крюгер и, наконец, Хейсканен. Гельмерт и Крюгер дали, проведя соответствующие уравнивания, уравнения уклонений отвеса (уравнения для  $\xi$  и  $\eta$ ) для всех 48 астрономических пунктов, выраженные через  $\xi_1$  и  $\eta_1$  для пункта Rauenberg (являющегося центральным на дуге и исходным при обработке германских триангуляций), и через поправки  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  к большой полуоси и сжатию Бесселева эллипсоида без введения, однако, топографо-изостатических редукций в астрономические широты и долготы. (В уравнениях Гельмерта и Крюгера для  $\xi$  и  $\eta$ , кроме  $\xi_1, \eta_1, \Delta a$  и  $\Delta \mu$ , входят еще в качестве неизвестных поправки наблюденных астрономических широт, долгот и азимутов, которыми, однако, пренебрегают при выводе размеров эллипсоида). Хейсканеном были подсчитаны топографо-изостатические редукции для 48 пунктов западноевропейской астрономо-геодезической сети. Результаты этих подсчетов вместе с разностями геодезических и астрономических широт и долгот, заимствованных у Гельмерта и Крюгера, приводятся в «Die Erddimensionen» Хейсканена.

Хейсканен делает попытку вывести из уравнений для  $\eta$  по западноевропейской дуге 52-й параллели величины и  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ , причем неизвестное  $\xi_1$  определяется из уравнений для  $\xi$ . Однако, как и следовало ожидать, вследствие малого протяжения обрабатываемой таким способом астрономо-геодезической сети по широте, при этой попытке получаются для полуоси и сжатия эллипса совсем неприемлемые результаты и притом со средними ошибками в знаменателе сжатия  $\pm 22,8$  единицы и в полуоси  $\pm 1008$  м. Впоследствии Хейсканен сам отбрасывает возможность вывода и  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  из сети вдоль 52-й параллели. Мы определенно считаем, что в этой сети совершенно бесполезно делать какие-нибудь расчеты из уравнений для  $\xi$ , а из уравнений для  $\eta$  можно выводить только  $\eta_1$  и  $\Delta a$  при заданном сжатии  $\mu$ . Мало того, мы считаем, что не для всех пунктов этой сети следует использовать даже уравнения для  $\eta$  в целях вывода только  $\eta_1$  и  $\Delta a$  при заданном сжатии. В самом деле, приходится отметить, что дуга 52-й параллели пересекает в пункте Белин дугу градусного измерения Струве; поэтому, естественно, возникает мысль включить в сеть по 52-й параллели ряд пунктов Струве, для которых имеются астрономические долготы или для которых таковые могут быть заменены астрономическими азимутами. Отсю-

да вытекает включение разными авторами в вывод размеров эллипсоида из сети по 52-й параллели пунктов Струве: Белин, Немеж, Якобштадт и Дерпт. Но если мы, как сказано уже выше, не применяем совместной обработки уравнений для  $\xi$  и для  $\eta$ , то составление уравнений только для  $\eta$  в пунктах Якобштадт и Дерпт и последующее использование этих уравнений нерационально, так как на параллелях этих пунктов (или вблизи этих параллелей) более астрономических пунктов не имеется за исключением датского пункта Teglhoi, удаленного, однако, от них на  $16^\circ$  по долготе, и пункта Memel, удаленного от них на  $8^\circ$ ; нерациональность эта обоснована уже в § 3 («Геодезист» № 6). Все это происходит потому, что и Якобштадт и Дерпт находятся «на отлете» от сети вдоль 52-й параллели, имея первый широту  $56^\circ 30'$  и второй широту  $58^\circ 22'$ , в то время как северная граница сети по 52-й параллели приходится, собственно, на параллели  $54^\circ$ , и астрономических пунктов, лежащих севернее этой параллели, в полосе к Западу на  $8^\circ$  от меридиана Дерпта или Якобштадта, совсем не имеется.

Пункт Teglhoi лежит на параллели  $57^\circ 30'$  и также приходится «на отлете» от всех других пунктов; ближайший к нему пункт Копенгаген, широта которого  $55^\circ 40'$ , хотя и заметно выдается за северную границу сети 52-й параллели, но все-таки еще может быть использован, так как вблизи его параллели лежат пункты Helgoland, Rugard, Knivsberg, Königsberg, Memel, Nemesch. Кроме того, в пункте Teglhoi не имеется астрономической долготы, а астрономический азимут не имеет контроля. Вообще, если используем только уравнения для  $\eta$ , то распространение сети к северу и к югу приходится ограничивать наличием пунктов, группирующихся вдоль параллели северной граничной или южной граничной соответственно без того, чтобы учитывать отдельные пункты, лежащие далеко за такими параллелями.

По этим соображениям пункты Дерпт, Якобштадт и Teglhoi были мною отброшены; их можно было бы использовать только в случае совместной обработки уравнений для  $\eta$  и для  $\xi$ , но тогда сеть вдоль 52-параллели должна была бы иметь распространение по широте не менее  $12^\circ$  и получить значение астрономо-геодезической сети всей Западной Европы только без Испании, Италии, Скандинавии и Балканского полуострова. Далее пункт градусного измерения Струве — Белин с широтой  $52^\circ 2',7$  не имеет астрономически определенной долготы и при составлении уравнения для  $\eta$  в Белине приходится использовать астрономический и геодезический азимуты по геодезической линии Белин — Гродно. Уже не говоря про то, что в этом случае уравнение для  $\eta$  в Белине должно получить значительно меньший вес, чем уравнение для  $\eta$  в пунктах с определенными астрономическими долготами, приходится указать, что для вывода геодезического азимута в Белине используется часть триангуляционного ряда Гродно—Бобруйск, в котором свободный член азимутального условия достигает  $20''$ . Мы считаем, что пункт Белин до определения в нем астрономической долготы не следует вводить в пункты градусного измерения по 52-й параллели.

Нужно сказать, что еще ряд пунктов по 52-й параллели: Teglhoi, Gollenberg, Turmberg, Trunz, Dietrichshagen, Kernsdorf, Moschin — не имеет астрономически определенных долгот\*. Однако для всех их за исключением Moschin и Teglhoi уравнение для  $\eta$  получается из сравнения геодезических и астрономических азимутов двукратно или даже

\* Имеют астрономические определения широты и азимута.

трекратно вследствие геодезической связи каждого из этих пунктов с двумя или тремя лапласовыми пунктами, недалеко сравнительно от них расположеными, причем геодезические связи эти в смысле передачи геодезических азимутов выполнены очень надежно. Для указанных пунктов уравнения для  $\eta$ , полученные в результате сравнения астрономических и геодезических азимутов при использовании всех перелач, имеют вес, как показывают проделанные мною подсчеты, около 0,8, если вес обычного уравнения для  $\eta$ , получаемого из сравнения астрономической и геодезической долготы, принять равным единице. Такое понижение веса является несущественным, в особенности если принять в расчет незначительное количество пунктов, в которых отсутствуют астрономически определенные долготы по сравнению с общим количеством астропунктов на дуге.

Поэтому уравнения для  $\eta$  в пунктах Gollenberg, Turmberg, Trunz, Dietrichshagen были приняты имеющими вес единицы.

Пункт Kernsdorf был мной отброшен ввиду значительного чисто местного уклонения отвеса в нем в первом вертикале (до 6'').

В результате указанных соображений мною было использовано 40 астрономических пунктов из 47, используемых Хейсканеном. При составлении уравнений для  $\eta$  были использованы коэффициенты при неизвестных  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $\Delta \rho$  и свободные члены, приведенные в Veröff. des Preussischen Geodätischen Instituts „Lotabweichungen“, Heft IV и Heft V, т. е. при составлении этих уравнений за исходный пункт с  $\xi_1$  и  $\eta_1$  был принят Rauenberg, а за референц эллипсоид — эллипсоид по Бесселю. Далее в свободные члены были введены топографо-изостатические редукции, заимствованные из труда Хейсканена „Die Erddimensionen nach den Europäischen Gradmessungen, Tabelle V, Seite 18“. Мы приводим следующую таблицу 7 уравнений погрешности по 52-й параллели.

Если напишем уравнение для  $\eta_k$  в таком виде:

$$\eta_k = (q_1^k) \xi_1 + (q_4^k) \eta_1 - (q_5^k) u' - (q_6^k) w' + (\lambda_k - L_k) \cos B_k,$$

то по введению топографо-изостатических редукций в астрономические широты и долготы будем иметь:

$$\delta \eta_k = (q_1^k) \delta \xi_1 + (q_4^k) \delta \eta_1 - (q_5^k) u' - (q_6^k) w' + (\lambda_k - L_k) \cos B_k + r_p^k - (q_4^k) r_p^1 - (q_1^k) r_m$$

причем под  $\delta \eta_k$ ,  $\delta \xi_1$ ,  $\delta \eta_1$  понимаются тогда остаточные уклонения отвеса. В нашем случае:

$$r_p^1 = 0'',00; \quad r_m^1 = -0'',40.$$

Поэтому:

$$\delta \eta_k = (q_1^k) \delta \xi_1 + (q_4^k) \delta \eta_1 - (q_5^k) u' - (q_6^k) w' + (\lambda_k - L_k) \cos B_k + r_p^k + 0'',40(q_1^k).$$

Далее положим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_1 &= \delta \tilde{\xi}_1 + \Delta \xi_1 \\ \delta \tilde{\xi}_1 &= +2'',6 + \Delta \tilde{\xi}_1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

т. е. примем  $\delta \tilde{\xi}_1 = +2'',60$ , чем выделим, согласно выводам Bergroth и Хейсканена, главную часть в неизвестном  $\delta \xi_1$  (конечно, можно было и не делать выделения этой главной части в  $\delta \xi_1$ ).

Тогда напишем:

$$\delta\eta_k = (q_1^k)\Delta\xi_1 + (q_4^k)\delta\eta_1 - (q_5^k)u' - (q_6^k)w' + (\lambda_k - L_k)\cos B_k + r_p^k + 3'',00(q_1^k) \quad (40)$$

В табл. 7 под величинами  $l$ , стоящими в 8-й графе, понимается согласно (40) следующее:

$$l_k = (\lambda_k - L_k)\cos B_k + r_p^k + 3'',00(q_1^k).$$

В графах 4, 5, 6 и 7-й соответственно даны коэффициенты  $(q_1^k)$ ,  $(q_4^k)$ ,  $-(q_5^k)$ ,  $-(q_6^k)$ , взятые из *Lotabweichungen*, Heft IV и Heft V, оттуда же взяты  $(\lambda_k - L_k)^*$ , величины же  $r_p^k$  взяты из Хейсканена „Die Erddimensionen“, стр. 18.

Нормальные уравнения, соответствующие приведенным в табл. 7 уравнениям для  $\delta\eta$  по 52-й параллели, будут следующими:

$$\left. \begin{array}{l} 0,485\Delta\xi_1 - 0,297\delta\eta_1 + 7,709u' + 4,842w' - 7,526 = 0 \\ + 38,585\delta\eta_1 - 5,644u' - 3,559w' - 80,18 = 0 \\ + 121,705u' + 76,451w' - 116,04 = 0 \\ + 48,024w' - 72,92 = 0 \end{array} \right\}. \quad (41)$$

К этим уравнениям (41) мы должны присоединить еще одно нормальное уравнение, получаемое из уравнений для  $\xi$ , именно то, в котором  $\Delta\xi_1$  входит с квадратическим коэффициентом; такое уравнение нам нужно для вывода  $\Delta\xi_1$  и исключения его из числа неизвестных в системе уравнений (41).

В труде Хейсканена это уравнение представлено в таком виде:

$$46,4\Delta\xi_1 - 0,5\delta\eta_1 - 6,6u' - 2,5w' = + 57,0,$$

причем  $\delta\xi_1^\circ = + 2'',03$  и  $\eta_1' = + 2'',81$  и уравнение отнесено к эллипсоиду не Бесселя, а Кларка 1886 г., но, видимо, свободный член ошибочен на  $+ 5,4$ .

Делая перевод на эллипсоид Бесселя и на наши значения неизвестных  $\delta\xi^\circ$  и  $\delta\eta_1^\circ$ , получим:

$$46,4\Delta\xi_1 - 0,5\delta\eta_1 - 6,6u' - 2,5w' = + 13,4. \quad (42)$$

Если непосредственно сделаем вычисления уравнения (42) на эллипсоиде Бесселя, т. е. пользуясь значениями  $\varphi_k - B_k$  на эллипсоиде Бесселя по IV и V Heft *Lotabweichungen* и нашими значениями  $\delta\xi_1^\circ = + 2'',60$  и  $\eta_1' = 0'',00$ , то получим:

$$46,4\Delta\xi_1 - 0,5\delta\eta_1 - 6,6u' - 2,5w' = + 13,7. \quad (43)$$

Для получения  $\Delta\xi_1$  уравнения (43) и (41) должно решать путем приближений: сначала в (43) в левой части его отбросить все члены, кроме первого, и получить  $\Delta\xi_1$ , которое подставить в (41) после решения (41) относительно  $\delta\eta_1$  и  $u'$ ; задаваясь некоторым значением  $w'$ , подставить полученные значения  $\delta\eta_1$  и  $u'$  и принятное значение  $w'$  в (43) и тогда получить окончательное значение  $\Delta\xi_1$ .

Мы поступили несколько иначе. Базируясь на решениях Шуманна и Хейсканена, мы приняли:

$$u' = + 1,1; \quad w' = 0,1; \quad \delta\eta_1 = + 2'',0$$

и после этого получили уравнение (43) в таком виде:

$$46,4\Delta\xi_1 = + 22,3;$$

$$\Delta\xi_1 = + 0'',48.$$

\* А для Grossenchain und Scheekoppe из „Berroth. Meridianbogen Grossenhain — Pola“.

Таблица 7  
Уравнения для  $\delta\eta$  по 52-й параллели

| Название пунктов                  | $\varphi$ | $\lambda$ | $\Delta\xi_1$ | $\delta\eta_1$ | $u'$  | $w'$  | $i$     | Топо-изост. ре-<br>зульти. $r_p^k$ |
|-----------------------------------|-----------|-----------|---------------|----------------|-------|-------|---------|------------------------------------|
| 1. Rauenberg . .                  | 52°27',2  | +13°22',1 | 0",00         | 1",00          | 0,00  | 0,00  | 0",000  | 0",00                              |
| 2. Feaghmain . .                  | 51 56 ,4  | -10 20 ,3 | -0 ,32        | +0 ,95         | -5,11 | -3,21 | +4 ,033 | +3 ,96                             |
| 3. Haverfordwest.                 | 51 47 ,9  | - 4 57 ,8 | -0 ,25        | +0 ,96         | -3,98 | -2,50 | +5 ,994 | +2 ,07                             |
| 4. Greenwich . .                  | 51 28 ,6  | 0 0 ,0    | -0 ,18        | +0 ,98         | -2,91 | -1,83 | +2 ,593 | -0 ,32                             |
| 5. Rosendael . .                  | 51 2 ,7   | + 2 24 ,7 | -0 ,15        | +0 ,99         | -2,40 | -1,51 | -0 ,988 | +0 ,27                             |
| 6. Nieuport . . .                 | 51 7 ,8   | + 2 45 ,5 | -0 ,15        | +0 ,99         | -2,39 | -1,51 | -0 ,829 | +0 ,25                             |
| 7. Grossenhain .                  | 51 18 ,3  | +13 33 ,3 | 0 ,00         | +1 ,00         | +0,04 | +0,02 | -3 ,872 | +0 ,40                             |
| 8. Schneekoppe .                  | 50 44 ,3  | +15 44 ,5 | 0 ,00         | +1 ,00         | +0,52 | +0,33 | -6 ,012 | -4 ,73                             |
| 9—10. Breslau —<br>Rosenth. . . . | 51 7 ,5   | +17 2 ,8  | +0 ,05        | +1 ,00         | +0,80 | +0,51 | +0 ,396 | -0 ,40                             |
| 11. Trockenberg .                 | 50 24 ,7  | +18 52 ,6 | +0 ,08        | +1 ,00         | +1,21 | +0,76 | -2 ,657 | +0 ,72                             |
| 12. Mirow . . . .                 | 50 48 ,7  | +19 11 ,2 | +0 ,08        | +1 ,00         | +1,28 | +0,80 | +0 ,136 | +0 ,82                             |
| 13. Warschau . .                  | 52 13 ,1  | +21 1 ,8  | +0 ,11        | +1 ,00         | +1,68 | +1,05 | -1 ,142 | +0 ,18                             |
| 14. Leipzig . . .                 | 51 20 ,3  | +12 22 ,5 | -0 ,01        | +1 ,00         | -0,22 | -0,14 | +0 ,921 | -0 ,23                             |
| 15. Brocken . . .                 | 51 48 ,2  | +10 37 ,1 | -0 ,04        | +1 ,00         | -0,60 | -0,38 | -1 ,693 | -2 ,73                             |
| 16. Göttingen . .                 | 51 31 ,8  | + 9 56 ,6 | -0 ,05        | +1 ,00         | -0,75 | -0,47 | -2 ,160 | +1 ,71                             |
| 17. Bonn . . . .                  | 50 43 ,7  | + 7 5 ,8  | -0 ,08        | +1 ,00         | -1,37 | -0,86 | -3 ,856 | +0 ,92                             |
| 18. Ubagsberg . .                 | 50 50 ,9  | + 5 57 ,1 | -0 ,09        | +1 ,00         | -1,62 | -1,02 | -3 ,183 | +1 ,29                             |
| 19. Wilhelmshafen                 | 53 31 ,9  | + 8 8 ,8  | -0 ,07        | +1 ,00         | -1,14 | -0,72 | -1 ,300 | +0 ,05                             |
| 20. Kiel . . . . .                | 54 20 ,5  | +10 8 ,9  | -0 ,04        | +1 ,00         | -0,71 | -0,44 | -1 ,741 | -0 ,10                             |
| 21. Helgoland . .                 | 54 10 ,8  | + 7 53 ,0 | -0 ,07        | +1 ,00         | -1,20 | -0,75 | -2 ,273 | +0 ,40                             |
| 22. Rugard . . . .                | 54 25 ,3  | +13 26 ,8 | 0 ,00         | +0,99          | +0,02 | +0,01 | +1 ,421 | 0 ,00                              |
| 23. Knivsberg . .                 | 55 8 ,1   | + 9 26 ,6 | -0 ,05        | +1 ,00         | -0,86 | -0,54 | -0 ,889 | -0 ,70                             |
| 24. Sprinberg . .                 | 53 11 ,0  | +16 37 ,0 | +0 ,05        | +1 ,00         | +0,71 | +0,45 | -2 ,506 | -0 ,58                             |
| 25. Schönsee . . .                | 53 9 ,4   | +18 53 ,9 | +0 ,08        | +1 ,01         | +1,21 | +0,76 | -5 ,652 | +0 ,05                             |
| 26. Königsberg . .                | 54 42 ,8  | +20 29 ,8 | +0 ,10        | +0,99          | +1,56 | +0,98 | -3 ,540 | +0 ,22                             |
| 27. Göldapperberg                 | 54 17 ,0  | +22 17 ,6 | +0 ,13        | +1 ,01         | +1,95 | +1,23 | -6 ,551 | +1 ,58                             |
| 28. Lüss . . . . .                | 52 50 ,0  | +10 20 ,7 | -0 ,04        | +1 ,00         | -0,66 | -0,42 | -3 ,818 | +0 ,30                             |
| 29. Nottuln . . . .               | 51 57 ,0  | + 7 24 ,7 | -0 ,09        | +0 ,99         | -1,31 | -0,82 | -2 ,867 | +0 ,17                             |
| 30. Kaiseiberg . .                | 53 55 ,8  | + 9 33 ,0 | -0 ,05        | +1 ,00         | -0,84 | -0,52 | -3 ,610 | +0 ,30                             |
| 31. Kopenhagen . .                | 55 40 ,7  | +12 35 ,0 | -0 ,01        | +1 ,00         | -0,16 | -0,11 | -1 ,211 | -0 ,80                             |
| 32. Dietrichshagen                | 54 6 ,5   | +11 46 ,0 | -0 ,04        | +1 ,00         | -0,36 | -0,22 | -1 ,327 | +0 ,30                             |
| 33. Turmberg . .                  | 54 13 ,4  | +18 7 ,7  | +0 ,07        | +1 ,00         | +1,04 | +0,66 | -0 ,857 | -0 ,40                             |
| 34. Trunz . . . .                 | 54 13 ,2  | +19 32 ,2 | +0 ,11        | +0 ,99         | +1,36 | +0,85 | -6 ,904 | +0 ,58                             |
| 35. Borkum . . . .                | 53 35 ,3  | + 6 40 ,3 | -0 ,09        | +1 ,00         | -1,47 | -0,92 | -2 ,780 | +0 ,05                             |
| 36. Memel . . . .                 | 55 43 ,7  | +21 5 ,8  | +0 ,11        | +0 ,99         | +1,69 | +1,06 | -4 ,430 | +1,032                             |
| 37. Grodno . . . .                | 53 40 ,8  | +23 49 ,7 | +0 ,15        | +0 ,99         | +2,09 | +1,44 | -6 ,020 | +0 ,50                             |
| 38. Nemesch . . .                 | 54 39 ,1  | +25 19 ,0 | +0 ,17        | +0 ,99         | +2,61 | +1,64 | -8 ,430 | +0 ,50                             |
| 39. Bobruisk . . .                | 53 9 ,8   | +29 11 ,7 | +0 ,22        | +0 ,97         | +3,45 | +2,16 | -4 ,130 | 0 ,00                              |
| 40. Gollenberg . .                | 54 12 ,4  | +16 13 ,8 | +0 ,04        | +1 ,00         | +0,63 | +0,39 | +0 ,722 | +1 ,48                             |

В последующем мы приняли  $\Delta\xi_1 = +0'',5$ ; заметим, что ошибка в  $\Delta\xi_1$  даже в  $\pm 0'',1$  не играет никакой роли при решении уравнений (41) вследствие малости соответствующих коэффициентов при  $\Delta\xi_1$  в этих уравнениях. С  $\Delta\xi_1 = +0'',5$  мы переходим от уравнений (41) к следующим:

$$\begin{aligned} 38,59 \delta\eta_1 - 5,64 u' - 3,56 w' - 80,33 &= 0; \\ + 121,71 u' + 76,45 w' - 112,19 &= 0; \\ + 48,02 w' - 70,50 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда при сжатии 1 : 299,15 или  $w' = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} u' &= +1,025; \quad \Delta a = +654 \text{ м.} \\ \delta\eta_1 &= +2'',24; \quad a = 6378051 \text{ м} \pm 128 \text{ м.} \end{aligned}$$

При сжатии 1 : 297;  $a = 6377953 \text{ м} \pm 128 \text{ м.}$

При сжатии 1 : 298,3  $a = 6378013 \text{ м} \pm 128 \text{ м.}$

Заметим, что по Хейсканену при сжатии 1 : 298,3  $a = 6378152 \text{ м} \pm 128 \text{ м.}$  По Berroth при том же сжатии 1 : 298,3  $a = 6378000 \text{ м.}$ , причем в последнем выводе топографо-изостатические редукции не используются.

Переходя на эллипсоид Кларка 1866 ( $a = 6378206$  и  $\mu = 1 : 295,0$ ) и вводя  $u = 20000 \frac{da}{a}$  и  $w = 20000 d\mu$ , уравнения (43) перепишем еще так:

$$\left. \begin{aligned} 38,59 \delta\eta_1 - 2,82 u - 1,78 w - 89,16 &= 0 \\ + 30,43 u + 19,11 w + 39,07 &= 0 \\ + 12,00 w + 24,52 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (44)$$

Исключая отсюда  $\delta\eta_1$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} + 30,22 u + 18,98 w + 32,55 &= 0 \\ + 11,92 w + 20,41 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Несомненно, следует дополнить астрономическими пунктами самую западную часть дуги 52-й параллели, находящуюся на территории Ирландии и Англии, дав более частые пункты по самой дуге в этой ее части и, кроме того, проводя площадной охват, т. е. определяя новые астрономические пункты в некоторой полосе, лежащей к северу и к югу от линии Feagmair — Nieprort. Аналогичное положение относится и к самой восточной части дуги от Варшавы до Бобруйска; здесь прежде определенные пункты слишком редки по самой дуге, и так же, как и для западного ее конца, отсутствует площадной охват астрономическими пунктами. Конечно, очень характерным для постановки астрономо-геодезических работ международного значения является то, что наиболее ответственные конечные участки дуги 52-й параллели оказались обслуженными астрономическими пунктами сравнительно слабо, в то время как в средней части дуги имеем хорошую густоту астрономических пунктов. Новые астрономо-геодезические работы в Польше возмещают уже указанный недочет в отношении восточного конца дуги, нужно лишь обеспечить прочную связь новых работ в Польше с прежними, исполненными русскими геодезистами.

Само собой разумеется, что надлежит гравиметрические работы, уже исполненные в Западной Европе, дополнить таким образом, чтобы получилась возможность учета чисто местных влияний в ряде пунктов по 52-й параллели.

### § 6г. Градусное измерение по 48-й параллели

Мысль об этом градусном измерении, может быть, имеет еще большую давность, чем инициатива Струве в отношении измерения по 52-й параллели: эту мысль высказывал еще Лаплас в начале XIX столетия, выдвинув проект выполнения астрономо-геодезических работ по 48-й параллели в пределах Франции от Бреста до Страсбурга. В дальнейшем развитие триангуляций в Германии, Австро-Венгрии и в России, исполнявшихся в производственно-геодезических целях, привело к стремлению соединить в одно целое цепи треугольников, пришедшиеся вблизи 48-й параллели, и по выполнении соответствующих астрономических работ получить в результате градусное измерение от Бреста во Франции до Астрахани в России.

Франция первой выполнила еще к 1829 г. на своем участке геодезические работы. Однако вряд ли можно признать качество этих старых геодезических работ отвечающим требованиям современных градусных измерений. С начала девяностых годов во Франции выполняется новая триангуляция от Бреста до Страсбурга, однако результаты до сих пор не опубликованы. Астрономические работы с 1862 по 1904 г. привели к определению долгот (а также широт и азимутов) в Париже, Страсбурге и Бресте, т. е. с долготными интервалами в 5 и 7°. Итак, французский участок дуги оказывается до сих пор не вполне готовым.

В Германии дуга, пересекая Эльзас-Лотарингию и Вюртемберг, далее следует по территории Баварии, затем в Тироле вступает на территорию Австрии, далее пересекает Венгрию, идет по Румынии, отсюда переходит в Бессарабию и, наконец, в СССР, следя через Кишинев, Николаев, Александровск, Ростов-на-Дону до Астрахани.

В прирейнских областях Германии астрономо-геодезические работы в районе 48-й параллели выполнены с большой тщательностью, но в Баварии и в Тироле надлежащее проведение новых астрономо-геодезических работ относится по линии градусного измерения 48-й параллели только к первому десятилетию нынешнего столетия (геодезические работы в Баварии, обеспечивающие вполне практические запросы, были завершены к 1830 г. и это послужило причиной огромной задержки в выполнении на территории Баварии новых астрономо-геодезических работ, обеспечивающих требования градусного измерения). Так как результаты этих новых работ в Баварии и в Тироле, отвечающие использованию в целях вывода размеров эллипсоида, остаются еще неопубликованными, то по существу получается здесь прорыв, и западное начало градусного измерения по 48-й параллели отодвигается к Вене.

В 1923 г. известный ученый Галле, старый сотрудник Прусского геодезического института в Потсдаме, опубликовал результаты своей обработки «восточной части» дуги 48-й параллели в труде „Die Längengradmessung in 48 Grad Breite zwischen Astrachan und Brest». Он использует геодезические линии: Laarberg (пункт близ Бены) — Széchenyihegy (пункт близ Будапешта), Széchenyihegy — Strazahalom (пункт в Венгрии), Strazahalom — Roman (Румыния), Strazahalom — Черновицы (Галиция), Roman — Кишинев, Кишинев — Николаев,

Николаев — Александровск, Александровск — Ростов-на-Дону, Ростов-на-Дону — Сарепта, Сарепта — Астрахань, и дает в результате Гельмертова уравнения погрешностей, связывающие склонения отвеса на концах каждой геодезической линии с поправками: длины этой линии, астрономических ее азимутов, наблюденных широт и долгот и размеров (полусоси и сжатия) Бесселева эллипсоида (см. получение таких уравнений в Jordan-Eggert „Handbuch der Vermessungskunde“, Bd. III или в «Высшей геодезии», ч. II, проф. Красовского).

Нужно сказать, что астрономические пункты на восточной части дуги, используемые Галле, расположены редко друг от друга — от 150 до 350 км. Уже по одному этому ясно, что астрономический материал и по этой части дуги является определенно недостаточным.

Расстояние Laarberg — Széchenyihegy — 208 км, в местности с заметным рельефом; расстояние Strazahalom — Черновицы — 361 км, Александровск — Ростов — 347 км. В западной части дуги, т. е. в районе Вены, должно заметно сказываться влияние Альп, на участке Strazahalom — Черновицы — влияние Карпат, и только начиная с Кишинева вплоть до Астрахани дуга идет по местности, благоприятной в отношении рельефа с точки зрения градусного измерения.

Несомненно, что на участке Вена — Кишинев нужно иметь астрономические пункты в расстоянии около 70 км друг от друга, т. е. частоту пунктов, фигурирующих на этом участке в обработке Галле, нужно увеличить примерно в три раза, и кроме того, надлежит астрономические пункты, приходящиеся в предгорьях Альп и Карпат, сделать групповыми, т. е. в районе таких пунктов определить кругом каждого из них еще ряд добавочных астрономических пунктов, как это делали англичане в Индии. Понятно, что и на русской части дуги, от Кишинева до Астрахани, нельзя удовлетвориться расстояниями между астрономическими пунктами почти в 350 км.

В настоящее время новые астрономические работы выполнены в СССР во всей полосе, примыкающей с юга и с севера к дуге 48-й параллели — от границы с Румынией до Астрахани, поэтому со стороны СССР уже все сделано, чтобы старые материалы по дуге к востоку от Николаева заменить в случае надобности новыми, заметно лучшего достоинства и вполне отвечающими в отношении густоты астрономических пунктов запросам градусного измерения (пункты в среднем через 100 км). Но мы в настоящей работе имеем в виду дать сначала отдельно выводы по градусным измерениям Западной Европы и по градусным измерениям СССР, чтобы затем сделать ряд сопоставлений и после этого, наконец, использовать совместно все эти материалы.

Поэтому, все новые материалы по 48-й параллели в пределах СССР мы относим к астрономо-геодезической сети СССР, а следовательно, к западноевропейским — только часть этой дуги от Вены до Николаева. Уравнения по этой части дуги, в случае их пригодности, имеется при этом в виду присоединить к полученным ранее уравнениям (35), (38) и (45) по дуге Струве, по Западноевропейскому меридиану и по дуге 52-й параллели, чтобы затем сделать из совместного использования всех этих уравнений те или другие выводы в отношении результатов градусных измерений по Западной Европе. Нужно отметить, что за последнее время в триангуляции Румынии и в триангуляции Венгрии исполнены определения новых астрономических пунктов, располагающихся частью и в районе 48-й параллели, однако результатами этих определений мы не располагаем.

Наша обработка материалов, приведенных в труде Галле „Längengradmessung zwischen Astrachan und Brest”, началась прежде всего с решения уравнений Лапласа, отбросив в последних члены с поправкой сжатия  $\Delta\mu$ , как ничтожно влияющие на результат уравнивания. Полученные из обработки уравнений Лапласа поправки астрономических долгот и азимутов были введены затем в уравнения Галле для  $\xi$  и  $\eta$  по использованным им геодезическим линиям, причем, как и следовало ожидать, эти поправки по существу не имеют значения. Далее, путем постепенного исключения по методу Гельмерта промежуточных уклонений отвеса, все  $\xi$  и  $\eta$  были отнесены к Rauenberg, для чего пришлось воспользоваться установленной Гельмертом, Крюгером и Берротом связью между Rauenberg и Leipzig и между Leipzig и Laarberg. В свободные члены полученных таким образом уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  были введены топографо-изостатические редукции, вычисленные кандидатом наук А. А. Изотовым; редукции эти определены за отсутствием в расположении карт крупного масштаба с ошибкой до  $\pm 0'',4$ . Для Раунберга было принято

$$\xi_1 = +0'',40 + \delta\xi_1; \quad (46)$$

$$\eta_1 = 0'',00 + \delta\eta_1, \quad (47)$$

причем редукции  $r_m = +0'',40$  и  $r_p = 0'',00$  взяты по Хейсканену. Неизвестное  $\delta\xi_1$  было определено только из уравнений для  $\xi$  — методом, изложенным в § 6в, оказалось:

$$\delta\xi_1 = +2'',9; \quad (48)$$

$$\xi_1 = +3'',3. \quad (49)$$

В уравнении для  $\eta$  были подставлены  $\delta\xi$ , по (48). Вследствие значительных местных влияний около  $13''$ , уравнение для  $\eta$  в Черновицах не было использовано. Остальные уравнения для  $\eta$  дали в результате следующие нормальные уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} 6,79 \delta\eta_0 + 12,75 u' + 8,59 w' - 15,79 = 0 \\ + 42,45 u' + 26,26 w' - 62,88 = 0 \\ + 16,26 w' - 38,89 = 0 \end{array} \right\}. \quad (50)$$

Принимая в (50)  $w' = 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} u' &= +1,796; \quad \Delta a = +1145 \text{ м}; \quad a = 6378542 \text{ м}; \\ \delta\eta &= 1'',03. \end{aligned} \quad (51)$$

Принимая в (50)  $w' = +0,242$ , т. е.  $\mu = 1 : 297,0$ , получаем:

$$\begin{aligned} u' &= +1,663; \quad \Delta a = +1060; \quad a = 6378457 \text{ м}; \\ \delta\eta &= -1'',10. \end{aligned} \quad (52)$$

Несомненно, что полученные теперь выводы для большой полуоси из дуги, имеющей долготную амплитуду в  $15^{1/2}^\circ$  (или амплитуду около  $10^\circ$  в градусах экватора), являются вполне приемлемыми. Но значение  $\eta_0 = 1'',1$  значительно отличается от значения  $\eta_0 = +2'',0$ , установленного Берротом из обработки западноевропейских градусных измерений (Berroth „Der Meridianbogen Grossenhain—Pola und die Lotrichtung im Triangulations Hauptpunkt“), а также и от результата  $\eta_1 = +2'',24$ , полученного мною в § 6в по дуге 52-й параллели. Другими словами, наш

вывод из материала по 48-й параллели дает эллипсоид, заметно иначе ориентированный в земном теле, чем эллипсоид, выводимый из астрономо-геодезической сети Германии.

Несомненно, что результаты по дуге 48-й параллели должны быть использованы, но однако лишь в присоединении их к результатам по 52-й параллели. Не может быть речи об определении  $\eta_1$  и  $\xi_1$  самостоятельно из уравнений при общности исходного пункта (Raasenberg) для градусных измерений по 52-й и по 48-й параллелям. Совместное использование результатов градусных измерений по обеим этим параллелям мы приводим в следующем параграфе.

### § 7. Вывод размеров эллипса из градусных измерений Западной Европы

Надлежит прежде всего отметить, что астрономо-геодезические материалы по Западной Европе вовсе не исчерпываются рассмотренными в § 6а, 6б, 6в и 6г. К настоящему времени имеются значительные в сумме новые материалы по Финляндии, Эстонии, Латвии, Литве, Польше, Чехословакии, Югославии, Румынии, Болгарии и Греции; однако только очень небольшая часть этих материалов опубликована; таким образом использование этих новых астрономо-геодезических материалов в целях вывода размеров земного эллипса является еще делом будущего.

Из материалов, полученных еще до 1914 г., следует отметить материалы по дуге меридиана Grossenhain — Pola\*, от широты  $51^{\circ}18'$  до широты  $44^{\circ}52'$  при средней долготе около  $\pm 14^{\circ}$ . Понятно, что на продолжении этой дуги следует считать находящимися пункты табл. 7 за № 1, 14, 24, 21, 32, 31 и, кроме того, датский пункт Teglnoi, т. е. можно взять продолжение дуги по  $57\frac{1}{2}^{\circ}$  широты и образовать общую дугу меридиана, имеющего среднюю долготу около  $+13^{\circ}$ , с амплитудой в  $12\frac{1}{2}^{\circ}$  (от  $\varphi = 57\frac{1}{2}^{\circ}$  до  $\varphi = 45^{\circ}$ ). Кроме того, к югу от Pola имеется соединение австрийских триангуляций через Адриатическое море с итальянскими триангуляциями, так что имеется продолжение градусного измерения Pola до Сицилии до широты  $36^{\circ}$ .

Понятно, что получающаяся меридианная дуга с общей амплитудой несколько более  $20^{\circ}$ , должна бы быть использована в выводе размеров земного эллипса.

Berroth в труде «Meridianbogen Grossenhain Pola» выполняет тщательную обработку материалов по этой именно части дуги и получает Гельмертова уравнения для слагающих уклонения отвеса  $\xi$  и  $\eta$ , но без введения топографо-изостатических редукций. Эти уравнения Беррота ясно уже показывают, что местные и областные влияния на участке Grossenhain — Pola довольно значительны (для эллипса Бесселя  $\xi$  изменяется в пределах  $17''$ ). Понятно, что без введения хорошо обоснованных редукций в астрономические широты дуга Grossenhain — Pola не может быть использована для вывода размеров эллипса, но до сих пор никто еще не занимался выводом таких редукций по этой дуге. Сказанное относится и к итальянской части дуги. Так как к югу от Grossenhain дуга проходит по горному району (Тироль), затем пересекает море и далее пересекает Аппенинский хребет, то конечно топографо-изостатические редукции в некоторых местах дуги будут

\* Grossenhain находится в Саксонии, Pola — в Австрии, на берегу Адриатического моря.

иметь заметную величину; надежность определения их, конечно, остается под сомнением, так как в южной части дуги верхние слои земной коры подвергались грандиозным смещениям. Только использование обширного гравиметрического материала может дать здесь достаточное приближение к истине в вопросе определения редукций астрономических широт. Итак, образование градусного измерения от севера Дании до Сицилии есть еще дело будущего. Понятно, желательно выполнить и вывод топографо-изостатических редукций от Grossenhain до Сицилии, чтобы впоследствии сопоставить выводы, основанные на применении теории изостатической компенсации, с выводами на основе использования гравиметрических материалов.

Таким образом в настоящее время по Западной Европе мы должны ограничиться использованием дуги Струве, дуги Западноевропейского меридиана и дуги по 52-й параллели, присоединяя к ней часть дуги 48-й параллели.

Прежде всего остановимся на использовании части 48-й параллели, уравнения по которой даны в § 6г.

По § 6в

$$\Delta\xi_1 = +0'',5,$$

т. е.  $\xi_1 = +3'',5$ , тогда как из одной дуги 48-й параллели получили  $\xi_1 = +3'',3$  (§ 6г). Отсюда ясно, что если мы будем выводить  $\Delta\xi_1$  из уравнений для  $\xi$  по 52-й параллели и по 48-й параллели, то очевидно, получим результат, очень близкий к приведенному в § 6в из одной 52-й параллели, и так как погрешность в  $\Delta\xi_1$  в  $\pm 0'',1$  совсем несущественна, то можно принять попрежнему

$$\Delta\xi_1 = +0'',5$$

и с этим значением  $\Delta\xi_1$  перечислить свободные члены уравнений (50), затем перейти от них к той части нормальных уравнений, которую должно будет прибавить к нормальным уравнениям (43) по 52-й параллели.

После указанного перечисления, мы получаем вместо (50)

$$\left. \begin{array}{l} 5,79 \delta\eta_1 + 12,75 u' + 8,59 w' - 15,58 \\ \quad + 2,45 u' + 26,26 w' - 62,17 \\ \quad + 16,26 w' - 38,46 \end{array} \right\}. \quad (53)$$

Однако, прежде чем прибавлять выражения (53) соответственно к уравнениям (43), следует принять во внимание, что частота пунктов на 48-й параллели иная, чем на 52-й параллели. По смыслу формулы (19) (см. § 2, «Геодезист» № 6) вес дуги параллели при одной и той же длине пропорционален числу астрономических пунктов на ней. Мы имеем на 48-й параллели восемь пунктов, считая и исходный Raieberg при длине параллели в  $15^\circ$  долготы; на 52-й параллели 40 пунктов при протяжении в  $40^\circ$  по долготе (с округлением). Очевидно что вес 48-й параллели будет  $\frac{8}{15}$  или 0,53. Мы помножили поэтому (53) на 0,6 и результат сложили соответственным образом с уравнениями (43). В результате получили:

$$\left. \begin{array}{l} 42,06 \delta\eta_1 + 2,01 u' + 1,59 w' - 89,68 = 0 \\ \quad + 147,18 u' + 92,21 w' - 149,49 = 0 \\ \quad + 57,78 w' - 93,58 = 0 \end{array} \right\}. \quad (54)$$

Решая эти уравнения при  $w' = 0$ , т. е. при сжатии по Бесселю, получаем:

$$\left. \begin{array}{l} u' = +0,99; \quad \Delta a = +631 \text{ м} \\ \delta\eta_1 = +2'',09; \quad a = 6378028 \text{ м} \end{array} \right\}. \quad (55)$$

При сжатии 1 : 297,0 имеем:

$$\left. \begin{array}{l} w' = +0,242 \\ 42,06 \delta\eta_1 + 2,014 u' - 89,30 = 0 \\ \quad + 147,18 u' - 127,18 = 0 \\ u' = +0,84; \quad \delta\eta_1 = +2'',08; \\ a = 6377931 \text{ м} \pm 115 \text{ м.} \end{array} \right\}. \quad (56)$$

Полагаю, что приведенные выводы полуоси из западноевропейских параллелей должны быть признаны более прочными, чем выводы Хейсканена: в них отразилось влияние профиля геоида по 48-й параллели, пренебрегать которым в полной мере не следует.

От уравнений (54) переходим, по исключении  $\delta\eta_1$  к уравнениям на эллипсоиде Кларка 1866 г. и к неизвестным  $u = 20000 \frac{da}{a}$  и  $w = 20000 d\mu$ .

Мы получили:

$$\left. \begin{array}{l} 36,77 u + 23,03 w + 42,34 = 0 \\ \quad + 14,43 w + 26,91 = 0 \end{array} \right\}. \quad (57)$$

К этим уравнениям мы присоединяем уравнения (35) по дуге Струве и уравнения (38) по Западноевропейскому меридиану:

$$\begin{aligned} 26,60 u + 3,70 w - 20,30 &= 0 \\ \quad + 1,20 w - 3,30 &= 0 \\ 57,88 u - 22,41 w - 45,19 &= 0 \\ \quad + 10,60 w + 14,84 &= 0 \end{aligned}$$

Складывая (57), (35) и (38), получаем общие уравнения по Европе в таком виде:

$$\left. \begin{array}{l} 121,25 u + 4,32 w - 23,15 = 0 \\ \quad + 26,23 w + 38,45 = 0 \end{array} \right\}. \quad (58)$$

Решая уравнения (58), получаем:

$$\begin{aligned} u &= -0,0356 w + 0,191; \\ w &= -1,506; \quad u = +0,245. \end{aligned}$$

Итак, для Западной Европы имеем такие результаты:

$$\left. \begin{array}{l} a = 7638284 \text{ м} \pm 64 \text{ м} \\ \mu = 1:301,70 \pm 2,0 \end{array} \right\}. \quad (59)$$

Характерно для совокупности использованных градусных измерений в Западной Европе, что выводимое из них значение большой полуоси  $a$  в очень слабой степени зависит от принимаемого значения сжатия.

При сжатии 1 : 297 ( $w = -0,457$ ):

$$a = 6378271 \text{ м.} \quad (60)$$

Если бы мы не использовали материалы по 48-й параллели, то имели бы такие уравнения по Западной Европе:

$$\left. \begin{array}{l} 114,70 u + 0,27 w - 32,94 = 0 \\ + 23,72 w + 32,05 = 0 \end{array} \right\}, \quad (61)$$

из которых:

$$\begin{aligned} u &= +0,291; \quad w = 1,355; \\ a &= 6378300 \text{ м}; \\ p &= 1:301,0. \end{aligned} \quad (62)$$

Возьмем только уравнения (35) и (38) по дуге Струве и по Западноевропейскому меридиану; мы будем иметь:

$$\left. \begin{array}{l} 84,48 u - 18,71 w - 65,49 = 0 \\ + 11,80 w + 11,54 = 0 \end{array} \right\}. \quad (63)$$

Из (58) при сжатии 1 : 297 получаем ( $w = -0,457$ )

$$u = +0,674; \quad \Delta a = +215 \text{ м}; \quad a = 6378421 \text{ м}. \quad (64)$$

При том же сжатии 1 : 297 из уравнений для  $\eta$  мы получили:

$$a = 6377931 \text{ м}.$$

Теперь можно отметить, что выводы из уравнений для  $\xi$  дают для большой полуоси заметно большее значение, чем выводы из уравнений для  $\eta$ .

Это различие в 490 м (при сжатии 1 : 297) определялось, правда, со средней ошибкой  $\pm 135$  м, и, кроме того, мы имеем некоторые основания (см. § 6а и 6б) считать выводы большой полуоси из уравнений (35) и (38), а следовательно, и вывод из уравнений (63), являющихся суммой (35) и (38), несколько преувеличенными. Но все-таки, хотя и не с полной уверенностью, можно указанное различие между выводами из градусных измерений по меридианам и по параллелям в Западной Европе отнести за счет влияния трехосности земного эллипсоида (см. § 5, «Геодезист» № 7).

Если мы приняли трехосность земного эллипсоида, то, конечно, вывод (59) подлежит исправлению. Но, независимо от того, будем мы или не будем принимать трехосность, приходится отметить, что при изучении поверхности геоида, как и при изучении всякой иной поверхности, важно иметь профили взаимноперпендикулярные, и, конечно, при наличии заметных неправильностей в изучаемой поверхности профиля одного направления и направления, к нему перпендикулярного, должны быть равноценными. Между тем уравнения (57) и (63) явно показывают, что по Западной Европе этой равнотенности нет, и уравнения, доставляемые меридианными дугами, играют заметно большую роль в выводе полуоси  $a$  при заданном сжатии, чем дуги параллелей, и одинаковую с последними роль при выводе сжатия при заданном значении большой полуоси  $a$ . Поэтому следует вывод (59) считать полученным из неправильно размещенного астрономо-геодезического материала и поэтому, несмотря на сопровождающие его малые средние ошибки, не вполне соответствующим эллипсоиду для Западной Европы.

При получении вывода (59) мы вовсе не использовали материала по уклонениям  $\xi$  в Средней Европе для  $\xi$ . Но ряд пунктов, используемых при составлении уравнений (62) и входящих притом с большими коэффициентами при  $u$  в эти уравнения, уже входит в уравнения (35) по дуге Струве и в уравнения (57) по дуге Западноевропейского меридиана. Эти пункты суть: Дерпт, Якобштадт, Немеж, Белин, Кишинев, Гринвич, Ньюпорт, Розендель, что составляет почти 20% от общего числа пунктов, представленных в уравнениях для  $\xi$ . Устранение этих пунктов из составления уравнений для  $\xi$  повлечет неизбежно к отбрасыванию еще трех английских пунктов, лежащих к западу от Гринвича и советского пункта Николаев.

Поэтому уравнения Хейсканена по  $\xi$  для Средней Европы подлежат существенной переработке и изменениям. К сожалению, мы не имели возможности к настоящему времени выполнить переработку уравнений, обусловленную выбрасыванием указанных выше 12 пунктов. Но самое включение этих переработанных уравнений вместе с уравнениями  $\xi$  по 48 параллели в общий вывод эллипсоида по Западной Европе нам представляется сомнительным: из остающихся 42 пунктов 23 имеют широты, изменяющиеся всего в пределах  $2\frac{1}{2}$  градусов, а пять пунктов 48-й параллели отделены от ближайших к ним в направлении меридианном германских пунктов на  $5-6^\circ$  широты.

Использование такого материала обещает не улучшить, а ухудшить результаты по Западной Европе, представленные выводом (59). Трудность определения долгот, существовавшая до первой четверти нашего столетия, отразилась целиком на астрономо-геодезических материалах Западной Европы, которые преимущественно работают на вывод слагающих  $\xi$  уклонений отвеса по широте. Однако и распределение пунктов, работающих на вывод  $\xi$ , далеко не равномерно. Как уже указано в § 6а и 6в, необходимо усилить астрономические определения по дуге Струве и по конечным участкам дуги 52-й параллели в пределах Западной Европы. Но крайне важно осуществить продолжение дуги 48-й параллели от Вены до Бреста во Франции. Конечно, это продолжение должно сопровождаться охватом на участке Вена — Брест новыми астрономическими пунктами полосы между 48-й и 52-й параллелями и некоторой полосы к югу от 48-й параллели. Новые астрономические пункты должны быть определены и для заполнения площади между 48-й и 54-й параллелями к северу от линии Вена — Кишинев, а также в известной полосе к югу от этой линии. Только по выполнении этих работ астрономо-геодезический материал позволит получить надлежащее надежный вывод эллипсоида, соответствующего Средней Европе. Но для приближения к общему земному эллипсоиду нужно выполнить гравиметрические работы, указанные уже в § 6а, 6б и 6в.

Таким образом следует считать дело по градусным измерениям в Западной Европе далеко не законченным, хотя оно и было начато очень давно, более ста лет тому назад.

Значение полученного нами общего вывода (59) по Западной Европе уже выяснено выше; этот вывод не может претендовать на тот вес, который вытекает из приписываемых ему средних ошибок, и вследствие неравномерного размещения материала, на котором он основан, вероятно искажен систематическими влияниями.

Заметим, что вывод Хейсканена по Западной Европе дает:

$$\text{при сжатии } 1:297,0; \quad a = 6378\,397 \text{ м} \pm 72 \text{ м.}$$

Этот вывод отличается от нашего (60) на +128 м. Очевидно утверждение о сходимости результатов по США и по Западной Европе не имеет оснований.

Мы должны закончить обзор градусных измерений по Западной Европе непременным упоминанием о «дуге Хельброннера» (Helbronner). Эта дуга начинается на севере конечным пунктом градусного измерения Струве — Фугленес — на берегу Северного ледовитого океана, отсюда старые норвежские триангуляции, направляющиеся вдоль берега Атлантического океана до Торнгейма, а затем меридионального направления до Осло, образуют первые звенья дуги Helbronner. Далее следуют старые шведские триангуляции, идущие к югу от Осло берегом моря до соединения их с триангуляциями Дании. Из Дании дуга переходит в Германию, идя вдоль меридиана с долготой  $+8^{\circ}$ , пересекает затем Альпы, вступает в Италию, отсюда перебрасывается на Сардинию, а из Сардинии перебрасывается морем в Тунис, где и заканчивается пунктом Карфаген. Замечательно, что часть астрономо-геодезических работ по этой очень большой дуге, именно в Швейцарии, Helbronner выполнил на свои личные средства. К сожалению, качество использованных им старых триангуляций Норвегии вызывает сомнения, как и соединения Сардинии с Тунисом. Кроме того, дуга пересекает Средиземное море и Альпы, а на севере идет в горной стране вдоль берега моря. Неудивительно, что применение геометрических методов к выводу размеров эллипсоида из этой дуги привело к результатам, неприемлемым в отношении размера большой полуоси. Очевидно, получение надлежащих материалов по дуге Helbronner и их обработка есть дело будущего.

### § 8. Астрономо-геодезическая сеть Соединенных Штатов Америки

В этой обширной сети к 1910 г., т. е. к моменту завершения ее обработки Хейфордом в целях вывода размеров эллипсоида, были выполнены: астрономические определения широт для 381 пункта, астрономические определения долгот на 131 пункте и определения астрономических азимутов на 253 пунктах, причем только 32 пункта были пунктами Лапласа, т. е. такими, на которых были астрономически определены и долготы и азимуты.

Если общее число этих астрономических определений, т. е. 765, разделить на три, в соответствии с принятым в настоящее время правилом определять на каждом астрономическом пункте градусного измерения и широту, и долготу, и азимут, то мы получим, что астрономические работы в сети США эквивалентны определению 255 полновесных астрономических пунктов. Это приводится для того, чтобы получить противопоставление общепринятыму мнению, что астрономический материал, использованный Хейфордом в его выводе размеров эллипсоида, был огромен и даже грандиозен.

Заметим, что к настоящему времени в СССР мы имеем около 300 пунктов с определением на каждом из них астрономических широты, долготы и азимута, причем эти пункты обслуживают территорию, только несколько большую половины территории США.

Распределение указанных 765 астрономических определений на территории США не отличается полной равномерностью. Распределение пунктов с астрономически определенными широтами можно представить себе в общем и главном в виде трех полос меридионального

направления: первая между меридианами —  $70^\circ$  и —  $81^\circ$  от широты  $45^\circ$  до широты  $25^\circ$ , вторая между меридианами —  $86^\circ$  и —  $100^\circ$  от широты  $48^\circ$  до широты  $26^\circ$ , третья между меридианами —  $118^\circ$  и —  $124^\circ$  от широты  $48^\circ$  до широты  $33^\circ$ , остальные широтные пункты располагаются, не образуя меридиональных соединений — число их около 12% от общего числа широтных пунктов. По существу мы имеем как бы три градусных измерения по меридианам: каждое под средней широтой около  $40^\circ$  и с амплитудой от  $15$  до  $22^\circ$ . Но каждое из этих трех градусных измерений охватывает не дугу, а довольно широкую полосу, что, конечно, должно сказываться выгодно на выводе размеров эллипсоида. Но некоторым, правда небольшим, недочетом является то, что расположение широтных пунктов в каждой полосе не отличается равномерностью, пункты располагаются неравномерно, группами, с разрывами по широте между некоторыми группами данной полосы от  $2$  до  $3^\circ$ .

Долготные и азимутальные пункты располагаются главнейшим образом (в 80%) между параллелями  $34^\circ$  и  $44^\circ$ , образуя градусное измерение по параллели под средней широтой  $39^\circ$  и между меридианами —  $125$  и —  $72^\circ$ , опять-таки в виде широкой полосы, обслуженной определениями долгот и азимутов. Остальные 20% долготных и азимутальных определений располагаются между широтами  $44^\circ$  и  $48^\circ$  и между широтами  $27^\circ$  и  $34^\circ$ , однако не образуя ни в той, ни в другой зоне равномерного распределения пунктов, приуроченного к той или иной параллели. Значительная часть пунктов, на которых исполнены астрономические определения, приходится на горные районы.

Число долготных пунктов, в которых слагающая уклонения отвеса  $\eta$ , обусловленная действием рельефа, более  $30''$ , равно 68 из общего их числа 131; в этих 68 пунктах часть  $\eta$ , обусловленная действием рельефа, колеблется от  $30''$  до  $104''$ . Число азимутальных пунктов, в которых часть  $\eta$ , обусловленная действием рельефа, более  $30''$ , равно 130 из общего числа 253; в этих 130 пунктах эта часть  $\eta$  лежит в пределах от  $30''$  до  $90''$ .

Число широтных пунктов, где часть уклонения отвеса в меридиане, обусловленная рельефом, более  $30''$ , равно 87 из общего числа 381; наибольшее значение уклонения в меридиане, вызываемого рельефом местности, достигает  $65''$ .

Понятно, что обработка такого материала без применения гипотезы изостазии (или без использования материалов сплошной гравиметрической съемки США) совершенно невозможна.

В градусных измерениях Европы действие внешнего рельефа очень редко, только почти в виде исключения сказывается в  $\xi$  или в  $\eta$  величиной в  $10''$ . В США для 40% астрономических пунктов это действие более  $30''$ . Конечно, большая заслуга Хейфорда состоит в применении соответствующих методов в обработке такого материала, отпугивающего по первому впечатлению геодезиста, имевшего дело только с материалами по Западной Европе.

Существенно также отметить, что именно в США под руководством Хейфорда проведено для очень большой территории такое распределение астрономических пунктов, которое отвечает требованиям надежного вывода и большой полуоси и сжатия эллипса: три меридианные полосы с амплитудой от  $15^\circ$  до  $22^\circ$ , равномерно расположенные на территории и каждая хорошей ширины; полоса мощной ширины в  $10^\circ$  с юга на север, наполненная долготными и азимутальными пунктами и имеющая значительную долготную амплитуду в  $53^\circ$ ; дополнения этой

полосы на севере и на юге страны в виде долготных и азимутных пунктов, — все это дает еще неповторенный до сих пор пример создания на большой территории компактной астрономо-геодезической сети, в которой надежно определяются и большая полюс и сжатие эллипсоида.

Особенностью работы Хейфорда по выводу размеров эллипсоида является, конечно, прежде всего применение теории изостатической компенсации по Пратту при посредстве талантливо разработанных вычислительных схем, позволивших провести тщательное определение топографо-изостатических редукций для огромного числа станций при предельном радиусе крайней зоны в 4126 км. Подробное изложение приемов, примененных Хейфордом, можно найти в книге Ф. Н. Красовского «Высшая геодезия», ч. II; главные результаты работы Хейфорда приведены также в § 4 настоящей статьи («Геодезист» № 7).

Далее приходится отметить применение принципа площадей, которое по времени является первым именно в работе Хейфорда. Но приходится обратить внимание и на еще одну особенность американских градусных измерений — это на очень большую роль материала, доставляемого определениями астрономических азимутов, в выводе размеров эллипсоида.

Мы остановимся сейчас именно на вопросе о составлении уравнений для слагающих уклонения отвеса в первом вертикале при использовании для этого астрономически определенных азимутов.

В первой своей работе «The Figure of the Earth» Хейфорд, используя при составлении уравнений для  $\eta$  астрономические азимуты, в члене  $(\alpha_k - A_k) \operatorname{ctg} \psi_k^*$ , входящем в каждое такое уравнение, принимает, что  $A_k$  есть геодезический азимут, переданный от исходного пункта триангуляции чисто геодезическим путем, посредством уравненных углов триангуляции, без использования при этом астрономических долгот, позволяющих учесть ошибку в  $A_k$ , обусловленную ошибками углов триангуляции. На четырех страницах (120—123) Хейфорд доказывает, что крупные накопления ошибок (до  $7''$ ,5) в азимутах  $A_k$ , соответствующие, конечно, большому протяжению страны, не сказываются якобы вредно на выводе размеров эллипсоида. Для убедительности Хейфорд приводит при этом числовые расчеты и их результаты. Но, конечно, дело обстоит не так. Во второй своей работе «Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy» Хейфорд, используя накопившиеся к тому времени в США 32 пункта Лапласа, вводит в геодезические азимуты  $A_k$  поправки, которые он называет поправками Лапласа и которые должны по его мнению обратить все геодезические азимуты в азимуты Лапласа. Эти поправки приведены на стр. 20, 26 и 27 «Supplementary Investigation»; они достигают  $9''$ .

Несомненно, это исправление азимутов оказывает влияние на вывод размеров эллипсоида. Нужно отметить, что нахождение поправок в геодезические азимуты выполняется Хейфордом довольно упрощенным методом, мало похожим на метод обработки Лапласовых уравнений, примененный Гельмертом и Крюгером при уравнивании Западноевропейской астрономо-геодезической сети. По существу, после установления поправок в геодезические азимуты 32 Лапласовых пунктов, для всех остальных 253—32=221 азимутных пунктов поправка геодезического

\* Этот член является одновременно свободным членом уравнения для  $\eta_k$ , если не применять топографо-изостатических редукций, а в исходном пункте иметь  $B_0 = \varphi_0$  и  $A_0 = \alpha_0$ .

азимута определяется простым интерполированием поправок геодезических азимутов двух дальнейших к рассматриваемому пункту Лапласовых пунктов — пропорционально числу азимутных передач от того и другого Лапласова пункта.

Назовем азимут Лапласа в рассматриваемом пункте  $k$  через  $A_k^L$ , а астрономический азимут в том же пункте через  $\alpha_k$ .

Мы имеем:

$$A_k^L = \alpha_k - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k.$$

Отсюда:

$$(\alpha_k - A_k^L) \operatorname{ctg} \varphi_k = (\lambda_k - L_k) \sec \varphi_k = \gamma_k,$$

т. е. для получения  $\gamma$  из азимутов нужно использовать в качестве геодезического азимута Лапласов азимут.

Допустим, что рассматриваемая точка  $K$  лежит между пунктами  $A$  и  $B$ , для которых известны  $\lambda_a, \lambda_b, \alpha_a$  и  $\alpha_b$ . Пусть  $n_1$  углов передают геодезический азимут из  $A$  в  $K$  и  $n_2$  углов — из  $B$  в  $C$ .

Примем: среднюю ошибку угла . . . . .  $\pm 0''8$

“ “ астроном. азимута . . . . .  $\pm 1'',15^*$

“ “ “ долготы . . . . .  $\pm 0'',75$ .

Мы имеем такое условие:

$$\begin{aligned} \alpha_a - (\lambda_a - L_a) \sin \varphi_a + \delta \alpha_a - \delta \lambda_a \sin \varphi_a + \sum_1^{n_1} \beta + \sum_1^{n_2} \beta + t + \\ + \sum \Delta \beta - \alpha_B + (\lambda_B - L_b) \sin \varphi_b - \delta \alpha_b + \delta \lambda_b \sin \varphi_b = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

В (65)  $L_a$  и  $L_b$  — геодезические долготы,  $\beta$  — углы, передающие азимут от  $A$  к  $K$  и от  $B$  к  $K$ ;  $t$  — сближение меридианов точек  $B$  и  $A$ . [Так как ошибка в  $t$  равна и противоположна по знаку в ошибке величины  $(L_b - L_a) \sin \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}$ , то погрешности  $\delta t$  и  $\delta \lambda_a$  и  $\delta \lambda_b$  не введены в (65)]. Примем, что ошибка единицы веса равна  $\pm 0''8$ , тогда вес азимутов  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  будет 0,48 и вес долгот  $\lambda_a$  и  $\lambda_b$  — 1,17.

Азимут Лапласа  $A_k^L$  в пункте  $K$  определяется по уравненным элементам так:

$$A_k^L = \alpha_a - (\lambda_a - L_a) \sin \varphi_a + \delta \alpha_a - \delta \lambda_a \sin \varphi_a + \sum_1^{n_1} \beta + t_{ak} + \delta t_{ak} + \sum_1^{n_1} \Delta \beta. \quad (66)$$

Обратный вес  $\frac{1}{P}$  этого азимута рассчитывается так:

$$\frac{1}{P} = \left[ \frac{1}{0,48} + \frac{\sin^2 \varphi_a}{1,17} + n_1 \right] - \left[ \frac{\left[ \frac{1}{0,48} + \frac{\sin^2 \varphi_a}{1,17} + n_1 \right]^2}{\frac{2}{0,48} + \frac{\sin^2 \varphi_a + \sin^2 \varphi_b}{1,17} + n_1 + n_2} \right],$$

если не учитывать ошибки  $\delta t_{ak}$ .

\* В соответствии с вероятной ошибкой азимута по Хейфорду около  $\pm 0''75$  —  $0''80$ .

Примем теперь:  $\sin \varphi_a = \sin \varphi_b = 0,64$  ( $\varphi = 40^\circ$ );  $n_1 = 6$  и  $n_2 = 6$ . Последнее предположение соответствует положению пункта  $K$  в расстоянии от  $A$  и от  $B$  примерно на 160 км. Тогда по формуле (61) найдем:

$$\frac{1}{P} = 4,22.$$

Квадрат средней ошибки  $A_k^L$  будет:

$$0,64 \cdot 4,22 + (\delta t_{ak})^2 = 2,70$$

[ $(\delta t_{ak})^2$  пренебрегаем].

Очевидно, средняя квадратическая ошибка  $\eta_k$ , равного

$$(x_k - A_k^L) \operatorname{ctg} \varphi_k,$$

будет равна:

$$1.192 \sqrt{2,70 + 1,32} = 2'',389.$$

Из работ Хейфорда следует, что для уравнений погрешностей, вытекающих из наблюденных широт, ошибка единицы веса равна  $\sqrt{10,0}$ , причем в подкоренном числе 10,0 не более 0,2 приходится на влияние ошибок наблюденных астрономических широт, ошибок геодезических широт и ошибок в вычислении топографо-изостатических редукций. Другими словами, если через  $P_{\eta_{1a}}$  назовем вес азимутного уравнения для  $\eta$ , то

$$P_{\eta_{1a}} = \frac{10,0}{10,0 - 0,2 + (2,39)^2} = \frac{10,0}{15,56} = 0,64.$$

Если средняя ошибка астрономически наблюденного азимута равна  $\pm 1'',15$ , то нередко ошибка астрономического азимута стороны триангуляции заметно больше, так как часто приходится еще вводить углы, передающие наблюденный непосредственно астрономический азимут некоторой марки на нужный бок триангуляции. Точно так же при 32 пунктах Лапласа на всю территорию США расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ , принятые нами в приведенных расчетах равным примерно 300 км, в действительности оказывается часто значительно большим, доходя до 700 км. Поэтому величина  $P_{\eta_{1a}} = 0,64$  должна считаться несколько преувеличенной.

Остаточные члены в азимутальных уравнениях Хейфорда дают для  $P_{\eta_{1a}}$  значение около 0,55.

Все это приводит к обоснованию принять вес азимутальных уравнений равным 0,6 и сделать соответствующие перевычисления. Вес долготных уравнений по расчету, аналогичному приведенному выше, оказывается около 0,95, и, конечно, при выводе размеров эллипсоида не следует различать его от единицы.

Только для 30 уравнений из 765, используемых Хейфордом, остаточные члены превышают 6'', доходя в единичных из этих 30 случаев до 20''. Если мы примем во внимание приведенную выше характеристику значений свободных членов в уравнениях Хейфорда, достигающих 65'' и 104'', то, несомненно, в работе Хейфорда блестящее оправдано применение теории изостатической компенсации по Пратту. Но согласно сказанному в § 4 («Геодезист» № 7) все-таки к вопросу о строении земной коры, представленном схемой Пратта — Хейфорда, приходится относиться с осторожностью, и в выводах из геодезических материалов предпочитать находить подтверждение и согласованность с выводами

геологии и геофизики, а не наоборот — на основе геодезических результатов строить предположения о строении земной коры. Конечно, геодезические результаты могут и должны давать геологии и геофизике ряд новых сведений относительно распределения аномальных масс в верхних слоях земной коры (до глубины, однако, очень значительной), но отсюда еще далеко до научно-обоснованного раскрытия действительного строения земной коры. Конечно, не правы и те геологи, которые выражают мнение, что геодезия в отношении изучения земной коры дает лишь «материал» для геологии. Надлежащее использование геологами геодезических материалов должно иметь следствием освоение геодезистами новых выводов геологов и геофизиков в смысле намечения новых методов обработки астрономо-геодезических и гравиметрических материалов и новых методов интерпретации результатов этой обработки как в отношении фигуры Земли, так и в отношении строения земной коры, и в этой научной работе результаты геологии и геофизики являются «материалами» для геодезии. Не подчинение геодезии геологии, а совместная работа геодезистов, геологов и геофизиков приведет к надлежащему развитию науки о Земле.

В отношении астрономо-геодезических работ США, исполненных к настоящему времени с 1910 г., надлежит пожелать, чтобы все новые астрономические определения и новые ряды триангуляции вместе с прежними материалами подверглись новой общей обработке в целях вывода размеров и фигуры Земли, причем на ряде прежних широтных и азимутальных пунктов желательно сделать новые определения долгот, следует также дополнить существующие уже гравиметрические материалы по США, чтобы иметь возможность при новых выводах размеров эллипсоида использовать их совместно с астрономо-геодезическими материалами.

Возвращаясь к обработке материалов по США, отметим, что мы воспользовались нормальными уравнениями, приведенными в работе Хейсканена «Über die Ellipticität des Erdequators», но согласно вышесказанному азимутальные уравнения умножили на вес 0,6. Мы имеем тогда такую систему уравнений:

Из определений широт:

$$\left. \begin{array}{l} 49,3(\varphi) - 3,3(A) + 22,0u - 13,0w - 34,1 = 0 \\ 2,5(A) - 2,4u + 1,6w + 10,7 = 0 \\ 66,1u - 58,4w - 68,4 = 0 \\ 60,1w + 73,0 = 0 \end{array} \right\} \quad (67)$$

Из определений долгот:

$$\left. \begin{array}{l} 1,9(\varphi) - 2,7(\lambda) - 24,8u - 10,0w + 0,7 = 0 \\ 35,3(\lambda) + 34,4u + 13,7w + 1,8 = 0 \\ 31,6u + 126,6w - 6,6 = 0 \\ 50,3w - 2,1 = 0 \end{array} \right\} \quad (68)$$

Из определений азимутов:

$$\left. \begin{array}{l} 13,1(\varphi) + 5,88(A) - 68,3u - 27,1w + 33,7 = 0 \\ 72,7(A) - 33,9u - 13,3w - 21,4 = 0 \\ 356,9u + 142,4w - 179,2 = 0 \\ 56,7w - 74,2 = 0 \end{array} \right\} \quad (69)$$

В этих уравнениях ( $\varphi$ ) и ( $\lambda$ ) играют роль  $\delta\xi_1$  и  $\delta\eta_1$ , а неизвестное ( $A$ ) есть поправка принятого исходного азимута триангуляции; за референц-эллипсоид принят эллипсоид Кларка 1866 г., ориентированный в пункте Meades Ranch по координатам:

$$\varphi_1 = 39^{\circ}13'26'',7,$$

$$\lambda_1 = -98^{\circ}32'30'',5,$$

$$A_1 = 75^{\circ}28'14'',5.$$

Сумма уравнений (67), (68) и (69) дает:

$$\left. \begin{array}{l} 65,0(\varphi) + 2,6(A) - 2,7(\lambda) - 71,1u - 50,1w + 0,3 = 0 \\ 75,2(A) - 36,3u - 11,7w - 10,7 = 0 \\ 35,3(\lambda) + 34,4u + 13,7w + 1,8 = 0 \\ 739,3u + 210,6w - 254,2 = 0 \\ 167,1w - 3,3 = 0 \end{array} \right\}. \quad (70)$$

Решая уравнения (70), мы получаем:

$$w = -0,60;$$

$$u = +0,56,$$

или:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 1:297,7 \pm 1,6, \quad a = 6378383 \pm 52 \text{ м} \\ \text{при сжатии } 1:297,0, \quad a = 6378371 \text{ м} \end{array} \right\}. \quad (71)$$

Хейсканен получил по США:

$$\begin{aligned} \text{а Хейфорд при сжатии } 1:297,0 \quad &a = 6378391 \pm 32 \text{ м}, \\ \mu = 1:297,0 \pm 0,5, \quad &a = 6378388 \pm 18 \text{ м}. \end{aligned}$$

Средние ошибки, приписываемые Хейфордом своим результатам, были впоследствии опровергнуты Гельмертом, который приписывает выводу полуоси среднюю ошибку  $\pm 35 \text{ м}$  и выводу сжатия  $\pm 0,8$  в знаменателе. Заметим, что первоначальные результаты Хейфорда, опубликованные в 1909 г. и полученные без исправления азимутов, были таковы:

$$a = 6378283 \text{ м}; \quad \mu = 1:297,8.$$

Представляет интерес обработка материалов США при глубине компенсации 96 км (а не 120,9 км, принятой Хейфордом). При этой глубине приближенные подсчеты дают большую полуось близкой к 6378330 м и сжатие близким к 1:298,0.

### § 9. Новая астрономо-геодезическая сеть СССР

Начало новых астрономо-геодезических работ относится к 1908 г., когда было начато продолжение первоклассной триангуляции по меридиану Пулкова — от Пулкова до Николаева на Черном море. Но надлежащее развитие астрономо-геодезические работы в СССР получают с 1924 г. С этого года объем выполняемых ежегодно работ непрерывно и постоянно возрастает, доходит до выполнения в 1928 г. около 1500 км рядов триангуляции I класса, в 1929 г. — 2500 км, в 1930 г. — 3900 км,

в 1931 г. — 3800 км; с 1932 г. до настоящего времени протяжение ежегодно выполняемых рядов триангуляции I класса уже несколько превышает 5000 км. Ряды новой триангуляции I класса располагаются по меридианам и вдоль параллелей, причем хотя нормальное расстояние между смежными рядами меридионального направления и между смежными рядами вдоль параллелей принято равным 250 км, однако нередки случаи, когда это расстояние достигает 400 км. Средняя ошибка угла в новой триангуляции СССР определяется величиной  $\pm 0,7-0''$ ,8. Базисы триангуляций располагаются по ее рядам через каждые 200—250 км. В тех местах, где располагаются базисные сети, определяются непременно два астрономических пункта, совпадающих или с конечными пунктами выходной стороны базисной сети, или один астрономический пункт совпадает с концом выходной стороны, а второй — с концом самого базиса. На каждом таком астрономическом пункте определяются широта, долгота и азимут; эти астрономические пункты, составляющие пару пунктов и принадлежащие к пунктам базисной сети, находятся друг от друга в расстоянии от 10 до 30 км. На рядах I класса между базисными сетями избираются пункты, на каждом из которых также исполняются астрономические определения широты, долготы и азимута; эти «промежуточные» астрономические пункты находятся в расстоянии друг от друга и от базисных сетей около 70—100 км.

Между рядами триангуляции I класса в полигонах, ими образованных, прокладываются «основные ряды» триангуляции II класса, примерно через 100 км ряд от ряда одного направления. Точность этих основных рядов II класса мало уступает точности рядов I класса. В пересечениях взаимно перпендикулярных рядов II класса определяется астрономический пункт — именно его широта, долгота и азимут с него на ближайший пункт триангуляции II класса.

Полное выполнение указанной программы астрономо-геодезических работ, предложенной в свое время проф. Ф. Н. Красовским, приведет к тому, что по всей части территории СССР, которая будет триангулирована, астрономические пункты, доставляющие каждый уравнения и для  $\xi_1$  и для  $\eta_2$ , будут расположены сплошь и равномерно через 70—100 км друг от друга. Другими словами, через несколько лет 60% территории СССР будет так обеспечена астрономо-геодезическим материалом, что на всей этой огромной площади в 13 млн. км<sup>2</sup> будет возможно применение «принципа площадей» в чистом и полном виде при исследовании фигуры Земли.

Северные районы Азиатской части СССР, лежащие между побережьем Ледовитого океана и 64-й параллелью, представляют крайние затруднения для прокладки триангуляции по той схеме, которая приведена выше; кроме того, в такой постановке триангуляционные работы здесь не будут соответствовать и развитию и значению местного хозяйства и промышленности. В этих северных районах СССР на ближайшее десятилетие придется ограничиться проложением траверс и цепей триангуляции по главным рекам Сибири и Дальнего Востока, отстоящих друг от друга на 400—800 км. Но когда эти работы будут выполнены, то результаты их дадут, конечно, много ценного для изучения фигуры Земли.

В горных районах — Кавказ, Урал, Алтай, отроги Саян, Яблоновый хребет и т. д., предполагается, конечно, астрономическую сеть значительно стущать и расширять, т. е. давать астрономические пункты через 20—30 км по рядам триангуляции и, кроме того, охватывать ими неко-

торую полосу в ту и другую сторону от соответствующего ряда, выполнения, конечно, и тщательные геодезические определения таких боковых пунктов.

К настоящему времени из очерченной выше грандиозной программы новых астрономо-геодезических работ по СССР хорошая часть уже выполнена, и это выполненное позволяет присоединить значительный материал к материалам и градусным измерениям в Западной Европе и в США и значительно повышает вес и значение современных выводов по определению размеров земного эллипсоида.

К 1936 г. закончены в СССР следующие ряды триангуляции I класса:

- 1) по меридиану  $30^{\circ}$ — $32^{\circ}$  от Имандры (близ Мурманска) до Никлаева на Черном море, от широты  $67\frac{1}{2}^{\circ}$  до широты  $47^{\circ}$ ;
- 2) по меридиану  $36^{\circ}$  от Петрозаводска до Джанкоя в Крыму, от широты  $62^{\circ}$  до широты  $46^{\circ}$ ;
- 3) по меридиану  $42^{\circ}$  от Костромы на Волге до Зугдиди в Закавказье, между широтами  $57^{\circ}30'$  и  $42^{\circ}20'$ ;
- 4) по меридиану  $44^{\circ}$  от Горького до Сталинграда, между широтами  $56^{\circ}$  и  $48\frac{1}{2}^{\circ}$ ;
- 5) в несколько косвенном направлении к меридиану  $48^{\circ}$  от Казани через Сталинград до Астрахани, между широтами  $56^{\circ}$  и  $46^{\circ}$ ;
- 6) несколько коротких меридианых рядов, протяжением от  $4^{\circ}$  до  $8^{\circ}$  по широте по меридианам с долготами:  $56^{\circ}$  (Чердынь — Оренбург),  $63^{\circ}$  (Ирбит — Челябинск — Верхне-Тобольск),  $70^{\circ}$  (Усть-Ишимск — Атбасар),  $84^{\circ}$  (Новосибирск — Усть-Каменогорск);
- 7) по параллели  $47^{\circ}$ — $45^{\circ}$  от Тирасполя на Днестре через Джанкой до Армавира, между долготами  $30^{\circ}$  и  $42^{\circ}$ ;
- 8) по параллели  $48\frac{1}{2}^{\circ}$  от Шепетовки на западной границе СССР на Сталинград до Урала (Казахстан), от меридиана  $27^{\circ}$  до меридиана  $47^{\circ}$ ;
- 9) по параллели  $52^{\circ}$  от Гомеля на Саратов и отсюда на Акмолинск до Усть-Каменогорска, от меридиана  $30^{\circ}$  до меридиана  $82^{\circ}$ ;
- 10) по параллели  $54^{\circ}$ — $55^{\circ}$  от дуги Струве (пункты близ Немежа) на Оршу, Рязань, Ульяновск—Челябинск—Новосибирск—Красноярск, отсюда на Иркутск до Рухлова и затем по средней параллели  $52^{\circ}$  до Хабаровска: по долготе эта грандиозная дуга простирается от  $+27^{\circ}$  до  $+135^{\circ}$ , т. е. имеет беспримерную долготную амплитуду в  $108^{\circ}$ .

Геодезическая часть по этой грандиозной дуге заканчивается, но астрономические работы требуют еще дополнений — соответственно тому, что в восточной своей части от Черемхова (близ Иркутска) до Хабаровска дуга идет по горным и полугорным районам; использованию подлежит в настоящее время только западная часть этой дуги до Новосибирска с амплитудой в  $52^{\circ}$ ;

- 11) по параллели со средней широтой около  $57^{\circ}$  от Шимска (меридиан  $+30^{\circ}$ ) на Бежецк, Кострому, Горький, Казань до Чернушки (меридиан  $+55^{\circ}$ );
- 12) по параллели  $58^{\circ}$  от Глазова (Вятский край) до Ирбита (Байкалово) с амплитудой около  $14^{\circ}$ ;
- 13) по параллели Зугдиди — Тбилиси — Баку под средней широтой  $42^{\circ}$  между долготами  $+42^{\circ}$  и  $+50^{\circ}$ .

Как видно, значительная территория между параллелями  $57^{\circ}$  и  $48^{\circ}$  и между меридианами  $+30^{\circ}$  и  $+55^{\circ}$  уже сплошь и равномерно обслужена астрономо-геодезическими пунктами. К востоку от  $55$ -го меридиана до  $88$ -го меридиана эта новая сеть СССР представляется двумя рядами по параллелям  $55^{\circ}$  и  $51-52^{\circ}$  с перемычками между ними по меридианам примерно через каждые  $400$  км, т. е. после  $55$ -го меридиана до  $88$ -го меридиана охват астрономо-геодезической сетью распространяется на полосу вдоль параллели шириной только  $400-500$  км. После  $88$ -го меридиана до  $135$ -го меридиана мы имеем собственно один ряд по параллели  $54-52^{\circ}$ , только в самой восточной своей части имеющий к северу надстройку в виде коротких рядов по меридианам и по параллелям, исполняемым в настоящее время.

Характерно для этой сети СССР то, что значительные меридианные дуги имеются только в западной ее части, до  $42$ -го меридиана. Вместе с дугой Струве они (см. № 1, 2 и 3 перечня), первый раз в истории геодезии, дают группу больших меридианых дуг, располагающихся сравнительно близко друг от друга, но в общем охватывающих амплитуду по долготе в  $16^{\circ}$ , а следовательно, обслуживающих значительную территорию. Так как по географическому положению этих четырех меридианых дуг вывод большой полуоси из них мало зависит от сжатия эллипсоида, а с другой стороны, на всех этих дугах топографо-изостатические редукции ничтожны, то понятно значение их в выводе большой полуоси земного эллипсоида. Выполнением этих дуг советская геодезия доставила для изучения вопроса о фигуре и размерах Земли материал большой ценности. Несомненно, хотя вывод величины  $a$  из наших четырех меридианых дуг (включая в них и дугу Струве) имеет все-таки местное значение, но благодаря значительности охватываемой ими территории он, вместе с материалами по Европе и США, играет видную роль в установлении и общего земного эллипсоида.

К сожалению, других значительных дуг по меридианам мы в СССР еще не имеем, и, конечно, образование таких дуг, и именно в виде групп дуг, является еще задачей советской геодезии, и задачей большой.

Перечень рядов астрономо-геодезической сети СССР явно указывает на преобладание в ней дуг по параллелям. Дуги параллелей, охватывающие широтный интервал от  $57^{\circ}$  до  $48^{\circ}$  широты, располагаются только в западной половине новой сети СССР от меридиана  $+30^{\circ}$  до меридианов  $+42^{\circ}$ ,  $+47^{\circ}$  и  $+55^{\circ}$ . В восточной половине сети ряды по параллелям имеют охват с севера на юг всего в  $4^{\circ}$  вплоть до  $88$ -го меридиана, а далее к востоку широтный охват сводится к нулю. При таком размещении дуг параллелей, несмотря на огромную их суммарную длину, материал по ним не дает возможности выводить и полуось и сжатие эллипсоида.

По существу можно считать, что в астрономо-геодезической сети СССР вывод большой полуоси главным образом основывается на значениях  $\xi$ , доставляемых дугой Струве и тремя дугами по меридианам  $30-32^{\circ}$ ,  $36^{\circ}$  и  $42^{\circ}$  (в перечне рядов это № 1, 2 и 3), т. е. дугами, размещющимися на западной трети территории, охваченной градусными измерениями, если использование параллелей ограничить меридианом Новосибирска ( $+84^{\circ}$ ). Все остальные уравнения для  $\xi$  работают собственно на определение  $\xi_1$  (т. е. уклонения отвеса в меридиане Пулкова) и в слабой степени — на вывод полуоси  $a$ ; уравнения же  $\eta$ , доставляемые дугами параллелей и дугами меридианов, работают на вывод

сжатия эллипсоида и величины  $\eta_1$  (т. е. слагающего уклонения отвеса в Пулкове). Вывод полуоси из указанных четырех меридианых дуг, имея местное значение, может сопровождаться некоторым систематическим искажением, и это систематическое искажение будет лишь слабо, и может быть даже не в лучшую сторону, корректировано всем остальным материалом, так что, другими словами, из современного материала по СССР мы не можем собственно получить большой полуоси, соответствующей части территории СССР между меридианами  $+30^\circ$  и  $+84^\circ$ ; при формальной точности вывода, характеризуемой средней ошибкой около  $\pm 80$  м, полученный вывод может быть будет иметь еще систематическое искажение около  $\pm 100$  м. Это систематическое искажение полуоси вызовет в сжатии эллипсоида, определяемом главным образом уравнениями для  $\eta$  по параллелям, систематическое искажение около  $\pm 2$  единиц в знаменателе, при случайной ошибке вывода также в  $\pm 2$  единицы в знаменателе сжатия.

Таким образом современная астрономо-геодезическая сеть СССР, несмотря на значительный материал по ней, не гарантирует, вследствие географического размещения этого материала, в выводе наилучшее подходящего для СССР эллипсоида с ошибкой в полуоси его, меньшей 140 м, и с ошибкой в знаменателе сжатия, меньшей  $\pm 3$  единиц. Но, конечно, это заключение нисколько не умаляет огромного значения и ценности астрономо-геодезических материалов СССР для нового современного вывода общего земного эллипсоида. Такой вывод до сих пор представлялся собственно материалами только по США ввиду малого веса западноевропейских материалов по сравнению с североамериканскими; теперь же он будет представлен в одинаковой степени, благодаря советским материалам, и Новым и Старым светом, так как площадь, охватываемая градусными измерениями СССР и Западной Европы, почти равна площади, охватываемой астрономо-геодезической сетью США. Эту роль в международной научной геодезии современных материалов по СССР приходится особенно подчеркивать и обращать на это внимание наших геодезистов. Понятно, что завершение работ по 52-й параллели от Новосибирска до Хабаровска доставит, вместе с западноевропейской дугой по 52-й параллели, материал совсем особого значения для исследования вопроса об изменяемости сжатия с долготой, т. е. для решения вопроса о трехосности земного эллипсоида. Завершение указанных работ будет огромным событием в геодезии, имеющим большое значение в науке о Земле.

В настоящее время мы имеем в астрономо-геодезической сети СССР более трехсот пунктов Лапласа; однако целый ряд их не используется пока нами при выводе размеров и сжатия земного эллипсоида — по причинам и соображениям, приводимым ниже.

В этой сети мы могли бы составить около 240 уравнений для  $\xi$  из наблюдений астрономических широт, почти столько же уравнений для  $\eta$  из наблюдений астрономических долгот и столько же уравнений для  $\eta$  из наблюдений астрономических азимутов. Но последних уравнений для  $\eta$  из наблюдений азимутов мы совсем не используем, и здесь, конечно, лежит существенная разница между нашими вычислениями и нашим материалом и материалом и вычислениями из него элементов земного эллипсоида в США, описанными в § 8. Если в США астрономические азимуты являлись необходимым материалом для составления уравнений градусных измерений (уравнений  $\eta$ ), то у нас эти азимуты служат в отношении градусных измерений лишь подсобным

материалом, существенно повышающим точность вывода геодезических долгот и широт.

Всем геодезистам хорошо известно, что определение долгот и азимутов на каждом астрономическом пункте имеет, кроме научного, еще огромное производственное значение: азимуты Лапласа сводят почти на нет влияние накопления ошибок в ориентировании звеньев триангуляции, обусловливающего, конечно, ошибками углов треугольников триангуляции.

По существу, при пользовании азимутами Лапласа, накопление влияния ошибок углов триангуляции на ориентировку ее звена близ Хабаровска относительно звена близ Москвы оказывается, даже при таком огромном расстоянии, вряд ли более  $0''$ ,5.

Таким образом астрономические азимуты и долготы дают вместе возможность свести к очень малой величине накопления ошибок в ориентировании всех звеньев триангуляции, сводя, собственно, почти на нет влияние в этом отношении как случайных, так и систематических ошибок углов триангуляции. Действие последних, т. е. систематических ошибок углов, в обширной триангуляции было бы особенно вредно, если бы не было азимутов Лапласа; давая заметные систематические ошибки в геодезических азимутных звеньях, оно привело бы затем к заметным систематическим ошибкам в геодезических координатах.

Пример Америки (см. § 9) показывают, что при отсутствии Лапласовых азимутов систематические ошибки в ориентировании звеньев могут дойти на большой территории до нескольких секунд ( $5-6''$ ), и, конечно, тогда и систематические искажения в геодезических широтах и долготах могут дойти до величин порядка  $1\frac{1}{2}-2''$ . Но Лапласовы азимуты позволяют еще, доставляя отличный контроль угловых измерений в каждом звене, выполнять уравнение углов треугольников в отдельном звене за добавочное азимутальное условие, причем, конечно, улучшается качество отдельных элементов звена, передающих координаты внутри звена, и устраняются в известной степени деформации систематического характера внутри звена.

Из сказанного, конечно, выявляется все значение астрономических азимутов и долгот для правильного построения обширной триангуляции, в котором особенное значение имеют очень мелкие систематические ошибки углов треугольников. Совместное уравнивание углов треугольников, астрономических азимутов и долгот приводит к правильно определенным азимутам Лапласа.

С точки зрения вопроса о выводе эллипсоида из астрономо-геодезической сети устранение систематических ошибок в геодезических широтах и долготах имеет существенное значение в обширной сети; по этому поводу выше приведены убедительные цифры. Несомненно, для вывода эллипсоида мы должны выполнить предварительное уравнивание триангуляции и затем вычислять геодезические координаты, пользуясь Лапласовыми азимутами, которые тогда совпадают с азимутами геодезическими, т. е. азимутами, выводимыми по уравненным углам.

При такой постановке дела на каждом астрономическом пункте величина  $\eta_x$ , т. е. уклонение отвеса в первом вертикале, выводимое из азимутов, будет в точности равно  $\eta_x$ , т. е. уклонению отвеса в первом

вертикале, выводимому из долгот. Другими словами, уравнения для  $\gamma_\alpha$  будут следствиями уравнений  $\eta_\lambda$ , и азимутные уравнения градусных измерений сами собой отпадают. Они могут быть использованы лишь для вывода  $\Delta\alpha_1$ , т. е. поправки астрономического азимута в начальной точке триангуляции.

Нам представляется, что при принятой в СССР системе построения и обработки триангуляции I класса, основные черты которой были выше указаны, вряд ли можно говорить о заметном влиянии ошибок наблюдений в триангуляции на вывод размеров эллипсоида, как это делают в последнее время некоторые германские ученые: в отношении ориентировки элементов триангуляции этому препятствует система Лапласовых точек; если же предположить систематические ошибки в базисах в 1 : 300 000, что вряд ли возможно, то и тогда соответствующее искажение в полуоси эллипсоида составит только  $\pm 20$  м. Но в приемах обработки триангуляции могут лежать причины систематических ошибок в получаемых из нее результатах.

Выше уже указывалось, что из более чем 300 астрономических пунктов, определенных в СССР к настоящему времени, мы используем при выводе размеров эллипсоида далеко не все. Дугу 54-й параллели (в перечне № 10) мы используем пока только до Новосибирска, т. е. до меридиана  $+84^\circ$ ; в дальнейшем к востоку эта дуга вступает, начиная с Черемхова близ Иркутска, в полугорные и горные области; здесь потребуется большее, чем обычно, оснащивание геодезической сети астрономическими пунктами, охват ими некоторой полосы вдоль 54-й параллели и использование, наряду с астрономическими, гравиметрических материалов. (Напомним, что в районе оз. Байкала уклонение отвеса изменяется в пределах нескольких десятков секунд). По тем же соображениям мы не используем дуги по параллели Зугдиди — Тбилиси — Баку (в перечне № 13) и южной части дуги Кострома — Армавир, а именно: не используем звено Армавир — Зугдиди, здесь приходится учитывать влияние Кавказа, и без гравиметрических материалов, которые еще не собраны, не следует применять теорию изостатической компенсации, дающую, по Хейсканену, для Кавказа малообъяснимую глубину компенсации около 250 км. Отbrasывая указанные ряды, мы получаем сеть с 250\* астрономическими пунктами, из которых, однако, 76 двойных (парных в базисных сетях), т. е. по существу имеем 173 места, на которых определены астрономические пункты. Этот материал (или, вернее, несколько меньший) был впервые обработан под моим руководством в 1934—1935 гг. и результаты доложены 8-й Балтийской геодезической конференции в Таллине в 1935 г. (см. Prof. Th. Krassowsky. „Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neuen Gradmessungen“, Verhandlungen der Achten Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission). В дальнейшем, т. е. в 1935 и 1936 гг., использование сети СССР с целью вывода размеров земного эллипсоида и сопоставлений результатов, получаемых по разным странам, конечно, продолжалось и будет продолжаться — как потому, что с каждым годом в СССР мы получаем новые обширные астрономо-геодезические материалы, так и потому, что одновременно подвигается разработка методов вывода эллипсоида из градусных измерений, в особенности имея в виду использование быстро накапливаемых по СССР гравиметрических материалов.

\* Сюда входят и 13 пунктов дуги Струве.

В настоящей статье мы приведем сначала сведения о работе, выполненной к половине 1935 г. и доложенной мною 8-й геодезической конференции в Таллине, а затем я остановлюсь кратко на дальнейшей разработке вопроса, которая находится «в ходу», и результаты которой к настоящему моменту имеют, конечно, временное значение.

Территория, на которой располагаются ряды триангуляции, использованные в обработке 1934—1935 гг., представляется крайне благоприятной в том отношении, что, за исключением некоторого, очень небольшого, ничтожного их числа, все остальные астрономические пункты располагаются в местности низменной и равнинной, на значительных расстояниях (500—600 и более километров) от районов с горным или полугорным рельефом. Пунктами, располагающимися вблизи значительного рельефа, оказываются: 1) два пункта по 52-й параллели, там, где она пересекает Урал, но здесь, в южной конечности Урала, вершины гор имеют высоту всего 300 м; 2) два пункта по 55-й параллели, там, где она пересекает Урал, — здесь вершины хребта имеют высоты около 900 м, однако наши астрономические пункты находятся от них в расстоянии почти 100 км, и поэтому влияние горного хребта здесь выражается в астрономических координатах величиной, меньшей 1",5; 3) пять пунктов по меридиану Чердынь — Оренбург, из которых некоторые лежат близко от Уральского хребта; 4) Армавир, конечный пункт дуги Кострома — Армавир, на астрономические координаты которого Кавказ влияет на величину около 3"; 5) два пункта на самом восточном конце 52-й параллели, находящиеся вблизи Усть-Каменогорска, где оказывается в слабой степени (величиной около 3") влияние Тарбагатая, Алтая и массивов Тянь-Шаня. Все эти пункты не составляют и 5% от общего их числа, и, кроме того, влияние горного рельефа оказывается на астрономических координатах каждого из них величиной одного порядка (или даже меньшей) со случайным уклонением отвеса в самой благоприятной местности, все-таки выражаящимся средней величиной около  $\pm 2",5$ .

Эти обстоятельства послужили достаточным основанием к тому, что в обработке 1934—1935 гг. были использованы астрономические координаты пунктов градусных измерений СССР без введения в эти координаты топографо-изостатических редукций. Это одна из основных черт первого вывода эллипсоида из материалов СССР. Если мы имеем более чем благоприятные условия в отношении действия внешнего рельефа на астрономические широты и долготы астрономических пунктов новой сети СССР, то далеко не так обстоит дело в отношении влияния подземных залеганий в виде четвертичных отложений и опустившихся на ту или иную глубину горных хребтов, покрытых ныне мощным слоем наносов. К западу от Волги мы имеем ряд мест, приходящихся на низменной равнине и удаленных более чем на 1000 км от горных районов, в которых, однако, уклонения отвеса доходят до 12". Такие пункты находятся в районе Лодейчое Поле — Белое озеро, в районе Гомеля, вблизи Москвы, вблизи Рязани и т. д. Это районы чисто местных аномалий силы тяжести, захватывающие каждый небольшую площадь. Обычно в смежных астрономических пунктах, окружающих пункт с заметным, но чисто местного происхождения уклонением отвеса, уклонения отвеса уже малы, и тогда имеются основания к его отбрасыванию, хотя и удержание такого пункта в обработке дает ничтожное влияние, если только он не приходится на самом конце меридианной дуги или дуги по параллели. Мы предпочли исключать такие пункты, в которых

чисто местное уклонение отвеса, быстро сходящее на нет, достигает 8 и более секунд. Именно, мы исключили: парный пункт в Лодейном Поле, один пункт в Гомеле, один пункт Гадячской базисной сети, один пункт по ряду Переяславль — Николаев; всего к западу от Волги нами было исключено четыре пункта, из них один — двойной.

К востоку от Волги и вблизи самой Волги обнаруживаются, наоборот, целые значительные по площади районы, в которых уклонения отвеса имеют явно выраженный систематический характер, причем в некоторых точках таких районов и числовое значение уклонений отвеса достигает заметных величин. Средняя Волга от Казани до Сталинграда характеризуется уклонениями отвеса по широте (величины  $\xi$ ), имеющими вообще относительно Пулкова отрицательный знак и приводящими к значению большой полуоси  $a$  эллипсоида (при Бесселевом сжатии) несколько менее 6 377 000 м (т. е. к меньшему Бесселевой полуоси на 400 м)! Правда, продолжение Волжской меридианной дуги от Сталинграда до Астрахани характеризуется заметными уклонениями отвеса по широте до  $+ 6''$ , которые вызывают уже увеличение выводимой полуоси против Бесселевой, но ряд Сталинград — Астрахань — II класса и имеет всего две астрономические точки.

Меридианный ряд Чердынь — Оренбург имеет систематический характер уклонения отвеса по широте и дает при сжатии по Бесселю большую полуось около 6 376 700 м! (т. е. меньшую, чем по Хейфорду, почти на 2 км). Здесь, очевидно, вблизи Урала мы имеем вздутие геоида в меридиональном направлении, вызванное продолжениями Урала под землей, которые не учитываются при введении топографоизостатических редукций и действие которых на точки по ряду Чердынь — Оренбург гораздо более значительно, чем действие самого Урала.

От линии Самара — Камышин на Уральск и Оренбург тянется полоса, в которой имеются систематического характера уклонения отвеса по широте, достигающие местами значений 10—11''. Может быть здесь имеет место продолжение южной части Уральского хребта, направляющееся к Волге.

Несомненно, правильное использование астрономических пунктов, приходящихся: вблизи Волги с запада, на самой Волге, между Волгой и Уралом и на самом Урале, обязательно требует соответствующего гравиметрического материала, если мы имеем задачу дать уравнения  $\xi$  и  $\eta$  для вывода общего земного эллипса, а не эллипса, наилучше подходящего для Европейской части СССР.

При том геометрическом методе решения этой задачи, который применялся в 1934—1935 гг., естественно возникла мысль о неиспользовании вовсе материала, относящегося к меридианным дугам в области между Волгой и Уралом. Если бы в этой области те горные массивы, которые вызывают здесь отмеченный выше характер и величины уклонений отвеса, находились над дневной поверхностью земли, то до получения вполне надежных редукций в астрономические широты и долготы использование соответствующих астрономических точек, конечно, было бы отложено.

Все результаты по большим градусным измерениям показывают, что общий земной эллипсоид имеет большую полуось, по крайней мере на 700 м большую, чем она установлена Бесселем. Поэтому введение в общую обработку меридианных дуг, дающих для той же полуоси

значение меньшее, чем по Бесселю, на 700—800 м, представляется сомнительным, пока не будут соответственно учтены влияния подземных залеганий, тем более, что продолжения интересующей нас территории к северу и к югу не освещены еще астрономо-геодезическим материалом и что совсем отсутствуют меридианы дуги и к востоку от нее, а два — три пункта, лежащие на параллели Астрахань — Урда, показывают, что здесь как будто уже имеет место волна геоида противоположного характера. Если бы мы в своем решении преследовали вывод наилучше подходящего для территории Европейской части СССР эллипсоида, то и тогда, вследствие невыясненности уклонений  $\xi$  отвеса к северу от Казани и к югу от линии Стalingрад — Оренбург, использование чисто геометрическим методом материала по области между Волгой и Уралом вызывало бы сомнения.

На основании приведенных соображений уравнения для  $\xi$  (широтные уравнения градусных измерений) в решении 1934—1935 гг. вовсе не были приняты для всех пунктов по Волге, между Волгой и Уралом и по самому Уралу. Но при получении решения 1934—1935 гг. мы пошли еще дальше: в нем были отброшены все уравнения для  $\xi$ , доставляемые пунктами на 52-й и 54—55-й параллелях, лежащими к востоку от Урала. Так как здесь мы имеем широтный размах всего в 2—3°, то, конечно, по существу величины  $\xi$ , которые должны принадлежать градусным измерениям по меридианам для астропунктов в этой части СССР, относятся к градусному измерению по параллели и не выясняют вовсе никаких профилей геоида; соответственно этому уравнения для  $\xi$  по этим пунктам слабо влияют на вывод эллипса. Но в нашем случае, вследствие значительного удаления от исходного пункта в Пулкове на восток, все эти  $\xi$  могут иметь систематические искажения вследствие ошибки в исходном геодезическом азимуте или вследствие неточности в установлении поправки  $\Delta\alpha_1$  этого азимута; кроме того, ряд  $\xi$  для пунктов в районе южного Казахстана (районы Усть-Каменогорска и Караганды) имеют заметные искажения, обусловленные близостью горного рельефа (Алтай).

Таким образом в решении 1934—1935 гг. мы использовали уравнения для  $\xi$  только по пунктам, лежащим западнее меридиана Горького; уравнения же для  $\eta$  были составлены вообще по всем астрономическим пунктам, за исключением десяти, в которых имеется крупное уклонение отвеса, обусловленное чисто местными причинами.

Присоединение к материалам по Америке и по Западной Европе, редуцированным на основе применения теории изостатической компенсации, материалов по СССР, безупречных и при невведении в них каких-либо редакций, — вот основной мотив отбора материалов в решении 1934—1935 гг., первом по времени.

Особенностью определения геодезических широт и долгот в астрономо-геодезической сети СССР является то, что они вычислены, после общего уравнивания сети за условия Лапласа и условия координат в полигонах I класса, на эллипсоиде Бесселя, принимая за исходные геодезические координаты астрономические координаты Пулкова (центр круглого зала), а за исходный геодезический азимут — азимут Лапласов\* в Саблине (в 10 км от Пулкова), переданный геодезически на

\* Вернее, азимут, близкий к Лапласову в Саблине (см. введение доц. А. Вировца к каталогу тригонометрических пунктов СССР).

Пулково. Соответственно этому уравнения (21) для  $\xi$  и  $\eta$ , приведенные выше, несколько видоизменяются и в строгой форме получают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= p_1^{1,k} \xi_1 - p_4^{1,k} d\alpha_1 + p_4^{1,k} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_5^{1,k} \frac{\Delta a}{a_0} - p_6^{1,k} \Delta \mu + (\varphi_k - B_k) - \\ &\quad - p_4^{1,k} (\alpha_1 - A_1); \\ \eta_k &= q_1^{1,k} \cos \varphi_k \xi_1 - q_4^{1,k} \cos \varphi_k d\alpha_1 + \\ &+ \sec \varphi_1 (\cos \varphi_k + q_4^{1,k} \sin \varphi_1 \cos \varphi_k) \eta_1 - q_5 \cos \varphi_k \frac{\Delta a}{a_0} - q_6 \cos \varphi_k \Delta \mu + \\ &+ (\lambda_k - L_k) \cos \varphi_k - q_4^{1,k} \cos \varphi_k (\alpha_1 - A_1), \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где  $A_1$  — принятый исходный геодезический азимут.

Если обозначить через  $dA_1$  поправку начального геодезического азимута в Пулкове, то можно написать еще уравнения для  $\xi_k$  и  $\eta_k$  в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= p_1^{1,k} \xi_1 - p_4^{1,k} dA_1 - p_5^{1,k} \frac{\Delta a}{a_0} - p_6^{1,k} \Delta \mu + (\varphi_k - B_k); \\ \eta_k &= q_1^{1,k} \cos \varphi_k \xi_1 - q_4^{1,k} \cos \varphi_k dA_1 + \\ &+ \sec \varphi_1 \cos \varphi_k \eta_1 - q_5^{1,k} \cos \varphi_k \frac{\Delta a}{a_0} - q_6^{1,k} \cos \varphi_k \Delta \mu + \\ &+ (\lambda_k - L_k) \cos \varphi_k, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

и это именно форма, примененная нами в первом решении, по существу совпадающая с формой, принятой Хейфордом, так как ошибку астрономических широты и долготы в Пулкове следует считать равной нулю.

Так как  $A_1$  очень близко к

$$A_1 = \alpha_1 - \eta_1^\circ \operatorname{tg} \varphi_1,$$

где  $\eta_1^\circ$  — выведенное в 1930 г. Институтом геодезии и картографии на основании обработки астрономо-геодезической сети Европейской части СССР значение  $\eta_1$  в Пулкове, то  $dA_1$  не может превысить  $\pm 1''$ .

Принимая  $dA_1$  равным  $\pm 1''$ , были исполнены пробные вычисления, которые показали, что в нашей сети влияние пренебрежения величиной  $dA_1$  в  $1''$  вызывает перемену в получаемом сжатии эллипсоида только на 0,2 единицы в знаменателе сжатия и на 4 м — в значении большой полуоси. Этот благоприятный результат обусловлен, конечно, географическим расположением рядов нашей сети; он позволил нам в первом решении просто пренебречь членами с  $dA_1$ , тем более, что уравнения (73) не дают сколько-нибудь надежного определения этого неизвестного. Уравнений (73) было составлено — 95 для  $\xi$  и 235 для  $\eta$ . По исключении из них  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и перечислении коэффициентов на эллипсоид Кларка 1866 г., были получены такие нормальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 520,3 u + 304,1 w + 314,7 &= 0 \\ 210,8 w + 213,7 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (74)$$

в которых  $u = 20\ 000 \frac{\Delta a}{a_0}$  и  $w = 20\ 000 \Delta \mu$ .

Уравнения (74) дают:

$$\underline{a = 6\ 378\ 182 \text{ м} \pm 96 \text{ м}; \mu = 1:298,97 \pm 2,0} \quad (75)$$

$$\begin{array}{l} \text{При сжатии } 1:299,15 \dots \dots \dots a = 6\ 378\ 189 \text{ м;} \\ \text{, , , } 1:297,0 \dots \dots \dots a = 6\ 378\ 097 \text{ м.} \end{array}$$

Отметим, что если бы мы уравнения для  $\xi$  составили и использовали по всем пунктам сети СССР, т. е. не делая того значительного отбрасывания уравнений для  $\xi$ , которое имело место в решении 1934—1935 гг., то мы получили бы:

$$\underline{a = 6\ 378\ 146 \text{ м}; \mu = 1:300,7}, \quad (76)$$

или при сжатии 1 : 299,15 имели бы  $a = 6\ 378\ 085 \text{ м}$ .

Напомним, что нами было получено в § 7, 8 и 9 при сжатии 1 : 297,0:

$$\begin{array}{ll} \text{по США . . . . .} & a = 6\ 378\ 371 \text{ м} \\ \text{, Западной Европе . . . . .} & a = 6\ 378\ 271 \text{ "} \\ \text{, 52-й параллели . . . . .} & a = 6\ 377\ 955 \text{ "} \\ \text{, Западноевропейскому меридиану} & a = 6\ 378\ 395 \text{ "} \\ \text{, дуге Струве . . . . .} & a = 6\ 378\ 481 \text{ "} \end{array}$$

Несомненно, вывод (76), дающий по сравнению с выводом (75) заметное, на 100 м, уменьшение большой полуоси эллипсоида, стоит в гораздо большем противоречии с выводами по другим странам, чем вывод (75).

Так как в выводах (75) и (76) участвуют полностью дуга Струве, дающая самое большое значение полуоси  $a$ , и примыкающие к ней значительные меридианные дуги, дающие для  $a$  примерно 6 378 280 м, то обращает на себя внимание факт, что из всей сети СССР мы получаем для большой полуоси значение, на 200 и 300 м меньшее, чем по Западной Европе и США. Этот факт может быть объяснен главным образом трехосностью земного эллипсоида. По этому поводу уже приведены достаточно убедительные данные и таблицы в моей статье в «Геодезисте» № 7 (стр. 14—16).

Если наибольший меридиан земного трехосного эллипсоида имеет долготу  $+10^\circ - +15^\circ$ , то главные наши советские дуги по параллели  $52^\circ$  и  $54^\circ$  располагаются симметрично по отношению к среднему меридиану трехосного эллипсоида и поэтому влияние трехосности на вывод из этих двух параллелей равно нулю. С другой стороны, дуги по меридианам Струве  $30^\circ$ ,  $36^\circ$  и  $42^\circ$  будут давать при неучете трехосности и при экваториальном сжатии 1 : 30 000 вывод большой полуоси, преувеличенный на 60—90 м, между тем как дуги по параллелям  $46^\circ$ ,  $48^\circ$  и  $57^\circ$  будут давать для большой полуоси значение, преуменьшенное на 140—160 м. В общем же мы должны ожидать при экваториальном сжатии 1 : 30 000 значение большой полуоси, искаженное всего на 10—20 м, если учет трехосности не имеет места. Так как, видимо, сжатие «среднего» эллипсоида около 1 : 298,6, а экваториальная его полуось близка к 6 378 220 м, то, конечно, вывод (75) дает результат, прекрасно согласующийся с общими выводами по США и по Западной Европе, между тем как вывод (76) заметно отклоняется от согласованности с этими общими выводами. Таким образом мы получаем еще одно подтверждение правильности отбора материала, примененного при получении решения 1934—1935 гг. Это решение было первым, но оно оказалось очень важным, подтвердив трехосность земного эллипсоида — по крайней мере для зоны, занятой США, Западной Европой и той

частью СССР, которая покрыта вошедшей в нашу обработку новой астрономо-геодезической сетью СССР.

Получение новых выводов из сети СССР, входящее в план работ Научного института геодезии и картографии, включает в себя такие моменты и такие изменения по сравнению с проделанной уже в 1934 г. работой:

а) составление уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  по завершаемым в настоящее время и последующие годы рядам триангуляций I класса — на севере Европейской части СССР, на Кавказе, в южном Казахстане, по параллели Новосибирск — Хабаровск и т. д.;

б) вычисление топографо-изостатических редукций в астрономические широты и долготы пунктов градусных измерений, причем имеется в виду это выполнить не для всех пунктов: значительное число пунктов в соответствующих районах, для которых предварительные исследования дают редукции, меньшие  $0''$ ,2, останется без редукций; значительные затруднения в этой работе возникнут по рядам от Красноярска до Хабаровска из-за отсутствия надлежащего гипсометрического материала, и для этой части придется ограничиться лишь приближенными подсчетами;

в) составление карт изоаномал по результатам общей гравиметрической съемки СССР, вывод на основании использования этих карт уклонений отвеса, сопоставления этих «гравиметрических» уклонений отвеса с топографо-изостатическими и выводы относительно отбора астрономо-геодезического материала и введения редукций в астрономические координаты пунктов наших градусных измерений.

Мы уже располагаем значительным материалом к настоящему времени по общей гравиметрической съемке СССР для того, чтобы в ряде равнинных районов на основании гравиметрических данных выяснить действие подземных залеганий на уклонение отвеса; конечно, это даст возможность применения новых методов при использовании в целях градусных измерений рядов близ Волги, по самой Волге, между Волгой и Уралом и вблизи Урала и обеспечит заметное увеличение используемых астрономо-геодезических материалов.

Таким образом тот большой астрономо-геодезический материал, который собран до 1936 г., в значительной своей части будет подвергнут в ближайшее время новой обработке, основанной на использовании гравиметрического материала. Полагаю, что этот момент заслуживает быть отмеченным в истории геодезии; к соответствующим возможностям советские геодезисты подошли первыми, и они же первыми разрабатывают соответствующую методику по линии Научного института геодезии и картографии. Отметим, что получение этих результатов возможно только в стране победившего социализма, в которой науке отведено одно из почетнейших мест.

Кавказ еще не полностью обслужен гравиметрически; кроме того, здесь и со стороны методической будут затруднения, которые не имеют места в равнинных районах. Также ждет очереди в отношении гравиметрического освещения и часть большой дуги по 52-й параллели от Красноярска до Хабаровска. Но все это — дело нескольких лет, и недалек тот момент, когда в СССР будет получен вывод размеров и сжатия земного эллипсоида и результаты по исследованию его трехосности, которые и по научной обоснованности, и по значению выводов, и по громадности материала оставят за собой далеко позади то, что исполнено в этом направлении до сих пор.

Нужно отметить еще следующее в исполнении работ по выводу эллипсоида. Рассмотрение уклонений отвеса в парных пунктах (пунктах Лапласа в базисных сетях) показывает, что собственно в пределах точности астрономических определений эти уклонения повторяют друг друга в парных пунктах, за исключением нескольких единичных мест. Поэтому несомненно, что уравнения для  $\xi$  и  $\eta$ , следует соответственно объединять по таким парным пунктам, давая одно среднее уравнение для  $\xi$  и одно среднее для  $\eta$ , приписывая, однако, таким уравнениям вес, равный единице. Соединение парных уравнений выполняется в настоящее время, причем оказывается, что в результате оно заметно сказывается на величине сжатия эллипсоида в сторону его уменьшения (до 1 : 302), в то время как большая полуось изменяется мало.

Далее, учет трехосности, распространенный на огромную территорию, требует повышения тщательности в вычислении коэффициентов, выраждающих влияние трехосности, причем уравнения (72) пополняются еще двумя членами с неизвестными  $p$  и  $q$ :

$$p = i \cdot \cos 2\lambda_0;$$

$$q = i \cdot \sin 2\lambda_0,$$

где  $i$  — экваториальное сжатие, а  $\lambda_0$  — долгота от Гринвича наибольшего меридиана.

Так как в уравнения (72) будет, следовательно, входить семь неизвестных, из которых  $d\alpha_1$  определяется очень ненадежно (вследствие указанного уже выше очень малого влияния членов с  $d\alpha_1$  на  $\xi$  и  $\eta$ ), то придется составить, пользуясь материалом по астрономически определенным азимутам, особое уравнение для  $d\alpha_1$ , решаемое путем приближений. Установленное таким образом  $d\alpha_1$  затем будет подставлено в уравнения (72). Освободиться вполне от нагрузки, доставляемой неизвестными  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , не представляется возможным, но  $\xi_1$  и  $\eta_1$  могут быть определены гравиметрически, и сопоставления таких гравиметрически установленных значений  $\xi_1$  и  $\eta_1$  со значениями их, получаемыми из уравнений (72), приведут к существенным корректировкам при выводе основных неизвестных  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\mu$ ,  $p$  и  $q$ . Об использовании гравиметрических материалов в таком направлении уже сказано в моей статье в «Геодезисте» № 7 (стр. 6—9). При этом придется для нашей сети исходный пункт перенести из Пулкова в Новосибирск.

В завершение этого параграфа я должен упомянуть об ошибке, допущенной мною: в формулы (23) члены  $\Delta\alpha_1$  не должны входить вовсе, и в силе остаются формулы, данные Гельмертом.

## § 10. Двухосный эллипсоид по результатам всех градусных измерений

Существенный пробел в материалах, рассмотренных нами, составляет отсутствие больших астрономо-геодезических материалов по Индии и материалов по измерению большой меридианной дуги в Африке. К сожалению, мы еще не располагаем, кроме общих и устарелых результатов, нужными материалами по этим важным градусным измерениям и не можем поэтому в настоящее время присоединить уравнения градусных измерений в Индии и в Африке к уравнениям по США, Западной Европе и СССР.

Уже по этой причине приводимый ниже вывод двухосного эллипсоида не может претендовать на значение исчерпывающего вопрос и имеющего решающий характер вывода. Но, конечно, приходится еще учитывать введение в обработку в недалеком будущем больших новейших материалов по СССР, которые будут доставлены работами 1936—1939 гг. и влияние которых будет очень заметным. Наконец, если при выводе двухосного эллипсоида мы не учитываем трехосности, то получаем результат, заведомо искаженный. При соединении уравнений градусных измерений разных стран в одно целое неизбежно приходится в настоящее время мириться с тем, что геодезическая связь этих стран отсутствует и что поэтому материал по каждой стране вводит, кроме основных неизвестных, еще два неизвестных в виде  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , относящихся именно к этой стране и различных для разных стран. Конечно, это сказывается невыгодно на определении основных неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta \rho$ . Существенное улучшение может, однако, внести надежное гравиметрическое определение величин  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , о чем уже сказано выше.

В разных странах материал по градусным измерениям очень различен в смысле числа астрономических пунктов, приходящихся на единицу площади, или в смысле густоты профилей геоида, получаемых на основании результатов градусных измерений. Если в США мы имеем охват градусными измерениями в сей площади страны и густую сеть профилей геоида в направлении меридианов и параллелей, то в Западной Европе, если не принимать в расчет Германию, господствует освещение профилей геоида лишь по некоторым линиям без территориального охвата ими Франции и Австрии. В СССР по Европейской части мы имеем построение астрономо-геодезической сети, совпадающее в смысле густоты взятых профилей геоида с построениями в США, но к востоку от 60-го меридиана характер этого построения заметно нарушается.

Там, где проведен принцип площадей, мы получаем нормальные уравнения градусных измерений с очень большими числовыми значениями коэффициентов при неизвестных; там, где господствуют градусные измерения по линиям, хотя бы и очень большим и очень поэтому ценным, мы получаем в нормальных уравнениях коэффициенты при тех же неизвестных сравнительно малыми, фактически при соединении уравнений по Западной Европе с уравнениями по США первые совсем поглощаются последними. Отсюда возникает вопрос о придании соответствующих весов нормальным уравнениям, доставляемым разными странами. Этот вопрос не имеет математического решения и поэтому может с равными основаниями решаться по-разному. К счастью, оказывается, что большой простор в выборе весов оказывается сравнительно мало на результатах по выводу эллипсоида из соединенных материалов по разным странам.

По Хейканену мы имеем такие нормальные уравнения по США:

$$\begin{aligned} 746,2 u + 181,3 w - 350,2 &= 0 \\ + 135,9 w - 35,0 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (77)$$

причем они получены в результате соединения астрономических пунктов США в группы и замены всех пунктов каждой группы одним фиктивным пунктом со «средним» уклонением отвеса, причем уравнениям для  $\xi$  и  $\eta$  по такому фиктивному пункту приписывается вес, равный единице, а в группу включалось от одного до восьми пунктов. Такой метод использования материала между прочим имел в виду желание не дать гра-

дусным измерениям по США излишне большого веса при присоединении к ним градусных измерений Европы. Так как при решении уравнений (77) получаются результаты:

$$a = 6\ 378\ 396 \text{ м и } \mu = 1 : 297,4,$$

т. е. крайне близкие к результатам по Хейфорду, то можно лишь удивляться удачному соединению Хейсканеном астрономических пунктов США в его группы. Заметим, что если не делать соединений астрономических пунктов в группы, то по США мы имели бы:

$$\left. \begin{array}{l} 2405,6 u + 514,1 w - 1165,5 = 0 \\ + 583,2 w - 50,9 = 0 \end{array} \right\} \quad (78)$$

(см. Красовский „Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neueren Gradmessungen“, стр. 192)

В § 8 приведены общие уравнения (58) по Западной Европе, включая и уравнения по дуге Струве, в таком виде:

$$\left. \begin{array}{l} 121,25 u + 4,32 w - 23,15 = 0 \\ + 26,23 w + 38,45 = 0 \end{array} \right\}. \quad (58)$$

В § 9 мы имели уравнения (70) по США, полученные нами взамен (77), но на основании того же соединения астропунктов в группы, как у Хейсканена. Исключение из (70) неизвестных ( $\varphi$ ), ( $A$ ) и ( $\lambda$ ) дает уравнения по США:

$$\left. \begin{array}{l} 618,4 u + 141,2 w - 260,2 = 0 \\ + 123,4 w - 5,0 = 0 \end{array} \right\}. \quad (79)$$

Сравнение (58), (78) и (79) показывает, что без обсуждения вопроса о весе градусных измерений Европы нельзя приступить к соединению их с таковыми же по США. Нам представляется, что после сделанного нами присоединения части 48-й параллели к градусным измерениям Западной Европы и вследствие благоприятных, в смысле незначительности уклонений отвеса, условий для градусных измерений в тех районах, по которым проходят дуга Струве и дуга 52-й параллели, можно признать, что градусные измерения Западной Европы как бы покрывают почти всю площадь, лежащую между Западноевропейским меридианом, дугой Струве и 48-й параллелью, т. е. обслуживают примерно  $\frac{1}{3}$  площади Европы, или территорию в 1500 тыс.  $\text{км}^2$ . Другими словами, так как площадь США равна 7500 тыс.  $\text{км}^2$ , то вес уравнений по Западной Европе должен составлять 1 : 5 веса уравнений по США. Показателем веса уравнений типа (78) или (58) можно считать значение квадратического коэффициента при  $u$ . Очевидно, что если уравнения по Западной Европе оставить в виде группы (58), то уравнения по США можно оставить в виде группы (79), т. е. применить по США принцип соединения астропунктов в группы по Хейсканену.

Площадь, охватываемую используемой нами триангуляцией СССР, включая в нее и дугу Струве, нужно оценивать равной 5000 тыс.  $\text{км}^2$ . Следовательно, вес уравнений СССР должен составлять 0,67 по отношению к весу уравнений США. Если бы мы взяли по СССР тот же самый материал, на основании которого получены уравнения (74), но соединили бы в один фиктивный пункт пару Лапласовых пунктов, имеющихся в каждой базисной сети (см. об этом в § 10), то в (74) коэффициент при  $u$  был бы не 520, а 353. Умножение же коэффициента при  $u$  в первом из уравнений (79) на 0,6 дает 370.

Отсюда вытекает, что вес уравнений СССР может быть принят равным 0,7, если уравнения по США представлять группой (79), а по СССР — группой (74). Заметим, что в «Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neuen Gradmessungen» группа (78) представила США, а группы (74) и (58) — СССР и Западную Европу, придавая при этом всем трем группам веса, равные единице. Представляется, что новое решение с установлением весов единицы для групп (79) и (58) и 0,7 — для группы (74) более обосновано.

Итак, мы имеем:  
по США с весом единица

$$\begin{aligned} 618,4 u + 141,2 w - 260,2 = 0 \\ + 123,4 w - 5,0 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (79)$$

по Западной Европе с весом единица

$$\begin{aligned} 121,3 u + 4,3 w - 23,2 = 0 \\ + 26,3 w + 38,5 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (58)$$

по СССР, без дуги Струве, вес 0,7

$$\begin{aligned} 493,9 u + 300,5 w + 334,0 = 0 \\ + 209,6 w + 217,1 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (74)$$

По сложении этих уравнений получаем:

I. Западная Европа и СССР:

$$\begin{aligned} + 467,0 u + 214,7 w + 210,6 = 0 \\ + 173,0 w + 190,5 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (80)$$

II. Западная Европа и США:

$$\begin{aligned} + 739,7 u + 145,5 w - 283,4 = 0 \\ + 149,7 w + 33,5 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (81)$$

III. Западная Европа, СССР и США:

$$\begin{aligned} + 1085,4 u + 355,9 w - 49,6 = 0 \\ + 296,4 w + 185,5 = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (82)$$

Уравнения (80) дают:

$$\begin{aligned} u = + 0,129; \quad a = 6378247 m \pm 58 m \\ w = - 1,261; \quad \mu = 1:300, 59 \pm 1,4 \\ \text{при сжатии } 1:297,0 \quad a = \quad 6378129 m \\ \text{, , , } 1:298,6 \quad a = \quad 6378183 m \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (83)$$

Уравнения (81) дают:

$$\begin{aligned} u = + 0,528; \quad a = 6378373 m \pm 35 m \\ w = - 0,736; \quad \mu = 1:298,24 \pm 1,1 \\ \text{при сжатии } 1:297,0; \quad a = 637835,6 m \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (84)$$

Уравнения (82) дают:

$$\begin{aligned} u = + 0,414; \quad a = 6378338 m \pm 32 m \\ w = - 1,123; \quad \mu = 1:299,97 \pm 0,85 \\ \text{при сжатии } 1:297,0 \quad a = \quad 6378268 m \\ \text{, , , } 1:298,6 \quad a = \quad 6378307 m \end{aligned} \quad \left. \right\}; \quad (85)$$

Эти результаты не вполне совпадают с теми, которые ранее были получены мною и которые приведены в «Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neueren Gradmessungen»; тогда по США и по Западной Европе мною были просто использованы результаты Хейсканена; теперь же использованы результаты переработки, приведенные и описанные в § 6б, бв, бг, 7 и 8. Результаты (83), (84) и (85) не согласуются при сжатии 1 : 297 более чем на 200 м (на 227 м), совсем не соответственно приписываемым этим результатам средним ошибкам. Так как в больших сетях и дугах часто местные влияния ничтожно оказываются на результатах вывода из них эллипсоида, то полученные несогласия, превышающие ожидаемые в  $2\frac{1}{2}$  раза, должно отнести отчасти за счет неправильности редуцирования астрономических широт и долгот на основании применения теории изостатической компенсации (это может относиться к результатам по США), а главным образом за счет крупных волн геоида, за счет систематических отступлений геоида от эллипсоида вращения, охватывающих площади порядка материков.

Допустим, что сжатие среднего эллипса равно 1 : 298,6, что долгота наибольшего меридиана равна  $+10^\circ$ , что экваториальное сжатие трехосного эллипса равно 1 : 30 000. С этими величинами подсчитаем влияние трехосности на вывод большой полуоси из материалов (80), (81) и (82). Мы не будем здесь приводить самих расчетов, а дадим только их результаты:

по СССР и Западной Европе получаем . . . .  $a = 6378193$  м\*;

„ Западной Европе и США получаем . . . .  $a = 6378235$  м\*;

„ СССР, США и Западной Европе получаем  $a = 6378210$  м\*.

Получилась поразительная сходимость результатов. Однако ее можно объяснить не существованием трехосности, а таким подбором параметров трехосного эллипса, при котором обеспечивается просто алгебраически совместность уравнений (81), (82) и (83) по введении в них соответствующих добавочных членов, выражающих влияние. Но должно сказать, во-первых, что принятые параметры трехосного эллипса очень близки к их значениям, полученным из суммы нормальных уравнений по СССР, США и Западной Европе, между тем как вообще решение, удовлетворяющее сумме групп нормальных уравнений, не будет удовлетворять тем, отвечающим каждая независимым наблюдениям группам нормальных уравнений, из которых такая сумма составилась. Во-вторых, достаточно убедительной является следующая таблица значений полуоси  $a$  при сжатии 1 : 298,6 без введения и с введением влияния трехосности:

|  | Без введения<br>трехосности | С учетом<br>трехосности               |
|--|-----------------------------|---------------------------------------|
| США . . . . .                            | 6 378 398 м                 | 6 378 222 м                           |
| СССР . . . . .                           | 6 378 170 "                 | 6 378 165 "                           |
| Западная Европа . .                      | 6 378 300 "                 | 6 378 315 " (без 48-й па-<br>раллели) |
| Дуга Струве . . . . .                    | 6 378 494 "                 | 6 378 388 "                           |
| Дуга 52-й параллели                      |                             |                                       |
| Западной Европы . .                      | 6 378 024 "                 | 6 378 276 "                           |
| Западноевропейский<br>меридиан . . . . . | 6 378 353 "                 | 6 378 296 "                           |
| 24-я параллель Индии                     | 6 378 361 "                 | 6 378 192 " (приближенно)             |

\* Без 48-й параллели.

Если принять во внимание, что дуга Струве дает заведомо увеличенный результат, то хорошая сходимость чисел этой таблицы достаточно убедительна, в особенности принимая во внимание и результат по дуге Индии\*.

Заметим, что в «Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neueren Gradmessungen» я существенно иначе решал вопрос о весах уравнений по СССР, США и Западной Европе. Но прежний результат, приведенный в этой моей работе, отличается несущественно от результата, полученного в настоящей статье. Именно, я имел ранее:

$$\text{при сжатии } 1:298,6; \lambda_0 = +18^\circ . . . . . a = 6\,378\,296 \text{ м}$$

$$\text{, , , } 1:298,6; \lambda_0 = +10 . . . . . a = 6\,378\,250 \text{ м}$$

$$\text{Теперь , , , } 1:298,6 \text{ и } \lambda_0 = +10 . . . . . a = 6\,378\,210 \text{ м}$$

Так как перечисления результатов градусных измерений, исполненные мною в § 6а, 6б, 6в и 6г, привели везде к некоторым уменьшениям значений большой полуоси, то разница в 40 м объясняется отчасти этим обстоятельством.

Нам думается, что в настоящее время вероятнейшие размеры общего земного эллипсоида вращения всего лучше представляются результатом:

$$a = 6\,378\,210 \text{ м} \pm 32 \text{ м и } \mu = 1:298,6 \pm 0,9.$$

Замечательно, что этот результат очень близок к тому, который дает одна сеть СССР, использованная так, как это было сделано в 1934—1935 гг. Возможно, что в геодезическом производстве следует принять большую полуось по выводу Кларка 1866 г. ( $a = 6\,378\,206 \text{ м}$ ) и оставить сжатие по Бесселю. Во всяком случае изложенная моя работа показывает, что введение эллипсоида Хейсканена в геодезических производствах некоторых стран было преждевременно; заметим, что в США применяется эллипсоид не Хейфорда, а Кларка 1866 г.

### § 11. Общее заключение

Исполненный нами обзор градусных измерений и их результатов показывает, что в этом деле отсутствует проект развития астрономо-геодезических и гравиметрических работ, отвечающий в первую очередь научным задачам изучения Земли и ее размеров.

Следует также отметить, что возможности к этому очень ограничены во всех странах, кроме СССР. Поэтому нужно надеяться, что в СССР в недалеком будущем будет осуществлен ряд геодезических работ, важных в научном отношении, хотя непосредственной необходимости в них для практических целей пока и не будет. К таким работам относится, между прочим, работа по геодезическому соединению СССР и США, выполнение которой составит, конечно, эпоху в геодезии и в общемировой науке. Несомненно, советским геодезистам выпадает на долю и выполнение значительной части мировой гравиметрической съемки, важность которой уже была выяснена в предыдущих параграфах. Задача установления советского эллипсоида должна решаться в связи с задачей установления общего земного эллипсоида; в этой задаче

\* Хорошо сходятся при учете трехосности с вышеупомянутыми результатами и выводы из южной части дуги 30-го меридиана в Африке.

новые методы, основанные на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических результатов, дадут не только уточнение выводов, освобождая их от местных влияний, но и ускорение в решении задачи. Разработка этих методов в СССР успешно продвигается. Содержание § 10 с очевидностью показывает, какое огромное значение имеет присоединение градусных измерений СССР, выполненных к 1935 г., к материалам по другим странам: все прежние выводы стали непрочными и, наоборот, коррективы, полученные благодаря сети СССР, привели все в хорошее согласие. Трехосность земного эллипсоида нельзя сколько-нибудь надежно установить ни по материалам США, ни по материалам США и Западной Европы; только суммарный материал по СССР, США и Западной Европе дает уверенность в определении элементов трехосности, но окончательно эта задача будет решена все-таки по присоединении к использованным в настоящей работе материалов измерения по 52-й параллели от Новосибирска до Хабаровска. Крайне поэтому желательно ускорение проведения по этой дуге в необходимом объеме астрономических и гравиметрических работ.

---

## **НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ УСТАНОВКИ В СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ И В ПРОГРАММАХ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Надлежащая точность проектирования обширной триангуляции на поверхность принятого при ее обработке референц-эллипсоида достигается только в том случае, когда известны высоты измеренных базисов не над уровнем океана, а над поверхностью именно этого эллипсоида или, другими словами, когда известны высоты геоида в местах расположения базисов над поверхностью этого эллипсоида. Только при этом условии мы получим из последующей обработки триангуляции именно те геодезические координаты и азимуты ее пунктов, которые будут вполне соответствовать геодезическим координатам и азимутам высшей геодезии.

Вопрос этот достаточно освещен в моем докладе «Соображения по установлению эллипсоида для геодезических работ в СССР», сделанном на 7-й конференции Балтийской геодезической комиссии.

Но может быть существенно иной подход к вопросу перехода от триангуляции, проложенной в натуре, к триангуляции на принятом референц-эллипсоиде: после редуцирования измеренных базисов на уровень океана просто будем развертывать или, вернее, укладывать треугольники триангуляции на поверхности референц-эллипсоида. При таком «укладывании», если станем сохранять длины, то углы будут искажаться, но совершенно неощутимо, даже при большой территории, порядка США, и даже при значительном отступлении размеров референц-эллипсоида от наилучшего подходящего для данной большой страны эллипса.

По существу, во всех странах в настоящее время при обработке геодезических материалов применяется именно этот процесс «укладывания» триангуляции на референц-эллипсоиде, а не процесс проектирования на его поверхность нормальми к ней в соответствующих пунктах земной поверхности. В результате мы не получаем при этом геодезических координат в том понимании их, как это установлено в высшей геодезии; мы получаем какие-то «геодезические» широты и долготы, которым нельзя дать геометрического определения и аналитическая связь которых с настоящими геодезическими координатами отсутствует<sup>1</sup>.

Конечно, одно дело, когда эти недочеты и неясности в обработке больших геодезических материалов вызваны отсутствием соответствующих данных; но совсем другое дело, когда описанный выше процесс «укладывания» защищается как вполне нормальный, базируясь, например, при этом на то, что огромный полигон, охватывающий почти всю территорию США, получает ничтожную добавочную невязку, если его укладывать не на эллипсоиде Кларка 1866 г., а на эллипсоиде Бесселя.

Понятно, что со времени опубликования Гауссом результатов применения в геодезии конформного отображения эллипсоида на шаре доказывать путем длинных выкладок и тонких соображений ничтожность этой невязки совершенно излишне.

Нам кажется, что вопрос простоты и легкости обработки должен быть снят и устранен в геодезических работах, если он сводится к приемам, приводящим к неопределенным и неясным в геометрическом отношении результатам, в особенности в виде системы координат, не имеющей геометрического определения.

Нужно сказать, что, по смыслу получения уравнений астрономо-геодезической сети для слагающих уклонений отвеса  $\xi$  и  $\eta$ , входящие в свободные члены этих уравнений геодезические широты и долготы должны быть вычисляемы с радиусами кривизны для референц-эллипсоида. Если бы в этих вычислениях мы пользовались длинами геодезических линий, отнесенными также на поверхность референц-эллипса, путем проектирования нормалями к ней на концах каждой геодезической линии, то в уравнениях градусных измерений должны бы быть члены  $p_3ds$  и  $q_3ds$ , в которых учитывается различие проекций длины геодезической линии на искомый и на референц-эллипс.

Фактически мы вводим в указанные уравнения длины геодезических линий, отнесенные к поверхности океана (геоида), и, тем самым, применяем для получения свободных членов уравнений градусных измерений тот же прием «укладывания», но без учета членов  $p_3ds'$  и  $q_3ds'$ , в которых тогда под  $ds'$  нужно понимать отличие проекции геодезической линии на поверхности искомого эллипса от проекции ее на геоид.

Так как среднее квадратическое значение высоты  $h$  любого пункта геоида над средним эллипсом должно оценивать в  $\pm 50$  м, то применяемый в настоящее время прием обработки градусных измерений, при очень медленных и малых изменениях  $h$  в пределах большого района (негорного), сопровождается среднеквадратическими искажениями вывода большой полуоси порядка  $\pm 40-50$  м из отдельных дуг даже длиною 15—20°, из-за невозможности введения поправок вида  $P_3ds'$  и  $q_3ds'$ . Как эти искажения компенсируются при увеличении числа дуг — остается неизвестным, и во всяком случае здесь лежит причина, заметно влияющая на точность выводов в отношении фигуры и размеров Земли даже из больших геодезических материалов.

Представим теперь себе, что тем или другим путем над удалось определить высоты  $h$  геоида над референц-эллипсом. Тогда мы, конечно, получаем все возможности точного проектирования пунктов триангуляции на поверхность референц-эллипса нормалями к ней в этих пунктах и получаем именно только тогда систему геодезических координат, отчетливо и ясно формулированную геометрически.

Далее, пользуясь данным мною уравнением:

$$h_i = \left(1 - \frac{\cos \psi}{k_0}\right) \Delta a + \frac{a \sin^2 \varphi}{k_0^3} \left[ \cos \psi - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \left(2 - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right) \right] \Delta \mu - \\ - \frac{M_2}{\rho''} \sin \psi \cos \alpha_0 \xi_0 - \frac{N_0}{\rho''} \sin \psi \sin \alpha \eta_0 + \cos \psi h_0$$

в моем вышеуказанном докладе на 7-й конференции Балтийской геодезической комиссии для высоты  $h$ , искомого эллипса над референц-эллипсом, мы можем поправки  $p_3ds$  и  $q_3ds$  выразить через  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,

$\xi_0$  и  $\eta_0$ . Именно  $ds = \frac{h_i}{R} \cdot S$ , если пренебречь малыми влияниями угла в концах геодезической линии между нормалями к референц-эллипсоиду и искомому эллипсоиду. Тогда при составлении уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  представляется следующий совершенно отчетливый путь:

а) Геодезические широты и долготы, отнесенные именно к референц-эллипсоиду и входящие в свободные члены уравнений градусных измерений, будут получены с полною точностью, благодаря редуцированию базисов триангуляции за высоты  $h_i$ , соответствующих им мест геоида на поверхность референц-эллипса.

б) В эти уравнения вводятся поправки  $p_3 ds$  и  $q_3 ds$ , выраженные через  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , вследствие чего не будут введены новые добавочные неизвестные, кроме высоты  $h_0$  искомого эллипса над референц-эллипсом в исходном пункте триангуляции. Таким образом исчезнет пренебрежение поправками  $p_3 ds'$  и  $q_3 ds'$ . Понятно, что  $h_0$  будет определяться из уравнений для  $\xi$  и  $\eta$ , с малой надежностью. Но нам представляется следующий способ определения  $h_0$  (и устранения, следовательно, его из числа неизвестных), который реально будет, вероятно, осуществимым в не так далеком будущем.

Если говорить о СССР, то развитие общей гравиметрической съемки доставит через несколько лет такие пункты в средине территории, относительно которых сплошная гравиметрическая изученность будет распространяться кругом на расстояние 2500—2700 км. Для таких пунктов по формуле Стокса высота  $N_0$  геоида над поверхностью нормального сфера будет определена с погрешностью, вообще меньшую  $\pm 10$  м. Для одного из таких пунктов следует, на основании теории Стокса, вывести  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , что, вероятно, удастся выполнить с средней ошибкой результата, не превышающей  $\pm 0''.6$ . Конечно, и вывод  $N_0$ , и вывод  $\xi_0$  и  $\eta_0$  должен быть проверен по другим пунктам. Приняв  $h_0 = H_0 - N_0$ , где  $H_0$  — высота геоида в исходном пункте над референц-эллипсом, в большинстве случаев равная нулю и во всяком случае нам известная, и подставив в уравнения градусного измерения вместо  $\xi_0$  и  $\eta_0$  их значения, установленные гравиметрически, мы заставим искомый эллипсoid касаться нормального сфера в исходном пункте триангуляции, что конечно и нужно проводить в геодезии. Определение  $h_0$  с ошибкой, не превышающей  $\pm 10$  м, конечно, вполне достаточно.

Я полагаю, что и в Западной Европе, и в США, путем не так больших дополнений уже выполненных гравиметрических работ, дополнений, охватывающих, однако, некоторые части океанов, примыкающих к территории Западной Европы и США, удастся через некоторое время иметь центральные пункты, относительно которых сплошная изученность территории в гравиметрическом отношении будет распространяться кругом на расстояние порядка 2500 км.

Итак, выше намечены основные положения, принятие которых, по нашему мнению, внесет ясность в составление уравнений градусных измерений и, кроме того, приведет к устраниению в значительной степени местных влияний на вывод размеров эллипса, т. е. влияний пользования базисами триангуляции, отнесенными не к поверхности нормального сфера. (Если бы гравиметрическая съемка покрывала сплошь и равномерно всю территорию большого государства и распространялась, кроме того, на 600—800 км за его границы везде, то для геодезических пунктов можно было бы с достаточной надежностью вывести

величины  $N$  и получить затем непосредственно поправки  $p_3 ds'$  и  $q_3 ds'$ , причем так называемые «геодезические широты и долготы» в уравнениях градусных измерений тогда нужно было бы вычислять, как это и сейчас делается, с длинами геодезических линий, относящихся к поверхности геоида). При геодезической несвязанности триангуляций разных стран, вызывающей при совместной обработке градусных измерений в них все-таки вывод разных эллипсоидов — все одинаковых и тех же размеров, но разно расположенных в земном теле, принятие и проведение этих положений, конечно, в очень заметной степени устранит различие в положениях этих эллипсоидов, и во всяком случае отсутствовавшая до сих пор связь выводимого из отдельных градусных измерений эллипсоида с общим земным эллипсоидом устанавливается постольку, поскольку это зависит от достижения хорошей точности определения  $N_0$ ,  $\xi_0$  и  $\eta_0$  в исходных центральных пунктах астрономо-геодезических сетей разных стран.

Практически осуществление предлагаемой мною методики обработки градусных измерений требует:

а) определения высот геоида  $h_i$  над референц-эллипсоидом в астрономо-геодезических сетях;

б) избрания в каждой стране центрального пункта, вблизи которого в радиусе 150—200 км нужно провести детальную гравиметрическую съемку, затем в зоне между радиусами 200 км и 1000 км дать гравиметрические пункты с расстояниями между ними 30—50 км, а в зоне между радиусами 1000 км и 2700—3000 км дать гравиметрические пункты с расстоянием между ними в среднем 90—100 км;

в) усиления мировой гравиметрической съемки — на океанах, в Африке, в Арктике и в частях Азии, примыкающих с юга к СССР и с северо-востока — к Индии.

Пункт «а» этих требований уже осуществляется в СССР. Для этого в негорных районах оказывается достаточным иметь по рядам триангуляции астрономически определенные пункты через 70 км и гравиметрическую съемку, охватывающую полосу вдоль триангуляционного ряда шириной около 250 км. В горных районах, вероятно, придется иметь астропункты через 15—20 км, а гравиметрической съемкой охватывать весь район, включая и предгорья. Методика этих работ по пункту «а» разработана по моему предложению и при моем участии в Научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии инженером-геодезистом М. С. Молоденским. Статья его по этому вопросу представляется вниманию 9-й конференции Балтийской геодезической комиссии<sup>2</sup>. В 1935 году Научно-исследовательский институт геодезии, аэрофотосъемки и картографии выполнил работы по пункту «а» на дуге меридiana от Пулкова до Орши, длиной 700 км, в 1936 году эти работы охватывают дугу 54-й параллели от Орши до Урала, от меридiana  $+30^\circ$  до меридiana  $+61^\circ$ .

Работы по пункту «б» в СССР вероятно будут проведены через 4—5 лет.

Что касается пункта «в», то здесь, очевидно, нужны энергичные усилия международных геодезических организаций в получении постоянных кредитов на мировую гравиметрическую съемку, которая должна быть поставлена, как отдельное предприятие среди международных научных предприятий. Конечно, пора в этом деле оставить надежду на случайные экспедиции.

В заключение отметим, что введение в программу градусных измерений гравиметрического изучения вдоль рядов триангуляции I класса полосы шириной около 250—300 км должно быть признано во всех странах обязательным и проводиться в полном объеме<sup>3</sup>.

Этот гравиметрический материал будет работать не только в целях, указанных в настоящем докладе: он позволит внести надежно поправки в астрономические широты и долготы там, где эти наблюденные величины искажены заметно чисто местными влияниями — при условии, конечно, хотя бы приближенного освещения в гравиметрическом отношении зон в радиусе до 1000 км.

# ГРАДУСНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СССР, ВЫВОД РАЗМЕРОВ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И ИССЛЕДОВАНИЕ ФИГУРЫ ГЕОИДА

## § 1. Общие соображения относительно вывода земного эллипсоида из астрономо-геодезических материалов

В прошлом столетии градусные измерения обрабатывали, используя только собранный при выполнении их астрономо-геодезический материал, т. е. решалась задача вывода размеров эллипсоида под условием минимума  $\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2$ , причем под  $\xi$  и  $\eta$  понимаются слагающие уклонения отвесной линии от нормалей к искомому эллипсоиду в астрономических пунктах градусных измерений. Астрономические пункты на дугах градусных измерений во времена Струве брали примерно через 200 км друг от друга, за исключением работ англичан в Индии, где пришли к мысли брать так называемые «групповые» астрономические пункты. В конце прошлого столетия и в начале текущего астрономические пункты по дугам градусных измерений берут через значительно меньшие промежутки, а именно через 40—70 км; на главных дугах своих градусных измерений в Индии англичане определяют астрономические пункты в последнее время через промежутки в среднем всего в 16 км. Если мы имеем некоторое градусное измерение в виде отдельной дуги, то применение условия минимума  $\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2$  определенно устанавливает задачу обработки такого градусного измерения, как отыскание только местного эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду соответствующей своей частью на протяжении нашей дуги, причем эта задача в случае дуги по параллели становится неопределенной, заменяясь лишь выводом радиуса окружности, наилучше подходящей к параллели геоида.

Понятно, в этой задаче нельзя помириться со случайностью выбора астроцентров, взятых через 200 или даже через 100 км вдоль дуги градусного измерения. Очевидно, при решении этой задачи мы должны иметь такое расстояние между астрономическими пунктами градусного измерения, при котором становилось бы возможным интерполирование величин  $\xi$  и  $\eta$  для пунктов, лежащих между смежными астрономическими пунктами градусного измерения, а тогда, как показывают материалы по распределению уклонений отвеса, астрономические пункты по дугам градусных измерений должны располагаться в расстоянии друг от друга всего 15—25 км в равнинных местностях и 5—10 км — в горных районах.

Представим себе теперь, что мы имеем несколько не связанных между собой градусных измерений, исполненных в разных странах. Этот случай являлся основным при выводе размеров земного эллипсоида в минувшем столетии и остается таким, правда, с некоторыми изменениями в обработке материалов, и по настоящее время. Вывод

Кларка, основывающийся на наибольшем материале из выводов XIX столетия, включал: дуги градусных измерений в Индии, не связанную с ними дугу Струве и не связанное с ними и с дугой Струве англо-французское измерение по нулевому меридиану, а также совсем особняком стоящее старое градусное измерение англичан в Африке. Если мы обрабатываем  $n$  дуг градусных измерений, между собой не связанных, то минимум  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2$ , конечно, не возмещает отсутствия связей между этими дугами, и в результате общей обработки этих дуг мы получаем  $n$  эллипсоидов, имеющих все одни и те же размеры, но расположенных в земном теле различно и связь которых между собой и с общим земным эллипсоидом остается неизвестной. Только при предположении, что отступления геоида от общего земного эллипса имеют характер мелких и коротких волн, обусловленных чисто местными причинами, мы получаем основание применять здесь условие минимума  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2$  и считать, что получаемые при применении этого условия средняя ошибка в большой полуоси эллипса и средняя ошибка в сжатии его дают возможность оценить близость выведенного из  $n$  дуг эллипса к общему земному эллипсу.

Такое именно предположение лежало в основе выводов XIX столетия, и так как оно не соответствует действительности, то, конечно, получают соответствующую оценку и эти выводы земного эллипса, сделанные в минувшем столетии.

Наличие общих отступлений геоида от эллипса в виде широких волн, достигающих высоты до 200 м и захватывающих огромные площади (порядка, может быть, до четвертой части поверхности земного шара), требует вообще предварительного выделения из величин  $\xi$  и  $\eta$  соответствующих этим общим отступлениям геоида от эллипса систематических частей. Без выполнения этого, решение задачи приводит к установлению  $n$  эллипсов, при котором требование подыскивать наилучший эллипс к какой-нибудь отдельной дуге отсутствует, а вводится геометрически неопределенное или геометрически не выражаемое требование — дать общие размеры всем этим эллипсам, образуя из полученных разрозненных по  $n$  дугам профилей геоида какой-то комплекс, вовсе не считаясь при этом с различием положений этих профилей по долготе. Вероятность приближения вывода из  $n$  дуг к выводу размеров общего земного эллипса не может быть установлена. Влияние общих отступлений геоида от эллипса на вывод размеров эллипса может быть в несколько раз большим, чем наибольшая величина этих отступлений. Мы не можем даже отрицать случаев, когда увеличение числа дуг будет приводить не к улучшению, а к ухудшению результатов. Если, например, градусные измерения СССР будут выполнены по параллелям от нашей западной границы до Тихого океана, а по меридианам — через примерно равные промежутки по долготе до параллели  $60^\circ$ , то присоединение к ним градусных измерений в Индии и в Индо-Китае приведет к искажению размера экваториальной оси примерно на +100 м, если существует трехосность земного эллипса, или если волны геоида в зоне  $60-20^\circ$  широты располагаются подобно тому, как это имеет место при трехосности эллипса. Полученный при этом эллипс в отношении наилучше подходящего к геоиду на территории СССР будет иметь преувеличенную большую ось на 100 м, а в отношении наилучше подходящего к геоиду в Индии и Индо-Китае — будет иметь преуменьшенную большую полуось на 200—250 м.

Если бы мы знали уже характер и географическое распределение общих отступлений геоида от эллипсоида, то, конечно, мы соответственно располагали бы дуги градусных измерений так, чтобы ослабить влияние этих отступлений на вывод размеров земного эллипсоида. Однако, до сих пор выполненные градусные измерения размещались соответственно исполняемым для практических целей триангуляциям без всякого при этом учета особенностей столь сложной поверхности, каковой является поверхность геоида. Вынужденный упрощенный подход в постановке задачи делает то, что выводимый из современных градусных измерений под условием минимума  $(\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2)$  эллипсоид ( $a$ , вернее,  $n$  эллипсоидов) получает размеры, в значительной мере зависящие от случайного подбора дуг градусных измерений, вовсе не отражающего смену главных перегибов поверхности геоида.

Вычисляемая по способу наименьших квадратов ошибка этих размеров характеризует лишь влияние на вывод их отступлений профилей геоида по взятым дугам градусных измерений от какого-то, достаточно хорошо подходящего к комплексу этих профилей эллипсоида, ориентируемого притом особо для каждой дуги. Степень близости размеров такого эллипсоида к размерам общего земного эллипсоида эта средняя ошибка представлять не может. Отметим, что случайность подбора дуг обусловила различие почти в 1000 м в размере большой полуоси эллипсоида в двух хорошо известных выводах — Бесселя и Кларка.

Мы остановимся теперь еще на одном методе вывода размеров эллипсоида из астрономо-геодезических результатов.

Представим себе, что в большой стране мы построили, покрыв всю ее территорию, астрономо-геодезическую сеть в виде рядов триангуляции I класса, проложенных по меридианам и по параллелям, а также в некоторых случаях и по иным направлениям. Эти ряды, допустим, идут в расстояниях друг от друга в 200—300 км и образуют систему геодезических полигонов триангуляции I класса, покрывающих всю территорию. По рядам триангуляции I класса и непременно в их пересечениях пусть мы определили астрономические пункты с такими расстояниями между ними, которые позволяют построить профили геоида по триангуляционным рядам нашей астрономо-геодезической сети и притом в общей связи их друг с другом. Для каждого астрономического пункта в такой астрономо-геодезической сети мы можем написать уравнения или только для  $\xi$ , или только для  $\eta$ , или и для  $\xi$  и для  $\eta$ . Решая все эти уравнения вместе под условием минимума  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2$ , мы, очевидно, из собранного указанным образом материала выведем с хорошей надежностью эллипсоид, наилучше подходящий к поверхности геоида в пределах рассматриваемой страны.

Задача здесь, конечно, геометрически вполне определенная, но связь этого наилучше подходящего эллипсоида с общим земным эллипсоидом остается неизвестной, и если даже рассматриваемая страна имеет площадь порядка площади США или СССР, то степень близости этого наилучше подходящего эллипсоида к общему земному эллипсоиду не может быть надежно установлена при применении одних астрономо-геодезических методов.

В самом начале текущего столетия американские геодезисты применили при выводе размеров и положения эллипсоида из астрономо-геодезической сети США теорию изостатической компенсации по Пратту.

Топографо-изостатические редукции  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$ , вводимые соответственно в астрономические широты  $\varphi$  и астрономические долготы  $\lambda$ , представляют собой поправки в  $\varphi$  и  $\lambda$  за суммарное влияние на направление отвесной линии в данной точке окружающего ее топографического рельефа, высящегося над уровнем моря, и «компенсирующего» слоя, заключенного между уровнем моря и поверхностью «изостазии». Эта поверхность изостазии является одной из уровенных поверхностей и характеризуется тем, что на ней наступает постоянство давления масс, лежащих выше ее. Вряд ли можно отрицать существование изостатической компенсации в среднем для всей поверхности земного шара, но, во-первых, схема этой компенсации не может считаться установленной, а, во-вторых, по отношению к отдельным точкам и целым районам и даже областям компенсация может быть или неполной, или совсем отсутствовать, или даже быть избыточной. Соображения, что величины  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$  при разных схемах изостатической компенсации мало различаются между собой, мало приемлемы для геодезистов в силу того, что эти малые различия имеют определенно систематический характер и при переходе к изучению фигуры Земли в целом могут сыграть заметную роль. Введение редукций  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$  в виде поправок в астрономические широты и долготы приводит к замене действительного геоида «изостатическим геоидом». Если допустить, согласно теории изостазии, что все процессы, обусловливавшие образование земной коры и вызывавшие и вызывающие изменения в ее строении, сосредоточивались в слое, лежащем выше поверхности изостазии, а ниже этой поверхности всегда в более или менее полной степени выполнялись условия гидростатического равновесия, то «изостатический геоид» в целом близок к тому эллипсоиду вращения, который в геодезии мы называем общим земным эллипсоидом. По выводам из обработки материалов по США «изостатический геоид» ближе в пять раз на территории США к общему земному эллипсоиду, чем действительный геоид. При наличии изостазии и изостатической компенсации введение топографо-изостатических редукций  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$  в астрономические широты и долготы равносильно значительному приближению в общем и целом для всей Земли направлений отвесных линий в астрономических пунктах градусных измерений к направлениям в них же нормалей к поверхности общего земного эллипса.

Этот вывод, несомненно, является очень существенным для геодезии, но, конечно, применение его к отдельным дугам градусных измерений и даже к целому комплексу градусных измерений может не приводить к успеху. Градусные измерения США и измерения в США силы тяжести приводят к заключениям о полном успехе применения гипотезы изостазии по Пратту при глубине компенсации от 60 до 114 км. Астрономо-геодезические работы по СССР приводят к существенно иным выводам: компенсация Урала в значительной степени неполная; в Поволжье не замечается никакой компенсации; на Кавказе эффект введения топографо-изостатических редукций сказывается лишь при глубине компенсации, большей 250 км, что собственно ставит задачу подтверждения изостазии в такую плоскость: для любого района можно подогнать такую глубину изостазии, при которой установится хорошее согласие между исправленными топографо-изостатическими редукциями, астрономическими широтами и долготами и геодезическими широтами и долготами тех же пунктов, исправленными в свою очередь за переход от референц-эллипса к наилучше подходящему

для данного района эллипсоиду. В средней части Индии изостатическая компенсация также оказывается далеко неполной. Для Восточной Сибири и Дальнего Востока, наоборот, повидимому, изостатическая компенсация подтверждается достаточно хорошо<sup>1</sup>. На территории СССР во многих ее частях имеет место следующее: или на обширной равнинной и низменной территории мы имеем на некоторой глубине залегания вещества малой плотности, и, конечно, иногда в этом случае топографо-изостатические редукции, равные нулю, вовсе не учитывают влияния подземного залегания, вызывающего уклонения отвеса до 5—8", которые на достаточно обширной территории иногда имеют в известной степени систематический характер (Поволжье); или на низменной равнине простираются погребенные под толстым слоем наносов продолжения горных хребтов и плоскогорий, когда-то подвергшихся значительному опусканию. Неучет этих обстоятельств ведет нередко к тому, что знаки топографо-изостатических редукций оказываются явно неверными в ряде пунктов, приходящихся вблизи таких погребенных продолжений горных систем, а самые редукции — не исправляющими астрономические широту и долготу соответственного пункта градусного измерения, а заметно их искажающими (на величину до 8—10"). Все эти обстоятельства должны быть учитываемы при применении теории изостазии к обработке астрономо-геодезических материалов по градусным измерениям.

Англичане в Индии, ввиду наличия в средней части страны целой системы мощных подземных горных хребтов, отказались совсем от применения этой теории. Наоборот, результаты применения этой теории к западноевропейским градусным измерениям оказались в общем достаточно благоприятными.

Спрашивается, что нового вносит применение теории изостазии в программу градусных измерений? Необходимость подтверждения изостатической компенсации в данном районе из сопоставлений астрономо-геодезических уклонений отвеса со значением величин  $D_m$  и  $D_p$ ; необходимость обнаружения и выделения тех районов и областей, где по причинам геологического характера топографо-изостатические редукции не являются функциями только высоты топографического рельефа над уровнем моря, — все это заставляет брать астрономические пункты по дугам градусных измерений достаточно часто, вероятно не реже чем через 30 км друг от друга, и покрывать, кроме того, по нашему мнению, триангуляцией полосу той или иной ширины, иногда в 200—300 км вдоль дуги градусного измерения, с определением в этой триангуляции ряда астрономических пунктов, лежащих в стороне от дуги градусного измерения. Потому что, если для ряда пунктов градусного измерения применение теории изостазии дает сомнительные результаты, то выяснение нарушений компенсации, хотя бы только в разрезе геодезическом, должно быть сделано, а это требует, конечно, освещения распределения по площади остаточных несогласий между астрономическими исправлениями за изостазию и геодезическими результатами, также исправленными за поправки размеров осей референц-эллипсоида.

Переход, после введения топографо-изостатических редукций, к изостатическому геоиду заставляет заменить действительный геоид этим изостатическим геоидом во всех приведенных выше соображениях о значении вывода размеров эллипсоида из отдельного градусного измерения или из  $n$  не связанных между собой дуг. Мы получаем также  $n$  эллипсоидов, имеющих все одни и те же размеры, но расположенные

женных различно в земном теле, однако, в виде общего правила можем ожидать, что полученные размеры эллипсоида значительно ближе к таковым же для общего земного эллипсоида, чем получаемые из того же материала без применения изостазии. К сожалению, об успехе применения изостазии мы можем судить лишь по заметному уменьшению  $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$ , понимая под  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$  остаточные несогласия в величинах  $\varphi - D_m$  и  $\lambda - D_p \sec \varphi$  с величинами геодезических широт  $B$  и долгот  $L$ , отнесенных к выведеному эллипсоиду. Этот признак, однако, косвенный; кроме того, в величинах  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$  остается всегда систематическая часть, обусловленная и неверностью принимаемой схемы изостатической компенсации, и неверностью принимаемой глубины компенсации, и нарушениями условий гидростатического равновесия в слоях, лежащих ниже поверхности изостазии, и неполнотой компенсации в тех или других районах. Неразделимость в  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$  случайной и систематической частей, конечно, ведет к преувеличению точностей получаемых при применении изостазии выводов. Очевидно, надлежащие обоснования применения теории изостазии в геодезии мы должны получать из результатов геологических и геофизических исследований, которые, однако, до сих пор не отвечают в этом отношении запросам геодезии. Поэтому же, думается, мы не можем с полной уверенностью относиться к выводам размеров земного эллипсоида, полученных даже из очень больших материалов на основании применения теории изостазии.

Одновременно с применением теории изостазии американские геодезисты выдвинули так называемый «метод площадей»<sup>2</sup>. О нем мы уже говорили, когда касались вопроса вывода эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду в пределах территории некоторой большой страны. Построение на всей территории страны астрономо-геодезической сети, с расстояниями в 200—300 км между рядами триангуляции I класса, идущими по меридианам, и между рядами той же триангуляции, идущими по земным параллелям\*; определение по этим рядам (и непременно в их пересечениях друг с другом) астрономических пунктов, по широте и долготе каждого, при среднем расстоянии между смежными по ряду астрономическими пунктами в 30—40 км; составление уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  не по дугам (меридианов или параллелей), а так, как это делается при обработке астрономо-геодезической сети, — вот что является характерным для «метода площадей».

Несомненно, получение профилей геоида по взаимно перпендикулярным направлениям существенно для изучения этой сложной поверхности, как и всякой другой; целая система таких профилей, связанных между собой, получаемая при применении метода площадей, дает возможность представить поверхность геоида системой связанных в одно целое и известных геометрически его небольших частей, соответствующих каждой одной клетке астрономо-геодезической сети. «Методу площадей» американцы противопоставляют «метод дуг», когда из проложенных на территории данной страны триангуляционных рядов выбираются для целей градусных измерений лишь немногие, образующие значительные по длине дуги и оснащаемые надлежаще астрономическими пунктами.

\* Ряды по меридианам и параллелям могут быть заменены рядами по произвольным направлениям, но также разбивающими территорию на ряд клеток.

Примером «метода дуг» могут служить западноевропейские градусные измерения. Именно в Западной Европе мы имеем: дугу градусного измерения по нулевому меридиану, проходящую через Англию, Францию, Испанию и кончающуюся в Алжире; западноевропейское измерение по 52-й параллели, проходящее через Ирландию, Англию, Бельгию и Германию, причем германская часть дуги представляет астрономо-геодезическую сеть, вытянутую по параллели полосой в 300—600 км ширины; известную дугу Струве, следующую примерно по 25-му меридиану и простирающуюся от мыса Нордкап на Ледовитом океане до устья Дуная, измеренную в свое время русскими геодезистами. Хотя эти дуги между собой и связаны, но об охвате ими площади говорить не приходится. Хотя Англия, Франция и Испания покрыты рядами и сетями триангуляции I класса, однако, ни во Франции, ни в Испании астрономо-геодезической сети, покрывающей всю территорию государства, не имеется, и только по дуге нулевого меридиана астрономические пункты расположены достаточно часто; дуга Струве хотя геодезически связана с нашими триангуляциями I класса, но надлежащее оснащение астрономическими пунктами этой замечательной дуги и рядов, соединяющих ее с нашей астрономо-геодезической сетью, не было выполнено. Конечно, проведение перехода от метода дуг к методу площадей на всей территории Западной Европы является первоочередной обязанностью Международного геодезического союза.

## § 2. Использование гравиметрических материалов совместно с астрономо-геодезическими

Измерения силы тяжести дают возможность исследовать и определить отступления геоида от «нормального» сфера; форма (но не размеры) нормального сфера определяется соответствующей формулой нормальной силы тяжести. Гравиметрические работы позволяют определить высоту  $N$  любой точки геоида над нормальным сфероидом и, следовательно, позволяют связать профиль геоида, полученный из некоторого градусного измерения, с поверхностью нормального сфера. С другой стороны, гравиметрические результаты позволяют определить наклон элемента поверхности геоида относительно соответствующего ему элемента поверхности нормального сфера и, следовательно, позволяют вывести уклонения отвесных линий относительно нормалей к поверхности нормального сфера. Так как нормальный сфера допустимо не различать от общего земного эллипсоида (если сжатие последнего взять равным сжатию нормального сфера), то очевидна громадная ценность для основной задачи геодезии надлежащего использования и надлежащего собирания гравиметрических материалов.

Гравиметрия доставляет нам высоты  $N$  ряда интересующих нас точек геоида над поверхностью нормального сфера и слагающие  $\xi^g$  и  $\eta^g$  уклонений отвеса в астрономических пунктах градусных измерений относительно нормалей в тех же точках к поверхности нормального сфера. Мы, следовательно, имея гравиметрические материалы, можем: а) отнести (редуцировать) результаты всех геодезических наблюдений к поверхности общего земного эллипсоида (вернее, нормального сфера), что имеет немаловажное значение при использовании и

обработке больших астрономо-геодезических сетей для правильного получения из них размеров земного эллипсоида; б) ввести в астрономические широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$  астрономических пунктов градусных измерений поправки в виде —  $\xi^g$  и —  $\eta^g \sec \varphi$  и тем самым получить широты  $B_0$  и долготы  $L_0$ , отнесенные к общему земному эллипсоиду, или «истинные» широты и долготы. Конечно, аналогичный метод мы имели при выше очерченном применении теории изостазии к обработке градусных измерений. Однако величины  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$  будут более или менее надежными, если действительному распределению масс в земной коре соответствует то, которое лежит в основе принятой схемы изостатической компенсации, величины же  $\xi^g$  и  $\eta^g$  получаются из наблюдений распределения силы тяжести — это величины «измеренные». В одном случае, пользуясь гипсометрическими картами, мы рассчитываем поправки  $D_m$  и  $D_p \sec \varphi$ , заменяя наблюдения и измерения по выяснению неправильностей в строении земной коры некоторой схемой распределения этих неправильностей, лишь в общем и целом подтвержденной наблюдениями. В другом случае влияние этих неправильностей в строении земной коры на нужные нам величины мы определяем из наблюдений, не делая никаких гипотез.

К сожалению, нарисованная картина использования и значения гравиметрических материалов в обработке градусных измерений в практическом ее осуществлении приобретает существенно иной вид. Вполне точный вывод величин  $N$  требует покрытия гравиметрическими станциями всей поверхности земного шара, что осуществляется не так скоро.

Надежный вывод величин  $\xi^g$  и  $\eta^g$  в каком-нибудь пункте  $M$  предполагает: а) достаточно частые определения силы тяжести вблизи самого этого пункта, например, через расстояния в 10 км; б) покрытие гравиметрическими станциями через 30—40 км друг от друга кольца между радиусами 30 и 200 км от  $M$ ; в) покрытие более редкими гравиметрическими станциями, например, через 60—80 км друг от друга, кольца между радиусами 200 и 800 км от пункта  $M$ ; г) покрытие еще более редкими гравиметрическими пунктами кольца между радиусами 800 и 2000 км от пункта  $M$  и учета влияния и дальнейших зон до радиуса 4000—6000 км от пункта  $M$ . Кроме необходимости покрыть более или менее частыми гравиметрическими станциями значительные территории вокруг интересующих нас пунктов, при применении гравиметрических методов определения величин  $N$ ,  $\xi^g$  и  $\eta^g$ , надо иметь выполненной так называемую «мировую» гравиметрическую съемку. Нужно иметь выполненной точнейшую связь исходных гравиметрических станций всех стран; нужно произвести пересмотр и новый вывод формулы «нормальной» силы тяжести соответственно накопившимся за последнее время значительным новым гравиметрическим материалам — особенно по СССР; надлежит выполнить новые научные исследования по сложному вопросу о редукциях силы тяжести<sup>3</sup>.

В настоящее время мы имеем ничтожное количество гравиметрических станций в Африке, еще меньшее — в Австралии и в Южной Америке; определения силы тяжести на океанических островах не дают надлежащих результатов, а собственно территория океанов начала гравиметрически изучаться лишь с 1926 г. благодаря рейсам Венинг Мейнесса на подводной лодке в Тихом и Атлантическом океанах; теперь к этим материалам присоединяются материалы папанинской экспедиции и материалы, полученные советскими геодезистами по определению силы тя-

жести на дрейфующих кораблях. Такое состояние мировой гравиметрической съемки ставит существенные препятствия применению гравиметрических методов исследования фигуры Земли. Однако все эти трудности с течением времени отпадут, и несомненно в будущем задача определения фигуры Земли будет ставиться на основе использования гравиметрических материалов совместно с астрономо-геодезическими. В настоящее время наибольшее развитие гравиметрические работы получили в СССР, где они пользуются и наибольшим вниманием; затем достаточное развитие определения силы тяжести имеют в Индии и в западной части Индо-Китая. Успех применения теории изостазии при выводе размеров земного эллипсоида из обширной астрономо-геодезической сети США и успех применения той же теории к обработке градусных измерений Западной Европы, вероятно, способствовали уменьшению интереса в соответственных государствах к выполнению гравиметрических определений для решения основной задачи геодезии. Неуспех применения теории изостазии к градусным измерениям в Индии побуждает англичан при исследовании геоида в Индии обратиться к гравиметрическим методам. Неуспех применения теории изостазии на значительной части нашей огромной территории заставляет и советских геодезистов разрабатывать методы применения гравиметрии в геодезических целях.

Можно ли ожидать успеха в этом комбинировании астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, если, как указано выше, мировая гравиметрическая съемка характеризуется количественно малыми результатами к настоящему времени и если в ряде государств, примыкающих к нашей территории, или не велось и не ведется никаких гравиметрических работ (Турция, Персия), или эти работы ведутся не систематически и в малом масштабе (Румыния, Польша, Австрия, Швеция)? Ответы на этот вопрос будут следующие.

Представим себе, что вдоль некоторой геодезической линии мы имеем градусное измерение, т. е. ряд триангуляции I класса, на котором в расстоянии друг от друга в 70—100 км определены с большой точностью астрономические пункты по широте и долготе. Для этих пунктов со средней ошибкой около  $\pm 0''.3$  мы можем вывести слагающие  $\xi$  и  $\eta$  «астрономо-геодезических» уклонений отвеса, отнесенных к некоторому референц-эллипсоиду.

Представим себе далее, что вдоль той же геодезической линии в полосе шириной около 250 км исполнены достаточно частые определения силы тяжести: именно на всей этой площади надлежит дать гравиметрические пункты примерно через 30—40 км, а в центральной части полосы, шириной около 80—100 км, дать гравиметрические пункты несколько чаще, может быть, в некоторых местах даже через 10—15 км, в зависимости от местности или в зависимости от хода изменений в аномалиях силы тяжести. Такой гравиметрический материал позволяет по методу, разработанному нашим молодым ученым М. С. Молоденским, получить с хорошей точностью величины  $\xi$  или  $\eta$  для любой точки, лежащей на прямой между смежными астрономическими пунктами градусного измерения, применяя при этом своеобразный метод интерполирования величин  $\xi$  или  $\eta$ , относящихся к самим этим астрономическим пунктам.

Таким образом, поставленные только что указанным образом гравиметрические работы позволяют, при расстояниях между астрономическими пунктами градусного измерения в 70—100 км, получить  $\xi$  или  $\eta$  для какого угодно числа пунктов на дуге градусного измерения и опре-

делить профиль геоида по этой дуге с достаточной детальностью. Отпадает, с одной стороны, нужда в точнейших определениях астрономических пунктов через интервалы 30 км и менее, а с другой стороны, — возрастает детальность изучения профиля геоида. В действительности по методу М. С. Молоденского определяют не  $\xi$  или  $\eta$ , а высоту  $N'$  пунктов градусных измерений, взятых достаточно часто, на длину поверхности референц-эллипсоида. Лежащее в основе метода интерполирование величин  $\xi$  или  $\eta$ , полученных астрономо-геодезическим путем для астрономических пунктов градусных измерений и включающих в себя влияние и всех далеких зон, приводит к учету этого же влияния и в интерполированных значениях  $\xi^g$  и  $\eta^g$  — вот основная идея метода, выдвинутая в 1934 г. проф. Ф. Н. Красовским. Проведение указанного собирания гравиметрических материалов вдоль дуг градусных измерений равносильно установлению новой программы этих работ, заметно отличающейся от описанных выше программ градусных измерений.

В СССР, при охвате в недалеком будущем всей территории страны общей гравиметрической съемкой и при принятом определении астрономических пунктов по рядам триангуляции I класса через 70—100 км, добавочные работы по проведению этой новой программы градусных измерений сводятся только к выполнению сгущения общей гравиметрической съемки в пределах полосы шириной около 100 км по каждому ряду I класса, используемому в качестве градусного измерения. Следует такие ряды I класса, используемые затем в качестве градусных измерений, брать через два в системе рядов триангуляции I класса, т. е. примерно через 660 км друг от друга и по меридианам, и по параллелям. В результате вывода величин  $N'$  по всем указанным рядам триангуляции I класса будет превосходно вырисован геоид относительно принятого у нас референц-эллипсоида или любого иного эллипсоида, связь которого с референц-эллипсоидом будет установлена или задана. Указанное определение и изучение поверхности геоида, даваемое системой высот  $N'$ , при проведении его на всей территории СССР, конечно, является само по себе ценнейшим результатом, о котором и не мечтали даже десять лет назад. Заметим, что в обжитых частях территории СССР ряды триангуляции I класса располагаются друг от друга через 220 км, что между ними вставляются точные основные ряды II класса, с определениями по ним астрономических пунктов через 100 км, причем вставка основных рядов II класса непременно будет практиковаться и в необжитых районах. Очевидно поэтому, что, в зависимости от характера изменений в том или другом районе аномалий силы тяжести, мы можем уточнять и детализировать указанное изучение поверхности геоида, выполняя в соответствующих местах по рядам триангуляции I класса, располагающимся между градусными измерениями, а также и по основным рядам II класса сгущение общей гравиметрической съемки. Когда территория СССР вся будет триангулирована согласно принятой у нас нормальной схеме государственной триангуляции, то явится возможным дать поверхность геоида в изогипсах относительно референц-эллипсоида или иного эллипсоида, известным образом с ним связанного. Конечно, погрешности метода будут сказываться при распространении его на столь значительную тер-

риторию, но можно полагать, что они будут для  $N'$  лежать в пределах  $\pm 1,5 \text{ м}$  при передаче этих высот  $N'$  на 1000 км.

В дальнейшем мы укажем, что именно уже сделано в отношении изучения геоида на территории СССР при применении указанного метода «астрономо-гравиметрического» нивелирования вдоль дуг градусных измерений.

Теперь же остановимся на вопросе перехода от величин  $N'$  к величинам  $N$ , т. е. к расстояниям геоида от нормального сpheroida. Как уже указывалось, точный вывод величин  $N$  требует гравиметрической изученности всего земного шара. В настоящее время, без учета гравиметрических работ по СССР, эта изученность выполнена на 20%. Завершение гравиметрических работ по СССР к 1948 г. и выполнение советскими исследователями определений силы тяжести за предстоящее десятилетие во всей Арктике, в непосредственно прилегающей к СССР части Тихого океана и в Монголии, доведут эту изученность до 40%. Нужно предполагать, что за время 1938—1948 гг. другие государства выполняют все-таки некоторые гравиметрические работы в Африке и в Южной Америке и дадут добавочные гравиметрические рейсы на Тихом, Атлантическом и Индийском океанах<sup>4</sup>. Другими словами, с уверенностью можно ожидать, что гравиметрическая изученность земного шара к 1948 г. дойдет до 45—50%. Для нас важно отметить, что значительные гравиметрически изученные площади примыкают непосредственно с разных сторон к территории СССР, и наоборот, значительные, но гравиметрически не изученные площади находятся в очень большом удалении от территории СССР (южная часть Атлантического океана, южная и юго-западная части Африки, Южная Америка). Все это делает положение СССР особо выгодным при применении гравиметрических методов определения некоторых важных для геодезии величин. Сферический сегмент, имеющий угол  $\psi$  при центре Земли в  $60^\circ$  и центральную точку с координатами: широта  $\varphi = 50^\circ$  и долгота  $L = 65^\circ$ , сосредоточит на своей поверхности 75% той гравиметрической изученности всей Земли, которую следует ожидать к 1948 г. В указанном сегменте к 1948 г. останутся гравиметрически неосвещенными часть Китая, Аравийский полуостров, Турция и Персия, причем эти площади будут охвачены каждой со всех сторон значительными и сплошь изученными площадями.

Предположим пока, что наш сегмент весь гравиметрически изучен. Разделим, при выводе величины  $N$  для центральной точки нашего сегмента, земной шар на двадцатиградусные зоны и в каждой зоне выведем среднее значение аномалии силы тяжести, пользуясь, где нужно, «гипотетическими аномалиями», приведенными в труде финляндского ученого Хирфонена «Континентальные ондуляции геоида».

Другими словами, мы предполагаем, что в сегменте  $\psi = 60^\circ$  имеем полностью материал из наблюдений силы тяжести; для всех же остальных зон принимаем то распределение силы тяжести, которое дано Хирфоненом и которое получено им следующим образом: для сравнительно небольших районов, лежащих между районами, хорошо освещенными гравиметрически, применялась некоторая интерполяция аномалий силы тяжести, полученных на краях гравиметрически изученных районов; для значительных океанических районов принималось, что аномалия силы тяжести равна по величине и обратна по знаку топографо-изостатической редукции силы тяжести, т. е., другими словами, считалось, что изостатический геоид совпадает с нормальным сpheroidом и что на его

поверхности сила тяжести нормальна. Думается, что пока мы не имеем лучшие построенной карты аномалий силы тяжести, чем это сделал Хирфонен, приходится пользоваться именно результатами его работы.

Использование данных Хирфонена приводит нас к следующей таблице:

| Зона и ее номер                 | Средняя аномалия $\Delta g$ | $F(\psi)$ | $\Delta g F(\psi)$ |
|---------------------------------|-----------------------------|-----------|--------------------|
| I. $\psi = 60^\circ - 80^\circ$ | - 0,9                       | - 1,03    | + 0,93             |
| II. $\psi = 80 - 100$           | + 0,7                       | - 0,89    | - 0,62             |
| III. $\psi = 100 - 120$         | - 5,4                       | - 0,27    | + 1,46             |
| IV. $\psi = 120 - 140$          | 0,0                         | + 0,34    | 0                  |
| V. $\psi = 140 - 160$           | - 3,9                       | + 0,54    | - 2,10             |
| VI. $\psi = 160 - 180$          | - 3,0                       | + 0,26    | - 0,78             |
| Сумма . . .                     |                             |           | - 1,11 мгл         |

Эта таблица показывает, что если бы действительное распределение силы тяжести на Земле совпадало с данными Хирфонена, то влияние на величину  $N$  всей части земного шара, лежащей вне сегмента с  $\varphi = 60^\circ$ , составляло бы всего 2,5 м.

Действительное распределение силы тяжести вероятно окажется заметно отступающим от полученного Хирфоненом для отдельных и даже значительных районов. Но соблюдение принципа изостазии делает то, что эти отступления действительных аномалий силы тяжести от «гипотетических», по Хирфонену, будут иметь для Земли в целом в известной степени характер случайных величин. Для 32 трапеций размером  $5^\circ \times 5^\circ$ , расположенных в Индийском океане с захватом Зондского архипелага, были из наблюдений Венинг Мейнеса установлены действительные аномалии после того, как Хирфоненом для этих же трапеций были опубликованы «гипотетические» аномалии силы тяжести. Отсюда мы находим, что систематическое отклонение действительной аномалии силы тяжести от «гипотетической» составляет в среднем для указанных 32 трапеций  $\pm 14$  мгл (с отнесением этой величины к трапеции  $5^\circ \times 5^\circ$  на экваторе). Так как взятый район принадлежит к числу тех, где имеют место резко выраженные неправильности в строении земной коры, то, конечно, это число  $\pm 14$  мгл следует считать заметно преувеличенным для большинства иных районов Земли.

Далее мы приведем следующие соображения:

- 1) систематического характера ошибки в аномалиях  $\Delta g$  Хирфонена для того или иного района обусловлены, главным образом, нарушениями изостатической компенсации в этом районе;
- 2) сумма систематических ошибок  $\delta_g$  в аномалиях Хирфонена для всего земного шара должна быть очень близка к нулю.

Последнее положение делает вероятным значительную компенсацию  $\sum \delta_g$  и в отдельных зонах, захватывающих значительную часть общей поверхности земного шара. Если в данной зоне изменения одно-

образных величин  $\delta_g$  происходят, чередуясь между собой, в  $k$  ее частях, примерно равных между собой, то среднее квадратическое  $\bar{\delta}_g$  может быть принято для этой зоны равным  $\pm \frac{14 \text{ мгл}}{\sqrt{k}}$ ; при наличии же компенсации в  $\Sigma \delta_g$  это среднее квадратическое значение  $\delta_g$  будет еще менее.

Мы не знаем, как распределяются  $\delta_g$  по разным районам, но использованные при нашем подсчете  $\Delta N$  шесть зон (I—VI) покрывают  $\frac{3}{4}$  всей поверхности земного шара, и мы имеем право утверждать, что для этих шести зон  $\Sigma \delta_g$  близка к нулю. Если мы примем, что в среднем для любой из всех зон среднеквадратическое  $\delta_g$  равно  $\pm \frac{14 \text{ мгл}}{\sqrt{2}}$ , то

тем самым мы отрицаем и компенсацию величин  $\delta_g$  в каждой зоне и, кроме того, считаем, что одни, однообразные по величине и знаку, значения  $\delta_g$  относятся к одной половине зоны, а другие, также схожие между собой значения  $\delta_g$ , но заметно отличающиеся от значений  $\delta_g$  для первой половины зоны, покрывают вторую половину зоны. При таких значительных зонах, как зоны I, II, III, нужно ожидать, конечно, что среднее  $\delta_g$  для каждой из них будет заметно меньшим  $\pm \frac{14 \text{ мгл}}{\sqrt{2}}$ , так как суммы однообразных значений  $\delta_g$  будут иметь место не один, а 6—8 раз в каждой этой зоне. Заметим еще, что в зоне I наблюденные значения  $\Delta_g$  составляют 0,5 всех значений, а в зоне II они составляют 0,3 всех значений  $\Delta_g$ . Теперь с определенным, думается, уклоном в сторону преувеличения напишем для средней ошибки в  $N$ :

$$m_N^2 = (2,27)^2 \cdot \frac{196}{2} \left\{ 0,25 (1,03)^2 + 0,49 (0,89)^2 + (0,27)^2 + (0,34)^2 + (0,54)^2 + (0,26)^2 \right\};$$

$$m_N = 2,27 \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \sqrt{1,20} = \pm 24,7 \text{ м.}$$

Сам автор этого труда об ондуляциях геоида, Хирфонен, принимает среднеквадратическое  $\bar{\delta}_g$  равным даже  $\pm 30 \text{ мгл}$ , но считает, что одно образие величин  $\delta_g$  держится на площади, содержащей примерно 36 квадратов по  $5^\circ \times 5^\circ$  (на экваторе). Тогда для зон I, II и III мы должны принять  $k$  от 8 до 6, для зон IV и V — от 6 до 4 и для зоны VI  $k = 2$ . При этих условиях подсчет  $m_N$  дает  $\pm 28 \text{ м}$ . Вероятно и это число преувеличено, и в большей степени, чем  $\pm 24,8 \text{ м}$ . Влияние неполной гравиметрической изученности в сегменте с  $\psi = 60^\circ$ , по нашим подсчетам, даст вряд ли влияние, большее  $\pm 10 \text{ м}$ . За предстоящее десятилетие 1938—1948 гг. гравиметрический материал по земному шару, несомненно, заметно увеличится. Это дает право считать, что полная средняя ошибка в  $N$  для рассматриваемых пунктов территории СССР будет менее  $\pm 25 \text{ м}$ . Для нас важно именно отметить, что результаты гравиметрических работ, поставленных, за исключением СССР, в Индии и Германии, совсем неудовлетворительно в смысле планомерного проведения мировой гравиметрической съемки, все-таки и в настоящее время позволяют для некоторых пунктов территории СССР, особо благоприятно расположенных в отношении имеющейся гравиметрической изученности, установить величины  $N$  со средней ошибкой, меньшей  $\pm 25 \text{ м}$ .

В исходном пункте астрономо-геодезической сети СССР, соответственно выбранном, мы можем на основании гравиметрических материалов вывести величины  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$ . Нужно, чтобы гравиметрическая съемка охватила территорию вокруг такого исходного пункта не менее как на 2000 км, чтобы получить  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$  со средней ошибкой менее  $\pm 1''$ ,0, причем в радиусе 150 км от нашего пункта гравиметрическую съемку должно выполнить с значительной детальностью, в кольце от 150 до 600 км можно дать гравиметрические пункты через 30—40 км, а в следующих кольцах — значительно реже. При возможности использовать почти весь сегмент с  $\phi = 60^\circ$  средняя погрешность в  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$  для исходного пункта астрономо-геодезической сети СССР может быть сведена к величине, меньшей  $\pm 0''.5$ .

Величины  $\xi^g$  и  $\eta^g$  для большинства обычных астрономических пунктов градусных измерений СССР могут быть установлены со средней случайной ошибкой около  $\pm 1''.5$ ; это уже выяснено работами ЦНИИГАиК. Влияние таких ошибок в  $\xi^g$  и  $\eta^g$  скажется на выводе большой полуоси эллипсоида из одной только астрономо-геодезической сети СССР величиной всего около 20 м. Но в этих  $\xi^g$  и  $\eta^g$  будут еще ошибки систематического характера, изменяющиеся весьма мало и медленно при движении по некоторой дуге параллели или некоторой дуге меридиана. Именно эти систематические ошибки в  $\xi^g$  и  $\eta^g$  и приадут эллипсоиду, выводимому из градусных измерений СССР, все-таки местный характер. Вряд ли, однако, эти систематические ошибки в  $\xi^g$  и  $\eta^g$  обусловят в большой полуоси эллипсоида ошибку, большую  $\pm 30$  м, если при их выводе будет использоваться материал, который мы ожидаем к 1948 г., т. е. когда вся территория СССР будет покрыта гравиметрической съемкой и будут выполнены новые гравиметрические работы в Азии, вне СССР, а также и в Арктике.

В уравнениях градусных измерений СССР, по определению  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$  и по принятии в них сжатия эллипсоида равным тому, которое вытекает из принятой формулы нормальной силы тяжести, останется в качестве неизвестной только одна поправка  $\Delta a$  большой полуоси референц-эллипсоида, которая вообще определяется при указанных условиях относительно объема используемого гравиметрического материала со средней ошибкой около  $\sqrt{(20)^2 + (30)^2} = \pm 36$  м, если не считаться с ошибкой установления  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$ . С учетом этого влияния

$$m_a = \sqrt{(20)^2 + (30)^2 + (35)^2} = \pm 50 \text{ м.}$$

Гравиметрический вывод величин  $\xi_0^g$ ,  $\eta_0^g$  и  $N_0$ , конечно, обеспечивает наиболее правильное положение выводимого эллипсоида в земном теле. Использование величин  $\xi^g$  и  $\eta^g$  придает этому эллипсоиду наибольшую близость в отношении размеров его осей к общему земному эллипсоиду. Эти обстоятельства сами собой говорят в пользу изложенных в этом параграфе методов при установлении эллипсоида для геодезических работ в СССР. Несмотря на малое еще к настоящему времени развитие гравиметрических работ в Азиатской части СССР, все-таки эти методы должно приложить к выводу советского эллипсоида<sup>5</sup>, и в данный момент сопоставление полученных при этом результатов с выводами, получаемыми обычным астрономо-геодезическим путем, является очень интересным и важным, так как при этом непременно вскроются возможности выгодного комбинирования еще ограниченного гравиметрического материала с астрономо-геодезическим.

Мы можем, используя весь собранный во всех странах гравиметрический материал, изучать фигуру геоида общими методами теории фигуры Земли, основанными на разложениях в ряды по сферическим функциям ускорения силы тяжести и радиуса вектора точки, лежащей на поверхности геоида. При этом в общие методы следует внести изменения, приводящие к целесообразному использованию астрономо-геодезических материалов и полученных из натуры профилей геоида по большим дугам меридианов и параллелей. Однако к обработке значительных материалов эти методы, и в особенности указанные их изменения, не применялись еще никем. Поэтому и мы ограничиваемся лишь указанием на то, что эти методы следует применить для изучения геоида в целом, параллельно с указанными в этом параграфе путями и методами, направленными, главным образом, на изучение геоида в пределах территории СССР и на установление эллипсоида, отвечающего запросам геодезических работ в СССР.

### **§ 3. Состояние работ по градусным измерениям в СССР и по выводу размеров эллипсоида**

Дуга Струве, проложенная в первой половине прошлого столетия под руководством Струве и, главным образом, русскими астрономами и геодезистами и на русские средства, в начале нынешнего столетия была геодезически соединена с новой триангуляцией I класса, начатой построением с 1908 г. Мы имеем, конечно, все основания включать это градусное измерение Струве в число собственно советских градусных измерений, хотя значительная часть этой дуги отошла к Финляндии, Польше и Румынии. Из выполненных на территории СССР рядов триангуляции I класса мы отметим следующие, как вполне отвечающие требованиям и программе градусных измерений или как могущие быть легко обращенными в градусные измерения:

- 1) ряд по меридиану  $L = 30^\circ$  от Пулково до Николаева на Черном море (амплитуда  $13^\circ$ );
- 2) ряд по меридиану  $L = 36^\circ$  от Мурманска на Петрозаводск и отсюда до Джанкоя в Крыму (амплитуда  $23^\circ$ );
- 3) ряд по меридиану  $42^\circ$  от Костромы (на Волге) до Зугдиди в Закавказье (амплитуда около  $16^\circ$ );
- 4) ряд в несколько косвенном к 48-му меридиану направлении от Казани до Астрахани (амплитуда около  $10^\circ$ );
- 5) ряд по меридиану  $L = 56^\circ$  от Чердыни до Оренбурга (амплитуда  $9^\circ$ );
- 6) ряд по меридиану  $L = 62^\circ$  от Ирбита через Челябинск до Верхне-Тобольска (амплитуда  $6^\circ$ );
- 7) ряд по меридиану  $L = 79^\circ$  от Новосибирска до Алма-Ата (амплитуда около  $12^\circ$ );
- 8) ряд по параллели Шимск — Казань — Байкалов на р. Тобол (амплитуда  $36\frac{1}{2}^\circ$ , средняя широта  $57\frac{1}{2}^\circ$ );
- 9) ряд по параллели Орша — Челябинск — Красноярск (амплитуда  $62\frac{1}{2}^\circ$ , средняя широта  $55^\circ$ );
- 10) ряд по параллели Красноярск — Улан-Удэ — Хабаровск (амплитуда  $42\frac{1}{2}^\circ$ , широта  $56—48^\circ$ );
- 11) ряд Гомель — Оренбург — Усть-Каменогорск (под средней широтой  $51\frac{1}{2}^\circ$ , с долготной амплитудой  $51\frac{1}{2}^\circ$ );

- 12) ряд по параллели Переяславль (на Днепре) — Сталинград — Темир (под средней широтой  $49^{\circ}$  с долготной амплитудой  $26^{\circ}$ );
- 13) ряд по параллели Тирасполь — Керчь — Астрахань (под средней широтой  $46^{\circ}$  с долготной амплитудой  $18^{\circ}$ );
- 14) ряд в косвенном к меридиану направлении от Оренбурга на Казалинск (Аральское море) и отсюда до Алма-Ата [с широтной амплитудой  $8^{\circ}20'$  и с долготной  $21^{\circ}30'$  (крайние широты  $52^{\circ}$  и  $43^{\circ}$ , крайние долготы  $L_1 = 54^{\circ}$  и  $L_2 = 75^{\circ}$ )];
- 15) ряд по параллели Зугдиди — Тбилиси — Баку (под средней широтой  $42^{\circ}$  с долготной амплитудой около  $7^{\circ}$ ).

В этот перечень мы не помещаем нескольких меридианных дуг с амплитудой от  $4$  до  $6^{\circ}$ . Общая широтная амплитуда приведенных меридианных рядов, включая дугу Струве, составляет  $122^{\circ}$ ; общая долготная амплитуда исполненных рядов по параллелям, приведенная к градусу экватора, равна  $166^{\circ}$ ; протяжение всех рядов составляет  $288^{\circ}$ .

В этой огромной астрономо-геодезической сети мы имеем в настоящее время более 480 пунктов Лапласа, на каждом из которых определены с хорошей точностью все три астрономических элемента: широта, долгота и азимут. Эти астрономические пункты располагаются по рядам нашей триангуляции I класса примерно через  $70$ — $100$  км друг от друга, причем в местах расположения базисов и базисных сетей эти пункты двойные: здесь пункты Лапласа определяются на концах выходной стороны базисной сети, т. е. располагаются друг от друга в расстоянии  $15$ — $30$  км. Определение таких двойных пунктов, конечно, имеет существенное значение для контроля и повышения точности Лапласовых азимутов, используемых затем в качестве жестких при уравнивании звеньев и полигонов I класса. Но эти «двойные» пункты имеют свою цену и при составлении уравнений градусных измерений. Понятно, что целесообразно при выводе размеров эллипсоида каждую пару таких двойных пунктов заменять некоторым одним фиктивным пунктом. Вследствие этого мы должны считать, что в градусных измерениях СССР имеется в настоящее время несколько более 300 астрономических пунктов, каждый из которых приводит к одному уравнению для широты, одному уравнению для долготы и одному уравнению для азимута. Затем, что материал по США, на основе которого в 1909 г. Хейфордом был установлен его эллипсоид, получивший впоследствии название «международного эллипсоида», состоял из определений астрономических широт на 381 пункте, астрономических долгот на 131 пункте и астрономических азимутов на 253 пунктах, из которых только 32 были пунктами Лапласа. Другими словами, 765 астрономическим элементам градусных измерений США соответствует более 900 астрономически определенных элементов в астрономо-геодезической сети СССР.

По объему и составу астрономических определений градусные измерения СССР стоят уже выше использованных в 1909 г. по градусным измерениям США, между тем, ранее грандиозность этих американских материалов приводила очень многих в удивление. До развития новых астрономо-геодезических работ в СССР присоединение градусных измерений Старого Света к таковым же по Северной Америке почти не вносило никаких изменений в вывод размеров эллипсоида, сделанных Хейфордом только на основании материалов по США: настолько мал материал по Западной Европе по сравнению с материалами по США. Теперь градусные измерения СССР вместе с таковыми же по Европе

дают материал, несколько больший использованного Хейфордом, и таким образом Старый и Новый Свет представлены уже, по крайней мере, равноправно при выводе размеров эллипсоида из градусных измерений. Несомненно, все это имеет очень существенное значение в изучении фигуры Земли.

Мы уже указывали, что в СССР астрономические пункты располагаются по рядам триангуляции I класса в расстоянии друг от друга 70—100 км; такое расстояние, как было сказано в § 1, является, при современных взглядах на программу градусных измерений, слишком большим: случайность выбора мест астрономических пунктов не позволяет, при могущих быть в них значительных местных уклонениях отвеса, строить вполне надежно профиль геоида. Но по отношению к градусным измерениям мы должны сказать следующее.

1) Надлежащая частота астрономических пунктов имеет место лишь в части дуги западноевропейского меридиана и по двум новым «главным» градусным измерениям в Индии, и мы должны были бы выбросить достаточно много материала и по Европе, и по США, если бы предъявили с полной строгостью требование определения астропунктов по дугам градусных измерений через 30 км.

2) Общая гравиметрическая съемка СССР, энергично проводимая с 1933 г., позволяет нам иначе отнести к вопросу о частоте астрономических пунктов по дугам наших градусных измерений. Об этом уже сказано в § 2. По существу, если держаться плана выполнения астрономо-гравиметрического нивелирования по рядам триангуляции I класса, идущим через 450 км по меридианам и через такой же интервал — по параллелям, то и нет нужды давать астрономические пункты на совпадающих с такими рядами дугах градусных измерений чаще чем через 70—100 км. Но и по тем рядам I класса, по которым астрономо-гравиметрическое нивелирование не выполнено, общая гравиметрическая съемка позволяет в большинстве случаев достаточно уверенно выявить районы местных притяжений и вместе с значениями  $\varphi - B$  и  $(\lambda - L) \cos \varphi$  установить ход уклонений отвесной линии между астропунктами градусного измерения и изменения величин  $\xi$  и  $\eta$  вблизи этих пунктов, хотя и с невысокой точностью.

Таким образом, будет выполняться оценка удачного или неудачного выбора положения тех или иных астрономических пунктов на дуге градусного измерения и правильно решаться вопрос о необходимости дать по этой дуге добавочные гравиметрические определения и астрономические пункты и в каких именно местах. Нам представляется, что в ряде случаев использование материалов общей гравиметрической съемки, при условии сплошного покрытия ею пересекаемых градусными измерениями районов и надлежащего ее сгущения в некоторых местах, позволит, при исполнении соответствующих вычислений и подсчетов, внести коррективы и дополнения в материалы по определению астрономо-геодезических  $\xi$  и  $\eta$  без определения новых и добавочных астрономических пунктов. Мы можем определенно сказать таким образом, что выполнение на территории СССР общей гравиметрической съемки, соответственно поставленной и проводимой, и совместное использование гравиметрических и астрономо-геодезических материалов позволяют в общем считать выполненное оснащение астрономическими пунктами рядов триангуляции I класса, значащихся в приведенном выше их перечне, достаточным для использования этих рядов в качестве градусных измерений; но конечно, не исключается

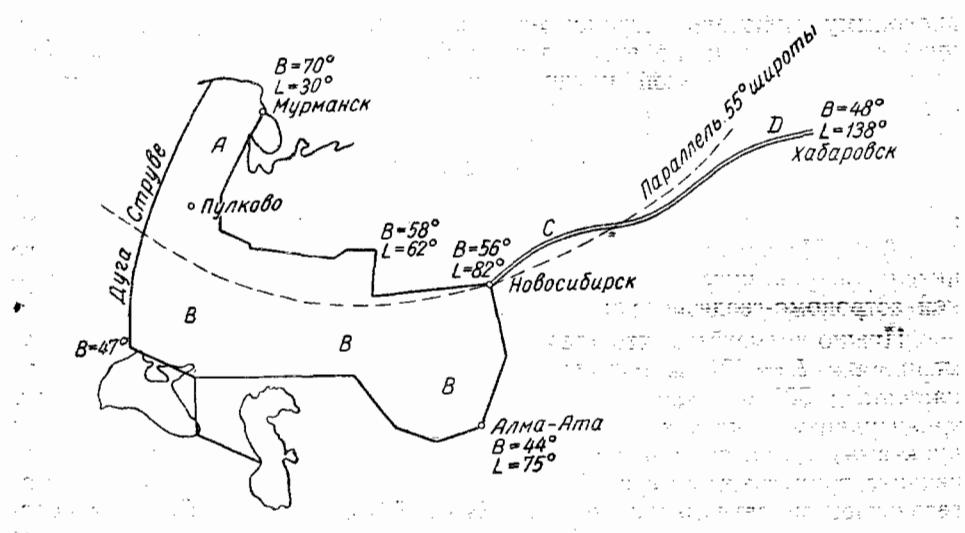
надобность в некоторых дополнительных гравиметрических и астрономических работах по этим рядам.

Астрономо-гравиметрическое нивелирование выполнено ЦНИИГАиК в 1935, 1936 и 1937 гг. по меридианной дуге Пулково — Орша — Гомель — Николаев (на Черном море) и по дуге параллели  $54^\circ$  широты от Орши (на Днепре) до Челябинска. За три летних сезона, при небольшом оперативном составе (две партии), удалось дать два градусных измерения по новой, научно построенной программе, при общем протяжении этих двух дуг в 3400 км. Постановкой подобных работ советская геодезия может гордиться. Градусные измерения СССР должны в свою программу включать астрономо-гравиметрическое нивелирование и, будучи выполненными по этой новой и именно советской программе, они дадут материалы такой ценности и качества, с которыми не могут сравниться материалы по градусным измерениям всех других стран; именно они тогда дадут не косвенное, а прямое определение значительных по длине профилей геоида, определят фигуру геоида на огромной территории и доставят надежнейший и очень ценный добавочный материал при выводе высот  $N$  геоида над общим земным эллипсоидом (см. § 2). Но кроме того, результаты этого астрономо-гравиметрического нивелирования нужны для надлежаще точной обработки такой обширной астрономо-геодезической сети, какая создается в СССР<sup>6</sup>.

Нужно отметить, что территория Европейской части СССР — от меридиана  $L = 30^\circ$  на западе до меридиана  $L = 62^\circ$  на востоке и от параллели  $58^\circ$  на севере до параллели  $48^\circ$  на юге — покрыта рядами триангуляции I класса (с принятым оснащением их астрономическими пунктами) достаточно равномерно: здесь, по существу, мы имеем проведение градусных измерений по методу площадей. Из этой астрономо-геодезической сети на территории Европейской части СССР, при соответственном использовании богатых гравиметрических материалов, мы можем с очень хорошей надежностью вывести эллипсоид, наилучше подходящий к геоиду на этой территории. Но к востоку от 62-го меридиана распространение градусных измерений по площади, но не столь уже равномерное мы имеем только между параллелями 56 и  $45^\circ$  до меридиана  $82^\circ$  (Новосибирск). Севернее 56-й параллели к востоку от 62-го меридиана мы совсем не имеем градусных измерений, а от 82-го меридиана до Хабаровска астрономо-геодезическая сеть (см. фигуру) собственно обращается в ординарный ряд полигонов, тянущихся полосой протяжением с юга на север в 400—600 км сначала между параллелями  $56—52^\circ$ , а потом между параллелями  $53—48^\circ$ ; другими словами, градусные измерения к востоку от 82-го меридиана представлены дугой параллели, сначала имеющей среднюю широту  $54^\circ$ , а затем среднюю широту  $50^\circ$ .

Азиатская часть СССР на две трети своей территории еще не затронута градусными измерениями, и здесь, конечно, предстоят еще очень значительные астрономо-геодезические работы. При указанном расположении градусных измерений, выполненных до настоящего времени в СССР, не приходится, собственно, ставить задачу вывода эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду на всей территории СССР, — именно из-за того, что Азиатская часть СССР представлена только одним профилем по дуге Новосибирск — Иркутск — Хабаровск. По широте градусные измерения СССР, включая и дугу Струве, простираются от 70-й параллели до 44-й, но непрерывная большая амплитуда имеется лишь по дуге Струве и по

дуге Мурманск — Джанкой, сравнительно близкой по долготе к дуге Струве; по остальным меридианным дугам наибольшая амплитуда не превышает  $14^\circ$ , т. е. не может быть отнесена к значительным амплитудам. Этот не очень большой размах по широте и превалирование в составе градусных измерений больших дуг по параллелям, отстоящих друг от друга близко по широте, обусловливают сравнительно небольшую надежность вывода размеров эллипсоида из одних градусных измерений СССР: большую полусось мы получаем со средней ошибкой около  $\pm 100$  м, а сжатие эллипсоида — со средней ошибкой около  $\pm 2$  единицы в знаменателе сжатия.



В § 1 достаточно было сказано о значимости тех средних ошибок, которые мы получаем при выводе размеров эллипсоида из одних астрономо-геодезических результатов. Известную геометрическую определенность этих средних ошибок мы имеем лишь в случае, когда некоторая компактная территория вся покрыта равномерно по методу площадей дугами градусных измерений: тогда выведенные из уравнений градусных измерений средние ошибки характеризуют возможную точность подбора эллипсоидальной поверхности, наилучше подходящей к геоиду на протяжении именно этой территории. Но как видно из фигуры, обслуженная до сих пор градусными измерениями часть территории СССР имеет довольно прихотливое очертание: об охвате площади этими измерениями можно лишь говорить по отношению к части В. Однако часть CD заметно влияет на вывод размеров эллипсоида. Территория В в большей своей части низменная равнина; градусное измерение CD проходит почти везде по горным районам или вблизи них. Современные материалы по измерениям силы тяжести показывают, что на территории СССР, во всяком случае в поясе между параллелями  $60$  и  $45^\circ$ , происходит смена следующих очень больших волн геоида: одна, характеризующаяся повышениями геоида над общим земным эллипсоидом и захватывающая Атлантический океан и Западную Европу, проходит уже на своем спаде западную часть Европейской части Союза и переходит на меридиане  $L = 40—50^\circ$  в другую волну, характеризующуюся понижениями геоида относительно общего эллипсоида и достигающую максимума вблизи меридиана  $L = 70—80^\circ$ ; эта вторая

волна заканчивается вблизи меридиана  $110-120^{\circ}$  и переходит в следующую волну — волну повышений геоида над общим земным эллипсоидом, продолжающуюся за материком Азии в Тихом океане.

Эти соображения позволяют заключить, что присоединение уравнений градусных измерений по дуге  $CD$  к уравнениям градусных измерений на территории  $B$  делает выводимый из всего современного материала эллипсоид не наилучше подходящим к геоиду на территории  $B$  и не наилучше подходящим к геоиду на территории  $CD$ . Они подтверждаются следующими выводами, полученными А. А. Изотовым: задаваясь сжатием эллипсоида  $1 : 297$ , получаем для большой полуоси эллипсоида, при использовании только астрономо-геодезического материала:

- 1) из уравнений, относящихся к градусным измерениям на территории  $A$  и  $B$ ,  $a = 6\ 377\ 944\ m$ ;
- 2) из уравнений, относящихся к градусным измерениям на территории  $A$ ,  $B$  и  $CD$ ,  $a = 6\ 378\ 257\ m$ .

Итак, в настоящее время мы не можем ставить задачу установления эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду на всей территории СССР. Решая же вместе собранные до сих пор уравнения градусных измерений СССР, весьма многочисленные, мы выводим эллипсоид, который нельзя признать, однако, наилучше подходящим к геоиду на охваченной этими градусными измерениями территории, вследствие прихотливости ее очертания и наличия указанных очень больших волн геоида.

Тем не менее, работы ЦНИИГАиК, проведенные, начиная с 1934 г. по 1938 г., по обработке выполненных до сих пор градусных измерений в СССР, имеют определенное значение. Во-первых, должна быть названа значительной работа по составлению уравнений градусных измерений, число которых достигает 1200; каталог этих уравнений впоследствии, по мере дальнейшего развития наших градусных измерений, будет продолжаться; в настоящее время этот каталог является ценнейшим вкладом, сделанным советской геодезией, в материалы по установлению в будущем общего земного эллипсоида и для исследований фигуры геоида. Во-вторых, для значительного числа астрономических пунктов (около 200) градусных измерений были выведены гравиметрически  $\xi^g$  и  $\eta^g$ , имея радиус охвата территории гравиметрическими станциями на каждом астрономическом пункте не менее 600 км; введя эти  $\xi^g$  и  $\eta^g$  в качестве поправок в астрономические широты и астрономические азимуты, используя для большой полуоси и сжатия значения, выведенные Ф. Н. Красовским в 1935 г.\* из широтных и азимутальных уравнений градусных измерений, были определены поправка исходного азимута астрономо-геодезической сети СССР и поправка исходной широты этой сети. Дать надлежащую азимутальную ориентировку большой астрономо-геодезической сети — задача, конечно, очень важная и очень ответственная. Использование здесь гравиметрического материала является очень существенным, так как в значительной степени освобождает от влияния на вывод исходного азимута мелких, а отчасти и общих волн поверхности геоида. Такое применение гравиметрии в геодезии является, вообще, первым по времени.

\*  $a = 6\ 378\ 296\ m$ ;  $\mu = 1:298,6$ . — Согласно работе А. А. Изотова.

В - третьих, были получены выводы размеров (и сжатия) эллипсоида; используя только астрономо-геодезический материал по СССР; используя тот же материал, но с применением изостазий, для чего на огромном числе пунктов были выведены топографо-изостатические уклоны отвеса по методу Бонсдорфа; используя астрономо-геодезический материал по СССР и по Западной Европе — сначала без применения изостазий, а затем с применением изостазии; наконец, используя материал по СССР и по США<sup>7</sup>.

Ф. Н. Красовский в 1935—1936 гг. получил:

1) из астрономо-геодезической сети СССР, доведенной до Новосибирска и без рядов по Казахстану:

$$a = 6\ 378\ 182 \pm 96 \text{ м};$$

$$\mu = 1 : 298,97 \pm 2,0 ;$$

при сжатии 1 : 297  $a = 6\ 378\ 097 \text{ м}$ ;

2) не принимая во внимание трехосности земного эллипсоида:

а) по СССР — то, что указано в пункте 1:

$$a = 6\ 378\ 182 \pm 96 \text{ м};$$

$$\mu = 1 : 298,97 \pm 2,0 ;$$

б) по СССР и Западной Европе:

$$a = 6\ 378\ 247 \pm 58 \text{ м};$$

$$\mu = 1 : 300,6 \pm 1,4 ;$$

при сжатии 1 : 298,6  $a = 6\ 378\ 183 \text{ м}$ ;

в) по Западной Европе и США:

$$a = 6\ 378\ 373 \pm 35 \text{ м};$$

$$\mu = 1 : 298,3 \pm 1,1 ;$$

г) по СССР, Западной Европе и США:

$$a = 6\ 378\ 338 \pm 32 \text{ м};$$

$$\mu = 1 : 299,97 \pm 0,8 ;$$

при сжатии 1 : 298,6  $a = 6\ 378\ 307$ ;

3) учитывая влияние трехосности, при среднем полярном сжатии 1 : 298,6; при долготе наибольшего меридиана +10°; при экваториальном сжатии 1 : 30 000:

а) по СССР . . . . .  $a = 6\ 378\ 165 \text{ м}$

б) по СССР и Западной Европе . . . . .  $a = 6\ 378\ 193$  ,

в) по Западной Европе и США . . . . .  $a = 6\ 378\ 235$  ,

г) по СССР, США и Западной Европе . . . . .  $a = 6\ 378\ 210$  ,

С присоединением к материалам, которые были в распоряжении Ф. Н. Красовского, градусных измерений на территории Казахстана (и именно к востоку от 62-го меридиана и к югу от 56-й параллели) и градусного измерения по параллели от Новосибирска до Хабаровска,

приведенные результаты несколько изменяются. Эти новые результаты будут в скором времени опубликованы ЦНИИГАиК. Характерным является то, что выводы из материалов по СССР дают при сжатии 1 : 297 заметно уменьшенное значение большой полуоси эллипсоида по сравнению с таковым же для эллипса Хейфорда, признанного международным: различие при разных методах обработки (с изостазией и без изостазии) и при разном составе используемого материала (градусные измерения только до 62-го меридиана и все градусные измерения СССР) колеблется от 280 до 130 м. Соединение материалов по СССР с таковыми же по США и Западной Европе приводит к небольшому уменьшению «международной» большой полуоси, всего на 50—70 м, но к заметному уменьшению сжатия — с 1 : 297 на 1 : 299,6 — 1 : 300; при сжатии 1 : 297 из общей обработки материалов по СССР, Западной Европе и США большая полуось получается меньшей на 130 м против значения ее по Хейфорду (6 378 388 м). Любопытным является и то согласие в результатах по выводам земного эллипсоида из градусных измерений: только СССР; СССР и Западной Европы; СССР, Западной Европы и США, которое получено Ф. Н. Красовским при учете влияния трехосности земного эллипсоида: вероятно новые выводы по ЦНИИГАиК мало изменят эти результаты.

Приведенные данные дают основание заключить, что градусные измерения СССР и их обработка приводят к следующим очень важным и интересным заключениям.

1. Решение по введению в качестве международного эллипсоида Хейфорда, принятое Международным геодезическим Союзом (без участия СССР) и, правда, проводимое пока только в Финляндии, должно быть, очевидно, пересмотрено с учетом результатов по градусным измерениям СССР.

2. Советские градусные измерения, в согласии с результатами по определению силы тяжести, обнаруживают сами по себе и в сопоставлении с материалами по градусным измерениям США, Западной Европы и Индии наличие очень больших волн геоида и необходимость учета их влияния при выводах из градусных измерений. Исполнение грандиозного градусного измерения по 56-й — 52-й параллелям от нашей границы с Польшей до Тихого океана является чрезвычайно ценным для выяснения положения таких волн на территории СССР; присоединение к этому градусному измерению градусных измерений Европы по 52-й параллели и геодезическое соединение в недалеком будущем астрономо-геодезических сетей СССР и США позволят установить эти волны на профиле огромного протяжения. Но существенным в этом деле является выполнение астрономо-гравиметрического нивелирования по возможно длинным дугам параллелей. Выполнение такого нивелирования от Орши до Челябинска по 55-й параллели является примером для всех других стран. Но, конечно, дав этот пример, мы должны, очевидно, исполнить астрономо-гравиметрическое нивелирование по дуге параллели от Челябинска на Новосибирск до Тихого океана и затем по дугам вдоль побережья Охотского моря до Берингова пролива<sup>8</sup>. Нужно заметить, что астрономо-гравиметрическое нивелирование необходимо не только для получения значительных профилей геоида, но и для точной обработки уравнивания нашей большой триангуляции.

3. На основании соображений, приведенных в § 1, вопрос о том, в какой степени эллипсоид, выводимый из всех вместе взятых градусных измерений СССР, Западной Европы и США, приближается к общему земному эллипсоиду, не может решаться надежно на основе средних ошибок, получаемых в результате совместного решения уравнений, относящихся ко всем этим градусным измерениям по перечисленным странам. Приведенные выше средние ошибки вывода Ф. Н. Красовского из материалов по СССР, США и Западной Европе:  $\pm 32$  м в большой полуоси и  $\pm 0,8$  — в знаменателе сжатия, конечно, имеют формальное значение. Они соответствовали бы действительности при условии отсутствия очень больших волн геоида или при условии надежного учета их влияния. Попытка учета этих влияний в тех же работах Ф. Н. Красовского приводит к изменению большой полуоси почти на 100 м по сравнению с соответственными выводами, где такой учет отсутствует. Другими словами, нет еще оснований принимать полученные выводы в СССР при использовании всех современных градусных измерений (кроме измерений в Индии), как устанавливающие размеры и сжатие общего земного эллипсоида, тем более, что при получении этих выводов, имеющих, правда, наибольший вес из всех до сих пор сделанных, все-таки не использованы обширные материалы по Индии и новые (еще не опубликованные) материалы по большому, еще не законченному градусному измерению англичан в Африке — от мыса Доброй Надежды до Каира.

Тем не менее, эти выводы позволяют надежно установить эллипсоид для использования при обработке материалов геодезических работ по СССР, при вычислении астрономо-геодезической сети СССР. Наличие больших волн геоида на территории СССР обуславливает возможное отклонение его поверхности по высоте от наиболее правильно установленного эллипсоида на 50 м и более. Другими словами, точная обработка большой астрономо-геодезической сети СССР потребует редуцирования некоторых измеренных в ней элементов на поверхность такого наиболее правильно установленного эллипсоида. Сущность дела нисколько не изменится, если мы будем иметь эллипсоид, отличающийся в размерах его полуосей от наиболее подходящего эллипсоида даже на 150 м (но не более). Но с таким допуском задача,лагаю, уже решена.

4. Установление эллипсоида для обработки обширной астрономо-геодезической сети СССР заключается не только в выборе размеров его полуосей, а еще и в правильном его ориентировании. Задача эта сводится к установлению слагающих  $\xi_0$  и  $\eta_0$  отклонения отвесной линии в исходном пункте триангуляции и высоты  $N_0$  геоида в этом же пункте относительно общего земного эллипсоида. Задача эта должна решаться на основании использования гравиметрических результатов, о чем сказано в § 2. Полученные по ЦНИИГАиК выводы  $\xi_0$  и  $\mu_0$  не имеют окончательного характера, но все-таки позволяют, видимо, установить эти величины со средней ошибкой, не большей  $\pm 1",0$ . Это также является одним из существенных результатов работ по градусным измерениям в СССР<sup>9</sup>.

\* \* \*

Полученные результаты современных градусных измерений в СССР следует считать достаточно важными и поучительными.

В ближайшие годы будут проложены градусные измерения по большим рекам Азиатской части СССР: по Оби, Енисею, Лене, Колыме, а также вдоль побережья Охотского моря (вероятно до Берингова пролива). Эти градусные измерения, вместе с выполненным по ним астрономо-гравиметрическим нивелированием, устранит слабую сторону, указанную выше, современных градусных измерений по СССР. С другой стороны, развитие мировой общей гравиметрической съемки за это же время позволит ставить те задачи, о которых указано в § 2, и выполнение которых приведет к возможности из астрономо-геодезических и гравиметрических материалов по одному СССР установить общий земной эллипсоид со средней ошибкой в размере полуоси, меньшей  $\pm 50$  м. Эти обширные материалы по СССР и установленные в СССР программы их собирания и методы их обработки коренным образом изменяют ту постановку вопроса об изучении фигуры Земли и ее размеров, которая до сих пор проводится в заграничных государствах.

## К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ СССР

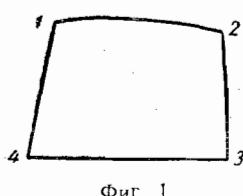
### 1. Вывод невязок в отдельном полигоне, обусловленных неверностью принимаемых значений большой полуоси и сжатия эллипсоида

Мы будем рассматривать сфероидический четырехугольник  $1, 2, 3, 4$  (фиг. 1), построенный на эллипсоиде с размерами  $a$  и  $e^2$ , в котором стороны  $1.4$  и  $2.3$  совпадают с меридианами; вершины  $1$  и  $2$  имеют одну и ту же широту, а вершины  $3$  и  $4$  также лежат на одной параллели; длины сторон  $1.4$ ,  $1.2$ ,  $2.3$  равны между собой и равны  $s$ ; сторона  $3.4$  имеет длину  $s_1$ . Азимут геодезической линии  $1.2$  в ее середине равен  $90^\circ$ , азимут геодезической линии  $3.4$  в ее средней точке равен  $270^\circ$ . Назовем широты для средних точек геолиний  $1.2$ ,  $2.3$ ,  $3.4$  и  $4.1$  соответственно через  $\varphi_m^{1 \cdot 2}$ ,  $\varphi_m^{2 \cdot 3}$ ,  $\varphi_m^{3 \cdot 4}$  и  $\varphi_m^{4 \cdot 1}$ .

Не изменяя начальной широты точек и начального в ней азимута  $\alpha_{1 \cdot 2}$ , построим теперь на эллипсоиде с размерами  $a + \Delta a$  и  $e^2$  точку  $4'$ , используя при этом без всякого в них изменения длины сторон  $1.2$ ,  $2.3$  и  $3.4$  и углы при вершинах  $2$  и  $3$ . Идя же от точки  $1$  по геолинии  $1.4$  без изменения ее азимута и длины  $s$ , построим на том же эллипсоиде точку  $4''$ .

Вследствие того, что мы укладываем элементы нашего четырехугольника, заданные на эллипсоиде с размерами  $a$  и  $e^2$  на ином эллипсоиде с размерами  $a + \Delta a$  и  $e^2$ , точки  $4'$  и  $4''$  не совпадут. Выясним сперва уклонение точки  $4'$  по широте от точки  $4''$ , или вычислим добавочную широтную невязку в нашем полигоне, обусловленную, конечно, неверностью на  $\Delta a$  большой полуоси эллипсоида.

При расчетах будем пользоваться известными вторыми формулами Гаусса:



Фиг. 1

$$b = (1) s \cos \alpha \left[ 1 + \frac{t^2}{2y} - \frac{l^2}{12} \right],$$
$$l = (2) \frac{s \sin \alpha}{\cos \varphi} \left[ 1 + \frac{l^2}{24} - \frac{\sigma^2}{24} \right],$$
$$t = (2) s \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right],$$

в которых мы опускаем члены порядка  $\frac{e^2 s^3}{R^3}$ , так как изменения в них будут выражаться только десятитысячными долями секунды. Далее, будем обозначать: через  $\delta\alpha'$  и  $\delta\varphi'$  изменения в азимуте и в широте,

вычисляемые в первом приближении, когда мы ограничиваемся величинами порядка  $\frac{s^2}{R^2} \frac{\Delta a}{a}$ ; через  $\alpha_{m_{1 \cdot 2}}$ ,  $\alpha_{m_{2 \cdot 3}}$  — средние азимуты геолиний 1.2, 2.3 . . .

Мы имеем:

$$(\delta\alpha_{2 \cdot 1})' = \frac{-s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a};$$

$$\alpha_{m_{1 \cdot 2}} = 90^\circ - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{2 N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Теперь окончательно напишем:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_2 &= \frac{s^2}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta a}{a}, \\ \delta\alpha_{2 \cdot 1} &= - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{4 M_m^{1 \cdot 2} (N_m^{1 \cdot 2})^2 \cos^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} - \\ &\quad - \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} (2 + \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1 \cdot 2})}{8 R^3} \cdot \frac{\Delta a}{a}. \end{aligned}$$

Так как в членах с  $s^3$  мы можем не различать  $M$  от  $N$  и от  $R$ , понимая под  $R$  средний радиус кривизны, то еще перепишем полученные формулы так:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_2 &= \frac{s^2}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta a}{a} \\ \delta\alpha_{2 \cdot 1} &= \left\{ - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 (R_m^{1 \cdot 2})^3} \right\} \cdot \frac{\Delta a}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Далее:

$$\delta\varphi'_3 = \delta\varphi_2 + \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2\varphi_m^{2 \cdot 3}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a};$$

$$\delta\alpha'_{3 \cdot 2} = \delta\alpha_{2 \cdot 1} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \cdot \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a};$$

$$\alpha'_{m_{2 \cdot 3}} = 180^\circ - \left( \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} - \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} \right) \frac{\Delta a}{a},$$

и отсюда:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_3 &= + \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{s^2}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \\ &\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2 s^2 \sin 2\varphi_m^{2 \cdot 3}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\delta\alpha_{3 \cdot 2} = \left\{ - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} - \frac{3 s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{8 (R_m^{1 \cdot 2})^3} \right\} \frac{\Delta a}{a}. \quad (3)$$

При получении формулы (3) не нужно учитывать изменение в  $t_{2 \cdot 3}$ , обусловленное изменениями в (2)  $\alpha_{m_{2 \cdot 3}}$  и в  $\varphi_m^{2 \cdot 3}$ , нужно лишь учесть изменение в  $\alpha_{m_{2 \cdot 3}}$ , которое уже и учтено в первом приближении в  $\delta\alpha'_{2 \cdot 3}$ . Теперь соображаем  $\delta\alpha'_{4 \cdot 3}$  и  $\delta\varphi'_4$ :

$$\delta\alpha'_{4 \cdot 3} = \delta\alpha_{3 \cdot 2} + \frac{s_1}{N_m^{3 \cdot 4}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \cdot \frac{\Delta a}{a},$$

с учетом лишь изменения (2)  $m_{3 \cdot 4}$  в главном члене;

$$\delta\varphi'_4 = \delta\varphi_3 + \frac{s_1}{M_m^{3 \cdot 4}} \left[ \frac{\delta\alpha'_{4 \cdot 3} + \delta\alpha_{3 \cdot 2}}{2} \right],$$

с учетом лишь изменения  $\alpha_{m_{3 \cdot 2}}$  в главном члене.

Отсюда:

$$\begin{aligned} \delta\varphi'_4 &= \delta\varphi_3 + \frac{s_1}{M_m^{3 \cdot 4}} \left[ -\frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} + \frac{s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 N_m^{3 \cdot 4}} \right] \cdot \frac{\Delta a}{a}; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \left[ \frac{s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 R^3} - \frac{s \cdot s_1}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{3 \cdot 4}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s^2 s_1}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2} N_m^{3 \cdot 4}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \frac{s_1^2 s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{2 M_m^{3 \cdot 4} N_m^{1 \cdot 2} N_m^{3 \cdot 4} \cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s_1^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{4 M_m^{3 \cdot 4} (N_m^{3 \cdot 4})^2 \cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} \right] \cdot \frac{\Delta a}{a} + \left[ \frac{1}{2} \frac{e^2 s s_1 \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{3 \cdot 4}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} (2 + \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{3 \cdot 4})}{8 R^3} \right] \cdot \frac{\Delta a}{a}; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \left\{ + \frac{s' \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} - \frac{s \cdot s_1}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{3 \cdot 4}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 R^3} + \frac{1}{2} \frac{e^2 s s_1 \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{3 \cdot 4}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \right\} \frac{\Delta a}{a}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta\varphi_4 &= \left[ \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3}} + \frac{s^2}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} - \frac{s s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2} M_m^{3 \cdot 4}} + \frac{s_1^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 M_m^{3 \cdot 4} N_m^{3 \cdot 4}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1 s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{R^3} \right] \frac{\Delta a}{a} + \left[ - \frac{s \cdot s'_2}{2 R^3 \cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{2 \cdot 3}} \right] \frac{\Delta a}{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь идем от точки 1 к точке 4 и получаем

$$\delta\varphi'_4 = \frac{s}{M_m^{1 \cdot 4}} \cdot \frac{\Delta a}{a},$$

без учета изменений в  $\alpha_{m_{1,4}}$  и в  $\varphi_m^{1,4}$ . Но влияние изменения в  $\alpha_{m_{1,4}}$  будет равно нулю, а влияние изменения  $\varphi_m^{1,4}$  будет равно  $+\frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2\varphi_m^{1,4}}{M_m^{1,4} N_m^{1,4}}$ .

$$\frac{\Delta a}{a}$$

Поэтому:

$$\delta\varphi'_4 = \frac{s}{M_m^{1,4}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2\varphi_m^{1,4}}{M_m^{1,4} N_m^{1,4}} \cdot \frac{\Delta a}{a}. \quad (6)$$

Вычитая из (5) уравнение (6), получим:

$$\varphi_4' - \varphi_4'' = \left[ \frac{s^2}{2 M_m^{1,2} N_m^{1,2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2} - \frac{s s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2}}{N_m^{1,2} M_m^{3,4}} + \frac{s_1^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3,4}}{2 M_m^{3,4} N_m^{3,4}} - \right. \\ \left. - \frac{s s_1^2}{2 R^3 \cos^2 \varphi_m^{3,4}} + \frac{s_1 s^2}{R^3} \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2,3} \right] \frac{\Delta a}{a} \rho''. \quad (7)$$

Очевидно имеем.

$$s_1 = s \frac{N_m^{3,4}}{N_m^{1,2}} \frac{\cos \varphi_m^{3,4}}{\cos \varphi_m^{1,2}} \left[ 1 - \frac{l^2}{24} \sin(\varphi_m^{3,4} - \varphi_m^{1,2}) \sin 2\varphi_m^{2,3} \right], \quad (8)$$

где  $l$  — разность долгот точек 1 и 2.

При замене в (7)  $s_1$  через  $s$  можем принять:

$$s_1 = s \frac{N_m^{3,4}}{N_m^{1,2}} \cdot \frac{\cos \varphi_m^{3,4}}{\cos \varphi_m^{1,2}}$$

и тогда получим:

$$\varphi_4' - \varphi_4'' = \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2} \cdot \rho''}{(N_m^{1,2})^2} \frac{\Delta a}{a} \left[ \frac{N_m^{1,2}}{2 M_m^{1,2}} - \frac{N_m^{3,4} \cos \varphi_m^{3,4}}{M_m^{3,4} \cos \varphi_m^{1,2}} + \right. \\ \left. + \frac{N_m^{3,4} \cos^2 \varphi_m^{3,4} \operatorname{tg} \varphi_m^{3,4}}{2 M_m^{3,4} \cos^2 \varphi_m^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2}} - \frac{s}{2R} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1,2}) \operatorname{ctg} \varphi_m^{1,2} \right] \frac{\Delta a}{a}.$$

Так как:

$$\frac{N}{M} = 1 + 2\mu \cos^2 \varphi,$$

то:

$$\varphi_4' - \varphi_4'' = \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2}}{(N_m^{1,2})^2} \rho'' \frac{\Delta a}{a} \left[ \frac{1}{2} + \mu \cos^2 \varphi_m^{1,2} - \frac{\cos \varphi_m^{3,4}}{\cos \varphi_m^{1,2}} - \right. \\ \left. - 2\mu \cos^2 \varphi_m^{3,4} + \frac{\sin 2\varphi_m^{3,4}}{2 \sin 2\varphi_m^{1,2}} + \mu \cos^2 \varphi_m^{3,4} - \frac{s (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1,2})}{2R \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2}} \right];$$

$$\varphi_4' - \varphi_4'' = \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2}}{(N_m^{1,2})^2} \rho'' \frac{\Delta a}{a} \left[ \frac{1}{2} - 1 - \frac{s}{M_m^{2,3}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1,2} + \frac{1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{s}{M_m^{2,3}} \operatorname{ctg} \varphi_m^{1,2} - \frac{s}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi_m^{1,2} \right],$$

или, окончательно:

$$(\varphi_4' - \varphi_4'')'' = -\frac{s^3}{R^3} \rho'' \cdot \frac{\Delta a}{a}. \quad (9)$$

Из (9) при  $s = 450$  км и  $\Delta a = 1000$  м имеем:

$$\varphi_4' - \varphi_4'' = -0'',0114.$$

Или в метрах широтная невязка равна — 0,35 м.

Формула (5) дает, очевидно, угловую невязку полигона. Применяя (8), мы найдем:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \left\{ \frac{s}{N_m^{1 \cdot 2}} \frac{\cos \varphi_m^{3 \cdot 4}}{\cos \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} - \frac{s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 R^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^2}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} + \frac{1}{2} \frac{e^2 s s_1 \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{3 \cdot 4}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \right\} \frac{\Delta a}{a} \rho''; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \left\{ \frac{s}{N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} + \frac{s^2}{N_m^{1 \cdot 2} M_m^{2 \cdot 3}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} - \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 N_m^{1 \cdot 2} (M_m^{2 \cdot 3})^2} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} - \frac{s^2}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 R^3} + \frac{1}{2} \frac{e^2 s^2 \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \right\} \frac{\Delta a}{a} \rho''; \\ \delta\alpha_{1 \cdot 3} &= \frac{s}{N_m^{1 \cdot 2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \left[ 1 + \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} - 1 - \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3} \cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^2}{(M_m^{2 \cdot 3})^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s^2}{2 (M_m^{2 \cdot 3})^2} + \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{N_m^{2 \cdot 3} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 R^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{M_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} + \frac{1}{2} \frac{e^2 s \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3}} \right] \rho'' \frac{\Delta a}{a}; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \left[ \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} - \frac{2}{\sin \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \frac{\operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{\operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \mu \sin \varphi \cos \varphi - \frac{5}{2} \frac{s}{R} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \mu \sin 2 \varphi_m \right] \rho'' \frac{\Delta a}{a}; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \frac{\Delta a}{a} \rho'' \left[ 2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} - \frac{2}{\sin \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{2 s}{M_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}} \right] \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}}; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \frac{2 s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} \rho'' \left[ \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} - \frac{1}{\sin \varphi_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \right]; \\ \delta\alpha_{4 \cdot 3} &= \frac{2 s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{M_m^{2 \cdot 3} N_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} \rho'' [-\operatorname{ctg} \varphi_m^{3 \cdot 4}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательно:

$$\delta\alpha_{4 \cdot 3} = -\frac{2 s^2}{R^2} \cdot \frac{\Delta a}{a} \cdot \rho''. \quad (11)$$

Выражение (11) есть не что иное, как изменение избытка нашего четырехугольника при укладке его на эллипсоид с большой полуосью  $a + \Delta a$  вместо полуоси  $a$ . Понятно, что угловая невязка четырехугольника могла бы быть получена сразу, как изменение избытка четырехугольника; проведенное вычисление  $\delta\alpha_{4 \cdot 3}$  подтверждает косвенно правильность сделанных расчетов величин  $\delta\alpha$  и  $\delta\varphi$  при  $\Delta\alpha = +1000$  м и  $s = 450$  км:

$$\delta\alpha_{4 \cdot 3} = -0'',33.$$

Переходим теперь к вычислению долготной невязки, или к расстоянию пунктов  $4'$  и  $4''$  по параллели. Мы имеем

$$\begin{aligned}\delta(L_2 - L_1) = & -\frac{s}{N_m^{1 \cdot 2} \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{4 R^3 \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a} - \\ & - \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 R^3 \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} \cdot \frac{\Delta a}{a},\end{aligned}$$

используя при этом формулу (1) для  $\delta\varphi_2$ . Следовательно

$$\delta(L_2 - L_1) = \left[ -\frac{s}{N_m^{1 \cdot 2} \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 R^3 \cos \varphi_m^{1 \cdot 2}} \right] \frac{\Delta a}{a}. \quad (12)$$

Далее:

$$\delta(L_3 - L_2) = \frac{s}{N_m^{2 \cdot 3} \cos \varphi_m^{2 \cdot 3}} \cdot \left[ \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{N_m^{1 \cdot 2}} - \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 N_m^{1 \cdot 2} N_m^{2 \cdot 3}} \right] \frac{\Delta a}{a}; \quad (13)$$

при этом  $\alpha_{m_2 \cdot 3} = 180^\circ + \frac{\delta\alpha_{3 \cdot 2} + \delta\alpha_{2 \cdot 1}}{2}$ , а  $\delta\alpha_{3 \cdot 2}$  и  $\delta\alpha_{2 \cdot 1}$  определяются формулами (1) и (3).

Далее:

$$\begin{aligned}\delta(L_4 - L_3) = & \frac{s_1}{N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \frac{\Delta a}{a} - \frac{s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \left( \frac{\delta\varphi_4 + \delta\varphi_3}{2} \right) + \\ & + \frac{s_1^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{8 R^3 \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2} \frac{e^2 s_1 s \sin 2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4} M_m^{2 \cdot 3} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \frac{\Delta a}{a}. \\ \delta(L_4 - L_1) = & \left[ \frac{s_1}{N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4} M_m^{2 \cdot 3} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \right. \\ & - \frac{s_1 s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2} N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \frac{s s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 N_m^{1 \cdot 2} M_m^{3 \cdot 4} N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} - \\ & - \left. \frac{s_1^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{4 M_m^{3 \cdot 4} N_m^{3 \cdot 4} \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} + \frac{s_1^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{8 R \cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \right] \frac{\Delta a}{a} + \frac{e^2 s_1 s \sin \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4} M_m^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{\Delta a}{a}. \\ \delta(L_4 - L_3) = & \left[ \frac{s_1}{N_m^{3 \cdot 4}} - \frac{s s_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{N_m^{3 \cdot 4} M_m^{2 \cdot 3}} - \frac{s_1 s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2} N_m^{3 \cdot 4}} + \frac{s s_1^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4}}{2 N_m^{1 \cdot 2} M_m^{3 \cdot 4} N_m^{3 \cdot 4}} - \right. \\ & \left. - \frac{s_1^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{8 R^3} \right] \frac{1}{\cos \varphi_m^{3 \cdot 4}} \frac{\Delta a}{a} + \frac{e^2 s_1 s \sin \varphi_m^{3 \cdot 4} \Delta a}{N_m^{3 \cdot 4} M_m^{3 \cdot 4}} \frac{\Delta a}{a}.\end{aligned} \quad (14)$$

Суммируя (12), (13) и (14), мы получим  $\delta L'_4$  в таком виде:

$$\begin{aligned}\delta L'_4 &= \left[ -\frac{s}{N_m^{1.2} \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s_1}{N_m^{3.4} \cos \varphi_m^{3.4}} + \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} N_m^{2.3} \cos \varphi_m^{2.3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ss_1 \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{N_m^{3.4} M_m^{1.2} \cos \varphi_m^{3.4}} \right] \frac{\Delta a}{a} - \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{2 N_m^{1.2} (N_m^{1.2})^2 \cos \varphi_m^{2.3}} \frac{\Delta a}{a} + \frac{e^2 s^2 \sin \varphi_m^{3.4}}{R^2} \frac{\Delta a}{a}, \\ \delta L'_4 &= \left[ \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} N_m^{2.3} \cos \varphi_m^{2.3}} - \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{N_m^{1.2} M_m^{2.3} \cos \varphi_m^{1.2}} - \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{2 R^3 \cos \varphi_m^{2.3}} \right] \frac{\Delta a}{a} + \\ &\quad + \frac{2 \mu s^2}{R^2} \sin \varphi_m^{3.4} \cdot \frac{\Delta a}{a}, \\ \delta L'_4 &= \left[ \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} N_m^{2.3} \cos \varphi_m^{1.2}} - \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{2 R^3 \cos \varphi_m^{1.2}} - \frac{s^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{N_m^{1.2} M_m^{2.3} \cos \varphi_m^{1.2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^3}{2 R^3} \frac{\operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{\cos \varphi_m^{2.3}} + \frac{2 \mu s^2}{R^2} \sin \varphi_m^{3.4} \right] \frac{\Delta a}{a}, \\ \delta L'_4 &= \left[ -\frac{s^3}{R^3} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1.2}}{\cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^3(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1.2})}{R^3 \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{L \mu s^2}{R^2} \sin \varphi_m^{3.4} \right] \frac{\Delta a}{a}, \\ \delta L''_4 &= \left[ \frac{1}{\cos \varphi_m^{1.2}} \frac{s^3}{R^3} + \frac{L \mu s^2}{R^2} \sin \varphi_m^{3.4} \right] \frac{\Delta a}{a} \varphi''. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как при сохранении начального азимута  $\alpha_{1.2}$  и угла при вершине 1 азимут  $\alpha_{1.4}$  на новом эллипсоиде останется равным в точности  $180^\circ$ , то, очевидно, изменения разности долгот по линии 1.4 при переходе от 1 к 4" не произойдет, и  $\delta L'_4$  можно считать невязкой полигона по долготе. При  $\varphi = 60^\circ$ ,  $s = 450$  км и  $\Delta a = 1000$  м получим:

$$\delta L''_4 = 0'',025 \text{ или в метрах } + 0,39 \text{ м.}$$

Нужно заметить, что полученные невязки относятся именно к избранному построению нашего четырехугольника на новом эллипсоиде, при котором начальной принимается точка 1 и неизменными сохраняются углы при вершинах 1, 2 и 3. Если бы сохранить углы 2, 3 и 4, а изменять угол 1, то мы получили бы то же выражение для невязки по широте, но невязка по долготе оказалась бы равной:

$$\left\{ -\frac{s^3}{R^3 \cos \varphi_m^{1.2}} \frac{\Delta a}{a} + 4 \mu \frac{s^2}{a^2} \frac{\Delta a}{a} \sin \varphi_m^{3.4} \right\} \varphi'' \quad (16)$$

и оказалась бы при  $\varphi = 60^\circ$ ,  $s = 450$  км и  $\Delta a = 1000$  м равной в метрах — 0,37 м. Вообще, избирая разные приемы построения полигона и сохраняя те или другие три угла из четырех, мы будем получать различные невязки полигона.

Можно считать, что полная линейная невязка будет оставаться постоянной и равной  $\pm 0,53$  м в широтах около  $60^\circ$ .

Переходим теперь к выяснению влияния изменения сжатия эллипсоида на величину  $\Delta \mu$ . Обозначив

$$(1 - 2 \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = k,$$

мы имеем:

$$\begin{aligned}
 (\delta\alpha_{2 \cdot 1})' &= -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{ak} \Delta\mu; \\
 \alpha'_{m_{1 \cdot 2}} &= 90^\circ - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{2ak} \Delta\mu; \\
 \delta\varphi'_2 &= \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{2 M_m^{1 \cdot 2} ak} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \cdot \Delta\mu; \\
 \delta\alpha_{2 \cdot 1} &= -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{ak} \Delta\mu - \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} (2 + \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2})}{8 R^3} \times \\
 &\quad \times \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \Delta\mu + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{4 M_m^{1 \cdot 2} N_m^{1 \cdot 2} \cdot a \cdot k} \Delta\mu; \\
 \delta\alpha_{2 \cdot 1} &= \left[ -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{a \cdot k} \Delta\mu + \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 R^3} \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{1 \cdot 2} \right] \Delta\mu \quad \left. \right\} \quad (17) \\
 \delta\varphi_2 &= \frac{s^2}{2 M_m^{1 \cdot 2} a k} \cdot \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \Delta\mu
 \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi'_3 &= \delta\varphi_2 - \frac{s(2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2 \cdot 3})}{a} \Delta\mu; \\
 \delta\alpha'_{3 \cdot 2} &= \delta\alpha_{2 \cdot 1} + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{aN_m^{2 \cdot 3} \cdot k} \Delta\mu; \\
 \alpha'_{m_{3 \cdot 2}} &= 180^\circ - \left[ \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2}}{a \cdot k} - \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{2 a \cdot k N_m^{2 \cdot 3}} \right] \Delta\mu.
 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_3 &= -\frac{s}{a}(2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2 \cdot 3}) \Delta\mu + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{2 M_m^{1 \cdot 2} a \cdot k} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} \Delta\mu - \frac{3 e^2 s^2 \sin 2 \varphi_m^{2 \cdot 3}}{4 R^2} \times \\
 &\quad \times (2 - 3 \sin^2 \varphi) \Delta\mu. \\
 \delta\alpha_{3 \cdot 2} &= \left\{ -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{ak} \operatorname{tg} \varphi_m^{1 \cdot 2} + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3} \operatorname{tg} \varphi_m^{2 \cdot 3}}{ak N_m^{2 \cdot 3}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3 s^3 \sin \varphi_m^{1 \cdot 2} \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{1 \cdot 2}}{8 R^3} \right\} \Delta\mu. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Теперь соображаем  $\delta\alpha'_{4 \cdot 3}$  и  $\delta\varphi'_4$ :

$$\delta\alpha'_{4 \cdot 3} = \delta\alpha_{3 \cdot 2} + \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3 \cdot 4}}{a \cdot k_1} \operatorname{tg} \varphi_m^{3 \cdot 4} \Delta\mu,$$

$$\delta\varphi'_4 = \delta\varphi_3 + \frac{s_1}{M_m^{3 \cdot 4}} \left[ \frac{\delta\alpha_{3 \cdot 2} + \delta\alpha'_{4 \cdot 3}}{2} \right].$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}\delta\varphi'_4 &= \delta\varphi_3 + \frac{s_1}{M_m^{3.4}} \left[ -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} + \frac{s^2 s^i \Pi^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cdot N_m^{2.3}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{2 a \cdot k_1} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} \right] \Delta\mu. \\ \delta\alpha''_{4.3} &= \left[ -\frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{a \cdot k_1} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} + \right. \\ &\quad + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{a k N_m^{2.3}} - \frac{3 s^3 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{1.2}}{8 R^3} + \frac{s s_1 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{1.2})}{a N_m^{3.4} k \cos^2 \varphi_m^{3.4}} - \\ &\quad - \frac{s_1 s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{2 M_m a \cdot k N_m^{3.4} \cos^2 \varphi_m^{3.4}} + \frac{s s_1^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{2 R^3 \cos^2 \varphi_m^{3.4}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} - \\ &\quad \left. - \frac{s_1^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m^{3.4} \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{8 R^3} \right] \Delta\mu. \\ \delta\alpha_{4.3} &= \left[ \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{a \cdot k_1} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} + \right. \\ &\quad + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{a \cdot k N_m^{2.3}} - \frac{s^3 \operatorname{tg}^3 \varphi_m \sin^2 \varphi_m}{2 R^3} + \frac{s s_1 [2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3}]}{a \cdot k N_m^{3.4} \cos^2 \varphi_m^{3.4}} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{e^2 s s_1 \sin 2 \varphi_m^{3.4}}{R^2} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} \times (2 - 3 \sin^2 \varphi_m) \right] \Delta\mu. \quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\varphi'_4' &= \left[ -\frac{s}{a} (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3}) + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{2 M_m^{1.2} a \cdot k} - \frac{s s_1 \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{M_m^{3.4} a \cdot k} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} + \right. \\ &\quad + \frac{s_1^2 \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{2 a k_1 M_m^{3.4}} \sin^2 \varphi_m^{3.4} + \frac{s s_1^2 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3})}{2 R^3 \cos^2 \varphi_m^{3.4}} + \\ &\quad \left. + \frac{s_1 s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{R^3} \right] \Delta\mu - \frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2 \varphi_m}{R^2} (2 - 3 \sin^2 \varphi_m) \Delta\mu. \quad (20)\end{aligned}$$

Идя от точки  $I$  к точке  $4$ , очевидно, получим

$$\delta\varphi''_4 = -\frac{s}{a} (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{1.4}) - \frac{3}{4} \frac{e^2 s^2 \sin 2 \varphi_m}{R^2} (2 - 3 \sin^2 \varphi_m) \Delta\mu. \quad (21)$$

Вычитая из (20) уравнения (21), получим:

$$\begin{aligned}\delta\varphi'_4 - \delta\varphi''_4 &= \left\{ \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{2 M_m^{1.2} a \cdot k} - \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{M_m^{3.4} a \cdot k} \cdot \frac{N_m^{3.4} \cos \varphi_m^{3.4}}{N_m^{1.2} \cos \varphi_m^{1.2}} + \right. \\ &\quad + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{3.4} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} \cos^2 \varphi_m^{3.4} (N_m^{3.4})^2}{2 a k_1 M_m^{3.4} (N_m^{1.2})^2 \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{R^3} + \\ &\quad \left. + \frac{s^3 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m)}{2 R^3 \cos^2 \varphi_m} \right\} \Delta\mu.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'' &= \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{M_m^{1.2} a \cdot k} \left\{ \frac{1}{2} - 1 - \frac{s}{R} \operatorname{tg} \varphi_m + \frac{1}{2} + \frac{s}{2R} \operatorname{tg} \varphi_m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3s}{2R} \operatorname{ctg} \varphi_m + \frac{s \operatorname{tg} \varphi_m}{R} + \frac{s(2-3 \sin^2 \varphi_m)}{2 \sin^3 \varphi \cos \varphi} \right\} \Delta \mu. \\ \delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'' &= \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg} \varphi_m}{2R^3} \left[ \operatorname{tg} \varphi_m - 3 \operatorname{ctg} \varphi_m + \frac{2-3 \sin^2 \varphi}{\sin^3 \varphi \cos \varphi} \right] \Delta \mu. \\ \delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'' &= \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi}{2R^3 \cos \varphi} \left[ \sin^3 \varphi - 3 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 2 \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \right] \Delta \mu. \\ \delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'' &= \frac{s^3 \operatorname{tg} \varphi}{2R^3 \cos \varphi} \left[ -4 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \right] = \\ &= \frac{s^3}{R^3} \sin \varphi \left[ -2 \sin \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \Delta \mu = \frac{s^3}{R^3} \cos 2\varphi \Delta \mu.\end{aligned}$$

Итак, широтная невязка

$$(\delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'') = \frac{s^3}{R^3} \varphi'' \cdot \cos 2\varphi \cdot \Delta \mu. \quad (22)$$

Полагая  $\varphi = 60^\circ$ ,  $s = 450$  км,  $\Delta \mu = \frac{1}{44000}$  (две единицы в знаменателе сжатия), получаем

$$(\delta\varphi_4' - \delta\varphi_4'') = -0'',001.$$

Переходим к вычислению невязки по долготе, обусловленной изменением сжатия эллипса на  $\Delta \mu$ . Мы имеем, используя формулы (17):

$$\begin{aligned}\delta(L_2 - L_1) &= -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} \Delta \mu + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1.2}}{4R^3 \cos \varphi_m^{1.2}} \sin^2 \varphi_m^{1.2} \Delta \mu - \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{s^2}{R^3} \times \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_m^{1.2} \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{\cos \varphi_m^{1.2}} \Delta \mu; \\ \delta(L_2 - L_1) &= \left[ -\frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m}{8R^3 \cos \varphi_m^{1.2}} \right] \Delta \mu.\end{aligned} \quad (23)$$

Далее, используя (17) для  $\delta\alpha$  и (18) — для  $\delta\alpha_{1,2}$ :

$$\delta(L_3 - L_2) = \left[ +\frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} \cos \varphi_m^{2.3} a \cdot k} - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{2.3}}{2a \cdot k (N_m^{2.3})^2 \cos \varphi_m^{2.3}} \right] \Delta \mu. \quad (24)$$

Далее, с использованием (18), (19) и (20):

$$\begin{aligned} \delta(L_4 - L_3) = & \left[ + \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{3.4}} + \frac{s_1 s \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3})}{aN_m^{3.4} \cos \varphi_m^{3.4}} - \right. \\ & - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{2R^3 \cos \varphi_m} + \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{2R^2 \cos \varphi_m} - \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m}{4R^3 \cos \varphi_m} + \\ & \left. + \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m}{8R^3 \cos \varphi_m} \right] \Delta \mu - \frac{ss_1 \mu (2 - 3 \sin^2 \varphi_m)}{R^2 \cos \varphi_m} \Delta \mu; \\ \delta(L_4 - L_3) = & \left[ + \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{a \cdot k_1 \cos \varphi_m^{3.4}} + \frac{s_1 s (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3}) \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{aN_m^{3.4} \cos \varphi_m^{3.4}} - \right. \\ & - \frac{s^3 \operatorname{tg}^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m}{8R^3 \cos \varphi_m} - \frac{2 \sin \varphi_m \cos \varphi_m ss_1 \mu (2 - 3 \sin^2 \varphi_m)}{R^2 \cos \varphi_m} \left. \right] \Delta \mu. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь, идя от точки 1 к точке 4, получим при сохранении угла между линиями 1.2 и 1.4 и при сохранении начального азимута в 1 изменение долготы пункта 4'', равное нулю. Другими словами, сумма выражений (23), (24) и (25) доставит долготную невязку полигона. Мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta(L_{4'} - L_{4''}) = & \left[ + \frac{s_1 \sin^2 \varphi_m^{3.4}}{a \cdot k_1 \cos \varphi_m^{3.4}} - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{2.3} \cdot a \cdot k \cos \varphi_m^{2.3}} + \right. \\ & + \frac{ss_1 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3}) \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4}}{aN_m^{3.4} \cos \varphi_m^{3.4}} - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{2R^3 \cos \varphi_m} - \\ & \left. - \frac{2ss_1 \sin \varphi \cos \varphi \mu (2 - 3 \sin^2 \varphi_m)}{R^2 \cos \varphi_m} \right] \Delta \mu; \\ \delta(L_{4'} - L_{4''}) = & \left[ \frac{sN_m^{3.4} \sin \varphi_m^{3.4}}{N_m^{1.2} a \cdot k_1 \cos \varphi_m^{1.2}} - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{2.3} a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} - \right. \\ & - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{2R^3 \cos \varphi_m} + \frac{s^2 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3})}{aN_m^{1.2} \cos \varphi_m^{1.2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{3.4} - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{2R^3 \cos \varphi_m} - \\ & - \frac{(2ss_1 \mu \sin \varphi \cos \varphi (2 - 3 \sin^2 \varphi_m))}{R^2 \cos \varphi_m} \left. \right] \Delta \mu = \left[ \frac{sN_m^{3.4} \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} a \cdot k_1 \cos \varphi_m^{1.2}} - \right. \\ & - \frac{2s^2 N_m^{3.4} \sin \varphi_m^{1.2}}{N_m^{1.2} a \cdot k_1 M_m^{2.3}} + \frac{s^3 \cos 2 \varphi_m}{R^2 \cos \varphi_m} - \frac{s \sin^2 \varphi_m^{1.2}}{a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} + \frac{s^2 \sin^2 \varphi_m^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2}}{N_m^{2.3} a \cdot k \cos \varphi_m^{1.2}} - \\ & - \frac{s^3 \sin^2 \varphi_m \operatorname{tg}^2 \varphi_m}{R^3 \cos \varphi_m} + \frac{s^2 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3})}{aN_m^{1.2} \cos^3 \varphi_m^{1.2}} \operatorname{tg} \varphi_m^{1.2} - \frac{s^3 (2 - 3 \sin^2 \varphi_m^{2.3})}{aN_m^{1.2} M_m^{2.3} \cos \varphi_m^{1.2}} - \\ & - \frac{2ss_1 \mu \sin \varphi \cos \varphi (2 - 3 \sin^2 \varphi_m)}{R^2 \cos \varphi} \left. \right] \Delta \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(L_4' - L_4'') = & \frac{s}{ak \cos \varphi_m^{1.2}} \left\{ -\frac{2 \mu s \sin^2 \varphi_m^{1.2} \sin 2 \varphi_m^{2.3}}{M_m^{2.3}} - \frac{s^2 \cos 2 \varphi_m}{K^2} - \right. \\ & - \frac{4 M s'}{N_m^{1.2}} \sin \varphi_m \cos^3 \varphi_m - \frac{2 s \mu \sin \varphi}{R} \cos \varphi (2 - 3 \sin^2 \varphi_m) - \\ & \left. - \frac{s \mu}{N_m} \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi_m \times (2 - 3 \sin^2 \varphi_m) \right\} \Delta \mu, \\ \delta(L_4' - L_4'')'' = & \left\{ -\frac{s^3 \cos 2 \varphi_m}{R^3 \cos \varphi_m} + \right. \\ & \left. + \frac{\mu s^2}{R^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi_m}{\cos \varphi_m} [1 - 9 \cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \right\} \Delta \mu \rho''. \end{aligned} \quad (26)$$

Ввиду малого числового значения члена с  $\mu s^2$  можно написать:

$$\delta(L_4' - L_4'')'' = -\frac{s^3 \cos 2 \varphi}{R^3 \cos \varphi} \Delta \mu \cdot \rho''. \quad (27)$$

При  $s = 450$  км,  $\Delta a = +1000$  м и  $\Delta \mu = 1 : 44000$  в широтах около  $60^\circ$  получаем широтную невязку — 0,37 м, долготную — 0,41 м, а общую линейную — 0,55 м.

## 2. Оценка значения деформаций, вносимых в полигоны триангуляции I класса неверностью размеров и сжатия принятого при ее обработке эллипсоида

Среднюю линейную невязку нашего четырехугольника, рассмотренного в предыдущем разделе, обусловленную ошибками наблюдений и измерений, следует полагать примерно равной  $\pm 2,7$  м, и по сравнению с ней добавочная невязка в 0,55 м, обусловленная ошибкой в полуоси эллипсоида в 1000 м, является малой, но мы не можем сразу сказать, является ли она и пренебрегаемой.

При оценке добавочных деформаций в полигоне, в его элементах, мы можем считать его плоским, взяв, однако, строгие значения невязок, полученные в предыдущем разделе. Полагая  $\alpha_{1.2} = 90^\circ$  и поправку этого азимута равной нулю, мы напишем такие условные уравнения:

$$\begin{aligned} -\delta s_{2.3} - \frac{s}{\rho''} v_2 - \frac{s}{\rho''} v_3 + \delta s_{4.1} - 0,37 = 0 \\ + \delta s_{1.2} - \delta s_{3.4} + \frac{s}{\rho''} v_1 + \frac{s}{\rho''} v_2 + 0,41 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + 0,33 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

В этих уравнениях под  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$  понимаются поправки углов соответственно при вершинах 1, 2, 3 и 4, а через  $\delta s_{i.k}$  — поправка длины стороны  $s_{i.k}$ . Нормальные уравнения коррелат напишутся так:

$$\begin{aligned} 2 \left( 1 + \frac{s^2}{\rho''^2} \right) k_1 - \frac{s^2}{\rho^2} k_2 - 2 \frac{s}{\rho} k_3 - 0,37 = 0 \\ 2 \left( 1 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) k_2 + 2 \frac{s}{\rho} k_3 + 0,41 = 0 \\ + 4 k_3 + 0,33 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Из уравнений (28) и (29) легко получаем

$$k_2 = - \frac{0,82 - 0,33 \cdot \frac{s}{\rho}}{2 \left( 2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right)} = - 0,006;$$

$$k_1 = + \frac{0,74 - 0,33 \frac{s}{\rho}}{2 \left( 2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right)} = 0,000;$$

$$k_3 = - \frac{0,33}{4} + \frac{0,78 \frac{s}{\rho} - 0,33 \frac{s^2}{\rho^2}}{2 \left( 2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right)} = - 0,076;$$

$$\delta s_{1 \cdot 2} = - 0,006 \text{ м}; \quad \delta s_{4 \cdot 1} = 0,000 \text{ м}$$

$$\delta s_{2 \cdot 3} = 0,000 \text{ м}; \quad \delta s_{3 \cdot 4} = + 0,006 \text{ м}$$

$$v_1 = 0'',09; \quad v_2 = - 0'',08; \quad v_3 = - 0'',08; \quad v_4 = - 0'',08$$

Полученные величины  $\delta s$  и  $v$  представляют собой те поправки, которые мы получим как добавочные к соответственным поправкам, вызванным ошибками измеренных элементов полигона, если этот полигон укладываем с элементами его, отнесенными к эллипсоиду с размерами  $a$  и  $\mu$ , на эллипсоиде с размерами  $a + \Delta a$  и  $\mu + \Delta \mu$ .

Конечно, эти поправки следует сравнивать с теми, которые получаются в соответственных элементах полигона при правильном перенесении их с одного эллипса на другой. Этот правильный перенос осуществляется только методом проектирования вершин 1, 2, 3 и 4 на эллипсоид с размерами  $a + \Delta a$  и  $\mu + \Delta \mu$  нормальми к его поверхности (фиг. 2), причем оба эллипса считаются касающимися друг с другом в точке 1. Применяя формулы Ф. Н. Красовского, соответственно упрощенные, для расчета высот  $2.2_1$ ,  $3.3_1$ ,  $4.4_1$  одного эллипса над другим, будем иметь:

$$h = 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} [\Delta a + a \sin^2 \varphi \Delta \mu];$$

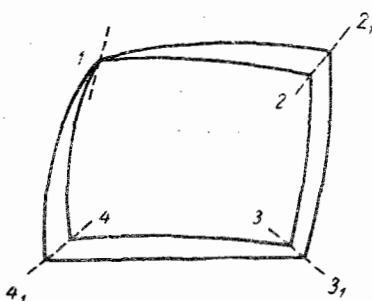
$$2.2_1 = 2,5 \text{ м}; \quad 3.3_1 = 5,0 \text{ м}; \quad 4.4_1 = 2,5 \text{ м}.$$

Отсюда:

$$1.2_1 = s + 0,059 \text{ м}; \quad 2_1 \cdot 3_1 = s + 0,234 \text{ м}; \quad 3_1 \cdot 4_1 = s_1 + 0,234 \text{ м};$$

$$1.4_1 = s + 0,059 \text{ м}.$$

Для расчета поправок в углах при переходе от вершин 2, 3 и 4 к вершинам  $2_1$ ,  $3_1$  и  $4_1$  используем полученные ранее значения  $\delta \varphi_2$ ,  $\delta L_2$ ,  $\delta \gamma_3$ ,  $\delta L_3$ ,  $\delta \varphi_4$ ,  $\delta L_4$ , как определяющие угол нормали к эллипсоиду с размерами  $a + \Delta a$  и  $\mu + \Delta \mu$  с нормалью к эллипсоиду с размерами  $a$  и  $\mu$ . В вершине  $2_1$  можно считать уклонение нормали происходящим в пло-



Фиг. 2

скости геолинии  $1.2_1$ . Так как  $\delta L_2 \cos \varphi = -\frac{s}{N} \frac{\Delta a}{a}$ , а зенитное расстояние с 2 на 3 равно  $90^\circ - \frac{s \cdot \rho^0}{2R}$ , то изменение угла 2 будет равно

$$-\frac{s}{N} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\rho''}{\operatorname{ctg} \frac{s \cdot \rho^0}{2R}} = -0'',08.$$

Уклонение нормали в точке  $3_1$  можно считать происходящим в азимуте  $315^\circ$  при  $\delta L_3 = -\frac{s}{N} \frac{\Delta a}{a}$  и при  $\delta \varphi_3 = +\frac{s}{\rho} \frac{\Delta a}{a}$ . Тогда изменение угла в  $3_1$  можно считать равным  $-0'',16$ ; изменение угла в  $4_1$  будет равно  $-0'',09$ . Поэтому после уравнивания полигона мы получим такие деформации его элементов:

|                        |   |
|------------------------|---|
| $\delta v_1 = -0'',09$ | $\delta(\delta s_{1-2}) = -0,065 \text{ м}$ |
| $\delta v_2 = 0'',00$  | $\delta(\delta s_{2-3}) = -0,234 \text{ м}$ |
| $\delta v_3 = +0'',08$ | $\delta(\delta s_{3-4}) = -0,229 \text{ м}$ |
| $\delta v_4 = +0'',01$ | $\delta(\delta s_{4-1}) = -0,059 \text{ м}$ |

Отсюда добавочные смещения вершин полигона будут таковы:

По оси  $y$ -ков:      По оси  $x$ -ов:

| Вершины | $\delta y$            | $\delta x$ |
|---------|-----------------------|------------|
| 2       | -0,065 м              | 0,000      |
| 3       | -0,065 м              | +0,234 м   |
| 4       | +0,174 м              | +0,054 м   |
| 1       | 0,000 (вернее, -0,03) | 0,000      |

Следовательно, искажения в относительном расположении вершин полигона достигают значений:

0,24 м по оси  $y$ -ков,

0,23 м по оси  $x$ -ов,

или полного линейного смещения до 0,34 м.

Так как все расчеты в триангуляции I класса делаются с сантиметрами в координатах и с сотыми долями секунды в азимутах, то, с точки зрения строгости вычислений, указанные добавочные деформации совершенно недопустимы; однако, раз полигон увязан, то противоречия при использовании его элементами и координатами его вершин и азимутов не возникает, а это самое главное в практике. Да, полигон будет неверно увязан, однако, с соблюдением всех геометрических условий. Что касается оценки размеров полученных искажений по существу, то они лежат на границе допустимости; следует и желательно их не иметь, однако, если они уже допущены, то можно и не гнаться за переделкой вычислений, в которых эти искажения были бы поправлены.

Сказанное относится к отдельному полигону. Если же мы представим себе целую систему полигонов, то вопрос очень усложнится, и оценку значения получающихся искажений в системе полигонов, или, вернее, накопление искажений  $\delta(\delta s)$ ,  $\delta v$ ,  $\delta x$  и  $\delta y$  в системе полигонов, мы можем выполнить, лишь исходя из некоторых общих соображений.

Укладывание системы полигонов, измеренных на эллипсоиде с размерами  $a$  и  $\mu$  на эллипсоиде с размерами  $a + \Delta a$  и  $\mu + \Delta \mu$ , представляет собой вообще неопределенную задачу: мы здесь не строим изображения одной поверхности на другой по какому-то математически выраженному закону, и, сохранив при таком укладывании одни элементы полигона, произвольно выбранные, мы искажаем неизбежно другие его элементы. Такой порядок принят, однако, в современной обработке триангуляции I класса во всех странах.

Проектируя вершины полигонов, расположенных на эллипсоиде с полуосью  $a$  и сжатием  $\mu$ , на эллипсоид с полуосью  $a + \Delta a$  и сжатием  $\mu + \Delta \mu$  нормальми к поверхности этого второго эллипсоида (фиг. 3),



Фиг. 3

мы осуществим геодезически правильно и одновременно вполне математически определенно переход к системе полигонов на втором эллипсоиде. С элементами именно таких полигонов, построенных в результате проектирования точек первого эллипсоида на второй, мы и должны сравнивать соответственные элементы полигонов, получаемых на втором эллипсоиде  $[a + \Delta a, \mu + \Delta \mu]$  в результате обычного укладывания полигонов, измеренных в натуре на первом эллипсоиде с полуосью  $a$  и сжатием  $\mu$ .

Не трудно видеть, что деформации, вносимые укладыванием, будут расти вместе с удалением полигона от того пункта, в котором оба эллипсоида касаются друг друга.

Полагая  $\Delta \mu = 0$ , т. е. считаясь только с переменой на  $\Delta a$ , мы получим следующую схему деформаций в трех полигонах (фиг. 4), примыкающих друг к другу и образующих ряд по параллелям.

|       | -0,06 | -0,42 | -0,72 |             |
|-------|-------|-------|-------|-------------|
| -0,09 | 0,00  | -0,17 | +0,28 | -0,31 +0,15 |
| -0,06 | -0,23 |       | -0,70 | -1,46       |
| +0,01 | +0,08 | -0,00 | +0,16 | -0,08 +0,24 |
|       | -0,23 |       | -0,55 | -1,20       |

Фиг. 4

В III полигоне искажения его формы и размеров скажутся на изменении относительного расположения его вершин в 1,5 м по  $x$ -ам и 1,5 м — по  $y$ -кам. Полное же искажение достигнет 2,1 м. При приведенном расчете деформаций в трех полигонах считалось, что при уравнивании: во-первых, находят поправки углов полигонов, рассматриваемых в качестве независимых друг от друга; во-вторых, добавочные невязки, вызываемые изменением начальной широты в полигоне и начального азимута, совершенно пренебрегаемы, что действительно имеет место; в-третьих, вследствие нулевых поправок длин общих сторон, что указывается формулами (30), можно уравнения (28) решить отдельно для каждого полигона.

Конечно, мы замечали быстрый рост искажений, нарушающих форму полигона, и довольно быстрый рост искажений масштабного характера.

Если не считаться с последними искажениями, то все-таки искажения формы полигона должно признать для III полигона уже значительными или во всяком случае заметными и вызываемое ими изменение относительного расположения вершин полигона — недопустимым.

Можно, однако, рассуждать иначе. При проектировании полигона с геоидом на референц-эллипсоид мы, в зависимости от размера  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ , заметно изменяем линейные размеры полигонов и вносим заметные изменения в углы полигонов, в особенности при значительном протяжении нашей триангуляции; конечно, эти изменения вполне математически определены и вполне соответствуют требованиям теории геодезии.

При укладывании и после уравнивания полигонов мы, как показывают уравнения (30), фактически сохраняем линейные размеры полигонов — они остаются те же самые, какие существуют в натуре, и изменяем углы полигонов, но на величины меньше, чем при методе проектирования; другими словами, при укладывании мы получаем сеть полигонов очень схожую, очень близкую по всем размерам к сети полигонов, измеренной в натуре, но только уложенную на поверхности иной кривизны. Поэтому можно заключить, что если преследовать именно эту цель наибольшего сохранения элементов полигонов, то и нет оснований сравнивать построения, полученные укладыванием, с построениями, полученными проектированием.

Нам представляется, что все эти рассуждения, могущие быть приведенными в пользу практически малой значимости ошибок при методе «укладываний», не оправдывают, а скорее извиняют применение этого метода в уже исполненных геодезических вычислениях. Геодезисты не могут не признавать, что из двух методов переноса элементов триангуляции с геоида на референц-эллипсоид — методов проектирования и укладывания — они должны предпочесть первый второму, потому что только тогда они получают математически определенные результаты; но, конечно, они должны стремиться к тому, чтобы  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  были возможно малы, потому что тогда изменения элементов полигонов при проектировании последних на референц-эллипсоиде делаются малыми: соображение о возможной близости элементов, получаемых в геодезии, к соответственным элементам в натуре имеет, понятно, существенное значение.

Теперь мы обратимся к вопросу, с которым может быть нужно было иметь дело в начале статьи, именно к вопросу: что понимать под  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ . Думается, эти величины нужно определить так: мы должны вообразить эллипсоид, наиболее подходящий соответствующей частью его поверхности к поверхности геоида в пределах полигона 1, 2, 3, 4; этот эллипсоид должен иметь малую ось, расположенную параллельно оси вращения Земли; сумма квадратов высот  $h$  поверхности геоида в пределах полигона над поверхностью этого эллипсоида должна быть минимальной. Если такой эллипсоид имеет размеры  $a$  и  $\mu$ , мы же пользуемся эллипсоидом с размерами  $a_1$  и  $\mu_1$ , то:

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta \mu = \mu_1 - \mu.$$

Местные ондуляции геоида могут приводить к тому, что  $\Delta a$  для отдельных полигонов со сторонами  $s = 450 \text{ км}$  будет достигать значений в  $\pm 2000 \text{ м}$  и даже  $3000 \text{ м}$ , а  $\Delta \mu$  будет достигать значений в 30 и более

единиц знаменателя сжатия, т. е. будет выражаться 1 : 3000! Для полигонов со сторонами в 225 км эти значения  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  придется удвоить. Обработка триангуляции одной Англии дала для  $\Delta \mu$  значение в 17 единиц в знаменателе сжатия и  $\Delta a = +1100$  м; так называемый «согласующий эллипсоид», введенный бывшим Корпусом военных топографов для обработки русских триангуляций, проложенных в Польше и Литве, имел  $\Delta a = 10$  км. Другими словами, в практике будут не так редки случаи, когда свободные члены уравнений (28) приобретут значения, в четыре раза большие приведенных ранее для  $\Delta a = 1000$  м и  $\Delta \mu = -1 : 44\,000$ . Добавочная невязка полигона в 2,2 м, конечно, не может не приводить в смущение при обработке триангуляций.

Если даже мы решим идти только полигонами со сторонами в 225 км, то и тогда эти добавочные линейные невязки могут достигать 0,5—0,6 м, что также в ряде случаев будет приводить или к неверным заключениям о недопустимости вычисленных невязок и к напрасным поискам ошибок в измеренных элементах, или к неверному заключению о допустимости вычислений невязок и последующей ошибочной уверенности в отсутствии ошибок в измерениях.

### 3. Заключение

Мы здесь не будем останавливаться на том, к каким значительным искажениям систематического характера приводит неверность принятых размеров референц-эллипсоида в азимутальных уравнениях триангуляции — вопрос этот освещен достаточно в моей статье в журнале «Геодезист» № 3 за 1937 год (см. работу «Новые предложения по уравниванию астрономо-геодезической сети» в данном томе. *Прим. ред.*).

Совершенно, думается, обоснованным будет такое заключение:

1. Референц-эллипсоид должен иметь по отношению к наилучшему подходящему эллипсоиду для данной страны такие значения  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$ , при которых метод проектирования и метод укладывания давали бы результаты, различающиеся практически несущественно. При огромном протяжении нашей страны это приводит к требованию иметь  $\Delta a$ , не превышающее 100 м.

2) Для устранения влияний значительных колебаний  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  для отдельных полигонов необходимо измеренные в триангуляции элементы редуцировать на поверхность референц-эллипсоида, установленного в отношении размеров согласно пункту 1 и тщательно ориентированного по высоте, по широте и по азимуту. Это редуцирование выполняется применением метода проектирования геоида на поверхность референц-эллипса.

3) Правильная обработка обширной триангуляции без указанного в пункте 2 редуцирования не представляется возможной; редуцирование это требует определения высот геоида над референц-эллипсоидом со средней ошибкой, меньшей  $\pm 10$  м, и предварительного вывода уклонений отвеса относительно принятого референц-эллипса из вычисления геодезических координат по отдельно уравненным звеньям.

4) Необходимые для редуцирования базисов высоты геоида над референц-эллипсоидом доставляются астрономо-гравиметрическим нивелированием, выполняемым по рядам триангуляции, отстоящим друг от

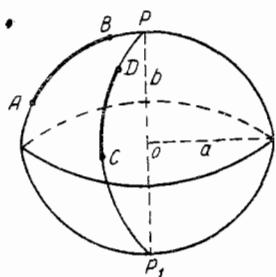
друга на 450 или даже на 660 км; редуцирование углов достаточно выполнять только между геолиниями, соединяющими смежные пункты Лапласа, т. е. для сторон, имеющих длину 220 км.

5) Эллипсоид Бесселя не должен быть сохранен при введении метода проектирования, так как тогда будут получены элементы триангуляции, заметно отличающиеся от соответствующих им в натуре, но метод укладывания, в котором этот эллипсоид можно было бы сохранить, неприемлем по невозможности применить при нем достаточно точную обработку триангуляции.

## СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ И РАЗВИТИЕ ГРАДУСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

### 1. О задачах современных астрономо-геодезических работ

Геометрическая идея градусного измерения проста и известна каждому образованному человеку. В основе идеи лежит положение, что идеальная поверхность Земли представляется достаточно хорошо поверхностью эллипсоида вращения, сжатого при полюсах. Будем обозначать длину экваториальной полуоси этого земного эллипсоида, или его экваториальный радиус, через  $a$ , длину малой, или полярной, его полуоси через  $b$ , полярное сжатие через  $\alpha$ ;  $\alpha = (a - b) : a$ .



Фиг. 1

Пусть точки  $A$  и  $B$  (фиг. 1), лежащие на одном меридиане, соединены триангуляцией, из которой получилась точно длина  $S$  эллиптической дуги  $AB$  по меридиану; пусть далее в точках  $A$  и  $B$  определены их астрономические широты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Тогда геодезия дает такое уравнение:

$$S = a \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right] \alpha + \dots \right\}, \quad (1)$$

в котором два неизвестных:  $a$  и  $\alpha$ .

Если на том же меридиане или на каком угодно другом возьмем две другие точки  $C$  и  $D$ , соединим их триангуляцией, из которой выведем длину  $S_1$  дуги  $CD$ , а в точках  $C$  и  $D$  определим их астрономические широты  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$ , то напишем:

$$S_1 = a \frac{(\varphi_4 - \varphi_3)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(\varphi_4 + \varphi_3) \right] \alpha + \dots \right\}. \quad (2)$$

Если средняя широта дуги  $CD$  заметно отличается от средней широты дуги  $AB$ , то из двух уравнений (2) и (1) с той или другой надежностью мы выведем два неизвестных  $a$  и  $\alpha$ .

В действительности уравнения (1) и (2) нужно писать несколько иначе, а именно:

$$S = \frac{a(\varphi_2 - \varphi_1 - \xi_2 + \xi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right] \alpha + \dots \right\}; \quad (1')$$

$$S_1 = \frac{a(\varphi_4 - \varphi_3 - \xi_4 + \xi_3)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(\varphi_4 + \varphi_3) \right] \alpha + \dots \right\}. \quad (2')$$

В уравнениях (1') и (2') величины  $\xi$  суть меридианные слагающие уклонения отвеса в точках  $A, B, C, D$ . Эти величины  $\xi$  отнесены к исключенному, определяемому нами эллипсоиду, т. е. в уравнениях (1') и (2') нам приходится иметь дело с проекцией на меридианную плоскость угла между отвесной линией и направлением нормали к определяемому эллипсоиду. Понятно, пока эллипсоид не определен еще, величины  $\xi$  остаются неизвестными. Другими словами, в уравнениях (1') и (2') входят не два неизвестных  $a$  и  $\alpha$ , а шесть:  $a, \alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ .

Обычно на каждой дуге градусного измерения мы имеем не два, а несколько астрономических пунктов, располагающихся по дуге градусного измерения через некоторый интервал друг от друга. Если на нашей дуге имеется  $p$  астрономических пунктов, то мы можем по этой дуге составить  $p - 1$  уравнений вида (1'), которые уже будут не независимы друг от друга и в которые войдут  $p$  неизвестных  $\xi$  и два основных неизвестных  $a$  и  $\alpha$ . Обычно имеем  $r$  градусных измерений, геодезически между собой не связанных. Если в этих градусных измерениях всего  $n$  астрономических пунктов, то уравнений типа (1') или (2') будет составлено  $n - r$  при числе неизвестных  $n + 2$ . Возникающая неопределенность решения устраняется введением условия минимальности суммы всех  $\xi^2$  (минимума  $\Sigma\xi^2$ ). При этом уравнения (1') преобразовываются так, чтобы их сделать формально независимыми друг от друга путем отнесения одного  $\xi$  из системы  $\xi$  по каждой дуге, не связанный геодезически с другими дугами, в состав основных и известных.

Применение способа наименьших квадратов к решению уравнений градусных измерений равносильно принятию, что все  $\xi$  имеют случайный характер и что искажения астрономических широт  $\varphi$  уклонениями отвесных линий имеют чисто случайный характер и могут быть соединены с искажениями этих же величин  $\varphi$ , обусловленными ошибками астрономических наблюдений по определению  $\varphi$ .

Следует здесь же указать, что ошибки астрономических наблюдений вносят в широту  $\varphi$  искажение, не превышающее  $\pm 0'',3 - \pm 0'',5$ , в то время как средняя величина  $\xi$  — около  $\pm 3'',5$ , и не так редко величины  $\xi$  достигают значений в  $5-8''$ .

Уже из сопоставления этих цифр ясно, что к величинам  $\xi$ , к уклонениям отвесных линий, с натяжкой применяются основания способа наименьших квадратов. Применяя в указанной форме способ наименьших квадратов к обработке уравнений градусных измерений, мы очевидно трактуем уклонения отвесных линий как случайные явления, подчиняющиеся в своем распределении по земному шару гауссовым законам случайных ошибок. Это, конечно, необоснованно и неверно, если принять в расчет, что уклонения отвеса обусловлены распределением масс в земном теле. Может быть эта неверность скажется слабо на числовом решении задачи при распределении большого числа градусных измерений по всей поверхности земного шара, но когда мы имеем дело с ограниченным числом дуг градусных измерений, то, несомненно, эта же неверность может приводить к существенным ошибкам геодезических выводов.

Метод обработки уравнений градусных измерений по способу наименьших квадратов под условием минимума  $\Sigma\xi^2 + \Sigma\gamma^2$  носит название астрономо-геодезического метода вывода земного эллипсоида, причем под  $\gamma$  понимается слагающая уклонения отвесной линии

в первом вертикале, и величины  $\gamma$ , доставляют дуги, расположенные по параллелям или косвенно к меридианам.

Понятно, что довольно скоро, как только астрономо-геодезические работы получили в культурных государствах заметное развитие, были обнаружены слабые стороны указанного астрономо-геодезического метода определения размеров и сжатия земного эллипсоида.

В 1841 г. Бессель дал такие выводы:

$$a = 6\,377\,397 \text{ м} \pm 210 \text{ м}; \quad \alpha = 1 : 299,15 \pm 4,7.$$

В 1866 г. английский геодезист Кларк дал:

$$a = 6\,378\,206 \text{ м} \pm 75 \text{ м}; \quad \alpha = 1 : 295,0 \pm 1,1.$$

Материал, использованный Бесселем, представляется общей длиной меридианных дуг в  $50^\circ$  и 38 астрономическими широтами; материал, использованный Кларком, представляется общей длиной меридианных дуг в  $80^\circ$  при 66 астрономических точках. Разница в объеме материала невелика, но различие в выводах по Кларку и по Бесселю, конечно, значительно, и этот факт сам по себе говорит о ненадежности астрономо-геодезического метода.

В 70-х годах прошлого столетия Листинг ввел понятие геоида и общего земного эллипсоида, причем последний определялся Листингом так, как мы его определяем в геодезии и в настоящее время, а именно: общий земной эллипсоид имеет центр, совпадающий с центром тяжести Земли, и малую ось, совпадающую с осью вращения Земли; объем этого эллипсоида равен объему геоида; сумма квадратов отступлений по высоте геоида от общего эллипсоида, взятая для всего земного шара, должна быть наименьшей.

Листинг указывал на систематический характер отступлений геоида от общего эллипсоида, но приписывал это только внешнему рельефу земной коры, а именно — недостатку масс в океанах и избытку масс на континентах. Максимальные отступления систематического характера геоида от эллипсоида, вызванные указанной причиной, Листинг оценивал в 500 м! Верным в результатах исследований Листинга является только утверждение о систематическом характере отступлений геоида от эллипсоида и систематическом характере уклонений отвесных линий, но числовые его выводы в отношении распределения этих отступлений — их величины и знака — совершенно ошибочны, потому что далеко не та причина вызывает систематические уклонения геоида от общего земного эллипсоида. Введение понятия геоида и общего земного эллипсоида остается, однако, заслугой Листинга.

В 80-х годах прошлого столетия Гельмерт на основании обработки не особенно еще тогда многочисленных определений силы тяжести пришел к отрицанию систематических отступлений геоида от эллипсоида, и таким образом задача геодезии стала пониматься лишь как выполнение градусных измерений по большому числу больших дуг меридианов и параллелей, распределенных в разных частях земного шара. Обработка достаточно большого материала астрономо-геодезическим методом должна была привести к действию закона больших чисел, к компенсации в выводе размеров и сжатия земного эллипсоида влияния уклонений отвесных линий.

Любопытно, что в 50-х и 60-х годах прошлого столетия были уже опубликованы труды Эри и Пратта, выдвигающие гипотезу изостатического равновесия в земной коре и изостатическую компенсацию внешних

неправильностей в строении земной коры. Изостазия, конечно, опрокидывала все основания расчетов Листинга.

Как хорошо известно, в работах американских ученых, геодезистов Хейфорда и Боуи, изостатическая компенсация получила блестящее подтверждение; эти ученые использовали обширный астрономо-геодезический материал по США и гравиметрический материал (не такой большой) по этой же стране. Завершение исследований Хейфорда относится к 1911 г., а Боуи свои исследования по изостазии продолжает до сих пор. Из геологов родоначальником приверженцев изостазии считается Деттон, и его научные выступления относятся к 1873 г. Принцип изостазии и теория изостатической компенсации прочно связали геодезию с геофизикой и геологией. О громадном значении принципа изостазии в геофизике и геологии я, конечно, говорить воздержусь, так как это дело геологов и геофизиков.

В вопросе о выводе земного эллипсоида из градусных измерений принцип изостазии играет существеннейшую роль. Приняв хорошо обоснованную схему изостатической компенсации, мы можем, зная лишь топографический рельеф, вычислить те величины  $\xi$ , которые входят в качестве неизвестных в уравнения (1') и (2') градусных измерений. Топографический рельеф нужно знать для территории, окружающей соответствующую геодезическую точку, на очень большом радиусе: одни геодезисты берут этот радиус равным 1050 км, другие — 4126 км, третьи склонны требовать использования рельефа почти на всей поверхности земного шара. Теория изостазии прочно доказала, что действительные уклонения геоида от общего эллипсоида в несколько раз мене обусловливаемых притягательным действием только одного топографического рельефа. Отступления геоида от общего эллипсоида оказываются при применении теории изостатической компенсации не превосходящими 150 м.

Применяя теорию изостазии, мы вычисляем величины  $\xi$  и, тем самым, переходим от действительного геоида к так называемому «компенсированному» геоиду, который соответствует такому распределению масс в земной коре, когда изменение плотности в ней происходит только по вертикали, оставаясь постоянным на любой уровенной поверхности. Предполагая совершенство принятой теории изостатической компенсации и правильность установления постоянных в этой «схеме»\*, мы должны тогда ожидать, что отступления «компенсированного» геоида от общего земного эллипсоида окажутся случайными, имеющими местный, районный характер; они должны быть тогда объясняемы местными нарушениями изостатического равновесия в земной коре. Величины  $\xi$ , вычисляемые на основании применения теории изостазии, должно тогда рассматривать близкими к «абсолютным» уклонениям отвеса, понимая под последним угол между отвесной линией и нормалью к общему земному эллипсоиду; различие величин  $\xi$ , вычисленных на основе применения теории изостазии, от действительных значений абсолютных уклонений отвеса, должно тогда относить также за счет местных причин. Итак, изостазия прежде всего вооружила самих геодезистов как будто бы прекрасным средством для решения основной задачи геодезии по выводу размеров и сжатия земного эллипсоида.

\* Например, глубины компенсации, толщины сиалического слоя для низменных частей материка, соотношения между плотностью Sial и Sima и т. п.

Подсчитав, как указано выше, величины  $\xi$ , мы затем уравнения (1') решаем уже по способу наименьших квадратов, но под условием минимума не  $\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2$ , а минимума  $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$ , причем под  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$  понимаются погрешности подсчитанных нами величин  $\xi$  и  $\eta$ , и погрешности эти рассматриваются уже как чисто случайные.

Итак, появились как будто бы возможности из значительной астрономо-геодезической сети, покрывающей некоторую значительную страну, вывести надежно земной эллипсоид. Хейфорд из астрономо-геодезических данных по одним США вывел:

$$a = 6\,378\,388 \text{ м} \pm 53 \text{ м}; \quad \alpha = 1 : 297,0 \pm 0,9,$$

причем сам Хейфорд был склонен приписывать выведенной им большой полуоси ошибку всего в  $\pm 25$  м. Важно отметить, что этот вывод рассматривался и самим Хейфордом, и рядом геодезистов других стран именно как вывод общего земного эллипсоида, хотя материалы по выводу относились только к одним США. Несомненно, мы здесь имеем некоторое увлечение, и, несомненно, что с применением изостазии к геодезии дело обстоит вовсе не так гладко, как это представлял Хейфорд и его последователи. Если применение изостазии позволяет от неизвестного нам и сложного геоида перейти к общему земному эллипсоиду, то и обратно: установив при посредстве изостазии общий земной эллипсоид, мы очевидно можем построить любую точку геоида относительно этого эллипсоида. Мы поэтому и находим у ряда авторов утверждения, что теория изостазии позволяет получить фигуру геоида, или, как говорят, «получить третье приближение для фигуры Земли», считая первым приближением шар, а вторым — эллипсоид вращения.

На том, действительно ли так блестящи результаты применения теории изостазии в геодезии, мы остановимся впоследствии, сейчас же перейдем к иным вопросам, в которых градусные измерения и вообще геодезические результаты связываются с задачами геофизики и геологии.

Кроме градусных измерений и применения изостазии, в руках геодезистов имеется еще один и притом более универсальный метод исследования фигуры Земли — это определения силы тяжести и изучение распределений силы тяжести или аномалий силы тяжести.

В 1934 г. финляндский ученый Хирфонен опубликовал свое исследование «О континентальных ондуляциях геоида». Он использовал все исполненные до этого года определения силы тяжести, за исключением значительных материалов по СССР, не опубликованных еще к тому времени. Применяя теорию и формулы Стокса, данные лет 80 тому назад, мы можем по аномалиям силы тяжести вывести высоты  $N$  геоида над тем нормальным сфероидом, к которому отнесена формула нормальной силы тяжести. Изучение геоида помощью этого метода, вытекающего из теории Стокса, не применялось долгое время потому, что для вполне надежного вывода высот  $N$  требуется полная гравиметрическая изученность земного шара; между тем и в настоящее время гравиметрическая изученность Южной Америки, Африки, Австралии, больших частей Азии весьма незначительна, а в отношении свободных пространств в океанах почти отсутствует. В исследовании Хирфонена гравиметрическая изученность северного полушария выражалась 32% всей площади, а южного полушария — всего 4%.

Однако Хирфонен нашел следующий, вытекающий из применения теории изостазии выход из положения. Обозначим через  $r_1$  так называемые

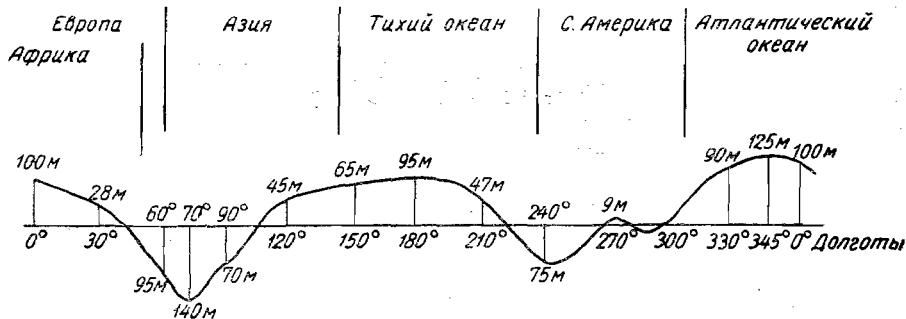
мую редукцию силы тяжести в «свободном воздухе», а через  $r_2$  — так называемую топографо-изостатическую редукцию силы тяжести, учитывающую действие всех внешних топографических масс и всех внутренних масс, компенсирующих по теории изостазии действие внешнего топографического рельефа. Обозначим, далее, через  $g$  и  $\gamma_0$  наблюденное и нормальное значения силы тяжести в рассматриваемой точке. Тогда

$$\left. \begin{aligned} g + r_1 + r_2 &= \gamma_0 \\ (g + r_1) - \gamma_0 &= -r_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Левая часть уравнения (3) носит название «аномалии в свободном воздухе», и этими именно аномалиями следует пользоваться при применении теории Стокса к вычислению высот  $N$ . Следовательно, при предположении, что сила тяжести в пункте, являющемся проекцией нашей точки на нормальный сфéroид, нормальная, нужная нам аномалия силы тяжести равна топографо-изостатической редукции  $r_2$  силы тяжести, взятой с обратным знаком. Все это дает возможность получить аномалию в свободном воздухе и для тех точек, в которых не исполнено наблюдений силы тяжести, — конечно, пренебрегая аномалией, обусловленной отличием действительного распределения масс в земной коре от вытекающего из схемы изостатической компенсации.

Конечно, здесь имеется известная доля произвола, приводящая к выводу отдельных  $N$  с значительной ошибкой. Однако, если мы возьмем площадь, ограниченную двумя земными меридианами с разностью долгот например в  $10^\circ$  и разобьем ее параллелями на соответственно взятые равновеликие части (трапеции), то можно ожидать, что величины  $N$ , выведенные для каждой такой трапеции, будут иметь искажения, изменяющиеся при переходе от трапеции к трапеции по случайному закону (если иметь в виду изменение широты трапеций от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ ); поэтому среднее из всех взятых в нашем двухугольнике величин  $N$ , приведенных к какой-нибудь параллели с широтой  $\varphi_0$ , будет иметь достаточную, может быть, точность для суждения о перемене  $N$  с долготой места. Умножая данное  $N$  на  $\sec^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0$ , мы приводим  $N$  к параллели с широтой  $\varphi_0$ .

Результаты Хирфонена для нас важны главным образом именно в виде профиля геоида, полученного им и приведенного к экватору Земли. Этот профиль мы даем на фиг. 2. Совершенно определенно выявляются значительные долготные волны геоида. Геоид всего выше стоит в Атлантическом океане, примерно на меридиане  $-15^\circ$ , здесь



Фиг. 2

высота его над эллипсоидом около 125 м\*; в Западной Европе имеем положительные высоты геоида, постепенно убывающие; примерно в средней части Европейской территории СССР (с меридиана Москвы) начинаются отрицательные высоты, геоид располагается ниже эллипса и на меридиане 70° имеет наибольший отрицательный максимум: высота  $N$  равна на экваторе — 140 м. В Азии до меридиана Иркутска геоид везде ниже эллипса. Далее к востоку от 105-го меридиана начинается быстрый рост положительных высот. В Тихом океане имеем максимальную положительную высоту около 100 м для экватора на меридиане 180°. Затем вблизи западных берегов Северной Америки имеем второй отрицательный максимум около — 75 м на меридиане 240°. В Северной Америке — малые отрицательные высоты, сменяющиеся малыми положительными высотами. Максимумы и минимумы высот приходятся примерно через 90° долготы.

Результаты, полученные Хирфоненом, имеют малую точность. Но представляется, что существование долготных волн геоида все-таки им в известной степени доказано. На основе своего исследования Хирфонен выводит трехосность земного эллипса и получает для наибольшего меридиана долготу  $-1^{\circ}5 \pm 4^{\circ}5$ , а для различия экваториальных полуосей  $-139 \text{ м} \pm 22 \text{ м}$ .

Существование долготных волн геоида — вопрос, полагаю, существенный для геофизиков. Согласно гипотезе Вегенера, движение материков с востока на запад должно существовать. Это перемещение континентов Вегенер приписывает действию лунных приливов. Лунно-солнечная прецессия при предположении, что материки представляют собой плавающие в магме глыбы, также, по исследованиям Швейдара, работает на сдвиг континентов к западу. Но, конечно, и неравномерности в распределении масс на Земле, вызывающие отступления формы Земли от эллипса вращения, могут влиять, благодаря огромному действию Луны на Землю, на движения континентов. С другой стороны, относительные перемещения материков, если они имеют место, должны сопровождаться изменением распределения масс, т. е. должны иметь своим следствием изменения фигуры геоида, происходящие, конечно, лишь в течение огромных промежутков времени. Во всяком случае имеются основания предположить, что долготные волны геоида, обусловленные общими причинами, находятся в той или иной связи с движениями и относительными перемещениями континентов, и поэтому выяснение существования этих волн и закономерности их распределения представляют особый интерес, тем более, что перемещений материков до сих пор непосредственными наблюдениями, именно астрономическими определениями, установить не удалось.

Всего проще долготные волны геоида представить как волны трехосного эллипса относительно среднего или нормального земного эллипса вращения. Конечно, простота геометрического представления еще вовсе не является аргументом по существу, но в первом периоде исследования вопроса всегда по необходимости приходится дело упрощать.

В табл. 1 приведены значения большой полуоси земного эллипса, выводимые из разных градусных измерений без учета и с учетом трехосности Земли. При выводе элементов трехосности мною использованы градусные измерения США, Западной Европы и СССР, причем по

\* На этом меридиане  $-15^{\circ}$  в широтах  $55^{\circ}$   $N = 125 : 3 \approx 42 \text{ м}$ .

Таблица 1  
Значения большой полуоси земного эллипсоида

| Названия дуг и сетей                             | Без введения трехосности (м) | С учетом трехосности (м) | Элементы трехосности                         |
|--|------------------------------|--------------------------|--|
| Астрономо-геодезическая сеть США . . . . .       | 6 378 398                    | 6 378 222                | $\lambda_0 = 10^\circ$                       |
| Астрономо-геодезическая сеть СССР до 1934 г. . . | 6 378 170                    | 6 378 165                | $\alpha = 1 : 298,6$<br>$i = 1 : 30 000$     |
| Градусные измерения Западной Европы . . . . .    | 6 378 300                    | 6 378 315                | $a_2 - a_1 = 210 \text{ м}$                  |
| Дуга Струве . . . . .                            | 6 378 494                    | 6 378 388                | $\lambda_0$ — долгота наибольшего меридиана  |
| Дуга 52-й параллели в Западной Европе . . . . .  | 6 378 024                    | 6 378 276                | $\alpha$ — полярное сжатие                   |
| Западно-европейский меридиан . . . . .           | 6 378 353                    | 6 378 296                | $i$ — экваториальное сжатие                  |
| Индия—24-я параллель . . .                       | 6 378 351                    | 6 378 196                | $a_2 - a_1$ разность экваториальных полуосей |

СССР был взят материал, собранный до 1934 г.; положение наибольшего меридиана определяется восточной долготой  $+10^\circ$ , разность экваториальных полуосей равна 210 м. Таблица ясно показывает, во-первых, значительное влияние долготных волн на вывод большой полуоси эллипсоида из дуг параллелей; во-вторых, она явно демонстрирует значительное увеличение согласия между выводами из различных дуг и астрономо-геодезических сетей при принятии в расчет влияния трехосности Земли. Нужно отметить, что использованный астрономо-геодезический материал по США, по Западной Европе и отчасти по СССР исправлен введением в астрономические широты, долготы и азимуты топографоизостатических поправок или редукций. Таким образом по существу определенный мною трехосный эллипсоид наилучше подходит не к действительному, а к компенсированному геоиду, т. е. к геоиду, к которому перешли по введении в действительные направления отвесных линий поправок за действие топографического рельефа и внутренних, компенсирующих масс.

Хирфонен получил разность экваториальных полуосей в 140 м; мною получено для этой разности близкое значение — около 200 м. Правда, положение наибольшего меридиана трехосного эллипсоида, по Хирфонену и по Красовскому, различается на  $11^\circ$ , но, конечно, здесь может оказываться не только существенное различие в использованных материалах — и по их виду, и по их территориальному размещению, — но и исследование двух различных поверхностей: действительного геоида и компенсированного геоида.

Финский ученый Хейсканен в 1929 г. из обработки астрономо-геодезических материалов по США и Западной Европе получил:

долгота наибольшего меридиана  $\lambda_0 = +38^\circ \pm 10^\circ$ ,  
разность экваториальных полуосей  $a_2 - a_1 = 165 \text{ м}$  ( $i = 1 : 40 000$ ).

Очевидно, что присоединение материалов по СССР вносит существенный корректив в решение вопроса.

В 1924 г. Хейсканен из обработки измерений силы тяжести, на основании применения теории изостазии, вывел:

$$\lambda_0 = +18^\circ \pm 5^\circ; \quad a_2 - a_1 = 690 \text{ м} \pm 75 \text{ м}.$$

В 1928 г. также из обработки измерений силы тяжести он получил:

$$\lambda = 0^\circ; \quad a_2 - a_1 = 242 \text{ м} \pm 33 \text{ м}.$$

В 1938 г. из обработки значительно возросшего материала по определениям силы тяжести Хейсканен получил новый вывод, и даже целую серию новых выводов, из которых мы приводим лишь один, — именно относящийся к использованию всех имевшихся гравиметрических станций:

$$\lambda_0 = -25^\circ \pm 2^\circ; \quad a_2 - a_1 = 352 \text{ м} \pm 30 \text{ м}.$$

Все приведенные результаты по выводу трехосности Земли достаточно пестры и противоречивы. Измерения силы тяжести вообще приводят к значительно большей эллиптичности земного эллипсоида, чем астрономо-геодезические материалы; но они же привели и к явно негодному выводу Хейсканена в 1924 г. и дают значительное противоречие с астрономо-геодезическими выводами в отношении положения наибольшего меридиана. Может быть отсюда следует заключить, что трехосности Земли не существует; но из этого еще не следует, что не существует долготных волн геоида. Полагаю, что из всех результатов, приведенных выше, следует лишь то, что, вероятно, долготные волны геоида не представляются столь просто геометрически, как это вытекает из формы поверхности трехосного эллипсоида. Выяснение этих волн является одной из ближайших задач геодезии. Мне представляется, что наилучшим путем здесь — в отношении материковых частей геоида — является получение точных и детальных профилей геоида по ряду параллелей, имеющих значительное протяжение вдоль материков. Измерения силы тяжести дают сжатие Земли может быть надежнее, чем все современные градусные измерения; но изменения земного сжатия вдоль дуг параллелей под разными долготами, по моему мнению, надежнее определяются из градусных измерений. Какова должна быть при этом программа градусных измерений, об этом будет сказано ниже.

Сейчас же должно отметить, что градусное измерение по 52-й параллели может быть проделано в Евразии от долготы  $-10^\circ$  до долготы  $+140^\circ$ ; значительнейшая часть этого градусного измерения уже выполнена советскими геодезистами, и результаты одного этого измерения будут иметь существенное значение. Но следует выполнить градусное измерение и по параллели 60-й, от долготы  $+7^\circ$  до долготы  $+150^\circ$ ; сопоставление волн геоида, которое получится по 52-й и по 60-й параллелям, будет очень ценным. В Африке и Азии напрашивается измерение по параллели 25—26-й, от долготы  $-15^\circ$  до долготы  $+120^\circ$ . Если геодезисты получат точные профили геоида по этим параллелям, то желательно будет продолжить эти профили по океанам. Здесь пока астрономо-геодезия бессильна, и должна вступить в свои права гравиметрия, но и перед ней встает не простая задача, не продуманная еще в отношении программы работ и требующая предварительного выполнения в соответственных значительных районах мировой гравиметрической съемки.

Если связывать долготные волны геоида с движениями материков с востока на запад, то не следует забывать и о возможности движения частей земной коры в меридиональном направлении. С изменением скорости вращения Земли изменяется ее фигура; Земля имеет замедление вращения, поэтому полярное сжатие ее должно уменьшаться; объем земного шара, однако, может быть принят постоянным. Другими словами, за громадные периоды времени длина полярной оси Земли должна увеличиваться, а длина экваториальной оси — уменьшаться. Конечно, это должно сопровождаться соответствующими перемещениями масс в земной коре и в подкорочном слое. Вероятно, что в приэкваториальной области и вблизи полюсов при этом господствуют вертикальные перемещения глыб земной коры, в области же приблизительно между параллелями 20 и 50° — тангенциальные перемещения таких глыб.

В 1940 г. студент Московского института инженеров геодезии, аэросъемки и картографии В. А. Магницкий при выполнении им под моим руководством дипломной работы («Некоторые соображения по проекту размещения градусных измерений на земном шаре») показал, что наибольшее изменение направления нормали при изменении формы эллипсоида (и при сохранении его объема) приходится на параллелях с широтой 35°30' (южной и северной). Отсюда и вытекает, что наиболее благоприятной для тангенциальных смещений коры является область, примыкающая к 35-й параллели (в северном и южном полушариях). Как раз между указанными параллелями 20—50° на земной поверхности проявляется значительная (и даже наибольшая) складчатость, перекрытия и вообще значительные тектонические нарушения.

Мы не должны впрочем забывать, что за огромные периоды, в течение которых оказывается эффект замедления вращения Земли, материки подвергались значительным перемещениям и разные их части располагались в поясе между 20 и 50-й параллелями (в том и другом полушарии). Мы не должны забывать и про возможный эффект силы  $K$ , указанной, как будто, впервые Этвёшем и обусловленной непараллельностью уровенных поверхностей в пределах высоты плавающей в симе материковой глыбы. Мы имеем

$$K = -\frac{3}{4} md \omega^2 \sin 2\varphi.$$

Эта сила  $K$ , наоборот, стремится передвинуть к экватору материковые глыбы, находящиеся в северном и южном полушариях. Оценить эффект действия силы  $K$  очень затруднительно; вероятно, в настоящее время он ничтожен. Но возможно, что в очень отдаленные периоды эта сила играла иную роль и обуславливала сдвиги масс в направлении к экватору в средних широтах и может быть в субтропиках.

Мы получаем, конечно, сложный комплекс причин, обуславливающих возможности перемещений участков земной коры в меридиональном направлении. Для геодезистов существенным является такое заключение: *земная кора в поясах между широтами 20 и 50° должна обладать большей приспособляемостью к изменениям фигуры Земли, обусловленным изменениями скорости вращения Земли, чем в остальных частях поверхности земного шара*. В этих остальных частях поверхности земного шара имеющиеся там значительные плиты и щиты (Восточно-Европейская, Средне-Сибирская, Африканско-Бразильская, Канадская) особенно сильно противостоят приспособлению их формы к изменениям фигуры Земли.

Все эти соображения приводят к выводу о существовании широтных волн геоида и о вероятности систематического характера этих волн. В поясах приблизительно между параллелями  $20^{\circ}$ — $50^{\circ}$  и в особенности в тех частях этих поясов, где произошли отколы глыб от больших плит, где тектоническая деятельность проявилась особенно сильно, мы должны как будто иметь местную форму геоида, лучше отвечающую эллипсоиду с меньшим сжатием и меньшей экваториальной полуосью, чем эллипсоид, наилучше отвечающий геоиду в широтах, больших  $50^{\circ}$ , и притом в областях, тектонически спокойных, а также в тех приэкваториальных областях, которые захвачены большими плитами\*. Подтверждением могут служить результаты градусного измерения в Японии между широтами  $50^{\circ}$  и  $31^{\circ}23'$ , из которого получилось:

$$a = 6\,376\,918 \text{ м}, \quad \alpha = 1 : 310,6.$$

Конечно, этот результат — единичный, и на него не приходится опираться, тем более что уменьшение полуоси  $a$  против «международного» эллипсоида Хейфорда достигает почти 2 км.

Изучение геодезией широтных волн геоида, особенно установление их систематического, закономерного характера или нарушений этой закономерности в связи с тектоникой той или другой области, доставит, может быть, немаловажный материал для исторической и физической геологии и поможет раскрыть причины образования современного лика Земли; в частности, будет затронут вопрос и о передаче в земной коре тангенциальных напряжений на значительное расстояние.

Как в отношении долготных волн, астрономо-геодезия и в отношении выяснения широтных волн геоида имеет тот же метод получения точных и детальных профилей геоида, но только не по параллелям, а по меридианам. Нужно получить ряд меридианных больших градусных измерений, пересекающих каждое как пояс между параллелями  $20^{\circ}$ -й и  $50^{\circ}$ -й, так и пояса, лежащие к северу и югу от этого пояса; желательно получить такие профили и при расположении их на разных меридианах, но так, чтобы одни профили пришлись на области больших плит, а другие, лежащие в тех же широтах, — на области больших тектонических нарушений.

Вряд ли можно говорить о выяснении действия силы  $K$ ; а тем более перемены формы геоида путем повторных астрономических определений широт.

Отметим здесь, что американский геодезист Боуи пишет: «В общем безусловно следует признать, что земная поверхность не изменяется под действием внешних сил или сил, обусловленных ее вращением». Это авторитетное мнение опрокидывает все, что можно говорилось выше в этой статье и что, однако, в научной литературе выдвигается рядом видных геофизиков и геологов, хотя, конечно, без той «геодезической» конкретизации, как это приведено выше.

В табл. 2 мы приводим аномалии силы тяжести, выведенные в 1937 г. Хейсканеном; эти аномалии относятся к океаническим площадям, и каждая аномалия является средней из полученных для станций в соответственном десятиградусном широтном поясе, число которых при-

\* Эти мысли в общей форме дали Блэйтт и Бэм. Следует отметить, что в упомянутой работе Магнитского (еще не опубликованной) автор впервые указал на необходимость при обработке и сопоставлениях результатов градусных измерений принимать во внимание различие приспособляемости земной коры в разных зонах к вызываемым геофизическими факторами переменам формы Земли.

ведено в первой графе таблицы. При этом наблюдения на станциях в районах больших морских глубин и на береговых станциях не использовались. Таблица эта красноречиво подтверждает наличие широтных волн геоида на океанах и систематически меньшие значения ускорения силы тяжести в южном полушарии по сравнению с северным; последнее обстоятельство, при подтверждении его на большем материале и на материале, относящемся к континентам, само по себе указало бы на несколько большую длину полярной полуоси в южном полушарии, чем в северном, т. е. на меньшее сжатие эллипсоида, представляющего геоид в южном полушарии. Это стояло бы в согласии с тем, что сказано выше о перемещении масс при изменении фигуры Земли и при принятии в расчет, что, видимо, в южном полушарии приспособляемость земной коры к новому виду фигуры Земли больше, чем в северном полушарии. Более длинная полярная полуось для южного полушария получилась и из упомянутого выше исследования Хирфонена. Понятно, однако, что все это требует дальнейших геодезических исследований.

Таблица 2

## Аномалия силы тяжести (Хейсканен)

| Число станций на океанах | Широты |       | Аномалии<br>(мгл) |
|--------------------------|--------|-------|-------------------|
|                          | От     | До    |                   |
| 10                       | + 30°  | + 40° | + 28,2            |
| 9                        | + 20   | + 30  | + 9,3             |
| 11                       | + 10   | + 20  | - 2,3             |
| 13                       | 0      | + 10  | - 0,9             |
| 13                       | 0      | - 10  | - 25,7            |
| 16                       | - 10   | - 20  | - 14,4            |
| 39                       | - 20   | - 30  | + 1,7             |
| 60                       | - 30   | - 40  | + 9,9             |

В соответствии со сказанным об изучении широтных волн геоида является важным продолжение западноевропейского меридианного измерения к югу от Алжира в Африке — хотя бы до широты + 8°. Градусное измерение англичан в Африке от мыса Доброй Надежды до Каира по 30-му меридиану имеет очевидно также большое значение, в особенности если иметь в виду возможности продолжения этой дуги через Сирию, Малую Азию, Болгарию и соединение ее с дугой Струве, простирающейся от Дуная до Ледовитого океана. Особое значение приобретает в этих научных вопросах геодезическое соединение Индийского градусного измерения по 75-му меридиану с советскими астрономо-геодезическими работами, которые могут быть продолжены по Оби до 70-й параллели.

При существовании долготных и широтных волн геоида, имеющих систематический характер, применение теории изостазии к обработке астрономо-геодезических материалов далеко не решает еще вопроса о правильном выводе из этих материалов общего земного эллипсоида. Правда, приходится говорить о волнах, имеющих наибольшую стрелку

не в 500, а всего в 150 м. Но влияние этих волн на выводы размеров эллипсоида из градусных измерений остается все-таки очень заметным— оно может сказываться, например, в выводе большой полуоси эллипсоида на 400—500 м в ту и другую сторону. Таким образом учет влияния больших волн геоида вызывает значительное осложнение в современной постановке задачи о выводе общего земного эллипсоида. Я полагаю, что в этом вопросе существенное значение имеет развитие мировой гравиметрической съемки, которая приведет к выяснению, хотя бы в общих и грубых чертах, больших волн геоида. Совместное использование астрономо-геодезических материалов по дугам градусных измерений или по большим астрономо-геодезическим сетям с имеющимися материалами по мировой гравиметрической съемке и по гравиметрическим работам в районах астрономо-геодезических работ должно приводить к улучшенным результатам по выводу размеров общего эллипсоида и к более надежной оценке действительной точности этих выводов.

Но обратимся снова к изостазии, уже так много давшей в геодезии. С развитием астрономо-геодезических работ в довольно большом числе районов обнаружилось, что поправки наблюдаемых астрономических широт и долгот, введенные в эти величины на основании применения теории изостазии, явно искажают полученные из наблюдений результаты и являются поэтому неприемлемыми. Точно так же в ряде районов аномалии силы тяжести, полученные на основании применения теории изостазии к обработке наблюденных значений ускорений силы тяжести, оказываются слишком значительными и колеблющимися в весьма больших пределах. Для объяснения получаемых противоречий между действительностью и теорией защитниками изостазии выдвигается целый ряд соображений. Во-первых, отмечают в подходящих случаях чисто местные влияния; во-вторых, указывают на неверность принятой глубины компенсации; в-третьих, ссылаются на то, что нарушение изостатического равновесия, произшедшее очень давно, может оставаться невосстановленным частично или полностью до настоящего времени: наконец, указывают, что могут быть «горы с корнями, горы без корней, корни без гор» и т. п.

Изостатически некомпенсированными оказываются Индия, Памир, Вест-Индия, Восточная Африка, Индонезия; к этому мы еще прибавим Кавказ, Урал и Приуралье, Заволжье и Северный Кавказ. Получается почтенный перечень, захватывающий площадь, одинаковую с той, на которой геодезическое применение теории изостазии достаточно оправдывается.

Никто не будет оспаривать в настоящее время принципа изостазии. Однако в ряде больших районов применение в геодезических целях изостатической компенсации, вытекающее из предложенных схем этой компенсации, потерпело неудачу, и это особенно относится к Европейской части СССР; вероятно это будет иметь место и в Сибирской низменности. Не имеется и уверенности в том, что применение изостазии там, где оно увенчалось успехом, не сопровождалось систематическими погрешностями; мелкие же систематические ошибки в геодезических обработках особенно вредны. Я надеюсь представить Отделению геолого-географических наук Академии наук материалы по СССР, которые иллюстрируют несостоятельность геодезического применения изостазии для обширных территорий СССР, причем дело здесь, видимо, во влияниях вовсе не местного, а по крайней мере областного характера.

По вопросу применения изостазии в геодезии я позволю себе сделать такие заключения: 1) вопрос надлежащего изучения геоида и вывода общего земного эллипсоида остается достаточно сложным и после применения геодезистами США теории изостазии к обработке градусных измерений; 2) дальнейшее усовершенствование методов в изучении фигуры геоида и в установлении земного эллипсоида, по моему мнению, лежит в разработке совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов; 3) сопоставление тех противоречий, которые обнаруживаются в ряде больших районов при применении теории изостатической компенсации к обработке астрономо-геодезических и гравиметрических результатов, представляет значительный обще-научный интерес и может приводить к соображениям и заключениям, важным для геологов и геофизиков.

Гутенберг пишет: «В областях, где нет изостазии, имеют место как медленные, так и внезапные выравнивающие относительные горизонтальные и вертикальные смещения в соседних участках земной коры». Эти медленные смещения могут быть подмечены геодезически и до наступления землетрясений в районах, неблагополучных по изостазии. Понятно, что неуспех применения к обработке астрономо-геодезических и гравиметрических материалов теории изостатической компенсации может быть нередко только видимым, например обусловленным неучитываемыми подземными залеганиями, так называемым «погребенным рельефом». Астрономо-геодезические данные и гравиметрические материалы могут быть вместе использованы для определения схемы этих залеганий; задача эта неопределенна по своему решению, но число тех решений, которое на основании данных геологии будет достаточно соответствовать действительности, всегда является очень ограниченным. Следует считать желательным развитие астрономо-геодезических и гравиметрических работ именно в районах, неблагополучных или квазинеблагополучных по изостазии. Конечно, надлежащее использование результатов этих работ — дело не простое, требующее объективного научного подхода, при котором изостатическое равновесие не притягивалось бы за волосы и при котором исследование вопроса совершилось бы при активном участии геологов и геофизиков.

Геодезисты в Индии для объяснения существенных противоречий, возникающих при применении теории изостазии к обработке астрономо-геодезических и гравиметрических результатов в этой стране, выдвинули так называемые ондuliaции поверхности кристаллического гранитного слоя, подстилающего самый верхний слой земной коры (*Sedimentschicht*) и лежащего ниже дневной поверхности на 10—15 км. Эти выпуклости и вогнутости кристаллического подземного слоя, эти хребты и долины погребенного рельефа вполне устраняют геодезические противоречия; но какое обоснование они получают в глазах геологов, — остается мне неизвестным. Если, применяя теорию изостазии в высокогорной области, мы получаем заметные отрицательные аномалии силы тяжести, то предположительно заключаем, что подстилающие горное сооружение кристаллические слои имеют вогнутость, и поэтому здесь имеет место, в силу изостазии, процесс выравнивания этой вогнутости и соответствующее ему поднятие горного массива, что мы и должны, может быть, наблюдать например на Памире (за исключением его восточной части) и что, конечно, можно обнаружить геодезическим путем. Если в низменной местности имеем заметные положительные аномалии силы тяжести, то заключаем об излишней выпуклости подстилающих здесь верхний

слой следующих кристаллических слоев и о возможном опускании этой низменности. Объяснение таким же путем заметных положительных аномалий в горном районе будет, однако, затруднено\*.

Одна из задач современных астрономо-геодезических работ заключается в собирании материала, освещающего результаты применения теории изостазии к обработке астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, с возможной интерпретацией возникающих противоречий, которая, однако, поскольку дело касается строения земной коры, должна быть главным образом в руках геологов. Профили геоида представляют, конечно, ценнейший материал при изучении строения земной коры, но очень важно относить эти профили к поверхности не произвольного эллипсоида, а общего земного эллипсоида. Отступления геоида именно от этого общего земного эллипсоида обусловлены отступлениями в строении земной коры от идеального, воображаемого ее строения, соответствующего изменению плотности только по направлению отвесной линии.

Мы ограничимся еще лишь тремя замечаниями: 1) геодезические данные, собранные до и после землетрясений, совершенно необходимы для выяснения картины землетрясения; 2) повторные высокоточные нивелировки выясняют вековые движения суши и перемещения подземных масс в предгорьях; 3) исследования перемещений земных полюсов служат для освещения целого ряда сложных вопросов в устройстве и жизни нашей планеты.

Наконец, должно отметить, что исследования вида геоида необходимы для самой геодезии; точная обработка значительных астрономо-геодезических сетей требует знать отступления геоида от того референц-эллипсоида, поверхность которого принимается за основную координатную поверхность при геодезических работах.

## 2. Постановка и развитие современных градусных измерений

Во времена Струве и вообще до XX столетия астрономические пункты на дугах градусных измерений располагались примерно через 200 км. Понятно, что о получении профиля геоида из такого материала говорить не приходится.

Если представим себе большую меридианную дугу, например с широтной амплитудой в 25—30° и с астрономическими пунктами на ней через 200 км, то из одной такой дуги мы можем вывести величины  $a$  и  $\alpha$ , правда, с малой точностью, например с средней ошибкой в полуоси  $a$  около  $\pm 120$  м и со средней ошибкой сжатия  $\alpha$  в  $\pm 8 — \pm 12$  единиц в знаменателе сжатия. Увеличивая число астрономических пунктов на нашей дуге, мы можем заметно повысить точность вывода величин  $a$  и тем не менее выведенный эллипсоид будет чисто местным, и на этом выводе влияние широких, общих волн геоида непременно скажется.

Если имеем несколько, например  $n$  дуг по меридианам и по параллелям, между собой геодезически не связанных, то совместная обработка этого материала по способу наименьших квадратов, без применения теории изостазии, приводит к определению не одного, а  $n$  эллипсоидов, имеющих все одни и те же размеры и сжатие, но разно расположенных в земном теле, хотя у всех их полярная ось будет параллельна оси вращения Земли. Насколько в отношении размеров и сжатия

\* См. Heiskanen. Ueber die Isostasiefrage, Verhandlungen der neunten Konferenz der Baltischen Geodätischen Kommission. 1937.

этого эллипсоида мы приближимся при обработке  $n$  дуг к общему земному эллипсоиду, — мы, при существовании больших волн геоида, правильно оценить не можем, хотя способ наименьших квадратов дает к этому формальное средство. При применении изостазии к обработке астрономической части градусных измерений мы, собственно, должны были бы при использовании более или менее значительного материала заметно приближаться к общему земному эллипсоиду. Но так ли это происходит в действительности? Думается, что не так. В этом убеждаемся из приводимых в табл. 3 результатов градусных измерений.

Таблица 3

| Страны                | Автор   | $a$       | $\alpha$  |
|-----------------------|---|-----------|-----------|
| США . . . . .         | Хейфорд   | 6 378 388 | 1 : 297,0 |
| Западная Европа . . . | Хейсканен   | 6 378 444 | 1 : 302,4 |
| " . . . . .           | Красовский  | 6 378 284 | 1 : 301,7 |
| СССР . . . . .        | Красовский  | 6 378 182 | 1 : 299,0 |
| " . . . . .           | Центр. научно-иссл. институт геодезии, аэросъемки и картографии | 6 378 273 | 1 : 298,2 |

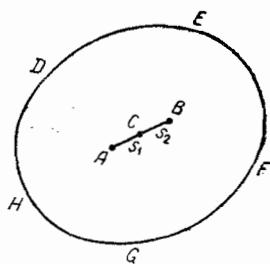
Как видно, выводы по отдельным странам еще далеки от согласия, особенно если принять в расчет, что при сжатии 1 : 297 мой вывод по СССР приводит для  $a$  к значению 6 378 097 м. Разница с выводом Хейфорда в 290 м! Очевидно, что здесь сказалось влияние общих волн геоида.

В начале настоящего столетия по дугам градусных измерений стали определять астрономические точки через 70—100 км. Это уращение астрономических пунктов, конечно, способствует лучшему построению профиля геоида по дугам градусных измерений и приводит к большему исключению влияния на вывод эллипсоида чисто местных неправильностей геоида. Но и то и другое улучшение достигается далеко не в полной мере. Дуги с расстояниями между астропунктами в 200 км я называю градусными измерениями старого типа, а дуги с расстояниями между астропунктами в 70—100 км — модернизированными.

С 30-х годов нынешнего столетия англичане в Индии ввели по дугам своих градусных измерений так называемое астрономическое нивелирование. В этих работах каждый пункт триангуляции I класса, проложенной вдоль дуги градусного измерения, определяется астрономически. Кроме того, ряд пунктов внутри треугольников триангуляции I класса определяется геодезически, разными путями и довольно приближенно (с ошибкой до 20 м); на таких пунктах выполняются также астрономические определения. Очевидно, что профиль геоида посредством таких частых астрономических пунктов определяется и точно и детально, но конечно, этот профиль отнесен всегда к эллипсоиду, используемому при геодезических работах в данной стране. Аналогичная постановка работ проведена англичанами в Индо-Китае и проводится по дуге 30-го меридиана в Африке.

В СССР в 1934 г. мною была выдвинута идея так называемого астрономо-гравиметрического нивелирования; математическая идея этого метода была разработана талантливым сотрудником Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэросъемки и картографии М. С. Молоденским; в 1935 и 1936 гг. работы по астрономо-гравиметрическому нивелированию были проведены по дуге меридиана Пулково — Николаев и по дуге параллели Орша — Челябинск. В упрощенном виде идея астрономо-гравиметрического нивелирования представляется в таком виде.

Пусть (фиг. 3) точки  $A$  и  $B$  суть геодезические пункты, на которых выполнены астрономические определения широты и долготы; по этим данным мы выведем для точек  $A$  и  $B$  величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , т. е. слагающие



Фиг. 3

уклонения отвесной линии в вертикальной плоскости, содержащей точки  $A$  и  $B$ . Допустим далее, что в пределах площади, ограниченной контуром  $DEFGH$ , мы исполнили гравиметрическую съемку, с расстояниями между гравиметрическими станциями, например, около 30 км. Теперь, применяя те или другие формулы гравиметрии, мы вычислим на основании этого гравиметрического материала «гравиметрические» уклонения отвеса  $\zeta_1^g$ ,  $\zeta_2^g$ ,  $\zeta_3^g$  в вертикальной плоскости  $AB$  соответственно для точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причем точка  $C$  находится на прямой  $AB$  в расстоянии  $s_1$  от  $A$  и в расстоянии  $s_2$  от  $B$ . Величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$

мы назовем астрономо-геодезическими уклонениями отвеса. Эти величины будут отнесены к тому референц-эллипсоиду, на котором даны геодезические координаты точек  $A$  и  $B$ . Величины  $\zeta_1^g$ ,  $\zeta_2^g$ ,  $\zeta_3^g$  «гравиметрические» уклонения отвеса, представляют собой в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  собственно часть «абсолютных» в тех же точках уклонений отвеса, относимых к нормальному или общему эллипсоиду; если бы контур  $DEFGH$  распространялся на всю поверхность Земли, то полученные нами  $\zeta_1^g$ ,  $\zeta_2^g$ ,  $\zeta_3^g$  и представили бы собой абсолютные уклонения в плоскости  $AB$  для точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Мы можем написать:

$$\zeta_1^g = \zeta_1^\circ + \delta_1; \quad \zeta_2^g = \zeta_2^\circ + \delta_2; \quad \zeta_3^g = \zeta_3^\circ + \delta_3,$$

понимая под  $\zeta_1^\circ$ ,  $\zeta_2^\circ$ ,  $\zeta_3^\circ$  именно точные значения абсолютных уклонений отвеса соответственно в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Если границы контура  $DEFGH$  достаточно удалены везде от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то мы имеем право с известной точностью считать, что величины  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , нам неизвестные, изменяются вдоль линии  $ABC$  линейно. Точно так же при известной малости расстояния  $AB$  мы можем считать, что линейно изменяются вдоль  $AB$  разности:

$$\zeta_1^\circ - \zeta_1; \quad \zeta_2^\circ - \zeta_2; \quad \zeta_3^\circ - \zeta_3$$

(причем  $\zeta_3$  нам еще неизвестно), так как эти разности обусловлены различием размеров и положения референц-эллипса и нормального эллипса. Отсюда ясно, что

$$(\zeta_2 - \zeta_2^g) - (\zeta_1 - \zeta_1^g) = k(s_1 + s_2);$$

$$(\zeta_3 - \zeta_3^g) - (\zeta_1 - \zeta_1^g) = k s_1;$$

$$\zeta_3 = \zeta_3^g + \frac{(\zeta_2 - \zeta_2^g)s_1 + (\zeta_1 - \zeta_1^g)s_2}{s_1 + s_2}. \quad (4)$$

На основании формулы (4) мы можем получить астрономо-геодезическое уклонение отвеса в любой точке прямой  $AB$ , и следовательно, тогда сведем астрономо-гравиметрическое нивелирование к детальному астрономическому нивелированию.

Для применения указанной идеи астрономо-гравиметрического нивелирования нужно соблюсти два основных условия: 1) определение астрономических пунктов по дуге градусного измерения через 100 км; 2) выполнение общей гравиметрической съемки в полосе шириной около 250 км, продольной осью которой является дуга градусного измерения. Далее, соответственно сложности изоаномалий силы тяжести, надлежит пополнить станции общей гравиметрической съемки добавочными станциями, располагающимися вблизи оси градусного измерения\*.

Так как в СССР общая гравиметрическая съемка успешно выполняется, а по рядам триангуляции I класса выполняются астрономические определения пунктов через 100 км друг от друга, то в условиях СССР проведение астрономо-гравиметрического нивелирования требует лишь выполнения добавочных гравиметрических работ, место которых устанавливается на основании рассмотрения изоаномалий силы тяжести, построенных по данным общей гравиметрической съемки. Указанный материал позволяет методом интерполяции получить астрономо-геодезические уклонения отвеса в любой точке дуги градусного измерения, и таким образом получается возможность с хорошей точностью построить профиль геоида и притом с какой угодно подробностью.

Программа советского градусного измерения, установленная мною, представляется в таком виде: вдоль градусного измерения астрономические пункты располагаются через 70—100 км; полоса шириной около 250 км, продольной осью которой является измеряемая дуга, покрываются гравиметрическими станциями с расстояниями между ними около 30 км; по продольной оси дуги производится необходимое сгущение гравиметрических станций.

Градусные измерения, выполняемые по программе англичан в Индии или по советской программе, я назову градусными измерениями по полной программе. Именно этот вид градусных измерений вполне отвечает всем требованиям геофизики, геологии и самой геодезии; это — градусные измерения, дающие возможность с полной детальностью и с хорошей точностью строить профили геоида. Использование этих профилей в целях геологии и геофизики — дело соответствующих ученых, но вероятно при участии и геодезистов. В развитии градусных измерений и приходится требовать, чтобы был везде совершен переход на этот новый тип градусных измерений, выполняемых по полной программе.

В СССР намечено дуги меридианов и параллелей, по которым выполняется полная программа градусного измерения, пролагать через 600—800 км друг от друга. Дополнительные работы, требуемые астрономо-гравиметрическим нивелированием в обычных, не горных районах, не велики: так, по дуге от Орши до Челябинска они выполнены двумя гравиметрическими отрядами в течение одного полевого сезона.

\* Приведенная программа соответствует районам, достаточно удаленным от горных районов, в которых полоса охвата общей гравиметрической съемкой соответственно расширяется и в которых дополнительное сгущение гравиметрической съемки может значительно увеличиваться.

Следует отметить, что астрономо-геодезические работы, выполненные за последние годы в Финляндии, также должно отнести к выполненным по полной программе.

Следующим типом работ по градусным измерениям нужно считать так называемые астрономо-геодезические сети, впервые достаточно широко примененные в США.

Изолированность Америки от других стран в геодезическом отношении натолкнула, естественно, на мысль определять размеры эллипсоида не из отдельных дуг и вообще не из дуг, а из сетей, покрывающих с большей или меньшей густотой обширную территорию. Ряды государственной триангуляции I класса прокладываются по меридианам и параллелям с тем или иным расстоянием между рядами одноименного направления. Если по этим рядам в их пересечениях будут астрономически определены широты и долготы, а также точные астрономические определения будут выполнены по рядам триангуляции I класса в пунктах, лежащих между пересечениями рядов, то получается материал, выясняющий с той или другой надежностью поверхность геоида в стране, покрытой указанными астрономо-геодезическими работами.

Американцы назвали методом площадей постановку астрономо-геодезических работ для вывода размеров и скатия эллипсоида в виде астрономо-геодезических сетей указанного типа и приписывали большие преимущества этому методу по сравнению с «методом дуг». По существу метод площадей, конечно, несравненно лучше выясняет фигуру геоида в данной стране, чем отдельные градусные измерения, выполняемые в той же стране или в ней и в смежных странах. Но, конечно, эта фигура геоида все-таки будет местной, и хорошо подходящий к ней эллипсоид также будет местным, а не общим, хотя бы при обработке астрономо-геодезической сети для вывода этого эллипсоида и применили метод изостатических поправок. Важно отметить, что хотя в астрономо-геодезической сети США и исполнено много астрономических определений, но нередко астрономические пункты располагаются группами, между которыми остаются значительные расстояния.

В СССР с 1923 г. развитие государственной триангуляции I класса имело целью не только обслуживание практических требований и задач, но и возможно полное удовлетворение запросов научного характера. По моему предложению, с 1924 г. было решено на рядах триангуляции I класса определять астрономические пункты через 70 км, что и делалось до 1933 г., когда перешли на расстояние между астропунктами в 100 км. Но с 1928 г. было принято, также по моему предложению, что ряды I класса пролагаются (в обжитых районах) не через 400—500 км, а через 220 км. С другой стороны, было принято каждый полигон триангуляции I класса размером 220 × 220 км разбивать на четыре части так называемыми основными рядами триангуляции II класса, в пересечении которых также выполняются астрономические определения. Таким образом, в СССР на всей площади, захватываемой триангуляцией I класса, астрономические пункты располагаются в 100 км друг от друга. Аналогичную постановку дела мы имеем только на части площади Германии, в южной части Швеции, в Финляндии.

Астрономо-геодезические сети следует подразделить на два разряда, отнеся в первый разряд те сети, которые приходятся в районах выполнения общей гравиметрической съемки, а во второй — все остальные астрономо-геодезические сети с астропунктами по рядам триангуляции I класса через 70—120 км. В первый разряд приходится

отнести: значительную часть астрономо-геодезической сети СССР, часть сети Германии, главным образом примыкающую к градусному измерению по 52-й параллели, и астрономо-геодезическую сеть в Финляндии. Первый разряд астрономо-геодезической сети характеризуется тем, что по любому ряду триангуляции I класса можно построить детально и достаточно полно профиль геоида, используя совместно астрономо-геодезические материалы и материалы общей гравиметрической съемки; точность построения профиля геоида будет несколько уступать по точности и детальности профилям из астрономо-гравиметрического нивелирования вследствие отсутствия сгущения общей гравиметрической съемки в соответствующих местах по рядам триангуляции I класса. Но так как в СССР ряды астрономо-гравиметрического нивелирования располагаются через 600—800 км друг от друга, то эти профили геоида, построенные по рядам астрономо-геодезической сети, будут вставляться между точками, определенными из градусных измерений, выполненных по полной программе.

Из сказанного вытекает, что советская геодезия в своих построениях, обслуживающих запросы науки, без сомнения является передовой. Всего в СССР за 1918—1938 гг. было проложено 46 000 км рядов триангуляции I класса, которые или обращены в градусные измерения по полной программе или образуют астрономо-геодезические сети первого разряда; до 1917 г. в России было исполнено 7000 км рядов триангуляции I класса. Следует отметить выполненное в 1899—1901 гг. русскими и шведами градусное измерение на Шпицбергене между широтами 76°,5 и 80°,5.

Собранный по СССР громадный астрономо-геодезический и гравиметрический материал позволяет уже в Европейской части СССР, за исключением районов севернее 60-й параллели, получить профили геоида через каждые 200—300 км по меридианам и параллелям. Эти профили все между собою связаны. Они, конечно, отнесены к тому референц-эллипсоиду, к которому отнесены геодезические координаты точек триангуляции. Но при получении этих профилей не прибегают ни к каким гипотезам и не используют теории изостазии. В Азиатской части СССР обращает на себя внимание выполнение градусного измерения от Челябинска до Хабаровска между параллелями 54—49°. Это градусное измерение, однако, приходится еще относить к типу «модернизированных дуг», так как гравиметрическое освещение соответствующей территории еще далеко не закончено. Из рядов триангуляции I класса СССР следует отметить приведенные в табл. 4.

Эти сведения красноречиво говорят об успехах советской геодезии. Во всех странах, кроме США, конец XIX и начало XX столетия были временем затишья в развитии астрономо-геодезических работ. С 1918 г., наоборот, почти во всех странах мы наблюдаем оживленную астрономо-геодезическую деятельность, вызванную разными причинами.

В США с 1918 г. по 1936 г. определено около 275 новых астрономических пунктов, однако со средним расстоянием между ними около 130 км; с 1930 г. по 1935 г. было проложено около 50 000 км новых рядов триангуляции I класса; всего же в этой стране общее протяжение рядов триангуляции I класса, проложенных до 1937 г., составляет не менее 80 000 км. Но должно отметить, что после 1918 г. геодезические работы США в своей постановке отражают главным образом практические

Таблица 4  
Ряды триангуляции I класса СССР

| Название ряда  | Амплитуда                             |
|--|---------------------------------------|
| 1. Дуга Струве . . . . .   | 25°20'                                |
| 2. Мурманск—Пулково—Николаев . . . . .                                     | 22                                    |
| 3. Петрозаводск—Белозерск—Харьков—Джанкой . . . . .                        | 17                                    |
| 4. Архангельск — Вологда — Кострома — Тамбов — Армавир — Зугдиди . . . . . | 22                                    |
| 5. Киров—Казань—Саратов—Астрахань . . . . .                                | 16                                    |
| 6. Чердынь—Чкалов . . . . .  | 10                                    |
| 7. Шимск—Бежецк—Череповец—Киров—Молотов—Байкалово . . . . .                | 37                                    |
| 8. Орша—Ульяновск—Челябинск—Красноярск . . . . .                           | 62°30'                                |
| 9. Красноярск—Чита—Хабаровск . . . . .                                     | 42 25                                 |
| 10. Гомель—Саратов—Чкалов—Усть-Каменогорск . . . . .                       | 51 30                                 |
| 11. Переяславль (на Днепре)—Сталинград—Темир . . . . .                     | 26                                    |
| 12. Чкалов—Арысь—Алма-Ата . . . . .  | 8 22 } по широте<br>21 26 } , долготе |
| 13. Новосибирск—Алма-Ата . . . . .   | 11 44 } , широте<br>6 2 } , долготе   |

ские, производственные цели, и результаты этих работ нельзя отнести к построению астрономо-геодезической сети первого разряда.

Период после 1918 г. ознаменовался началом астрономо-геодезических работ в Южной Америке; здесь проложена меридианная дуга (старого типа) между параллелями — 30—38° в Аргентине. Нужно, впрочем, отметить, что в начале 900-х годов французы измерили дугу меридиана на экваторе в Южной Америке, в Эквадоре, с амплитудой в 6°; измерение это следует отнести к выполненным по полной программе, так как французы определили астрономические широты 60 пунктов из всех 74 геодезических пунктов и, кроме того, 9 пунктов по долготе. Но государства собственно Южной Америки не развивают астрономо-геодезической деятельности, и указанная выше дуга в Аргентине является пока началом их работ по градусным измерениям, за которым пока ничего более не последовало\*.

В Африке следует отметить измерение англичан по 30-му меридиану: к 1914 г. астрономо-геодезические работы были проведены от мыса Доброй Надежды до южной широты — 9°; с 1919 г. по 1936 г. была измерена часть дуги от Каира до северной широты + 22° и часть дуги между широтами + 1° и — 9°. По всей дуге к 1936 г. измерена амплитуда в 48° (из 64°); работы эти следует относить к выполняемым по полной программе. Франция, Италия и Англия выполнили градусное измерение вдоль берега Средиземного моря от Алжира до Суэца, но это измерение должно отнести в части французской и итальянской к дугам старого типа.

\* В Чили прокладывается триангуляция I класса от 18° до 26° южной широты, но без обращения этой триангуляции в градусное измерение.

Англичане в Индии и Индо-Китае после 1930 г. произвели большие добавочные астрономические работы по дугам прежних своих градусных измерений и, тем самым, перевели их в разряд исполняемых по полной программе.

Эти градусные измерения англичан выполнены: по меридиану 78-му между параллелями  $8^{\circ}$  и  $31^{\circ}$ ; по меридиану 75-му между параллелями  $25$  и  $33^{\circ}$ ; по параллели со средней широтой  $24^{\circ}$  от меридиана  $61^{\circ}$  до меридиана  $100^{\circ}$ ; в Индо-Китае между параллелями  $9$  и  $24^{\circ}$  и между меридианами  $96$  и  $100^{\circ}$ .

Отметим еще геодезические работы французов в Сиаме, англичан на Суматре и в Австралии, голландцев на Борнео и Целебесе. Однако обращение материалов по этим работам в градусные измерения для значительной их части откладывается на неопределенное время.

В Европе прежде всего отметим астрономо-геодезические работы, выполненные в Финляндии; об этих работах уже сказано выше. Далее, в Польше, в Румынии, Чехословакии, Югославии, Греции, Болгарии, Швеции и Норвегии были выполнены новые геодезические работы, сумма которых не мала. К сожалению, значительная часть этих работ отвечает еще только практическим целям; некоторая часть их имеет то оснащение астрономическими пунктами, которое соответствует градусному измерению старого типа, и еще меньшая часть может быть отнесена по своему астрономическому оснащению к модернизированным дугам.

Существенно отметить, что после выполнения дополнительных астрономических работ в Европе образуется новое большое градусное измерение по меридиану, начинающееся с Кандии (Крит) и идущее через Грецию, Югославию, Румынию, Германию, Данию, Швецию и Норвегию — до Ледовитого океана, и имеющее конечной точкой Фуглунес на дуге Струве. Естественно стремиться к геодезическому соединению Кандии с Каиром, чтобы получить меридианное градусное измерение от мыса Доброй Надежды до Ледовитого океана. Пока такое соединение неосуществимо. Однако имеется обходный путь: используя геодезические работы французов в Сирии, можно легко продвинуться до соединения с нашими триангуляциями в Закавказье или же от Сирии через Малую Азию до Стамбула.

К 80-м годам прошлого столетия общее протяжение дуг градусных измерений составляло 8300 км. В настоящее время общее протяжение рядов триангуляции I класса, могущих быть обращенными в градусные измерения, составляет не менее 160 000 км! Общее же протяжение рядов триангуляций I класса, используемых в качестве градусных измерений, составляет около 60 000 км. Много это или мало? По нашим расчетам, это составляет не более 30% того объема астрономо-геодезических работ, которые позволят дать ответы на назревшие уже научные запросы геофизики, геологии и самой геодезии.

### 3. Заключительные соображения

Из сделанного обзора развития градусных измерений и предшествовавшего ему очерка запросов, предъявляемых к результатам этих измерений, можно вывести следующие заключения.

1. Только в самое последнее время появились градусные измерения нового типа, которые мы называем измерениями по полной программе; таких градусных измерений еще немного, и значительная

часть их приходится на СССР. Градусные измерения именно этого типа вполне отвечают задаче изучения геоида, и следует желать, чтобы везде перешли именно на ту постановку работ, которая проводится в СССР или которая осуществляется англичанами в Индии.

Советская постановка, в главных чертах отработанная мною, базируется на сочетании астрономо-геодезии с гравиметрией и характеризуется минимальным числом астроопределений, что очень существенно для стран умеренного и приполярного поясов.

2. Надлежит отметить образование в последнее время некоторых больших градусных измерений. Обращает на себя внимание вопрос скорейшего завершения астрономо-геодезических и гравиметрических работ: 1) по параллелям  $52^{\circ}$  от меридиана  $-10^{\circ}$  (Ирландия) до меридиана  $+140^{\circ}$  (Владивосток); 2) по 30-му меридиану от мыса Доброй Надежды до Ледовитого океана. Большое значение имеет выполнение градусного измерения по 60-й параллели в Евразии — от западных берегов Норвегии до Тихого океана, а также в Северной Америке по 60-й параллели, и между параллелями  $+28^{\circ}$  —  $+24^{\circ}$  в Африке и Азии.

3. Современное развитие астрономо-геодезических работ обеспечивает возможность международных геодезических соединений, которые мы здесь и перечислим:

а) Указанное уже выше соединение астрономо-геодезических работ в Африке через Сирию и Малую Азию с таковыми же работами по СССР и Средней Европе не представляет никаких затруднений.

б) Соединение астрономо-геодезических сетей СССР и Индии может быть также выполнено, так как триангуляции обеих стран фактически почти примкнули друг к другу на границе.

в) Соединение геодезических работ в Индо-Китае с работами на Суматре и Яве выполняется легко; дальнейшее соединение с Австралией представляет определенные затруднения, которые, однако, могут быть всегда преодолены.

г) Наиболее приковывает внимание геодезическое соединение СССР и США через Берингов пролив. Здесь мы имеем очень тяжелые условия работ и значительную трассу в 4500 км. Советские геодезисты ужс дошли до Охотска, преодолев первую тысячу километров пути. Далее трудности не уменьшаются, а увеличиваются. Однако в условиях СССР, где науку и труд ставят выше всего, это предприятие, начало которого в 1935 г. приветствовали учёные всех стран, будет, конечно, с честью выполнено.

Мы живем в период, когда геодезическое соединение всех материков становится делом ближайшего будущего, причем в осуществлении этой важной задачи главное место принадлежит СССР и нашим геодезистам.

4. В отношении географического размещения градусных измерений требования геодезии, с одной стороны, геологии и геофизики, с другой, расходятся: геодезисты исходят из математических оснований и склонны использовать области, спокойные и простые в тектоническом отношении; геологи и геофизики заинтересованы, наоборот, в освещении районов больших дислокаций земной коры в прошлом и в настоящем.

Следует задачи геодезии понимать шире, связывать их с запросами геофизики и геологии и идти с астрономо-геодезическими работами и в районы значительных дислокаций земной коры. Большие профили

геоида должны захватывать непременно районы субтропических и умеренных поясов; это важно и для самой геодезии.

Затруднения с обработкой астрономо-геодезических материалов в районах, сложных в тектоническом отношении, не должны служить препятствием к развитию и в этих районах градусных измерений. Вероятно, соответственно поставленные гравиметрические работы в дополнение к астрономо-геодезическим работам значительно помогут правильной обработке градусных измерений в таких сложных районах.

5. Задача изучения действительных или кажущихся нарушений изостатического равновесия в земной коре должна входить в число научных запросов, предъявляемых к астрономо-геодезическим работам. Развитие этих работ должно иметь в виду эту задачу, тем более, что исследования по ней важны и для самой геодезии, а именно—при обработке астрономо-геодезических материалов в соответствующих сложных районах. Очевидно, что для этой задачи градусные измерения должны обращаться в соответствующих районах (и может быть даже областях) в астрономо-геодезические сети первого разряда, с подлежащим их сгущением.

6. Первая задача градусных измерений состоит в получении точных и детальных профилей геоида. Вторая задача — чисто геодезическая, но имеющая, как и первая, важное значение для других отраслей знания,— это изучение волн геоида общего характера и вывод общего земного эллипсоида. Обе части второй задачи тесно между собой связаны. Применение теории изостазии вовсе не должно рассматриваться методом, достаточно отвечающим этой второй задаче. Решительный успех в решении этой задачи будет достигнут: а) значительным развитием на всех материках градусных измерений, проводимых по полной программе; б) выполнением геодезических соединений всех материков; в) развитием мировой гравиметрической съемки.

7. Современные выводы общего земного эллипсоида, как не охватывающие еще значительных частей земной поверхности и даже целых материков в южном полушарии и как получаемые из материалов, не соединенных в одно целое, должно рассматривать как предварительные и не окончательные. Улучшение этих выводов в настоящее время существенно зависит от развития мировой гравиметрической съемки и развития сплошных гравиметрических съемок в странах, где проходят градусные измерения или где построены астрономо-геодезические сети.

8. Обработка значительной астрономо-геодезической сети СССР уже требует существенного уточнения геодезических вычислений и нового математического подхода к составлению так называемых уравнений отклонений отвесных линий. Эта потребность сделается особо острой при дальнейшем развитии сети СССР, а тем более при соединении ее с сетью США. Этот вопрос нового математического подхода к обработке астрономо-геодезических материалов для вывода из них размеров и фигуры Земли разрабатывается в настоящее время Ф. Н. Красовским.

9. Надлежащий вывод эллипсоида, хорошо подходящего к геоиду в пределах СССР, и установление его положения в земном теле (или установление так называемых исходных геодезических дат) имеют при огромной территории СССР существенное значение для правильной обработки результатов основных геодезических работ в чисто производственных, практических целях. Это использование градусных измерений

и астрономо-геодезических сетей поставлено как ближайшая задача Главным управлением геодезии и картографии при СМ СССР.

В заключение привожу таблицу выводов земного эллипсоида разными авторами (табл. 5). Она достаточно красноречиво говорит и об огромном нарастании астрономо-геодезических материалов за настоящее столетие, и о том большом эффекте, который получается от присоединения к материалам других стран материалов по СССР.

Таблица 5  
Выводы земного эллипсоида

| Год выво-да | Автор   | Большая полуось (м) | Полярное сжатие $\alpha$ | Ампли-туда ис-пользов. дуг | Число астроно-мических дан-ных            |
|-------------|---|---------------------|--------------------------|----------------------------|---|
| 1800        | Деламбр . . . . .   | 6 375 653           | 1 : 334,0                | 15°                        | 7 широт                                   |
| 1841        | Бессель . . . . .   | 6 377 397           | 1 : 299,15               | 50                         | 38 "                                      |
| 1866        | Кларк . . . . .   | 6 378 206           | 1 : 295,0                | 80                         | 66 "                                      |
| 1910        | Хейфорд . . . . .   | 6 378 388           | 1 : 297,0                | 110                        | { 381 широта<br>131 долгота<br>221 азимут |
| 1929        | Хейсканен . . . . .   | 6 378 400           | 1 : 298,2                | 190                        | { 432 широты<br>178 долгот<br>221 азимут  |
| 1936        | Красовский . . . . .  | 6 378 210           | 1 : 298,6                | 300                        | { 514 широт<br>413 долгот<br>221 азимут   |
| 1939        | Центр. научно-иссл. ин-ститут геодезии, аэро-съемки и картографии | 6 378 245           | 1 : 298,3                | 430                        | { 738 широт<br>470 долгот<br>221 азимут   |

Наибольший вес имеет вывод ЦНИИГАиК.

До 1936 г. вывод размеров и сжатия земного эллипсоида собственно диктовался американскими материалами; это видно из того, что вывод Хейсканена, основанный на использовании материалов по США и Западной Европе, почти совпадает с выводом Хейфорда из одних материалов по США. Материалы по Западной Европе малы по сравнению с материалами по США и, так сказать, тонут в их массе. Присоединение больших материалов по СССР, накопленных уже к 1934 г., существенно изменило соотношение материалов по Западному и Восточному полушариям и заметно повлияло на вывод эллипсоида. Астрономо-геодезические материалы по СССР к 1937 г. уже стали большими, чем использованные по США Хейфордом.

Только после прибавления к материалам по США и Западной Европе материалов по СССР стала реальной возможность вывода трехосности Земли из астрономо-геодезических материалов и стало возможным, хотя бы в общих чертах, наметить долготные волны геоида в северном полушарии, в умеренном его поясе.

Очевидно, в развитии исследований фигуры и размеров Земли астрономо-геодезические работы СССР и по своему объему и по своей постановке выдвигаются на первый план.

# **О НЕКОТОРЫХ НАУЧНЫХ ЗАДАЧАХ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИИ В СВЯЗИ С ИЗУЧЕНИЕМ СТРОЕНИЯ ТВЕРДОЙ ОБОЛОЧКИ ЗЕМЛИ**

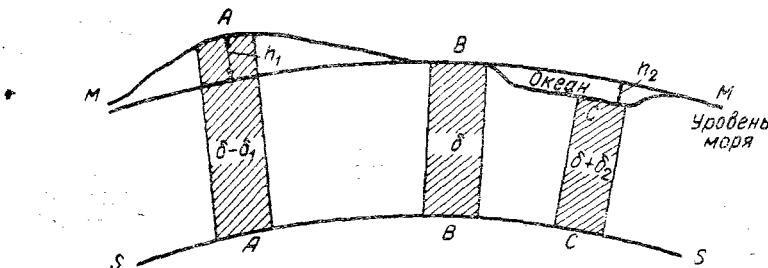
(Доклад, сделанный в мае 1944 г. Ученому совету Института теоретической геофизики  
Академии наук СССР)

Термин «астрономо-геодезия» был впервые выдвинут 100 лет назад великим русским астрономом Струве, относившим в состав этой науки градусные измерения с их теорией и практикой. За истекшие с тех пор годы задачи астрономо-геодезии значительно расширились и усложнились. В настоящем сообщении имеется в виду остановиться на том отделье астрономо-геодезии, который может быть назван физической геодезией, поскольку задачи этого отдела связаны с изучением устройства земного шара, твердой оболочки Земли, нарушений равновесия в ней, движений и перемещений различных частей земной коры.

Физическая геодезия зародилась при исследованиях по определению полярного сжатия Земли, т. е. 200 лет назад, потому что установленная геодезией величина этого сжатия в 1 : 297 оказалась далеко отстоящей и от значения его в 1 : 230, соответствующего однородному по плотности земному шару и вычисленного Ньютоном, и от значения в 1 : 576, вычисленного Гюйгенсом в предположении, что вся масса Земли сосредоточена в ее центре. Итак, 200 лет назад геодезия, при отсутствии еще геофизики и геологии, твердо установила, что земной шар не однороден и что плотность вещества в нем возрастает от поверхности к центру. Применяя методы астрономо-геодезии в 1774 г., т. е. 170 лет назад, получили первое надежное определение средней плотности земного шара. Другими словами, данные геодезии, сопоставленные со скоростью вращения Земли, позволили, когда еще не было никакой геофизики, установить, что плотность вещества внутри земного шара, а именно вблизи его центра примерно равна 9, т. е. общая, хотя и грубая, картина внутреннего строения Земли была установлена геодезией достаточно правильно, и здесь были получены необходимые отправные данные для дальнейших исследований в новой отрасли науки — геофизике.

Через 60 лет после этого, т. е. в 30-х годах прошлого столетия, астрономо-геодезические работы англичан в Индии дали достаточно богатый материал для освещения величин и распределения уклонений отвесных линий в этой стране. В северной Индии, в части ее, примыкающей к грандиозным Гималайским горам, отвес по астрономо-геодезическим данным оказался отклоненным в сторону этих гор на 5"; между тем, вычисления притягательного эффекта Гималаев приводили к тому, что отвес должен был бы уклоняться не на 5", а на 27", если бы направления отвесных линий отражали на себе полностью влияние этого притягательного действия Гималаев. Аналогичные явления были

обнаружены также в других частях Индии и в других странах. Вообще, те уклоны отвесных линий, которые устанавливала астрономо-геодезия для пунктов, лежащих вблизи больших горных массивов или на берегах глубоких океанических впадин, оказывались в 5—7 раз меньшими уклонений отвеса в тех же пунктах, вычисленных на основании учета притягательного действия горных массивов или учета обратного эффекта, обусловливаемого недостатком притягивающих масс в глубоких океанических впадинах. Конечно, эти факты выдвигали мысль о компенсации наружных избыточных или недостающих масс обширными залеганиями ниже уровня моря — соответственно или с плотностью вещества меньше нормальной или с плотностью вещества больше нормальной. Таким образом, в 40-х годах прошлого столетия астрономо-геодезия подошла уже к вопросам изучения строения земной коры. Англичанин Пратт дал идею так называемого изостатического равновесия земной коры и свою схему изостатической компенсации неправильностей строения самой верхней части земной коры. Фиг. 1 дает



Фиг. 1

в общих чертах схему компенсации по Пратту. Основные положения Пратта сводятся к следующему:

1) возвышенным местам Земли соответствуют залегающие под ними массы с уменьшенной плотностью, пониженным местам — массы с увеличенной плотностью;

2) на некоторой, притом постоянной, глубине относительно уровня моря находится уровенная поверхность  $SS$ , ниже которой имеют место условия гидростатического равновесия, и слои разной плотности разделяются уровенными поверхностями; давление же масс, лежащих выше поверхности  $SS$ , остается постоянным для всех точек поверхности  $SS$ .

Поверхность  $SS$  носит название поверхности изостазии или поверхности компенсации. Очевидно, что если в разных местах мы построим колонны  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (фиг. 1), имеющие одно и то же поперечное сечение на уровне поверхности  $SS$  и ограниченные с боков вертикальными образующими, то вес этих колонн  $A$ ,  $B$ ,  $C$  должен быть постоянным. Но так как колонна  $AA$ , соответствующая горной возвышенности, имеет наибольшее протяжение по вертикали, то в ней вещество должно иметь наименьшую среднюю плотность; наоборот, если колонна  $CC$  взята на океане, то она имеет наименьшую длину по вертикали, и поэтому средняя плотность вещества в ней должна быть одной из наибольших.

Если через  $\delta$  назовем плотность для колонны  $BB$ , верх которой имеет почти нулевую высоту над уровнем моря, то для колонны  $AA$  средняя плотность будет равна  $\delta - \delta_1$ , а для колонны  $CC$  — равна  $\delta + \delta_2$ . Задаваясь глубиной компенсации  $T$  и используя лишь высоты  $h_1$  гор над уровнем моря и глубины  $h_2$  дна океана, мы легко получим

отношения  $\frac{\delta_1}{\delta}$  и  $\frac{\delta_2}{\delta}$  и далее, средствами геодезии, получим уклонения отвеса или аномалии силы тяжести, вызываемые совокупным действием топографического рельефа и компенсирующих масс, заполняющих на континентах колонны от уровня моря до поверхности  $SS$ , а на океанах— колонны от дна океана до той же поверхности  $SS$ ; в первом случае компенсирующая масса имеет плотность  $-\delta_1$ , а во втором  $+\delta_2$ .

Сопоставление таких уклонений отвеса и аномалий силы тяжести, которые можно назвать изостатическими, с выводимыми астрономо-геодезией уклонениями отвеса и аномалиями силы тяжести должно или подтвердить или опровергнуть теорию Пратта изостатической компенсации.

Правда, на результатах этого сопоставления будут сказываться влияния неверности размеров и сжатия принятого в геодезии эллипсоида, неверности приданного ему положения в теле Земли, неверности принятой глубины компенсации  $T$ , а также и местных случайных нарушений изостатического равновесия. Учет и исключение этих влияний есть задача геодезии, которая при надлежащем использовании собранных в достаточном количестве астрономических, геодезических и гравиметрических материалов решается достаточно солидно. Важно все-таки отметить, что исследования изостазии требуют от геодезии предварительного решения задачи на основе соответственно собранных материалов по установлению хорошо подходящего к общей фигуре Земли эллипсоида, причем желательно такую задачу решить независимо от теории изостазии. Однако нередко ее ставят и решают с достаточным к тому обоснованием вместе и одновременно с применением гипотезы Пратта к определению изостатических уклонений отвеса и аномалий силы тяжести, считая, что использование изостатической компенсации и обусловливаемых ею поправок в выводимые астрономо-геодезией уклонения отвеса и в наблюденные значения ускорения силы тяжести именно и приводит к улучшенному решению задачи по выводу земного эллипсоида и надежному установлению формулы нормальной силы тяжести.

Схема Пратта основана на примитивных соображениях, не увязанных ни с геологией, ни с геофизикой; получается какая-то прямая зависимость строения земной коры только от внешнего ее рельефа, которая ставит процесс образования этого рельефа как главный, игнорируя как бы все грандиозные, сложные и многократно повторявшиеся геологические пертурбации в земной коре.

Применение этой схемы Пратта к обработке астрономо-геодезических и гравиметрических материалов Индии дало отрицательный результат, и это было причиной того, что с 40-х годов прошлого столетия вплоть до его конца в геодезии не прибегали к использованию гипотезы изостатической компенсации. Решительный поворот в этом вопросе связи геодезии с изучением внутреннего строения земной коры приходится приписывать американским геодезистам, возглавлявшимся учеными Хейфордом и Боуи.

В 1910 г. Хейфорд опубликовал свой труд по применению теории изостазии к обработке обширных астрономо-геодезических работ, исполненных к этому времени на всей территории США. Схематически и в самом сжатом виде результаты работы Хейфорда по США можно представить табл. 1 и 2.

Табл. 1 показывает, что топографические уклонения отвеса, т. е. обусловленные действием внешнего рельефа земной коры, достигают в ряде пунктов США огромных величин. Но и соответствующее

Таблица 1

Сопоставление уклонений отвесных линий, выводимых разными методами

| Штат             | Название пунктов | Уклонения в меридиане |                         |                | Уклонения в первом вертикале |                         |                | Примечание                                 |
|------------------|------------------|-----------------------|-------------------------|----------------|------------------------------|-------------------------|----------------|--|
|                  |                  | топографическое       | астрономо-геодезическое | изостатическое | топографическое              | астрономо-геодезическое | изостатическое |  |
| Калифорния . . . | Санта-Барбара    | — 64",97              | — 18",38                | — 12",35       | —                            | + 104",63               | + 16",98       | Глубина компенсации $T = 113,7 \text{ км}$ |
|                  | Пойнт-Аренса     | —                     | —                       | —              | —                            | —                       | —              |  |
| Виргиния . . .   | Норт-Айленд      | —                     | —                       | —              | — 54,10                      | — 6,62                  | — 1,92         |  |
|                  | Юта . . . . .    | Уэйдин                | —                       | —              | + 54,71                      | + 13,25                 | + 20,00        |  |
| Нью-Йорк . . . . | Патма-Хэд        | — 27,20               | — 13,52                 | — 8,53         | —                            | —                       | —              |  |
|                  | Хоултс           | — 12,96               | + 1,92                  | + 3,33         | —                            | — 37,46                 | + 14,77        |  |
| Канада . . . . . | Чивер            | —                     | —                       | —              | —                            | —                       | —              | — 8,73                                     |
|                  | Гаргантоа        | —                     | —                       | —              | — 11,94                      | + 2,11                  | + 3,47         |  |

Таблица 2

## Выходы земного эллипсона

| Решения   | Глубина компенсации (км) | $\xi_1$  | $\eta_1$  | Большая полуось (км) | Сжатие | $\Sigma \sigma^2$  | Средние ошибки |
|---|--------------------------|----------|-----------|----------------------|--------|--|----------------|
| Исправление астрокоординат топографическими уклонениями отвеса (B) $> 2R$         | + 19",65                 | — 15",53 | 6 383 042 | 1 : 255,1            | 107385 | 1) В глубине компенсации $\pm 10$ км                                   |                |
| Неведение никаких поправок в астрокоординаты . . . . . (A) 0                      | — 0,98                   | + 0,73   | 6 378 062 | 1 : 298,2            | 18880  | 2) В полуси эллипсона-да по решению G + 35 м                           |                |
| Исправление астрокоординат изостатическими уклонениями отвеса . . . . . (E) 162,2 | + 0,18                   | — 1,46   | 6 378 493 | 1 : 296,3            | 10297  | 3) В сжатии эллипсона по тому же решению $\pm 0,5$ в знаменателе дроби |                |
| (F) 120,9   | — 0,15                   | — 0,86   | 6 378 388 | 1 : 297,0            | 10063  |  |                |
| (G) 113,7   | — 0,20                   | — 0,74   | 6 378 370 | 1 : 297,1            | 10077  |  |                |

им компенсирующее действие подземных масс также велико, и изостатические уклонения отвеса везде получаются уже близкими к астрономо-геодезическим и имеют абсолютные значения, в несколько раз меньшие (в среднем в 5—6 раз) соответственных абсолютных значений топографических уклонений отвеса. Решение  $B$  (см. табл. 2), т. е. вывод земного эллипсоида с использованием влияния только топографического рельефа на направление отвесных линий, дает неприемлемое значение для земного сжатия, для размеров Земли и для поправок  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , широты и долготы пункта триангуляции США, принятого за исходный при выводе эллипсоида. Эти широта и долгота до постановки этой задачи были определены геодезистами с ошибкой, вообще меньшей секунды, и поэтому значения  $\xi_1 = +19'',65$  и  $\eta_1 = -15'',53$  иначе и нельзя назвать, как совершенно неприемлемыми. Это решение  $B$ , с другой стороны, соответствует полному отрицанию компенсации рельефа и представлению земного шара как тела, лишенного упругости и заполненного сплошь каменной оболочкой.

Уже этих фактов достаточно, чтобы признать компенсацию топографического рельефа земной коры не как гипотезу, а как факт, неопровергнутое доказанный американскими геодезистами.

*Везде избытки притягивающих масс должны компенсироваться соответствующими им залеганиями с недостаточной плотностью вещества, и, наоборот, недостатки масс в верхнем слое земной коры компенсируются избытками масс, залегающими под ними.* Это ведет к своеобразному состоянию равновесия в земной коре, которое следует назвать равновесием изостатическим.

Изостатическое равновесие, постоянно нарушаясь, существует в общем в земной коре. Этому равновесию соответствует распределение масс в земной коре, обуславливающее постоянство их давления на некоторую уровенную поверхность, ограничивающую снизу земную кору.

Этот существенный вывод, имеющий важное значение и для геологии, и для геофизики, и для самой геодезии, и вообще для объяснения ряда явлений в жизни Земли, добыт и подтвержден астрономо-геодезическими работами США в 1910 г. Числовые выводы Хейфорда могут быть опорачиваемы в той или другой степени из-за примитивности принятой им схемы изостатической компенсации по Гратту, и вопрос о схеме компенсации остается по существу открытым.

Нужно иметь в виду, что мы можем брать разнообразные схемы распределения плотностей в земной коре, каждой из которых будет соответствовать одна и та же фигура геоида, одно и то же распределение уклонений отвесных линий и аномалий силы тяжести на уровенной поверхности океана, то есть, математически рассуждая, задача исследования строения Земли по данным астрономо-геодезии, включая в нее и гравиметрию, по существу неопределенна. Но изменения плотностей в пределах земной коры заключены в сравнительно узких пределах; резкие перемены плотностей в виде переходов от водоемов к породам на дне морей и океанов могут быть хорошо учтены, так же довольно правильно учитывается чисто топографическое влияние крупных горных сооружений, поскольку оно представлено известным их рельефом.

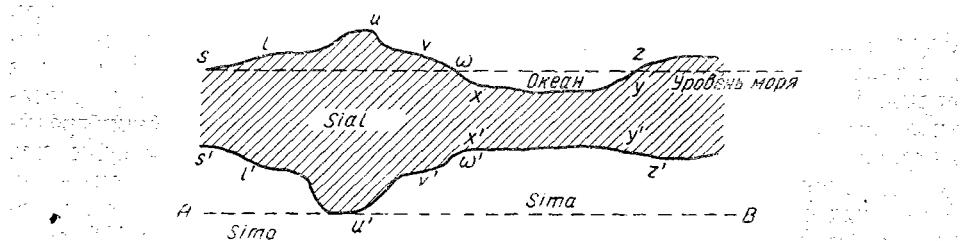
Но, конечно, не учитывается влияние неизвестных изменений плотностей с высотой в горных сооружениях, а также влияние «погребенного» рельефа. Все-таки изостатические уклонения отвеса и аномалии силы тяжести можно получить достаточно надежно для ряда районов

и по схеме Пратта—Хейфорда. Но понятно, что это устраивает главным образом только геодезию, которая тогда получает как будто бы особые выгоды в решении своей основной задачи — установления размеров, сжатия и ориентировки общего земного эллипсоида, а также и вывода формулы нормальной силы тяжести. Однако понятно, что использование этого эффекта применения изостазии в обратных целях, т. е. в целях освещения строения земной коры, стоит совсем в иных и неблагоприятных условиях: отмеченная выше неопределенность задачи — по виду уровенной поверхности находить неправильности строения Земли, вызывающие возмущения этой поверхности, — скажется в полной мере. Это, однако, не явилось препятствием для ближайшего продолжателя работ Хейфорда, американского геодезиста Боуи, который выполнил ряд работ по исследованию строения земной коры, используя данные и результаты астрономо-геодезических работ по США и отчасти по другим странам. Боуи написал более 50 работ по исследованиям изостазии и использованию ее в геологических целях, продолжает их писать и по настоящее время. Принимая гипотезу Пратта и вытекающую из нее схему изостатической компенсации, Боуи установил на основе использования гравиметрических материалов глубину компенсации  $T$ , или, по существу, толщину земной коры, в 96 км для горных районов и в 60 км — для остальных районов, тогда как Хейфорд на основе материалов астрономо-геодезической сети США давал для  $T$  одно среднее значение в 122 км.

Эти выводы стоят в довольно значительном противоречии с современными выводами геофизики, но характерно, что Боуи отрицает постоянство глубины компенсации, которое так характерно для гипотезы Пратта. В схеме Пратта изменения со временем внешнего рельефа земной коры неизбежно приводят к подкорковым перемещениям в горизонтальном направлении масс подстилающего земную кору слоя. Используя именно эти подкорковые перетекания, Боуи всякие изменения внешнего рельефа объясняет лишь силами, действующими вертикально, и главными причинами изменения этого рельефа считает седиментацию, эрозию, оледенение и т. п. Другими словами, нарушения изостазии он приписывает только вертикально действующим силам; прогибы земной коры и вообще образование гор Боуи, в соответствии с этим, также приписывает действию вертикальных сил, обусловливаемых главным образом седиментацией и эрозией. Несомненно, здесь ученый-геодезист в лице Боуи отрицает обратное мнение геологов, согласно которому горообразование и значительные вертикальные изменения земной поверхности вызываются регионально действующими горизонтальными силами. Он считает, что нет причин, вызывающих действие этих сил. По его мнению, имеющие место при землетрясениях горизонтальные сдвиги до 5—6 м нужно рассматривать как последствия местных, случайно возникающих горизонтальных сил. Он считает, что горизонтальные сдвиги, выявляемые с очевидностью в районах складчатости, суть чисто местные явления. Поэтому переход от этих фактов местного значения к утверждению, что они — следствие больших горизонтальных движений, именно и явившихся причиной горообразований, Боуи считает в геологии ничем не обоснованной экстраполяцией. Конечно, тогда на теорию изостазии и надлежащее использование астрономо-геодезических и гравиметрических материалов переносится освещение ряда сложнейших, и притом основных, вопросов геологии, чем и занимается Боуи.

Историческая последовательность заставляет нас остановиться очень кратко на теории изостазии по Эри. Английский астроном и геодезист

Эри в 1855 г. выдвинул идею плавания глыб, образующих земную кору, на подстилающем ее магматическом субстрате, причем равновесие, конечно, должно соблюдаться за счет потери веса глыбой при погружении ее части в более тяжелую магму. Другими словами, горные массивы должны иметь выступы или корни, входящие в магму глубже выступов, соответствующих глыбам равнинных районов, а погружение земной коры в магму должно иметь самую меньшую глубину для океанов, где земная кора будет, следовательно, наиболее тонкой. Таким образом, по Эри (фиг. 2), нижняя поверхность  $s' l' u' v' w' x' y' z'$  земной коры, за которой непосредственно лежит подстилающий ее магматический слой, является до известной степени зеркальным отображением дневной поверхности коры; уровенная поверхность  $AB$ , проходящая через самую низкую



Фиг. 2

точку этого отображения, играет роль поверхности изостазии, ниже которой магматическое вещество находится в состоянии гидростатического равновесия. Гравиметрические материалы, используемые на основе применения схемы изостатической компенсации по Эри, дают толщину земной коры: на Кавказе 80—100 км, в Северной Америке 50—70 км, в Альпах 35—45 км, в Норвегии 32—38 км, в Восточной Африке 25—40 км. Для Тихого океана толщина земной коры всего 8—10 км. Эти величины вообще плохо согласуются с современными данными геофизики, и уже отсюда следует, что с точки зрения геофизики гипотеза Эри, как и гипотеза Пратта, далеко не отвечает действительности и имевшим место в природе условиям образования земной коры.

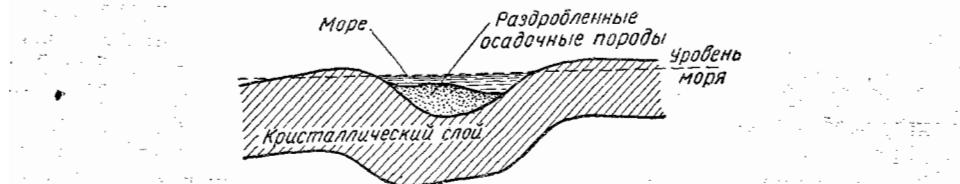
Применение ее к подсчету уклонений отвеса и аномалий силы тяжести при известном подборе постоянных дает величины, близкие к получаемым при применении гипотезы Пратта, но так как вычисления при применении последней значительно проще, то в геодезии место, завоеванное схемой компенсации по Пратту, остается за ней. Однако элементы мобильности, заложенные в гипотезе Эри и отсутствующие почти в полной степени в гипотезе Пратта, заставляют остановить внимание на гипотезе Эри.

Перемещение материков, образование Атлантического океана и ряд других фактов огромного и общего значения или совсем не могут быть объяснены или объясняются с большим трудом, если мы не примем идею плавания континентов; поскольку эта идея отражена в гипотезе Эри, постольку последней приходится отводить место в исследованиях строения твердой оболочки земного шара. Совершенно ясно, что геофизика должна привести к существенным корректировкам этой гипотезы, основываясь, между прочим, и на данных астрономо-геодезии. С другой стороны, астрономо-геодезия должна включить в число своих задач изучение перемещений материков и определение толщины земной коры.

К 1913 г. голландский геодезист Вейнинг Мейнес разработал окончательно теорию и аппаратуру маятника для определения силы тяжести на подводной лодке. В 1923—1926 гг. Вейнинг Мейнес выполнил большие гравиметрические рейсы на подводной лодке из Голландии в Порт-Саид; из Голландии мимо Азорских островов через Мексиканский залив и Панамский канал, вдоль Западного берега Америки, до Сан-Франциско и отсюда мимо Гавайских и Филиппинских островов до Явы. В 1927 г. работы были произведены в Индийском океане, а в 1929 г. — в восточной части Индонезии, вдоль берегов Суматры и Явы; в 1928 г. обследован Мексиканский залив; в 1932 г. Вейнинг Мейнес осуществил еще рейс в Атлантическом океане. Возможность гравиметрического изучения океанов сама по себе является достижением громадного значения, которое открывает новые перспективы в геодезическом и геофизическом изучении строения твердой оболочки Земли. Но указанные работы Вейнинг Мейнеса привели еще к существенному открытию — установлению обширных полей однообразных и значительных аномалий силы тяжести, не связанных непосредственно с рельефом, не укладывающихся в рамки изостатической компенсации и требующих для своего объяснения допущения действия горизонтальных сил, а именно, вызывающих сжатие земной коры и соответствующие ему ее прогибы. Эти поля в Ост-Индском архипелаге имеют вид полос, длиной до 6000 км и шириной в 500—600 км. Центральная часть полосы занята значительными отрицательными аномалиями, достигающими значений в 250 и даже 400 миллигаль. При этом данная полоса отрицательных аномалий проходит через прибрежные подводные гребни и острова, минуя полосы значительных океанических глубин, которые, однако, в общем параллельны полосе отрицательных аномалий. Обычно с обеих сторон полосы отрицательных аномалий тянутся полосы положительных аномалий, достигающих значений до 150 миллигаль и вообще не столь значительных, как аномалии отрицательные. В таких районах не может быть и речи о так называемой локальной изостатической компенсации, т. е. о компенсации призм даже со сравнительно небольшой площадью поперечного сечения, например до 25 км<sup>2</sup>, что весьма усиленно пропагандировали и Хейфорд, и Боуи. Но вместо локальной мы могли бы ввести региональную компенсацию, охватывающую соответственно ее названию значительную площадь, и утверждать, что для такой большой площади средняя изостатическая аномалия близка к нулю и что, следовательно, в общем компенсирована и уравновешена вся эта площадь, а не отдельные ее части. Но в Ост-Индии средняя изостатическая аномалия не менее +25 миллигаль, что, конечно, указывает на некомпенсированность этого района даже и в целом, т. е. на отсутствие здесь и региональной компенсации, а это, в свою очередь, означает крах утверждений Боуи, что нарушения изостазии могут носить лишь чисто местный, обусловленный случайными причинами характер.

Только принятие плавания материков, по Эри, и допущение действия горизонтальных сил, вызывавших сжатие земной коры на определенных участках вследствие надвига на них континента, может привести к объяснению описанных выше явлений, установленных Вейнинг-Мейнесом в Ост-Индском архипелаге. Вейнинг Мейнес полагает, что юго-восточная часть материка Азии имела, а вероятно и имеет движение с запада на юго-восток в направлении юго-юго-восток. Горизонтальные силы, действующие при этом, вызвали прогибы земной коры вследствие

ее сжатия, причем верхний слой осадочных пород сильно дробится, выгибаются вверх неправильными и мелкими складками, которые перекрывают основной прогиб кристаллического слоя коры (фиг. 3); при отсутствии или тонкости этого верхнего осадочного слоя образуется явная впадина. В некоторых местах кристаллическая кора может быть разломанной, и тогда здесь образуется «корень» будущей возвышенности. Кроме прогибов, горизонтальное давление будет вообще вызывать и относительное смещение участков, причем возможно, что некоторые из них и не подвергнутся прогибу, а будут лишь смещены со своих мест; примером служит смещение на 40 км Явы относительно Суматры. Картина, подобная только что описанной для Ост-Индии, имеет место и в Вест-Индии, только в меньшем масштабе. Исследуя волнобразные деформации, обусловленные прогибами земной коры, Вейнинг Мейнес находит длину полуволны около 62 км, но в его работы вкраилась ошибка, исправленная аспирантом Московского института инженеров геодезии, аэроъемки и картографии (МИИГАиК) В. А. Магницким. Существенно отметить соображение Вейнинг-Мейнеса, что вследствие различ-



Фиг. 3

ных условий формирования отдельных частей земной коры несомненно должны в разных случаях находить применение и разные схемы изостатической компенсации — и по Эри, и по Пратту, и по его собственной схеме, вытекающей из теории упругого прогиба кристаллического слоя земной коры. Все исследования Вейнинг-Мейнеса относятся к областям океаническим, притом к областям значительной тектонической деятельности, значительной складчатости; по существу в Ост-Индском архипелаге должно признать формирование геосинклинали. Эти выводы Вейнинг Мейнеса очень важны, они обусловливают иные подходы к изостазии и изучению строения земной коры, чем это было дано Хейфордом и Боуи. Несомненно, что эти выводы должны в той или иной степени относиться и к континентам, и к платформам на континентах.

Еще в молодых годах, 60 лет назад, академик А. П. Карпинский, столь хорошо известный среди ученых всего мира, установил, что на платформах, в том числе и на Русской, происходят последовательные волнобразные колебания земной коры; силы орогенеза передаются и на платформу, где под их влиянием создаются весьма пологие и широкие складки.

Изучение строения земной коры на платформах, свободное от предвзятых взглядов американских и европейских изостатистов, от отрицания общего (а не только случайного и местного) развития глубинных складок на платформах, выполнил с большим успехом в 1930—1935 гг. английский геодезист Гленни для территории Индии. Как уже было указано, попытки применить в Индии изостатическую компенсацию по Пратту и по Эри привели к неудаче, к невозможности объяснить имеющиеся здесь аномалии силы тяжести и уклонения отвеса на основе применения теории изостазии. Обнаружение Вейнинг Мейнесом прогибов

земной коры в Ост-Индии, Вест-Индии и на западном побережье Тихого океана наводило уже, естественно, на мысль о существовании волн и прогибов кристаллического слоя, лишь значительно меньших по размерам, и на континентальных платформах, в частности на Индийской. Впрочем, мнение о существовании этих волн и прогибов в Индии Гленни высказал даже немного ранее опубликования работ Вейнинг Мейнеса. Некоторые индийские геологи (Буррард) предполагали, что непрерывная полоса положительных аномалий силы тяжести, тянувшаяся через всю Индию по ее середине с запада на восток от Карачи и Кветты на Калькутту и имеющая ширину от 500 до 700 км, должна быть приписана влиянию мощного подземного хребта, погребенного под более молодыми породами и названного им Hidden Range. Параллельно этому хребту располагаются к северу и югу от него обширные области депрессии, т. е. отрицательных аномалий силы тяжести, соответствующих прогибам кристаллического слоя. Ось хребта Hidden Range и ось депрессий расположены в общем параллельно Гималаям.

Перейдем теперь к изучению средствами геодезии такого погребенного рельефа на платформах. Гленни, основываясь на исследованиях Джейфриса, принимал, что земная кора состоит на платформах из трех слоев: верхнего, толщиной 10 км, образованного преимущественно границами и имеющего среднюю плотность 2,6—2,7; промежуточного мощностью в 20 км и состоящего главным образом из базальта (тахилит) с плотностью 2,85; подстилающего нижнего слоя, имеющего плотность 3,30 и образованного дунитом вязким его состояния. Вполне основательно Гленни предполагал, что рельеф погребенный, представленный, следовательно, границами между гранитным и промежуточным слоем и между промежуточным и подстилающим слоем, гораздо более плавен и правилен, чем рельеф внешний. Далее, в ряде случаев изгибы верхней поверхности подстилающего слоя могут обусловить более крупные аномалии силы тяжести, чем неправильности внешнего топографического рельефа, а также и неправильное распределение плотностей в верхнем, гранитном слое, именно вследствие резкого скачка в плотности при переходе от промежуточного к подстилающему слою.

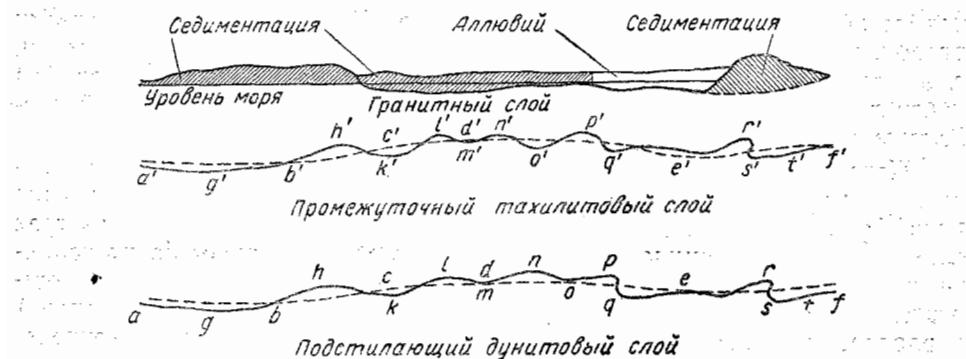
Для изучения подземного рельефа геодезия может использовать аномалии силы тяжести и отступления геоида от эллипсоида; к этому мы теперь и переходим.

Волны поверхности геоида мы можем подразделить на:

- а) волны первого порядка, обусловленные общими причинами, влияние которых сказывается собственно на всем земном шаре; это так называемые широкие волны геоида, следующие одной и той же закономерности на огромных площадях порядка континентов; они, например, могут быть приписаны трехосности земного эллипсоида. На протяжении значительных участков высоты геоида над эллипсоидом, обусловленные этими волнами, изменяются медленно и почти линейно; угол между элементом общей волны геоида и соответствующим ему элементом нормального эллипсоида не превышает 6";
- б) волны второго порядка, обусловленные основными складками подстилающего слоя, выражающими главные черты тектоники района;
- в) волны третьего порядка, отражающие влияние детальной структуры и промежуточного и главным образом верхнего (гранитного) слоев, включая и влияние заполненной осадочными породами самой верхней части верхнего гранитного слоя и сопутствующего ей земного рельефа. Конечно, в ряде случаев, может быть, следует из этих волн

третьего порядка выделять влияние слоя между внешней дневной поверхностью и уровнем моря, чтобы освободиться от влияний топографического характера.

На фиг. 4 пунктирные кривые  $abcdef$  и  $a' b' c' a' e' f'$  представляют основные складки верхних поверхностей промежуточного (тахилитового) и дунитового слоев, отображающие главные черты тектоники района или области: кривые  $aghklmnpqrstf$  и  $a' g' h' k' l' m' n' o' p' q' r' s' t' f'$  дают действительный профиль дунитового слоя и верхний профиль промежуточного слоя. Кривые  $abcdef$  и  $a' b' c' d' e' f'$  — плавные, параллельные друг другу и с амплитудой волны порядка 800—1200 км; им



Фиг. 4

соответствуют волны геоида второго порядка. На основные волны накладываются детали структуры — это второстепенные волны  $g'h'k', k'l'm', \dots, q'r's't'f'$ . Это структурные волны второго порядка, обусловливающие вместе с нарушениями правильности строения самой верхней части верхнего гранитного слоя волны геоида третьего порядка. Эти структурные волны второго порядка имеют особую значимость для геологов.

Прямые  $af$  и  $a'f'$ , параллельные уровню моря, представляют «нормальное положение» поверхностей раздела слоев гранитного, тахилитового и дунитового, которое было бы при отсутствии глубинной складчатости.

По каждому интересующему нас на суше профилю земной поверхности средствами астрономо-геодезии мы можем получить достаточно детальные и вполне точные высоты геоида и профиля геоида относительно так или иначе избранного референц-эллипсоида. В этой задаче мы используем или так называемое астрономическое нивелирование, или астрономо-гравиметрическое нивелирование. Первое требует определения по исследуемому профилю геодезических точек в среднем не реже чем через 10—15 км и определения астрономических широты и долготы для каждой из таких геодезических точек. Этот метод применен в широком масштабе англичанами в Индии, отчасти именно в целях исследования подземного рельефа. Второй метод требует определения астрономических широт и долгот для геодезических точек, отстоящих по профилю друг от друга на 70—100 км, и гравиметрического освещения территории — более детального в пределах полосы шириной в 250 км, осью которой служит исследуемый профиль, и менее детального за пределами этой полосы. Этот второй метод был предложен мною и применяется в СССР с 1935 г.

Важно иметь в виду, что высоты и профиль геоида относительно принятого референц-эллипсоида получаются тем и другим методом независимо от каких-либо предположений о внутреннем строении Земли и независимо от ошибок определений силы тяжести и ошибочности или несовершенства редукций силы тяжести — этого больного места гравиметрии.

Определение общих отступлений геоида от эллипса или установление, как выше было сказано, волн геоида первого порядка представляет очень сложную и тонкую задачу астрономо-геодезии. Эта задача усложняется еще тем, что эти общие волны геоида желательно было бы относить к поверхности не какого-то более или менее произвольно выбранного референц-эллипса, а к поверхности нормального сфероида или общего земного эллипса. Иначе полученные волны будут в той или другой степени отражать не только влияние внутреннего строения Земли, но и ошибочность принятых размеров, сжатия и ориентировки в земном теле референц-эллипса, потому что разделение этих влияний неизбежно осложнит задачу.

Другими словами, наилучшая, наиболее правильная постановка решения задачи по использованию высот геоида для выяснения строения земной коры требует отнесения определенных геодезией из астрономического или из астрономо-гравиметрического нивелирования высот геоида  $N$  к поверхности общего земного эллипса, а следовательно, требует, прежде всего, вывода и установления именно этого эллипса. Затем должно следовать выявление относительно его поверхности волн геоида первого порядка, с отсечением при этом в высотах  $N$  суммы волн второго и третьего порядка. В таком виде задача в геодезии только еще ставится.

Но если мы поставим ограниченную цель — выявить влияние основных волн глубинной складчатости, а именно, получить волны геоида второго порядка, то, очевидно, мы должны будем прежде всего снять влияние волн геоида первого порядка, т. е. получить для дальнейшего разности  $N - h_0$ , принимая под  $N$  высоту геоида над общим эллипсом, обусловленную всеми влияниями, а под  $h_0$  — высоту над тем же эллипсом волны геоида первого порядка.

Ясно, конечно, что  $N$  и  $h_0$  можно отнести и к поверхности референц-эллипса. Это вытекает и из формул, данных Ф. Н. Красовским в его Руководстве по высшей геодезии (часть II) и выражают зависимость  $N$  от размеров и ориентировки эллипса; но это очевидно и из геометрических соображений о близости искажений в  $N$  и в  $h_0$  при переходе от одного эллипса к близкому и близко расположенному к нему другому эллипсу. Это существенно упростило бы задачу в отношении выбора референц-эллипса, но задача установления  $h_0$  сама по себе требует отнесения величин  $N$  к общему земному эллипсу и получения затем по ним величин  $h_0$ , а, следовательно, и возможной близости референц-эллипса к общему земному эллипсу. При установлении величин  $h_0$  следует потребовать, чтобы ошибки в размерах полуосей референц-эллипса были не более 100 м, а ошибочность в широтной и долготной его ориентировке не превышала 1''. Чтобы удовлетворить этим требованиям, референц-эллипс следует устанавливать так, как был установлен в 1943 г. ЦНИИГАиК эллипс для СССР, т. е. используя по существу все современные астрономо-геодезические и гравиметрические материалы, собранные во всех странах. Такой

солидный подход к установлению референц-эллипсоида выгодно, конечно, сказывается на следующей затем задаче — отделении относимых уже к референц-эллипсоиду величин  $h_0$  из величин  $N$ , отнесенных также к этому референц-эллипсоиду. Установление зависимости  $h_0$  от широты и долготы, обусловленной общими причинами неправильностей в строении Земли и, конечно, складывающейся (при взятой постановке задачи) с зависимостью от размеров и ориентировки референц-эллипсоида, требует научного обзора, использования и сопоставлений величин  $N$  на возможно большой территории, а также на тех же больших территориях — остаточных членов уравнений градусных измерений и аномалий силы тяжести.

Однако к вопросу можно подходить и существенно проще, если иметь в виду исследование отдельно больших платформ — Индийской, Русской, Сибирской. Из выполненных в каждой такой обширной области астрономо-геодезических и гравиметрических работ, также очень обширных, выводим средствами и методами геодезии эллипсоид, наилучше подходящий в пределах рассматриваемой территории к соответственным образом слаженному геоиду. Это слаживание геоида выполняется с успехом на основе выведенных предварительно в большом числе точек уклонений отвеса и аномалий силы тяжести: чисто местные влияния этими величинами могут быть установлены, учтены и сняты из свободных членов уравнений градусных измерений. Этот наилучше подходящий эллипсоид подойдет достаточно хорошо к такому слаженному геоиду, и именно в его размерах и ориентировке отразится влияние главнейшим образом только общих волн геоида. С известной небольшой погрешностью можно считать, что поверхность этого эллипсоида совпадает в пределах рассматриваемой территории с воображаемым геоидом, отступления которого от формы эллипсоидальной в этой области вызываются именно лишь теми общими причинами, которым соответствуют  $h_0$ , т. е. все  $h_0$  принимаются по введению такого эллипсоида просто равными нулю, а поверхность геоида, отражающую лишь волны общего значения, считают возможным заменить поверхностью эллипсоидальной.

С получением  $N - h_0$  следует вычислить аномалии  $\Delta g$  силы тяжести, обусловленные основными волнами подземной структуры, или соответствующие волнам геоида второго порядка. В Индии (см. фиг. 4) эти основные волны промежуточного (тахилитового) и подстилающего (дунилового) слоя достигают 1500 м, т. е. имеют максимальное повышение в 1500 м в одной полуволне и максимальные понижения до 1500 м во второй половине волны; соответствующие этим волнам аномалии силы тяжести достигают 36 миллигаллов. Понятно, что по сравнению с влиянием этих основных волн влияние структурных волн достаточно и даже совсем мало.

Для получения в виде аномалий  $\Delta g$  силы тяжести влияния этих основных волн мы должны использовать величины  $N - h_0$ , которые обозначим теперь через  $N'$ . Если обычно в гравиметрии по данным  $\Delta g$  на поверхности океана определяем высоты  $N$  геоида над нормальным сферионом по формуле Стокса, то здесь приходится решать обратную задачу. Решение ее в 1943 г. дал в своей диссертации аспирант В. А. Магницкий в таком виде:

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{R} N'_0 - \frac{\gamma}{2\pi} \int_s \frac{N' - N'_0}{r^3} d\sigma, \quad (A)$$

где  $N'_0$  — значение  $N'$  для пункта поверхности относимости, лежащего на одном радиусе-векторе с исходным пунктом, — расстояние от последнего до текущей точки сферы, которой заменяют поверхность Земли. Конечно, на вывод по этой формуле будут влиять, кроме основных складок, еще второстепенные волны  $ghk, klm, qrstf\dots$  (см. фиг. 4), но влияние их на вывод  $\Delta g$  будет очень невелико по двум причинам: во-первых, массы, соответствующие выступам второстепенных волн, ничтожны (в 40—20 раз менее) по сравнению с массой, даваемой основной волной; во-вторых, влиять будет фактически только одна полуволна, находящаяся непосредственно под пунктом, для которого вычисляется  $\Delta g$ .

Заметим, что при получении  $N$  из астрономического нивелирования мы относим используемые уклонения отвеса к уровню океана, а при получении тех же  $N$  методом астрономо-гравиметрического нивелирования используемые значения силы тяжести относим введением поправок Фая также к уровню моря. Поэтому полученные  $\Delta g$  вычислены по величинам, соответствующим конденсации масс, лежащих выше уровня океана, именно на этот уровень. Очевидно, в  $\Delta g$  остается еще не учтенное влияние топографического рельефа. Исследования показывают, что, так как на платформах имеет место региональная компенсация, учет влияния топографического рельефа следует выполнить, применяя так называемую модифицированную редукцию Буге, которая является изостатической редукцией по Хейфорду — Боуи для зон радиуса более 166 км, а в зоне этого радиуса вводится поправка только за топографию. Назовем сумму  $\Delta g$  (по  $A$ ) в этой модифицированной редукции Буге через  $\Delta g_c$ . Вычитая  $\Delta g_c$  из аномалии силы тяжести в свободном воздухе, получим структурные аномалии силы тяжести

$$\Delta g_c^{\circ} = \Delta g_F - \Delta g_c,$$

соответствующие удалению суммарного влияния основных волн глубинной складчатости нашей платформы и топографического рельефа и обусловленные геологическим строением верхнего слоя земной коры — от уровня моря до промежуточного слоя. Величины  $\Delta g_c$  следует назвать структурными редукциями.

Получение структурных аномалий  $\Delta g_c^{\circ}$  представляется делом очень важным. К отысканию их для Русской платформы подходил академик Архангельский, но без всякого учета глубинного ее строения, из-за чего и самая постановка задачи была неполна.

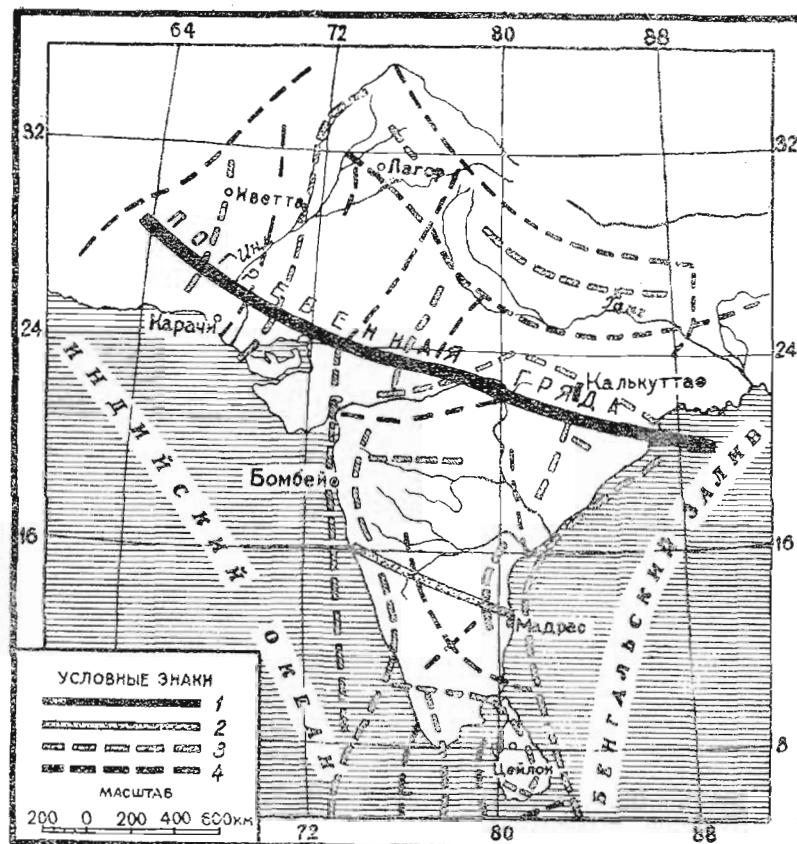
Заслуга английского геодезиста Гленни заключается, во-первых, в том, что он дал новый подход к понятию «структурные аномалии силы тяжести», во-вторых, в том, что он дал основы методики вывода по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным этих структурных аномалий. Приходится признать, что без исследования и учета влияния глубинных структурных волн мы не получим для исследуемых платформ аномалий, освещдающих геологию верхнего слоя земной коры на платформах.

Глубинная складчатость в Индии обусловлена тектоническими процессами, сопровождавшими образование и формирование геосинклинали Тетис. Глубинная складчатость Русской платформы обусловлена на юге образованием и формированием Тетиса, надвигами азиатского материка на востоке, а на северо-западе — каледонскую складчатостью. Поэтому выявление ее для Русской платформы более сложно, чем для Индии. Отметим, кстати, что работы Академии наук СССР в 1940 г. установили даже на глубинах в 10 км отсутствие горизонтальности поверхностей

разделов слоев земной коры, волнистость этих поверхностей. Фиг. 4 показывает, что так и должно быть: на основные волны глубинной складчатости накладываются остатки более древней складчатости и второстепенные волны, вызываемые неравномерностью во времени развития процесса складчатости и различием развивающихся при этом сопротивлений в разных частях платформы.

При исследовании основных волн глубинной складчатости следует умело и совместно пользоваться следующими материалами: картами аномалий силы тяжести в свободном воздухе, картами аномалий по Буге и, наконец, картами структурных аномалий. Карты должны быть изготовлены и сопоставлены друг с другом, но, очевидно, должно использовать еще профили и карты геологические и карты топографические.

Используя тот же материал и указания геологов, можно выявить оси второстепенных глубинных складок, т. е. оси волн  $ghk$ ,  $klm$ , ...,  $lmn$ ... (см. фиг. 4).



Фиг. 5

Прилагаемая карта (фиг. 5) дает изображение результатов работ Гленни по выявлению второстепенных подземных хребтов и прогибов в Индии.

Трудами советских геодезистов, и главным образом С. В. Евсеевым, установлено, что изостатической компенсации не имеется в Заволжье и

на Северном Кавказе, что Урал компенсирован частично, что некоторые части Кавказа компенсированы, а некоторые — некомпенсированы. Очевидно, здесь также придется иметь дело в пределах Русской платформы с глубинной складчатостью того же типа, какая была описана выше и дана на фиг. 4, и, конечно, с еще более сложной глубинной картиной на Кавказе и Урале.

Основная задача геодезии — это установление размеров, сжатия и положения в земном теле общего земного эллипсоида. Чисто геометрический подход к этой задаче будет неполным; решение ее, доставляя ряд данных, важных в исследованиях строения твердой оболочки Земли, само требует данных, освещивающих это строение. Это, между прочим, ведет к решению основной задачи геодезии путем постепенных приближений. Геодезисты прежде всего должны собрать обширные астрономо-геодезические и гравиметрические материалы, освещая последними и значительные территории на океанах. В дальнейшем обработка этих материалов, повидимому, придется вначале остановиться на выяснении и снятии местных влияний, которые иногда будут принимать масштаб областных влияний. Для этого следует использовать на суще профили геоида и высоты его над некоторыми референц-эллипсоидами, определенные астрономическим и астрономо-гравиметрическим нивелированием, а также гравиметрические уклонения отвеса, выводимые по аномалиям силы тяжести с помощью формулы Вейнинг Мейнеса. На море следует по наблюденным аномалиям силы тяжести вывести высоты геоида, по которым затем и судить о местных неправильностях геоида.

В дальнейшей работе возникают два вопроса: 1) правильное соединение в одно целое материалов астрономо-геодезических сетей разных стран, не связанных еще геодезически друг с другом (например СССР и США); 2) совместное использование материалов на океанах и континентах.

Первый вопрос, не имеющий пока теоретического разрешения, требует, чтобы в каждой стране, не связанной геодезически с другими, был хоть один астрономический пункт геодезической сети, вокруг которого гравиметрическое изучение территории было выполнено в радиусе не менее 3000 км. Это позволит определить для такого пункта гравиметрические слагающие уклонения отвеса  $\xi_0$  и  $\gamma_0$  и, далее, приравняв их к слагающим истинного уклонения отвеса в том же пункте, исключить эти последние из уравнений градусных измерений по выводу общего земного эллипсоида.

Второй вопрос, сводящий к методике совместного использования гравиметрических материалов, собранных на океанах, с гравиметрическими и астрономо-геодезическими материалами, собранными на континентах, еще не разрабатывался.

По намеченному пути мы подойдем к выводу общего земного эллипсоида, который следует считать первоначальным. Характерно, что, используя этот путь, мы устранили влияние местных неправильностей строения Земли, включая сюда и влияние горных сооружений, без применения изостазии.

Следующая работа должна состоять в вычислении остаточных уклонений отвеса и отступлений действительного геоида от выведенного общего эллипсоида, причем придется провести особые исследования по установлению общей высотной ориентировки для разных референц-эллипсоидов, к которым отнесены астрономо-геодезические сети стран,

геодезически еще между собой не связанных. Дальнейшая работа заключается в исследовании полученных остаточных уклонений отвеса и отступлений геоида от только что выведенного эллипсоида с целью установления общих волн геоида. В этой научной работе методика не установлена, и, по существу, геодезистам приходится отыскивать пути решения. Но нам кажется, что здесь нужно обратиться в той или иной степени к вопросам строения земной коры и к использованию геологии и геофизики.

На территориях, занятых платформами и щитами, следует применить методы Гленни и Магнитского для выяснения глубинной складчатости; определив влияние ее на направления отвесных линий и на величину ускорений  $g$  силы тяжести, сопоставим полученные результаты с гравиметрическими уклонениями отвесных линий и с полученными из наблюдений аномалиями силы тяжести. Эти сопоставления проконтролируют и, возможно, приведут к исправлениям и поправкам ранее полученных свободных членов уравнений градусных измерений.

В области горных сооружений, непременно присоединяя к ним и предгорные впадины, исследуем применение той или иной схемы изостатической компенсации, локальной или региональной, базируясь в этом вопросе на геологов, и сопоставляем полученные изостатические уклонения отвеса и редукции силы тяжести с гравиметрическими уклонениями отвеса и с аномалиями силы тяжести, полученными по Фаю, Буге и другим.

Эти сопоставления помогут выяснить нарушения изостатической компенсации на территориях, занятых горными сооружениями, будут полезными для геологов при выяснении некоторых обстоятельств образования этих сооружений, что, в свою очередь, облегчит геодезистам установление широких волн геоида.

Установление широких волн геоида желательно производить с выяснением этого вопроса и со стороны геофизической. Если, например, работы ЦНИИГАиК приводят в зоне северного полушария между параллелями  $60^{\circ}$  и  $30^{\circ}$  к долготным волнам геоида, отвечающим трехосности земного эллипсоида, то желательно осветить физико-механические условия возможности перехода к фигуре трехосного эллипсоида, не отвечающей, как известно, условиям равновесия Земли.

В результате этих сложных изысканий и исследований мы должны составить выражения зависимости от координат (широты и долготы) текущего пункта поверхности земного эллипсоида тех влияний на уклонения отвесных линий, на высоты геоида и аномалии силы тяжести, которые обусловлены наличием общих волн геоида. Эти выражения, вероятно, окажутся различными для разных полушарий, разных континентов в одном полушарии. Мы дополняем такими выражениями уравнения градусных измерений, вводя, следовательно, в эти уравнения добавочные параметры, входящие в выражения действия общих волн геоида. После этого следует новое установление параметров общего земного эллипсоида. К задаче астрономо-геодезии, конечно, относится такое накопление астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, которое обеспечило бы надежность вывода и учета влияния общих волн геоида.

Без надлежащего выявления и учета влияния общих волн геоида не приходится, по нашему мнению, говорить о надежности и научно обоснованном выводе общего земного эллипсоида. Этот вывод прежде всего, конечно, нужен при обработке астрономо-геодезических материа-

лов, поскольку при современном охвате астрономо-геодезическими работами целых континентов и даже нескольких континентов, геодезически связанных, к выбору поверхности относимости приходится предъявлять при обработке астрономо-геодезических материалов довольно строгие требования. Но, конечно, эти общие волны геоида отражают физику земного шара в прошлом и настоящем, они являются результатом мощных процессов, протекавших на значительных глубинах внутри Земли, и процессов в верхних ее слоях, обусловленных влиянием Солнца и Луны, причем эти влияния в некоторые периоды могли достигать совсем иных размеров, чем в настоящее время. Очевидно, обнаружение геодезией общих волн геоида крайне существенно и важно для геофизики и должно повести к ряду интересных геофизических исследований. Мы уже видели ранее, что учет основных волн геоида важен и в задаче исследования глубинной складчатости на платформах.

Гипотеза о движении материков лежит в основе исследований Вейнинг Мейнеса и Гленни, приведших к столь плодотворным результатам. Очевидно, на астрономо-геодезию падает в существенной части освещение этой гипотезы.

Изучение вертикальных движений твердой оболочки Земли также входит в круг задач физической геодезии. Система так называемых вековых реперов, заложенных на больших территориях, согласно указаниям геологов, и выполнение повторных нивелировок высокой точности, связывающих эти реперы между собой и с реперами-мареографами, установленными на берегах океанов и морей, приводят к выяснению этих вековых движений земной коры.

Повторные исполнения триангуляций и нивелировок в районах землетрясений приводят к точной картине очень сложных, а вернее сложнейших, вертикальных и горизонтальных движений земной коры при землетрясениях; чрезвычайно интересные и важные результаты уже получены японскими геодезистами по островам Японии. Но если надлежащее собирание геодезических материалов для изучения землетрясений требует от геодезиста известных общих небольших представлений в области сейсмологии, участие его в интерпретации выясненных геодезическими материалами смещений почвы будет всегда очень ограниченным.

Мы остановились лишь на некоторых задачах физической геодезии, входящей в качестве отдельного в астрономо-геодезию. Как видно, геодезисты за последнее время подошли к новым плодотворным методам исследования строения верхних слоев земной коры; связь физической геодезии с геофизикой и геологией заметно конкретизируется. Жизнь, очевидно, требует от астрономо-геодезиста, устремляющегося в работу по очерченным в настоящей статье задачам, соответственной подготовки в области геофизики и геологии. Несомненна важность задач физической геодезии и в научном и в практическом отношении. Но в соответствии с этим, во-первых, важны связь и контакт астрономо-геодезиста в его научной работе с геофизиками и геологами, а с другой, важно отражение в планах государственных астрономо-геодезических и гравиметрических работ запросов физической геодезии как в смысле обслуживания триангуляциями, нивелировками, астрономическими определениями и гравиметрическими станциями определенных районов, так и в смысле проведения полевых геодезических, гравиметрических и астрономических работ по специально установленным программам.

## Часть II

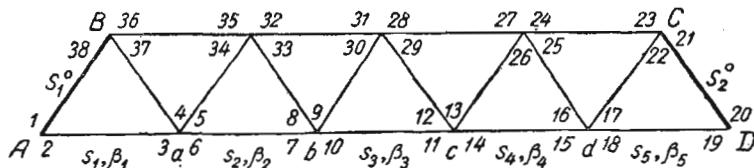
# РАБОТЫ ПО ВОПРОСАМ УРАВНИВАНИЯ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

## Х. МЕТОДЫ УРАВНИВАНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПЕРВОКЛАССНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ПРЕДЛАГАЕМЫЕ АВТОРОМ К ВВЕДЕНИЮ В СССР

### § 1. Уравнивание и вычисление отдельного звена первоклассной триангуляции

Представим себе, что триангуляция, как это и делается в СССР, образуется из простых цепей треугольников. Звеном некоторого первоклассного ряда мы называем часть его, заключенную между двумя выходными сторонами, определенными каждой из своей базисной сети.

Пусть на фиг. 1 изображается некоторое звено между выходными сторонами  $AB = S^{\circ}_1$  и  $DC = S^{\circ}_2$ . Один из концов каждой выходной



Фиг. 1

стороны непременно должен быть пунктом Лапласа; пусть таковыми в нашем случае являются  $A$  и  $D$ . Следовательно, в  $A$  и  $D$  мы располагаем такими геодезически и астрономически определенными элементами:

в пункте  $A$ :

|   |               |
|---|---------------|
| геодезическая широта . . . . .          | $B_1$         |
| астрономическая долгота . . . . .       | $\lambda_1$   |
| астрономический азимут на $B$ . . . . . | $\alpha_{AB}$ |
| геодезический " . . . . .               | $A_{AB}$      |
| геодезическая долгота . . . . .         | $L_1$         |

в пункте  $D$ :

|   |               |
|---|---------------|
| астрономическая широта . . . . .              | $\varphi_2$   |
| " долгота . . . . .                           | $\lambda_2$   |
| астрономический азимут в $D$ на $C$ . . . . . | $\alpha_{DC}$ |

Наблюденные направления на пунктах звена обозначим, как указано на фиг. 1.

Условные уравнения в нашем звене представляются условиями фигур, условием базисов и условием азимутов. Условия фигур напишем в таком виде:

$$\left. \begin{array}{l} (2)-(1)+(4)-(3)+(38)-(37)+v_1=0 \\ (5)-(4)+(35)-(34)+(37)-(36)+v_2=0 \\ (18)-(17)+(20)-(19)+(22)-(21)+v_3=0 \end{array} \right\}. \quad (a)$$

В уравнениях (a) величина  $v$  равна сумме измеренных углов треугольника минус  $180^\circ + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — сферический избыток треугольника.

Для составления условия базисов мы приводим измеренные углы к плоским углам, вычитая из измеренного угла треть сферического избытка  $\epsilon$  соответственного треугольника, однако вовсе не делаем уравнивания углов по отдельным треугольникам.

Следовательно, мы получаем углы:

$$\left| \begin{array}{c} 2-1-\frac{\epsilon_1}{3} \\ 4-3-\frac{\epsilon_1}{3} \\ 38-37-\frac{\epsilon_1}{3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 5-4-\frac{\epsilon_2}{3} \\ 35-34-\frac{\epsilon_2}{3} \\ 37-36-\frac{\epsilon_2}{3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 6-5-\frac{\epsilon_3}{3} \\ 8-7-\frac{\epsilon_3}{3} \\ 34-33-\frac{\epsilon_3}{3} \end{array} \right|$$

и так далее.

С этими углами составляем базисное условие и вычисляем длины  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  ходовой линии  $AD$ .

Очевидно условие базисов напишется в таком виде:

$$\begin{aligned} & \Delta_{2,1}[(2)-(1)] - \Delta_{3,4}[(4)-(3)] + \Delta_{37,36}[(37)-(36)] - \Delta_{34,35}[(35)-(34)] + \\ & + \Delta_{6,5}[(6)-(5)] - \Delta_{8,7}[(8)-(7)] + \Delta_{33,39}[(33)-(32)] - \Delta_{31,30}[(31)-(30)] + \\ & + \dots + \Delta_{18,17}[(18)-(17)] - \Delta_{20,19}[(20)-(19)] + \\ & + \lg \frac{\sin[2-1-\frac{\epsilon_1}{3}]}{\sin[4-3-\frac{\epsilon_1}{3}]} \cdot \frac{\sin[37-36-\frac{\epsilon_2}{3}]}{\sin[35-34-\frac{\epsilon_2}{3}]} \cdots \frac{\sin[18-17-\frac{\epsilon_3}{3}]}{\sin[20-19-\frac{\epsilon_3}{3}]} + \\ & + \lg S_1^\circ - \lg S_2^\circ = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

В уравнении (b) знаком  $\Delta$  обозначено изменение логарифма синуса угла при изменении угла на одну секунду; нижний значок при  $\Delta$  образован номерами направлений, образующих угол.

Стороны  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$  получаются так:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{S_1^\circ \sin[38-37-\frac{\epsilon_1}{3}]}{\sin[4-3-\frac{\epsilon_1}{3}]}; \\ s_2 &= \frac{S_1^\circ \sin[2-1-\frac{\epsilon_1}{3}]}{\sin[4-3-\frac{\epsilon_1}{3}]} \cdot \frac{\sin[37-36-\frac{\epsilon_2}{3}]}{\sin[35-34-\frac{\epsilon_2}{3}]} \cdot \frac{\sin[34-33-\frac{\epsilon_3}{3}]}{\sin[8-7-\frac{\epsilon_3}{3}]} \end{aligned}$$

и так далее.

Понятно, что вычисление  $s_1, s_2, \dots, s_5$  ведется, используя получающиеся при составлении базисного условия логарифмы синусов, входящих в свободный член базисного уравнения.

Отметим, что величины  $s$  получаются указанным путем по измеренным направлениям, которые никаким поправкам не подвергались.

Следующая стадия работы заключается в составлении азимутального условия; это дело начинается с вычисления геодезических координат для вершин ходовой линии  $AD$ .

Применяя формулы Шрейбера и отправляясь от  $B_1, L_1$  и азимута направления 2-го:

$$\beta = A_{AB} + 2 - 1,$$

вычисляем геодезические координаты пунктов  $a, b, c, d$  и  $D$  ходовой линии и азимуты направлений  $Aa, aA, ab, ba, bc, cb, cd, dc, dD, DC$ , причем используем расстояния  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  и углы:

|                           |           |
|---------------------------|-----------|
| при $a \dots \dots \dots$ | $6 - 3$   |
| „ $b \dots \dots \dots$   | $10 - 7$  |
| „ $c \dots \dots \dots$   | $14 - 11$ |
| „ $d \dots \dots \dots$   | $18 - 15$ |
| „ $D \dots \dots \dots$   | $20 - 19$ |

В результате получаем:

геодезическую широту  $B_2$  пункта  $D$ ,

геодезическую долготу  $L_2$  пункта  $D$ ,

геодезический азимут  $A_{DC}$  с  $D$  на  $C$ .

Назовем прямые азимуты сторон ходовой линии через:  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ ; обратные азимуты тех же линий — через  $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4, \beta'_5$ .

Мы имеем:

$$\beta_1 = A_{AB} + 2 + 1;$$

$$\beta'_1 = 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + \delta_1;$$

$$\beta_2 = 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1;$$

$$\beta'_2 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ;$$

$$\beta_3 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ;$$

$$\beta'_3 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 180^\circ;$$

$$\beta_4 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3;$$

$$\beta'_4 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ;$$

$$\beta_5 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 +$$

$$+ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ;$$

$$\beta'_5 = A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 +$$

$$+ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5;$$

$$A_{DC} = A_{AB} + 2 + 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 +$$

$$+ 20 - 19 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5. \quad (c)$$

Приближенно:

$$\delta = (2)s \sin \beta \operatorname{tg} \varphi. \quad (d)$$

Поправка  $\Delta_A$  геодезического азимута  $A_{DC}$  будет равна:

$$\Delta_A = (2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + \\ + (18) - (15) + (20) - (19) + \sum_1^5 d\delta,$$

понимая под  $d\delta$ :

$$d\delta = (2) \sin \beta \operatorname{tg} \varphi \cdot ds + (2)s \cdot \sin \beta \frac{d\varphi'' \cdot \sin 1''}{\cos^2 \varphi} + (2)s \cdot \cos \beta \operatorname{tg} \varphi \sin 1'' d\beta.$$

Пренебрегая поправками  $\alpha_{AB}$ ,  $\alpha_{CD}$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , мы напишем условие Лапласа на точке  $D$  в таком виде:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2 - \Delta L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + \Delta_A. \quad (e)$$

В уравнении (e) под  $\Delta L_2$  понимается поправка геодезической длины, обусловленная ошибками измеренных направлений в нашем звене. Пренебрегая малыми величинами второго порядка, мы пишем:

$$L_2 - L_1 = \sum_1^5 (2)s \cdot \sin \beta \sec \varphi.$$

Отсюда:

$$\Delta L_2 = \sum_1^5 \left\{ (2) \sin \beta \sec \varphi \cdot ds + (2)s \cdot \sin \beta \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + (2)s \cos \beta \sec \varphi \cdot d\beta \cdot \sin 1'' \right\}.$$

Нетрудно теперь видеть, что:

$$\begin{aligned} \Delta L_2 \sin \varphi_2 - \Sigma d\delta = & - \Sigma (2)s \cdot \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi \cdot \sin 1'' + \\ & + \Sigma (2) \sin \beta \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi) ds + \Sigma (2)s \cdot \cos \beta \cdot \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \\ & - \sin \varphi) d\beta \sin 1''. \end{aligned} \quad (f)$$

При длине звена в 200 км наибольшее значение второго члена правой части уравнения (f) будет:

$$\frac{\Sigma ds}{6400 \sin 1''} \frac{140}{6400} < \frac{1''}{500}.$$

При той же длине звена и при  $s = 40$  км наибольшее значение члена:

$$- \Sigma (2)s \cdot \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi'' \cdot \sin 1'' < \frac{1}{1600}.$$

Поэтому мы можем смело в азимутальном условии положить:

$$\Delta L_2 \sin \varphi_2 = \Sigma d\delta.$$

На этом основании азимутальное условие напишется так:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + (2) - (1) + \\ + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19)$$

или окончательно:

$$(2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19) - \\ - [\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 - A_{DC}] + (\alpha_{AB} - A_{AB}) = (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \quad (g)$$

Решая уравнения (а), (б) и (г) вместе по способу наименьших квадратов, находим поправки наблюденных в нашем звене направлений.

Уравнивая направления, мы конечно получаем решение наиболее вероятное; кроме того, очевидно, что при изложенном способе уравнивания невязки базисного и азимутального условий получаются по непосредственно наблюденным величинам, неискаженными никакими произвольными поправками, как это имеет место в других методах уравнивания; поэтому невязки базисного и азимутального условий в нашем методе уравнивания являются действительно отражающими накопление влияния погрешностей наблюдений на пунктах звена. Самое решение условий (а), (б) и (г) не представляет труда.

Мы могли бы в азимутальное условие ввести еще поправки астрономически определенных долгот и азимутов, но понятно, что эти поправки определились бы ненадежно. Они определяются уже впоследствии из общего уравнивания астрономо-геодезической сети.

После описанного уравнивания наблюденных направлений и получения вероятнейших значений направлений, с последними должно образовать треугольники звена и вычислить вновь стороны этих треугольников. Затем, по ходовой линии  $AabcDB$  нужно будет вновь, исходя от  $B_1$ ,  $L_1$  и  $A_{AB}$ , вычислить геодезические координаты и азимуты по ходовой линии.

Допустим, что после этого вычисления мы получим в точке  $D$ :

- геодезическую широту  $B_2'$ ,
- геодезическую долготу  $L_2'$ ,
- геодезический азимут  $A'_{DC}$  с  $D$  на  $C$ .

Теперь решаем геодезическую обратную задачу по координатам:

$$\begin{aligned} &\text{в } A \dots B_1 \text{ и } L_1, \\ &\text{в } D \dots B_2' \text{ и } L_2', \end{aligned}$$

и находим из этого решения:

- длину  $S'$  геодезической линии  $AD$ ;
- прямой геодезический азимут с  $A$  на  $D$ , равный  $A'_{AD}$ ;
- обратный геодезический азимут с  $D$  на  $A$ , равный  $A'_{DA}$ .

Отсюда мы получаем углы  $\beta_A$  и  $\beta_D$  при точках  $A$  и  $D$  (фиг. 2) между выходными сторонами звена и геодезической линией  $AD$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_A &= A'_{AD} - A_{AB} \\ \beta_D &= A'_{DA} - A'_{DC} \end{aligned} \right\}. \quad (h)$$



Фиг. 2

Наконец, для геодезической линии  $AD$  получаем астрономические ее азимуты:

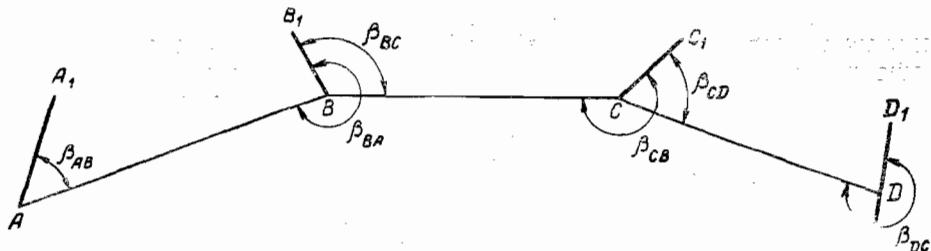
$$\left. \begin{aligned} \alpha_{AD} &= \alpha_{AB} + \beta_A \\ \alpha_{DA} &= \alpha_{DC} + \beta_D = A'_{DA} + (\alpha_{DC} - A'_{DC}) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Эти азимуты  $\alpha_{AD}$  и  $\alpha_{DA}$  не являются непосредственно наблюденными, но во всяком случае они должны быть названы астрономическими.

Заметим для будущего, что разность:

$$A'_{DA} - 180^\circ - A'_{AD}$$

отвечает разности азимутов (геодезических) на принятом эллипсоиде для геодезической линии длиною  $s'$  при начальном ее азимуте  $\alpha_{AD}$  и в широте  $B_1$ . Допустим, что мы имеем ряд звеньев, примыкающих друг к другу (фиг. 3): выходные стороны этих звеньев пусть будут  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \dots$  Каждое звено мы уравниваем в отдельности так, как описано выше, и выводим в результате: длины  $s'_{AB}, s'_{BC}, s'_{CD} \dots$  геодезических линий  $AB, BC, CD, \dots$ , соединяющих пункты Лапласа  $A, B, C, D, \dots$



Фиг. 3

$D, \dots$ ; углы  $\beta_{AB}, \beta_{BA}, \beta_{BC}, \beta_{CB}, \beta_{CD}, \dots$  Тогда очевидно углы между геодезическими линиями получаются так:

$$\begin{aligned} \text{при } B \dots \beta_{BA} - \beta_{BC} &= \alpha_{BA} - \alpha_{BC}; \\ \text{при } C \dots \beta_{CB} - \beta_{CD} &= \alpha_{CB} - \alpha_{CD}; \\ \text{при } D \dots \beta_{DC} - \beta_{DE} &= \alpha_{DC} - \alpha_{DE}, \end{aligned}$$

причем по способу получения этих углов ясно, что значения их не иска-  
жены ошибками определения астрономических азимутов выходных сто-  
рон\* иискажениями этих астрономических азимутов влиянием уклоне-  
ний отвесных линий.

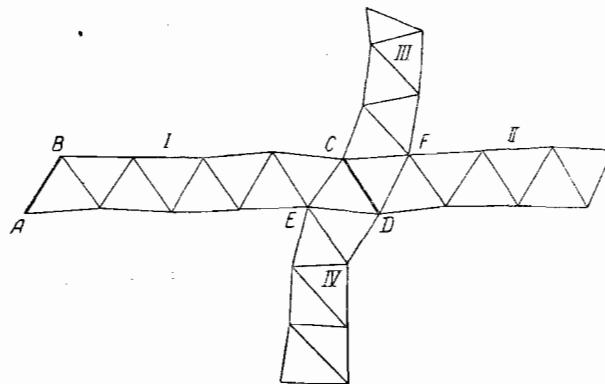
Таким образом, в результате работы по уравниванию и вычислению отдельных звеньев триангуляции мы получаем вероятнейшие значения длин геодезических линий, соединяющих последовательно смежные пункты Лапласа, астрономические азимуты этих линий и углы между ними. В одном из последующих параграфов мы остановимся на оценке точности этих длин и азимутов.

Полученные элементы  $s'$  и  $\alpha$  и углы между геодезическими линиями подлежат далее исправлениям за условия смыкания полигонов в триангуляции и за условия Лапласа, в которые должно ввести еще в качестве неизвестных поправки астрономических азимутов и астрономических долгот. Хотя условия Лапласа мы уже вводили при уравнивании звеньев, но в таком упрощенном виде, который не позволял вывести поправки астрономических азимутов и долгот, вследствие чего вопрос ориентиро-  
вания звеньев на эллипсоиде остался открытым.

Вводя условия Лапласа в уравнение (e), мы по существу лишь выравнивали разность геодезических азимутов первой и второй выходной стороны звена, но геодезическая ориентировка его осталась нерешенной, потому что мы не знаем, в какой степени азимут  $A_{AB}$  под-  
ходит к окончательному, в будущем геодезическому, на принятом для вычисления всей триангуляции эллипсоиде. Этот вопрос решается лишь общим уравниванием астрономо-геодезической сети с принятием при этом и условий смыкания полигонов в ней, и так называемых урав-

\* Это справедливо постольку, поскольку ошибки азимутов не повлияли на результат уравнивания углов треугольников.

нений Лапласа, написанных в точной и полной форме. Имея в виду, что при уравнивании общей астрономической сети мы должны непременно ввести уравнения Лапласа, которые по существу и являются азимутальными условиями, можно было бы при описанном уравнивании отдельного звена ограничиться принятием в расчет только условий фигур и условия базисного. Так именно и поступают в Германии, выигрывая очевидно в некотором сокращении вследствие этого вычислительной работы при обработке каждого отдельного звена. Но мне представляется очень важным получить с возможною полной надежностью до общего уравнивания сети полигонов триангуляции те их элементы, которые в этом уравнивании рассматриваются в качестве как бы полученных непосредственными наблюдениями; такими элементами являются длины  $s'$  геодезических линий, углы между ними и их астрономические азимуты; на выводе этих элементов пренебрежение азимутальными условиями при обработке отдельных звеньев может заметно сказываться; кроме того, до приступа к общему уравниванию необходимо убедиться, как соблюдаются азимутальные условия по отдельным звеньям; запоздалое обнаружение недопустимости значения свободного члена в одном из уравнений Лапласа остановит всю работу по общему уравниванию государственной триангуляции. Обратим теперь еще внимание на



Фиг. 4

один из недочетов описанного уравнивания, который легко усваивается по фиг. 4: если выходная сторона  $CD$  является общею для четырех (или трех) звеньев  $I$ ,  $II$ ,  $III$ ,  $IV$ , то треугольники  $ECD$  и  $CDF$  будут либо входить в уравнивание, описанное выше, либо приниматься жесткими, не подлежащими уже изменениям. Если сперва уравнивать звенья  $I$  и  $II$ , а затем  $III$  и  $IV$ , то тогда при уравнивании двух последних звеньев за их выходные стороны нужно будет взять стороны  $CF$  и  $ED$ , полученные из уравнивания звеньев  $I$  и  $II$ . Если сперва будут уравниваться звенья  $III$  и  $IV$ , то при уравнивании звеньев  $I$  и  $II$  за выходные стороны придется принять  $EC$  и  $DF$ . Получается произвол, который, правда, на результат будет влиять мало заметно.

Следует собственно фигуру  $CFDE$  выделить—наблюдать в ней углы треугольников с большею и особенною тщательностью, и, кроме того, следует все четыре пункта  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  определить как пункты Лапласа.

К сожалению, производственных возможностей в СССР для этого пока не имеется.

## § 2. Метод Гельмерта уравнивания «астрономо-геодезической» сети

Допустим, что на эллипсоиде с большой полуосью  $a$  и сжатием  $c$ , установленными для данного государства из обработки астрономо-геодезических результатов, мы определили приближенные значения геодезических координат Лапласовых пунктов триангуляции\*. Приближенными эти координаты называются хотя бы потому, что до вывска их мы не делаем уравнивания триангуляционных полигонов и произвольно выпускаем в этих полигонах избыточные передачи.

Для пункта с номером  $n$  будем называть:

указанные приближенные координаты — через  $B_n^{\circ}$  и  $L_n^{\circ}$ ;

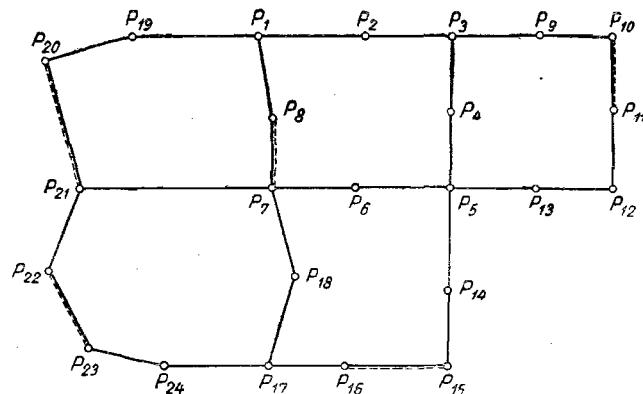
поправки их, определяемые из предстоящего уравнивания, — через  $dB_n$  и  $dL_n$ ;

астрономические широту и долготу — через  $\varphi_n$  и  $\lambda_n$ ;

погрешности астрономических координат, обусловленные погрешностями

астрономических наблюдений, — через  $d\varphi_n$  и  $d\lambda_n$ .

По приближенным координатам точно, с полной строгостью вычислим геодезические азимуты  $A$  и длины  $s$  геодезических линий, соединяющих смежные пункты Лапласа; следовательно (фиг. 5) мы вычислим



Фиг. 5

прямые и обратные азимуты и длины геодезических линий  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_4P_5$ ,  $P_5P_6$ , ...,  $P_3P_9$ ,  $P_9P_{10}$ , ... Эти азимуты и длины будут строго соответствовать принятым значениям геодезических приближенных координат  $B^{\circ}$  и  $L^{\circ}$ . Будем называть для геодезической линии между пунктами  $P_{n-1}$  и  $P_n$ :

астрономический азимут с  $P_{n-1}$  на  $P_n$  — через  $\alpha_{n-1,n}$ ;

погрешность его, обусловленную погрешностями наблюдений, — через  $\delta\alpha_{n-1,n}$ ;

геодезический азимут\*\* с  $P_{n-1}$  на  $P_n$  через  $A^{\circ}_{n-1,n}$ ;

поправку его через  $dA_{n-1,n}$ ;

длину геодезической линии между  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , вычисленную по приближен-

ным координатам этих пунктов, — через  $s^{\circ}_{n-1,n}$ ;

поправку этой длины — через  $ds_{n-1,n}$ ;

длину той же геодезической линии, но выведенную из звенового урав-

нения тригонометрических рядов, — через  $s'_{n-1,n}$ ;

погрешность последней длины — через  $\delta s_{n-1,n}$ .

\* Лапласовы пункты предполагаются расположеными друг от друга через 80—100 км по целям триангуляции I класса.

\*\* Вычисленный по координатам  $B^{\circ}_{n-1}$ ,  $L^{\circ}_{n-1}$  и  $B^{\circ}_n$ ,  $L^{\circ}_n$ .

Окончательные значения геодезических координат и азимутов, которые получаются после уравнивания сети, обозначаем:

широту  $n$ -й точки — через . . . . .  $B_n$ ;  
длготу  $n$ -й точки — через . . . . .  $L_n$ ;  
азимут с  $(n-1)$ -й на  $n$ -ю точку — через . . . . .  $A_{n-1,n}$ .

Очевидно, что эти окончательные геодезические координаты и азимуты будут отличаться от соответственных астрономических элементов, исправленных их поправками  $\delta\varphi$ ,  $d\lambda$  и  $\delta\alpha$ , только вследствие уклонений отвесных линий в  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  от нормалей к принятому при нашем уравнивании эллипсоиду. Слагающие этого уклонения отвесной линии в  $P_n$  назовем через  $\xi_n$  и  $\eta_n$ .

На основании сказанного мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \xi_1 &= B_1^\circ + dB_1 + \xi_1 & = \varphi_1 + \delta\varphi_1 \\ B_2 + \xi_2 &= B_2^\circ + dB_2 + \xi_2 & = \varphi_2 + \delta\varphi_2 \\ L_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= L_1^\circ + dL_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 = \lambda_1 + \delta\lambda_1 \\ L_2 + \eta_2 \sec \varphi_2 &= L_2^\circ + dL_2 + \eta_2 \sec \varphi_2 = \lambda_2 + \delta\lambda_2 \\ A_{1,2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= A_{1,2}^\circ + dA_{1,2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2} \\ A_{2,1} + \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 &= A_{2,1}^\circ + dA_{2,1} + \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,1} \\ s_{1,2}^\circ + ds_{1,2} &= s_{1,2}^\circ + \delta s_{1,2} \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Для линии между пунктами  $P_{n-1}$  и  $P_n$  напишем теперь известные формулы дифференциальных коэффициентов:

$$p_1^{n-1,n} = \frac{\partial B_n}{\partial B_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{M_n} \cos l_{n-1,n} = L_n^o - L_{n-1}^o;$$

$M$  — радиус кривизны меридианного сечения;

$N$  — радиус кривизны сечения первого вертикала;

$$\begin{aligned}
 q_1^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial B_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{N_n} \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n \\
 r_1^{n-1,n} &= \frac{\partial A^{\circ}_{n,n-1}}{\partial B_{n-1}} = \frac{\sin l_{n-1,n}}{\cos \varphi_n} \\
 p_3^{n-1,n} &= -\frac{\cos A^{\circ}_{n,n-1}}{M_n \sin 1''} = \frac{\partial B_n}{\partial s_{n-1,n}} \\
 q_3^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial s_{n-1,n}} = -\frac{\sin A^{\circ}_{n,n-1}}{N_n \sin 1'' \cos \varphi_n} \\
 r_3^{n-1,n} &= \frac{\partial A^{\circ}_{n,n-1}}{\partial s_{n-1,n}} = -\frac{\sin A^{\circ}_{n,n-1}}{N_n \sin 1''} \operatorname{tg} \varphi_n \\
 p_4^{n-1,n} &= \frac{\partial B_n}{\partial A_{n-1,n}} = \frac{s^{\circ}_{n-1,n}}{M_n} \sin A^{\circ}_{n,n-1} \\
 q_4^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial A_{n-1,n}} = -\frac{s^{\circ}_{n-1,n}}{N_n} \frac{\cos A^{\circ}_{n,n-1}}{\cos \varphi_n} \\
 r_4 &= \frac{\partial A^{\circ}_{n,n-1}}{\partial A^{\circ}_{n-1,n}} = \cos \frac{s_{n-1,n}}{R} - \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^{\circ}_{n,n-1} \operatorname{tg} \varphi_n
 \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_1^{1,2} dB_1 + p_3^{1,2} ds_{1,2} + p_4^{1,2} dA_{1,2}; \\ dL_2 &= dL_1 + q_1^{1,2} dB_1 + q_3^{1,2} ds_{1,2} + q_4^{1,2} dA_{1,2}; \\ dA_{2,1} &= + r_1^{1,2} dB_1 + r_3^{1,2} ds_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из уравнений (1), понятно, следует:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \varphi_2 - B_2^\circ - \xi_2 &+ \delta\varphi_2; \\ dB_1 &= \varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1 &+ \delta\varphi_1; \\ dL_2 &= \lambda_2 - L_2^\circ - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2; \\ dL_1 &= \lambda_1 - L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1 + \delta\lambda_1; \\ dA_{2,1}^\circ &= \alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2,1}; \\ dA_{1,2}^\circ &= \alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя уравнения (4) в уравнения (3), напишем:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - B_2^\circ - \xi_2 + \delta\varphi_2 &= p_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1 + \delta\varphi_1) + p_3^{1,2} ds_{1,2} + \\ &+ p_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}); \\ \lambda_2 - L_2^\circ - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 &= (\lambda_1 - L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1 + \delta\lambda_1) + q_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ - \\ &- \xi_1 + \delta\varphi_1) + q_3^{1,2} ds_{1,2} + q_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}); \\ \alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2,1} &= r_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1 + \delta\varphi_1) + r_3^{1,2} ds_{1,2} + \\ &+ r_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}). \end{aligned}$$

От последних уравнений переходим к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \varphi_2 - B_2^\circ - p_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ) - p_3^{1,2}(s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) - p_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) + \\ &+ p_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\varphi_2 - p_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{1,2} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2}; \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2^\circ - L_1^\circ) - q_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ) - q_3^{1,2}(s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) - \\ &- q_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) + q_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\lambda_2 - q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + \\ &+ (1 + q_4^{1,2} \sin \varphi_1) \eta_1 \sec \varphi_1 - q_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2}; \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &- r_3^{1,2}(s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_2 + \\ &+ r_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) \operatorname{cosec} \varphi_2 + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - r_4^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{1,2} - \\ &- r_3^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (5) подлежат еще небольшому преобразованию. Во-первых, введем новые обозначения:

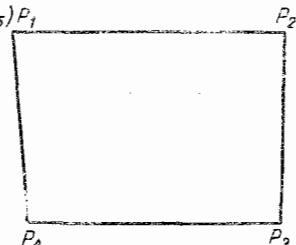
$$\left. \begin{aligned} \varphi_n - B_n^\circ - p_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}^\circ) - p_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}^\circ) - \\ - p_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^\circ) &= \omega\varphi^{n-1,n}; \\ (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L_n^\circ - L_{n-1}^\circ) - q_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}^\circ) - \\ - q_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}^\circ) - q_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^\circ) &= \omega\lambda^{n-1,n}; \\ \operatorname{cosec} \varphi_n [(\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^\circ) - r_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}^\circ) - \\ - r_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}^\circ) - r_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^\circ)] &= \omega\alpha^{n-1,n}; \\ \eta_n \sec \varphi_n &= \nu_n; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 P_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{M_n} \cos l_{n-1,n} = -p_1^{n-1,n} \\
 P_3^{n-1,n} &= \frac{\cos A^{\circ}_{n,n-1}}{M_n \sin l_n} = -p_3^{n-1,n} \\
 P_2^{n-1,n} &= P_4^{n-1,n} \sin \varphi_{n-1}; \quad P_4^{n-1,n} = -\frac{s_{n-1,n}}{N_n} \sin A^{\circ}_{n,n-1} = -p_4^{n-1,n} \\
 Q_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{N_n} \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n = -q_1^{n-1,n} \\
 Q_3^{n-1,n} &= \frac{\sin A^{\circ}_{n,n-1}}{N_n \sin l_n \cos \varphi_n} = -q_3^{n-1,n} \\
 Q_2^{n-1,n} &= 1 - \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^{\circ}_{n,n-1} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\
 Q_4^{n-1,n} &= \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \frac{\cos A^{\circ}_{n,n-1}}{\cos \varphi_n} = -q_4^{n-1,n} \\
 R_1^{n-1,n} &= -\frac{\sin l_{n-1,n}}{\sin \varphi_n \cos \varphi_n} = -r_1^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\
 R_3^{n-1,n} &= Q_3^{n-1,n} = -r_3^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\
 R_2^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n \sin \varphi_{n-1} + \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^{\circ}_{n,n-1} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\
 R_4^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n + \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^{\circ}_{n,n-1} \sec \varphi_n = \\
 &= R_2^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_{n-1} = r_4^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n
 \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда уравнения (5) перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_2 &= \omega_4^{1,2} + \delta \varphi_2 + P_1^{1,2} (\delta \varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1,2} \gamma_1 + P_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2} \\
 \gamma_2 &= \omega_2^{1,2} + \delta \lambda_2 - \delta \lambda_1 + Q_1^{1,2} (\delta \varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1,2} \gamma_1 + Q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + Q_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2} \\
 \gamma_2 &= \omega_2^{1,2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta \alpha_{2,1} + R_1^{1,2} (\delta \varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1,2} \gamma_1 + R_3^{1,2} \delta s_{1,2} + R_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2}
 \end{aligned} \right\}. \tag{8}$$

Уравнения (8) написаны для линии  $P_1P_2$ ; конечно, они будут иметь такой же вид для линии  $P_{n-1}P_n$ , лишь с заменой верхних значков 1.2 соответственно на  $n-1,n$ . Представим себе, что имеем полигон  $P_1P_2P_3P_4P_1$  (фиг. 6), в котором  $P_1, P_2, P_3, P_4$  суть пункты Лапласа. Делая обход полигона по ходу часовой стрелки, мы будем считать точку  $P_1$  одновременно точкой  $P_5$ . Напишем уравнения (8) для  $\xi$  по линиям этого полигона:



Фиг. 6.

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_2 &= \omega_4^{1,2} + \delta \varphi_2 + P_1^{1,2} (\delta \varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1,2} \gamma_1 + P_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2}; (a) \\
 \xi_3 &= \omega_2^{2,3} + \delta \varphi_3 + P_1^{2,3} (\delta \varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2,3} \gamma_2 + P_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{2,3} \delta \alpha_{2,3}; (b) \\
 \xi_4 &= \omega_3^{3,4} + \delta \varphi_4 + P_1^{3,4} (\delta \varphi_3 - \xi_3) - P_2^{3,4} \gamma_3 + P_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{3,4} \delta \alpha_{3,4}; (c) \\
 \xi_1 = \xi_5 &= \omega_1^{4,1} + \delta \varphi_1 + P_1^{4,1} (\delta \varphi_4 - \xi_4) - P_2^{4,1} \gamma_4 + P_3^{4,1} \delta s_{4,1} + P_4^{4,1} \delta \alpha_{4,1}; (d)
 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Напишем уравнения для  $\eta_i$ , выводимых из сопоставления долгот, по линиям нашего полигона, имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \omega_\lambda^{1,2} + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1,2}v_1 + Q_3^{1,2}\delta s_{1,2} + Q_4^{1,2}\delta z_{1,2}; (\alpha) \\ v_3 &= \omega_\lambda^{2,3} + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + Q_1^{2,3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2,3}v_2 + Q_3^{2,3}\delta s_{2,3} + Q_4^{2,3}\delta z_{2,3}; (\beta) \\ v_4 &= \omega_\lambda^{3,4} + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 + Q_1^{3,4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) + Q_2^{3,4}v_3 + Q_3^{3,4}\delta s_{3,4} + Q_4^{3,4}\delta z_{3,4}; (\gamma) \\ v_5 &= v_1 = \omega_\lambda^{4,1} + \delta\lambda_1 - \delta\lambda_4 + Q_1^{4,1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) + Q_2^{4,1}v_4 + Q_3^{4,1}\delta s_{4,1} + Q_4^{4,1}\delta z_{4,1}; (\delta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Напишем, наконец, уравнения для  $\eta_i$ , выводимых из сопоставления азимутов, по линиям нашего полигона; имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \omega_\alpha^{1,2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + R_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1,2}v_1 + R_3^{1,2}\delta s_{1,2} + R_4^{1,2}\delta z_{1,2}; (e) \\ v_3 &= \omega_\alpha^{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} + R_1^{2,3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2,3}v_2 + R_3^{2,3}\delta s_{2,3} + R_4^{2,3}\delta z_{2,3}; (f) \\ v_4 &= \omega_\alpha^{3,4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} + R_1^{3,4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) - R_2^{3,4}v_3 + R_3^{3,4}\delta s_{3,4} + R_4^{3,4}\delta z_{3,4}; (g) \\ v_5 &= v_1 = \omega_\alpha^{4,1} + \operatorname{cosec} \varphi_1 \cdot \delta\alpha_{1,4} + R_1^{4,1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) - R_2^{4,1}v_4 + \\ &\quad + R_3^{4,1}\delta s_{4,1} + R_4^{4,1}\delta z_{4,1}. \end{aligned} \right\} \quad (h) \quad (11)$$

При применении Гельмертова способа нужно уравнения (9), (10) и (11), написать для каждого из всех звеньев триангуляции I класса (звено заключается между двумя смежными пунктами Лапласа), причем подставить заранее вычисленные числовые значения коэффициентов при  $(\delta\varphi_i - \xi_i)$ ,  $\delta s_{i,i+1}$ ,  $v_i$ ,  $\delta\alpha_{i,i+1}$  и  $\delta z_{i,i+1}$  и подсчитать по формулам (6) значения свободных членов этих уравнений.

Дальнейший путь заключается в составлении условных уравнений сети посредством уравнений (9), (10) и (11); такими уравнениями являются: 1) в каждом замкнутом полигоне триангуляции условия широты, долготы и суммы углов (три уравнения); 2) уравнения Лапласа, доставляемые каждой геодезической линией между двумя смежными пунктами Лапласа, причем условие Лапласа заключается в требовании, чтобы величины  $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ , выведенные из уравнений (10), были в точности равны соответственно величинам  $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ , выводимым из уравнений (11).

Для получения полигональных условий и условий Лапласа должно постепенно исключать из (9), (10) и (11) слагающие уклонений отвесных линий, чтобы в этих условных уравнениях получить связь только между поправками наблюденных величин.

Это исключение можно делать несколько различно; мы применим следующий путь:

1) вычитая из уравнения (11, e) уравнение (10, a), получаем условие Лапласа для пункта  $P_2$ :

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^{1,2} - \omega_\lambda^{1,2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + (R_4^{1,2} - Q_4^{1,2})\delta\alpha_{1,2} - (R_2^{1,2} + Q_2^{1,2})v_1 + \\ + (R_1^{1,2} - Q_1^{1,2})(\delta\varphi_1 - \xi_1) - \delta\lambda_2 + \delta\lambda_1 = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

2) выводим из (9, a) значение  $\delta\varphi_2 - \xi_2$  и подставляем его в (9, b), (10, b) и (11, f); далее подставляем  $v_2$ , даваемое уравнением (11, e), в уравнения (9, b), (10, b) и (11, f); в результате получаем новое выражение  $\xi_3$  в (9, b), новое выражение  $v_3$  в (10, b) и новое выражение  $v_3$  в (11, f); эти новые выражения назовем через  $\xi'_3$  и  $v'_3$ , причем в них войдут, кроме поправок наблюденных величин, значения слагающих уклонений отвесной линии только в точке  $P_1$  ( $\xi_1$  и  $\eta_1$ );

3) вычтем теперь из уравнения (11,f) для  $v_3'$  уравнение (10,g) для  $v_3$ ; тогда мы получим условие Лапласа для пункта  $P_3$ , полученное передачей по линиям  $P_1P_2$  и  $P_2P_3$ ;

4) из уравнения (9,b), преобразованного согласно пункту 2, выводим  $\delta\varphi_3 - \xi_3' = \delta\varphi_3 - \xi_3$  и подставляем эту величину в (9,c), (10,g) и (11,g); далее подставляем  $v_3'$ , полученное после преобразования уравнения (11,f), согласно пункту 2, в уравнения (9,c), (10,g) и (11,g); в результате получим новые выражения для  $\xi_4$  в (9,c) для  $v_4$  в (10,g) и для  $v_4$  в (11,g). Эти новые выражения назовем через  $\xi_4'$ ,  $v_4'$ , причем в них войдут, кроме поправок наблюденных величин, слагающие уклонения отвесной линии только в точке  $P_1$  ( $\xi_1$ ,  $v_1$ );

5) вычитаем из преобразованного согласно пункту 4 уравнения (11,g) для  $v_4'$  преобразованное уравнение (10,g) для той же величины  $v_4'$ . В результате получаем уравнение Лапласа в  $P_4$ , полученное передачей по линиям  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  и  $P_2P_4$  (см. фиг. 6);

6) из уравнения (9,c), преобразованного согласно пункту 4, выводим величину  $\delta\varphi_4 - \xi_4 = \delta\varphi_4 - \xi_4'$  и подставляем ее в уравнения (9,d), (10,g) и (11,h); далее подставляем  $v_4'$ , полученное после преобразования (11,g) согласно пункту 4, в (9,d), (10,g) и (11,h). В результате получаем новые выражения: для  $\xi_1$  в (9,d), для  $v_1$  в (10,g) и для  $v_1$  в (11,h); эти новые выражения назовем через  $\xi_1'$  и  $v_1'$ ; в них войдут, кроме поправок наблюденных величин, слагающие уклонения отвесной линии в точке  $P_1$ ;

7) понятно, что по выполнении пункта 6 мы должны иметь: равенство правой части уравнения для  $\xi_1'$  самой величине  $\xi_1$ ; равенство правой части уравнения для  $v_1'$  самой величине  $v_1$ . Условия получения после обхода всего полигона  $P_1P_2P_3P_4P_1$  для слагающих уклонений отвесной линии в  $P_1$ , именно величин  $\xi_1$  и  $v_1$ , очевидно, представляются так:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 - \xi_1' = 0 \\ v_1 - v_1' = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

понимая под  $\xi_1'$  и  $v_1'$  правые части уравнений для  $\xi_1'$  и  $v_1'$ , получившиеся в результате выполнения пункта 6.

Первое из уравнений (13) есть условие широты в нашем полигоне; второе из уравнений (13) есть условие долготы в нашем полигоне;

8) вычитая из преобразованного по пункту 6 уравнения (11,h) для  $v_1'$  преобразованное уравнение (10,g) для  $v_1'$ , приходим в результате к уравнению Лапласа в пункте  $P_1$ , полученному передачей по геодезическим линиям  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$  и  $P_4P_1$ ;

9) подставим теперь найденные согласно пункту 6 значения  $\xi_1'$  из преобразованного уравнения (9,d) и  $v_1'$  из преобразованного уравнения (11,h) в правые части уравнения (10,g) и (11,e); вычитая эти новые выражения  $v_2'$  в (10,g) и (11,e); вычитая эти новые выражения  $v_2'$  друг из друга, мы получим новый вид уравнения Лапласа на пункте  $P_2$ ; вычитая из этого нового уравнения Лапласа в  $P_2$ , полученного передачей по линиям  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_4P_1$  и  $P_1P_2$ , уравнение (12), т. е. прежнее уравнение Лапласа в  $P_2$ , — мы придем к условному уравнению суммы углов в нашем полигоне.

При числовом составлении уравнений Лапласа и уравнений полигональных проще и целесообразнее идти не кругом полигона, а сперва

пройти от  $P_1$  к  $P_2$  и от  $P_2$  к  $P_3$  и получить  $\xi'_3$  и  $v'_3$ ; затем идти от  $P_1$  к  $P_4$  и от  $P_4$  к  $P_3$  и снова получить  $\xi'_3$  и  $v'_3$ , но другим путем.

Условие равенства двух значений  $\xi'_3$ , полученных этими двумя передачами, приведет к условию широты; условие равенства двух значений  $v'_3$ , полученных этими двумя путями в уравнениях группы (10), приведет к условию долготы; разность  $v'_3$ , полученных первым путем в уравнениях (10) и (11), приведет к уравнению Лапласа в  $P_3$ , которое назовем  $L'a_3$ ; разность  $v'_3$ , полученных вторым путем в уравнениях (10) и (11), приведет к уравнению Лапласа в  $P_3$ , которое назовем  $L''a_3$ .

Условия равенства:

$$L'a_3 = L''a_3$$

приведет к условию суммы углов в полигоне. (Мы привели круговой путь обхода полигона для получения полигональных условий потому, что он, проводимый без числового решения, дает возможность написать общие формулы для уравнений Лапласа и угловых условий в полигонах, что будет показано в следующих параграфах.)

В уравнениях широты и долготы входят с крайне малыми коэффициентами ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ ) и  $\delta\alpha_{1,2}$ ; вхождение этих величин объясняется тем, что положение полигона по широте [влияние ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ )] и ориентировка его первой линии (значение  $\alpha_{1,2}$ ) сказываются на величине невязки полигона по широте и по долготе; но, конечно, это влияние ничтожно, и ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ ) и  $\delta\alpha_{1,2}$  входят в полигональные условия со столь малыми коэффициентами, что при ничтожности самих  $\delta\alpha_{1,2}$  и ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ ) можно всегда членами с ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ ) и  $\delta\alpha_{1,2}$  пренебречь; под  $\delta\xi_1$  понимается поправка найденного из предварительных исследований значения  $\xi_1$ . Члены с ошибками  $\delta l$  долгот и с величинами  $v$  совсем не входят в уравнения широты, долготы и суммы углов; таким образом, в уравнения широты и долготы войдут  $\delta s_{1,2}$ ,  $\delta s_{2,3}$ ,  $\delta s_{3,4}$  и  $\delta s_{4,1}$  и поправки азимутов  $\delta\alpha_{2,1}$ ,  $\delta\alpha_{2,3}$ ,  $\delta\alpha_{3,2}$ ,  $\delta\alpha_{3,4}$  и  $\delta\alpha_{4,1}$ , причем коэффициент при  $\delta\alpha_{2,3}$  оказывается равным, но противоположным по знаку с коэффициентом при  $\delta\alpha_{2,1}$ ; коэффициент при  $\delta\alpha_{3,4}$  оказывается равным, но противоположным по знаку коэффициенту при  $\delta\alpha_{3,2}$ , а коэффициент при  $\delta\alpha_{4,1}$  оказывается равным, но противоположным по знаку с коэффициентом при  $\delta\alpha_{4,3}$ . Таким образом, вид условий широты и долготы будет таков:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= a_1 \delta s_{1,2} + a_2 \delta s_{2,3} + a_3 \delta s_{3,4} + a_4 \delta s_{4,1} + \\ &+ a_5 (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) + a_6 (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) + a_7 (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,1}); \\ \Delta l &= b_1 \delta s_{1,2} + b_2 \delta s_{2,3} + b_3 \delta s_{3,4} + b_4 \delta s_{4,1} + \\ &+ b_5 (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) + b_6 (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) + b_7 (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,1}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Величины  $\Delta\varphi$  и  $\Delta l$  — свободные члены.

В условие суммы углов входит с ничтожным коэффициентом ( $\delta\varphi_1 - \xi_1$ ) (потому что положение полигона влияет на значение суммы его углов), совсем не входят поправки  $\delta s$ ,  $\delta l$  и величины  $v$ ; таким образом, в это условие приходится вводить только поправки прямых и обратных азимутов по всем линиям полигона, причем поправки двух азимутов, образующих угол в полигоне, входят в уравнение с равными, но противоположными по знаку коэффициентами. Общий вид условия суммы углов будет такой:

$$\Delta\Sigma = c_1 (\delta\alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,3}) + c_2 (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) + c_3 (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,1}) + c_4 (\delta\alpha_{1,4} - \delta\alpha_{1,2}), \quad (15)$$

причем коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  и  $c_4$  практически можно принять равными между собою;  $\Delta\Sigma$  — свободный член.

В уравнения Лапласа входят:  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ , поправки прямых и обратных азимутов по всем геодезическим линиям, использованным для передач при составлении уравнения Лапласа, и поправки двух астрономических долгот (пункта  $P_i$  и пункта  $P_1$ ).

После составления уравнений полигональных и уравнений Лапласа поправка  $\delta\alpha$  астрономического азимута каждой из геодезических линий заменяется через погрешность определения астрономического азимута соответственной выходной стороны звена I класса и погрешность направления данной геодезической линии. Называя погрешность определения в пункте  $P_i$  астрономического азимута первого бока триангуационного звена через  $\delta_i^*$ , а поправку направления геодезической линии с  $P_i$  на  $P_k$  — через  $v_{i,k}$ , имеем:

$$\delta\alpha_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}. \quad (16)$$

Решая уравнения (14) и (15), составленные для всех замкнутых полигонов триангуляции, вместе с уравнениями Лапласа, составленными указанным выше образом для каждой геодезической линии сети, и проводя решение всех полигональных условий и условий Лапласа нераздельно, мы, очевидно, тем самым, связываем вместе задачу отыскания поправок величин, полученных чисто геодезическим путем, т. е. расстояний  $s$  и углов между линиями полигонов, — с задачей отыскания поправок астрономических азимутов; другими словами, в этом решении накопление ошибок ориентировки полигонов, неизбежно бы произшедшее, если бы мы уравнивали только полигональные условия, будет регулироваться установлением азимутов из условий Лапласа.

Так как в условия полигонов и условия Лапласа входят поправки величин  $\alpha, \lambda$ , направлений геодезических линий и расстояний  $s$ , то, конечно, до решения их необходимо сообразить относительные веса этих величин. Этим вопросом мы займемся в следующем параграфе.

Нужно сказать, что мысль Гельмерта была направлена не только на указание изложенного метода составления условных уравнений в астрономо-геодезической сети. В уравнения (8) он вводил еще члены, зависящие от поправок  $da$  большой полуоси эллипсоида и  $dc$  — сжатия эллипсоида.

В уравнение Лапласа входят тогда члены и с  $da$ , и с  $dc$ , причем члены с  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  и  $dc$  трактуются Гельмертом как бы входящими в состав свободных членов уравнений, хотя они и пишутся отдельно с сохранением при числовых их коэффициентах множителями  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  и  $dc$ . Поэтому, по Гельмерту, коррелаты условных уравнений получаются выраженнымми через свободный член и члены с  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  и  $dc$ . Точно так же после вычисления поправок по таким коррелатам поправки астрономических долгот, поправки азимутов, углов и расстояний в полигонах получаются выраженнымми через свободный член и члены с  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  и  $dc$ .

После подстановки таких поправок: в уравнения (9,а), (10,а), (11,е); в преобразованные уравнения (9,б), (10,б) и (11,б) с обозначенными ранее правыми их частями через  $\xi_8'$  и  $v_3'$ ; в преобразованные ранее уравнения (9,с), (10,г) и (11,г) с обозначенными правыми их частями

\* Очевидно, в  $\delta_i$  входит и погрешность передачи непосредственно наблюденного астрономически азимута на этот бок триангуляции.

через  $\xi_4'$  и  $\nu_4'$  и т. д., — мы получим систему уклонений отвесных линий:  $\xi_2, \nu_2, \xi_3, \nu_3, \dots, \xi_n, \nu_n$ , которые также будут выражены через свободные члены и члены с  $(\delta\varphi_1 - \xi_1), \nu_1, da$  и  $dc$ . Назовем через  $(LW)$  систему уравнений, дающих эти выражения для  $\xi_2, \nu_2, \xi_3, \nu_3, \dots, \xi_n, \nu_n$ . По установлении размеров эллипсоида и его ориентировки, т. е. исходных геодезических дат, зависящих от выбора  $\xi_1$  и  $\nu_1$ , станут известными уклоны отвесных линий во всех пунктах Лапласа и одновременно станут известными поправки азимутов, расстояний и углов в полигонах триангуляции.

Таким образом, основная мысль Гельмерта заключалась в том, чтобы, использовав весь материал триангуляции и всех произведенных в ней астрономических определений и произведя только что указанное уравнивание этой сети с введением в выражения поправок неизвестных  $(\delta\varphi_1 - \xi_1), \nu_1, da$  и  $dc$ , — получить систему уклонений отвесных линий, выраженных в системе уравнений  $(LW)$  также через  $(\delta\varphi_1 - \xi_1), \nu_1, da$  и  $dc$ . Следовательно, здесь уравнивание триангуляции стоит на втором плане; главная задача ставится, как получение уравнений  $(LW)$  для величины  $\xi$  и  $\eta$  на всех пунктах Лапласа, однако, с тем, чтобы при этом использовать весь материал по астрономо-геодезической сети, т. е., чтобы получить вероятнейшее определение  $\xi$  и  $\eta$ .

Это последнее требование вынуждает использовать все уравнения Лапласа и все полигонные условия, но ставя решение этих условных уравнений (по способу наименьших квадратов) как задачу промежуточную, входящую в решение главной задачи. Другого выхода при строгом нахождении вероятнейших выражений для  $\xi$  и  $\eta$  быть не может.

В упомянутых ранее уравнениях  $(LW)$  для выводимой, по Гельмерту, системы значений  $\xi$  и  $\eta$  на каждой точке Лапласа будут два уравнения для  $\nu$ : одно из сопоставления долгот, а другое — из сопоставления азимутов [это соответствует двум прежним группам уравнений (10) и уравнений (11)]; но два таких уравнения для  $\nu$  на данном пункте теперь должны оказаться совершенно тождественными между собою. Следовательно, в системе уравнений  $(LW)$  мы должны для дальнейшего оставить по каждому пункту Лапласа лишь два уравнения: одно — для  $\xi$  и другое — для  $\nu$ .

Решая уравнение  $(LW)$  под условием минимума суммы квадратов  $\xi$  и  $\eta$ , мы выведем из них вероятнейшие значения  $(\delta\varphi_1 - \xi_1), \nu_1, da$  и  $dc$ . После этого мы, очевидно, найдем исходные геодезические координаты по таким формулам:

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 + \delta\varphi_1; \\ L_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 - \nu_1; \\ A_{1 \cdot 2} &= \alpha_{1 \cdot 2} + \delta\alpha_{1 \cdot 2} - \nu_1 \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

По получении  $(\delta\varphi_1 - \xi_1), \nu_1, da$  и  $dc$ , как уже указывалось ранее, мы из уравнений  $(LW)$  вычислим значение  $\xi$  и  $\eta$ , а с другой стороны, получаем поправки всех азимутов, всех углов и расстояний в сети (считая ее образованной из геодезических линий, соединяющих смежные пункты Лапласа). Остается с исходными величинами  $B_1, L_1$  и  $A_{1 \cdot 2}$  на эллипсоиде с размерами  $a + da$  и  $c + dc$  вычислить по исправленным углам и расстояниям в сети геодезические координаты и азимуты ее Лапласовых пунктов.

Указанное решение уравнений ( $LW$ ) не единственное. Гельмерг имел в виду накопление этих уравнений ( $LW$ ), отнесенных все к одному исходному пункту, для всей Средней Европы — с целью дальнейших научных исследований.

### § 3. Определение исходных геодезических дат и размеров эллипсоида для данного государства

Прежде всего отметим, что в целях геодезических можно в решении задачи определения размеров эллипса, наилучше подходящего для данного государства, допустить значительную свободу. В самом деле, если вводить в геодезическую практику в каждом государстве свой эллипс (в отношении его размеров), то это представит значительные неудобства. Поэтому следует в рассматриваемой задаче ограничиться исследованием, — какой из принятых уже эллипсов наиболее подходит для данного государства.

Далее, нужно иметь в виду, что определение сжатия эллипса из уравнений для слагающих отклонений отвесных линий не может быть надежным, в особенности при использовании астрономо-геодезических сетей, расположенных в средне-северных широтах.

Определение исходных геодезических дат также может допускать значительную свободу, и при решении этой задачи введение топографоизостатических редукций в астрономические широты, долготы и азимуты имеет несравненно большее значение, чем использование не только астрономических широт и долгот, но и астрономических азимутов на астрономических пунктах триангуляции.

Использование всего материала триангуляции, т. е. всех ее геодезических линий с неизбежным, притом, уравниванием условных наблюдений, может влиять в современных первоклассных триангуляциях, даже покрывающих значительные пространства, лишь на десятые доли секунды (менее  $0'',5$ ) в величинах  $\xi$  и  $\eta$  (в особенности, если сделано предварительно уравнивание рядов триангуляции по звеньям). Конечно, при наличии чисто местных влияний в величинах  $\xi$  и  $\eta$  в среднем до  $\pm 1'',8$  такие погрешности в них, как  $\pm 0,1—0'',4$ , могут быть не приняты во внимание.

Таким образом, если задачу определения размеров эллипса и исходных геодезических дат ставить без связи с точным определением системы уклонений отвесных линий, то в решение ее можно внести ряд существенных упрощений.

Прежде всего, для СССР следует отказаться от определения при решении этой задачи сжатия эллипса; его следует принять равным сжатию по Бесселю, так как это упростит перевычисление всех прежних триангуляций в случае принятия нового размера большой полуоси и, с другой стороны, не потребует составления новых геодезических таблиц. Далее, для решения поставленной задачи можно не использовать тех геодезических линий, которые приводят к замыканиям полигонов триангуляции, использовав их лишь для контроля передачи координат. Наконец, так как при звеновом уравнивании уже выяснены свободные члены в азимутальных условиях и использованы в упрощенном виде условия Лапласа, то можно отказаться и от сопоставления астрономических и геодезических азимутов, используя на каждом пункте Лапласа лишь сопоставления астрономических и геодезических широт и долгот.

\* \* \*

Представим себе, что мы выполнили уравнивание отдельных звеньев триангуляции, изображенной на фиг. 5. Мы получили в результате этого уравнивания длины  $s_{1 \cdot 2}, s_{2 \cdot 3}, s_{3 \cdot 4}, \dots, s_{19 \cdot 20}$  геодезических линий  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{19}P_{20}$  и углы между этими геодезическими линиями при точках  $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ . Далее, на эллипсоиде Бесселя (или на каком-нибудь ином), приняв за исходные геодезические данные астрономическую широту  $\varphi_1$ , астрономическую долготу  $\lambda_1$  в  $P_1$  и астрономический азимут  $\alpha_{1 \cdot 2}$  с  $P_1$  на  $P_2$ , вычислим по указанным результатам звенового уравнивания (по величинам  $s_1$  и углам между геодезическими линиями) геодезические координаты всех пунктов Лапласа  $P_2, P_3, P_4, \dots, P_{24}$ , но не используя при этом замыканий триангуационных полигонов. Например, мы провели вычисление координат по такой передаче:

$$\begin{aligned} & P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_{13}, P_{13}P_{12}, P_{12}P_{11}, P_3P_9, P_9P_{10}, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_{18}, \\ & P_{18}P_{17}, P_{17}P_{16}, P_6P_{14}, P_{14}P_{15}, P_1P_{19}, P_{19}P_{20}, P_7P_{21}, P_{21}P_{22}, P_{17}P_{24}, P_{24}P_{23}, P_1P_8. \end{aligned}$$

Следовательно, мы не использовали вовсе линий, показанных двойной чертой (сплошной и пунктирной) на фиг. 5 ( $P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{20}P_{21}, P_{22}P_{23}$ ). (В действительности полученные координаты  $P_{11}, P_{16}, P_8, P_{20}$  и  $P_{22}$  мы поверяем по передачам  $P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{21}P_{20}$  и  $P_{22}P_{23}$ , но без принятия в дальнейшем этих поверочных выводов.)

Полученные таким образом геодезические координаты  $B_n^\circ$  и  $L_n^\circ$  для пункта  $P_n$  будут различаться от астрономических координат  $\varphi_n$  и  $\lambda_n$  этого же пункта вследствие: 1) неверности принятых размеров эллипса; 2) уклонения отвесной линии в пункте  $P_1$ ; 3) уклонения отвесной линии в пункте  $P_n$ ; 4) погрешностей геодезических и астрономических наблюдений. Последней причины мы совсем не принимаем в расчет, а в отношении размеров эллипса будем отыскивать поправку  $da$  лишь его большой полуоси.

Будем обозначать, как и в § 2, геодезические координаты и геодезические азимуты, которые будут получены после исправления большой полуоси поправкой ее  $da$  и после исправления астрономических координат и азимута в  $P_1$  (принятых пока, т. е. при получении системы координат  $B^\circ$  и  $L^\circ$ , за исходные в точке  $P_1$ ), за уклонение отвесной линии в точке  $P_1$  — через  $B, L$  и  $A$ .

Очевидно, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \xi_1 &= B_1^\circ = \varphi_1 \\ L_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= L_1^\circ = \lambda_1 \\ A_{1 \cdot 2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= A_{1 \cdot 2}^\circ = \alpha_{1 \cdot 2} \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Другими словами, для перехода от  $B_n^\circ$  к  $B_n$ , от  $L_n^\circ$  к  $L_n$  мы должны учесть изменение: начальной широты на  $d\varphi = -\xi_1$ ; начальной долготы на  $-\eta_1 \sec \varphi_1$  и начального азимута на  $-\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ ; и, наконец, изменение большой полуоси эллипса на  $da$ .

Используя геодезическую линию (воображаемую), соединяющую точку  $P_n$  с  $P_1$ , мы напишем:

$$\begin{aligned} dB_n^{\circ} &= B_n - B_n^{\circ} = -p_1^{1,n} \xi_1 - p_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + p_5 da \\ dL_n^{\circ} &= L_n - L_n^{\circ} = -\eta_1 \sec \varphi_1 - q_1^{1,n} \xi_1 - q_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + q_5 da \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (18)$$

В (18) коэффициенты  $p_1$ ,  $p_4$ ,  $q_1$  и  $q_4$  имеют значения, указанные в (2) § 2\*, притом

$$p_5 = \frac{\partial B_n}{\partial a} \text{ и } q_5 = \frac{\partial (L_n^{\circ} - L_1^{\circ})}{\partial a}.$$

Мы приводим эти коэффициенты в следующей табличке:

|  |                                       |  |
|--|---------------------------------------|--|
| $p_1^{1,n} = \frac{M_1}{M_n} \cos l_{1,n};$                                      | $l_{1,n} = L_n^{\circ} - L_1^{\circ}$ |  |
| $q_1^{1,n} = \frac{M_1}{N_n} \sin l_{1,n} \operatorname{tg} \varphi_n$           |                                       |  |
| $p_4^{1,n} = \frac{s_{1,n}}{M_n} \sin A_{n-1}^{\circ}$                           |                                       |  |
| $q_4^{1,n} = -\frac{s_{1,n}}{N_n} \frac{\cos A_{n-1}^{\circ}}{\cos \varphi_n}$   |                                       |  |
| $p_5^{1,n} = \frac{s_{1,n} \cos A_{n-1}^{\circ}}{a \sin 1'' \cdot M_n}$          |                                       |  |
| $q_5^{1,n} = \frac{s_{1,n} \sin A_{n-1}^{\circ}}{a N_n \cos \varphi_n \sin 1''}$ |                                       |  |

(19)

Вычитая первое из уравнений (18) из  $\varphi_n$ , а второе из этих уравнений — из  $\lambda_n$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= \varphi_n - B_n^{\circ} + p_1^{1,n} \xi_1 + p_4^{1,n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 - p_5^{1,n} da; \\ \lambda_n - L_n &= \lambda_n - L_n^{\circ} + \eta_1 \sec \varphi_1 + q_1^{1,n} \xi_1 + q_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - q_5^{1,n} da. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= +\xi_n; \\ \lambda_n - L_n &= +\eta_n \sec \varphi_n, \end{aligned}$$

то дальнейшим простым преобразованием получаем:

$$\xi_n = (\varphi_n - B_n^{\circ}) + p_1^{1,n} \xi_1 + p_4^{1,n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1,n} \frac{da}{a};$$

$$\eta_n = (\lambda_n - L_n^{\circ}) \cos \varphi_n + \eta_1 \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} + q_1^{1,n} \cos \varphi_n \cdot \xi_1 + q_4^{1,n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_n \cdot \eta_1 + Q_5^{1,n} \frac{da}{a},$$

причем:

$$Q_5^{1,n} = -\frac{s_{1,n} \sin A_{n-1}^{\circ}}{N_n \sin 1''}, \quad P_5^{1,n} = -\frac{s_{1,n} \cos A_{n-1}^{\circ}}{M_n \sin 1''}. \quad (20)$$

\* Но только с заменой в них значка  $n-1$  через значок 1.

Вводя обозначения (7) § 2, напишем:

$$\left. \begin{aligned} P_{1^{1,n}} &= -\frac{M_1}{M_n} \cos l_{1,n} = -p_{1^{1,n}}; \quad P_{4^{1,n}} = -\frac{s_{1,n}}{M_n} \sin A^{\circ}_{n-1} = -p_{4^{1,n}} \\ Q_{1^{1,n}} &= -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1,n} \operatorname{tg} \varphi_n = -q_{1^{1,n}} \\ Q_{4^{1,n}} &= +\frac{s_{1,n} \cos A^{\circ}_{n-1}}{N_n \cos \varphi_n} = -q_{4^{1,n}} \\ S_{1^{1,n}} &= Q_{1^{1,n}} \cos \varphi_n = -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1,n} \sin \varphi_n \\ S_{4^{1,n}} &= +\frac{s_{1,n} \cos A^{\circ}_{n-1}}{N_n} = Q_{4^{1,n}} \cos \varphi_n \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Пользуясь обозначениями (20) и (21), переписываем уравнения для  $\xi$  и  $\eta$  в таком окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= (\varphi_n - B_n^{\circ}) - P_{1^{1,n}} \xi_1 - P_{4^{1,n}} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_{5^{1,n}} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^{\circ}) \cos \varphi_n - S_{1^{1,n}} \xi_1 - \left( S_{4^{1,n}} - \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_1} \right) \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + Q_{5^{1,n}} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

К этим уравнениям, составленным для пунктов  $P_2, P_3, P_4 \dots P_n$ , надлежит присоединить еще уравнения:

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = & \xi_1 \\ \eta_1 = & \eta_1 \end{array}$$

До составления этих уравнений, решением обратной геодезической задачи по линиям  $P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, \dots, P_1P_{15}, \dots, P_1P_{21} \dots$ , вообще по всем геодезическим линиям, соединяющим  $P_1$  со всеми остальными пунктами Лапласа, надлежит получить длины этих геодезических линий и прямые и обратные их азимуты, — правда, с малой точностью, нужной лишь для вычисления коэффициентов  $P_1, P_4, P_5, S_1, S_4$  и  $Q_5$ . Далее следует вычисление этих коэффициентов по формулам (20) и (21) и затем представление уравнений таблицей:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 & \eta_1 &= \eta_1 \\ \eta_1 &= & & \\ \xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - P_{1^{1,2}} \xi_1 - & P_{4^{1,2}} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_{5^{1,2}} \frac{da}{a} \\ \eta_2 &= (\lambda_2 - L_2^{\circ}) \cos \varphi_2 - S_{1^{1,2}} \xi_1 - \left( S_{4^{1,2}} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_{5^{1,2}} \frac{da}{a} \\ \xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^{\circ}) - P_{1^{1,3}} \xi_1 - & P_{4^{1,3}} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_{5^{1,3}} \frac{da}{a} \\ \eta_3 &= (\lambda_3 - L_3^{\circ}) \cos \varphi_3 - S_{1^{1,3}} \xi_1 - \left( S_{4^{1,3}} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_{5^{1,3}} \frac{da}{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_n &= (\varphi_n - B_n^{\circ}) - P_{1^{1,n}} \xi_1 - & P_{4^{1,n}} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_{5^{1,n}} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^{\circ}) \cos \varphi_n - S_{1^{1,n}} \xi_1 - \left( S_{4^{1,n}} - \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_{5^{1,n}} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

В качестве неизвестных следует принять  $\xi_1$ ,  $\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$  и  $\frac{da}{a}$ . Решая эти уравнения (23) по способу наименьших квадратов, т. е. под условием минимума суммы квадратов  $\xi$  и  $\eta$  ( $\sum_1^n \xi^2 + \sum_1^n \eta^2$ ), найдем  $da$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и установим новые геодезические даты (исходные данные) таким образом:

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1 = B_1^\circ - \xi_1;$$

$$L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 = L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1;$$

$$A_{1,2} = \alpha_{1,2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Если определить топографо-изостатические редукции в широтах и долготах и подставить их вместо  $\xi$  и  $\eta$  в левые части уравнений (23), то при обозначении этих редукций через  $\xi'$  и  $\eta'$  мы перепишем уравнения (23) так:

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi_1 &= -\xi'_1 + \xi_1; \\ \delta\eta_1' &= -\eta'_1 + \eta_1 \\ \delta\xi_2' &= (\varphi_2 - \xi'_2 - B_2^\circ) - P_1^{1,2} \xi_1 - P_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1,2} \frac{da}{a} \\ \delta\eta_2' &= (\lambda_2 - L_2^\circ) \cos \varphi_2 - \eta'_2 = S_1^{1,2} \xi_1 - \left( S_4^{1,2} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1,2} \frac{da}{a} \\ \delta\xi_3' &= (\varphi_3 - \xi'_3 - B_3^\circ) - P_1^{1,3} \xi_1 - P_4^{1,3} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1,3} \frac{da}{a} \\ \delta\eta_3' &= (\lambda_3 - L_3^\circ) \cos \varphi_3 - \eta'_3 = S_1^{1,3} \xi_1 - \left( S_4^{1,3} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1,3} \frac{da}{a} \\ \delta\xi_n' &= (\varphi_n - \xi'_n - B_n^\circ) - P_1^{1,n} \xi_1 - P_4^{1,n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1,n} \frac{da}{a} \\ \delta\eta_n' &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - \eta'_n = S_1^{1,n} \xi_1 - \left( S_4^{1,n} - \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1,n} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Уравнения (24) решаем под условием минимума суммы квадратов  $\delta\xi'$  и  $\delta\eta'$ .

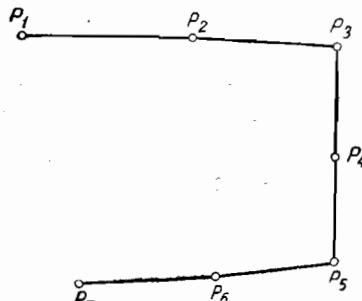
Для современной первоклассной триангуляции в Европейской части СССР, еще не дошедшей до Урала и до Кавказа, можно пока удовлетвориться решением уравнений (23), т. е. не вводить топографо-изостатических редукций. Однако, дальнейшее развитие этой триангуляции потребует введения топографо-изостатических редукций, и тогда задачу определения исходных геодезических дат следует поставить вновь, применяя уравнения (24).

По расчетам автора современная триангуляция в Европейской части СССР позволит вывести большую полуось с средней ошибкой около  $\pm 90 \text{ м}$ .

#### § 4. Формулы для составления уравнений Лапласа (Общие формулы проф. Ф. Н. Красовского)

Допустим, что при составлении уравнений Лапласа мы идем от пункта  $P_1$ , исходного в нашей триангуляции, к  $P_2$  (фиг. 7), затем от  $P_2$  к  $P_3$ , от  $P_3$  к  $P_4$ , от  $P_4$  к  $P_5$ , от  $P_5$  к  $P_6$  и т. д., и составляем по такому ходу уравнения Лапласа.

Пусть мы решили уже предварительно задачу предыдущего параграфа, установили в точке  $P_1$  значения  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и приняли исходные геодезические координаты:



Фиг. 7

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1;$$

$$L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1;$$

$$A_{1 \cdot 2} = \alpha_{1 \cdot 2} - \eta_1 \tan \varphi_1.$$

Исходные данные  $B_1$  и  $L_1$  уже не подлежат в дальнейшем изменениям; с ними на эллипсоиде с большой полуосью  $a + da$  и сжатием, по Бесселю, мы вычисляем те «приближенные» координаты пунктов

Лапласа, о которых говорилось в § 2, обозначая их через  $B_n^\circ$  и  $L_n^\circ$ . Затем, как и в § 2, мы вычисляем точно геодезические азимуты  $A^\circ$  и длины  $s^\circ$  геодезических линий, строго соответствующие приближенным координатам пунктов Лапласа (при этом геодезические линии соединяют смежные пункты Лапласа).

Далее, примем ошибку  $\delta\varphi_1$  астрономической широты в пункте  $P_1$  равной нулю, на что имеем всегда, конечно, основания, так как эта ошибка может быть очень мала. Оставляя все прежние обозначения § 2, мы теперь в уравнениях (1) § 2 должны будем положить  $dB_1$  равным нулю, и поэтому уравнения (3) § 2 для пункта  $P_2$  перепишутся так:

$$dB_2 = p_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + p_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2};$$

$$dL_2 = dL_1 + q_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + q_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2};$$

$$dA_{2 \cdot 1} = r_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + r_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2}.$$

Так как  $L_1$  также не подлежит уже изменениям, то  $dL_1 = 0$ , но для общности последующих формул примем его, на основании (1) § 2, равным  $\delta\lambda_1$ , считая, что  $\delta\lambda_1$  также равно нулю.

Итак:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + p_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2} \\ dL_2 &= q_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + q_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2} + \delta\lambda_1 \\ dA_{2 \cdot 1} &= r_3^{1 \cdot 2} ds_{1 \cdot 2} + r_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Далее выпишем уравнения (4) § 2:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \varphi_2 - B_2^\circ - \xi_2 + \delta\varphi_2 \\ dL_2 &= \lambda_2 - L_2^\circ - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 \\ dA_{2 \cdot 1}^\circ &= \delta\alpha_{1 \cdot 2} \\ dA_{2 \cdot 1} &= \alpha_{2 \cdot 1} - A_{2 \cdot 1}^\circ - \eta_2 \tan \varphi_2 + \delta\alpha_{2 \cdot 1} \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

и вообще, за исключением лишь пункта  $P_1$ :

$$\left. \begin{array}{l} dB_n = \varphi_n - B^{\circ}_n - \xi_n + \delta\varphi_n \\ dL_n = \lambda_n - L^{\circ}_n - \eta_n \sec \varphi_n + \delta\lambda_n \\ dA_{n-1, n} = \alpha_{n-1, n} - A^{\circ}_{n-1, n} - \eta_{n-1} \operatorname{tg} \varphi_{n-1} + \delta\alpha_{n-1, n} \\ dA_{n, n-1} = \alpha_{n, n-1} - A^{\circ}_{n, n-1} - \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n + \delta\alpha_{n, n-1} \end{array} \right\}. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (25), имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_2 - B^{\circ}_2 - \xi_2 + \delta\varphi_2 = p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \lambda_2 - L^{\circ}_2 - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 = + \delta\lambda_1 + q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \alpha_{1.2} - A^{\circ}_{1.2} - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{1.2} = r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \end{array} \right\}. \quad (28)$$

Отметим, что третье уравнение из (26):  $dA^{\circ}_{1.2} = \delta\alpha_{1.2}$ , а следовательно и уравнения (28) имеют место лишь при условии, что при вычислении приближенных координат  $B^{\circ}_2$ ,  $L^{\circ}_2$  были в точке  $P_1$  взяты координаты  $B_1 = \varphi_1 - \xi_1$ ,  $L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1$  и  $A_{1.2} = \alpha_{1.2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ .

От уравнений (28), как и в § 2, мы переходим к таким:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - p_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \delta\varphi_2 - p_3^{1.2} \delta s_{1.2} - p_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}; \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - L^{\circ}_2) - q_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 - q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} - q_3^{1.2} \delta s_{1.2}; \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_3^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &\quad + \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_4^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{1.2} - r_3^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta s_{1.2}. \end{aligned}$$

Пользуясь обозначениями (7) § 2, мы последние уравнения перепишем еще так:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_2 = (\varphi_2 - B^{\circ}_2) + \delta\varphi_2 + P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}; \\ \eta_2 \sec \varphi_2 = (\lambda_2 - L^{\circ}_2) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ \quad + Q_3^{1.2} \delta s_{1.2} + Q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}; \\ \nu_2 = \eta_2 \sec \varphi_2 = (\alpha_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ \quad + \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}. \end{array} \right\} \quad (29)$$

Вычитая из третьего уравнения второе уравнение (29), получаем уравнение Лапласа на  $P_2$  в таком виде:

$$(z_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - (\lambda_2 - L^{\circ}_2) - \delta\lambda_2 + \delta\lambda_1 + \\ + \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R_4^{1.2} - Q_4^{1.2}) \delta\alpha_{1.2} = 0. \quad (29a)$$

Теперь:

$$R_4^{1.2} - Q_4^{1.2} = - \cos \frac{s_{1.2}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_2 = - \operatorname{cosec} \varphi_2,$$

причем при наибольшем  $s = 250$  км ошибочность, допущенная от замены  $\cos \frac{s}{R}$  единицей, составит  $\frac{1}{1250} \delta\alpha$ , что в уравнении Лапласа приведет к пренебрегаемой погрешности в  $0'',0003$ .

Итак:

$$\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1} - [(\lambda_2 - L^{\circ}_2)] \sin \varphi_2 - (\delta \lambda_2 - \delta \lambda_1) \sin \varphi_2 + \delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{1 \cdot 2} = 0.$$

Это уравнение Лапласа для общности мы перепишем еще в такой форме:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{1 \cdot 2} - \delta \lambda_2 \sin \varphi_2 + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - (\alpha_{1 \cdot 2} - A_{1 \cdot 2}) - \\ - (\lambda_2 - L^{\circ}_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для точки  $P_3$  имеем, применяя уравнения (9), (10) и (11) § 2:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= (\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) + P_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + P_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \\ &\quad + P_1^{2 \cdot 3} (\delta \varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2 \cdot 3} v_2 + P_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + P_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} + \delta \varphi_3; \\ v_3 &= (\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2) + Q_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) + Q_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \\ &+ Q_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \delta \lambda_3 - \delta \lambda_2 + Q_1^{2 \cdot 3} (\delta \varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2 \cdot 3} v_2 + Q_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\ &\quad + Q_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3}; \\ v_3 &= (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + R_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) + R_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \\ &+ R_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3 \cdot 2} + R_1^{2 \cdot 3} (\delta \varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2 \cdot 3} v_2 + \\ &\quad + R_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + R_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти последние уравнения ( $\delta \varphi_2 - \xi_2$ ) из первого и  $v_2$  — из третьего уравнений (29), получаем:

$$\begin{aligned} \xi_3 &= (\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) - P_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \\ &\quad + P_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \delta \varphi_3 + P_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} - P_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + \\ &+ P_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} - P_1^{2 \cdot 3} P_4^{1 \cdot 2} \delta z_{1 \cdot 2} - P_2^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &\quad - P_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) - P_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} - \\ &\quad - P_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - P_2^{2 \cdot 3} R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2}; \\ v_3 &= \omega_{\lambda}^{2 \cdot 3} - Q_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - Q_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \\ &+ \delta \lambda_3 - \delta \lambda_2 - Q_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + Q_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + Q_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} - \\ &- Q_1^{2 \cdot 3} P_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} + Q_2^{2 \cdot 3} \omega_{\alpha}^{1 \cdot 2} + Q_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} + \\ &\quad + Q_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + Q_2^{2 \cdot 3} R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2}; \\ v_3 &= \omega_{\alpha}^{2 \cdot 3} - R_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \\ &+ \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3 \cdot 2} - R_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - R_1^{2 \cdot 3} P_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} + \\ &+ R_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + R_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} - R_2^{2 \cdot 3} \omega_{\alpha}^{1 \cdot 2} - R_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} - \\ &\quad - R_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - R_2^{2 \cdot 3} R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} \end{aligned} \quad (31)$$

В этих уравнениях введены обозначения:

$$\begin{aligned} \omega^{n-1, n} &= (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L^{\circ}_n - L^{\circ}_{n-1}) + Q^{n-1, n} (\varphi_{n-1} - B^{\circ}_{n-1}) + \\ &\quad + Q_3^{n-1, n} (s'_{n-1, n} - s^{\circ}_{n-1, n}) + Q_4^{n-1, n} (\alpha_{n-1, n} - A^{\circ}_{n-1, n}) \\ \omega_{\alpha}^{n-1, n} &= (\alpha_{n, n-1} - A^{\circ}_{n, n-1}) \operatorname{cosec} \varphi_n + R_1^{n-1, n} (\varphi_{n-1} - B^{\circ}_{n-1}) + \\ &\quad + R_3^{n-1, n} (s'_{n-1, n} - s^{\circ}_{n-1, n}) + R_4^{n-1, n} (\alpha_{n-1, n} - A^{\circ}_{n-1, n}) \end{aligned} \quad (32)$$

[Члены с  $(\varphi_{n-1} - B^{\circ}_{n-1})$  не войдут в уравнения для  $\omega_{\lambda}^{1 \cdot 2}$  и  $\omega_{\alpha}^{1 \cdot 2}$ ].

Вычитая из третьего второе уравнение (31) и принимая во внимание обозначения (32), мы получаем:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + (R_4^{2 \cdot 3} - Q_4^{2 \cdot 3}) \cdot (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) - \\
 & - [\lambda_3 - \lambda_2] - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] - P_3^{1 \cdot 2} (R_1^{2 \cdot 3} - Q_1^{2 \cdot 3}) (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) - \\
 & - (R_2^{2 \cdot 3} + Q_2^{2 \cdot 3}) [(\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2})] - \\
 & - \delta\lambda_3 + \delta\lambda_2 - P_3^{1 \cdot 2} (R_1^{2 \cdot 3} - Q_1^{2 \cdot 3}) \delta s_{1 \cdot 2} - (R_2^{2 \cdot 3} + Q_2^{2 \cdot 3}) R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + \\
 & + (R_4^{2 \cdot 3} - Q_4^{2 \cdot 3}) \delta \alpha_{2 \cdot 3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3 \cdot 2} - (R_2^{2 \cdot 3} + Q_2^{2 \cdot 3}) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} - \\
 & - (R_1^{2 \cdot 3} - Q_1^{2 \cdot 3}) P_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} - (R_2^{2 \cdot 3} + Q_2^{2 \cdot 3}) R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} = 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Используем для преобразования коэффициентов этого уравнения (33) обозначения (7), причем полагаем, что  $\frac{s}{R} < \frac{1}{25}$ .

Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 R_4^{2 \cdot 3} - Q_4^{2 \cdot 3} &= -\operatorname{cosec} \varphi_3 \dots \text{с принятием } \cos \frac{s}{R} = 1 \\
 R_2^{2 \cdot 3} + Q_2^{2 \cdot 3} &= 1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \\
 R_1^{2 \cdot 3} - Q_1^{2 \cdot 3} &= -\sin l_{2 \cdot 3} \left( \frac{1}{\sin \varphi_3 \cos \varphi_3} - \frac{\sin \varphi_3}{\cos \varphi_3} \right) = \\
 &= -\sin l_{2 \cdot 3} \operatorname{ctg} \varphi_3
 \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

с пренебрежением величинами  $e^2 l$ .

Очевидно теперь, что в (33) общий коэффициент при  $\delta \alpha_{1 \cdot 2}$  равен:

$$\begin{aligned}
 & -\sin l_{2 \cdot 3} \operatorname{ctg} \varphi_3 \cdot \frac{s_{1 \cdot 2}}{N_2} \sin A_{2 \cdot 1} + \operatorname{cosec} \varphi_2 - \frac{1}{\sin \varphi_3} - \\
 & - \frac{s_{1 \cdot 2}}{N_2} \cos A_{2 \cdot 1} \sec \varphi_2 + \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \sec \varphi_2 \cdot \frac{s_{1 \cdot 2}}{N_2} \cos A_{2 \cdot 1} = \operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3.
 \end{aligned}$$

с пренебрежением величинами порядка  $\frac{s^2}{R^2}$ .

Общий коэффициент при  $\delta s_{1 \cdot 2}$  (или при  $s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}$ ) равен:

$$\begin{aligned}
 & \sin l_{2 \cdot 3} \operatorname{ctg} \varphi_3 \frac{\cos A_{2 \cdot 1}}{M_2 \sin 1''} - \left( 1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \right) \frac{\sin A_{2 \cdot 1}}{N_2 \sin 1'' \cos \varphi_2} = \\
 & = - \frac{s_{2 \cdot 3} \sin A_{3 \cdot 2}}{N_2 M_2 \sin 1''} \cdot \frac{\cos A_{2 \cdot 1}}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2 \cdot 3} \cos A_{3 \cdot 2} \cdot \sin A_{2 \cdot 1}}{M_2 N_2 \sin 1'' \sin \varphi_3} = \\
 & = - \frac{s_{2 \cdot 3}}{N_2 M_2 \sin 1''} \cdot \frac{\sin (A_{3 \cdot 2} - A_{2 \cdot 1})}{\sin \varphi_3},
 \end{aligned}$$

опять-таки пренебрегая лишь величинами порядка  $\frac{s^2}{R^2}$ . Даже при  $\delta s = 3 \text{ м}$ , мы получим влияние члена с  $\delta s_{1 \cdot 2}$  меньше  $\pm 0'',003$ .

Поэтому уравнение (33) переписываем так:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] - \\
 & - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3}\right) \operatorname{cosec} \varphi_2 (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - \delta \lambda_3 + \delta \lambda_2 + \\
 & + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3 \cdot 2} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 3} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3}\right) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} + \\
 & + (\operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3) \delta \alpha_{1 \cdot 2} + \\
 & + \frac{s_{2 \cdot 3}}{M_2 N_2 \sin 1''} \cdot \frac{\sin (A^{\circ}_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 1})}{\sin \varphi_3} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) = 0. \quad (35a)
 \end{aligned}$$

Отсюда пишем в окончательной форме уравнение Лапласа на пункте  $P_3$ :

$$\begin{aligned}
 & \delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{2 \cdot 3} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{1 \cdot 2}) - (\delta \lambda_3 - \delta \lambda_2) \sin \varphi_3 + \\
 & + \left\{ \alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2} - (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + [(\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - (\alpha_{1 \cdot 2} - A^{\circ}_{1 \cdot 2})] \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) - \right. \\
 & \left. - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] \sin \varphi_3 \right\} + (\lambda_1 - L_1) \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) \sin \varphi_1 + \\
 & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) \sin \varphi_1 \delta \lambda_1 + \frac{s_{2 \cdot 3} \cdot \sin (A^{\circ}_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 1})}{M_2 N_2 \sin 1''} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) = 0. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Уже на основании (35) можно сделать обобщение и писать общую форму уравнения Лапласа для любой точки, тем более, что всегда мы можем иметь  $s^{\circ}_{1 \cdot 2}$  равным  $s'_{1 \cdot 2}$ .

Напишем теперь значения  $v$  для пункта  $P_4$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 v_4 &= \omega_{\lambda}^{3 \cdot 4} + \delta \lambda_4 - \delta \lambda_3 + Q_1^{3 \cdot 4} (\delta \varphi_3 - \xi_3) + Q_2^{3 \cdot 4} v_3 + Q_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + Q_4^{3 \cdot 4} \delta \alpha_{3 \cdot 4}; \\
 v_4 &= \omega_{\alpha}^{3 \cdot 4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{4 \cdot 3} + R_1^{3 \cdot 4} (\delta \varphi_3 - \xi_3) - R_2^{3 \cdot 4} v_3 + R_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + R_4^{3 \cdot 4} \delta \alpha_{3 \cdot 4}.
 \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\xi_3$  из первого и  $v_3$  из третьего уравнений (31), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 v_4 &= \omega_{\lambda}^{3 \cdot 4} + \delta \lambda_4 - \delta \lambda_3 - Q_1^{3 \cdot 4} [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) - \\
 & - P_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2})] - Q_1^{3 \cdot 4} [P_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + P_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} - \\
 & - P_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + P_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} - P_1^{2 \cdot 3} P_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2}] - \\
 & - Q_1^{3 \cdot 4} [P_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) + P_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \\
 & + P_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2 \cdot 1} + P_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + P_2^{2 \cdot 3} R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2}] + \\
 & + Q_2^{3 \cdot 4} [\omega_{\alpha}^{2 \cdot 3} - R_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2)] - R_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3 \cdot 2} - \\
 & - R_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2}] + Q_2^{3 \cdot 4} [-R_1^{2 \cdot 3} P_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2} + R_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + R_4^{2 \cdot 3} \delta \alpha_{2 \cdot 3} - \\
 & - R_2^{2 \cdot 3} \omega_{\alpha}^{1 \cdot 2} - R_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta \alpha_{2 \cdot 1} - R_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - R_2^{2 \cdot 3} R_4^{1 \cdot 2} \delta \alpha_{1 \cdot 2}] + \\
 & + Q_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + Q_4^{3 \cdot 4} \delta \alpha_{3 \cdot 4}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_4 = & \omega_a^{3.4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \delta \alpha_{4.3} - R_1^{3.4} [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) - \\
 & - P_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + P_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A^{\circ}_{2.3})] - R_1^{3.4} [P_3^{2.3} \delta s_{2.3} - \\
 & - P_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_4^{2.3} \delta \alpha_{2.3} - P_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2}] + \\
 & + R_1^{3.4} P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 (\alpha_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) + R_1^{3.4} [P_2^{2.3} R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\
 & + P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2.1} + P_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2}] - \\
 & - R_2^{3.4} [\omega_a^{2.3} - R_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2) - R_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta \alpha_{3.2} - \\
 & - R_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2}] - R_2^{3.4} [-R_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2} + R_3^{2.3} \delta s_{2.3} + R_4^{2.3} \delta \alpha_{2.3} - \\
 & - R_2^{2.3} \omega_a^{1.2} - R_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta \alpha_{2.1} - R_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} - R_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2}] + \\
 & + R_3^{3.4} \delta s_{3.4} + R_4^{3.4} \delta \alpha_{3.4} \quad (37)
 \end{aligned}$$

Переходя к вычитанию из (37) уравнения (36), используем соотношения (34) (с заменой в них знаков).

Общий коэффициент при  $\delta s_{1.2}$  будет равен:

$$\begin{aligned}
 & -\sin l_{3.4} \operatorname{ctg} \varphi_4 (P_1^{2.3} P_3^{1.2} + P_2^{2.3} R_3^{1.2} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (R_1^{2.3} P_3^{1.2} + \\
 & + R_2^{2.3} R_3^{1.2})) = + \frac{\sin l_{3.4} \operatorname{ctg} \varphi_4 \cos A_{2.1}}{M \sin 1''} - \\
 & - \frac{\sin \varphi_4 - \sin \varphi_3 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_4 \sin \varphi_3 N \sin 1'' \cos \varphi_2} = \\
 & = \frac{s_{3.4} \sin A_{3.4} \cos A_{2.1}}{M_3 N_3 \sin 1'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3.4} \cos A_{3.4} \sin A_{2.1}}{M_3 N_3 \sin 1'' \sin \varphi_4} = \\
 & = \frac{s_{3.4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A_{3.4} - A_{2.1})}{\sin \varphi_4}.
 \end{aligned}$$

Общий коэффициент при  $\delta s_{2.3}$  будет равен:

$$\begin{aligned}
 & \sin l_{3.4} \operatorname{ctg} \varphi_4 \cdot \frac{\cos A_{3.2}}{M_3 \sin 1''} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \frac{\sin A_{3.2}}{N_3 \sin 1'' \cos \varphi_3} = \\
 & = \frac{s_{3.4} \sin A_{3.4} \cos A_{3.2}}{M_3 N_3 \sin 1'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3.4} \cos A_{3.4} \sin A_{3.2}}{M_3 N_3 \sin 1'' \sin \varphi_4} = \\
 & = \frac{s_{3.4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A_{3.4} - A_{3.2})}{\sin \varphi_4}.
 \end{aligned}$$

Коэффициент при  $\delta s_{3.4}$  будет равен нулю. Общий коэффициент при  $\delta \alpha_{1.2}$  будет равен:

$$\begin{aligned}
 & -\sin l_{3.4} \operatorname{ctg} \varphi_4 (P_1^{2.3} P_4^{1.2} + P_2^{2.3} R_4^{1.2}) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (R_1^{2.3} P_4^{1.2} + \\
 & + R_2^{2.3} R_4^{1.2}) = \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (\operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \operatorname{cosec} \varphi_2) = \\
 & = \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.
 \end{aligned}$$

Общий коэффициент при  $\delta\alpha_{2 \cdot 1}$  будет равен:

$$\begin{aligned} & -\sin l_{3 \cdot 4} \operatorname{ctg} \varphi_4 P_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R_2^{3 \cdot 4} + Q_2^{3 \cdot 4}) R_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 = \\ & = -\left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \cdot \operatorname{cosec} \varphi_2 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4). \end{aligned}$$

Общий коэффициент при  $\delta\alpha_{2 \cdot 3}$  будет равен:

$$\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.$$

Коэффициент при  $\delta\alpha_{3 \cdot 2}$  равен:

$$-\left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \operatorname{cosec} \varphi_3 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4).$$

Коэффициент при  $\delta\alpha_{3 \cdot 4}$  равен  $-\operatorname{cosec} \varphi_4$ .

Теперь уравнение Лапласа на пункте  $P_4$  напишется так:

$$\begin{aligned} & \omega_\alpha^{3 \cdot 4} - \omega_\lambda^{3 \cdot 4} - (R_1^{3 \cdot 4} - Q_1^{3 \cdot 4}) [(\varphi_3 - B^{\circ}_{3 \cdot 3}) + \\ & + P_3^{2 \cdot 3} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) - P_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + P_4^{2 \cdot 3} (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3})] + \\ & + (R_1^{3 \cdot 4} - Q_1^{3 \cdot 4}) [P_2^{2 \cdot 3} \operatorname{cosec} \varphi_2 (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) + P_2^{2 \cdot 3} R_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2})] - \\ & - (R_2^{3 \cdot 4} + Q_2^{3 \cdot 4}) [\omega_\alpha^{2 \cdot 3} - R_1^{2 \cdot 3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2 \cdot 3} P_3^{1 \cdot 2} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) - \\ & - R_2^{2 \cdot 3} \omega_\alpha^{1 \cdot 2}] + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4 \cdot 3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3 \cdot 4} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{3 \cdot 2} + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2 \cdot 3} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2 \cdot 1} + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2 \cdot 1} + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A_{3 \cdot 4} - A_{3 \cdot 2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2 \cdot 3} + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A_{3 \cdot 4} - A_{2 \cdot 1})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2 \cdot 1} - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Или иначе:

$$\begin{aligned} & (\alpha_{4 \cdot 3} - A^{\circ}_{4 \cdot 3}) \operatorname{cosec} \varphi_4 - [(\lambda_4 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 4}) + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [(\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) - (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - \\ & - (\alpha_{1 \cdot 2} - A_{1 \cdot 2}) + (\lambda_1 + \delta\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1] + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 2})}{\sin \varphi_4} (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{2 \cdot 1})}{\sin \varphi_4} (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4 \cdot 3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3 \cdot 4} + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}] + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{1 \cdot 2}] + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2 \cdot 3} + \\ & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{2 \cdot 1})}{\sin \varphi_4} \delta s_{1 \cdot 2} = 0. \quad (37a) \end{aligned}$$

Допуская в уравнении Лапласа погрешность его составления до  $0''$ , мы можем окончательно написать:

$$\begin{aligned}
 & \delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{3 \cdot 4} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) + (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{1 \cdot 2}) + \\
 & + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1] - (\delta\lambda_4 - \delta\lambda_3) \sin \varphi_4 + (\alpha_{4 \cdot 3} - A^{\circ}_{4 \cdot 3}) - (\alpha_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 4}) + \\
 & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) - (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - \\
 & - (\alpha_{1 \cdot 2} - A_{1 \cdot 2})] - [(\lambda_4 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] \sin \varphi_4 + \\
 & + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) (\lambda_1 - \\
 & - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{3 \cdot 4}}{M_3 N_3 \sin 1''} \sin (A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2} = 0. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Теперь заключаем, что если к точке  $P_n$  подходит по линиям  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ , ...,  $P_{n-1}P_n$ , то уравнение Лапласа в ней напишется по такому закону:

Вместо того, чтобы использовать именно эту общую формулу для уравнения Лапласа, дадим другую форму такими образом.

Сложим уравнение (30) по умножению его на cosec  $\varphi_2$  с (35a). Получим для  $P_3$ :

$$\begin{aligned} \text{cosec } \varphi_3 \delta\alpha_{3 \cdot 2} - \text{cosec } \varphi_3 \delta\alpha_{2 \cdot 3} + \text{cosec } \varphi_3 \delta\alpha_{2 \cdot 1} - \text{cosec } \varphi_3 \delta\alpha_{1 \cdot 2} - \delta\lambda_3 + \\ + \delta\lambda_1 + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2 \cdot 3}}{M_2 N_2 \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) \text{cosec } \varphi_3 + \\ + (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) \text{cosec } \varphi_3 - \text{cosec } \varphi_3 (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \text{cosec } \varphi_3 (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - \\ - \text{cosec } \varphi_3 (\alpha_{1 \cdot 2} - A^{\circ}_{1 \cdot 2}) - (\lambda_3 - L^{\circ}_3) - (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} = 0. \quad (39a) \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{2 \cdot 3} + \delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{1 \cdot 2} - \delta\lambda_3 \sin \varphi_3 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) - \\ - (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - (\alpha_{1 \cdot 2} - A^{\circ}_{1 \cdot 2}) - (\lambda_3 - L^{\circ}_3) \sin \varphi_3 + \\ + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{2 \cdot 3}}{M_2 N_2 \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) = 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Сложим теперь (37a) и (39a); тогда мы получим новую форму уравнения Лапласа на пункте  $P_4$ . Именно:

$$\begin{aligned} \text{cosec } \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4 \cdot 3} - \text{cosec } \varphi_4 \delta\alpha_{3 \cdot 4} + \text{cosec } \varphi_4 \delta\alpha_{3 \cdot 2} - \text{cosec } \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{2 \cdot 3} + \\ + \text{cosec } \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{2 \cdot 1} - \text{cosec } \varphi_4 \delta\alpha_{1 \cdot 2} - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} + \frac{\text{cosec } \varphi_4}{MN \sin 1''} s_{3 \cdot 4} \sin(A^{\circ}_{3 \cdot 4} - \\ - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \frac{\text{cosec } \varphi_4}{MN \sin 1''} [s_{3 \cdot 4} \sin(A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) + s_{2 \cdot 3} \sin(A^{\circ}_{2 \cdot 3} - \\ - A^{\circ}_{2 \cdot 1})] (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{4 \cdot 3} - A^{\circ}_{4 \cdot 3}) - \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 4}) + \\ + \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) - \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) - \\ - \text{cosec } \varphi_4 (\alpha_{1 \cdot 2} - A^{\circ}_{1 \cdot 2}) - (\lambda_4 - L^{\circ}_4) + (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} = 0. \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{4 \cdot 3} + (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) + (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) - \delta\alpha_{1 \cdot 2} - \delta\lambda_4 \sin \varphi_4 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + \\ + \frac{s_{3 \cdot 4}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{3 \cdot 4} - A^{\circ}_{3 \cdot 2}) (s'_{2 \cdot 3} - s^{\circ}_{2 \cdot 3}) + \frac{1}{MN \sin 1''} [s_{3 \cdot 4} \sin(A^{\circ}_{3 \cdot 4} - \\ - A^{\circ}_{2 \cdot 1}) + s_{2 \cdot 3} \sin(A^{\circ}_{2 \cdot 3} - A^{\circ}_{2 \cdot 1})] (s'_{1 \cdot 2} - s^{\circ}_{1 \cdot 2}) + (\alpha_{4 \cdot 3} - A^{\circ}_{4 \cdot 3}) + [(\alpha_{3 \cdot 2} - \\ - \alpha_{3 \cdot 4}) - (A^{\circ}_{3 \cdot 2} - A^{\circ}_{3 \cdot 4})] + [(\alpha_{2 \cdot 1} - \alpha_{2 \cdot 3}) - (A^{\circ}_{2 \cdot 1} - A^{\circ}_{2 \cdot 3})] - (\alpha_{1 \cdot 2} - A^{\circ}_{1 \cdot 2}) - \\ - (\lambda_4 - L^{\circ}_4) \sin \varphi_4 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \quad (41) \end{aligned}$$

Теперь общую формулу для уравнения Лапласа в  $P_n$  точке, получаемого по передачам по линиям  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-1}P_n$ , напишем таким образом:

$$\begin{aligned}
& \delta x_{n-1,n} + (\delta x_{n-1,n-2} - \delta x_{n-1,n}) + (\delta x_{n-2,n-3} - \delta x_{n-2,n-1}) + \dots + (\delta x_{4,3} - \delta x_{4,5}) + \\
& (\delta x_{3,2} - \delta x_{3,4}) + (\delta x_{2,1} - \delta x_{2,3}) - \delta x_{1,2} - \delta \lambda_n \sin \varphi_n + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\
& + \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \\
& + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - \right. \\
& \left. - A_{n-2,n-3}^\circ) \left[ (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \right. \\
& \left. + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \frac{s_{n-2,n-3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-3,n-2}^\circ - \right. \\
& \left. - A_{n-3,n-4}^\circ) \left[ (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \right. \\
& \left. + \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{3,2}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ A_{3,2}^\circ + \right. \\
& \left. + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) \right] (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - \right. \\
& \left. - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \right. \\
& \left. + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{2,3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ) \right] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\
& + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^\circ) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,n}^\circ)] + [(\alpha_{n-2,n-3} - \\
& - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - \\
& (A_{n-3,n-4}^\circ - A_{n-3,n-2}^\circ)] + \\
& + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^\circ - A_{4,5}^\circ)] + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^\circ - A_{3,4}^\circ)] + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - \\
& - (A_{2,1}^\circ - A_{2,3}^\circ)] - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}) - (\lambda_n - L_n^\circ) \sin \varphi_n + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \quad (42)
\end{aligned}$$

Закономерность обобщения, сделанного при переходе от частных формул к общим формулам (39) и (42), представляется достаточно обоснованной. Однако для проверки путем последовательного исключения были составлены уравнения Лапласа в указанном виде до точки  $P_3$  по полигону  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ .

Результат в виде коэффициентов при  $\delta s$  позволяют себе выписать для выражений  $v_\lambda^8$  и  $v_\alpha^8$ .

Коэффициенты в  $v_\lambda^8$ :

$$\begin{aligned}
 & R_3^{7\cdot8} \delta s_{7\cdot8} + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{6\cdot7} - R_2^{7\cdot8} R_3^{6\cdot7}) \delta s_{6\cdot7} + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{5\cdot6} + R_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{5\cdot6} + \\
 & + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_3^{5\cdot6}) \delta s_{5\cdot6} + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{4\cdot5} + R_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{4\cdot5} - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{4\cdot5} - \\
 & - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_3^{5\cdot6} R_3^{4\cdot5}) \delta s_{4\cdot5} + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{3\cdot4} + R_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{3\cdot4} - \\
 & - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{3\cdot4} + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{4\cdot5} P_3^{3\cdot4} + \\
 & + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_3^{3\cdot4}) \delta s_{3\cdot4} + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{2\cdot3} + R_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{2\cdot3} - \\
 & - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{2\cdot3} + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} P_3^{2\cdot3} - \\
 & - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} R_1^{3\cdot4} P_3^{2\cdot3} - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_2^{3\cdot4} R_3^{2\cdot3}) \delta s_{2\cdot3} + \\
 & + (-R_1^{7\cdot8} P_3^{1\cdot2} - R_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{1\cdot2} - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{1\cdot2} + \\
 & + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} P_3^{1\cdot2} - R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_2^{3\cdot4} P_3^{1\cdot2} + \\
 & + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_1^{3\cdot4} P_3^{1\cdot2} + R_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_2^{3\cdot4} R_2^{2\cdot3} R_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты в  $v_\alpha^8$ :

$$\begin{aligned}
 & Q_3^{7\cdot8} \delta s_{7\cdot8} + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{6\cdot7} + Q_2^{7\cdot8} R_3^{6\cdot7}) \delta s_{6\cdot7} + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{5\cdot6} + Q_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{5\cdot6} - \\
 & - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_3^{5\cdot6}) \delta s_{5\cdot6} + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{4\cdot5} - Q_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{4\cdot5} + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{4\cdot5} + \\
 & + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_3^{4\cdot5}) \delta s_{4\cdot5} + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{3\cdot4} - Q_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{3\cdot4} + \\
 & + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{3\cdot4} - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} P_3^{3\cdot4} - \\
 & - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_3^{3\cdot4}) \delta s_{3\cdot4} + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{2\cdot3} - Q_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{2\cdot3} + \\
 & + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{2\cdot3} - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} P_3^{2\cdot3} + \\
 & + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_1^{3\cdot4} P_3^{2\cdot3} + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_2^{3\cdot4} R_2^{2\cdot3}) \delta s_{2\cdot3} + \\
 & + (-Q_1^{7\cdot8} P_3^{1\cdot2} - Q_2^{7\cdot8} R_1^{6\cdot7} P_3^{1\cdot2} + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} P_3^{1\cdot2} - \\
 & - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_1^{4\cdot5} P_3^{1\cdot2} + Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_1^{3\cdot4} P_3^{1\cdot2} - \\
 & - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_2^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_1^{3\cdot4} P_3^{1\cdot2} - Q_2^{7\cdot8} R_2^{6\cdot7} R_1^{5\cdot6} R_2^{4\cdot5} R_2^{3\cdot4} R_2^{2\cdot3} R_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2}.
 \end{aligned}$$

В этих выражениях члены второго порядка малости опущены ( $P_1$  принято равным  $-1$ , члены с  $R_1 P_2$  отброшены и пр.).

В уравнении Лапласа формы (39) для  $P_3$  члены с  $\delta s$  представляются в таком виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{cosec. } \varphi_n}{MN \sin 1''} s_{7\cdot8} \{ \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{7\cdot6}) \delta s_{6\cdot7} + \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{6\cdot5}) \delta s_{5\cdot6} + \\
 & + \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{5\cdot4}) \delta s_{4\cdot5} + \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{4\cdot3}) \delta s_{3\cdot4} + \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{3\cdot2}) \delta s_{2\cdot3} + \\
 & + \sin(A^\circ_{7\cdot8} - A^\circ_{2\cdot1}) \delta s_{1\cdot2} \}. \tag{43}
 \end{aligned}$$

В (42) члены вида (43) суммируются.

В формулах (39) и (42) мы не привели членов с  $\delta s$ ; полагая, что  $\delta s$  вряд ли будет более  $1,5$  м, мы можем считать, что любой член с  $\delta s$  в уравнении Лапласа даст влияние не более  $0'',001$ ; но члены с  $(s' - s^\circ)$  могут иногда давать и  $0'',01$ , почему при вычислении свободного члена уравнения Лапласа эти члены следует удерживать.

Не трудно видеть из фиг. 8: член формулы (42) с  $(s'_{n-2,n-1} - s^{\circ}_{n-2,n-1})$  представляет проекцию  $s_{n-1,n}$  на перпендикуляр к направлению  $P_{n-2}P_{n-1}$  (отрезок  $k_{n-1}$  с отрицательным знаком); член той же формулы с  $(s'_{n-3,n-2} - s^{\circ}_{n-3,n-2})$  есть проекция диагонали  $P_nP_{n-2}$  на направление, перпендикулярное к  $P_{n-2}P_{n-3}$ ; член с  $(s'_{n-4,n-3} - s^{\circ}_{n-4,n-3})$  будет проекцией диагонали  $P_nP_{n-3}$  на направление, перпендикулярное к  $P_{n-3}P_{n-4}$  (абсолютно — отрезок  $k_{n-3}$ ), и т. д. Таким образом, возможно коэффициенты при  $(s' - s^{\circ})$  в (42) вычислять графически, по чертежу триангуляции в масштабе 1 : 1 000 000 или 1 : 1 500 000.

Представляется поэтому целесообразным пользоваться формулой (42).

Напомним, что для применения (39) или (42) надлежит за исходные данные при вычислении координат  $B^{\circ}$  и  $L^{\circ}$  взять:

$$\begin{aligned}B_1 &= \varphi_1 - \xi_1; \\L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1; \\A_{1 \cdot 2} &= \alpha_{1 \cdot 2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,\end{aligned}$$

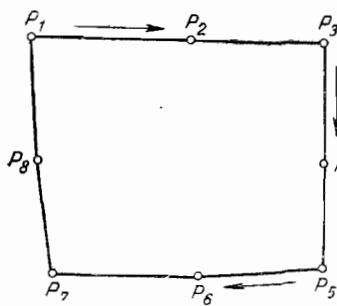
и провести это вычисление на эллипсоиде с окончательно принятыми размерами его осей.

Так как при вычислении  $B^{\circ}$  и  $L^{\circ}$  будут по двум третям геодезических линий использоваться величины  $s'$ , полученные из звеньевого уравнивания триангуляции, то для двух третей членов с  $(s' - s^{\circ})$  в (42) эти множители  $(s' - s^{\circ})$  будут равны нулю, что облегчит составление уравнений Лапласа.

*Цель настоящего исследования — дать общие формулы для уравнений Лапласа, освобождающие от вывода способом Гельмерта величин  $\xi$  и  $\eta$ , — достигнута.*

### § 5. Составление полигонных условий

Будем считать, что в замкнутом полигоне  $P_1P_2P_3 \dots P_8P_1$ , изображенном на фиг. 9, мы после выполнения звеньевого уравнивания вычислили геодезические координаты следующим образом:

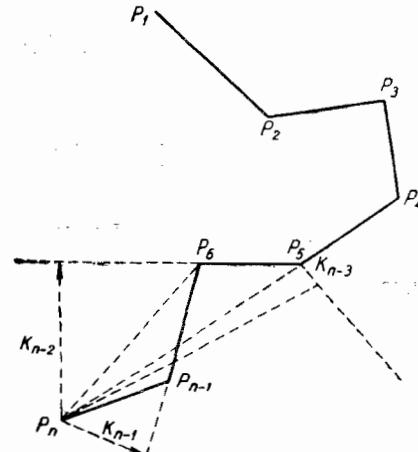


Фиг. 9

а) приняли за исходные в  $P_1^*$  координаты те, которые получились после установления исходных геодезических дат (§ 2) и размеров эллипса путем некоторой геодезической передачи от исходного пункта всей триангуляции;

б) от этих координат  $B^{\circ}_1$  и  $L^{\circ}_1$  вычислили координаты  $P_2$ , пользуясь геодезическим азимутом  $A_{1 \cdot 2}$  и расстоянием  $s'_{1 \cdot 2}$ , полученным из звеньевого уравнивания; этим путем получили для  $P_2$  координаты  $B^{\circ}_2$  и  $L^{\circ}_2$  и геодезический азимут  $A'_{2 \cdot 1}$ ;

\* Здесь  $P_1$  — вообще начальный пункт некоторого полигона триангуляции, вовсе не совпадающий с исходным пунктом  $P_1$  всей триангуляции (фиг. 5).



Фиг. 8

в) по углу  $P_1P_2P_3$ , выведенному из звеньевого уравнивания и равного  $\alpha_{2 \cdot 1} - \alpha_{2 \cdot 3}$ , и по азимуту  $A'_{2 \cdot 1}$  определяем геодезический азимут:

$$A'_{2 \cdot 3} = A'_{2 \cdot 1} - (\alpha_{2 \cdot 1} - \alpha_{2 \cdot 3}). \quad (44)$$

С азимутом  $A'_{2 \cdot 3}$  и расстоянием  $s'_{2 \cdot 3}$  вычисляем геодезические координаты  $B^{\circ}_{\cdot 3}$  и  $L^{\circ}_{\cdot 3}$  и геодезический азимут  $A'_{3 \cdot 2}$ :

г) как указано в пунктах «б» и «в», получаем с применением (44) координаты  $P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_1$  и геодезические азимуты  $A'_{3 \cdot 4}, A'_{4 \cdot 3}, \dots, A'_{8 \cdot 1}, A'_{1 \cdot 8}$ . Очевидно, если называть через  $(B^{\circ}_1)'$  и  $(L^{\circ}_1)'$  полученные указанным путем координаты  $P_1$ , то:

$B^{\circ}_1 - (B^{\circ}_1)'$  будет равно невязке полигона по широте,  
 $L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)'$  " " " " по долготе.

Невязки полигона будут в столь неощутимой степени зависеть от возможных в последующем изменении географического положения полигона и его ориентировки, что мы смело можем положить в предстоящем полигональном уравнивании:

$$dB_1^{\circ} = 0; \quad dL_1^{\circ} = 0.$$

На том же основании мы могли бы положить:

$$dA_{1 \cdot 2} = 0.$$

Однако последнее уравнение применять пока не станем, имея в виду совместное решение полигонных условий и условий Лапласа.

Теперь с обозначениями § 2 напишем:

$$dB_2^{\circ} = p_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2};$$

$$dL_2^{\circ} = q_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + q_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2};$$

$$dB_3^{\circ} = p_1^{2 \cdot 3} dB_2 + p_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_4^{2 \cdot 3} dA'_{2 \cdot 3};$$

$$dL_3^{\circ} = dL_2^{\circ} + q_1^{2 \cdot 3} dB_2 + q_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + q_4^{2 \cdot 3} dA'_{2 \cdot 3}.$$

Далее:

$$dA'_{2 \cdot 1} = r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + r_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2}.$$

На основании же (44):

$$dA'_{2 \cdot 3} = dA'_{2 \cdot 1} - (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}).$$

Следовательно:

$$dA'_{2 \cdot 3} = r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + r_4^{1 \cdot 2} dA_{1 \cdot 2} - \delta \alpha_{2 \cdot 1} + \delta \alpha_{2 \cdot 3}.$$

Теперь уравнения для  $dB_3$  и  $dL_3$  перепишем так:

$$\begin{aligned} dB_3 &= (p_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + p_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\ &+ (p_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) dA_{1 \cdot 2} - p_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}); \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} dL_3 &= (q_3^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + q_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\ &+ (q_4^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) dA_{1 \cdot 2} - q_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}). \end{aligned} \quad (46)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 dB_4 &= p_1^{3 \cdot 4} dB_3 + p_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + p_4^{3 \cdot 4} dA'_{3 \cdot 4}; \\
 dL_4 &= dL_3 + q_1^{3 \cdot 4} dB_3 + q_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + q_4^{3 \cdot 4} dA'_{3 \cdot 4}; \\
 dA'_{3 \cdot 2} &= r_1^{2 \cdot 3} dB_2 + r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + r_4^{2 \cdot 3} dA'_{2 \cdot 3}; \\
 dA'_{3 \cdot 2} &= (r_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + r_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\
 &+ (r_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - r_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) \\
 dA'_{3 \cdot 4} &= dA'_{3 \cdot 2} - (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}); \\
 dA'_{3 \cdot 4} &= (r_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + r_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + (r_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + \\
 &+ r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - r_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}); \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dB_4 &= (p_1^{3 \cdot 4} p_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + p_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + \\
 &+ (p_1^{3 \cdot 4} p_3^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + p_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4}) + \\
 &+ (p_1^{3 \cdot 4} p_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + p_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\
 &- (p_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - p_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}); \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dL_4 &= (q_3^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + \\
 &+ q_4^{3 \cdot 4} r_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + \\
 &+ (q_3^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_3^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + \\
 &+ (q_4^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + \\
 &+ q_4^{3 \cdot 4} r_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\
 &- (q_4^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - q_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}). \quad (49)
 \end{aligned}$$

После выполнения звеньевого уравнивания вряд ли можно ожидать  $\frac{\delta s}{R \sin 1''}$ , большее, чем  $0'',06$ , поэтому:

а) в выражениях (48) и (49) в коэффициентах при  $\delta s$  можно положить:

$$p_1 = 1; \quad p_4 r_1 = 0; \quad q_4 r_1 = 0; \quad q_1 p_4 = 0;$$

$$p_4 r_4 = p_4; \quad q_4 r_4 = q_4; \quad q_1 p_1 = q.$$

Из-за этого в отдельных членах будет допущена ошибка не более  $0'',00007$ ;

б) в коэффициентах при  $\delta \alpha$  можно положить:

$$p_1 = 1 \dots, \text{ если } p_1 \text{ множится на } p_4 \text{ или } q_4, \text{ или } q_1;$$

$$p_4 p_4 r_1 = 0; \quad q_4 p_4 r_1 = 0;$$

$$q_1 p_4 r_4 = q_1 p_4.$$

Применяя эти соображения, напишем:

$$\begin{aligned} dB_4 = & (p_3^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + (p_3^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + \\ & + p_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + (p_4^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (p_4^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - p_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}); \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} dL_4 = & (q_3^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{3 \cdot 4} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + \\ & + (q_3^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_3^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + q_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + \\ & + (q_4^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (q_4^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - q_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}). \end{aligned} \quad (51)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} dB_5 = & p_1^{4 \cdot 5} dB_4 + p_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + p_4^{4 \cdot 5} dA'_{4 \cdot 5}; \\ dL_5 = & dL_4 + q_1^{4 \cdot 5} dB_4 + q_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + q_4^{4 \cdot 5} dA'_{4 \cdot 5}; \\ dA'_{4 \cdot 5} = & dA'_{4 \cdot 3} + (\delta \alpha_{4 \cdot 5} - \delta \alpha_{4 \cdot 3}) = dA'_{4 \cdot 3} - (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}); \\ dA'_{4 \cdot 3} = & r_1^{3 \cdot 4} dB_3 + r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + r_4^{3 \cdot 4} dA'_{3 \cdot 4}; \\ dA'_{4 \cdot 5} = & (r_1^{3 \cdot 4} p_3^{1 \cdot 2} + r_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + \\ & + (r_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + r_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + \\ & + (r_1^{3 \cdot 4} p_4^{1 \cdot 2} + r_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + r_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (r_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - r_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - \\ & - (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}); \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} dB_5 = & (p_3^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{1 \cdot 2} + p_4^{4 \cdot 5} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + \\ & + (p_3^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3} + p_4^{4 \cdot 5} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + (p_3^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 5} r_3^{3 \cdot 4}) \delta s_{3 \cdot 4} + p_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + \\ & + p_4^{1 \cdot 2} + p_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + p_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (p_4^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} + p_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - \\ & - (p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4}) (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{4 \cdot 5} (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}); \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} dL_5 = & (q_3^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_3^{1 \cdot 2} + q_4^{3 \cdot 4} r_3^{1 \cdot 2} + q_1^{4 \cdot 5} p_3^{1 \cdot 2} + \\ & + q_4^{4 \cdot 5} r_3^{1 \cdot 2}) \delta s_{1 \cdot 2} + (q_3^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_3^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 5} p_3^{2 \cdot 3} + \\ & + q_4^{4 \cdot 5} r_3^{2 \cdot 3}) \delta s_{2 \cdot 3} + q_3^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 5} p_3^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 5} r_3^{3 \cdot 4}) \delta s_{3 \cdot 4} + q_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + \\ & + (q_4^{1 \cdot 2} + q_1^{2 \cdot 3} p_4^{1 \cdot 2} + q_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{1 \cdot 2} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (q_1^{4 \cdot 5} p_4^{1 \cdot 2} + q_1^{4 \cdot 5} p_4^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 5} p_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} r_4^{1 \cdot 2}) \delta A_{1 \cdot 2} - \\ & - (q_4^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 5} p_4^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 5} p_4^{3 \cdot 4} + \\ & + q_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}) (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - \\ & - (q_4^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 5} p_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4}) (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - q_4^{4 \cdot 5} (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}). \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть наш полигон состоит из четырех линий (фиг. 10); тогда в (53) и (54) коэффициенты при  $\delta A_{1 \cdot 2}$  становятся величинами второго порядка малости и коэффициент при  $\delta A_{1 \cdot 2}$  в (53) становится равным:

$$G = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{MN} (\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4),$$

где  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  и  $\Delta_4$  — площади треугольников, изображенных на черт. 6; этот коэффициент  $G$  даже при  $\delta A_{1 \cdot 2} = 2'',5$  даст в выражении для  $dB_5$  слагаемое не более  $0'',002$  даже при сторонах полигона около 300 км.

Имея в виду дать формулы не для дифференциалов координат каждой вершины полигона, а для невязки его по координатам, мы можем в (53) и (54) членами с  $\delta A_{1 \cdot 2}$  вовсе пренебречь.

Так как нередко замкнутые триангуляционные полигоны образуются четырьмя геодезическими линиями, то формулы (53) и (54) в этих случаях будут прямо приводить к полигональным уравнениям широты и долготы; именно имеем:

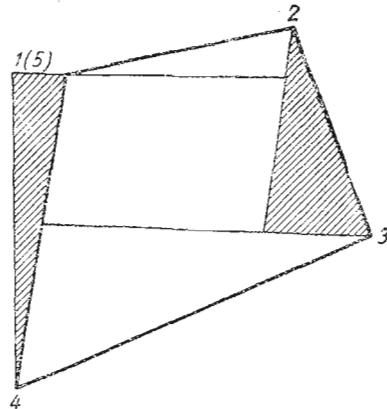
$$\begin{aligned} B_1^{\circ} - (B_1^{\circ})' &= [p_3^{1 \cdot 2} + (p_4^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1}) r_3^{1 \cdot 2}] \delta s_{1 \cdot 2} + \\ &+ [p_3^{2 \cdot 3} + (p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1}) r_3^{2 \cdot 3}] \delta s_{2 \cdot 3} + [p_3^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1} r_3^{3 \cdot 4}] \delta s_{3 \cdot 4} + \\ &+ p_3^{4 \cdot 1} \delta s_{4 \cdot 1} - [p_4^{2 \cdot 3} + (p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}) r_4^{2 \cdot 3}] (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - \\ &- [p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}] (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{4 \cdot 1} (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 1}); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} L_1^{\circ} - (L_1^{\circ})' &= \\ &= [q_3^{1 \cdot 2} + (q_1^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1}) p_3^{1 \cdot 2} + (q_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1}) r_3^{1 \cdot 2}] \delta s_{1 \cdot 2} + \\ &+ [q_3^{2 \cdot 3} + (q_1^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1}) p_3^{2 \cdot 3} + (q_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1}) r_3^{2 \cdot 3}] \delta s_{2 \cdot 3} + \\ &+ [q_3^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1} p_3^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1} r_3^{3 \cdot 4}] \delta s_{3 \cdot 4} + q_3^{4 \cdot 1} \delta s_{4 \cdot 1} - \\ &- [q_4^{2 \cdot 3} + (q_1^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1}) p_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 1} p_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3}] (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \\ &- \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - [q_4^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1} (p_4^{3 \cdot 4} + r_4^{3 \cdot 4})] (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - q_4^{4 \cdot 5} (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}). \end{aligned} \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) могут быть нередко применены непосредственно к составлению условий широты и долготы в полигоне из четырех вершин; их придется впоследствии еще несколько преобразовать.

Чтобы двинуться далее, т. е. получить формулы для полигонов с большим числом линий, перейдем от нахождения дифференциалов  $dB_n$  и  $dL_n$  к нахождению разностей  $dB_n - dB_{n-1} = \delta \varphi_{n-1, n}$  и  $dL_n - dL_{n-1} = \delta l_{n-1, n}$ . Имеем из предыдущего:

$$\left. \begin{aligned} \delta \varphi_{1 \cdot 2} &= p_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2}; \\ \delta \varphi_{2 \cdot 3} &= p_4^{2 \cdot 3} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} - p_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}); \\ \delta \varphi_{3 \cdot 4} &= p_4^{3 \cdot 4} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{3 \cdot 4} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} - \\ &- p_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - p_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \delta \alpha_{3 \cdot 4}); \\ \delta \varphi_{4 \cdot 5} &= p_4^{4 \cdot 5} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{4 \cdot 5} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_4^{4 \cdot 5} r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + \\ &+ p_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} - p_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta \alpha_{2 \cdot 1} - \delta \alpha_{2 \cdot 3}) - p_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta \alpha_{3 \cdot 2} - \\ &- \delta \alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{4 \cdot 5} (\delta \alpha_{4 \cdot 3} - \delta \alpha_{4 \cdot 5}). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$



Фиг. 10

Из общей формулы:

$$dB_n = p_1^{n-1,n} dB_{n-1} + p_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} + p_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n}$$

имеем:

$$\begin{aligned} dB_n &= p_1^{n-1,n} dB_{n-1} + p_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} + \\ &+ p_4^{n-1,n} [dA'_{n-1,n-2} - (\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-1,n})] \\ dB_{n-1} &= p_1^{n-2,n-1} dB_{n-2} + p_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + \\ &+ p_4^{n-2,n-1} [dA'_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-2,n-1}]. \end{aligned}$$

Так как в коэффициентах при  $\delta s$  мы можем не различать  $p_1$  от единицы, и также произведение  $p_1 p_4$  можем не различать от  $p_4$ , то, имея в виду, что все члены, обусловленные изменением азимутов, непременно входят в  $dB_n$  с множителями  $p_4$ , можем написать:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{n-1,n} = dB_n - dB_{n-1} &= \delta\varphi_{n-2,n-1} + p_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - \\ &- p_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + p_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n-2} - p_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-3} - \\ &- p_4^{n-1,n} (\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-1,n}) + p^{n-2,n-1} (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-2,n-1}). \end{aligned} \quad (58)$$

Далее:

$$\begin{aligned} dA'_{n-1,n-2} &= r_1^{n-2,n-1} dB_{n-2} + r_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + r_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-1}; \\ dA'_{n-2,n-3} &= r_1^{n-3,n-2} dB_{n-3} + r_3^{n-3,n-2} \delta s_{n-2,n-3} + r_4^{n-3,n-2} dA'_{n-3,n-2}. \end{aligned}$$

В разности:

$$p_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n-2} - p_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-3}$$

члены с  $dB_{n-2}$  и  $dB_{n-3}$  будут иметь при слагаемых с  $\delta s$  множители  $p_4 r_1$  и при слагаемых с  $\delta\alpha$  — множители  $p_4 r_1 p_4$ . Поэтому:

$$\begin{aligned} p_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n-2} - p_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-3} &= p_4^{n-1,n} r_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} - \\ &- p_4^{n-2,n-1} r_3^{n-3,n-2} \delta s_{n-2,n-3} + p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-1} - \\ &- p_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} dA'_{n-3,n-2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Присоединяя формулу (59) к (58), мы можем теперь получать, начиная с  $\delta\varphi_{4,5}$ , все следующие  $\delta\varphi$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} p_4^{5,6} dA'_{5,4} - p_4^{4,5} dA'_{4,3} &= p_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ p_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} - p_4^{4,5} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) - p_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,5}) - p_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - \\ &- p_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) + p_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}); \\ \delta\varphi_{5,6} &= p_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ &+ p_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,5}) - p_4^{5,6} (\delta\alpha_{5,4} - \delta\alpha_{5,6}). \end{aligned} \quad (60)$$

Далее:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_{6 \cdot 7} = & p_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} - p_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} + p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - p_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} (\delta\alpha_{6 \cdot 5} - \delta\alpha_{6 \cdot 7}) + p_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}); \\
 p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - p_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} = & p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} - p_4^{5 \cdot 6} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 6} - \\
 & - p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} dA'_{4 \cdot 5}; \\
 dA'_{5 \cdot 6} = & dA'_{5 \cdot 4} + \delta\alpha_{5 \cdot 6} - \delta\alpha_{5 \cdot 4}; \\
 dA'_{4 \cdot 5} = & dA'_{4 \cdot 3} + \delta\alpha_{4 \cdot 5} - \delta\alpha_{4 \cdot 3}; \\
 p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - p_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} = & p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} - p_4^{5 \cdot 6} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} - \\
 & - p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} dA'_{4 \cdot 3} - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}) + p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5}); \quad (61) \\
 p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - p_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} = & p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} - p_4^{5 \cdot 6} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} - \\
 & - p_4^{5 \cdot 6} r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5}) - p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\
 & + p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) + p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}) + p_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5}); \quad (62) \\
 \delta\varphi_{6 \cdot 7} = & p_4^{6 \cdot 7} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + \\
 & + p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} + p_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5}) - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}) - p_4^{6 \cdot 7} (\delta\alpha_{6 \cdot 5} - \delta\alpha_{6 \cdot 7}); \quad (63) \\
 \delta\varphi_{7 \cdot 8} = & \delta\varphi_{6 \cdot 7} + p_3^{7 \cdot 8} \delta s_{7 \cdot 8} - p_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} + p_4^{7 \cdot 8} dA'_{7 \cdot 6} - p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - \\
 & - p_4^{7 \cdot 8} (\delta\alpha_{7 \cdot 6} - \delta\alpha_{7 \cdot 8}) + p_4^{6 \cdot 7} \delta\alpha_{6 \cdot 5} - \delta\alpha_{6 \cdot 7}; \\
 p_4^{7 \cdot 8} dA'_{7 \cdot 6} - p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} = & p_4^{7 \cdot 8} r_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} + p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 7} - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 6} = p_4^{7 \cdot 8} r_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} + p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} dA'_{5 \cdot 4} - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} (\delta\alpha_{6 \cdot 5} - \delta\alpha_{6 \cdot 7}) + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}); \\
 p_4^{7 \cdot 8} dA'_{7 \cdot 6} - p_4^{6 \cdot 7} dA'_{6 \cdot 5} = & p_4^{7 \cdot 8} r_3^{6 \cdot 7} \delta s_{6 \cdot 7} - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} + p_4^{7 \cdot 8} r_3^{5 \cdot 6} \delta s_{5 \cdot 6} - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} + p_4^{7 \cdot 8} r_3^{4 \cdot 5} \delta s_{4 \cdot 5} - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} + p_4^{7 \cdot 8} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} + p_4^{7 \cdot 8} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + \\
 & + p_4^{7 \cdot 8} r_3^{3 \cdot 4} \delta s_{3 \cdot 4} - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) - \\
 & - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5}) - \\
 & - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{1 \cdot 2} \delta s_{1 \cdot 2} - p_4^{6 \cdot 7} r_3^{2 \cdot 3} \delta s_{2 \cdot 3} + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} r_4^{2 \cdot 3} (\delta\alpha_{2 \cdot 1} - \delta\alpha_{2 \cdot 3}) + \\
 & + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} r_4^{3 \cdot 4} (\delta\alpha_{3 \cdot 2} - \delta\alpha_{3 \cdot 4}) - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} (\delta\alpha_{6 \cdot 5} - \delta\alpha_{6 \cdot 7}) + \\
 & + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}) - p_4^{7 \cdot 8} r_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} (\delta\alpha_{5 \cdot 4} - \delta\alpha_{5 \cdot 6}) + \\
 & + p_4^{6 \cdot 7} r_4^{5 \cdot 6} r_4^{4 \cdot 5} (\delta\alpha_{4 \cdot 3} - \delta\alpha_{4 \cdot 5});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{7,8} = & p_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta S_{1,2} + p_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta S_{2,3} + p_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta S_{3,4} + p_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta S_{4,5} + \\
& + p_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta S_{5,6} + p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} + p_3^{7,8} \delta S_{7,8} - \\
& - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta x_{2,1} - \delta x_{2,3}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta x_{3,2} - \delta x_{3,4}) - \\
& - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta x_{4,3} - \delta x_{4,5}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta x_{5,4} - \delta x_{5,6}) - \\
& - p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta x_{6,5} - \delta x_{6,7}) - p_4^{7,8} (\delta x_{7,6} - \delta x_{7,8}); \quad (64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{8,9} = & \delta\varphi_{7,8} + p_3^{8,9} \delta S_{8,9} - p_3^{7,8} \delta S_{7,8} + p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} - \\
& - p_4^{8,9} (\delta x_{8,7} - \delta x_{8,9}) + p_4^{7,8} (\delta x_{7,8} - \delta x_{7,9}); \\
p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} = & p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta S_{7,8} - p_4^{8,7} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} + p_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,8} - \\
& - p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,7} = p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta S_{7,8} - p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} + p_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,6} - \\
& - p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{8,9} r_4^{6,7} (\delta x_{7,6} - \delta x_{7,8}) + p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta x_{6,5} - \delta x_{6,7}); \\
p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} = & p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta S_{7,8} - p_4^{8,7} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} + p_4^{8,9} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} - \\
& - p_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta S_{5,6} + p_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta S_{5,6} - p_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta S_{4,5} + p_4^{8,9} r_3^{4,5} \delta S_{4,5} - \\
& - p_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta S_{3,4} + p_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta S_{1,2} + p_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta S_{2,3} + p_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta S_{3,4} - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta x_{2,1} - \delta x_{2,3}) - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta x_{3,2} - \delta x_{3,4}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta x_{4,3} - \delta x_{4,5}) - \\
& - p_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta S_{1,2} - p_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta S_{2,3} + p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta x_{2,1} - \delta x_{2,3}) + \\
& + p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta x_{3,2} - \delta x_{3,4}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta x_{5,4} - \delta x_{5,6}) + \\
& + p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta x_{4,3} - \delta x_{4,5}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta x_{6,5} - \delta x_{6,7}) + \\
& + p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta x_{5,4} - \delta x_{5,6}) - p_4^{8,9} r_4^{6,7} (\delta x_{7,6} - \delta x_{7,8}) + p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta x_{6,5} - \delta x_{6,7}); \\
\delta\varphi_{8,9} = & p_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta S_{1,2} + p_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta S_{2,3} + p_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta S_{3,4} + p_4^{8,9} r_3^{4,5} \delta S_{4,5} + \\
& + p_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta S_{5,6} + p_4^{8,9} r_3^{6,7} \delta S_{6,7} + p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta S_{7,8} + p_3^{8,9} \delta S_{8,9} - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta x_{2,1} - \delta x_{2,3}) - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta x_{3,2} - \delta x_{3,4}) - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta x_{4,3} - \delta x_{4,5}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta x_{5,4} - \delta x_{5,6}) - \\
& - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta x_{6,5} - \delta x_{6,7}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta x_{7,6} - \delta x_{7,8}) - p_4^{8,9} (\delta x_{8,7} - \delta x_{8,9}). \quad (65)
\end{aligned}$$

Очевидно, мы пришли к совершенно общей формуле:

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_{n-1,n} = & p_4^{n-1,n} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{n-1,n} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{n-1,n} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \dots + \\
 & + p_4^{n-1,n} r_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + p_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots \\
 & \dots r_4^{2,3} (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{3,4} (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) - \\
 & - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{4,5} (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,5}) - \dots - \\
 & - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} r_4^{n-4,n-3} (\delta\alpha_{n-4,n-5} - \delta\alpha_{n-4,n-3}) - \\
 & - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} (\delta\alpha_{n-3,n-4} - \delta\alpha_{n-3,n-2}) - p_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \\
 & - \delta\alpha_{n-2,n-1}) - p_4^{n-1,n} (\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-1,n}). \tag{66}
 \end{aligned}$$

Переходим теперь к формулам для  $\delta l$ . Имеем из предыдущего:

$$\begin{aligned}
 \delta l_{1,2} = & q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + q_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2}; \\
 \delta l_{2,3} = & q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} - q_4^{2,3} (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}); \\
 \delta l_{3,4} = & (q_1^{3,4} p_3^{1,2} + q_4^{3,4} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{3,4} p_3^{2,3} + q_2^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} - \\
 & - (q_1^{3,4} p_4^{2,3} + q_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}); \\
 \delta l_{4,5} = & (q_1^{4,5} p_3^{1,2} + q_4^{4,5} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{4,5} p_3^{2,3} + q_4^{4,5} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\
 & + (q_1^{4,5} p_3^{3,4} + q_4^{4,5} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + q_3^{4,5} \delta s_{4,5} - \\
 & - (q_1^{4,5} p_4^{2,3} + q_4^{4,5} p_4^{3,4} + q_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{2,3}) - \\
 & - (q_1^{4,5} p_4^{3,4} + q_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{3,4}) - q_4^{4,5} (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{4,5}). \tag{67}
 \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned}
 dL_n = & dL_{n-1} + q_1^{n-1,n} dB_{n-1} + q_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} + q_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n}; \\
 \frac{\delta l_{n-1,n}}{q_1^{n-1,n}} = & dB_{n-1} + \frac{q_3^{n-1,n}}{q_1^{n-1,n}} \delta s_{n-1,n} + \frac{q_4^{n-1,n}}{q_1^{n-1,n}} dA'_{n-1,n}; \\
 \frac{\delta l_{n-2,n-1}}{q_1^{n-1,n-1}} = & dB_{n-2} + \frac{q_3^{n-2,n-1}}{q_1^{n-2,n-1}} \delta s_{n-2,n-1} + \frac{q_4^{n-2,n-1}}{q_1^{n-2,n-1}} dA'_{n-2,n-1}; \\
 \delta l_{n-1,n} = & \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} \delta l_{n-2,n-1} + q_1^{n-1,n} \delta\varphi_{n-2,n-1} + q_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - \\
 & - \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} q_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n} + \\
 & + \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} q_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-1}; \\
 \delta l_{n-1,n} = & \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} \delta l_{n-2,n-1} + q_1^{n-1,n} \delta\varphi_{n-2,n-1} + q_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - \\
 & - \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} q_3^{n-2,n-1} \delta s_{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} dA'_{n-1,n-2} - \\
 & - \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} q_4^{n-2,n-1} dA'_{n-2,n-3} - q_4^{n-1,n} (\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-1,n}) + \\
 & + \frac{q_1^{n-1,n}}{q_1^{n-2,n-1}} q_4^{n-2,n-1} (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-2,n-1}). \tag{68}
 \end{aligned}$$

Формулой (68) воспользуемся для получения  $\delta l$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & (q_1^{5.6} p_3^{1.2} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{5.6} p_3^{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ & + (q_1^{5.6} p_3^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_3^{4.5} \delta s_{4.5} - (q_1^{5.6} p_4^{2.3} + \\ & + q_1^{5.6} p_4^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - \left( q_1^{5.6} p_4^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\ & - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) + q_1^{5.6} p_3^{4.5} \delta s_{4.5} - q_1^{5.6} p_4^{4.5} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - q_1^{5.6} p_4^{4.5} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_1^{5.6} p_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) + q_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \\ & - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_3^{4.5} \delta s_{4.5} + q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3} - q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + \\ & + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}). \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & (q_1^{5.6} p_3^{1.2} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + \left( q_1^{5.6} p_3^{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3} \right) \delta s_{2.3} + \\ & + q_1^{5.6} p_3^{4.5} \delta s_{4.5} + q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + \left( q_1^{5.6} p_3^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4} \right) \delta s_{3.4} - \\ & - \left( q_1^{5.6} p_4^{2.3} + q_1^{5.6} p_4^{3.4} + q_1^{5.6} p_4^{4.5} \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - \left( q_1^{5.6} p_4^{3.4} + q_1^{5.6} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\ & - q_1^{5.6} p_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \\ & - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3}; \\ q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3} = & q_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + \\ + q_4^{5.6} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + & q_4^{5.6} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + q_4^{5.6} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} - q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \\ - \delta \alpha_{2.3}) - & q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - \\ - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} - & \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \\ - \delta \alpha_{2.3}) + & \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & (q_1^{5.6} p_3^{1.2} + q_4^{5.6} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{5.6} p_3^{2.3} + q_4^{5.6} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ & + (q_1^{5.6} p_3^{3.4} + q_4^{5.6} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + (q_1^{5.6} p_3^{4.5} + q_4^{5.6} r_3^{4.5}) \delta s_{4.5} + q_3^{5.6} \delta s^{5.6} - \\ & - (q_1^{5.6} p_4^{2.3} + q_1^{5.6} p_4^{3.4} + q_1^{5.6} p_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - (q_1^{5.6} p_4^{3.4} + q_1^{5.6} p_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\ & - (-q_1^{5.6} p_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}). \quad (69) \end{aligned}$$

Продолжаем далее:

$$\begin{aligned} \delta l_{6.7} = & \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} \delta l_{5.6} + q_1^{6.7} \delta \varphi_{5.6} + q_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \\ & - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} - q_4^{6.7} (\delta \alpha_{6.5} - \delta \alpha_{6.7}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}); \\ \delta l_{6.7} = & (q_1^{6.7} p_3^{1.2} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{6.7} p_3^{2.3} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ & + (q_1^{6.7} p_3^{3.4} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + (q_1^{6.7} p_3^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5}) \delta s_{4.5} + \\ & + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + q_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \\ & - (q_1^{6.7} p_4^{2.3} + q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - (q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\ & - (q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + \\ & + q_1^{6.7} p_3^{5.6} \delta s_{5.6} - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\ & - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) - q_4^{6.7} (\delta \alpha_{6.5} - \delta \alpha_{6.7}) + \\ & + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4}. \end{aligned}$$

Из предыдущего:

$$\begin{aligned} q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} = & q_4^{6.7} r_3^{5.7} \delta s_{5.6} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} + \\ & + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + q_4^{6.7} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + q_4^{6.7} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \\ & + q_4^{6.7} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - \\ & - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - \\ & - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \\ & - \delta \alpha_{2.3}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + \\ & + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}). \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned}
 \delta l_{6\cdot7} = & (q_1^{6\cdot7} p_3^{1\cdot2} + q_4^{6\cdot7} r_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2} + (q_1^{6\cdot7} p_3^{2\cdot3} q_4^{6\cdot7} r_3^{2\cdot3}) \delta s_{2\cdot3} + \\
 & + (q_1^{6\cdot7} p_3^{3\cdot4} + q_4^{6\cdot7} r_3^{3\cdot4}) \delta s_{3\cdot4} + (q_1^{6\cdot7} p_3^{4\cdot5} + q_4^{6\cdot7} r_3^{4\cdot5}) \delta s_{4\cdot5} + \\
 & + (q_1^{6\cdot7} p_3^{5\cdot6} + q_4^{6\cdot7} r_3^{5\cdot6}) \delta s_{5\cdot6} + q_3^{6\cdot7} \delta s_{6\cdot7} - q_1^{6\cdot7} p_4^{2\cdot3} + \\
 & + q_1^{6\cdot7} p_4^{3\cdot4} + q_1^{6\cdot7} p_4^{4\cdot5} + q_1^{6\cdot7} p_4^{5\cdot6} + q_4^{6\cdot7} r_4^{5\cdot6} r_4^{4\cdot5} r_4^{3\cdot4} r_4^{2\cdot3}) (\delta x_{2\cdot1} - \delta x_{2\cdot3}) - \\
 & - (q_1^{6\cdot7} p_4^{3\cdot4} + q_1^{6\cdot7} p_4^{4\cdot5} + q_1^{6\cdot7} p_4^{5\cdot6} + q_4^{6\cdot7} r_4^{5\cdot6} r_4^{4\cdot5} r_4^{3\cdot4}) (\delta x_{3\cdot2} - \delta x_{3\cdot4}) - \\
 & - (q_1^{6\cdot7} p_4^{4\cdot5} + q_1^{6\cdot7} p_4^{5\cdot6} + q_4^{6\cdot7} r_4^{5\cdot6} r_4^{4\cdot5}) (\delta x_{4\cdot3} - \delta x_{4\cdot5}) - \\
 & - (q_1^{6\cdot7} p_4^{5\cdot6} + q_4^{6\cdot7} r_4^{5\cdot6}) (\delta x_{5\cdot4} - \delta x_{5\cdot6}) - q_4^{6\cdot7} (\delta x_{6\cdot5} - \delta x_{6\cdot7}). \quad (70)
 \end{aligned}$$

Переходим к вычислению  $\delta l_{7\cdot8}$ , имеем:

$$\begin{aligned}
 \delta l_{7\cdot8} = & \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} \delta l_{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} \delta \varphi_{6\cdot7} + q_3^{7\cdot8} \delta s_{7\cdot8} - \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_3^{6\cdot7} \delta s_{6\cdot7} + \\
 & + q_4^{7\cdot8} dA'_{7\cdot6} - \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} dA'_{6\cdot5} - q_4^{7\cdot8} (\delta x_{7\cdot6} - \delta x_{7\cdot8}) + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} (\delta x_{6\cdot5} - \delta x_{6\cdot7}); \\
 \delta l_{7\cdot8} = & (q_1^{7\cdot8} p_3^{1\cdot2} + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} r_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2} + (q_1^{7\cdot8} p_3^{2\cdot3} + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} r_3^{2\cdot3}) \delta s_{2\cdot3} + \\
 & + q_1^{7\cdot8} p_3^{3\cdot4} + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} r_3^{3\cdot4}) \delta s_{3\cdot4} + (q_1^{7\cdot8} p_3^{4\cdot5} + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} r_3^{4\cdot5}) \delta s_{4\cdot5} + \\
 & + (q_1^{7\cdot8} p_3^{5\cdot6} + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} r_3^{5\cdot6}) \delta s_{5\cdot6} + q_3^{6\cdot7} \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} \delta s_{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} p_3^{6\cdot7} \delta s_{6\cdot7} + \\
 & + q_3^{7\cdot8} \delta s_{7\cdot8} - q_3^{6\cdot7} \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} \delta s_{6\cdot7} - (q_1^{7\cdot8} p_4^{2\cdot3} + q_1^{7\cdot8} p_4^{3\cdot4} + q_1^{7\cdot8} p_4^{4\cdot5} + q_1^{7\cdot8} p_4^{5\cdot6} + \\
 & + q_1^{7\cdot8} p_4^{6\cdot7} + q_4^{6\cdot7} r_4^{5\cdot6} r_4^{4\cdot5} r_4^{3\cdot4} r_4^{2\cdot3}) (\delta x_{1\cdot2} - \delta x_{2\cdot3}) - (q_1^{7\cdot8} p_4^{3\cdot4} + \\
 & + q_1^{7\cdot8} p_4^{4\cdot5} + q_1^{7\cdot8} p_4^{5\cdot6} + q_1^{7\cdot8} p_4^{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} p_4^{7\cdot9}) (\delta x_{3\cdot2} - \delta x_{3\cdot4}) - \\
 & - (q_1^{7\cdot8} p_4^{4\cdot5} + q_1^{7\cdot8} p_4^{5\cdot6} + q_1^{7\cdot8} p_4^{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} p_4^{7\cdot9}) (\delta x_{4\cdot3} - \delta x_{4\cdot5}) - \\
 & - (q_1^{7\cdot8} p_4^{5\cdot6} + q_1^{7\cdot8} p_4^{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} p_4^{7\cdot9}) (\delta x_{5\cdot4} - \delta x_{5\cdot6}) - \\
 & - (q_1^{7\cdot8} p_4^{6\cdot7} + q_1^{7\cdot8} p_4^{7\cdot9}) (\delta x_{6\cdot5} - \delta x_{6\cdot7}) - q_4^{7\cdot8} (\delta x_{7\cdot6} - \delta x_{7\cdot8}) + \\
 & + \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} (\delta x_{6\cdot5} - \delta x_{6\cdot7}) + q_4^{7\cdot8} dA'_{7\cdot6} - \frac{q_1^{7\cdot8}}{q_1^{6\cdot7}} q_4^{6\cdot7} dA'_{6\cdot5};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} = q_4^{7.8} r_3^{6.7} \delta S_{6.7} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{5.6} \delta S_{5.6} + \\
& + q_4^{7.8} r_3^{5.6} \delta S_{5.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{4.5} \delta S_{4.5} + q_4^{7.8} r_3^{4.5} \delta S_{4.5} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{3.4} \delta S_{3.4} + \\
& + q_4^{7.8} r_3^{1.2} \delta S_{1.2} + q_4^{7.8} r_3^{2.3} \delta S_{2.3} + q_4^{7.8} r_3^{3.4} \delta S_{3.4} - \\
& - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \\
& - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{1.2} \delta S_{1.2} - \\
& - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{2.3} \delta S_{2.3} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) + \\
& + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} (\delta \alpha_{6.5} - \delta \alpha_{6.7}) + \\
& + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) + \\
& + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}).
\end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
& \delta l_{7.8} = (q_1^{7.8} p_3^{1.2} + q_4^{7.8} r_3^{1.2}) \delta S_{1.2} + (q_1^{7.8} p_3^{2.3} + q_4^{7.8} r_3^{2.3}) \delta S_{2.3} + \\
& + (q_1^{7.8} p_3^{3.4} + q_4^{7.8} r_3^{3.4}) \delta S_{3.4} + (q_1^{7.8} p_3^{4.5} + q_4^{7.8} r_3^{4.5}) \delta S_{4.5} + (q_1^{7.8} p_3^{5.6} + \\
& + q_4^{7.8} r_3^{5.6}) \delta S_{5.6} + (q_1^{7.8} p_3^{6.7} + q_4^{7.8} r_3^{6.7}) \delta S_{6.7} + q_3^{7.8} \delta S_{7.8} - \\
& - (q_1^{7.8} p_4^{2.3} + q_1^{7.8} p_4^{3.4} + q_1^{7.8} p_4^{4.5} + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \\
& + q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - (q_1^{7.8} p_4^{3.4} + q_1^{7.8} p_4^{4.5} + \\
& + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\
& - (q_1^{7.8} p_4^{4.5} + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) - \\
& - (q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6}) (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) - \\
& - (q_1^{7.8} p_4^{6.7} + q_4^{7.8} r_4^{6.7}) (\delta \alpha_{6.5} - \delta \alpha_{6.7}) - q_4^{7.8} (\delta \alpha_{7.6} - \delta \alpha_{7.8}). \quad (71)
\end{aligned}$$

Конечно, мы теперь можем написать:

$$\begin{aligned}
& \delta l_{8.9} = (q_1^{8.9} p_3^{1.2} + q_4^{8.9} r_3^{1.2}) \delta S_{1.2} + (q_1^{8.9} p_3^{2.3} + q_4^{8.9} r_3^{2.3}) \delta S_{2.3} + \\
& + (q_1^{8.9} p_3^{3.4} + q_4^{8.9} r_3^{3.4}) \delta S_{3.4} + (q_1^{8.9} p_3^{4.5} + q_4^{8.9} r_3^{4.5}) \delta S_{4.5} + \\
& + q_1^{8.9} p_3^{5.6} + q_4^{8.9} r_3^{5.6}) \delta S_{5.6} + (q_1^{8.9} p_3^{6.7} + q_4^{8.9} r_3^{6.7}) \delta S_{6.7} + \\
& + (q_1^{8.9} p_3^{7.8} + q_4^{8.9} r_3^{7.8}) \delta S_{7.8} + q_3^{8.9} \delta S_{8.9} - \\
& - (q_1^{8.9} p_4^{2.3} + q_1^{8.9} p_4^{3.4} + q_1^{8.9} p_4^{4.5} + q_1^{8.9} p_4^{5.6} + q_1^{8.9} p_4^{6.7} + q_1^{8.9} p_4^{7.8} + \\
& + q_4^{8.9} r_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{1.2} - \delta \alpha_{2.3}) - (q_1^{8.9} p_4^{3.4} + q_1^{8.9} p_4^{4.5} + \\
& + q_1^{8.9} p_4^{5.6} + q_1^{8.9} p_4^{6.7} + q_1^{8.9} p_4^{7.8} + q_4^{8.9} r_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - \\
& - (q_1^{8.9} p_4^{4.5} + q_1^{8.9} p_4^{5.6} + q_1^{8.9} p_4^{6.7} + q_1^{8.9} p_4^{7.8} + q_4^{8.9} r_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta \alpha_{4.3} - \\
& - \delta \alpha_{4.5}) - (q_1^{8.9} p_4^{5.6} + q_1^{8.9} p_4^{6.7} + q_1^{8.9} p_4^{7.8} + q_4^{8.9} r_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6}) (\delta \alpha_{5.4} - \delta \alpha_{5.6}) - \\
& - (q_1^{8.9} p_4^{6.7} + q_1^{8.9} p_4^{7.8} + q_4^{8.9} r_4^{7.8} r_4^{6.7}) (\delta \alpha_{6.5} - \delta \alpha_{6.7}) - \\
& - (q_1^{8.9} p_4^{7.8} + q_4^{8.9} r_4^{7.8}) (\delta \alpha_{7.6} - \delta \alpha_{7.8}) - q_4^{8.9} (\delta \alpha_{8.7} - \delta \alpha_{8.9}). \quad (72)
\end{aligned}$$

Общую формулу имеем в таком, следовательно, виде:

Итак, общие формулы для составления условий широты и долготы в замкнутом полигоне получены.

Надлежит обратить еще раз внимание, что вследствие пренебрежения членами с  $\delta A_{1 \cdot 2}$  эти формулы пригодны именно только для замкнутого многоугольника и только для выражения несмыкаемости в нем (по широте или по долготе); нельзя формулами (66) и (73), а также более ранними формулами для  $dB$  и  $dL$  пользоваться для вычисления изменений в координатах произвольной вершины многоугольника (если только  $\delta A_{1 \cdot 2}$  не равен нулю). Точно так же для действительности формул (66) и (73) обязательен порядок вычисления азимутов  $A'$  многоугольника, указанный в начале настоящего параграфа, т. е. в каждом многоугольнике от геодезического азимута  $A$  в круговом порядке, используя расстояния  $s'$ , выведенные из звеньевого уравнения, и углы между геодезическими линиями, выведенные из того же уравнения; вычисление это заканчивается на последней линии многоугольника [от  $(n-1)$ -й к  $n$ -й вершине] и проводится по всем линиям многоугольника независимо от того, что в смежном многоугольнике аналогичные вычисления уже были выполнены. Но при этом, конечно, допускается использование вычислений по одной — двум линиям, являющимся смежными с предыдущими многоугольниками. Пусть на фиг. 11 линии  $1, 2; 2, 3; \dots; n-1, n; n, n+1$  суть геодезические линии, соединяющие пункты Лапласа. Стороны триангуляции (выходные), для которых были определены астрономические азимуты, назовем через  $II, III, IIII, \dots, AB, CD, EF$ ; ошибки определения этих азимутов назовем соответственно  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{n-1}, \delta_n, \delta_{n+1}$ . Ошибки углов:  $\beta_{1 \cdot 2}$  — при  $P_1$  между  $II$  и  $1, 2$ ;  $\beta_{2 \cdot 1}$  — при  $P_2$  между  $III$  и  $2, 1$ ;  $\beta_{2 \cdot 3}$  — при  $P_2$  между  $III$  и  $2, 3$ ;  $\beta_{n, n-1}$  и  $\beta_{n, n+1}$  — при  $P_n$  между  $CD$  и  $n, n-1$  назовем соответственно через  $v_{1 \cdot 2}, v_{2 \cdot 1}, v_{2 \cdot 3}, \dots, v_{n, n-1}, v_{n, n+1}$ , полагая, что углы  $\beta$  отчитываются по ходу часовой стрелки, как указано на фиг. 11.

Очевидно, имеем:

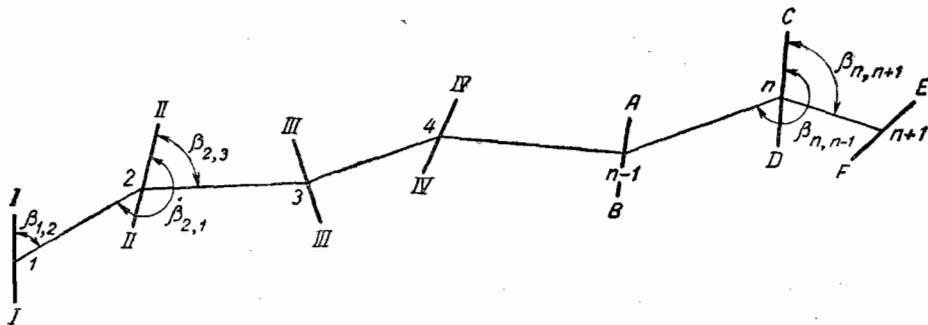
$$\begin{aligned} \delta x_{1 \cdot 2} &= \delta_1 + v_{1 \cdot 2}; \quad \delta x_{2 \cdot 1} = \delta_2 + v_{2 \cdot 1}; \quad \delta x_{2 \cdot 3} = \delta_2 + v_{2 \cdot 3}; \\ \delta x_{n, n-1} &= \delta_n + v_{n, n-1}; \quad \delta x_{n, n+1} = \delta_n + v_{n, n+1}. \end{aligned} \quad (74)$$

\*  $k = i + 1$ .

Как нетрудно видеть, в уравнениях (66) и (73) после подстановки равенства (74) поправки  $\delta$  наблюденных непосредственно азимутов в триангуляции совсем исчезнут, а останутся лишь разности  $v$  в виде пар:

$$v_{2 \cdot 1} - v_{2 \cdot 3}; \quad v_{3 \cdot 2} - v_{3 \cdot 4}; \quad v_{4 \cdot 3} - v_{4 \cdot 5}; \quad \dots; \quad v_{n-1, n-2} - v_{n-1, n},$$

т. е. в условия широты и долготы войдут, кроме поправок длин сторон полигона, еще поправки всех его углов, кроме угла при исходной его вершине. В уравнения Лапласа, очевидно, войдут поправки углов между сторонами полигона, за исключением первой вершины  $P_1$  и последней вершины  $P_n$  хода  $P_1P_2P_3\dots P_n$ , для которого пишется условие Лапласа: на  $P_1$  войдет  $\delta_1 + v_{1 \cdot 2}$  и на  $P_n$  войдет  $\delta_n + v_{n-1, n}$ . Преобразование полученных нами уравнений при помощи (74) выполним ниже.



Фиг. 11

Как видно из (73), вычисление коэффициентов этого уравнения значительно облегчается тем, что коэффициенты при  $(\delta\alpha_{i, i-1} - \delta\alpha_{i, k})$  получаются постепенным прикладыванием только одного нового слагаемого и умножением члена с  $q_4$  на один новый множитель при переходе от  $(\delta\alpha_{i, i-1} - \delta\alpha_{i, k})$  к  $(\delta\alpha_{i-1, i-2} - \delta\alpha_{i-1, i})$ . Теперь обратимся к так называемому угловому условию в полигоне. Используем уравнения (42) § 4; именно, представим себе, что имеем дело с замкнутым ходом, и будем считать вершину  $n$  первой, исходной вершиной полигона. Тогда уравнение Лапласа для линии  $n-1, 1$  напишется так:

$$\begin{aligned} & (\delta\alpha_{1, n-1} - \delta\alpha_{1, 2}) + (\delta\alpha_{n-1, n-2} - \delta\alpha_{n-1, 1}) + (\delta\alpha_{n-2, n-3} - \delta\alpha_{n-2, n-1}) + \\ & + \dots + (\delta\alpha_{4, 3} - \delta\alpha_{4, 5}) + (\delta\alpha_{3, 2} - \delta\alpha_{3, 4}) + (\delta\alpha_{2, 1} - \delta\alpha_{2, 3}) + \\ & + \frac{s_{n-1}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{n-1, 1} - A^{\circ}_{n-1, n-2})(s'_{n-2, n-1} - s^{\circ}_{n-2, n-1}) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1, 1}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{n-1, 1} - A^{\circ}_{n-2, n-3}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_{n-1, n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{n-2, n-1} - A^{\circ}_{n-2, n-3}) \right] (s'_{n-2, n-3} - s^{\circ}_{n-2, n-3}) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1, 1}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{n-1, 1} - A^{\circ}_{n-3, n-4}) + \right. \\ & \left. + \frac{s_{n-1, n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A^{\circ}_{n-2, n-1} - A^{\circ}_{n-3, n-4}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{s_{n-2, n-3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-3, n-2}^\circ - A_{n-3, n-4}^\circ) \right] (s'_{n-3, n-4} - s_{n-3, n-4}^\circ) + \\
& + \left[ \frac{s_{n-1, 1}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1, 1}^\circ - A_{3, 2}^\circ) + \right. \\
& + \frac{s_{n-1, n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2, n-1}^\circ - A_{3, 2}^\circ) + \dots + \\
& + \left. \frac{s_{3, 4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3, 4}^\circ - A_{3, 2}^\circ) \right] (s'_{2, 3} - s_{2, 3}^\circ) + \\
& + \left[ \frac{s_{n-1, 1}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1, 1}^\circ - A_{2, 1}^\circ) + \right. \\
& + \frac{s_{n-1, n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2, n-1}^\circ - A_{2, 1}^\circ) + \dots + \\
& + \left. \frac{s_{2, 3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{2, 3}^\circ - A_{2, 1}^\circ) \right] (s'_{1, 2} - s_{1, 2}^\circ) + \\
& + [(x_{1, n-1} - x_{1, 2}) - (A_{1, n-1}^\circ - A_{1, 2}^\circ)] + \\
& + [(x_{n-1, n-2} - x_{n-1, 1}) - (A_{n-1, n-2}^\circ - A_{n-1, 1}^\circ)] + \\
& + [(x_{n-2, n-3} - x_{n-2, n-1}) - (A_{n-2, n-3}^\circ - A_{n-2, n-1}^\circ)] + \dots + \\
& + [(x_{4, 3} - x_{4, 5}) - (A_{4, 3}^\circ - A_{4, 5}^\circ)] + [(x_{3, 2} - x_{3, 4}) - (A_{3, 2}^\circ - A_{3, 4}^\circ)] + \\
& + [(x_{2, 1} - x_{2, 3}) - (A_{2, 1}^\circ - A_{2, 3}^\circ)] = 0. \tag{75}
\end{aligned}$$

Понятно, что это и есть угловое условие полигона, которое, следовательно, входит в число уравнений Лапласа, если все используемые астрономические пункты суть пункты Лапласа.

Число  $q$  уравнений Лапласа равно числу тех геодезических ходов, каждый из которых начинается и кончается пунктом Лапласа; в настоящее время такой геодезический ход совпадает с геодезической линией для отдельного звена; в случае образования в сети замкнутых полигонов числом  $p$ , уравнений Лапласа будет  $q - p$ , так как  $p$  из них перейдут в угловые условия.

Вводя поправки в углов  $\beta$ , мы перепишем угловое условие так:

$$\begin{aligned}
 & (v_{1,n-1} - v_{1,2}) + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \dots + \\
 & \quad + (v_{4,3} - v_{4,5}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + (v_{2,1} - v_{2,3}) + \\
 & + \frac{1}{MN \sin 1''} \left\{ s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \right. \\
 & \quad + s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \\
 & \quad + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \\
 & \quad + s_{n-2,n-3} \sin(A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ)] (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \dots + \\
 & \quad + s_{3,4} \sin(A_{3,4}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ})] s'_{2,3} - s'_{2,3} + \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,n}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \dots + \\
 & + s_{2,3} \sin(A_{2,3}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ})] (s'_{1,2} - s'_{1,2}) + [(x_{1,n-1} - x_{1,2}) - (A_{1,n-1}^{\circ} - A_{1,2}^{\circ})] + \\
 & \quad + [(x_{n-1,n-2} - x_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^{\circ} - A_{n-1,1}^{\circ})] + \\
 & + [(x_{n-2,n-3} - x_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^{\circ} - A_{n-2,n-1}^{\circ})] + \dots + \\
 & + [(x_{4,3} - x_{4,5}) - (A_{4,3}^{\circ} - A_{4,5}^{\circ})] + [(x_{3,2} - x_{3,4}) - (A_{3,2}^{\circ} - A_{3,4}^{\circ})] + \\
 & \quad + [(x_{2,1} - x_{2,3}) - (A_{2,1}^{\circ} - A_{2,3}^{\circ})] = 0. \tag{76}
 \end{aligned}$$

Надлежит, очевидно, в уравнениях Лапласа (40), (41), (42) везде поправки  $\delta x_{i,k}$  заменить по уравнению

$$\delta x_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}.$$

### § 6. Средние ошибки величин, входящих в уравнения Лапласа и в полигонные условия; установление весов

Среднюю ошибку  $\mu_0$  наблюденного направления следует выводить для каждого отдельного звена триангуляции из решения условных его уравнений (§ 1), применяя при этом общие правила способа наименьших квадратов. Среднюю ошибку  $\mu$  уравненного направления в данном звене получим по формуле:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{D - C}{D}}, \tag{77}$$

в которой  $D$  — число всех наблюденных направлений, а  $C$  — число условий в звене для всех наших звеньев  $\frac{D - C}{D}$  очень близка к 0,7.

В § 5 мы рассматривали ошибку  $\delta_{i,k}$  астрономического азимута  $x_{i,k}$  геодезической линии, как ошибку  $\delta_i$  определения астрономического азимута  $x_i$  выходной в пункте  $P$  стороны плюс ошибка  $v_{i,k}$  угла  $\beta_{i,k}$  (фиг. 11):

$$\delta_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}.$$

Обозначая ошибки направлений, образующих угол  $\beta_{i,k}$ , через  $v'_{i,k}$ , и  $v'_i$ , причем  $v'_{i,k}$  относится к геодезической линии, имеем:

$$\delta_{i,k} = \delta_i - v'_i + v'_{i,k}. \tag{78}$$

Отсюда имеем:

$$\mu^2_{\alpha_{i,k}} = \mu^2_{\alpha_i} + \mu^2_0 + \mu^2_{v'_{i,k}}. \tag{79}$$

Величину  $\mu^2_{\alpha_i}$  нужно извлекать из отчетов по астрономическим работам в базисных сетях и из отчетов по геодезической передаче непосредственно наблюденного азимута на выходную сторону в  $P_i$ .

Для определения  $\mu^2_{v'_{i,k}}$  может служить такая формула (приближенная):

$$\mu^2_0 + \mu^2_{v'_{i,k}} = \frac{\mu^2}{3n} [2n^2 + 1], \tag{80}$$

понимая под  $n$  число сторон ходовой линии между пунктами  $P_i$  и  $P_k$  (т. е. число сторон треугольников в ходовой линии  $AabcdD$  фиг. 1).

Средние ошибки долгот, входящих в уравнения Лапласа, выводятся из отчетов по астрономическим работам в триангуляции I класса.

Нужно отметить, что во всех уравнениях § 5 мы имеем право заменить везде

$$\text{через } v_{k,i} - v_{k(k+1)}$$

$$v'_{k,i} - v'_{k(k+1)}.$$

Это вытекает из того, что углы  $\beta$  при точке  $P_i$  оба одинаково искажены ошибкой в  $\alpha$ .

Ошибка длины  $s'_{i,k}$  геодезической линии  $P_i P_k$  оценивается по формуле\*:

$$\mu_s^2 = s^2 2 \mu_0^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{4n^2 + 3n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{b^2} s^2, \quad (81)$$

если эта длина  $s'_{i,k}$  определяется по одному базису. Так как каждая геодезическая линия определяется по двум базисам, то:

$$\mu_s^2 = s^2 2 \mu^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{n^2 + \frac{3}{2}n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{2b^2} s^2. \quad (82)$$

Имея средние ошибки величин  $s, \alpha, v_{i..}, \lambda$ , мы от них переходим к весам, принимая, что ошибке единицы веса соответствует средняя ошибка  $\pm 1''$  в угловых элементах и  $\pm 1$  м — в линейных элементах.

## § 7. Общая сводка формул. Указания на порядок вычисления. Общие заключения

Прежде всего изменим обозначения так, чтобы упростить написание формул; во-вторых, упростим самые коэффициенты, пренебрегая величинами второго порядка малости при  $\delta s$  и третьего порядка малости — при  $\delta \alpha$ .

Имеем ввести следующие правила: длина линии между пунктами  $P_n$  и  $P_{n+1}$  называется  $s_n$ , коэффициенты  $p, q, r$ , относящиеся к этой линии, имеют верхние значки  $n$ .

Далее:

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad p^n_4 = a_n = \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A^{\circ}_{n+1, n}; \\ 6) \quad r^n_3 = b_n = -(2)_{n+1} \sin A^{\circ}_{n+1, n} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = q^n_3 \sin \varphi_{n+1} = h_n \sin \varphi_{n+1}; \\ 5) \quad r^n_4 = c_n = 1 - \frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A^{\circ}_{n+1, n} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = \\ \quad = 1 + f_n \sin \varphi_{n+1} \text{ (вычисляется после } f); \\ 7) \quad q^n_1 = d_n = \sin l_{n, n+1} \operatorname{tg} \varphi_{n+1}; \\ 1) \quad p^n_3 = l_n = -(1)_{n+1} \cos A^{\circ}_{n+1, n}; \\ 4) \quad q^n_4 = f_n = -\frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A^{\circ}_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1}; \\ 2) \quad q^n_3 = h_n = -(2)_{n+1} \sin A^{\circ}_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1}. \end{array} \right\} (83)$$

\* Здесь  $\frac{m_b}{b}$  — относительная ошибка выходной стороны.

Порядок вычисления коэффициентов по данной линии указан цифрами слева. Далее:

- а) поправку астрономически определенного азимута выходной стороны в  $P$  назовем через  $\delta_i$ ;

б) поправки направлений геодезической линии  $P_{i-k}$  будем называть  $v_{f,k}$  и  $v_{k,i}$  (т. е. без «примов», как было сделано в § 6);

в)  $\delta_{\varphi_n, n+1}$  заменяем через  $\delta_{\varphi_n}$  соответственно обозначению  $s_n$ ;

$$\Gamma) \delta l_{n,n+1} \quad , \quad \delta l_n \quad , \quad , \quad s_n;$$

л)  $\delta_i^o = \delta_i - v_i$ , где  $v_i$  — поправка направления выходной стороны. Теперь на основании прежних формул напишем:

1) Для замкнутого полигона из

т) для замкнутого полYGONA из  $n$  линий с номерами вершин  $1, 2, 3, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned}
&= [e_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) b_1] \delta s_1 + \\
&+ [e_2 + (a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) b_2] \delta s_2 + \\
&+ [e_3 + (a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1}) b_3] \delta s_3 + \dots + \\
&+ [e_i + (a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1}) b_i] \delta s_i + \\
&\dots \dots \dots \\
&+ [e_{n-2} + a_{n-1} + b_{n-2}] \delta s_{n-2} + \\
&+ e_{n-1} \delta s_{n-1} - \\
&+ (a_3 + a_4 c_3 + a_5 c_4 c_3 + a_6 c_5 c_4 c_3 + \dots + \\
&\quad + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} c_{n-4} \dots c_3) c_2] (v_{2 \cdot 1} - v_{2 \cdot 3}) - \\
&+ (a_4 + a_5 c_4 + a_6 c_5 c_4 + a_7 c_6 c_5 c_4 + \dots + \\
&\quad + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_4) c_3] (v_{3 \cdot 2} - v_{3 \cdot 4}) - \\
&+ (a_k + a_{k+1} c_k + a_{k+2} c_{k+1} c_k + \dots + \\
&\quad + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_k) c_i] (v_{i, i-1} - v_{i, k}) - \\
&\dots \dots \dots \\
&+ (a_{n-3} + a_{n-2} c_{n-3} + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3}) c_{n-4}] (v_{n-4, n-5} - v_{n-4, n-3}) - \\
&- [a_{n-3} + (a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}) c_{n-3}] (v_{n-3, n-4} - v_{n-3, n-2}) - \\
&- [a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}] (v_{n-2, n-3} - v_{n-2, n-1}) - \\
&\quad - a_{n-1} (v_{n-1, n-2} - v_{n-1, 1}). \tag{84}
\end{aligned}$$

В (84):  $B^o_1$  — исходная широта первой вершины полигона;

$(B_0)$ ' — значение той же широты, полученное круговым вычислением по полигону.

Уравнение (84) есть условное уравнение широты в полигоне.

$$\begin{aligned} & L_1^\circ - (L_1^\circ)' = \\ & h_1 + (d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{n-1}) e_1 + (f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1}) b_1] \delta s_1 + \\ & h_2 + (d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{n-1}) e_2 + (f_3 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-1}) b_2] \delta s_2 + \\ & h_3 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1}) e_3 + (f_4 + f_5 + f_6 + \dots + f_{n-1}) b_3] \delta s_3 + \\ & h_i + (d_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1}) e_i + (f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_{n-1}) b_i] \delta s_i + \end{aligned}$$

В (85):  $L^{\circ}_1$  — исходная долгота первой вершины полигона;

$(L^o_1)'$  — полученное круговым вычислением значение той же широты, обходя полигон в круговом порядке. Уравнение (85) есть условное уравнение долготы в полигоне. (В нем номер  $k$  равен  $i + 1$ ).

Теперь напишем в общей форме уравнение Лапласа для хода  $P_1P_2P_3P_4\dots P_n$ :

$$\begin{aligned}
& \delta_n^o + v_{n,n-1} + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \\
& + (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) + \cdots + (v_{4,3} - v_{4,5}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + \\
& + (v_{2,1} - v_{2,3}) - \delta_1^o - v_{1,2} - \delta \lambda_n \sin \varphi_n + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\
& + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^o) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^o - A_{n-1,n}^o)] + \\
& + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^o - A_{n-2,n-1}^o)] + \\
& + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - (A_{n-3,n-4}^o - A_{n-3,n-2}^o)] + \\
& + \cdots + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^o - A_{4,5}^o)] + \\
& + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^o - A_{3,4}^o)] + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^o - A_{2,3}^o)] - \\
& - [\lambda_{1,2} - A_{1,2}] - [\lambda_n - L_n^o] \sin \varphi_n + [\lambda_1 - L_1] \sin \varphi_1 +
\end{aligned}$$

В случае замкнутых ходов, в каждом полигоне одно из условий Лапласа обращается в условие угловое полигона и пишется для хода  $P_1P_2P_3P_4 \dots P_{n-1}P_1$  в таком виде:

Теперь остановимся на порядке вычислений. Представим себе сперва, что размеры эллипсоида и исходные геодезические данные установлены.

а) Начинаем тогда работу с уравнивания отдельных звеньев по способу, изложенному в § 1.

В результате получаем длины  $s'$  геодезических линий  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_4P_5, \dots$ ,  $P_{16}P_{17}$ ,  $P_{17}P_{24}, \dots$  (фиг. 5) и астрономические азимуты  $\alpha_{1 \cdot 2}$ ,  $\alpha_{2 \cdot 1}$ ,  $\alpha_{2 \cdot 3}, \dots$ ,  $\alpha_{16 \cdot 17}$ ,  $\alpha_{17 \cdot 18}$ ,  $\alpha_{17 \cdot 24}$ ,  $\alpha_{24 \cdot 17}, \dots$  этих же геодезических линий. Углы между геодезическими линиями будут равны: при  $P_2 \dots \alpha_{2 \cdot 1} - \alpha_{2 \cdot 3}$ ; при  $P_{17} \dots \alpha_{17 \cdot 18} - \alpha_{17 \cdot 24}$  и т. д.

б) Далее приступаем к вычислению приближенных геодезических координат и соответствующих им точно расстояний  $s_0$  и азимутов геодезических линий  $A^\circ$ . Имея в виду использование результатов этих вычислений при последующем составлении полигонных условий, исполняем, однако, по ряду линий эти вычисления приближенных координат с полной точностью. Поясним это на примере фиг. 5. Исходя от принятых геодезических координат  $P_1$  и геодезического азимута  $A_{1 \cdot 2}$ , вычисляем точно по  $s'_{1 \cdot 2}$  геодезические координаты и обратный геодезический азимут в  $P_2$ ; вычитая из этого геодезического азимута ( $\alpha_{1 \cdot 2} - \alpha_{2 \cdot 3}$ ), с полученным таким образом геодезическим азимутом линии  $P_2P_3$  и длиной этой линии  $s'_{2 \cdot 3}$  передаем геодезические координаты  $P_2$  на пункт  $P_3$  и т. д.; таким точным вычислением проходим далее по линиям  $P_3P_4$ ,  $P_4P_5$ ,  $P_5P_6$ ,  $P_6P_7$ ,  $P_7P_8$ . Теперь по координатам  $P_8$  и  $P_1$  решаем обратную геодезическую задачу и получаем  $s^{\circ}_{1 \cdot 8}$  и  $A^{\circ}_{8 \cdot 1}$ ,  $A^{\circ}_{1 \cdot 8}$ . На чертеже сети особым условным знаком и цветом отмечаем линии, при вычислениях по которым  $s^{\circ} = s'$ , а также и образование хода передачи координат и азимутов по этим линиям — для ясного учета этого при составлении полигонных условий. Далее, по вычисленному указанным образом геодезическому азимуту линии  $P_3P_4$  получаем, вычитая из него ( $\alpha_{3 \cdot 4} - \alpha_{3 \cdot 9}$ ), геодезический азимут  $A'_{3 \cdot 9}$ , с ним и с  $s'_{3 \cdot 9}$  и с координатами  $P_3$ , полученными из передачи  $P_1P_2P_3$ , передаем точно координаты и азимут на  $P_9$ , проходим таким же образом к  $P_{10}$ , к  $P_{11}$ , к  $P_{12}$ , к  $P_{13}$ . По координатам  $P_{13}$  и  $P_5$  (полученным из первого полигона) решаем обратную геодезическую задачу.

В полигоне  $P_7P_6P_5P_4P_{14}P_{15}P_{16}P_{17}P_{18}$  начинаем вычисление с  $P_5$  с азимутом, равным геодезическому азимуту  $P_5P_6$  минус  $\alpha_{5 \cdot 6} - \alpha_{5 \cdot 14}$  и ведем указанным образом вычисление до  $P_{18}$ ; по линии  $P_7P_{18}$  решаем обратную геодезическую задачу и т. д.

в) Получив приближенные геодезические координаты  $B^\circ$ ,  $L^\circ$  и приближенные геодезические азимуты и расстояния  $A^\circ$  и  $s^\circ$ , мы, тем самым, закончили подготовку к составлению уравнений Лапласа. Результаты надлежит выписать на особой схеме сети, с показанием, по каким линиям  $s_0 = s'$ . После этого приступаем к вычислению невязок по широте и долготе в полигонах, для чего нужно в каждом замкнутом и неизвестном от других полигоне проделать точно, идя круговым обходом по ходу часовой стрелки, вычисление геодезических координат и азимутов  $A'^*$  и используя величины  $s'$  и углы при вершинах полигона (за исключением принимаемой первой) равные разности астрономических азимутов при соответствующих вершинах. Часть этих вычислений уже выполнена при осуществлении пункта «б» программы. Так, в полигоне  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$  остается лишь по азимуту геодезическому линии  $P_8P_7$  ( $A^{\circ}_{8 \cdot 7}$ ) получить вычитанием из него угла ( $\alpha_{8 \cdot 7} - \alpha_{8 \cdot 1}$ ) азимут  $A'_{8 \cdot 1}$  и, исходя от ранее полученных  $B^{\circ}_0$  и  $L^{\circ}_0$ , по этому азимуту  $A'_{8 \cdot 1}$  и  $s'_{8 \cdot 1}$  вычислить геодезические координаты  $P_1$ . В полигоне  $P_3P_9P_{10}P_{11}P_{12}P_{13}P_5P_4P_3$  нужно будет рассматриваемое вычисление повести от  $P_{13}$  и пройти с ним по линиям  $P_{13}P_5$ ,  $P_5P_4$ ,  $P_4P_3$  и т. д.

\* Эти азимуты  $A'$  не совпадают вообще с  $A^\circ$ .

Необходимо иметь в виду, что здесь в каждом полигоне требуется точной геодезической передачей координат и азимутов пройти в круговом порядке, используя величины  $s'$  и углы, равные каждой разности соответствующих двух астрономических азимутов, по всем линиям полигона.

Получаемые при этом из разных полигонов величины азимутов  $A'$  для общих двум полигонам линий будут вообще не совпадать друг с другом; точно так же и геодезические координаты общих двум полигонам пунктов, получаемые при рассматриваемом вычислении, будут вообще различаться друг от друга и от ранее полученных, при исполнении пункта «б» программы, приближенных координат  $B^\circ$  и  $L^\circ$ .

г) Вычисляем коэффициенты  $a, b, c, d, e, f, h$  формул (83); при этом для каждого из полигонов, использованных при выполнении пункта «в» программы (т. е. при вычислении невязок по широте и по долготе), делаем на особом листе чертеж, на котором вершины полигона нумеруем одним цветом, сохраняя их нумерацию по общей схеме сети, и другим цветом проводим нумерацию по порядку в полигоне:  $1, 2, 3, \dots, n - 1$ , ставя номер 1 при той вершине, которая была исходной при вычислении невязок полигона. Против каждой стороны полигона выписываем соответственные  $s, A^\circ, l$ , значения  $a, b, c, d, e, f, h$ , а заранее при вершинах полигона выписываем значения  $B^\circ$ .

Далее по каждому полигону составляем в особо разработанных схемах коэффициенты формул (84) и (85) и одновременно составляем и самые условные уравнения широты и долготы.

Наконец, для каждого полигона составляем угловое условие (или одно из уравнений Лапласа) в форме уравнения (87), для чего предварительно вычисляем свободный член этого уравнения; при этом пользуемся выписанными результатами вычислений  $s_0$  и  $A^\circ$  и пометками на схеме сети, согласно указаниям в начале пункта «в» программы; очевидно, что значительная часть членов с  $(s' - s^\circ)$  в (87) будет отпадать при принятом порядке вычислений.

д) Переходим к составлению уравнений Лапласа в форме уравнений (86). Так как мы считаем, что каждая геодезическая линия начинается и кончается пунктами Лапласа, то число уравнений Лапласа будет равно числу всех геодезических линий в сети без числа полигонов, для которых написаны угловые условия, как уравнения Лапласа. Образование ходов, используемых при составлении условий Лапласа, поясним на примере сети, изображенной на фиг. 5 (см. формулу (N) на стр. 328).

Уравнение Лапласа, обращающееся в угловое условие полигона, есть следствие составления круговым обходом и постепенного суммирования уравнений Лапласа по всем линиям полигона. Поэтому, раз мы при составлении угловых условий применили форму уравнения (87), то возникает вопрос: не надлежало ли эти угловые условия получать путем замыкания полигона или подхода с составлением уравнения Лапласа к одной и той же точке двумя разными путями? Например, написав уравнение по ходу  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , написать уравнение по ходу  $P_1P_8P_7P_6$  и, приравняв их друг другу, получить угловое условие в первом полигоне, вместо применения наперед уравнения (87)? Не трудно видеть, что при том и другом способе составления углового условия члены в нем с  $\delta v$  и с  $[(\alpha_{k,i} - \alpha_{k,k+1}) - (A^\circ_{k,i} - A^\circ_{k,k+1})]$  окажутся совершенно тождественными, откуда заключаем, что и члены с  $(s' - s^\circ)$  будут иметь в сумме одно и то же значение, хотя состав их будет различен при том или другом способе составления уравнений Лапласа.

|  |   |
|--|---|
| Первое уравнение пишем по линии . . . .  | $P_1 P_2$                                       |
| Второе " " " "                           | $P_1 P_2 P_3$                                   |
| Третье " " " "                           | $P_1 P_2 P_3 P_4$                               |
| Четвертое " " " "                        | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$                           |
| Пятое " " " "                            | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$                       |
| Шестое " " " "                           | $P_1 P_8$                                       |
| Седьмое " " " "                          | $P_1 P_8 P_7$                                   |
| Восьмое " " " "                          | $P_1 P_2 P_3 P_9$                               |
| Девятое " " " "                          | $P_1 P_2 P_3 P_9 P_{10}$                        |
| Десятое " " " "                          | $P_1 P_2 P_3 P_9 P_{10} P_{11}$                 |
| Однинадцатое уравнение пишем по линии    | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_{13}$                    |
| Двенадцатое " " " "                      | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_{13} P_{12}$             |
| Тринадцатое " " " "                      | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_{14}$                    |
| Четырнадцатое " " " "                    | $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_{14} P_{15}$             |
| Пятнадцатое " " " "                      | $P_1 P_8 P_7 P_{18}$                            |
| Шестнадцатое " " " "                     | $P_1 P_8 P_7 P_{18} P_{17}$                     |
| Семнадцатое " " " "                      | $P_1 P_8 P_7 P_{18} P_{17} P_{16}$              |
| Восемнадцатое " " " "                    | $P_1 P_{19}$                                    |
| Девятнадцатое " " " "                    | $P_1 P_{19} P_{20}$                             |
| Двадцатое " " " "                        | $P_1 P_{19} P_{20} P_{21}$                      |
| Двадцать первое уравнение пишем по линии | $P_1 P_{19} P_{20} P_{21} P_{22}$               |
| Двадцать второе " " " "                  | $P_1 P_{19} P_{20} P_{21} P_{22} P_{23}$        |
| Двадцать третье " " " "                  | $P_1 P_{19} P_{20} P_{21} P_{22} P_{23} P_{24}$ |

Вместо того, чтобы итти всегда при составлении уравнения Лапласа от  $P_1$  до  $P_n$  через все промежуточные между ними точки Лапласа, можно и следует писать уравнения Лапласа для геодезической линии между двумя смежными пунктами Лапласа. Это приводит к облегчению вычислительной работы. Чтобы получить в общем виде уравнение Лапласа для геодезической линии между пунктами  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , мы напишем уравнение (86) для  $n$ , равного  $n - 1$ , и вычтем полученный результат из (86).

Мы получим:

$$\begin{aligned}
 & \delta^{\circ}_n - \delta_{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,n} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \delta\lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + \\
 & + (\alpha_{n,n-1} - A^{\circ}_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n}) - \\
 & - (\lambda_n - L^{\circ}_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L^{\circ}_{n-1}) \sin \varphi_{n-1} + \\
 & + \frac{s_{n-1}}{MN \sin 1''} \{ \sin(A^{\circ}_{n,n-1} - A^{\circ}_{n-1,n-2})(s'_{n-2} - s^{\circ}_{n-2}) + \\
 & + \sin(A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-2,n-3})(s'_{n-3} - s^{\circ}_{n-3}) + \sin(A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-3,n-4})(s'_{n-4} - \\
 & - s^{\circ}_{n-4}) + \dots + \sin(A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{2,1})(s'_1 - s^{\circ}_1) \} = 0. \quad (88)
 \end{aligned}$$

Применяя уравнение (88), мы для сети фиг. 5 напишем уравнение Лапласа по линиям:

$$\begin{aligned}
 & P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, P_4 P_5, P_5 P_6, P_1 P_8, P_8 P_7, P_3 P_9, P_9 P_{10}, P_{10} P_{11}, P_5 P_{13}, P_5 P_{14}, \\
 & P_{14} P_{15}, P_7 P_{18}, P_{18} P_{17}, P_{17} P_{16}, P_1 P_{19}, P_{19} P_{20}, P_{20} P_{21}, P_{21} P_{22}, P_{22} P_{23}, P_{23} P_{24},
 \end{aligned}$$

причем будем считать, что передачи от  $P_1$  совершаются по путям, указанным в выше приведенном перечне (N).

Напомним, наконец, что при составлении уравнений Лапласа в вышеуказанной форме (86) или (88) предполагается, что при вычислении приближенных координат принято:

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 &= \varphi_1 - \xi_1; \\ L_1 = L^{\circ}_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1; \\ A_{1 \cdot 2} = A^{\circ}_{1 \cdot 2} &= \alpha_{1 \cdot 2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1; \\ d\varphi_1 &= 0; \quad dB^{\circ}_1 = 0; \\ dL^{\circ}_1 &= d\lambda_1. \end{aligned}$$

е) После составления всех полигонных условий и уравнений Лапласа предстоит решить все эти условные уравнения по способу наименьших квадратов, для чего надлежит предварительно, следуя § 6, подсчитать в разных звеньях среднюю ошибку  $\mu_0$  наблюденного направления, среднюю ошибку  $\mu$  уравненного направления, средние ошибки  $\mu_\alpha$  астрономических азимутов выходных сторон, средние ошибки  $\mu_\nu$  направлений геодезических линий, соединяющих смежные пункты Лапласа, и средние ошибки  $\mu_s$  длин этих геодезических линий; кроме того, нужно сообразить еще средние ошибки астрономических долгот  $\lambda$ . После вычисления средних ошибок определяем веса соответствующих элементов.

При 16 замкнутых полигонах, что соответствует астрономо-геодезической сети в Европейской части СССР, и при сторонах полигонов около 300 км мы будем иметь 48 полигонных условий и 64 уравнения Лапласа, считая, что пункты Лапласа расположены через 200 км. Итак, в случае такой обширной сети придется решить вместе 112 условных уравнений. При этом 64 уравнения Лапласа и 12 условий угловых дадут сравнительно малую вычислительную работу, — главный труд доставят остальные 32 полигонных условия. Отсюда заключаем, что собственно объем вычислительного труда будет обусловлен главным образом числом уравнений широты и долготы, т. е. что вовсе не следует пугаться 112 условных уравнений, — решение их в одной группе представляется вполне возможным.

Но, конечно, мы при только что сделанном расчете вовсе не учитывали тех пунктов Лапласа, которые будут лежать на средине звена между двумя выходными сторонами, или вообще тех пунктов Лапласа, которые придется между выходными сторонами. Представляется, что эти пункты не следует вводить в общее уравнивание сети: их надлежит использовать при звеньевом уравнивании, вводя не одно (§ 1), а два или три азимутальных условия (смотря по числу промежуточных пунктов Лапласа) и оставляя во всем остальном схему и порядок уравнивания § 1, с выводом в результате азимутов  $\alpha_k$ , и  $\alpha_{i \cdot k}$  и длины  $s'_{i \cdot k}$  геодезической линии, соединяющих конечные пункты  $P_i$  и  $P_k$  звена между выходными сторонами. При этом, несомненно, точность вывода  $\alpha$  и  $s'$  заметно повышается, что благоприятно скажется на последующих вычислениях.

ж) После решения условных уравнений следует введение поправок в расстояния  $s'$  и в азимуты  $\alpha$ , после чего с исходными геодезическими данными в  $P_1$  исполняется окончательное вычисление геодезических координат пунктов Лапласа, конечных для звеньев триангуляции.

3) Остается теперь вставить треугольники каждого отдельного звена между установленными уже: пунктами Лапласа  $P_i$  и  $P_k$ , конечными для этого звена; длинами выходных сторон, которые принимаются теми, какими они были получены из базисных сетей; геодезическими азимутами тех же выходных сторон, получаемыми по геодезическому окончательному азимуту геодезической линии  $P_iP_k$  и по выведенному из уравнивания значению угла  $\beta_{i \cdot k}$  (фиг. 3). Эту задачу вставки треугольников звена между двумя твердыми выходными сторонами всего лучше решать по способу, применяемому в США, который с очень полезными изменениями излагается у нас впервые научным сотрудником Государственного института геодезии и картографии адъюнктом Н. А. Урмасевым в отдельной брошюре. Конечно, предварительно придется, так же, как это уже указывалось в § 1, учесть, что разные звенья могут иметь в местах их скрещивания общие треугольники, которые и должны быть установлены в первую очередь, вне вставки остальных треугольников звена.

Мы приведем изложение способа уравнивания цепи треугольников между двумя твердыми выходными сторонами, по Урмасеву, в следующем параграфе.

\* \* \*

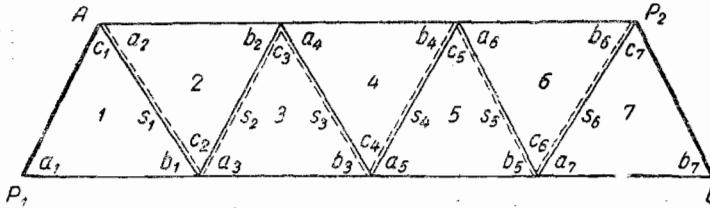
Предварительное введение при уравнивании отдельных звеньев азимутальных условий, очевидно, приведет к тому, что свободные члены в уравнениях Лапласа и в угловых условиях полигонов будут очень близки к нулям. Тем не менее значение уравнений Лапласа, как связующих поправки астрономические определенных элементов с поправками элементов, определенных чисто геодезическим путем, остается в полной силе. Полагаю, что предварительное использование всех пунктов Лапласа при уравниваниях отдельных звеньев будет вести к уменьшению свободных членов и в полигонных условиях, — таким образом шансы на правильное распределение погрешностей при уравниваниях астрономо-геодезической сети увеличиваются, так как более надежно выведенные величины  $z$  и  $s'$  из звеньевого уравнивания подвергнутся меньшим изменениям. Конечно, увеличение числа пунктов Лапласа в каждом отдельном звене здесь сыграет существенную роль. Следовательно, надежду на благоприятное распределение поправок при общем уравнивании всех элементов сети вместе я ставлю в связь с повышением (возможным) надежности предварительного вывода длин и астрономических азимутов геодезических линий из отдельных звеньев, рассматриваемых в дальнейшем в качестве как бы непосредственно наблюденных величин.

Но более совершенный путь таков: уравнивание звеньев только за условия фигур и базисов; вывод длин и азимутов геодезических линий, соединяющих конечные пункты звена; составление по этим геодезическим линиям уравнений Лапласа и решение их в общей массе, но отдельно от полигонных условий; вторичное уравнивание звеньев за условия фигур, базисов и за азимутальные условия, используя при этом поправки астрономических азимутов и долгот, доставленные решением уравнений Лапласа; далее, составление полигонных условий, решение их вместе с уравнениями Лапласа, имеющими теперь новые свободные члены, и, наконец, вставка звеньев между установленными конечными их пунктами.

**§ 8 (дополнительный). Уравнивание цепи треугольников между двумя твердыми выходными ее сторонами (по Н. А. Урмаеву)**

Рассмотрим простую цепь треугольников (фиг. 12) между выходными сторонами  $P_1A$  и  $P_2B$ ; координаты геодезических пунктов  $P_1$ ,  $A$ ,  $P_2$  и  $B$  твердо установлены, а следовательно, геодезические азимуты и длины сторон  $P_1A$  и  $P_2B$  также даны и не подлежат изменениям.

Изберем ходовую линию, соединяющую пункты  $A$  и  $P_2$  через вершины промежуточных углов с треугольников; эта ходовая линия на фиг. 12 обозначена двойными линиями — тонкой сплошной



Фиг. 12

и пунктирной. Называя через  $dB_1, dB_2, dB_3, \dots, dB_5$  изменения широт вершин ходовой линии, вызванные переменами логарифмов сторон ее  $s$  и переменами азимутов  $A$  этих сторон, напишем:

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= p_1 d \lg s_1 + p'_1 dA_1 \\ dB_2 &= p_2 d \lg s_2 + p'_2 dA_2 + dB_1 \\ dB_3 &= p_3 d \lg s_3 + p'_3 dA_3 + dB_2 \\ dB_4 &= p_4 d \lg s_4 + p'_4 dA_4 + dB_3 \\ dB_5 &= p_5 d \lg s_5 + p'_5 dA_5 + dB_4 \\ dB_6 &= p_6 d \lg s_6 + p'_6 dA_6 + dB_5 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Постепенно складывая эти уравнения, напишем в результате:

$$dB_6 = p_1 d \lg s_1 + p_2 d \lg s_2 + p_3 d \lg s_3 + p_4 d \lg s_4 + p_5 d \lg s_5 + p_6 d \lg s_6 + p'_1 dA_1 + p'_2 dA_2 + p'_3 dA_3 + p'_4 dA_4 + p'_5 dA_5 + p'_6 dA_6. \quad (90)$$

Выразим теперь приращения логарифмов сторон и изменения азимутов через поправки углов, введя предварительно обозначения:

$$\Delta a_i (a_i) - \Delta b_i (b_i) = \Delta_i. \quad (91)$$

Здесь:  $\Delta a_i$  и  $\Delta b_i$  — перемены логарифмов синусов связующих углов  $a_i$  и  $b_i$  при изменении этих углов на  $1''$ , а  $(a_i)$  и  $(b_i)$  — поправки углов  $a_i$  и  $b_i$ .

Конечно:

$$\left. \begin{aligned} d \lg s_1 &= \Delta_1 \\ d \lg s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ d \lg s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ \dots & \dots \\ d \lg s_6 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Для изменений азимутов будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= -(c_1) \\ dA_2 &= -(c_1) + (c_2) \\ dA_3 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) \\ dA_4 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) \\ dA_5 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) \\ dA_6 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) \end{aligned} \right\}, \quad (93)$$

причем, очевидно, в (93) совсем пренебрегли влияниями ошибок углов треугольников на определение сближений меридианов  $\delta$  по элементам ходовой линии. Так как изменения этих величин

$$\delta = (2) s \sin A \operatorname{tg} \varphi_1,$$

поскольку они обусловлены погрешностями углов треугольников, не превзойдут  $\pm 0'',07$  при  $s = 30 \text{ км}$  и при длине цепи в  $200 \text{ км}$ , то с этой погрешностью в (93) мы можем не считаться, если использовать (93) только для подстановки в (90), так как:

$$p'_i = \frac{s_i}{R} \sin A_{k \cdot i}$$

и, следовательно, в отдельных членах уравнения (90) указанные погрешности в  $dA$  будут влиять менее чем на  $0'',0003$ .

Подставляя (93) и (92) в (90), получим:

$$\begin{aligned} dB_6 &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_2 + \\ &+ (p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_3 + (p_4 + p_5 + p_6) \Delta_4 + (p_5 + p_6) \Delta_5 + p_6 + \Delta_6 - \\ &- (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_1) + (p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_2) - \\ &- (p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_3) + (p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_4) - (p'_5 + \\ &+ p'_6) (c_5) + p'_6 (c_6). \end{aligned} \quad (94)$$

Закон составления коэффициентов в (94) совершенно ясен: коэффициент при  $\Delta_i$  равен сумме коэффициентов  $p$  для сторон ходовой линии, заключенных между вершиной промежуточного угла треугольника с номером  $i$  и вершиной промежуточного угла последнего треугольника в цепи; точно также коэффициент при  $(c_i)$  равен абсолютно сумме коэффициентов  $p'$  для сторон ходовой линии, заключенных между вершиной промежуточного угла треугольника с номером  $i$  и вершиной промежуточного угла последнего треугольника в цепи.

Знаки коэффициентов при  $(c)$  легко соображаются по чертежу.

На фиг. 13 изображена цепь, в которой правильное чередование углов  $a$ ,  $b$  и  $c$  не соблюдается; для нее указанный закон составления коэффициентов вполне сохраняется, и мы имеем для этой цепи:

$$\begin{aligned} dB_4 &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_2 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_3 + \\ &+ (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_4 + (p_3 + p_4) \Delta_5 + p_4 \Delta_6 + (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_1) - \\ &- (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_2) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_3) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_4) + \\ &+ (p'_3 + p'_4) (c_5) - p'_4 (c_6). \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\left. \begin{array}{l} p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_r = P'_i \\ p'_i + p'_{i+1} + p'_{i+2} + \dots + p'_{r_i} = P''_i \end{array} \right\}. \quad (95)$$

Тогда, пользуясь формулой (91), напишем окончательно уравнение широты в таком виде:

$$\Sigma [P \Delta_a (a) - \Delta_b P(b)] + \Sigma (\pm P'(c)) + W_1 = 0. \quad (96)$$

Здесь  $W_1$  равно разности: широта точки  $P_2$ , вычисленная по нашей ходовой линии, минус данная широта точки  $P_2$ .

Для разностей долгот по элементам ходовой линии напишем такие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} dL_1 = q_1 d \lg s_1 + q'_1 dA_1 \\ dL_2 = q_2 d \lg s_2 + q'_2 dA_2 + dL_1 \\ dL_3 = q_3 d \lg s_3 + q'_3 dA_3 + dL_2 \\ \dots \\ dL_6 = q_6 d \lg s_6 + q'_6 dA_6 + dL_5 \end{array} \right\}. \quad (97)$$

Путем совершенно таких же рассуждений и преобразований, как и при получении условного уравнения (96) широты, мы придем к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{array}{l} q_i + q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_r = Q'_i \\ q'_i + q'_{i+1} + q'_{i+2} + \dots + q'_{r_i} = Q''_i \end{array} \right\}; \quad (98)$$

$$\Sigma [Q \Delta_a (a) - Q \Delta_b (b)] + \Sigma (\pm Q'(c)) + W_2 = 0. \quad (99)$$

В (99), являющемся условным уравнением долготы,  $W_2$  равно вычисленной по ходовой линии долготе пункта  $P_2$  минус данная долгота того же пункта. Коэффициенты  $Q$  и  $Q'$  образуются по тому же закону, как и коэффициенты  $P$  и  $P'$ .

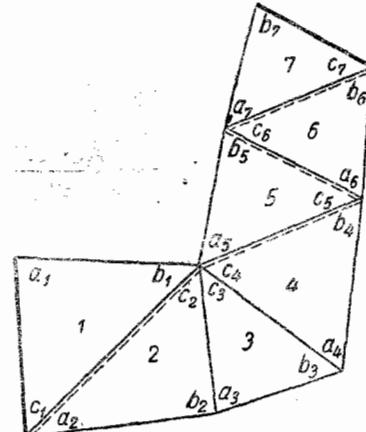
Коэффициенты  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  и  $q'$  легко, конечно, соображаются по коэффициентам  $p$  и  $q$ , приведенным в формулах (2) § 2; именно:

$$\left. \begin{array}{l} p_n = -(1) \frac{1}{M \cdot 10^6} s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n = -(2) \frac{1}{M \cdot 10^6} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{array} \right\}. \quad (100)$$

В формулах (100) величина  $M$  — модуль неперовых логарифмов;  $\Delta g s$  считается выраженным в единицах шестого логарифмического знака.

Далее:

$$\left. \begin{array}{l} p'_n = \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A_{n+1, n} \\ q'_n = -\frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{array} \right\}. \quad (101)$$



Фиг. 13

Выражения (100) и (101) для коэффициентов  $p$ ,  $q$ ,  $p'$  и  $q'$  целесообразно преобразовать следующим образом. Так как в (96) и (99) коэффициенты очень малы, то следует эти уравнения умножить так, чтобы коэффициенты при неизвестных выражались бы в единицах. Coast and Geodetic Survey вводит множитель:

$$\frac{M \cdot 10^4}{6} = 723,824.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} p_n &= -\frac{(1)}{600} s_n \cos A_{n+1, n}; \\ q_n &= -\frac{(2)}{600} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1}; \\ p'_n &= -\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(1)}{(2)} q_n \cos \varphi_{n+1}; \quad \rho'' = \frac{1}{\sin 1''}; \\ q'_n &= \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} p_n \sec \varphi_{n+1}. \end{aligned}$$

Обозначая еще:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{600} &= b_1; & -\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(1)}{(2)} &= c_1 \\ -\frac{(2)}{600} &= b_2; & +\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

напишем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= b_1 s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= b_2 s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \\ p'_n &= c_1 q_n \cos \varphi_{n+1} \\ q'_n &= c_2 p_n \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Приводим табличку значений  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  и  $c_2$  для разных широт.

| Широта | $\lg b_1$ | $\lg b_2$ | $\lg c_1$ | $\lg c_2$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 35°    | 5.7331n   | 5.7312n   | 0.3253n   | 0.3214    |
| 40     | 5.7327n   | 5.7310n   | 0.3251n   | 0.3216    |
| 45     | 5.7324n   | 5.7309n   | 0.3248n   | 0.3219    |
| 50     | 5.7320n   | 5.7308n   | 0.3246n   | 0.3222    |
| 55     | 5.7316n   | 5.7307n   | 0.3243n   | 0.3224    |
| 60     | 5.7313n   | 5.7305n   | 0.3241n   | 0.3226    |
| 65     | 5.7310n   | 5.7304n   | 0.3239n   | 0.3228    |

Уравнения (96) и (99) при коэффициентах  $p$  и  $q$ , вычисляемых согласно формулам (103), напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [P\Delta_a(a) - P\Delta_b(b)] + \Sigma [\mp P'(c)] + 723.824 W_1 = 0 \\ \Sigma [Q\Delta_a(a) - Q\Delta_b(b)] + \Sigma [\pm Q'(c)] + 723.824 W_2 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (104)$$

Условие выходных сторон (базисное) напишется, понятно, так:

$$\Sigma [\Delta_a(a) - \Delta_b(b)] + W_3 = 0, \quad (105)$$

где  $W_3$  равно логарифму стороны  $P_2B$ , полученному вычислением через треугольники цепи, минус данный логарифм стороны  $P_2B$  (см. фиг. 12).

В отношении азимутального условия приходится повторить почти то же самое, что было сказано в § 1.

Обозначая через  $\delta$  разность от  $180^\circ$  разности прямого и обратного азимута по некоторой линии, и через  $A_0$  и  $A_7$  — данные геодезические азимуты направлений  $AP_1$  и  $P_2B$ , имеем:

$$\begin{aligned} A_0 - c_1 - (c_1) + \delta_1 + d\delta_1 + c_2 + (c_2) + \delta_2 + d\delta_2 - c_3 - (c_3) + \delta_3 + d\delta_3 + \\ + c_4 + (c_4) + \delta_4 + d\delta_4 - c_5 - (c_5) + \delta_5 + d\delta_5 + c_6 + (c_6) + \\ + \delta_6 + d\delta_6 - c_7 - (c_7) = A_7. \end{aligned}$$

Или:

$$-(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + \Sigma d\delta + A'_7 - A_7 = 0. \quad (106)$$

В (106):  $A'_7$  — вычисленный азимут направления  $P_2B$ .

Далее имеем, понимая под  $dl$  дифференциал разности  $l$  долгот:

$$d\delta = (2) ds \sin A \operatorname{tg} \varphi + (2) s \cos A \operatorname{tg} \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi};$$

$$dl = (2) ds \sin A \sec \varphi + (2) s \cos A \sec \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi};$$

$$d\delta - dl \sin \varphi = (2) s \sin A \cdot d\varphi.$$

Отсюда заключаем, что (как в § 1) можно принять:

$$\Sigma d\delta = \Sigma dl \sin \varphi = (L_2 - L'_2) \sin \varphi_m.$$

Здесь  $L_2$  и  $L'_2$  — данная и вычисленная долготы  $P_2$ . Поэтому окончательно азимутальное условие напишется:

$$\begin{aligned} -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + W_4 = 0; \\ W_4 = A'_7 - A_7 - (L'_2 - L_2) \sin \varphi_m, \end{aligned} \quad (107)$$

т. е. разности азимута, вычисленного и данного, минус поправка  $(L'_2 - L_2) \sin \varphi_m$ .

Заметим, что наша цепь уже была однажды уравнена; поэтому в ней в условиях фигур свободные члены будут равны нулю (а также и в базисном уравнении). Мы можем к уравнениям (104), (105) и (107) присоединить теперь условия фигур и решать все эти уравнения вместе, — причем можем предварительно заменить поправки углов разностью поправок соответствующих направлений и уравнивание вести по направлениям, или же оставить в условных уравнениях поправки углов и уравнивать цепь по углам.

Если будем уравнивать по углам и примем в расчет, что свободные члены в уравнениях фигур равны нулю, то мы можем сразу исключить условия фигур, не нарушая требования решения задачи под условием минимума суммы квадратов поправок всех углов — и связующих, и промежуточных.

Именно, нужно будет применить следующее правило: *если из некоторого треугольника поправки его углов входят в условное уравнение (какое угодно) с коэффициентами:  $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}$ , то исключение условия фигуры этого треугольника приведет к преобразованию коэффициентов рассматриваемого условного уравнения в соответственно такие:*

$$\left. \begin{array}{l} r_{i-1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} - r_i + r_{i+1}) \\ r_i - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \\ r_{i+1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i - r_{i+1}) \end{array} \right\} \quad (108)$$

Указанное преобразование условных уравнений, конечно, существенно упрощает вычислительную работу и вносит заметное изменение в тот метод полигонального уравнивания, который носит название «Британского» метода.

Вернемся еще раз к формулам (103).

С точностью, достаточной для определения коэффициентов условных уравнений, можем написать:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{(1)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} = (B_{n+1} - B_n)' \\ -\frac{(2)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} = (L_{n+1} - L_n)' \end{array} \right\} \quad (109)$$

В (109) правые части выражены в минутах дуги. Конечно, мы имеем из (103) и (109):

$$\left. \begin{array}{l} p_n = \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10}; \quad q_n = \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} \\ p'_n = \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} a_1; \quad q'_n = \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10} a_2 \\ a_1 = -\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(1)}{(2)} \cos B_{n+1} \\ a_2 = \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} \sec B_{n+1} \end{array} \right\} \quad (110)$$

Так как коэффициенты  $P, P', Q$  и  $Q'$  в (104) представляют собою суммы последовательных коэффициентов  $p, p', q$  и  $q'$ , то они будут составляться следующим образом: коэффициент  $P$  или  $Q$ , относящийся к треугольнику с номером  $i$ , равен разности широт или соответственно разности долгот конечного пункта ходовой линии и вершины промежуточного угла треугольника с номером  $i$ . Следовательно:

$$\left. \begin{array}{l} P_i = (B_r - B_i)' \\ Q_1 = (L_r - L_i)' \\ P' = a_1 (L_r - L_i)' \\ Q' = a_2 (B_r - L_i)' \end{array} \right\} \quad (111)$$

В (111) через  $B_r$  и  $L_r$  обозначены координаты последнего пункта ( $P_r$ ) ходовой линии. Не нужно еще упускать, что в (111) левые части увеличены в 10 раз по сравнению с (103).

Поэтому окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [(B_r - B_i) \Delta_a(a) - (B_r - B_i) \Delta_b(b)] + \Sigma [\pm a_1 (L_r - L_i)(c)] + \\ + 7238.24 W_1 = 0 \\ \Sigma [(L_r - L_i) \Delta_a(a) - (L_r - L_i) \Delta_b(b)] + \Sigma [\pm a_2 (B_r - B_i)(c)] + \\ + 7238.24 W_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Конечно, величины  $B_r - B_i$  и  $L_r - L_i$  очень легко получаются, так как вычисление широт и долгот по ходовой линии уже проведено для получения  $W_1$  и  $W_2$ . Таким образом ясно, что составление условных уравнений широты и долготы в форме (112) действительно очень просто.

## **МЕТОДЫ УРАВНИВАНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ I КЛАССА В СССР**

К настоящему времени триангуляция I класса в Европейской части СССР образовала 12 замкнутых полигонов с 30 измеренными в них базисами и с 40 пунктами Лапласа (не считая 26, определенных на вторых пунктах базисных сетей). Уравнивание и вычисление такой огромной триангуляции представляет собою не только сложную, но и очень громоздкую задачу. В Индии был применен так называемый Британский прием уравнивания полигонов, достоинством которого является как будто бы то, что в уравнивание вводятся элементы треугольников, образующих полигоны; но если принять во внимание, что это ведет к необходимости уравнивания триангуляции по частям, включая в совместную обработку не более трех — четырех полигонов, и что тем не менее получение результатов для 12—15 полигонов потребует 5—6 лет работы, то указанное достоинство должно быть признано совершенно отрицательным. Не говоря уже о непосильной затрате труда и времени, должно отметить, что уравнивание сети полигонов по частям может приводить к существенным искажениям в отдельных треугольниках.

Гельмерт дал свой способ уравнивания астрономо-геодезической сети, который и применяется в Германии. Здесь полигоны образуются геодезическими линиями, заменяющими цепи треугольников между смежными пунктами Лапласа, и вместе с поправками элементов, полученных геодезическим путем, определяются еще поправки астрономических долгот и азимутов, чем достигается правильное ориентирование сторон полигона. Но этот метод Гельмерта практически применялся к сети, которая составляет лишь примерно восьмую часть нашей триангуляции. С другой стороны, метод Гельмерта определенно не учитывает систематических ошибок в углах треугольников и полного использования пунктов Лапласа, определенных на промежуточных, не конечных пунктах отдельной цепи, заменяющейся геодезической линией.

Приняв метод Гельмерта в чистом виде, мы поэому вряд ли поступили бы правильно, мы исказили бы несколько элементы полигонов. С другой стороны, при 12 полигонах этот метод настолько громоздок и даже изнурителен, что едва ли можно было бы рассчитывать довести работу до благополучного конца. В 1930 г. мною был предложен измененный метод Гельмерта уравнивания астрономо-геодезической сети\*. Существенными изменениями являются:

\* Труды Государственного института геодезии и картографии. Вып. 2. М., 1931.

1) предварительное уравнивание отдельных цепей (звеньев) триангуляции, принимая во внимание, кроме условий фигур и базисов, еще и азимутальные условия (это приводит к устраниению на определение элементов полигонов влияния систематических ошибок в углах треугольников); 2) изнурительный способ числового исключения уклонений отвесных линий при переходе к составлению полигональных уравнений заменен общими формулами, позволяющими сразу писать условные уравнения для любого полигона, подставляя в эти формулы числовые значения коэффициентов, подсчитываемые без особых осложнений даже в полигоне с восьмью пунктами Лапласа. По приблизительной оценке предложенный мною метод привел бы к установлению геодезических координат пунктов Лапласа в течение полутора лет, при непрерывной работе трех пар вычислителей-геодезистов.

Таким образом, получилась, во-первых, вполне отчетливая в отношении метода и технического исполнения работа, а во-вторых, сроки исполнения большой работы заметно сократились. Однако срочность требований на геодезические координаты пунктов триангуляции I класса заставила зимой 1930/31 г. внести еще некоторые упрощения в обработку триангуляции I класса, которые приводят к сокращению работы еще на  $1\frac{1}{2}$ —2 месяца.

В настоящей статье кратко излагаются именно тот путь и способы обработки триангуляции I класса, которые в настоящее время применяются Вычислительным бюро ГГУ под руководством Государственного института геодезии и картографии; в окончательной разработке этих способов мне оказали помощь сотрудники Государственного института геодезии и картографии проф. В. В. Данилов и Н. А. Урмаев.

## I

До уравнивания полигонов триангуляции выполняется уравнивание отдельных звеньев триангуляции I класса, почимая под звеном часть ряда между двумя смежными базисными сетями. Уравнивание каждого звена заключается в определении поправок на правления, принимая в расчет условия фигур, базисов и условия Лапласа. При этом астрономические азимуты и долготы, определенные в конечных пунктах звена, поправок не получают. Уравнивание каждого звена заканчивается выводом длины геодезической линии, соединяющей конечные пункты звена, и астрономических азимутов этой линии.

## II

Государственным институтом геодезии и картографии в 1930 г. была выполнена работа по определению размера большой полуоси эллипсоида, наилучше подходящего для территории, покрытой новыми триангуляциями I класса. При этом определялись попутно величины слагающих уклонения отвесной линии  $\xi_0$  и  $\eta_0$  для Пулкова из уравнений вида:

$$\xi_i = \varphi_i - B_i - p_1 \xi_0 - p_4 \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \eta_0 + p_5 \frac{da}{a};$$

$$\eta_i = (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i - q_1 \xi_0 - (q_4 \operatorname{tg} \varphi_0 - \sec \varphi_0 \cos \varphi_i) \eta_0 + q_5 \frac{da}{a}.$$

Сжатие эллипсоида принималось равным сжатию по Бесселю, так как средние широты не позволяют надежно определить поправку сжатия. Называя через  $a$  большую полуось наибольшего подходящего эллипса, а через  $a_0$  — большую полуось по Бесселю, имеем:

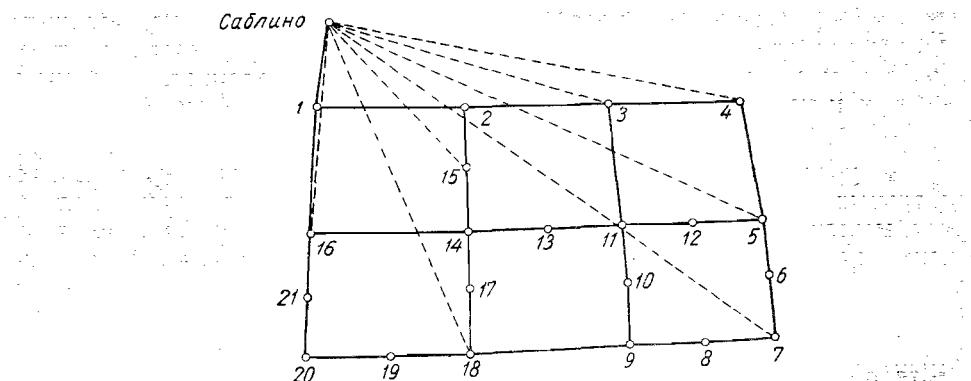
$$a = a_0 + 684 \text{ м} \pm 170 \text{ м}.$$

Так как  $\xi_0$  для Пулкова оказалось всего около полусекунды, то поэтому решено было исходными геодезическими координатами оставить астрономические координаты Пулкова\* (центр круглого зала). Точно так же было решено триангуляции вычислять на эллипсоиде Бесселя, так как вопрос о перевычислениях обширных триангуляций II класса Военно-топографического управления и Главного геодезического управления остается открытым.

Нужно заметить еще, что в Пулкове нет азимута, определенного непосредственно для какой-нибудь стороны триангуляции. Ближайшим к Пулкову астрономическим пунктом триангуляции I класса является Саблино. Поэтому по необходимости пришлось именно Саблино взять вместо Пулкова за исходную точку триангуляции. Если исходный геодезический азимут в Саблине установлен, то, вычислив разности геодезических координат Саблина и Пулкова, получим по астрономическим координатам Пулкова исходные геодезические координаты Саблина.

Что касается определения исходного геодезического азимута в Саблине, то его значение можно было бы получить так: имея из решения задачи по определению  $da$ ,  $\xi_0$  и  $\eta_0$  величины  $\xi$  и  $\eta$  для Саблина, в астрономический азимут на Саблине вводим поправку  $-\eta \operatorname{tg} \varphi$ .

Не пренебрегая этим способом, мною был предложен еще следующий способ вывода исходного геодезического азимута в Саблине (фиг. 1).



Фиг. 1

Исходя из геодезических координат и азимута в Саблине, определенных работами Военно-топографического управления, вычисляем геодезические азимуты в пунктах 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 18, 20, 21, — т. е. для узловых пунктов полигонов и для Лапласовых пунктов, приходящихся в промежуточных базисных сетях между вершинами полигонов. Эти азимуты, рассчитанные на эллипсоиде Бесселя, назовем символом  $G$ .

Хотя триангуляция еще и не уравнена, но соблюдение условий Лапласа при уравнивании звеньев и вывод углов при поворотных пунктах 1, 2, 3, ..., 7, 20, 16 из астрономических азимутов геодезических линий 1—2, 2—3, 4—5, ... обеспечивает ничтожность расхождений в значениях азимутов  $G$ , выводимых из сети полигонов разными путями, используя и замыкающие стороны полигонов.

\* Хотя величина  $\eta_0$  оказалась около  $2''\cdot 5$ , но было решено не различать геодезической долготы от астрономической в Пулкове, чтобы не вводить заметных изменений в результаты уже выполненных государственных съемок.

Если астрономический азимут в точке  $K$  есть  $A_k$ , то введем сперва в геодезический азимут  $G_k$  в той же точке поправку  $\delta G_k$  за переход от большой полуоси  $a_0$  по Бесселю к полуоси  $a$  и обозначим:

$$G'_k = G_k + \delta G_k.$$

Теперь, имея разности:

$$A_k - G_k,$$

для всех точек, показанных на черт. 1, вычисляем поправки начального азимута в Саблине, полагая, что в пункте  $K$  азимут получил поправку:

$$+ (A_k - G'_k),$$

причем это вычисление делаем по всем линиям, соединяющим Саблино с точками, показанными на фиг. 1 (эти линии обозначены пунктиром).

Другими словами, с этой целью нам нужно будет сперва приближенно решить обратную геодезическую задачу по линиям, соединяющим Саблино с пунктами 2, 3, 4, ..., 20, 21, 16, а затем применить формулу:

$$\Delta\alpha_2 = \left( \cos \frac{s}{R} - \frac{R \sin \frac{s}{R}}{N_2} \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right) (A_k - G'_k),$$

в которой  $\Delta\alpha_2$  и есть поправка азимута в Саблине. Получив значение  $\Delta\alpha_2$  по всем передачам на Саблино, выводят из них некоторое среднее значение. Поскольку установление исходного азимута есть трудная задача, поскольку и вывод этого среднего значения из величин  $\Delta\alpha_2$  представляет те же трудности. Если бы пункты Лапласа были распределены равномерно на плоскости, охватываемой триангуляцией, и располагались бы друг от друга километров через 40—50, то при отсутствии вблизи нашей триангуляции горных хребтов и обширных глубоких морей, вероятно, среднее арифметическое из всех  $\Delta\alpha_2$  дало бы результат довольно надежный в смысле установления исходного азимута по отношению к наиболее подходящему эллипсоиду (но, конечно, не по отношению к общему земному эллипсоиду). Вообще же для решения поставленной задачи следует располагать более или менее надежно определенными уклонениями отвесной линии во всех пунктах Лапласа по отношению к общему земному эллипсоиду. Такая постановка дела, однако, является довольно еще отдаленной для нас: астрономо-геодезические работы в СССР пока выполнены на равнинной местности, достаточно удаленной от горных хребтов и от глубоких и обширных морей: территория, покрытая этими работами, также еще не может быть названа значительной. Мы поэтому не располагаем еще материалом для надежного исследования изостатической компенсации, не можем надежно определять топографо-изостатические редукции, которые дали бы, думается, систему уклонений отвесной линии, наиболее отвечающую именно общему земному эллипсоиду. Нужно еще иметь в виду, что под дневной поверхностью нашей равнины мы в ряде районов имеем подземный рельеф — в виде «погребенных хребтов», сбросов и т. д. Это сказывается тем, что на этой равнине нередко попадаются места, где отклонение отвесной линии доходит до  $10''$ . При учете топографо-изостатических редукций придется, очевидно, внести изменения в методы этого учета, считаясь так или иначе с влиянием и этого «погребенного» рельефа.

В настоящее время, имея ряд значений  $\Delta z_2$ , приходится лишь сделать просмотр их в том направлении, чтобы выделить те  $\Delta z_2$ , которые получились передачей от пунктов с значительным и чисто случайным уклонением отвесной линии по долготе. Если в ряде смежных пунктов Лапласа величина  $\eta$  для всех пунктов, кроме одного, оказывается колеблющейся в пределах  $\pm 3''$ , а в этом пункте имеем резко отличающееся значение, то следует  $\Delta z_2$ , соответствующее такому пункту, совсем выбросить.

Просматривая значения  $\eta$  по триангуляционным рядам, расположенным по земным параллелям, и значения  $\eta$  для рядов по меридианам, мы легко замечаем те точки, где  $\eta$  резко выскакивает по своему значению; такие точки должны быть не приняты для вывода  $\Delta z_2$ . Конечно, этот путь упрощенный. При применении его в современно триангуляции I класса в Европейской части СССР пришлось из 39 пунктов Лапласа выбросить 7; это выбрасывание повлияло в исходном азимуте на  $1''$ . Во всяком случае, сопоставление полученного указанным путем исходного азимута со значением его, равным астрономическому азимуту минус  $\eta \operatorname{tg} \varphi$ , дает возможность судить о надежности того и другого результата.

Задание сохранить счет долгот, принятый в проведенных уже на обширной территории государственных топографических съемках, приводит к требованию равенства геодезической долготы в Пулкове установленной там астрономической долготе. Отсюда же вытекает требование, чтобы фиктивный астрономический азимут в Пулкове на Саблино был равен геодезическому азимуту того же направления, получаемому от Саблина по установленному там указанным выше образом исходному азимуту. Если при этих условиях мы напишем уравнение Лапласа в Саблине, то свободный член его оказывается достигающим  $3'',5$ , причем разверстка этого свободного члена должна пасть: на поправку астрономической долготы в Саблине; на поправку астрономического азимута в Саблине; на поправку исходного геодезического азимута Пулкова — Саблино. Следовательно, исходный геодезический азимут при уравнивании астрономо-геодезической сети получит в дальнейшем поправку, которую наперед нужно оценивать около  $1—1'',5$ .

Конечно, если этой поправки в ориентировку сети не вводить, то условия Лапласа ни на одном пункте Лапласа после уравнивания сети не окажутся выполненными на величины, близкие к значению этой поправки.

### III

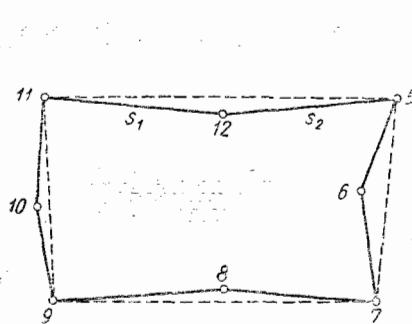
Следующее действие состоит в образовании полигонов только с четырьмя вершинами в каждом.

Дело сводится (фиг. 2) к замене двух геодезических линий (например, 11—12 и 12—5) одной линией 11—5. Другими словами, нужно выполнить точное решение сферического треугольника по двум сторонам и углу между ними. Представляется, что всего лучше применить здесь формулы, употреблявшиеся Струве при вычислении полярных координат. В результате мы получим сеть полигонов, изображенную на фиг. 3, которую и будем уравнивать.

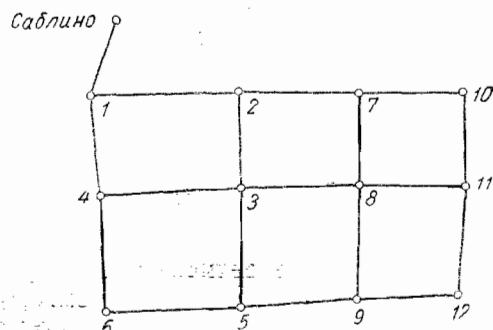
### IV

Переходя к уравниванию сети полигонов, будем иметь дело с условиями широты и долготы и суммы углов в каждом полигоне и с уравнениями Лапласа. Хотя азимутальные условия были приняты в каждом

отдельном звене при его уравнивании и вследствие этого свободные члены в уравнениях Лапласа при общем уравнивании сети полигонов будут близки к нулям, но устранение уравнений Лапласа из общего уравнивания поведет неизбежно к понижению точности ориентировки полигонов. Геодезический азимут  $A_k$  в пункте  $K$  (фиг. 3) будет тогда получаться в зависимости от ошибок всех углов полигонов, работающих



Фиг. 2



Фиг. 3

на передачу азимута от Саблина до пункта  $K$ , причем ошибку одного угла нужно ожидать около  $\pm 0'',9$ .

Наоборот, при сохранении в общем уравнивании уравнений Лапласа этот азимут  $A_k$  будет определяться формулой:

$$A_k = \alpha_k - (\alpha_1 - A_1) - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1,$$

в которой:  $\alpha_k$  — астрономический азимут в  $K$ ,  $\lambda_k$  и  $L_k$  — астрономическая и геодезическая долготы  $K$ ,  $\alpha_1$ ,  $A_1$ ,  $\lambda_1$  и  $L_1$  — астрономические и геодезические азимуты и долготы в Саблине.

Следовательно, накопление погрешностей в  $A_k$  будет обусловливаться только накоплением ошибок в передаче геодезических долгот, и для пункта  $K$ , удаленного от Саблина на 2000 км, средний размер этого накопления не превысит  $\pm 0'',2$ . Уравнение Лапласа по линии между точками  $P_n$  и  $P_{n+1}$  пишется в такой форме:

$$\begin{aligned} \delta^{\circ}_n - \delta^{\circ}_{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,1} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \\ + (\delta\lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}) - \\ - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L_{n-1}) \sin \varphi_{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (L)$$

В формуле (L):

$\alpha_{n,n-1}$  и  $\alpha_{n-1,n}$  — астрономические азимуты в  $P_n$  и  $P_{n-1}$  по линии  $P_n P_{n-1}$ , выведенные из звеньевого уравнивания;

$\lambda_n$  и  $\lambda_{n-1}$  — астрономические долготы  $P_n$  и  $P_{n-1}$ ;  
 $A_{n,n-1}$  и  $A_{n-1,n}$  — геодезические азимуты направлений с  $P_n$  на  $P_{n-1}$  и с  $P_{n-1}$  на  $P_n$ ;

$L_n$  и  $L_{n-1}$  — геодезические долготы  $P_n$  и  $P_{n-1}$ ;  
 $\delta^{\circ}_n$  и  $\delta^{\circ}_{n-1}$ \* — поправки астрономических азимутов выходных сторон звеньев в  $P_n$  и  $P_{n-1}$ ;

$v_{n,n-1}$  — поправка направления в  $P_n$  геодезической линии  $P_n P_{n-1}$ ;

\* Включая сюда и поправку направления выходной стороны.

$v_{n-1,n}$  — поправка направления в  $P_{n-1}P_n$  геодезической линии;  
 $\delta^{\circ}_n + v_{n,n-1}$  — поправка азимута  $\alpha_{n,n-1}$ ;  
 $\delta^{\circ}_{n-1} + v_{n-1,n}$  — поправка азимута  $\alpha_{n-1,n}$ ;  
 $\delta\lambda_n$  и  $\delta\lambda_{n-1}$  — поправки астрономических долгот  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n-1}$ .

Если составим уравнения Лапласа для всех линий: Саблино — 1, 1—2, 2—3, 3—4, 4—1, 2—7, 7—8, 8—3, 7—10, 10—11, 11—8, 11—12, 12—9, 9—8, 9—5, 5—3, 5—6 и 6—4, то тогда условия сумм углов в полигонах отпадут, так как каждое из этих условий выражается как сумма уравнений Лапласа, написанных для всех сторон замкнутого полигона.

Следовательно, мы можем составить условия сумм углов по каждому полигону, но тогда должны будем принять не все из перечисленных выше уравнений Лапласа, отбросив, например, уравнения по линиям: 1—4, 4—6, 7—8, 8—9, 8—11, 9—12.

Геодезические величины  $A$  и  $L$ , входящие в уравнения Лапласа, определяются следующим образом.

Точно передаем исходные геодезические координаты и азимуты в Саблине на пункт 1; затем вычисляем точно геодезические координаты и азимуты по линиям 1—2, 2—3, 3—4; по полученным координатам пункта 4 и координатам пункта 1 точно рассчитываем решением обратной геодезической задачи азимуты направлений 4—1 и 1—4; исходя из геодезических координат и азимута пункта 2, полученным прямым вычислением по линии 1—2, вычисляем точно геодезические координаты и азимуты по линиям 2—7, 7—8; по координатам пунктов 8 и 3 решением обратной геодезической задачи выводим точно азимуты направлений 8—3 и 3—8. Исходя от координат пункта 7 и азимута 7—2, полученных прямой передачей по линиям 1—2 и 2—7, вычисляем точно координаты и азимуты по линиям 7—20, 20—11, 11—12, 12—9; по координатам пунктов 11 и 8, 8 и 9 решением обратной геодезической задачи получаем азимуты направлений 8—11, 11—8, 12—9 и 9—12 и т. д. Другими словами, величины  $A$  в уравнениях Лапласа должны относиться к линиям, соединяющим пункты с одними и теми же значениями геодезических координат в разных полигонах. Часть вычислений, необходимых для получения  $A$  и  $L$  в уравнениях Лапласа, проделывается при составлении условий широты и долготы.

Перейдем к составлению условий широты и долготы. Исходя из геодезических координат и азимута в пункте 1, переданных точно по линии Саблино — 1, вычисляем точно геодезические координаты и азимуты по линиям 1—2, 2—3, 3—4, 4—1, 1—2 (см. фиг. 3) и получаем несмыкание полигона по широте и долготе, а также и по азимуту.

Называем:  $B^{\circ}_1$  и  $L^{\circ}_1$  — исходные широту и долготу пункта 1;  $(B^{\circ}_1)'$  и  $(L^{\circ}_1)'$  — полученные круговым вычислением широту и долготу пункта 1. Взяв за исходные геодезические координаты пункта 2, полученные при предыдущем круговом вычислении первого полигона, и геодезический азимут линии 2—1, вычисляем точно геодезические координаты и азимуты по линиям 2—7, 7—8, 8—3, 3—2, 2—7 и получаем для пункта 2:

$B^{\circ}_2$  и  $L^{\circ}_2$  — из первого полигона;  
 $(B^{\circ}_2)'$  и  $(L^{\circ}_2)'$  — из кругового вычисления по второму полигону.

Такие вычисления исполняем для каждого образовавшегося полигона, двигаясь в каждом полигоне по ходу часовой стрелки. Азимут линии 1—2, полученный после кругового обхода первого полигона, исправленный величиной  $+ [L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)'] \sin \varphi_1$ , должен оказаться до

0,01—0,02 равным азимуту той же линии, принятому в начале вычисления. Точно так же азимут линии 2—7, полученный круговым вычислением по второму полигону, по введении в него поправки  $+[L^{\circ}_2 - (L^{\circ}_2)'] \sin \varphi_2$ , должен оказаться равным азимуту линии 2—7, принятому как исходный при вычислении и т. д. Это служит контролем всех вычислений, поскольку условия Лапласа выполнены при звеневом уравнивании.

К уравнениям ( $L$ ) Лапласа по линиям сети должно будет присоединить еще условие Лапласа в Саблине:

$$\alpha_{1 \cdot 0} + \delta\alpha_{1 \cdot 0} - A_{1 \cdot 0} - \delta A_{1 \cdot 0} = (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1.$$

Значок «<sub>0</sub>» относится к Пулкову, а значок «<sub>1</sub>» — к Саблину. Написанное условие Лапласа в Саблине подлежит еще некоторым преобразованиям, принимая во внимание обстоятельства получения астрономического азимута в Саблине.

### V

Составлению условных уравнений в каждом полигоне предшествует вычисление коэффициентов, которые имеют следующие обозначения и состав:

$$\left. \begin{aligned} q_1^{n-1, n} &= \sin l_{n-1, n} \operatorname{tg} \varphi_n \cdot \frac{M_{n-1}}{N_n} \\ p_3^{n-1, n} &= -\frac{\cos A_{n, n-1}}{M_n \sin 1''} = -(1)_n \cos A_{n, n-1} \\ q_3^{n-1, n} &= -(2)_n \sin A_{n, n-1} \sec \varphi_n \\ r_3^{n-1, n} &= q_3^{n-1, n} \cdot \sin \varphi_n \\ p_4^{n-1, n} &= (1)_n s_{n, n-1} \sin A_{n, n-1} \sin 1'' \\ q_4^{n-1, n} &= -(2)_n s_{n-1, n} \cos A_{n, n-1} \sec \varphi_n \sin 1'' \\ r_4^{n-1, n} &= 1 + q_4^{n-1, n} \sin \varphi_n \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

В формуле (1):

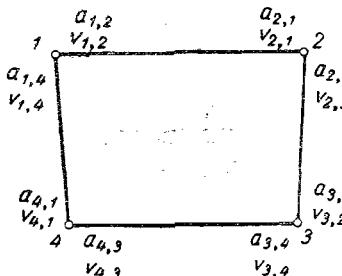
$n - 1$  и  $n$  — номера начальной и конечной точек некоторой стороны ( $n - 1, n$ ) полигона;

$s_{n-1, n}$  — длина этой стороны;

$l_{n-1, n}$  — разность долгот точек  $n - 1$  и  $n$ ;

$A_{n, n-1}$  — азимут с  $n$ -й точки на  $(n - 1)$ -ю.

Полагая нумерацию вершин в полигоне ту, которая указана на фиг. 4, и обозначая поправки длин его сторон через  $\delta s_{1 \cdot 2}, \delta s_{2 \cdot 3}, \delta s_{3 \cdot 4}$  и  $\delta s_{4 \cdot 1}$ , а поправки направлений его сторон — через  $v_{1 \cdot 2}, v_{2 \cdot 1}, v_{2 \cdot 3}, v_{3 \cdot 4}, \dots$ ,



Фиг. 4

имеем условные уравнения полигона в таком виде:

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 - (B^{\circ}_1)' = & [p_3^{1 \cdot 2} + (p_4^{2 \cdot 3} + p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1}) r_3^{1 \cdot 2}] \delta s_{1 \cdot 2} + [p_3^{2 \cdot 3} + (p_4^{3 \cdot 4} + \\ & + p_4^{4 \cdot 1}) r_3^{2 \cdot 3}] \delta s_{2 \cdot 3} + [p_3^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1} r_3^{3 \cdot 4}] \delta s_{3 \cdot 4} + p_3^{4 \cdot 1} \delta s_{4 \cdot 1} - [p_4^{2 \cdot 3} + (p_4^{3 \cdot 4} + \\ & + p_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}) r_4^{2 \cdot 3}] (v_{2 \cdot 1} - v_{2 \cdot 3}) - [p_4^{3 \cdot 4} + p_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}] (v_{3 \cdot 2} - v_{3 \cdot 4}) - \\ & - p_4^{4 \cdot 1} (v_{4 \cdot 3} - v_{4 \cdot 1}); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)' = & [q_3^{1 \cdot 2} + (q_1^{2 \cdot 3} + q_1^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1}) p_3^{1 \cdot 2} + (q_4^{2 \cdot 3} + q_4^{3 \cdot 4} + \\ & + q_4^{4 \cdot 1}) r_3^{1 \cdot 2}] \delta s_{1 \cdot 2} + [q_3^{2 \cdot 3} + (q_1^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1}) p_3^{2 \cdot 3} + (q_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1}) r_3^{2 \cdot 3}] \delta s_{2 \cdot 3} + \\ & + [q_3^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1} p_3^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1} r_3^{3 \cdot 4}] \delta s_{3 \cdot 4} + q_3^{4 \cdot 1} \delta s_{4 \cdot 1} - [q_4^{2 \cdot 3} + (q_1^{3 \cdot 4} + \\ & + q_1^{4 \cdot 1}) p_4^{2 \cdot 3} + q_1^{4 \cdot 1} p_4^{3 \cdot 4} + (q_4^{3 \cdot 4} + q_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}) r_4^{2 \cdot 3}] (v_{2 \cdot 1} - v_{2 \cdot 3}) - [q_4^{3 \cdot 4} + q_1^{4 \cdot 1} p_4^{3 \cdot 4} + \\ & + q_4^{4 \cdot 1} r_4^{3 \cdot 4}] (v_{3 \cdot 2} - v_{3 \cdot 4}) - q_4^{4 \cdot 1} (v_{4 \cdot 3} - v_{4 \cdot 1}) \end{aligned} \quad (2')$$

Эти формулы выведены и даны Ф. Н. Красовским в его статье «Методы уравнивания государственной триангуляции I класса»\*.

Если назовем: а) астрономические азимуты геодезических линий, образующих наш полигон, через  $\alpha_{1 \cdot 2}, \alpha_{2 \cdot 1}, \alpha_{2 \cdot 3}, \dots, \alpha_{4 \cdot 1}$ ; б) геодезические азимуты, с которыми вели вычисление координат вершин полигона для получения  $B^{\circ}_1 - (B^{\circ}_1)'$  и  $L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)'$ , соответственно через  $A_{1 \cdot 2}, A_{2 \cdot 1}, A_{2 \cdot 3}, A_{3 \cdot 2}, A_{3 \cdot 4}, A_{4 \cdot 3}$ ; в) через  $A'_{4 \cdot 1}$  и  $A'_{1 \cdot 4}$  азимуты линии 4—1, точно вычисленные по координатам пункта 4 и по исходным координатам  $B^{\circ}_1$  и  $L^{\circ}_1$  пункта 1, причем координаты пункта 4 — те самые, которые получаются при круговом обходе нашего полигона, — то уравнение угловое для этого полигона представляется в таком виде:

$$\begin{aligned} (v_{1 \cdot 4} - v_{1 \cdot 2}) + (v_{2 \cdot 1} - v_{2 \cdot 3}) + (v_{3 \cdot 2} - v_{3 \cdot 4}) + (v_{4 \cdot 3} - v_{4 \cdot 1}) + [(x_{2 \cdot 1} - x_{2 \cdot 3}) - \\ - (A_{2 \cdot 1} - A_{2 \cdot 3})] + [(x_{3 \cdot 2} - x_{3 \cdot 4}) - (A_{3 \cdot 2} - A_{3 \cdot 4})] + [(x_{4 \cdot 3} - x_{4 \cdot 1}) (A_{4 \cdot 3} - A'_{4 \cdot 1})] + \\ + [x_{1 \cdot 4} - x_{1 \cdot 2}) - (A'_{1 \cdot 4} - A_{1 \cdot 2})] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом уравнении слагаемые  $[(x_{2 \cdot 1} - x_{2 \cdot 3}) - (A_{2 \cdot 1} - A_{2 \cdot 3})]$  и  $[(x_{3 \cdot 2} - x_{3 \cdot 4}) - (A_{3 \cdot 2} - A_{3 \cdot 4})]$  будут каждое равны нулю, а два слагаемых  $[(x_{4 \cdot 3} - x_{4 \cdot 1}) - (A_{4 \cdot 3} - A'_{4 \cdot 1})]$  и  $[(x_{1 \cdot 4} - x_{1 \cdot 2}) - (A'_{1 \cdot 4} - A_{1 \cdot 2})]$  в сумме должны давать лишь сотые доли секунды. Свободный член условия углового будет всегда очень мал, — это обусловлено предварительным уравниванием звеньев триангуляции с принятием при этом во внимание уравнений Лапласа и последующим выводом углов полигона как разностей соответствующих астрономических азимутов геодезических линий, заменивших треугольники звеньев.

Уравнения (2) и (2') должно умножить на  $\frac{100}{3}$ , чтобы впоследствии иметь дело с коэффициентами, выражющимися в единицах и десятых долях.

## VI

Решение условных уравнений (2) и (2'), составленных в каждом полигоне, и решение уравнений Лапласа должно происходить при применении соответствующих весов искомых поправок  $\delta s$  и  $v_{i,k}$ ,  $\delta^\circ$  и  $\delta\lambda$ .

Для поперечного смещения конца геодезической линии имеем:

$$q^2 = 2 \left[ \frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{s}{2} \sqrt{\left( \frac{n}{2} + 1 \right) (n + 1)} \right]^2 + m_z^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{s^2}{4}, \quad (4)$$

\* «Труды Государственного института геодезии и картографии». Вып. 2, М., 1931.

где  $n$  — число, равное половинному числу треугольников в звене триангуляции, которое заменено данной геодезической линией  $s$ ;  $m$  — средняя ошибка измерения угла в триангуляции. Это поперечное смещение  $q$  очень близко к равенству с продольным смещением  $ds$  конца нашей геодезической линии;  $m_z$  — средняя погрешность ориентировки выходной стороны в конце нашей геодезической линии  $s$  относительно выходной стороны в ее начале посредством азимутов Лапласа. В случае замены двух геодезических линий одной (см. фиг. 2) должно в (4) считать  $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$  и добавить к правой части члены:

$$2 \left[ \frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \frac{(s_1 + s_2)}{4} \sqrt{\left( \frac{n}{2} + 1 \right) (n + 1)} \right]^2 + \\ + m_z^2 \sin^2 1'' \frac{(s_1 + s_2)^2}{4}; n = \frac{n_1 + n_2}{2},$$

где  $n_1$  — половинное число треугольников для цепи  $s_1$ , а  $n_2$  — половинное число треугольников для цепи  $s_2$  (см. фиг. 2).

Продольное смещение  $ds$  конца геодезической линии определяется так:

$$ds^2 = 2 \left( \frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5} \frac{s}{2} \right)^2 + \frac{s^2}{2(300\,000)^2}. \quad (5)$$

В формуле (5)\* дробь  $\frac{1}{300\,000}$  — средняя ошибка выходной стороны триангуляции, обусловленная ошибками углов. Величину  $m$  принимаем равной  $\pm 0'',6$ , а величину  $m_z$  — равной  $\pm 0'',8$ , если определялись непосредственно астрономические азимуты выходных сторон, и равной  $\pm \sqrt{1''/4}$ , если определяли азимут боковой стороны базисной сети. Сделаем расчет  $q$ ,  $v_{i,k}$  и  $ds$  при  $s = 400$  км, при длине стороны триангуляции в 30 км и, следовательно, при  $n = 13$  или 14.

Мы получим:

$$ds^2 = 3,28; \\ V^2 = 3,38 \text{ при } m_z = 1'',2; \\ v^2 = 0,72; \\ v^2 = \frac{q^2}{s^2 \sin^2 1''} - \frac{m^2}{2}.$$

\* В случае замены двух геодезических линий одной в (5) должно считать  $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$  (см. фиг. 2) и в правой части формулы добавить:

$$2 \left( \frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5} \frac{s_1 + s_2}{4} \right)^2 + \frac{(s_1 + s_2)^2}{4(300\,000)^2};$$

$n = \frac{n_1 + n_2}{2}$ , причем  $n_1$  — половина числа треугольников по линии  $s_1$ , а  $n_2$  — то же по линии  $s_2$ .

Так как в большинстве полигонов ГГУ в средине геодезической линии в 400 км находятся базис и пункт Лапласа, то для этих полигонов расчет нужно вести иначе. Сперва рассчитаем  $ds^2$  и  $q^2$ ; для стороны полигона в 200 км мы получим:

$$ds^2 = 0,60;$$

$$q^2 = 0,67;$$

$$v^2 = 0,52.$$

Для полигонов ГГУ с  $s = 400$  км, но с промежуточными базисными сетями будем иметь:

$$ds^2 = 1,20;$$

$$q^2 = 2,25;$$

$$v^2 = 0,42.$$

Выгодно будет теперь принять за ошибку единицы веса  $\pm \sqrt{1,2}$ .

Тогда для полигонов ГГУ с  $s = 400$  км, но с промежуточной базисной сетью будем иметь веса (с округлением):

для  $s \dots \dots \dots 1,0$ ;

для  $v \dots \dots \dots 2,8$ ;

для полигонов с  $s = 200$  км:

для  $s \dots \dots \dots 2$ ;

для  $v \dots \dots \dots 2,4$ ;

для полигонов с  $s = 400$  км, но без промежуточных базисов:

для  $s \dots \dots \dots 0,4$ ;

для  $v \dots \dots \dots 1,5$ .

Очевидно, что веса величин  $s$  и  $v$  заметно изменяются в зависимости от расстояний между Лапласовыми пунктами и от действительных значений величин  $m$  и  $m_z$  в разных звеньях. Следует  $m_z$  и  $m$  отдельно определять для разных звеньев, так как передача астрономически наблюденных азимутов на выходные стороны выполняется далеко не однобразно\*, а значения  $m$ , выводимые из звеньевого уравнения, также оказываются довольно значительно различающимися для разных звеньев. Формулы (4) и (5), конечно, приближенные: они вполне оправдывают себя при правильно построенных звеньях и при нормальных по размеру значениях свободных членов в базисных и азимутальных условиях.

\* Вес  $\delta \sin \alpha$  — около 10, а вес  $\delta^\circ$  соображается по ошибке непосредственно наблюденного азимута ( $m_\alpha$ ) и по ошибкам соответствующих угловых наблюдений. Если определяли азимут выходной стороны, то вес  $\delta_0$  — около четырех  $m^2 \delta = m^2 \alpha + \frac{(0,6)^2}{2}$ ; если определяли азимут боковой стороны базисной сети, то вес  $\delta^\circ$  — около 2,3; в этом случае

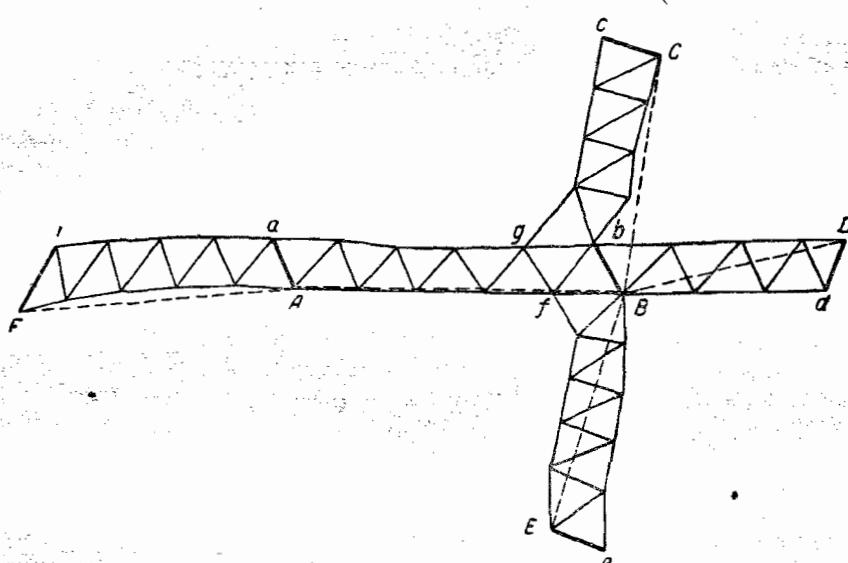
$$m^2 \delta = m^2 \alpha + \frac{(0,6)^2}{2} + (0,6)^2.$$

## VII

По составлении нормальных уравнений коррелат, соответствующих системе условных уравнений полигонов, и по решении этих уравнений находят поправки  $ds$  и  $v$ , а с ними — окончательные значения элементов полигонов. После этого следуют окончательное точное вычисление геодезических координат и азимутов вершин полигонов, а также вставка пунктов Лапласа, принадлежащих промежуточным базисным сетям (пункты 12, 6, 8, 10, фиг. 2).

## VIII

Пусть пункты  $A, D, B, C, E, F$  (фиг. 5) являются вершинами полигонов, геодезические координаты которых окончательно установлены. Также будут окончательно установлены геодезические азимуты геодезических линий  $AB, BD, BE, BC, AF$ .

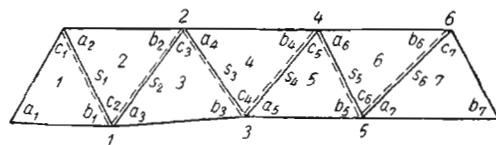


Фиг. 5

Если на фиг. 5 стороны  $Aa, Bb, dD, Ee, cC, Fi$  суть выходные для соответственных звеньев триангуляции, то из звеньевого уравнения будут известны углы:  $iFA, FAa, BAa, ABb, EBb, CBB, BDd$  и т. д. По геодезическим азимутам линий  $AF$  и  $AB$  и по углам  $FAa$  и  $BAa$  выводим дважды азимут стороны  $Aa$  и берем из двух этих выводов среднее; по азимутам линий  $BE, BA, BC$  и  $BD$  и по углам  $EBb, ABb, BbC$  и  $DBb$  получаем четыре определения азимута стороны  $Bb$ , из которых образуем среднее.

Для последующего уравнивания звеньев между координатами точек  $F$  и  $A$ ,  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$ ,  $B$  и  $E$ , между длинами и азимутами выходных сторон  $Fi, Aa, Bb, cC, dD, Ee$  придется предварительно выделить общие звенья фигуры, например в случае фиг. 5 придется выделить треугольники  $fbB$  и  $fgB$  и до уравнивания звеньев вывести из них геодезические азимуты сторон  $Bf, fb, gf$  и  $gb$  и вычислить геодезические координаты пунктов  $f$  и  $g$ . При последующем уравнивании звеньев

определяют поправки углов (а не направлений) и берут ходовую линию так, как указано на фиг. 6 пунктиром.



Фиг. 6

Самое уравнивание исполняют по методу, отработанному Н. А. Урмасевым и изложенному в его статье «Уравнивание полигонов в геодезических и прямоугольных координатах»\*. Этот метод приводит быстро к результату и, являясь строгим, требует немного времени.

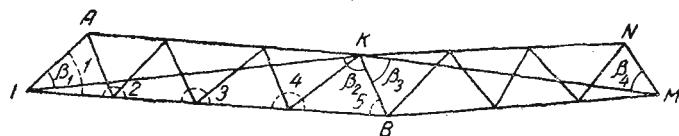
---

\* «Труды Государственного института геодезии и картографии». Вып. I. М., 1931.

## НОВЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО УРАВНИВАНИЮ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

При уравнивании значительных астрономо-геодезических сетей, без разделения их притом на части, вряд ли можно говорить о введении в общее уравнивание в качестве неизвестных поправок самих непосредственно измеренных элементов треугольников триангуляции, т. е. поправок измеренных в треугольниках углов или направлений. Является целесообразным заменить каждое звено триангуляции между двумя смежными Лапласовыми пунктами геодезической линией и, образовав сеть из таких линий, в дальнейшем находить поправки их длин, их астрономических азимутов находить поправки их длин, их астрономических азимутов и астрономических долгот их конечных (Лапласовых) пунктов.

После уравнивания такой сети из геодезических линий и строгого вычисления — по уравненным длинам геодиний и уравненным углам между ними — геодезических координат и азимутов для пунктов Лапласа должна следовать вставка треугольников каждого звена: между твердо установленными геодезическими координатами конечных для звена пунктов Лапласа, между твердо установленными в этих пунктах Лапласовыми азимутами примыкающих к ним сторон треугольников и между остающимися без изменения в процессе всего уравнивания значениями длин выходных сторон звена. Образованию сети из геодезических линий непременно предшествует предварительное уравнивание звеньев триангуляции. Поэтому вся программа уравнивания астрономо-геодезической сети представляется в такой схеме:



а) предварительное уравнивание звеньев и вывод после этого из каждого звена: длины геодезической линии; углов  $\beta$  (см. фигуру), образуемых ею с теми сторонами триангуляции, для которых в концах звена определены непосредственными наблюдениями астрономические азимуты; астрономических азимутов геодиний — прямого и обратного, посредством углов  $\beta$ ;

б) вычисление «приближенных» геодезических координат Лапласовых пунктов и вывод по ним с полной точностью длин и геодезических азимутов линий, соединяющих пункты с такими «приближенными» координатами;

- в) составление уравнений Лапласа и условий полигонов в астрономо-геодезической сети;
- г) строгое вычисление геодезических координат и азимутов для Лапласовых пунктов;
- д) уравнивание звеньев, вставляемых: между окончательно установленными Лапласовыми пунктами, между окончательно установленными в них Лапласовыми азимутами конечных сторон звена и между длинами выходных сторон звена.

Пункт «а» этой программы может осуществляться различно. А именно: можно ограничиться в предварительном уравнивании звена только решением условий фигур и базисов; но можно к этим условиям присоединить азимутальное условие, возникающее в звене из-за того, что конечными пунктами его являются пункты Лапласа.

Именно последний порядок был принят по моему предложению в 1929 г. при первом уравнивании астрономо-геодезической сети СССР и применяется до сих пор<sup>1</sup>. Этот прием предварительного уравнивания звена не только за условия фигур и базисов, но и за азимутальное условие вносит в эту стадию уравнительных вычислений заметные осложнения, но введение его в практику имеет веские основания.

Дело в том, что условия смежных полигонов в большинстве случаев оказываются противоречащими друг другу и вследствие этого при выполнении пункта «в» вышеупомянутой программы, даже при небольших сравнительно невязках в полигонах, деформация их при уравнивании может достигнуть заметных размеров, выражаясь мало приемлемыми и трудно объяснимыми значительными поправками длин или азимутов некоторых геодезических линий; при этом окажутся в особенно выгодных условиях те геодезические линии крайних полигонов сети, к которым уже не примыкают никакие полигоны<sup>2</sup>. С другой стороны, условия полигонов работают сами по себе на вывод только поправок геодезически определенных элементов, а именно поправок углов между образующими полигоны геодезическими линиями и поправок длин этих линий; условия же Лапласа связывают поправки непосредственно наблюденных астрономических азимутов и астрономических долгот с поправками углов  $\beta$ , выведенных геодезически. Так как азимуты Лапласа должны иметь в триангуляции контролирующее значение, то определение поправок астрономических азимутов и долгот при выполнении пункта «в» в зависимости от ошибок триангуляции, в зависимости от размеров и распределения чисто геодезических невязок в полигонах, может дать приемлемый результат, из колеблющийся значение Лапласовых азимутов, только при значительно большем весе непосредственно наблюденных астрономических элементов по сравнению с весами других элементов, определяемых геодезически и входящих в уравнения полигонов и в уравнение Лапласа.

Но этого нет, и вес непосредственно наблюденного азимута равен примерно весу угла  $\beta$ .

Кроме того, мы не можем отрицать существования систематических ошибок в углах треугольника данного звена, для правильного выявления и уничтожения влияния которых необходимо использовать Лапласовы азимуты, конечно, до образования полигонов.

Неправильное распределение поправок при уравнивании полигонов скажется очень сильно в последней стадии обработки триангуляции, при

вставке звеньев между установленными Лапласовыми пунктами, Лапласовыми азимутами и выходными сторонами звеньев.

При этих обстоятельствах стремление возможно лучше до образования еще полигонов получить длины и азимуты сторон полигона является естественным и при осуществлении — непременно ведущим к цели.

Правильно проведенное при предварительном уравнивании звеньев использование Лапласовых азимутов значительно повышает вес астрономических азимутов и вес направлений геодезических линий и, кроме того, приводит к устранению систематических влияний, к устранению систематических искажений в длинах и направлениях выводимых из звеньев геодезических линий. Мы поэтому вправе ожидать, что несмыкания полигонов при предварительном уравнивании звеньев за условия фигуры, базисов и азимутов должны заметно уменьшаться по сравнению с их значениями при уравнивании звеньев только за условия фигур и базисов (конечно, в среднем по всей сети). Вероятный размер этого уменьшения — почти в два раза. Это должно повести к заметному уменьшению деформаций в полигонах при их уравнивании, что благоприятно скажется и на окончательном установлении Лапласовых азимутов и при вставке звеньев согласно пункту «д» программы уравнивания сети.

Опыт первого уравнивания астрономо-геодезической сети СССР, выполненного в 1929 и 1930 гг., блестяще подтвердил эти предположения; наибольшая поправка длины геодезической линии в 1 м на 200 км имеет место только в двух случаях из двадцати четырех, во всех остальных случаях она менее 0,5 м; поправки азимутов геодезических линий не выходят за пределы  $\pm 0''\cdot7$ ; при вставке звеньев среднее значение поправки угла треугольника равно  $\pm 0''\cdot15$ , причем только в очень редких, исключительных случаях эта поправка достигает  $0''\cdot4$ .

Считая обоснованным достаточно предварительное уравнивание звеньев за условия фигур, базисов и азимутов, мы должны отметить следующую слабую сторону выполняемого в производстве предварительного уравнивания звеньев: 1) в нем поправки астрономических азимутов и поправки астрономических долгот принимаются просто равными нулю — в силу того, что примыкающие друг к другу звенья уравниваются раздельно; 2) в нем Лапласовы уравнения принимаются отнесенными к поверхности неудачно выбранного для СССР референц-эллипсоида по Бесселю, ориентированного притом по Пулкову, т. е. по пункту, находящемуся на краю обширного государства.

По Гельмерту уравнение Лапласа для геодезической линии  $IK$  (см. фигуру) напишется так:

$$\begin{aligned}
 & (x_{k \cdot i} - A_{k \cdot i}) - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} (x_{i \cdot k} - A_{i \cdot k}) - \sin l_{i \cdot k} \cos \varphi_k (\varphi_i - B_i) - \\
 & - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k + (\lambda_i - L_i) \sin \varphi_k - \delta \lambda_k \sin \varphi_k + \delta \lambda_i \sin \varphi_i + \\
 & + \delta_k + v_{k \cdot i} - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} \delta_i - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} v_{i \cdot k} + \sin l_{i \cdot k} \cos \varphi_k (\xi_i - \delta \varphi_i) + \\
 & + \left( \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} \operatorname{tg} \varphi_i - \sec \varphi_i \sin \varphi_k \right) \eta_i = 0. \quad (1)
 \end{aligned}$$

В этом уравнении:

$\alpha_{k \cdot i}$  и  $\alpha_{i \cdot k}$  — астрономические азимуты геодезической линии  $IK$  в  $K$  и в  $I$ ;

$s_{i \cdot k}$  — длина этой геодезической линии  $IK$ ;

$\lambda_k$  и  $\lambda_i$  — астрономические долготы пунктов  $I$  и  $K$ ;

$\delta_k$  и  $\delta_i$  — погрешности астрономических азимутов сторон  $IA$  и  $KB$ ;

$v_{i \cdot i}$  и  $v_{i \cdot k}$  — погрешности углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , выведенных из звена  $IK$  (см. фигуру);

$\varphi_k$  и  $\varphi_i$  — астрономические широты в  $K$  и в  $I$ ;

$l_{i \cdot k}$  — разность долгот точек  $K$  и  $I$ ;

$B_i$  — геодезическая широта пункта  $I$ ;

$L_k$  и  $L_i$  — геодезические долготы пунктов  $K$  и  $I$ ;

$\delta\lambda_k$  и  $\delta\lambda_i$  — погрешности астрономических долгот  $\lambda_k$  и  $\lambda_i$ ;

$\xi_i$  — слагающая по меридиану уклонания отвеса в  $I$ ;

$\gamma_i$  — слагающая в первом вертикале уклонания отвеса в  $I$ .

В уравнении (1) мы отбросили член с поправкой  $\Delta p$  сжатия референц-эллипсоида, как влияющий совершенно пренебрегаемо в случае рядов по меридианам или по параллелям. Величины  $\xi_i$  и  $\gamma_i$ , находящиеся в этом уравнении, должно считать отнесенными к эллипсоиду, наилучше подходящему к геоиду в пределах территории, покрытой нашей сетью<sup>3</sup>.

Мы можем считать уравнение (1) отнесененным и к референц-эллипсоиду: тогда величины  $\xi_i$  и  $\gamma_i$  имеем право положить просто равными нулю, но зато тогда мы должны все наблюденные величины, входящие явно в уравнение (1) или используемые при его составлении, редуцировать предварительно на поверхности этого референц-эллипсоида; такими величинами являются астрономические азимуты сторон  $IA$  и  $KB$ , астрономические долготы  $\lambda_i$  и  $\lambda_k$  и измеренные углы в треугольниках<sup>4</sup>. Это редуцирование будет даже при неудачно выбранном референц-эллипсоиде и при удалении ряда  $IK$  от исходного пункта триангуляции на 3000 км влиять на свободный член уравнения (1) вообще не более  $\pm 0'',06$ . Однако пренебрежение этими малыми редукциями будет вносить определенно накапливающиеся в одну сторону систематические ошибки в азимутах Лапласа, которые могут достичь  $0'',5$  для азимутов в точках, удаленных на 3000 км от исходного пункта триангуляции. В СССР мы имеем и неудачно выбранный референц-эллипсоид, и протяжение триангуляции не на 3000 км от Пулкова, а на 8000 км. Поэтому мы от указанного редуцирования наблюденных в астрономо-геодезической сети элементов отказываться не имеем права при принятии в уравнении (1) величин  $\xi_i$  и  $\gamma_i$  равными нулю. Но такое редуцирование представляется не только сложным — оно требует еще определения для всех точек триангуляции высот геоида в них относительно референц-эллипсоида, а при значительности на краях триангуляции этих высот — еще и действительной кривизны силовой (для действия тяжести) линии.

Другими словами, это редуцирование следует к настоящему моменту считать неосуществимым.

Однако выходом из положения является, как уже и указано выше, отнесение  $\xi_i$  и  $\gamma_i$  не к референц-эллипсоиду, а к эллипсоиду, наилучше подходящему к геоиду для данной страны. Для СССР такой эллипсоид определен в первом приближении и именно для территории, охваченной

геодезическими работами к 1935 г.<sup>5</sup>. Так как при вычислении триангуляции мы принимаем в Пулкове:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= B_1; \\ \lambda_1 &= L_1; \\ \alpha_1 &= A_1,\end{aligned}$$

то имеем:

$$\begin{aligned}\xi_i - \delta\varphi_i &= (\varphi_i - B_i) + p_1^{1-i} \xi_1 + p_4^{1-i} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_6^{1-i} \frac{\Delta a}{a_0} - p_6^{1-i} \Delta\mu; \\ \eta_i &= (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i + q_1^{1-i} \cos \varphi_i \xi_1 + (\sec \varphi_1 + q_4^{1-i} \operatorname{tg} \varphi_1) \eta_1 \cos \varphi_i - \\ &\quad - q_5^{1-i} \cos \varphi_i \frac{\Delta a}{a_0} - q_6^{1-i} \Delta\mu \cos \varphi_i.\end{aligned}\tag{2}$$

В уравнениях (2)'  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  — слагающие уклонения отвесной линии в исходном пункте триангуляции по отношению к наилучше подходящему эллипсоиду;  $\Delta a$  и  $\Delta\mu$  — поправки большой полуоси  $a_0$  и сжатия  $\mu_0$  референц-эллипса при переходе от него к наилучше подходящему эллипсоиду. Коэффициенты  $p$  и  $q$  с разными указателями представляют собой коэффициенты изменений в широте и долготе, соответствующих изменению исходной широты  $B_1$ , исходного азимута  $A_1$  и большой полуоси и полярного сжатия эллипса. Получение этих коэффициентов при значительном расстоянии пункта  $I$  от исходного пункта  $1$  достаточно сложно. Но если  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $\Delta\mu$  в первом приближении уже определены, то при этом коэффициенты уравнений (2) были уже получены, и поэтому при точном составлении уравнений вида (1) мы этими коэффициентами располагаем; мало того, обычно определение  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $\Delta\mu$  завершается вычислением по ним из уравнений (2) значений  $\xi_i$  и  $\eta_i$ .

Таким образом мы можем всегда полагать, что величинами  $\xi_i$  и  $\eta_i$  мы располагаем, они нам известны. Конечно,  $\Delta a$ ,  $\Delta\mu$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  определяются в первом приближении с ошибками большими, чем в последующих вычислениях. Но для СССР средняя ошибка в  $\Delta a$  вряд ли более  $\pm 50$  м, в  $\xi_1$  и  $\eta_1$  — вряд ли более  $\pm 0''$ ,5 и в  $\Delta\mu$  — не более  $\pm 1 : 45\,000$ . Этим ошибкам будут соответствовать ошибки в свободном члене уравнения (1), меньшие по крайней мере в восемь раз тех ошибок, которые мы вносим в уравнение (1), полагая  $\xi_i$  и  $\eta_i$  равными нулю. Отсюда ясно, что при указанном учете членов  $\xi_i$  и  $\eta_i$  в уравнении (1) систематические ошибки в Лапласовых азимутах даже для пунктов, удаленных от исходного пункта триангуляции на 3000 км, вообще будут не более  $0''$ ,1.

Таким образом, одну слабую сторону дела — именно отнесение в СССР Лапласовых уравнений к эллипсоиду Бесселя — мы можем без затруднений устранить.

Другая слабая сторона — неучет при уравнивании звеньев ошибок астрономических азимутов и долгот — может быть, как представляется, в существенной части устранена следующим методом.

Допустим, что мы уравняли звено только за условия фигур и базисов. После этого вычислим в звене полярные координаты и из этого вычисления получим углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и длину геодезической линии  $IK$ , обозначаемую через  $s_{r,k}$ .

Теперь, отправляясь в исходном пункте триангуляции от  $B_1 = \varphi_1$ ,  $L_1 = \lambda_1$  и  $A_1 = \alpha_1$ , выполним постепенное, идя от звена к звену, вычисление геодезических координат и азимутов, пользуясь при этом расстоя-

ниями  $s_{i \cdot k}$  и углами  $\beta$ , при посредстве которых, конечно, будет осуществляться передача геодезических азимутов. Астрономические азимуты геолиний мы, конечно, получим так:

$$\begin{aligned}\alpha_{i \cdot k} &= \alpha_i + \beta_1; \\ \alpha_{k \cdot i} &= \alpha_k + \beta_2; \\ \alpha_{k \cdot m} &= \alpha_k - \beta_3; \\ \alpha_{m \cdot k} &= \alpha_m - \beta_4,\end{aligned}$$

причем под  $\alpha_i$ ,  $\alpha_k$ ,  $\alpha_m$  понимаются непосредственно определенные из астрономических наблюдений азимуты сторон триангуляции  $IA$ ,  $KB$ ,  $MN$  и т. д.

Далее, составим по всем звеньям уравнения (1) с учетом в них членов с  $\xi_i$  и  $\eta_i$ , пользуясь для этого уравнениями (2) и ранее выведенными  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\alpha$ . Сообразив веса величин  $\delta$ ,  $\delta\lambda$  и  $v$ , решим по способу наименьших квадратов все вместе уравнения (1) по всем звеньям. Можно предположить, что так как это уравнение равносильно проведению ряда прямых сопоставлений для получения поправки  $\delta_i$  наблюденного непосредственно азимута  $\alpha_i$  в каждой точке Лапласа, то для точек, где почему-нибудь этот азимут  $\alpha_i$  искажен более или менее заметно, полученная из уравнения его поправка будет включать в себя главную часть этого искажения и действительно приведет, по ее введении, к существенному приближению уравненного значения азимута  $\alpha_i$  к истинному его значению.

После получения поправок  $\delta_i$ ,  $\delta\lambda_i$ ,  $v_{i \cdot k}$  мы, вследствие предварительного уравнивания звена  $IK$  за условие фигур, будем иметь, согласно фигуре, следующее условие в этом звене:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + v_{k \cdot i} - v_{i \cdot k} = 0, \quad (3)$$

в котором  $v_{k \cdot i} - v_{i \cdot k}$  представляет свободный член уравнения (3), а величины (1), (2), (3), ... суть вторичные поправки углов, отмеченных пунктиром на фигуре, за азимутальное условие.

Теперь мы можем поступить двояко:

а) Или, присоединив к условию (3) условия фигур и базисов звена (в которых свободные члены будут равны нулю), вновь уравнять звено, т. е. произвести его вторичное уравнивание с определением вторичных поправок. Тогда далее будет следовать новое вычисление полярных координат в звене, новый вывод расстояния  $IK$  и углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , новое вычисление геодезических координат и азимутов Лапласовых пунктов и затем новое составление Лапласовых уравнений вида (1) и полигонных условий сети, причем, конечно, в уравнении (1) при вычислении свободных его членов нужно будет уже учесть поправки, полученные в первом решении этих уравнений, вследствие чего уравнение напишем так:

$$\begin{aligned}(\alpha'_{k \cdot i} - A'_{k \cdot i}) - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} (\alpha'_{i \cdot k} - A'_{i \cdot k}) - \sin l_{i \cdot k} \cos \varphi_k (\varphi_i - B'_i) - (\lambda'_k - \\ - L'_i) \sin \varphi_k + (\lambda'_i - L'_i) \sin \varphi_k - \delta \lambda'_k \sin \varphi_k + \delta \lambda'_i \sin \varphi_i + \delta \lambda'_k + \\ + v'_{k \cdot i} - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} \delta \lambda'_i - \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} v'_{i \cdot k} + \sin l_{i \cdot k} \cos \varphi_k (\xi_i - \delta \varphi_i) + \\ + \left( \cos \frac{s_{i \cdot k}}{R} \operatorname{tg} \varphi_i - \sec \varphi_i \sin \varphi_k \right) \eta_i = 0.\end{aligned} \quad (4)$$

При этом:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha'_{k,i} = \alpha_k + \delta_k + \beta'_2 \\ \alpha'_{i,k} = \alpha_i + \delta_i + \beta'_1 \\ \lambda'_k = \lambda_k + \delta\lambda_k \\ \lambda'_i = \lambda_i + \delta\lambda_i \end{array} \right\}; \quad (5)$$

$\delta_k, \delta_i, \delta\lambda_k, \delta\lambda_i$  получены в первом решении уравнения (1);  $\beta'_2$  и  $\beta'_1$  получены после вторичного уравнивания звена и вторичного вычисления полярных координат;  $A'_{k,i}, A_{i,k}, L'_i, L'_k, B'_i$  — геодезические координаты и азимуты, вычисленные после вторичного уравнивания звеньев.

б) Или, не делая вторичного уравнивания звеньев, выполнить только вновь вычисление геодезических координат, азимутов Лапласовых пунктов, используя при этом прежде выведенные длины  $s$  геодезических линий  $IK, KM, \dots$  и значения углов  $\beta$ , равные:

$$\beta_1 = v_{i,k};$$

$$\beta_2 = v_{k,i};$$

$$\beta_3 = v_{k,m},$$

и составить вновь уравнения Лапласа (1), в которых будем иметь в отличие от уравнений (4):

$$\alpha'_{k,i} = \alpha_k + \delta_k + \beta_2 + v_{k,i};$$

$$\alpha'_{i,k} = \alpha_i + \delta_i + \beta_1 + v_{i,k}.$$

Вопрос о том, какой из этих двух путей применить, должен, по моему, решаться на основании исследования всего материала по астрономо-геодезической сети. Если в углах треугольников звеньев обнаруживаются определенно систематические влияния, сказывающиеся в систематических накоплениях в свободных членах уравнений (3), то надлежит применить первый путь (значащийся под литерой «а»), хотя он и приводит к добавочной работе по вторичному уравниванию звеньев и по вторичному вычислению полярных координат.

Успех выдвигаемого мною приема отдельного решения системы уравнений (1), имеющего главной задачей выделение ошибок непосредственно наблюденных азимутов и долгот, особенно поднимется, если мы будем в астрономо-геодезической сети иметь ряд астрономических азимутов, определенных через известные интервалы в рядах триангуляции с особой тщательностью<sup>6</sup>. Этот интервал может быть равен 600—800 км; фундаментальные азимуты, определенные через 600—800 км друг от друга в сети Лапласовых пунктов, должны иметь среднюю ошибку не  $\pm 0'',8$ , как азимуты производства, а от  $\pm 0'',3$  до  $\pm 0'',4$ . Предварительное изучение местности в отношении действия рефракции на том пункте, на котором предполагается установить выбор для определения фундаментального азимута, принятие особых мер к уменьшению действия рефракции при наблюдениях азимута, собирание при этих наблюдениях добавочного материала, выясняющего значения сопутствующих рефракции градиентов, а самое главное — повторные определения азимута через известные промежутки времени, с охватом в общем более или менее продолжительного периода, — вот

основные черты программы определения фундаментальных азимутов.

Эти фундаментальные азимуты должно ввести в нашем производстве именно потому, что из астрономических элементов в астрономо-геодезической сети азимуты являются наиболее важными элементами, и нельзя мириться с тем, что они определяются хуже, чем остальные, далеко не столь ответственные в этой сети элементы; если для устранения этой ненормальности нужны добавочные средства, то их надлежит затратить.

Понятно, что при наличии фундаментальных азимутов, определенных через 600 км в рядах триангуляции I класса, система уравнений (1) как бы разобьется на части и надежность вывода из нее неизвестных поправок сильно возрастет.

Если сравнивать предлагаемые мною схему и метод уравнивания с применяемыми до сих пор в производстве, то нужно прийти к таким выводам: сумма вычислительных работ или не увеличивается или даже, может быть, уменьшается при следовании новой схеме и новому методу; надежность же результатов уравнивания должна возрасти; кроме того, в новой схеме нет произвольного приравнивания нулю поправок астрономических азимутов и долгот. Конкретные изменения в вычислительном процессе таковы:

1) Первичное уравнивание звеньев за условия фигур, базисов и азимутов по каждому звену заменяется очень простым уравниванием звена только за условия фигур и базисов.

2) Вычисление геодезических координат и азимутов по ходовой линии в звене, предшествующее в принятой схеме составлению азимутального уравнения по пункту 1, заменяется в новой схеме значительно более простым вычислением полярных координат после выполнения пункта 1. Сумма вычислительных работ по пунктам 1 и 2 в моей схеме будет значительно менее, чем в применяемой в настоящее время производственной схеме.

3) Составление и решение одних уравнений (1) является новой работой, которая отсутствует в производственной постановке; но главная часть работы по составлению этих уравнений, именно вычисление геодезических координат и азимутов Лапласовых пунктов, должна быть выполняема в прежней схеме постепенно, всегда заканчиваясь начальным пунктом звена, стоящего в следующей очереди при уравнивании звена по пункту 1. В новой схеме эта работа выполняется после выполнения пункта 1 для всех звеньев. Таким образом, новый объем работы вызывает лишь решение системы уравнений (1), который, вероятно, менее сокращения объема вычислений по пунктам 1 и 2 в сумме при новой схеме работы.

4) В дальнейшем вторичное уравнивание звеньев за условие фигур и базисов и за условие, выражаемое уравнением (3), является новой работой, которая не выполняется в принятой в производстве схеме, за выполнением ее, конечно, по пункту 1. Но это вторичное уравнивание в новой схеме стоит условно и может выполняться не всегда и не по всем звеньям.

5) Переход к составлению уравнений Лапласа, присоединяемых к условиям полигонов, требует в новой схеме вторичного вычисления полярных координат; если выполнялось вторичное уравнивание звеньев

далее следует вычисление геодезических координат и азимутов пунктов Лапласа.

В прежней схеме приходится, по выполнении пункта 1, по уравненным углам звена вновь по ходовой линии вычислять геодезические координаты и азимуты пунктов этой ходовой линии и затем, решением обратной геодезической задачи, выводить геодезические азимуты и длину линии  $IK$ , по этим азимутам сообразить углы  $\beta$  и, наконец, перейти на вычисление геодезических координат и азимутов пунктов Лапласа. В этом пункте 5 мы имеем вновь значительные преимущества новой схемы перед применяемой.

Если же вторичного уравнивания звеньев не делать, то тогда в новой схеме все вычисления сводятся только к установлению новых геодезических координат и азимутов пунктов Лапласа, и, следовательно, значительные преимущества новой схемы по выполнению этого пункта 5 еще значительно увеличиваются. Повторим кратко перечень работ по новой схеме:

- а) уравнивания звеньев за условия фигур и базисов;
- б) вычисление полярных координат в каждом звене, вывод расстояний  $IKKM$  и углов  $\beta$ ,
- в) вычисления геодезических координат и азимутов всех пунктов Лапласа;
- г) составление уравнений Лапласа по типу уравнения (1) с вычислением  $\xi_i$  и  $\eta_i$  при помощи уравнений (2) (если не имеется готовых  $\xi_i$  и  $\eta_i$ );
- д) решение одних уравнений Лапласа всех вместе;
- е) составление азимутальных уравнений (3) и вторичное уравнивание звеньев;
- ж) новое вычисление полярных координат в каждом звене и новое вычисление геодезических координат и азимутов пунктов Лапласа;
- з) новое составление уравнений Лапласа, очень простое, в котором вводятся в качестве неизвестных вторичные поправки астрономических азимутов и долгот и поправки  $v'_{ki}$  и  $v'_{ik}$  новых значений углов  $\beta$  определенных по пункту «ж».

Далее следует составление условий полигонов и решение их вместе с уравнениями Лапласа, составленными по пункту «ж».

Если вторичное уравнивание звеньев не выполняется, то отпадает пункт «е», а пункт «ж» сводится только к вычислению геодезических координат и азимутов пунктов Лапласа<sup>7</sup>.

В заключение позволю себе обратить еще раз внимание на важность принятия в производстве выдвинутой мною мысли введения фундаментальных азимутов в астрономо-геодезической сети СССР. Установление Лапласовых азимутов требует надежного установления поправок астрономически определенных азимутов; эта трудная задача, думается, наилучшим образом достигается все-таки решением системы уравнений (1), т. е. предварительным решением отдельно системы одних уравнений Лапласа с последующим новым их пересоставлением и присоединением после этого к условиям полигонов. В таком отдельном решении одних уравнений Лапласа (хотя и предварительном) и заключается главное из моих предложений по методике уравнивания астрономо-геодезической сети; следующее предложение заключается в учете при составлении уравнений Лапласа отличия референц-эллипсоида от наилучше подходящего для СССР

эллипсоида, что при неудаче выбора референц-эллипсоида и исходного пункта имеет немаловажное значение; наконец, в числе новых предложений следует указать применение полярных координат при обработке звена. Как бы ни были разработаны методы и схемы уравнивания большой астрономо-геодезической сети, все-таки применение их должно сопровождаться изучением материала и проведением ряда научных сопоставлений, сравнением разных методов и известной их модификацией.

Взгляд, что достаточно эти методы «отработать», чтобы затем свести все дело к механическому выполнению счетной части, конечно, неправилен и приводит к появлению завершающих все результаты работ многих специалистов за многие годы каталогов, в которых «нечего читать» и которые рассчитаны только на слепое использование цифр, помещенных в этих каталогах.

---

## **Комментарии и примечания**

### **I. Определение размеров земного трехосного эллипсоида из результатов русских градусных измерений**

Эта статья впервые опубликована в «Памятной книжке Межевого института за 1900—1901 год», М., 1902 г. В этой статье автор впервые делает попытку получить новый вывод размеров земного эллипсоида из имевшихся к концу XIX века русских градусных измерений, исходя из представления о трехосности Земли. В ней выведены формулы для вычисления длин дуг меридиана и параллели на поверхности трехосного эллипсоида, а также разработан один из методов вывода элементов трехосности Земли из градусных измерений по дугам меридианов и параллелей. Однако в этой работе автором был использован очень небольшой материал градусных измерений. Во всяком случае этот материал совершенно недостаточен для вывода размеров трехосного земного эллипсоида. Этим обстоятельством и объясняется тот факт, который отмечен и самим автором в конце статьи, что полученные им результаты оказались в противоречии с геометрическим смыслом решаемой задачи.

### **II. Соображения по установлению эллипсоида для геодезических работ в СССР**

Впервые опубликована на русском языке в сборнике «Доклады VII конференции Балтийской геодезической комиссии». Вып. II, 1934. Содержание этой статьи явилось предметом доклада автора состоявшейся в Ленинграде и Москве в 1934 г. VII конференции названной комиссии. В связи с этим статья была опубликована в Трудах этой комиссии на немецком языке. Здесь статья печатается по русскому тексту.

Решением первого геодезического совещания при Госплане СССР, состоявшегося 19—22 апреля 1926 г., в геодезических работах СССР был оставлен эллипсоид Бесселя, принятый в этих работах еще раньше. Однако результаты исполненного в 1931 г. первого общего уравнивания полигонов астрономо-геодезической сети в пределах Европейской территории СССР убедительно показали, что размеры земного эллипсоида Бесселя не характеризуют фигуры и размеров геоида в пределах территории СССР. В связи с этим вновь возник вопрос о размерах и ориентировке референц-эллипсоида, удовлетворяющего требованиям правильной постановки геодезических работ в СССР, получивших в годы сталинских пятилеток широкое развитие. В данной статье Ф. Н. Красовским впервые были рассмотрены принципиальные стороны этого вопроса и выявлены основные требования, из которых необходимо исходить при установлении размеров и ориентировки референц-эллипсоида для геодезических работ в больших странах, особенно в СССР, а также предложен новый метод вывода исходных геодезических дат по расхождениям по высоте поверхностей геоида и начального референц-эллипсоида.

Вместе с тем в этой статье также впервые были рассмотрены принципиальные вопросы о методах обработки государственной триангуляции СССР. Именно в этой статье автором было указано на необходимость при обработке триангуляции все измеренные в ней величины, как базисы и углы треугольников, приводить путем введения соответствующих поправок к поверхности принятого референц-эллипсоида, т. е. применять метод проектирования, который и используется теперь в СССР. Отсюда стало очевидным, что необходимое для применения этого метода определение отступлений геоида от принятого референц-эллипса тесно связано с практическими задачами обработки и уравнивания триангуляции.

Изложенные в этой статье основные соображения были разработаны и уточнены автором в ряде его последующих статей, важнейшие из которых печатаются в данном томе его избранных сочинений. В них даны принципиальные руководящие указания для научной разработки и практического решения вопросов об установлении размеров и ориентировки референц-эллипса для геодезических работ, а также о методах уравнивания обширной астрономо-геодезической сети СССР.

<sup>1</sup> Первое, носившее предварительный характер уравнивание полигонов триангуляции Европейской территории СССР было исполнено в 1931 г. на поверхности земного эллипса с размерами по Бесселю методом развертывания. Так как работы по триангуляции СССР к тому времени выполнялись уже по программе астрономо-геодезической сети, т. е. градусных измерений, то при указанной обработке триангуляции был попутно сделан вывод поправки большой полуоси земного эллипса Бесселя при неизменном значении его полярного сжатия, а также элементов его ориентировки в исходном пункте Пулково. Эта работа явилась первым опытом автора по выводу размеров земного эллипса из советских градусных измерений. Краткое упоминание о результатах этой работы имеется в одной из работ автора\* в первом томе его сочинений. Подробное описание этой работы и ее результатов, которые носили пробный или предварительный характер, осталось неопубликованным.

<sup>2</sup> В то время, когда писалась данная статья, метод астрономо-гравиметрического нивелирования еще не был разработан. Частота же пунктов Лапласа по рядам триангуляции СССР I класса была недостаточна для определения фигуры геоида методом астрономического нивелирования. Поэтому в то время материалы по определению отступлений геоида от принятого референц-эллипса еще не могли быть получены. Следует отметить, что уже к 1942 г. фигура геоида была изучена в пределах почти половины территории СССР.

### III. Обоснование проекта гравиметрических работ, отвечающих запросам геодезии в СССР

Эта статья впервые опубликована в журнале «Геодезист» № 8 за 1935 год и имела в виду дать научно обоснованные установки для планирования общей гравиметрической съемки, исходя из научных и практических запросов геодезии и геодезических работ СССР. В этом отношении она носила программный характер и в своей принципиальной части до сих пор не потеряла своего значения.

\* Ф. Н. Красовский. Методы уравнивания триангуляции I класса в СССР. Тр. Гос. ин-та геодезии и картографии. Вып. 5. М., 1932.

<sup>1</sup> Здесь под выражением «средний эллипсоид» понимается эллипсоид вращения, у которого большая полуось и полярное сжатие равны соответственно среднему арифметическому из наибольшего и наименьшего радиусов экватора и из наибольшей и наименьшей величин полярного сжатия трехосного эллипса, наилучшим образом представляющего фигуру Земли в отношении вида и размеров.

<sup>2</sup> ГГГГУ — Главное геолого-гидро-геодезическое управление НКТП СССР, которое возникло в 1933 г. путем объединения Главного геодезического управления с Главным геологическим управлением и существовало до 1935 г., когда Государственная геодезическая служба была выделена из ведения Наркомтяжпрома и передана в ведение Наркомата внутренних дел СССР.

<sup>3</sup> В настоящее время гравиметрические методы вывода уклонений отвесной линии изучены и разработаны трудами М. С. Молоденского, В. Ф. Еремеева и др. с достаточной полнотой\*.

<sup>4</sup> В настоящее время М. С. Молоденский разработал методы изучения фигуры физической поверхности Земли по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным. В этих методах используются указанные данные, относящиеся непосредственно к физической земной поверхности, так что вопрос о редукциях силы тяжести и астрономических наблюдений на геоид просто отпадает\*\*.

#### IV. Обзор и результаты современных градусных измерений

Эта статья впервые была опубликована в журнале «Геодезист» № 6, 7, 10, 11 и 12 за 1936 г. Она занимает выдающееся место среди других работ Ф. Н. Красовского по вопросам вывода размеров земного эллипса и носит завершающий характер по этому разделу его научных исследований, которые продолжались в течение ряда лет. В статье разработан ряд теоретических и методических вопросов, связанных с выводом размеров земного эллипса из градусных измерений, и дано одно из законченных определений размеров Земли из градусных измерений СССР и ряда других стран мира.

Первый опыт вывода размеров земного эллипса из советских градусных измерений был проделан автором в 1931 г. при уравнивании полигонов астрономо-геодезической сети, образовавшейся к тому времени в пределах Европейской территории СССР (см. примечание <sup>1</sup> к статье «Соображения по установлению эллипса для геодезических работ в СССР»), эта первая пробная работа автора показала, что земной эллипс Бесселя, который был принят в геодезических работах СССР, не соответствует фигуре геоида в пределах нашей страны. Она показала также, что исследования по выводу размеров земного эллипса, наилучшим образом характеризующего фигуру Земли, имеют большое значение для правильной обработки государственной триангуляции СССР.

\* В. Ф. Еремеев. Применение способа моделей к исследованию формул, определяющих фигуру Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 75. М., 1950.

\*\* М. С. Молоденский. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 42. М., 1945.

Он же. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. Изв. АН СССР, серия географ. и геофизич. Т. XII, № 3, М., 1948.

Он же. Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 68. М., 1949.

Поэтому эти исследования автора с 1933 г. стали планомерно развиваться как одна из основных работ Государственного института геодезии и картографии, впоследствии ЦНИИГАиК.

Данная статья состоит из двух больших отделов, имеющих каждый самостоятельное значение. Отдел I написан в начале 1936 г.\* и содержит изложение общих и методических вопросов, связанных с выводом размеров земного эллипсоида из обработки градусных измерений. Особо следует отметить, что приведенные в отделе I формулы (14) — (19) для определения веса вывода размеров земного эллипсоида из градусных измерений выведены автором впервые и являются оригинальными. Они получены обычным способом определения веса функции уравненных элементов методом посредственных измерений и даются здесь без вывода. Рукопись вывода этих формул хранится в научном архиве автора, переданном кафедре высшей геодезии МИИГАиК. Отдел II статьи написан в середине 1936 г.\* и содержит, главным образом, описание и обработку градусных измерений, используемых в исследованиях автора по выводу размеров земного эллипсоида.

Основные выводы размеров земного эллипсоида в 1936 г. автор получал из градусных измерений СССР по состоянию их на 1935 г. и из градусных измерений Западной Европы и США. Но очень важно отметить, что он уравнениям этих градусных измерений придавал соответствующим образом установленные веса. Основываясь на этих градусных измерениях и по различным соображениям принимая, что

$$\begin{aligned} \text{среднее полярное сжатие} & . . . . . a = 1 : 298,6; \\ \text{сжатие земного экватора} & . . . . . i = 1 : 30\,000; \\ \text{долгота наибольшего меридиана} & . . . . . \lambda_0 = 10^\circ \text{ к востоку от Гринвича}, \end{aligned}$$

автор определяет средний радиус экватора трехосного земного эллипсоида и приходит к выводу, что

$$\text{средний радиус экватора} . . . . . a = 6\,378\,210 \text{ м.}$$

Таким образом окончательным результатом исследований автора в 1936 г. является следующий вывод размеров земного эллипсоида:

$$\begin{aligned} \text{средний радиус экватора} & . . . . . a = 6\,378\,210 \text{ м}; \\ \text{среднее полярное сжатие} & . . . . . \alpha = 1 : 298,6; \\ \text{сжатие земного экватора} & . . . . . i = 1 : 30\,000; \\ \text{долгота наибольшего меридиана} & . . . . . \lambda_0 = 10^\circ \text{ к востоку от Гринвича} \end{aligned}$$

Этот результат был достаточно обоснованным. Однако к установлению размеров земного эллипсоида для геодезических и картографических работ СССР автор относился с чувством очень большой ответственности. Поэтому он считал, что полученные им в 1936 г. результаты «к настоящему моменту (т. е. в 1936 г.\*\*) имеют, конечно, временное значение» (§ 10). При этом он особо отмечал, что «приходится еще учитывать введение в обработку в недалеком будущем больших новейших материалов по СССР, которые будут доставлены работами 1936—1939 гг. и влияние которых будет очень заметным» (§ 11).

Дальнейшие исследования по выводу размеров земного эллипсоида развивались в ЦНИИГАиК на основе общих руководящих указаний Ф. Н. Красовского. Уже к середине 1938 г. градусные измерения СССР

\* По личным сведениям редактора тома.

\*\* Примечание редактора тома.

значительно расширились и охватили большие области Азиатской территории СССР. В частности, к этому времени были завершены работы по дуге вдоль 55° параллели от Орши до Хабаровска. К этому же времени появились возможности к использованию общей гравиметрической съемки СССР для обработки градусных измерений. В начале 1940 г. из градусных измерений СССР по их состоянию к середине 1938 г., с введением гравиметрических редукций и градусных измерений Западной Европы и США с введением в них топографо-изостатических редукций был получен в ЦНИИГАиК следующий вывод размеров трехосного земного эллипсоида:

$$\begin{aligned} \text{средний радиус экватора} & . . . . . a = 6\ 378\ 245 \text{ м}; \\ \text{среднее полярное сжатие} & . . . . . \alpha = 1 : 298,3; \\ \text{сжатие земного экватора} & . . . . . i = 1 : 30\ 000; \\ \text{долгота наибольшего меридиана} & . . . . . \lambda_0 = 15^\circ \text{ к востоку от Гринвича.} \end{aligned}$$

В 1940 г. было решено для обработки триангуляций СССР рекомендовать двухосный земной эллипсоид с размерами

$$\begin{aligned} \text{большой полуоси} & . . . . . a = 6\ 378\ 245 \text{ м;} \\ \text{полярного сжатия} & . . . . . \alpha = 1 : 298,3, \end{aligned}$$

который первоначально был назван эллипсоидом ЦНИИГАиК. Этот земной эллипсоид окончательно был принят в геодезических работах СССР и получил название эллипса Ф. Н. Красовского.

## V. Некоторые новые установки в составлении уравнений и в программах градусных измерений

Данная статья является докладом автора на состоявшейся 20—25 июля 1936 г. в г. Хельсинки IX конференции Балтийской геодезической комиссии и опубликована в ее трудах на немецком языке. На русском языке она до сих пор оставалась неопубликованной и здесь печатается впервые по русскому тексту сохранившейся в архиве автора рукописи, в которую редактор внес только очень незначительные стилистические исправления.

<sup>1</sup> Аналитическая связь между двумя системами геодезических координат, о которой говорит здесь автор и которая тогда была неизвестна, теперь уже установлена М. С. Молоденским. Для перехода от одной из указанных систем координат к другой необходимо знать профиль или отступления геоида от референц-эллипса вдоль ходовой линии, по которой вычислялись эти координаты.

<sup>2</sup> В статье М. С. Молоденского, которая здесь упоминается, было дано несколько сокращенное изложение его работы «Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести», содержащей обоснование метода астрономо-гравиметрического нивелирования и опубликованной в Трудах ЦНИИГАиК\*.

<sup>3</sup> Требование о выполнении гравиметрической съемки вдоль рядов триангуляции I класса в СССР выполняется. Это предусмотрено основными положениями о построении государственной опорной геодезической сети СССР. Однако в других странах это требование в работах по градусным измерениям еще не принимается во внимание.

\* Труды ЦНИИГАиК. Вып. 17. М., 1937.

## VI. Градусные измерения СССР, вывод размеров земного эллипсоида и исследование фигуры геоида

Эта статья написана автором к отмечавшемуся в 1939 г. 20-летнему юбилею Декрета об учреждении высшего геодезического управления, подписанного В. И. Лениным и опубликованного в № 63 Известий Все-российского Центрального исполнительного Комитета Советов от 23 марта 1919 г. Она впервые была напечатана в юбилейном сборнике статей «XX лет советской геодезии и картографии», том I, М., 1939, по тексту которого и публикуется в данном томе.

В статье описываются градусные измерения СССР по состоянию их на конец 1938 г., рассматриваются вопросы о программе градусных измерений и методах использования их для вывода размеров земного эллипсоида и сообщаются результаты исследований советских ученых в этой области. Приведенные автором сведения о состоянии градусных измерений СССР ярко свидетельствуют о больших успехах, достигнутых за 20 лет существования советской геодезической службы. Высказанные в статье мысли и соображения автора по общим методическим вопросам вывода размеров земного эллипсоида и исследования фигуры геоида не потеряли своего важного значения и в настоящее время, хотя в разрешении некоторых из этих вопросов и наметились новые пути.

<sup>1</sup> Указание автора, что «для Восточной Сибири и Дальнего Востока..., повидимому, изостатическая компенсация подтверждается достаточно хорошо», основывается на изучении неопубликованных результатов вычисления А. А. Изотовым в ЦНИИГАиК топографо-изостатических редукций в астрономических пунктах по дуге параллели Новосибирск — Хабаровск\*. Действительно, вычисленные топографо-изостатические редукции на пунктах указанной дуги имели некоторое закономерное соответствие с наблюденными астрономо-геодезическими уклонениями отвеса. Но все же этот материал был недостаточен для изучения изостатической компенсации в Восточной Сибири и на Дальнем Востоке.

<sup>2</sup> Утверждение, что «американские геодезисты выдвинули так называемый метод площадей» вывода размеров земного эллипсоида, требует некоторых пояснений. Как известно, в последней четверти прошлого столетия триангуляции некоторых стран Европы приобрели характер астрономо-геодезических сетей, соответствующих целям вывода размеров земного эллипсоида, и вместе с тем стали распространяться на значительные по площади территории. Именно в это время русские и западноевропейские геодезисты разработали известные методы уравнивания астрономо-геодезической сети, причем эти методы являлись одновременно и методами вывода размеров земного эллипсоида из обработки астрономо-геодезической сети, покрывающей некоторую территорию. Американские геодезисты, и в частности Хейфорд, по существу воспользовались указанными методами при выводе размеров земного эллипсоида из градусных измерений США.

См. примечание <sup>4</sup> к статье «Обоснование проекта гравиметрических работ, отвечающих вопросам геодезии в СССР».

<sup>4</sup> Эти предположения автора не вполне оправдались. Гравиметрические работы, как в Африке и Южной Америке, так и на океанах, пока не получили сколько-нибудь заметного развития. Гравиметрическая изученность земного шара все еще остается слабой и недостаточной для надлежащего решения тех научных задач, о которых пишет автор.

\* По личным сведениям редактора тома.

<sup>5</sup> Проводившиеся с 1937 г. научные исследования ЦНИИГАиК по выводу размеров земного эллипсоида из градусных измерений СССР и других стран очень часто именовались работами по выводу советского эллипсоида. В советской геодезической литературе того периода термин «советский эллипсоид» встречается довольно часто. Этим термином подчеркивалось, что размеры земного эллипса в указанных исследованиях выводятся прежде всего из советских градусных измерений, с присоединением к ним и градусных измерений других стран, и советскими учеными для применения в советских геодезических работах.

<sup>6</sup> В годы Великой Отечественной войны М. С. Молоденским и его сотрудниками фигура геоида была определена в пределах почти половины территории СССР. При этом применялся разработанный им метод астрономо-гравиметрического нивелирования. Результаты изучения фигуры геоида использовались при обработке астрономо-геодезической сети СССР по методу проектирования.

<sup>7</sup> Более подробные сведения об этой работе приведены в статье А. А. Изотова «К вопросу о наиболее подходящих для территории СССР размерах земного эллипсоида», опубликованной в журнале «Геодезист» № 11 за 1939 г.

<sup>8</sup> Астрономо-гравиметрическое нивелирование в настоящее время является неотъемлемой частью работ по построению астрономо-геодезической сети СССР. Оно предусмотрено основными положениями о построении государственной опорной геодезической сети СССР. В этом отношении рекомендация автора, оказавшего громадное влияние на научную постановку астрономо-геодезических работ и внесшего в это дело огромный научный вклад, неуклонно проводится в жизнь.

<sup>9</sup> К концу 1938 г. в исследованиях ЦНИИГАиК одновременно с выводом размеров нового земного эллипсоида были определены и величины составляющих уклонения отвесной линии в исходном пункте триангуляции СССР, т. е. в Пулкове. При этом высота геоида в Пулкове оставалась неизвестной. Но эти величины, как и отмечает автор, не могли быть признаны окончательными. Составляющие уклонения отвесной линии, а также высота геоида в Пулкове были определены в 1943 г. на основании специальных исследований ЦНИИГАиК\* и использованы для ориентирования принятого в геодезических работах СССР земного эллипсоида Красовского.

## VII. К вопросу об установлении эллипсоида для геодезических работ СССР

Данная статья написана автором в 1939 г. в связи с обсуждением вопросов об упорядочении государственной опорной геодезической сети СССР и о переходе в геодезических работах нашей страны на новый эллипсоид, взамен ранее применявшегося эллипсоида Бесселя.

Следует здесь напомнить, что для всестороннего обсуждения указанного вопроса в 1939 г. Главное управление геодезии и картографии (ГУГК) при СНК СССР создало особую комиссию в составе видных ученых и представителей учреждений, ведущих основные геодезические работы. Эта комиссия, возглавляемая заместителем начальника ГУГК С. Г. Судаковым, имела ряд подкомиссий, причем первая подкомиссия,

\* А. А. Изотов. Новые исходные геодезические даты СССР. Сборник статей ГУГК. Вып. XVII. М., 1948.

работавшая под председательством А. А. Изотова, имела своей задачей рассмотрение вопроса о переходе на новый референц-эллипсоид и новые исходные геодезические даты\*. Члены первой подкомиссии, рассматривая этот большой и важный вопрос с различных точек зрения, разрабатывали соответствующие научные доклады, один из которых был опубликован в форме данной статьи Ф. Н. Красовского, принимавшего деятельное участие в работах подкомиссии. Статья эта впервые была опубликована в журнале «Геодезист» № 1 за 1940 г.

Вопросы об установлении эллипсоида для геодезических работ СССР и принципах обработки государственной триангуляции нашей страны были поставлены и рассмотрены Ф. Н. Красовским в одной из предыдущих статей, включенных в этот том его сочинений. В ней были вскрыты принципиальные особенности двух методов обработки триангуляции: метода развертывания и метода проектирования. Данная статья является дальнейшим развитием исследований автора по указанным вопросам, которые занимали его в течение ряда лет. В этой статье впервые рассмотрено влияние отступлений геоида от принятого референц-эллипсоида на невязки полигонов триангуляции при обработке ее по методу развертывания и убедительно показана недопустимость применения этого метода к обработке обширных триангуляций. По результатам этих исследований автор дал научно обоснованное решение вопроса о необходимой точности установления размеров референц-эллипсоида для обработки государственной триангуляции СССР. В этом отношении статья в свое время носила руководящий характер при решении одного из важных научно-технических вопросов геодезических работ СССР и в настоящее время имеет большое научно-методическое значение.

### **VIII. Современные задачи и развитие градусных измерений**

Впервые опубликована в Известиях Академии наук СССР, серия географическая и геофизическая, № 3, М., 1941. Статья имеет большое научное значение, так как указывает на некоторые направления исследований по основным научным проблемам геодезии.

### **IX. О некоторых научных задачах астрономо-геодезии в связи с изучением строения твердой оболочки Земли**

Данная статья, как указано в пояснении к ее названию, является докладом автора на ученом совете Института теоретической геофизики (ныне Геофизический институт АН СССР) в мае 1944 г. Она впервые была опубликована только в 1947 г. во втором томе Трудов Института теоретической геофизики и является последней статьей из этой серии работ автора. По существу эта статья является дополнением и дальнейшим развитием предыдущей статьи автора, который в своих последних работах наметил постановку новых научных задач геодезии в тесной связи с некоторыми задачами геологии и геофизики.

В этой статье автор рассматривает современное состояние вопроса об изучении внутреннего строения земной коры по результатам астрономо-геодезических и гравиметрических работ при одновременном использовании данных геологии и геофизики, а также сообщает результаты советских и зарубежных исследований в этой области. При этом он

\* С. Г. Судаков. Первочередные вопросы упорядочения государственной опорной геодезической сети СССР. Сборник статей ГУГК. Вып. II. М., 1943.

особо отмечает важность изучения внутреннего строения верхних слоев земной коры всеми доступными методами для правильного решения геодезических проблем и, в частности, для надежного вывода размеров земного эллипсоида из астрономо-геодезических и гравиметрических данных. Исходя из этих соображений, автор намечает пути и методы совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, а также данных геологии и геофизики для изучения фигуры геоида, внутреннего строения земной коры и ее деформаций.

#### **Х. Методы уравнивания государственной первоклассной триангуляции, предлагаемые автором к введению в СССР**

Некоторые косвенные данные приводят к заключению, что эта статья написана Ф. Н. Красовским не позднее конца 1929 г. Она впервые была опубликована отдельным изданием в Трудах Государственного института геодезии и картографии, вып. 2, М., 1931. Эта статья является основной работой автора по вопросам уравнивания государственной триангуляции I класса СССР и находится в тесной связи с его предшествующими и последующими исследованиями.

Следует отметить, что Ф. Н. Красовский в 1926—1927 гг. разработал вопросы о схеме и программе построения государственной триангуляции СССР и в 1928 г. опубликовал отдельным изданием работу «Схема и программа государственной триангуляции», которая будет включена во второй том его избранных произведений. В этой работе, определившей принципы построения основной триангуляции в нашей стране, автором впервые был разработан вопрос о создании в СССР опорной геодезической сети по программе астрономо-геодезической сети, соответствующей как требованиям картографирования страны, так и целям решения основных научных задач геодезии. Но в ней вопросы уравнивания триангуляций не были рассмотрены, так как они требовали соответствующих исследований в самостоятельной постановке.

К разработке вопросов и методов уравнивания триангуляции автор, повидимому, приступил в 1928 г. Так, на состоявшемся 3—6 апреля 1929 г. четвертом геодезическом совещании при Президиуме Госплана СССР он сделал доклад по вопросу «Об уравнивании основных рядов государственной триангуляции в СССР». Несомненно, этот доклад явился первой работой автора по указанному вопросу. Но этот доклад не был опубликован, рукописный текст его не сохранился и, кроме отрывочных сведений\*, о его содержании нам ничего неизвестно.

Содержание данной работы в конспективном виде было автором доложено состоявшейся в 1930 г. в Копенгагене V конференции Балтийской геодезической комиссии, причем его доклад затем был опубликован на русском и немецком языках\*\*. Разработанный автором метод уравнивания триангуляции I класса как астрономо-геодезической сети вошел в практическое употребление в СССР с 1929 г., хотя сама работа в полном виде вышла из печати только в 1932 г. Так, например, этот метод применялся в 1930—1932 гг. при первом общем уравнивании образовавшихся к тому времени полигонов астрономо-геодезической сети в пределах Европейской территории СССР, а также при обработке ее последующих полигонов вплоть до 1942 г.

\* Без указания автора. Четвертое геодезическое совещание (3—6 апреля 1929 г.). Журнал «Геодезист» № 5, 1929.

\*\* Ф. Красовский. О методах вычисления триангуляции I класса в СССР. Сб. статей по астрономо-геодезическим вопросам. Приложение к журналу «Геодезист» за 1932 г.

Понятно, что содержание этой статьи и разработка в ней вопросов уравнивания астрономо-геодезической сети находятся на уровне геодезических знаний своего времени, т. е. 1929 г. Так, в ней еще не были рассмотрены основные принципы обработки астрономо-геодезической сети, которые автор рассмотрел в своих последующих работах, включенных в этот том и которые теперь известны под названием принципа развертывания и принципа проектирования. Также следует отметить, что указание автора в начале § 3 его статьи, что в геодезических целях «можно в решении задачи определения размеров эллипсоида, наилучше подходящего для данного государства, допустить значительную свободу» и что «определение исходных геодезических дат также может дозволить значительную свободу», соответствует старым установкам, существовавшим в СССР до 1930 г. и существующим за границей до сих пор. Как известно, устарелость этих установок и необоснованность их в научном отношении, когда речь идет об обработке обширной астрономо-геодезической сети, вскрыл как раз сам автор в своих последующих исследованиях, которые мы включили в этот том. Тем не менее эта статья до сих пор имеет и, повидимому, в будущем сохранит свое научное и методическое значение, так как в ней разработан один из строгих и вместе с тем достаточно простых способов собственно уравнивания астрономо-геодезической сети, который получил название способа Красовского.

## XI. Методы уравнивания триангуляции I класса в СССР

Данная статья написана автором во второй половине 1931 г. и была напечатана в Трудах Государственного института геодезии и картографии, вып. 5, 1932. Она является дополнением и дальнейшим развитием предыдущей статьи автора, который в предложенный им метод уравнивания астрономо-геодезической сети внес некоторые уточнения и упрощения, облегчающие его применение. Так как к концу 1931 г. общее уравнивание полигонов астрономо-геодезической сети в Европейской части СССР уже подходило к концу, то данная статья является вместе с тем и сообщением о порядке фактического применения способа Красовского при этом уравнивании.

Как в предыдущей, так и в данной статье автор при разработке способа уравнивания астрономо-геодезической сети особое внимание уделил вопросу об уравнивании отдельного звена триангуляции как основного элемента этой сети. При разработке же вопроса об уравнивании отдельного звена астрономо-геодезической сети он вполне обоснованно придавал очень большое значение правильному использованию азимутов Лапласа. Он исходил из того вполне правильного положения, что азимуты Лапласа для улучшения ориентировки звеньев триангуляции имеют такое же значение, какое имеют базисы для сохранения постоянства масштаба триангуляции во всех ее частях. Надлежащая постановка вопроса об использовании азимутов Лапласа при уравнивании отдельных звеньев триангуляции и полигонов астрономо-геодезической сети является характерной особенностью способа Красовского.

## XII. Новые предложения по уравниванию астрономо-геодезической сети

Данная работа впервые появилась в журнале «Геодезист» № 3 за 1937 г. Она является дальнейшим развитием предыдущих работ автора по разработке методов уравнивания больших астрономо-геодезических сетей. Еще в своих предыдущих работах автор поставил вопрос о пра-

вильном использовании азимутов Лапласа при уравнивании звеньев триангуляции в отдельности и астрономо-геодезической сети в целом. В данной работе он высказал ряд соображений и предложений по указанному вопросу, который тем не менее нельзя считать окончательно решенным и до сих пор.

<sup>1</sup> Указанный здесь порядок уравнивания отдельных звеньев триангуляции I класса, т. е. уравнивание их за условия фигур, базисов и азимутов, применялся до 1942 г. Но с 1942 г. этот порядок был изменен в соответствии с новыми предложениями, изложенными автором в данной его работе.

Повидимому, здесь вкрадась досадная опечатка. Эту фразу следует читать так: «при этом окажутся в особенно невыгодных условиях те геодезические линии крайних полигонов сети, к которым уже не призывают никакие полигоны». Действительно, те геодезические линии, на которые не опираются другие полигоны и которые являются внешним контуром астрономо-геодезической сети, при указанных в этом месте статьи обстоятельствах получат значительные деформации, не объяснимые ошибками измерений.

<sup>3</sup> Приведенное здесь уравнение Лапласа (1), несколько упрощенное, предполагает, что уравнивание звеньев триангуляции I класса в отдельности и полигонов астрономо-геодезической сети в целом выполняется по так называемому методу развертывания, т. е. без приведения геодезических измерений на поверхность принятого референц-эллипсоида с введением в них поправок за отступление фигуры геоида.

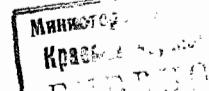
<sup>4</sup> Астрономические азимуты и долготы (а также и широты) можно не приводить к поверхности принятого референц-эллипсоида. Это не отразится на правильности составления условного уравнения Лапласа.

<sup>5</sup> Здесь имеется в виду собственно эллипсOID Красовского, выведенный автором в 1936 г. и описанный в его статье «Обзор и результаты современных градусных измерений», которая включена в первую часть данного тома.

<sup>6</sup> Имея в виду вывод азимутов Лапласа с надлежащей точностью, удовлетворяющей строгим требованиям обработки звеньев триангуляции I класса и астрономо-геодезической сети, автор предлагает на ряде пунктов триангуляции, избираемых через 600—800 км, определять астрономические азимуты с особой тщательностью, т. е. с высокой точностью, и называет их фундаментальными азимутами. Однако в формулу азимута Лапласа входит и астрономическая долгота пункта, на котором этот азимут должен быть определен. Поэтому для вывода азимута Лапласа с высокой точностью необходимо определять также с высокой точностью и астрономическую долготу соответствующего пункта триангуляции, т. е. определять и фундаментальную долготу.

<sup>7</sup> Предложенный здесь порядок работ по уравниванию астрономо-геодезической сети был принят при общем уравнивании полигонов астрономо-геодезической сети СССР в 1942—1944 гг. Это первый и пока единственный в мире случай научно обоснованной обработки и достаточно строгого уравнивания громадной астрономо-геодезической сети.

Следует особо отметить, что Ф. Н. Красовский разработал ряд принципиальных вопросов уравнивания больших астрономо-геодезических сетей и внес в это дело вклад громадной научной ценности, но из его выдающихся работ вытекают многие другие вопросы, требующие дальнейших научных исследований в этой области.



## О ГЛАВЛЕНИЕ

|  |   |
|--|---|
| Предисловие . . . . .                    | 5 |
| Феодосий Николаевич Красовский . . . . . | 7 |

### Часть I

#### Работы по вопросам изучения фигуры Земли

|  |     |
|--|-----|
| Определение размеров земного трехосного эллипсоида из результатов русских градусных измерений . . . . .      | 23  |
| Соображения по установлению эллипсоида для геодезических работ в СССР . . . . .                              | 50  |
| Обоснование проекта гравиметрических работ, отвечающих запросам геодезии в СССР . . . . .                    | 65  |
| Обзор и результаты современных градусных измерений . . . . .   | 82  |
| Некоторые новые установки в составлении уравнений и в программах градусных измерений . . . . .               | 179 |
| Градусные измерения СССР, вывод размеров земного эллипсоида и исследование фигуры геоида . . . . .           | 184 |
| К вопросу об установлении эллипсоида для геодезических работ СССР . . . . .                                  | 208 |
| Современные задачи и развитие градусных измерений . . . . .  | 226 |
| О некоторых научных задачах астрономо-геодезии в связи с изучением строения твердой оболочки Земли . . . . . | 251 |

### Часть II

#### Работы по вопросам уравнивания астрономо-геодезической сети

|   |     |
|---|-----|
| Методы уравнивания государственной первоклассной триангуляции, предлагаемые автором к введению в СССР . . . . . | 273 |
| Методы уравнивания триангуляции I класса в СССР . . . . .   | 338 |
| Новые предложения по уравниванию астрономо-геодезической сети . . . . .   | 351 |
| Комментарии и примечания . . . . .  | 361 |

**ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ**

| Страница | Строка    | Напечатано                     | Следует читать                        |
|----------|-----------|--------------------------------|---------------------------------------|
| 66       | 11 сверху | $\lambda_0$                    | $\delta\varphi_0$ и $\delta\lambda_0$ |
| 315      | 7 снизу   | $=q_4^{6\cdot7} r_3^{5\cdot7}$ | $=q_4^{6\cdot7} r_3^{5\cdot6}$        |
| 371      | 11 сверху | Повидимому                     | <sup>2</sup> Повидимому               |

Ф. Н. Красовский. Избранные сочинения, т. I.