

Ф. Н. КРАСОВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ  
СОЧИНЕНИЯ

ТОМ  
III

ГЕОДЕЗИЗДАТ  
1955

Ф. Н. Красовский

# ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ

Том III

Под редакцией А. И. Дурнева и Г. В. Багратуни

---

---

---

Издательство геодезической литературы  
МОСКВА \* 1955

Печатается по постановлению Ученого совета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Редакторы А. И. Дурнев и Г. В. Багратуни. Техн. редактор Г. М. Кузьмин  
Корректор А. Д. Грудзинский

---

Т—08707. Сдано в набор 28/V 1955 г. Подп. к печати 18/X 1955 г.  
Формат бум. 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. л. 25,5. Печ. л. 69,9. Уч.-изд. л. 59,5.  
Колич. зи. в п. л. 34 000. Тираж 3000 экз. Заказ № 416  
Цена 20 р. 80 к. + переплет 1 р. 50 к.

---

Рижская картфабрика, Алтоиавас, 43

## ОТ РЕДАКТОРОВ

В третьем томе избранных сочинений Ф. Н. Красовского публикуется «Руководство по высшей геодезии», часть I, изданное в 1938—1939 гг. в двух выпусках. Комиссия по изданию трудов Ф. Н. Красовского сочла целесообразным объединить эти два выпуска в одной книге для удобства пользования.

«Руководство по высшей геодезии», будучи выдающимся произведением в области высшей геодезии, создавалось Ф. Н. Красовским в течении более 20 лет. Впервые самостоятельный курс высшей геодезии в Межевом институте Ф. Н. Красовский начал читать в 1907 г. В 1912 г. он уже заведывал кафедрой высшей геодезии. В 1916 г. Ф. Н. Красовский в литографированном издании выпускает свое первое учебное пособие «О тригонометрических сетях». В нем со свойственной Ф. Н. Красовскому обстоятельностью излагаются методы полевых геодезических работ в России: рекогносцировка и постройка геодезических знаков, высокоточные угловые и базисные измерения и основы обработки и уравнивания триангуляционных сетей.

После того как было создано Высшее геодезическое управление, Ф. Н. Красовский непосредственно возглавил научно-техническое руководство геодезическими работами в СССР. Многогранная научно-производственная деятельность Ф. Н. Красовского, сочетающаяся с научно-педагогической работой, сильно обогатила «Курс высшей геодезии», над усовершенствованием которого он непрерывно работал много лет.

В период 1917—1923 гг. Ф. Н. Красовский издает ряд статей и литографированных пособий по отдельным разделам курса высшей геодезии.

В 1923—1924 гг., когда началось развертывание основных геодезических работ в СССР, Ф. Н. Красовский составляет «Руководство по высшей геодезии», часть I, изданное в 1926 г. Оно становится не только учебником для студентов, но и настольным руководством для инженеров-геодезистов, выполняющих основные геодезические работы.

Период между первым и вторым изданием «Руководства по высшей геодезии» явился наиболее плодотворным в развитии геодезического дела в СССР. Накопленный богатый опыт научной постановки и производства

геодезических работ впервые был обобщен во втором издании «Руководства», 1938—1939 гг. При переиздании в качестве соавтора был привлечен профессор В. В. Данилов, написавший главы VI «О базисных измерениях», IX «Об измерении горизонтальных углов» и XVII «О точной полигонометрии».

Решение об опубликовании в третьем томе избранных трудов Ф. Н. Красовского «Руководства по высшей геодезии», ч. I, было принято еще при жизни В. В. Данилова, который засвидетельствовал, что главы о базисных и угловых измерениях в некоторой степени переработаны и окончательно отредактированы Ф. Н. Красовским. Поэтому комиссия согласилась с мнением В. В. Данилова о том, чтобы эти главы были включены в избранные сочинения Ф. Н. Красовского; в первом издании, как известно, эти главы написаны Ф. Н. Красовским. Глава о точной полигонометрии в настоящий том не включена по двум причинам. Во-первых, она полностью принадлежит перу В. В. Данилова и, во-вторых, материал этой главы сильно устарел. В настоящее время имеется второе издание работы В. В. Данилова «Точная полигонометрия» (1953 г.), которое может служить руководством при исполнении полигонометрических работ.

Кроме этого, в настоящем издании внесены следующие изменения.

1. Опущена глава XI «Предварительные сведения о проекции Гаусса—Крюгера». Эта глава в свое время была составлена, исходя из требований программы курса высшей геодезии на геодезическом факультете МИИГАиК, только в качестве справочного материала, и с другими главами она не связана.

2. В современных инструкциях и наставлениях по производству и обработке основных геодезических работ приводятся, как правило, хорошо отработанные и показательные примеры уравнительных вычислений. Исходя из этого, было признано целесообразным для уменьшения объема III тома опустить все примеры уравнительных вычислений за исключением только тех, которые являются составной частью излагаемого вопроса.

3. Из XIII главы «Уравнивание триангуляции по методу условных наблюдений» опущены § 99 и 100 «Способ Анера» и «Понятие о применении способа Анера к уравниванию несвободных сетей; понятие о некоторых иных упрощенных способах уравнивания заполняющих сетей». Указанные способы не нашли применения в геодезических работах СССР и предназначались в «Руководстве» только для учебных целей.

4. Редакторы полностью сохранили самобытное изложение и оригинальные высказывания Ф. Н. Красовского. Однако без ущерба качеству оригинала устраниены некоторые устаревшие места текста. Это касалось, главным образом, приближенных методов обработки геодезических измерений. Исправлены все замеченные опечатки.

5. Приложения помещены в соответствующих местах текста. Опущен список литературы и алфавитный указатель.

Все это дало возможность уменьшить объем настоящего издания примерно на 100 страниц.

«Руководство по высшей геодезии» Ф. Н. Красовского отражает определенный этап в развитии основных геодезических работ в СССР. Поэтому, стремясь возможно полнее сохранить оригинальное изложение такого крупного ученого-геодезиста, каким является Ф. Н. Красовский, редакторы ничего не изменили в принятой системе обозначений и терминологии, хотя терминология за последние годы заметно изменилась.

Как известно, в настоящее время в СССР принята новая схема и программа государственной триангуляции, существенные изменения внесены в методику первоклассных угловых и базисных измерений, высокоточного нивелирования и уравнительных вычислений. Появились новые точные геодезические инструменты и приборы отечественного производства; имеется ряд достижений в области научных исследований по высшей геодезии. У редакторов, естественно, в связи с этим возникла задача, как поступить при редактировании этих вопросов: вносить ли в текст изменения, которые привели бы его в соответствие с современным состоянием геодезических работ, или дать обширные комментарии. Изменение текста было признано недопустимым, а обширные комментарии сильно могли бы увеличить и без того большой объем книги и едва ли достигли бы цели. По всем указанным выше вопросам имеется уже изданная учебная литература, исследования и научные статьи, инструкции, «Основные положения о государственной геодезической сети». Читатель III тома избранных трудов Ф. Н. Красовского может вполне самостоятельно уяснить себе современную постановку геодезических работ в СССР.

В настоящем виде «Руководство по высшей геодезии» не может служить учебником для геодезических вузов, но оно может явиться научным руководством для инженеров-производственников, аспирантов и научных работников.

Ф. Н. Красовский в историческом обзоре градусных измерений прошлого столетия в России во II части «Руководства» дает высокую оценку замечательному труду В. Я. Струве «Дуга меридиана». На 441 странице он пишет: «Беседа через книгу «Дуга меридиана» с этим большим умом, талантливым теоретиком и большим практиком, действительно необходима для воспитания начинающего геодезиста и полезна опытному, много работавшему геодезисту для проверки самого себя». Мы, современники Ф. Н. Красовского, вправе сказать то же самое, но с еще большим основанием о «Руководстве по высшей геодезии».

В «Руководстве» много богатых идей и мыслей, которые могут быть в дальнейшем развиты и внедрены в геодезическое производство могучей советской геодезической школой, созданной Ф. Н. Красовским.

Редактирование введения и глав I, II, III, IV, V, VI, VII и VIII выполнено проф. А. И. Дурневым, глав IX, X, XI, XII, XIII, XIV и XV—доцентом Г. В. Багратуни.

«Руководство по высшей геодезии», по которому воспитывался многочисленный коллектив советских геодезистов, обладает крупными методическими достоинствами. Оно во многом содействовало успешному развитию высшего геодезического образования в СССР. Однако прошло более 15 лет со времени второго издания. За это время геодезические работы в СССР сделали крупный шаг вперед.

В связи с этим «Руководство по высшей геодезии» следует переработать в соответствии с современными требованиями геодезической науки, производства и высшего образования. Эту задачу должна разрешить кафедра высшей геодезии МИИГАиК.

Профессор *A. И. Дурnev*  
Доцент *Г. В. Багратуни*

---

# РУКОВОДСТВО ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

Часть I

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание моей книги «Руководство по высшей геодезии», часть I, относится к 1925 — 1926 гг. Другими словами, составление этой книги выполнялось в 1923 — 1924 гг., т. е. в то время, когда только-что начиналось развертывание основных геодезических работ бывшим Высшим геодезическим управлением, когда только-что начиналась деятельность гражданской геодезической службы в СССР.

За истекшие 14 лет основные геодезические работы в СССР получили огромный размах; триангуляции I класса покрыли всю территорию Европейской части СССР, лежащую южнее 60-й параллели; в Азиатской части СССР главные ряды триангуляции I класса проложены в Казахской и Узбекской ССР, в полосе между Сибирской железной дорогой и нашей границей — от Урала до Владивостока; в последние годы поставлены геодезические работы по соединению наших триангуляций с Северо-Американскими путем проложения триангуляционного ряда I класса по берегу Охотского моря до Берингова пролива.

Отмеченная грандиозная работа, по существу своему научно-техническая, сопровождалась, конечно, усовершенствованием ее методов и организации.

Значительные результаты в этом направлении достигнуты усилиями работников геодезических учреждений и новаторскими методами труда.

В 1929 г. возникает Центральный научно-исследовательский институт геодезии, аэросъемки и картографии<sup>1</sup>; с 1930 г. Геодезический факультет бывшего Межевого института преобразовывается в самостоятельное высшее учебное заведение по специальностям геодезии, аэросъемки и картографии; в настоящее время этот Институт, именуемый Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии<sup>2</sup>, имеет в своем составе четыре факультета. Работа двух институтов — МИИГАиК и ЦНИИГАиК, конечно, также сказалась на постановке геодезических работ в СССР.

<sup>1</sup> В дальнейшем в тексте именуемый ЦНИИГАиК.

<sup>2</sup> В дальнейшем в тексте именуемый МИИГАиК.

Приступая к составлению настоящего руководства, мы должны были учесть указанные выше успехи советской геодезии за истекшие 14 лет и существенно переработать книгу «Руководство по высшей геодезии», часть I, изданную в 1926 г. На этих переработках мы сейчас и остановимся. Существенно изменена и значительно расширена глава о действии погрешностей в триангуляции; она не ограничивается, как прежде, расчетом ошибок в сторонах треугольников, но охватывает также вопросы определения продольных и поперечных сдвигов в рядах триангуляции в виде простых цепей и в рядах из геодезических четырехугольников (последнее, правда, дается схематично). Таким образом, дается все необходимое для обеспечения существенной стороны дела в точных геодезических работах, именно — расчета надежности получаемых из этих работ результатов.

Далее, введена новая глава (III) «Основные соображения по проектированию триангуляции», в которой даются некоторые положения, вытекающие из расчета точностей геодезических результатов; эта глава связывает курс высшей геодезии с курсом «Организации основных геодезических работ», читаемым как отдельный в МИИГАиК.

В главе IV рассмотрен вопрос о геодезических обследованиях, обеспечивающих, по мнению автора, необходимую подготовку к проектированию и исполнению геодезических работ, которая, думается, до сих пор недостаточно проводится в производстве; в этой же главе ставится по-новому вопрос о рекогносцировке базисов и базисных сетей. В главе IV также дается описание центров и способов их закладки в районах глубокого промерзания и мерзлоты (с использованием при этом трудов ЦНИИГАиК), соответствующих современному развитию основных геодезических работ в Сибири и на Дальнем Востоке.

Глава V «О базисных сетях» совершенно переделана соответственно необходимости уделить в ней внимание вопросу о выгоднейшем распределении весов угловых измерений в базисных сетях, что стало применяться в геодезических работах СССР с 1930 г.

Переделана существенно и глава о базисных измерениях — впервые в курсе геодезии излагается применение интерференции света к определению эталонов длины и к определению длин базисных 24-метровых проволок; этим самым книга способствует внедрению в производство нового метода точного определения длин, введение которого в практику вполне назрело; кроме того, вопросы измерения базисов прибором Едерина пополнены сведениями о свойствах инвара и инварных проволок, а также изложением учета ряда поправок, которые ранее опускались, хотя и не являются пренебрегаемыми.

В главе VII «Об угломерных инструментах» дается подробное описание теодолита Вильда, теодолита Паркхерста и некоторых других новых заграничных инструментов; этим преследуется цель дать те образцы новых заграничных инструментов, которые отвечают запросам

и обстановке предстоящих основных геодезических работ в северных частях территории СССР.

В главе VIII «Об инструментальных погрешностях» существенно пересмотрен вопрос об эксцентризите алидады, связывая его с эксцентризитетом лимба; здесь же приведен способ Гейвельинка исследования делений лимба.

В главе IX «Измерение горизонтальных углов» все вопросы, на основе исследований проф. Данилова, ставятся по-новому, и дается по существу новое обоснование методики высокоточных угловых измерений и отмечаются некоторые ошибки в ранее принятых правилах.

Уравнительные вычисления в триангуляции ранее были представлены собственно лишь уравниванием свободной сети по методу условных уравнений. В геодезическом производстве приходится в большинстве случаев иметь дело с несвободными сетями, следовательно, прежний курс страдал существенным пробелом. Кроме того, значительные заполняющие сети, которые в геодезическом производстве в последние годы выполняются в больших размерах, выдвинули применение метода уравнивания косвенных наблюдений, а также применение и ряда других методов. По этим причинам в настоящем курсе вопросу уравнительных вычислений в триангуляции пришлось отвести солидное место, захватив им главы XI, XII и XIII.

Глава XI, главным образом, останавливается на вопросах обработки и уравнивания станций; здесь же даются установление программы наблюдений на пунктах базисной сети, при выгоднейшем распределении весов в ней, и уравнивание станций в этом случае. В главе XII прежде всего представлены полно все виды условий, возникающих в свободных и несвободных сетях, вычисляемых в координатах Гаусса-Крюгера; далее дается уравнивание свободной сети по способу условных наблюдений; затем следуют изложение двухгруппового уравнивания по Крюгеру и применение двухгруппового уравнивания для ряда задач по уравниванию в триангуляции II класса. В этой же главе даются способ Больца и его видоизменение применительно к уравниванию звеньев I класса, соображенное А. А. Изотовым. Глава XIII посвящена вопросам уравнивания по методу посредственных (косвенных) наблюдений и вопросу уравнивания усиленных точек.

Главы XIV и XV «Нивелирование точное и высокой точности» и «О тригонометрическом нивелировании» подверглись переработке в сравнительно небольших размерах.

Полагаю, что в отношении основных триангуляций и в отношении нивелировок I и II разрядов в настоящем издании книги представлены достаточно полно методы измерений и наблюдений, инструменты и их исследования, требования к точности результатов, схемы построения

рядов и звеньев, способы первоначальной обработки собранных материалов и методы уравнительных вычислений. Вопросы организации работ неизбежно затрагиваются в известной степени при изложении методов наблюдений и измерений, но, конечно, в полной мере эти вопросы представлены в особом курсе «Организации геодезического производства», читаемом в МИИГАиК на IV курсе Геодезического факультета.

Должно отметить, что ряд вопросов по сгущению геодезических сетей, по постановке триангуляционных и полигонометрических работ упрощенного типа в малообжитых районах в чисто картографических целях не нашел себе места в настоящей книге. Этот пробел восполняется с 1939 г. в преподавании в МИИГАиК главой «О картографо-геодезических полевых работах» в составе курса «Картографии» на Геодезическом факультете МИИГАиК. Но, конечно, соответствующая глава должна быть и в составе курса высшей геодезии; однако, поскольку здесь нередко приходится затрагивать вопросы комбинированного использования материалов геодезических, астрономических и даже гравиметрических, постольку эта глава более уместна как одна из заключительных во II части Курса высшей геодезии; кроме того, разработка этой главы требует ряда данных и материалов, которыми автор книги при ее составлении не располагал в полной мере.

Несомненно, что данная книга, несмотря на ее большой размер, все-таки не отвечает вполне всем запросам современного, широко поставленного в СССР геодезического производства; по полагаем, что на существенную часть этих запросов она все-таки ответит.

Проф. д-р Ф. Н. Красовский

---

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Задачи высшей геодезии

Задачи высшей геодезии подразделяются на научные и научно-технические.

Главная научная задача высшей геодезии формулируется как изучение фигуры Земли в отношении ее вида и размеров, причем эта задача обычно распадается на две: установление размеров и формы некоторой типической фигуры, представляющей фигуру Земли в общем и целом, и изучение отступлений от нее действительной фигуры Земли.

Другие научные задачи высшей геодезии вытекают из связи геодезических выводов с вопросами устройства Земли и жизни ее как планеты. Освещение устройства земной коры хотя и относится главнейшим и прямым образом к геологии и геофизике, в известной части падает и на научную геодезию и обуславливает постановку в геодезии некоторых научных исследований. Движения суши — периодические и вековые, возможные перемещения материков, перемещение береговых линий океанов, разности уровней морей, движение земных полюсов — все эти сложные явления, обусловливаемые жизнью Земли в целом, влияют на геодезические результаты и подлежат изучению не только в геологии и геофизике, но в существенной части и в геодезии и практической астрономии, с которой высшая геодезия тесно связана.

Научно-технические задачи высшей геодезии заключаются: 1) в разработке методов измерений и установлении типов инструментов для составления общей астрономо-геодезической сети государства и частных геодезических сетей, а также для получения основной нивелирной сети государства; 2) в установлении научной организации работ по созданию основных астрономо-геодезических и нивелирных сетей государства; 3) в обработке материалов наблюдений по составлению астрономо-геодезических и опорных нивелирных сетей и в выводах координат и высот системы геодезических опорных пунктов.

Основные астрономо-геодезические и нивелирные работы (а частью и гравиметрические работы), методика выполнения и научная организация которых составляют предмет научно-технических задач высшей геодезии, выполняются для правильной постановки и успешной организации общей топографической съемки государства, для составления точных карт, а также и для обоснования всех измерений и выполнения по ним проектирований на значительных площадях, с какими бы целями они ни делались. Но результаты этих основных астрономо-геодезических работ непременно являются главнейшим материалом при решении главной научной задачи геодезии и других научных задач ее, выше очерченных; поэтому постановка этих работ должна непременно обеспечивать возможность научного использования их резуль-

татов. Практические запросы к геодезическим материалам выдвигают вопросы наилучшего использования геодезических сетей, а это выдвигает особую задачу развертывания (изображения) геодезических сетей, отнесенных к поверхности земного эллипсоида, на некоторой сфере, или на некоторой плоскости, или на ряде плоскостей. Эта математическая задача, решаемая, однако, в соответствии с требованиями геодезии и требованиями наилучшего использования результатов геодезических работ, всегда относится также к задачам высшей геодезии, которая здесь тесно соприкасается с математической картографией.

Конечно, в геодезической деятельности практические вопросы и задачи занимают весьма видное место; эти практические задачи и вопросы будут достаточно полно представлены в настоящем курсе; кроме того, с соответствующей стороны они излагаются в курсе организации основных геодезических работ. Мы заранее их не очерчиваем, но понятно, что исполнение на огромной территории и в общей связи точнейших измерений и наблюдений при построении современных радиозных астрономо-геодезических и опорных нивелирных сетей, имеющих протяжение в тысячи километров, представляет собой своеобразное инженерное дело, в котором имеется своя изыскательская часть, свое проектирование, свои сооружения (хотя и мелкие с точки зрения инженерно-строительного искусства) и в котором немалую роль играет использование достижений новейшей техники при организации работ и при борьбе с препятствиями, которые местность и природа ставят почти всегда исполнению точнейших геодезических измерений.

## § 2. Градусные измерения. Общий земной эллипсоид

Главная из научных задач высшей геодезии решается на основании материалов, доставляемых так называемыми «градусными измерениями» и определениями силы тяжести.

В геодезии поверхностью уровня, или уровенной поверхностью, называется поверхность в сюду горизонтальная, т. е. такая, в любой точке которой нормаль совпадает с направлением отвесной линии в той же точке. Таких уровенных поверхностей можно, конечно, построить бесчисленное множество. Для геодезии представляют особый интерес уровенные поверхности, расположенные вблизи физической внешней поверхности Земли. Если взять поверхность океана, соответствующую состоянию полного равновесия находящихся в нем водных масс, то, конечно, эта поверхность будет одной из уровенных поверхностей. Продолжая эту поверхность под континентами — так, чтобы везде это продолжение пересекало направления отвесных линий под прямым углом, — мы получим сплошную, непрерывную, не имеющую складок и ребер, замкнутую уровенную поверхность, которая называется основной уровенной поверхностью, или идеальной поверхностью Земли, — именно и изучаемую в геодезии. Эта основная уровенная поверхность Земли носит еще название поверхности геоида, а геометрическая фигура, ею ограниченная, называется геодом.

Так как средние уровни разных морей и океанов, выводимые из многолетних наблюдений, оказываются имеющими разные высоты, т. е. не принадлежащими одной уровенной поверхности, то, следовательно, в фиксации поверхности геоида имеется условность и неопределенность. Однако, здесь речь идет о величине порядка меньше метра и с точки зрения геометрической это не имеет значения, так как уста-

новление общих размеров геоида даже с ошибкой в несколько десятков метров является задачей, еще не осуществленной до сих пор. Но, конечно, эта неопределенность в фиксации поверхности геоида имеет огромное значение в основных нивелировках, а также со стороны геофизической.

Вообразим, что мы изрезали материки достаточно частой сетью узких каналов, сообщающихся между собой и с морями и океанами; эти каналы должны быть настолько узкими, чтобы вынутая из них масса грунта была бы мала и чтобы во всяком случае, после более или менее равномерного распределения этой массы по поверхности Земли, в каждой точке Земли направление отвесной линии изменилось бы совершенно пренебрежимо. Конечно, в этих узких каналах не должна иметь места капиллярность. Тогда, очевидно, поверхность, проходящая через поверхность воды во всех таких каналах, представит собой поверхность геоида — опять-таки при условии полного равновесия водной массы океанов и морей.

Имея в виду, что поверхность геоида есть одна из уровневых поверхностей и что сила тяжести слагается из силы земного притяжения и силы центробежной, мы можем написать уравнение геоида в таком общем виде:

$$V + U = c,$$

в котором  $V$  — потенциал силы притяжения (Землей) в рассматриваемой точке геоида, а  $U$  — потенциал центробежной силы в той же точке;  $c$  — постоянное, равное значению потенциала силы тяжести для точек геоида или для точек поверхности океана. Так как центробежная сила даже на экваторе, где она имеет наибольшее значение, составляет всего 1 : 288 силы земного притяжения, то средствами теоретической механики легко доказать, используя лишь общезвестное положение о близости фигуры Земли к шару и не делая никаких предположений о внутреннем строении Земли, что геоид должен быть весьма близок к сфере роиду, мало сжатому при полюсах (под сфериодом понимается тело вращения, близкое к шару), и может быть с весьма хорошим приближением представлён даже простейшим из сфероидов, т. е. эллипсоидом вращения. Геодезические выводы показывают, что полярное сжатие этого эллипсоида близко к 1 : 297, а отступления поверхности геоида от такого эллипсоида вряд ли превышают в максимуме 100 — 150 м (т. с. почти порядка квадрата сжатия).

Предположение, что Земля была некогда в огненно-жидком состоянии, имеет за собой веские основания. Изменения в расположении притягивающих масс при остывании нашей планеты должны были происходить, главным образом, в наружном ее слое и захватывать массы, незначительные по сравнению со всей массой Земли. Поэтому современная фигура геоида должна быть в общем и целом близкой к фигуре равновесия, жидкости, равномерно вращающейся с такой скоростью, при которой центробежная сила мала по сравнению с силой притяжения. Но тогда отсюда вытекает, что типической формой геоида может быть принят эллипсоид вращения, мало сжатый при полюсах. Поверхность геоида отступает незначительно от эллипсоида вращения, и изучение этих отступлений составляет переход от второго приближения к третьему в вопросе изучения фигуры Земли.

Приняв поверхность геоида за поверхность эллипсоида вращения, мы сейчас же соображаем следующий путь определения его размеров и формы.

Пусть на черт. 1  $P$  и  $P_1$  — полюсы Земли; кривая  $PAE$  — сечение поверхности земного эллипсоида плоскостью  $APP_1$ , т. е. меридианной плоскостью точки  $A$ ; точка  $O$  — центр эллипсоида. Кривая  $PAE$  есть эллипс, малая полуось которого  $PO$  равна полярной оси  $b$ , а большая полуось  $OE$  — экваториальной полуоси  $a$  земного эллипсоида. Мы имеем:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \text{эксцентриситет земного эллипсоида.}$$

Отвесная линия в  $A$  будет лежать в плоскости ее меридиана  $PAE$  и будет совпадать с нормалью  $AC$  к эллипсу  $PAE$ . Угол  $\varphi_1$  между прямой  $AC$  и большой осью  $OE$ , очевидно, равен углу, образуемому отвесной линией в  $A$  с плоскостью земного экватора; другими словами,  $\varphi_1$  не что иное, как астрономическая широта точки  $A$ . Возьмем на эллипсе  $PAE$  точку  $a$ , бесконечно близкую к  $A$  и имеющую широту  $\varphi_1 + l_p$ ; нормали к этому эллипсу в  $A$  и  $a$ , конечно, пересекутся в  $C$ , в центре кривизны меридианной кривой для участка  $Aa$ . Очевидно,  $AC = aC$  представит радиус  $M$  меридианной кривой для этого же ее участка  $Aa$ . Обозначая длину дуги  $Aa$  через  $ds$ , напишем:

$$ds = M d\varphi.$$

В дальнейшем будет доказано, что

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Поэтому

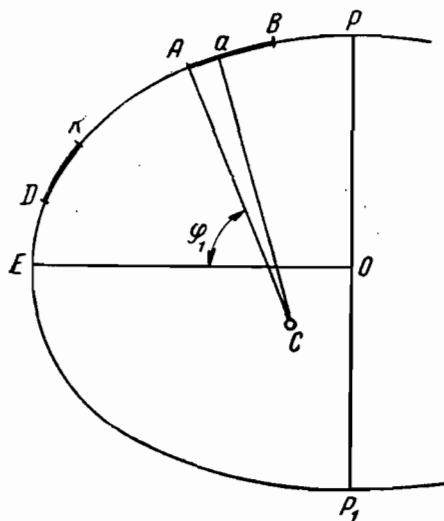
$$ds = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi.$$

Если имеем на том же меридиане  $PAE$  точку  $B$  с более северной широтой  $\varphi_2$ , причем длина дуги  $AB$  равна  $S_1$ , то, очевидно,

$$S_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим в результате  $S_1$  как известную функцию  $f$  от пределов интегриации  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и от параметров  $a$  и  $e$ , входящих в подинтегральную функцию. Другими словами,

$$S_1 = f(\varphi_1, \varphi_2, a, e), \quad (1)$$



Черт. 1

или, как будет показано во II части курса,

$$S_1 = \frac{a(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right) e^2 - \dots \right\} * \quad (1')$$

Если на том же или на каком-либо другом меридиане мы возьмем две точки  $D$  и  $K$  с широтами  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  ( $\varphi_4 > \varphi_3$ ), причем дуга  $DK$  имеет длину  $S_2$ , то аналогично

$$S_2 = f(\varphi_3, \varphi_4, a, e) \dots \quad (2)$$

$$S_2 = \frac{a(\varphi_4 - \varphi_3)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_3 + \varphi_4) \right) e^2 - \dots \right\}. \quad (2')$$

Представим себе далее, что широты  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  мы точно определили из астрономических наблюдений, а длины  $S_1$  и  $S_2$  меридианных дуг определили из геодезических измерений, совершенно при этом не пользуясь никакими предположениями о размерах и сжатии земного эллипсоида (например, продвигаясь по меридиану от  $A$  к  $B$  и откладывая мерный прибор, не посредственно в натуре измерили дугу  $AB$ ). Тогда в уравнениях (1) и (2) или (1') и (2') мы будем иметь два неизвестных  $a$  и  $e$ , которые, очевидно, из этих уравнений и выведем с той или иной степенью надежности, которая будет зависеть как от размеров широтных амплитуд  $\varphi_2 - \varphi_1$  и  $\varphi_4 - \varphi_3$ , так и от географического размещения дуг, т. е. от  $\varphi_1 + \varphi_2$  и  $\varphi_3 + \varphi_4$ . После вывода  $a$  и  $e$  получим возможность вычислить малую полярную ось эллипсоида  $b$  по формуле

$$b = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Таким образом, зная длины двух меридианных дуг, расположенных в разных широтах, и астрономические широты их конечных точек, мы указанным образом можем определить размеры и полярное сжатие Земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Измерение длины некоторой меридианной дуги, соединенное с определением астрономических широт ее конечных точек, носит название градусного измерения. Такое название станет понятным после следующих соображений. Мы вправе написать

$$S_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = M_m \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \quad (3)$$

В равенстве (3), на основании теоремы Лагранжа,  $M_m$  представляет собой радиус кривизны меридианного сечения  $PAE$  в некоторой точке, промежуточной между  $A$  и  $B$ . Вследствие близости земного эллипсоида к шару, при небольших дугах  $S_1$  (например, длиной менее 300 км) широта  $\varphi_m$  этой промежуточной точки может быть принята равной

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

\*  $\rho''$  — число секунд в радиане (206 265").

а, следовательно, в уравнении (3) с достаточной точностью можно написать

$$M_m = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_m)^{\frac{3}{2}}},$$

$$S_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_m)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''}. \quad (4)$$

Если в уравнении (4) мы примем  $\varphi_2 - \varphi_1$  равным  $3600''$  или  $1^\circ$ , то тогда  $S_1$  обращается в длину одного градуса меридиана под средней широтой  $\varphi_m$ .

Определив в разных местах Земли длину градуса по меридиану, мы по изменениям этих длии с широтой  $\varphi_m$  можем установить вид меридианной кривой; вообще же, имея длины градусов для достаточночного числа мест на меридианной кривой, мы от них перейдем, очевидно, к значениям радиусов  $M_m$  в тех же местах этой меридианной кривой и установим затем достаточночно точно вид и размеры этой кривой.

Именно эта идея измерения длины градуса меридиана была положена в основу, когда в середине XVIII столетия впервые научно приступили к решению вопроса об эллипсоидальности Земли: длина градуса меридиана под широтой около  $70^\circ$  должна быть более длины градуса под широтой Парижа, а эта последняя должна быть более длины градуса под широтой, близкой к нулю, если Земля не шар, а эллипсоид, сжатый при полюсах. На эллипсоиде вращения, сжатом при полюсах, как видно из формулы (4), длина градуса меридиана непрерывно возрастает с возрастанием  $\varphi_m$ .

Как видно из сказанного, градусное измерение по меридиану слагается из двух частей: части астрономической, состоящей в точном определении астрономических широт конечных точек дуги и в определении в них азимутов, и из части геодезической, состоящей в точном измерении длины той же дуги. Меридианные дуги, измеренные к настоящему времени, имеют длины в сотни и тысячи километров. Определение длин таких больших дуг не может быть, конечно, произведено путем непосредственного измерения этих дуг; единственный возможный путь определения их длин — это вывод длины дуги из триангуляции, т. е. из цепи геодезических треугольников или других фигур, проложенных вдоль дуги между ее конечными точками, причем нельзя отрицать возможности комбинирования в некоторых местах триангуляции с высокоточной полигонометрией вдоль дуги.

Первые градусные измерения были выполнены французской Академией Наук в 1735—1752 гг.

Чтобы окончательно выяснить справедливость теоретического вывода Ньютона (основанного на предположении огненно-жидкого первоначального состояния Земли), что Земля есть эллипсоид, сжатый при полюсах, французская Академия Наук решила определить длину градуса меридиана в двух местах, из которых одно должно было лежать возможно ближе к полюсу, а другое — возможно ближе к экватору. Если земная фигура представляется эллипсоидом, сжатым при полюсах, то длина градуса северной дуги должна быть более длины градуса южной, близэкваториальной дуги. Чем ближе одна дуга располагается к полюсу, а другая — к экватору, тем более разница в длинах их градусов, тем

резче скажется на длинах этих градусов влияние сжатия Земли и, следовательно, тем в меньшей степени вывод из сопоставления длин таких двух градусов будет искажен влиянием ошибок измерений. На основании именно таких соображений в 1735 г. Парижская Академия Наук отправила одну астрономо-геодезическую экспедицию в Лапландию, а другую—в Перу, для выполнения градусных измерений. Лапландская экспедиция измерила дугу меридиана между широтами  $65^{\circ} 50' 50''$  и  $66^{\circ} 48' 20''$  и получила для длины градуса под широтой  $66^{\circ} 19'$  значение 57422 тоазов. Перуанская экспедиция измерила дугу меридиана между широтами  $0^{\circ} 2' 30''$  и  $-3^{\circ} 4' 30''$  и получила из нее для длины градуса под средней широтой дуги  $-1^{\circ} 36'$  значение 56748 тоазов (тоаз—старинная французская мера, равная 1,9499 м).

Во второй части курса в главе «О градусных измерениях» будут приведены весьма поучительные подробности работ по этим первым градусным измерениям в Перу и Лапландии.

Теперь же уместно будет лишь указать, что тогдашняя измерительная техника была все-таки еще груба и поэтому результаты Перуанской и Лапландской экспедиций имеют значение лишь постольку, поскольку из них с несомненностью подтвердилось сжатие Земли при полюсах. Заметим, что французский деятель в области геодезии и картографии Кассини, выполнивший в первой половине того же XVIII столетия ряд триангуляций во Франции, образовал из них два градусных по меридиану Парижа измерения: одно в северной части Франции, а другое, примыкающее в Париже с юга к первому,— в средней части Франции; из этих градусных измерений получился результат такой, что более северный градус оказался короче более южного. Здесь, конечно, вполне сказалось влияние погрешностей тогдашних измерений на определение малого различия длин градусов, выводимых из малых и притом смежных дуг. Насколько живо тогдашнее общество интересовалось результатами научных геодезических работ по установлению вида земной фигуры, следует из того, что Вольтер приветствовал стихами возвращение учеников из Перу и Лапландии, и он же павеки осмеял псевдонауку Кассини, сказав, что «Мопертюи (академик, возглавлявший Лапландскую экспедицию) приплоснул Землю и Кассини».

Градусные измерения могут выполняться не только по меридианам, но и по параллелям. В градусном измерении по параллели астрономическая часть заключается в точном определении разности долгот конечных точек дуги (и в определении широт и азимутов в этих точках), а часть геодезическая—в определении из триангуляции длины дуги параллели. Имея длину  $S_2$  дуги параллели, зная ее широту  $\varphi$  и астрономическую разность долгот  $\omega$  ее конечных точек, мы для радиуса  $r$  параллели, представляющей собой, конечно, на поверхности эллипсоида вращения окружность, будем, очевидно, иметь

$$r = \frac{S_2 \cdot \rho''}{\omega''}.$$

Но, как увидим во II части курса,

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Следовательно, уравнение, доставляемое градусным измерением по параллели, напишется так

$$S_2 = \frac{a \cdot \omega'' \cos \varphi}{\rho'' \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5)$$

Очевидно, надо иметь два градусных измерения по двум параллелям, расположенным под значитель но разняющимися между собой широтами  $\varphi$ , чтобы вывести два неизвестных  $a$  и  $e$ , входящих в уравнение (5). Заметим еще, что и косвенно расположенные дуги (и к меридиану и к параллели) могут быть использованы как градусные измерения, т. е. для вывода экваториальной полуси и сжатия земного эллипсоида, если длина каждой такой «косой» дуги будет определена из триангуляции, а на конечных ее точках будут выполнены определения астрономических широт и определения астрономических долгот или азимутов.

Точное определение вида и размеров Земли сделалось возможным лишь с XIX столетия, а вернее даже с XX столетия, когда техника триангуляционных работ и астрономических определений широт, долгот и азимутов достигла высокой степени совершенства. В XIX столетии были исполнены следующие, завершаемые отчасти в XX веке градусные измерения.

1) Англо-французское—с 1792 г. (или, вернее, с 1783 г.) по 1908 г., доставившее дугу по меридиану от Северо-Шотландских островов до пунктов в Алжире, в северной Африке—между широтами  $60^\circ 49'$  и  $33^\circ 48'$ , т. е. с амплитудой  $27^\circ$ ; дуга проходит через Гринвич и Париж.

2) Русское или русско-скандинавское, выполненное под руководством В. Я. Струве (и К. И. Тенниера)—от Северного Ледовитого Океана (Фуглесес в Норвегии) до устья Дуная и доставившее дугу меридиана в  $25^\circ 20'$ , между широтами  $70^\circ 40'$  и  $45^\circ 20'$ ; дуга измерена с 1818 г. по 1852 г.; она проходит через Норвегию, Швецию, Финляндию, Эстонию, Латвию, Польшу, Волынско-Подольский край, Бессарабию. Это измерение обычно называется дугой Струве.

3) Ганноверское, выполненное в 1821—1824 гг. знаменитым Гауссом и доставившее дугу меридиана с амплитудой в  $2^\circ$ .

4) Косвенное к меридиану градусное измерение Бесселя в Восточной Пруссии, выполненное между Мемелем и Труицем в 1831—1834 гг.; косвенная дуга имеет длину в  $3^\circ 4'$ . Эти малые дуги, находящиеся под № 3 и 4, не имеют, конечно, никакого влияния при выводах размеров земного эллипсоида, по работы по их измерению замечательны по своему методическому значению.

5) Индийские градусные измерения, выполненные англичанами с 1799 г. по 1873 г. и образовавшиеся из точных триангуляций, расположенных по меридианам и по параллелям и покрывающих в общем всю территорию Индии для целей съемочных и картографических. Главная меридианская дуга имеет амплитуду в  $21^\circ 20'$  и простирается от Калиана у предгорья Гималайского хребта до мыса Коморина, между широтами  $8^\circ 12'$  и  $29^\circ 31'$ ; кроме нее, имеются еще две меридианные дуги с амплитудами в  $15^\circ$  и  $19^\circ$  и дуги параллелей: под широтой  $18^\circ$  с разностью долгот  $10^\circ 28'$  и под широтой  $24^\circ$  с амплитудой по долготе около  $20^\circ$ .

6) Американское трансконтинентальное измерение по параллели  $39^\circ$  широты, простирающееся на  $48^\circ 46'$  по долготе от Ти-

хого до Атлантического океана; исполнено за последние десятилетия XIX столетия.

7) Американское измерение косвенной к меридиану дуги в восточной части Соединенных Штатов длиной в  $23^{\circ} \frac{1}{2}'$  между конечными точками: а) Новый Орлеан (Мексиканский залив);  $\varphi = 29^{\circ} 57'$  и  $\lambda = -90^{\circ} 4'$ ; б) пункт *Calais* на границе с Канадой на берегу Атлантического океана;  $\varphi = 45^{\circ} 11'$  и  $\lambda = -67^{\circ} 17'$ ; исполнено измерение в период с 1833 г. по 1898 г.

8) Европейское градусное измерение по 52-й параллели, идущее от западных берегов Ирландии через Англию, Бельгию, Германию и Польшу до Бобруйска; от Бобруйска дуга имела продолжение через Россию на Орел, Липецк, Самару (Куйбышев), Оренбург (Чкалов) вплоть до Орска; протяжение всей дуги до Орска по долготе около  $63^{\circ} 41'$ , но часть ее от Бобруйска до Орска не принимается во внимание при выводе размеров эллипсоида, так что используемая часть, имеющая конечным пунктом Бобруйск, ограничивается амплитудой в  $45^{\circ} 35'$ ; исполнение работ по дуге, начатое в шестидесятых годах прошлого столетия, закончилось к 1890 г.

9) Европейское измерение по параллели  $47^{\circ} \frac{1}{2}'$  широты от Бреста во Франции, через Германию, Австрию, Румынию и Россию до Астрахани—до сих пор не используется в выводах земного эллипсоида, ввиду разнородности материалов, собирание которых на этой дуге захватывает период с 1818 г. по 1906 г.

10) Африканское измерение по меридиану—от мыса Доброй Надежды до Каира; начато в 1883 г. и к 1924 г. доведено от мыса Доброй Надежды ( $\varphi = -31^{\circ} 36'$ ) до озера Альберт ( $\varphi = +4^{\circ}$ ), т. е. южная часть дуги исполнена на протяжении  $35^{\circ} \frac{1}{2}'$ ; с 1919 г. до 1931 г. в северной части дуги исполнен участок ее от Каира до широты  $\varphi = 21^{\circ}$ , т. е. примерно на  $8^{\circ}$  к югу от северного конца дуги; остается пока неисполненной и выполняется с 1930 г. средняя часть между широтами  $+4$  и  $+21^{\circ}$  протяжением около  $17^{\circ}$ . Вся амплитуда дуги, намеченной к выполнению, равна  $61^{\circ}$ . Как видно, по существу африканское измерение большой меридианной дуги должно быть отнесено к большим астрономо-геодезическим предприятиям не XIX, а XX столетия.

В настоящем XX столетии следует отметить следующие градусные измерения.

11) Измерение дуги меридиана на островах Шпицбергена, выполненное в 1899—1901 гг. русскими и шведами между параллелями  $76^{\circ} \frac{1}{2}'$  и  $80^{\circ} \frac{1}{2}'$ .

12) Новое французское градусное измерение по меридиану в Перу и Эквадоре с 1899 г. по 1906 г., доставившее меридианную дугу в  $5^{\circ} 52'$ .

По инициативе Парижской, Петербургской и Стокгольмской Академий Наук, экспедиции на Шпицберген и в Перу должны были произвести градусные измерения, аналогичные по замыслу выполненным экспедициями 1735—1752 гг.

13) Дуга 98 меридиана в Северо-Американских Штатах с продолжением ее в Мексике с общей амплитудой около  $33^{\circ}$  между широтами  $+16^{\circ}$  и  $+49^{\circ}$ . Работы по этой дуге в американской ее части были начаты в конце XIX столетия; завершение работ относится к 1907—1912 гг.

14) Северо-американские большие дуги по параллелям под широтами 32, 46 и  $49^{\circ}$ , начатые в XIX столетии и законченные к 1908—1912 гг.

15) Северо-американские дуги по меридианам с долготами  $-90^{\circ}$ ,  $-105^{\circ}$ ,  $-113^{\circ}$  (амплитуды дуг от  $16$  до  $18^{\circ}$ ), а также дуга, имеющая направление, близкое к меридианному, и проложенная вдоль берега Тихого океана от границы с Канадой ( $\varphi = 49^{\circ}$ ) до границы с Мексикой ( $\varphi = 39^{\circ}$ ). Последняя дуга имеет продолжение на север на территории Канады до широты  $54\frac{1}{2}^{\circ}$ , а отсюда продолжается далее вновь по территории США в Аляске; триангуляции в Аляске подходят в настоящее время к Берингову проливу, через который произойдет знаменательное в истории геодезии и вообще науки соединение градусных измерений СПА с градусными измерениями СССР.

16) Советские (важнейшие) градусные измерения, исполненные с 1922 г. по 1936 г.:

а) дуга меридиана от Мурманска ( $\varphi = 67\frac{1}{2}^{\circ}$ ) до Николаева на Черном море ( $\varphi = 47^{\circ}$ );

б) дуга 36 меридиана от Петрозаводска ( $\varphi = 62^{\circ}$ ) до Джанкоя в Крыму ( $\varphi = 46^{\circ}$ );

в) дуга по 42 меридиану от Костромы на Волге ( $\varphi = 57^{\circ}30'$ ) до Зугдиди в Закавказье ( $\varphi = 42^{\circ}30'$ );

г) в несколько косвенном к 48 меридиану направлении от Казани ( $\varphi = 56^{\circ}$ ) через Стalingрад до Астрахани ( $\varphi = 46^{\circ}$ );

д) по параллели  $52^{\circ}$  от Гомеля на Саратов и отсюда на Акмолинск до Усть-Каменогорска, от меридиана  $+30^{\circ}$  до меридиана  $+82^{\circ}$ ;

е) по параллели  $54-55^{\circ}$  от Орши на Днепре на Рязань, Челябинск, Новосибирск, Красноярск, отсюда на Иркутск до Рухлова и затем отсюда по средней параллели  $51-52^{\circ}$  до Хабаровска; по долготе эта грандиозная дуга простирается на  $106^{\circ}$ , т. е. имеет беспримерную по величине долготную амплитуду. Соединение этой дуги с западно-европейскими дугами параллелей, проложенными под широтами  $52-54^{\circ}$ , доставит непрерывную дугу параллели с амплитудой в  $143^{\circ}!!$ ;

ж) по параллели  $48-48\frac{1}{2}^{\circ}$  от западной нашей границы через Стalingрад до Урды в Казахстане, от меридиана  $+28^{\circ}$  до меридиана  $+47^{\circ}$ ;

з) по параллели с широтой  $57-58^{\circ}$  от меридиана  $30^{\circ}$  (Шимск) на Бежецк, Кострому, Горький, Казань до Чернушки, до меридиана  $+55^{\circ}$ .

Как видно, советские геодезисты, в большинстве своем питомцы МИИГАиК, выполнили за 14 лет колоссальную работу по градусным измерениям в СССР.

Мы отметим еще в заключение ведущиеся теперь астрономо-геодезические работы с целью получения новой дуги по 30 меридиану; эти работы исполняются в Финляндии, Эстонии, Польше, Румынии, Югославии, Греции. Если принять во внимание возможность соединения триангуляций Греции через Средиземное море с триагуляциями англичан в Египте, то получается перспектива образования колоссальной дуги по меридиану от мыса Доброй Надежды до Северного Ледовитого океана, от южной широты  $31^{\circ}36'$  до северной широты около  $70^{\circ}$ , т. е. дуги с амплитудой несколько более  $100^{\circ}$ .

Следует также отметить, что новые астрономо-геодезические работы в Индо-Китае, Австралии, Зондском архипелаге дают в этих странах новые градусные измерения, достаточно обширные.

В заключение приведем таблицу важнейших выводов размеров земного эллипсоида из градусных измерений.

| Автор                | Большая полуось | Сжатие     | Год вывода |
|----------------------|-----------------|------------|------------|
| Деламбр . . . . .    | 6 375 653 м     | 1 : 334,0  | 1800       |
| Бессель . . . . .    | 6 377 397 ,     | 1 : 299,15 | 1841       |
| Кларк . . . . .      | 6 378 206 ,     | 1 : 295,0  | 1866       |
| Кларк . . . . .      | 6 378 249 ,     | 1 : 293,47 | 1880       |
| Хейфорд . . . . .    | 6 378 388 ,     | 1 : 297,0  | 1910       |
| Хейсканен . . . . .  | 6 378 400 ,     | 1 : 298,2  | 1929       |
| Красовский . . . . . | 6 378 210 ,     | 1 : 298,6  | 1936       |

Вывод Бесселя основан на использовании части дуги Струве ( $8^{\circ}$ ), части дуги англо-французского меридиана ( $15^{\circ}$ ), части главного индийского меридиана ( $16^{\circ}$ ) и разных мелких дуг с амплитудами даже в  $2^{\circ}$ , включая и старое Перуанское измерение; вся сумма дуг, использованных Бесселем, дает амплитуду в  $50^{\circ}$ . Выводы Кларка основываются на более обширных материалах; к материалам, использованным для вывода Бесселя, прибавляется остальная значительная часть дуги Струве, англо-французская дуга берется уже с амплитудой в  $22^{\circ}$ , полностью используются обширные дуги по меридианам и по параллелям в Индии.

Вывод Хейфорда основан только на астрономо-геодезических материалах по США, и хотя они в сумме обширнее даже использованных Кларком материалов, но все-таки они относятся к одной стране. Вывод Хейсканена использует все материалы по США, а по Западной Европе — англо-французскую дугу, западно-европейскую часть (до Бобруйска) дуги 52 параллели и полностью дугу Струве. Хейсканен не использует вовсе индийских материалов, а также и советских, так как последние еще не были опубликованы и закопчены к 1928 г.

Вывод проф. Красовского основывается на тех же материалах, что и вывод Хейсканена, но с прибавлением к ним значительных, перечисленных выше материалов по СССР, однако, без использования пока дуги 54 параллели от Новосибирска до Хабаровска; использование индийских дуг не сделано, так как исходными данными по работам англичан в Индии автор не располагал. Все-таки вывод проф. Красовского охватывает наибольший материал и поэтому имеет и наибольший вес; средняя ошибка полуоси  $a$  в этом выводе около  $\pm 40$  м, а средняя ошибка сжатия характеризуется величиной  $\pm 0,8$  единицы в знаменателе сжатия.

Чем дальшешло развитие градусных измерений, тем более и более стремились при их обработке учитывать влияние неправильностей в распределении притягивающих масс в наружном слое Земли, которые обусловливают отступления геоида от формы эллипсоида вращения и так или иначе искажают значения астрономических широт и долгот в уравнениях (1) и (5). Отступления геоида от эллипсоида вращения вообще невелики — максимальная величина этих отступлений не более 150 м; тем не менее эти незначительные отступления могут сопровождаться весьма заметными изменениями кривизны поверхности геоида. Из данного градусного измерения или из нескольких, охватывающих некоторую территорию градусных измерений, мы, очевидно, определяем некоторый эллипсоид местного значения, который соответствует

части геоида в пределах именно этой территории и который вовсе не соответствует всему геоиду в целом: подходя хорошо соответствующей своей частью к рассматриваемой части геоида, этот эллипсоид может оказаться значительно отступающим от геоида во всех остальных своих частях—отступающим не на 150 м в максимуме, а может быть до одного и более километров. Конечно, отступлениями геоида от эллипса и связанными с ними значительными изменениями в кривизне различных частей поверхности геоида вполне объясняется различие результатов для большой полусоси и скатия эллипса, получаемых из разных градусных измерений и разными авторами, использующими различный материал. Приходится скорее удивляться, что выводы, основанные на различных, но каждый на не вполне значительных материалах, не согласуются между собой всего в пределах  $\pm 200$  м для размеров полусосей эллипса.

Говоря о земном эллипсоиде, приходится, очевидно, понимать под таковым эллипсOID, наилучше подходящий к геоиду в целом, и как-нибудь установить понятие этой наибольшей близости эллипса к геоиду. Ряд ученых называют эллипсOID, наилучше представляющий геоид в целом, общим земным эллипсOIDом и дают такое определение этому общему земному эллипсOIDу: 1) центр его должен совпадать с центром тяжести Земли и плоскость его экватора — с плоскостью земного экватора; 2) объем этого эллипса должен быть равен объему геоида; 3) сумма квадратов уклонений по высоте поверхности геоида от поверхности общего эллипса должна быть наименьшей.

Наибольшая геометрическая близость поверхностей геоида и общего эллипса устанавливается исчерпывающе уже одним третьим из приведенных выше условий в определении общего земного эллипса; два других условия, очевидно, могут несколько понижать эту чисто геометрическую близость. Но здесь сказывается то, что в вопросах определения фигуры Земли высшая геодезия не может ограничиваться чисто геометрическими решениями, а должна учитывать и физику земного шара. Переход от геоида к общему земному эллипсу мыслим как результат устранения неправильностей в распределении притягивающих масс в верхнем слое Земли, приводящего — без нарушения обстоятельств вращения Земли — к выравниванию основной уровенной поверхности и приближению ее к эллипсоидальной форме. При этом, конечно, полученный в результате эллипсOID не будет так близок геометрически к современному геоиду, как эллипсOID, для которого просто сумма квадратов уклонений геоида будет наименьшей. Но поскольку для науки о Земле важна именно связь отступлений геоида от эллипса с нарушениями правильности распределения притягивающих масс в верхнем слое Земли, поскольку эти отступления следует относить к эллипсу, представляющему основную уровенную поверхность Земли по устранению таких нарушений правильности распределения притягивающих масс в наружном слое Земли (имеющем толщину до 120 км). Мы, конечно, должны сказать, что общий земной эллипсOID, определяемый вышеприведенными тремя условиями, не будет вполне совпадать с «нормальным» эллипсOIDом, представляющим геоид после его выравнивания устранением неправильностей в строении верхнего слоя Земли, но что этими тремя условиями гарантируется возможная близость общего эллипса с таким «нормальным» эллипсOIDом — это не подлежит сомнению.

Теоретически вывод общего земного эллипсоида из градусных измерений представляется возможным лишь тогда, когда градусные измерения, все геодезически между собой связанные, покроют равномерно всю поверхность земного шара (да и то при некоторых добавочных условиях).

На помощь в этой задаче приходят измерения силы тяжести. Кроме астрономо-геодезического материала, собираемого при исполнении градусных измерений, должно еще располагать соответственно собранным гравиметрическим материалом. Результаты определений силы тяжести позволяют вносить в материалы по градусным измерениям те поправки, обусловленные влияниями неправильностей в строении верхнего слоя Земли, которые местные эллипсоиды, выводимые из отдельных градусных измерений, существенно приближают к общему земному эллипсоиду. Следует поэтому усвоить взгляд, что современные выводы земного эллипсоида должны основываться на совместном научном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, причем при сборировании последних должны быть соблюдены требования главной научной задачи геодезии.

### § 3. Измерения силы тяжести

В 1743 г. знаменитый французский ученый Клеро, участник градусного измерения в Лапландии, установил важный закон изменения силы тяжести на поверхности тела, образованного из слоев разной плотности, но разграниченных сфероидальными поверхностями с малыми сжатиями; все эти сфериоиды одноцентренны и имеют общую ось вращения; внешний сфероид должен быть уровенной поверхностью; закон изменения плотностей при переходе от слоя к слою остается произвольным. Обозначив через  $g_a$  и  $g_p$  ускорение силы тяжести соответственно на экваторе и на полюсе; через  $g$  — ускорение силы тяжести под широтой  $\varphi$ ; через  $q$  — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе же и через  $\alpha$  — сжатие Земли, имеем по Клеро:

$$g = g_a + (g_p - g_a) \sin^2 \varphi, \quad (6)$$

$$\frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} q - \alpha, \quad (7)$$

причем:

$\alpha = \frac{a - b}{a}$ ,  $q = \frac{\omega^2 \cdot a}{g_a}$ ;  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли. Уравнения (6) и (7) ошибочны лишь на величины порядка квадрата сжатия.

Для определения ускорения  $g$  силы тяжести служат маятники особого устройства, дающие эту величину с высокой точностью. Определив из наблюдений над маятниками в разных местах Земли, под разными широтами, значения  $g$  ускорения силы тяжести, затем из уравнений (6) мы можем вывести вероятнейшие значения величин  $g_a$  и  $g_p$ . После вывода этих величин остается из (7) определить сжатие  $\alpha$  Земли, так как  $q$  хорошо известно.

Теорема Клеро предполагает, что вне внешней уровенной поверхности не имеется притягивающих масс и, конечно, это условие не соблюдается на Земле. В формуле (6) в левой части должно стоять значение  $g$ , отнесенное к поверхности геоида, над которой предполагается отсутствие притягивающих масс. Поэтому наблюденные на

физической поверхности Земли значения  $g$  прежде их подстановки в формулу (6) подлежат «приведениям», или редукциям. Вопрос об этих редукциях является достаточно сложным. Однако при равномерном (более или менее) покрытии точками, в которых исполнены определения силы тяжести, всей поверхности земного шара можно ожидать компенсации влияния ошибок в редукциях силы тяжести на вывод величин  $g_a$  и  $g_p$ , если при вычислении редукций будут применены соответствующие, разработанные за последние десятилетия видными авторитетами методы.

Равномерное покрытие всей поверхности земного шара маятниково-ыми точками вполне достижимо, так как точные определения силы тяжести на море возможны на подводной лодке, а в Арктике — на дрейфующих судах и льдинах, а следовательно, определения силы тяжести могут быть исполнены в любой точке океанов. Таким образом, гравиметрический (или основанный на определениях силы тяжести) метод вывода сжатия земного эллипсоида имеет существенные преимущества перед выводом его же из градусных измерений, так как определения силы тяжести возможно выполнить и на суше, и на океанах, и морях. Гравиметрическое изучение всей поверхности земного шара — пока еще дело будущего, может быть, и не такого далекого; но, конечно, важно иметь метод, который обеспечивает изучение всей поверхности геоида, а не ограничивает по необходимости это изучение какой-либо его частью.

Выходы сжатия Земли из определений ускорений силы тяжести выполнены разными учеными. В 1901 г. Гельмерт (крупнейший германский геодезист) дал для сжатия значение 1 : 298,2; он же в 1915 г. вывел  $\alpha = 1 : 296,7$ ; Хейсканен в 1928 г. из более значительного материала вывел  $\alpha = 1 : 297,3$ . Конечно, все эти выводы основываются на материалах еще недостаточных. При дальнейшем развитии наблюдений силы тяжести будет обеспечена возможность надежного вывода и параметров  $g_a$  и  $g_p$ , входящих в формулу (6), и земного сжатия  $\alpha$ . Тогда эта формула, именуемая формулой нормальной силы тяжести, позволит вычислить для любой точки наблюдений значение  $g$ , т. е. значение ускорения нормальной силы тяжести для проекции этой точки на поверхность геоида. Назовем выведенное таким образом значение ускорения силы тяжести через  $\gamma_0$ . Разности  $g - \gamma_0$  будут представлять собой так называемые аномалии силы тяжести. Эти аномалии силы тяжести обусловлены неправильностями в распределении притягивающих масс в верхнем слое Земли; но той же причиной вызваны и отступления геоида от эллипсоида. Отступления  $N$  геоида от общего земного эллипсоида являются поэтому функциями величин и распределения этих аномалий силы тяжести. Математическое выражение  $N$  (высоты данной точки геоида над общим эллипсоидом или, вернее, над «нормальным» сфероидом) в функции аномалий силы тяжести дал в 1847 г. английский ученый Стокс — опять-таки при условии, что выше внешней уровенной поверхности, ограничивающей Землю, не имеется никаких притягивающих масс. Хотя это условие вызывает осложнения в применении теории Стокса и хотя для вполне точного получения  $N$  необходимо знать аномалии силы тяжести на поверхности всего земного шара, тем не менее использование формул Стокса для исследования фигуры геоида возможно и при современной, еще малой гравиметрической изученности земного шара, но с заменой изучения геоида в целом изучением изменений величин  $N$  в некотором ограниченном районе,

достаточно покрыто гравиметрическими пунктами, или, иначе говоря, изучением фигуры геоида только в этом районе. Такая постановка задачи возможна потому, что влияние аномалий силы тяжести, относящихся к достаточно удаленным от рассматриваемой точки зонам, может считаться практически одинаковым для двух сравнительно близких точек\*, т. с. не влияющим на разность величин  $N$  в этих точках.

Кроме изучения частей геоида или местных геоидов, применение теории Стокса может дать величины  $N$  с ошибкой, вряд ли превышающей 25 м, если вокруг точки, для которой рассчитываются  $N$ , выполнено гравиметрическое изучение территории в радиусе 1500 км. Вывод с указанной точностью величин  $N$ , хотя бы для одного-двух пунктов большого государства, имеет существенное значение для связи эллипсоида, выводимого из градусных измерений этого государства, с общим земным эллипсоидом. Несомненно, в недалеком будущем, с ростом гравиметрической изученности земного шара, применение теории Стокса получит видное место в определении отступлений геоида от общего земного эллипсоида. Изучение фигуры геоида в целом должно идти по линии совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов: эллипсоиды, выводимые из градусных измерений, получают при помощи гравиметрических материалов связь с общим земным эллипсоидом и в конце концов дадут возможность установить надежно размеры этого эллипсоида с установлением его сжатия совместно из астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, причем, вероятно, роль гравиметрии при этом установлении сжатия будет превалирующей. Изучение же отступлений геоида от этого эллипсоида будет выполняться, главным образом, на основе гравиметрических материалов, хотя здесь видную роль будут играть и астрономо-геодезические материалы.

#### § 4. Референц-эллипсоид. Относительные уклонения отвесных линий

В геодезии поверхность геоида, вследствие ее сложности и неизвестности, заменяется поверхностью некоторого эллипсоида. Размеры этого эллипсоида устанавливаются в данном государстве на основании результатов соответствующих научных исследований; положение этого эллипсоида в земном теле, или его ориентировка, должно быть, конечно, вполне определенным и установленным также на основании научных данных. Выбор размеров и ориентирование этого эллипсоида должны удовлетворять требованию достаточной близости его поверхности в пределах всей территории государства к поверхности геоида. Эта близость понимается как в смысле близости обеих поверхностей по высоте, так и в смысле близости направления нормали к эллипсоиду в некоторой точке земной поверхности с направлением отвесной линии в той же точке. Все точки внешней земной поверхности проектируются (переносятся) нормалями в них на поверхность такого эллипсоида, и в геодезии определяется положение именно этих проекций соответствующими координатами или расстояниями и азимутами на таком эллипсоиде.

Этот эллипсоид, заменяющий геоид при определении положения геодезических точек, на поверхности которого развертываются результаты всех топографических работ, носит название референц-эллипсоида.

\* Удаленных, например, друг от друга на 60—100 км.

физической поверхности Земли значения  $g$  прежде их подстановки в формулу (6) подлежат «приведениям», или редукциям. Вопрос об этих редукциях является достаточно сложным. Однако при равномерном (более или менее) покрытии точками, в которых исполнены определения силы тяжести, всей поверхности земного шара можно ожидать компенсации влияния ошибок в редукциях силы тяжести на вывод величин  $g_a$  и  $g_p$ , если при вычислении редукций будут применены соответствующие, разработанные за последние десятилетия видными авторитетами методы.

Равномерное покрытие всей поверхности земного шара маятниково-ыми точками вполне достижимо, так как точные определения силы тяжести на море возможны на подводной лодке, а в Арктике — на дрейфующих судах и льдинах, а следовательно, определения силы тяжести могут быть исполнены в любой точке океанов. Таким образом, гравиметрический (или основанный на определениях силы тяжести) метод вывода сжатия земного эллипсоида имеет существенные преимущества перед выводом его же из градусных измерений, так как определения силы тяжести возможно выполнить и на суше, и на океанах, и морях. Гравиметрическое изучение всей поверхности земного шара — пока еще дело будущего, может быть, и не такого далекого; но, конечно, важно иметь метод, который обеспечивает изучение всей поверхности геоида, а не ограничивает по необходимости это изучение какой-либо его частью.

Выходы сжатия Земли из определений ускорений силы тяжести выполнены разными учеными. В 1901 г. Гельмерт (крупнейший германский геодезист) дал для сжатия значение 1 : 298,2; он же в 1915 г. вывел  $\alpha = 1 : 296,7$ ; Хейсканен в 1928 г. из более значительного материала вывел  $\alpha = 1 : 297,3$ . Конечно, все эти выводы основываются на материалах еще недостаточных. При дальнейшем развитии наблюдений силы тяжести будет обеспечена возможность надежного вывода и параметров  $g_a$  и  $g_p$ , входящих в формулу (6), и земного сжатия  $\alpha$ . Тогда эта формула, именуемая формулой нормальной силы тяжести, позволит вычислить для любой точки наблюдений значение  $g$ , т. е. значение ускорения нормальной силы тяжести для проекции этой точки на поверхность геоида. Назовем выведенное таким образом значение ускорения силы тяжести через  $\gamma_0$ . Разности  $g - \gamma_0$  будут представлять собой так называемые аномалии силы тяжести. Эти аномалии силы тяжести обусловлены неправильностями в распределении притягивающих масс в верхнем слое Земли; но той же причиной вызваны и отступления геоида от эллипсоида. Отступления  $N$  геоида от общего земного эллипсоида являются поэтому функциями величин и распределения этих аномалий силы тяжести. Математическое выражение  $N$  (высоты данной точки геоида над общим эллипсоидом или, вернее, над «нормальным» сфероидом) в функции аномалий силы тяжести дал в 1847 г. английский ученый Стокс — опять-таки при условии, что выше внешней уровенной поверхности, ограничивающей Землю, не имеется никаких притягивающих масс. Хотя это условие вызывает осложнения в применении теории Стокса и хотя для вполне точного получения  $N$  необходимо знать аномалии силы тяжести на поверхности всего земного шара, тем не менее использование формул Стокса для исследования фигуры геоида возможно и при современной, еще малой гравиметрической изученности земного шара, но с заменой изучения геоида в целом изучением изменений величин  $N$  в некотором ограниченном районе,

достаточно покрытое гравиметрическими пунктами, или, иначе говоря, изучением фигуры геоида только в этом районе. Такая постановка задачи возможна потому, что влияние аномалий силы тяжести, относящихся к достаточно удаленным от рассматриваемой точки зонам, может считаться практически одинаковым для двух сравнительно близких точек\*, т. с. не влияющим на разность величин  $N$  в этих точках.

Кроме изучения частей геоида или местных геоидов, применение теории Стокса может дать величины  $N$  с ошибкой, вряд ли превышающей 25 м, если вокруг точки, для которой рассчитываются  $N$ , выполнено гравиметрическое изучение территории в радиусе 1500 км. Вывод с указанной точностью величин  $N$ , хотя бы для одного-двух пунктов большого государства, имеет существенное значение для связи эллипсоида, выводимого из градусных измерений этого государства, с общим земным эллипсоидом. Несомненно, в недалеком будущем, с ростом гравиметрической изученности земного шара, применение теории Стокса получит видное место в определении отступлений геоида от общего земного эллипсоида. Изучение фигуры геоида в целом должно идти по линии совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов: эллипсоиды, выводимые из градусных измерений, получают при помощи гравиметрических материалов связь с общим земным эллипсоидом и в конце концов дадут возможность установить надежно размеры этого эллипсоида с установлением его сжатия совместно из астрономо-геодезических и гравиметрических материалов, причем, вероятно, роль гравиметрии при этом установлении сжатия будет превалирующей. Изучение же отступлений геоида от этого эллипсоида будет выполняться, главным образом, на основе гравиметрических материалов, хотя здесь видную роль будут играть и астрономо-геодезические материалы.

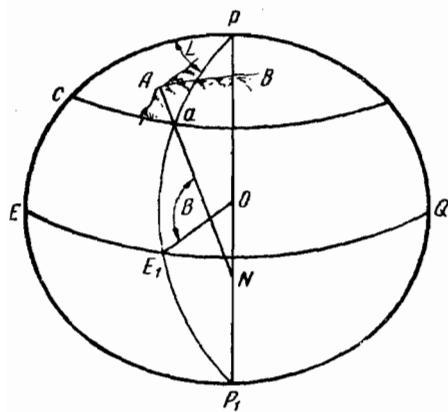
#### § 4. Референц-эллипсоид. Относительные уклонения отвесных линий

В геодезии поверхность геоида, вследствие ее сложности и неизвестностей, заменяется поверхностью некоторого эллипсоида. Размеры этого эллипсоида устанавливаются в данном государстве на основании результатов соответствующих научных исследований; положение этого эллипсоида в земном теле, или его ориентировка, должно быть, конечно, вполне определенным и установленным также на основании научных данных. Выбор размеров и ориентирование этого эллипсоида должны удовлетворять требованию достаточной близости его поверхности в пределах всей территории государства к поверхности геоида. Эта близость понимается как в смысле близости обеих поверхностей по высоте, так и в смысле близости направления нормали к эллипсоиду в некоторой точке земной поверхности с направлением отвесной линии в той же точке. Все точки внешней земной поверхности проектируются (переносятся) нормалями в них на поверхность такого эллипсоида, и в геодезии определяется положение именно этих проекций соответствующими координатами или расстояниями и азимутами на таком эллипсоиде.

Этот эллипсоид, заменяющий геоид при определении положения геодезических точек, на поверхности которого развертываются результаты всех топографических работ, носит название референц-эллипсоида.

\* Удаленных, например, друг от друга на 60—100 км.

На поверхности референц-эллипсоида в геодезии (и в картографии) положение точек земной поверхности определяется обычно геодезическими широтами и геодезическими долготами их. Геодезической широтой  $B$  точки  $A$  называется (черт. 2) угол нормали  $AN$ , проведенной в  $A$  к поверхности референц-эллипсоида, с плоскостью экватора эллипса. Если  $P$  и  $P_1$  — полюсы эллипса;  $O$  — его центр;  $PAE_1P_1$  — плоскость геодезического меридиана точки  $A$ ;  $EE_1Q$  — экватор эллипса, то геодезическая широта  $B$  точки  $A$  будет равна углу, составленному прямой  $AN$  с большой осью  $OE_1$  меридианного эллипса  $PAE_1P_1$ , потому что нормаль  $AN$  эллипса как фигуры вращения непременно будет лежать в меридианной плоскости  $PAE_1P_1$ . Пусть проекция той точки Гринвичской обсерватории, в которой считается нуль астрономической долготы, представляется точкой  $c$ . Тогда геодезической долготой  $L$  точки  $A$  будет называться угол между плоскостями меридианов  $PcP_1$  и  $PaP_1$ .



Черт. 2

Очевидно, что геодезические координаты для точки  $A$  и ее проекции  $a$  на поверхность референц-эллипса одни и те же.

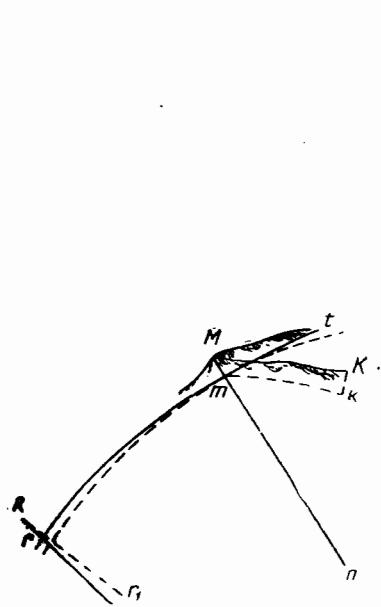
Геодезическим азимутом в пункте  $A$  на какой-нибудь земной предмет  $B$  мы будем называть угол между плоскостью  $PA\bar{P}$ , геодезического меридиана точки  $A$  и нормальной в  $A$  плоскостью  $BAN$ , содержащей точку  $B$  и нормаль  $AN$  (эта нормальная плоскость вообще не пройдет через проекцию  $b$  точки  $B$  на референц-эллипс). Если астрономические широта, долгота и азимут связаны с отвесной линией и вертикальными плоскостями, то геодезические широта, долгота и азимут связаны с нормалью к референц-эллипсу и с нормальными его плоскостями.

Отвесная линия в  $A$ , конечно, в общем случае не совпадает с нормалью  $AN$  к референц-эллипсу и не находится в плоскости  $PA\bar{P}_1$ ; другими словами, плоскости астрономического и геодезического меридианов в  $A$  вообще не совпадают; вертикаль в  $A$ , содержащий пункт  $B$ , не совпадает с нормальной плоскостью  $BAN$  и широты, долготы и азимуты геодезические не совпадают соответственно с широтами, долготами и азимутами астрономическими. Это несовпадение обусловлено: выбором размеров референц-эллипса, принятой ориентировкой его в теле Земли и отступлениями геоида от эллипсоидальной формы, или неправильным распределением масс в верхнем слое Земли. Если бы геоид был вполне правильным эллипсом вращения, то та или другая ошибочность в установлении размеров референц-эллипса уже повела бы к отступлениям его поверхности от поверхности геоида, причем нормали к поверхности эллипса не совпадали бы с нормалями к поверхности геоида или отвесными линиями в тех же точках. Если бы мы взяли совершенно точные размеры эллипса, но не вполне правильно ориентировали его в земном теле, то это явились бы причиной отступлений поверхности референц-эллипса от

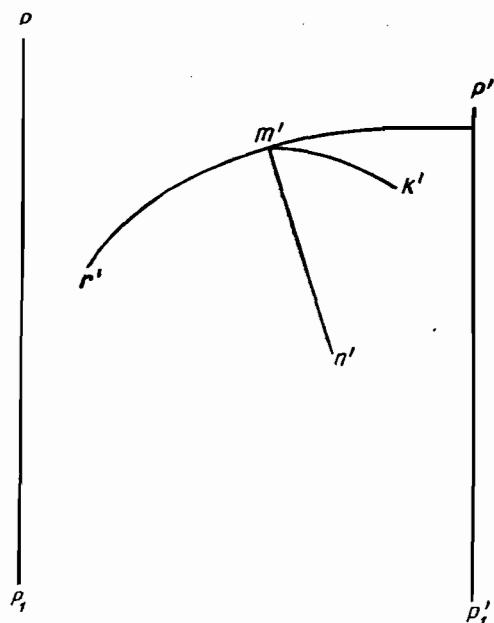
поверхности геоида и уклоны отвесных линий от нормалей к такому референц-эллипсоиду в соответствующих точках. Размеры референц-эллипса для геодезических работ в большом государстве следует принимать на основании использования результатов градусных измерений данного государства и значительных градусных измерений других стран, чтобы иметь уверенность в близости размеров референц-эллипса к размерам эллипса, наилучше представляющего геоид в пределах данной территории.

Остановимся на ориентировании референц-эллипса и именно на том методе ориентирования, который основан на использовании астрономических данных в начальной или исходной точке государственной триангуляции.

Пусть за такую исходную точку мы приняли (черт. 3) пункт  $M$  земной поверхности, в котором с возможной тщательностью определили: астрономическую широту  $\varphi_1$ , астрономическую долготу  $\lambda_1$  и астрономический азимут  $\alpha_1$  на некоторый пункт  $K$ , находящийся от  $M$  на расстоянии 20—30 км. Далее, пусть нам известны высоты  $H_1$  и  $H_2$  пунктов  $M$  и  $K$  над уровнем океана. На чертеже 3: кривая  $rmt$  — сечение геоида



Черт. 3



Черт. 4

плоскостью истинного или астрономического меридиана точки  $M$ ; точка  $m$  — проекция  $M$  на уровень океана или на поверхность геоида отвесной линией  $Mm$ ; точка  $k$  — проекция  $K$  отвесной линией  $Kk$  на поверхность геоида; кривая  $mk$  — сечение поверхности геоида вертикалом  $MMt$ ;  $PP_1$  — ось Мира.

Напомним, что плоскость астрономического меридиана точки  $M$  есть плоскость, проходящая через отвесную линию в этой точке и параллельная оси Мира; плоскость геодезического меридиана  $M$  содержит нормаль в  $M$  к поверхности референц-эллипса и полюсы эллипса.

На черт. 4 пусть  $P'P'_1$  — малая ось референц-эллипсоида, а эллипс  $P'm'r'$  — некоторый меридианический эллипс референц-эллипсоида; точка  $m'$  взята на этом эллипсе таким образом, что ее геодезическая широта  $B_1$  равна астрономической широте  $\varphi_1$  точки  $M$ ; следовательно, нормаль  $m'n'$  делает с малой осью эллипса  $P'P'_1$  угол, равный  $90^\circ - \varphi_1$ . Назначим далее на поверхности референц-эллипсоида в точке  $m'$  нормальное сечение  $m'k'$ , геодезический азимут  $A_1$  которого, измеряющийся двугранным углом  $P'm'n'k'$ , был бы равен азимуту пункта  $k$  (черт. 3) на поверхности геоида, измеряющемуся двугранным углом  $tmnk$ . Этот азимут  $A_1$  будет очень близок к астрономическому азимуту  $\alpha_1$ , именно, как будет показано во второй части курса, можно принять

$$A_1 = \alpha_1 + \frac{\bar{K}k}{R} \rho'' \cdot \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha_1 \cos^2 \varphi_1.$$

При  $\bar{K}k = 100$  м,  $A_1 - \alpha_1 < 0'',01$  в наших широтах.

Теперь представим себе, что мы совмещаем референц-эллипсоид с геоидом (или с телом Земли) следующим образом: пусть точка  $m'$  совместится с точкой  $m$  и нормаль  $m'n'$  — с отвесной линией  $tm$ ; после этого наш эллипсоид мог бы произвольно еще поворачиваться (вращаться) около прямой  $tm$ , как около оси, и изменять свое положение в теле Земли. Но потребуем теперь, чтобы нормальная плоскость  $k'm'n'$  совпадала с плоскостью  $ktn$ ; тогда, очевидно, положение референц-эллипсоида по отношению к телу Земли станет совершенно определенным и неизменным. При такой ориентировке референц-эллипсоида, очевидно, его малая ось  $P'P'_1$  расположится параллельно оси Мира  $PP_1$  и плоскость его экватора — параллельно плоскости земного экватора, поверхность же референц-эллипсоида будет касаться в  $m$  поверхности геоида. Несомненно также, что если бы геоид был точно эллипсоидом вращения, размеры которого мы с полной точностью знали бы и приняли, как размеры нашего референц-эллипсоида, то указанная ориентировка привела бы к полному совпадению референц-эллипсоида с геоидом. Другими словами, мы можем иметь уверенность, что если размеры референц-эллипсоида установлены с достаточной надежностью, то при указанной ориентировке его поверхность будет вообще достаточно близка к поверхности геоида (за исключением случая, когда в исходном пункте  $M$  имеется значительное уклонение отвеса).

Практически описанная ориентировка в геодезии при обработке геодезических материалов выражается следующими требованиями: 1) геодезическая широта  $B_1$  и геодезическая долгота  $L_1$  в исходном пункте триангуляции принимаются соответственно равными астрономической широте  $\varphi_1$  и астрономической долготе  $\lambda_1$  этого исходного пункта; 2) геодезический азимут  $A_1$  некоторой стороны триангуляции, исходящей из начального ее пункта, принимается равным в этом пункте астрономическому азимуту  $\alpha_1$  той же стороны; 3) высота исходного пункта над поверхностью референц-эллипсоида равна его высоте над уровнем океана.

Малая ось и экватор любого референц-эллипсоида, ориентированного указанным образом (по  $\varphi_1$  и  $\alpha_1$ ) при любом выборе исходной точки, будут соответственно параллельны оси вращения и экватору Земли. Понятно, что совпадение нормали к референц-эллипсоиду с отвесной линией в той же точке будет иметь место вообще только в исходном пункте  $M$ ; в какой-

нибудь произвольной точке  $R$  отвесная линия имеет направление  $Rr$ , а нормаль к референц-эллипсоиду —  $rR_1$ . Угол  $rRr_1$  носит название относительного уклона отвеса. Можно назвать абсолютным или истинным уклонением отвеса в данной точке местности угол между направлениями в ней отвесной линии и нормали к поверхности общего земного эллипса. Эти абсолютные уклоны отвеса обусловлены, главнейшим образом, неправильностями в распределении притягивающих масс в верхнем слое Земли, имеющем толщину около 120 км. Если в исходном пункте государственной триангуляции мы имеем заметное (в 5—10 и более секунд) абсолютное уклонение отвеса, то нетрудно сообразить, что это вызовет заметное смещение референц-эллипса по отношению к общему земному эллипсоиду. Это вызовет неправильность в положении референц-эллипса в теле Земли и отступления поверхности этого эллипса от поверхности геоида, выражающиеся вообще десятками метров (подробно это разбирается во II части курса), причем, все равно, малая ось референц-эллипса остается параллельной оси вращения Земли и в исходном пункте его поверхность будет касаться поверхности геоида.

Референц-эллипсы, имеющие одни и те же размеры обеих их осей, но ориентированные по различным исходным пунктам, будут занимать различные положения в теле Земли.

В высшей геодезии референц-эллипс идентифицируется, принимая во внимание результаты определений «абсолютного» уклона отвеса в исходной точке триангуляции (о чем будет сказано во II части курса), но и указанный выше прием ориентирования эллипса имел и имеет еще применение.

Ориентировав референц-эллипс, мы проектируем на его поверхность нормалью к ней все геодезические пункты и, соединяя эти проекции так называемыми геодезическими на поверхности эллипса линиями, т. е. линиями кратчайшего расстояния, получаем систему треугольников на эллипсе. Углы в этих треугольниках и базисы, конечно, получаются в результате перехода от измеренных в натуре углов и базисов к их проекциям на поверхность эллипса; как делается этот переход, будет указано во II части курса.

Из триангуляции на эллипсе, используя исходные  $B_1 = \varphi_1$ ,  $L_1 = \lambda_1$  и  $A_1 = \alpha_1$  мы вычисляем геодезические широты и долготы пунктов триангуляции. Очевидно, что широта  $B$  и долгота  $L$  некоторой точки триангуляции определяют направление нормали к референц-эллипсу в этой точке. Если в той же точке мы выполним астрономические определения широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$ , то этим самым определим направление отвесной линии в ней. Так как геодезические широты отсчитываются от плоскости экватора референц-эллипса, параллельной плоскости земного экватора, от которой отсчитываются астрономические широты, а геодезические долготы отсчитываются от плоскости первого меридиана, от которой ведется счет и астрономических долгот\*, то, очевидно, направление нормали к эллипсу посредством величин  $B$  и  $L$  отнесено к тем же основным плоскостям, что и направление отвесной линии, определяемое величинами  $\varphi$  и  $\lambda$ . Поэтому по величинам

\* По существу, счет долгот геодезических и астрономических идет от плоскости астрономического меридиана исходного пункта триангуляции, с прибавлением к отсчитываемым отсюда долготам астрономической долготы этого исходного пункта.

$\varphi - B$  и  $\lambda - L$  мы легко можем сообразить направление отвесной линии относительно нормали к референц-эллипсоиду в рассматриваемой его точке или, вернее, в рассматриваемой точке земной поверхности. Угол между нормалью к референц-эллипсоиду и отвесной линией в той же точке носит название, как уже сказано выше, относительного уклона отвесной линии; эти относительные уклоны, очевидно, зависят по величине и направлению от собственно уклона отвеса в данной точке, обусловленного неправильностями в распределении масс в земной коре, от абсолютного уклона отвеса в исходном пункте триангуляции и от принятых размеров референц-эллипса. При удалениях точек от исходного пункта на несколько сот (200—300) км последняя причина влияет еще мало, и относительное уклонение отвеса в такой точке близко к разности абсолютных уклонений в ней и в исходном пункте триангуляции, чем и обуславливается самый термин «относительное уклонение отвеса»; оно было бы почти равно абсолютному уклонению для точек, удаленных от начального пункта триангуляции на 200—300 км, если бы в этом начальном пункте абсолютное уклонение было равно нулю.

Из изложенного ясно, что если для ряда триангуационных точек мы определим астрономические широты и долготы, то, имея для этих точек разности  $\varphi - B$  и  $\lambda - L$ , мы построим в них направления отвесных линий относительно нормалей к референц-эллипсоиду в тех же точках, а, следовательно, можем построить и поверхность, ортогональную к этим направлениям отвесных линий и проходящую через проекцию  $m$  (черт. 3) исходной точки триангуляции. Другими словами, определение достаточно частых астрономических пунктов в триангуляции и сопоставление астрономических результатов с геодезическими позволяют построить поверхность геоида в изучаемом районе и определить уклона поверхности геоида в этой его части от поверхности референц-эллипса и, если возможно, дать уравнение этой поверхности, которое, однако, никак нельзя распространить на всю поверхность геоида. Таким образом устанавливается путь изучения частей геоида. Конечно, при охвате астрономо-геодезической сетью значительной территории, этот путь, основанный на использовании относительных уклонений отвесных линий, мог бы привести и к изучению геоида на всей такой значительной территории, как, например, территория СССР, что, конечно, было бы весьма ценно. К сожалению, достаточно частую сеть астрономических пунктов в триангуляции на большой территории осуществить весьма затруднительно или, вернее, невозможно, потому что речь идет о пунктах в расстоянии друг от друга не более 20—30 км в местах равнинных и в расстоянии 5—10 км в горных районах. Но в 1935 г. в Научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии молодой ученик М. С. Молоденский по идеи проф. Красовского разработал особый прием использования гравиметрических наблюдений для определения относительных уклонений отвеса в любой точке линии  $AB$  длиной около 70 км, если известны относительные уклоны отвеса в пунктах  $A$  и  $B$  и если гравиметрическое освещение территории захватывает полосу шириной в 100 км в ту и другую сторону от линии  $AB$ . Этот метод Молоденского дает возможность изучать фигуру геоида на основании относительных уклонений отвеса, имея астрономические пункты в триангуляции в расстоянии друг от друга 70 км, и, конечно в этом методе лежит залог быстрого изучения геоида на значительных территориях.

В заключение следует сказать, что поверхность геоида является всюду выпуклой, что отдельные горы и даже значительные отдельные горные области (например, Кавказ) вызывают на этой поверхности малые по высоте волны (до 20—30 м), но общие неправильности в строении земной коры вызывают на этой поверхности волны, захватывающие значительнейшие территории, причем высота таких волн общего характера может достигать 150 м. Во всяком случае, поверхность геоида очень сложная и неправильная, и она, несомненно, не может быть представлена одним уравнением для всех ее частей. Но, может быть, если считаться только с волнами общего значения, то с известной степенью приближенности удастся представить геоид в целом и в общем некоторым уравнением. По современным, но не окончательным и общего характера данным геоид располагается выше общего земного эллипсоида на Тихом и Атлантическом океанах (не на всей их площади), а также в Западной Европе, примерно, до 30-го меридиана, и в Азии — примерно, к востоку от 105-го меридиана. Понижения геоида относительно общего эллипсоида приходятся на Америку и примыкающие к ней непосредственно части обоих океанов, на Европейскую часть СССР (в большей ее части) и на Азию — до меридиана 105°.

### § 5. Связь геодезии с другими научными дисциплинами

Как видно уже из изложенного, практическая астрономия и гравиметрия тесно переплетаются с геодезией. «Геодезическая астрономия» — вот термин, который все более и более получает права гражданства и все более и более заменяет прежний термин «астрономическое определение мест», причем геодезическая астрономия не так редко рассматривается как отдел геодезии. Современная геодезия предъявляет к астрономии требование точнейшего определения координат звезд до 6-й—7-й величины; современные геодезисты вместе с астрономами работают над созданием инструментов, которые в тяжелых условиях экспедиционных работ обеспечивали бы высокую точность результатов определения широт, долгот и азимутов триангуляционных пунктов. Астрономические широты, долготы и азимуты, определенные на пунктах геодезических сетей, служат не только для превращения этих сетей в градусные измерения, не только для определения сжатия и размеров земного эллипсоида и исследования местной фигуры геоида, но и для установления исходных геодезических координат и азимута в государственной триангуляции, а астрономические азимуты вместе с астрономическими долготами служат еще для действительного контроля угловых измерений в триангуляции, для устранения влияния систематических ошибок в этих измерениях, для устранения накопления ошибок в ориентировании последовательно связываемых угловыми измерениями частей обширной триангуляции. При таком их значении и назначении астрономические работы высокой точности, исполняемые в государственной триангуляции, составляют неразрывное целое с геодезическими работами в ней — это не добавок, вызываемый лишь научными задачами, но непременная часть современной большой триангуляции, отвечающей научно-техническим и практическим заданиям. Распределение астрономических пунктов в триангуляции, программы наблюдений, точность их результатов — все это вытекает из требований геодезии и устанавливается геодезистами соответствующей высокой квалификации, учитывающими при этом непременно и значение особенностей местности. К организации службы

времени геодезические работы предъявляют очень высокие требования, и поэтому естественно, что ряд образцовых служб времени находится в составе геодезических учреждений.

Движение земных полюсов, влияющее на изменения астрономических широт, долгот и азимутов, конечно, представляет собой явление, интересующее геодезистов, в особенности поскольку в нем отражаются систематические отступления геоида от эллипсоида вращения. Постановка и результаты повторных «мировых» определений долгот, как выясняющие движения материков, также, конечно, живо интересуют геодезистов.

Теория фигуры Земли, в которой, между прочим, развивается вопрос использования определений силы тяжести для изучения поверхности геоида, является завершением теоретической геодезии; по существу, теорию фигуры Земли можно назвать «физической геодезией» с включением сюда и гравиметрии.

Если отступления поверхности геоида от поверхности эллипсоида вращения и уклонения отвесных линий обусловлены неправильностями в строении земной коры, то, очевидно, по этим отступлениям геоида и по уклонениям отвесных линий мы можем косвенно судить о самих неправильностях в строении верхнего слоя Земли. Геодезические результаты определенно показали, что почти всегда вблизи горных хребтов избыток в величине силы тяжести и значения уклонений отвеса оказываются в несколько раз меньшими, чем то следовало бы ожидать, оценивая притягательное действие известной нам массы данного горного образования.

Точно так же по данным градусных измерений и определений силы тяжести отступления геоида от эллипсоида на материках и на океанах оказываются совсем не теми, которые получились бы из оценки избыточного притягательного действия материков и недостаточного притяжения океанов, очень глубоких и наполненных водой, имеющей плотность, в 2,5 раза меньшую средней плотности земной коры. Эти действительные отступления оказываются, во-первых, в несколько раз меньше предвычисляемых на основании учета избыточного действия материков и недостатка притяжения на океанах, а во-вторых, и не везде совпадающими с ними по знаку. Все эти результаты дали возможность геодезистам выдвинуть идею так называемой изостатической компенсации в земной коре, идсю, впервые сформулированную англичанином Праттом.

По Пратту, разнообразие устройства внесшей земной поверхности, наблюдаемое нами в виде возвышений и углублений суши и в виде углублений дна морей и океанов, есть результат неравномерного уплотнения материи в период перехода ее от жидкого или полужидкого состояния в твердое, причем этот процесс неравномерного уплотнения материи захватывал только наружный слой Земли, вследствие чего избыток плотности где-нибудь должен был обуславливать недостаток плотности — по Пратту, выше или ниже того места, где возник избыток плотности. Поэтому (по Пратту) для каждой отдельной части Земли можно принять, что полная масса в каждом вертикальном столбе, от видимой земной поверхности до некоторой внутренней поверхности, ниже которой начинается ненарушенное правильное строение Земли, приблизительно постоянна, при условии, конечно, постоянства площади поперечного сечения столба

на этой последней поверхности (или на уровне океана). Другими словами, избыточная масса горных хребтов должна компенсироваться в известной степени недостаточной плотностью вещества, лежащего ниже основания хребта и его подстилающего; наоборот, залегания значительной плотности, располагающиеся ниже дна океана, должны компенсировать недостаток плотности воды в толще океана. Геодезические результаты, несомненно, приводят к надежному обоснованию теории изостазии, понимаемой в таком виде: в верхнем слое Земли на некоторой глубине, выражющейся величиной, вообще большей 60 км, должна находиться поверхность изостазии или поверхность постоянного давления; на этой поверхности изостазии давление вертикального столба (с постоянной площадью его поперечного сечения), идущего от поверхности изостазии до дневной поверхности Земли, является постоянным. Это установление изостазии, конечно, определенно выявляет связь геодезии с геологией. Конечно, схемы изостатической компенсации могут быть предложены различные, и указанная выше схема Пратта является лишь одной из них возможно наименее совершенной. Астрономо-геодезические работы и определения силы тяжести доставляют вместе с геодезическими и геофизическими исследованиями ценнейшие материалы для выяснения изостатической компенсации в земной коре; те области, в которых по данным геодезических работ оказывается отсутствие изостатической компенсации, представляют особый интерес для геологов и геофизиков. Изостатическая компенсация, взятая в той или другой схеме, позволяет вычислять уклонения отвеса и аномалии силы тяжести, обусловленные неправильностями в строении Земли, конечно, при тех или других предположениях и допущениях. Это, разумеется, имеет немалое значение в вопросах определения размера и сжатия земного эллипсоида и вывода нормальной формулы силы тяжести. Несомненно, что достижения геологии и геофизики должны быть используемы геодезистами для внесения поправок в применяемые ими схемы изостатической компенсации при обработке астрономо-геодезических и гравиметрических материалов в целях исследования фигуры Земли. Но несомненно, что и геодезические результаты должны учитываться в геологии и геофизике. Нередко обнаружение в геодезических работах значительных местных уклонений отвеса указывало на район подземных залеганий, более плотных или менее плотных по сравнению с нормальной плотностью пород земной коры; дальнейшее детальное освещение района определениями силы тяжести приводит обычно к достаточному оконтуриванию залегания.

---

В заключение нашего введения в курс высшей геодезии мы должны отметить, что научно-техническая задача в виде построения основных астрономо-геодезических и нивелирных сетей является имеющей существенное значение для народного хозяйства и социалистического строительства. Только при наличии этих сетей будет правильно организована и проведена общая топографическая съемка СССР и созданы точные карты страны, столь необходимые и для нужд обороны, и для проектирования больших сооружений и крупных хозяйств, и для исследования и использования недр и т. д.

Большие проекты использования водной энергии, большие проекты коренного преобразования местности, связанные с обводнениями больших площадей, с созданием искусственных водоемов, плотин, новой

сети сухопутных и водных путей сообщения, требуют предварительного создания точной геодезической и нивелирной основы на больших площадях. Геодезист прежде всего должен уметь правильно, быстро и экономно создавать геодезическую и нивелирную основу.

Настоящая первая часть курса занимается именно вопросами исполнения основных геодезических и нивелирных сетей в целях научного обоснования топографических и картографических работ в государстве и с целью удовлетворения запросов на геодезические результаты со стороны инженерного и промышленного строительства, со стороны сельского хозяйства, горного дела и т. д., причем, конечно, в изложении будут освещаться и те требования, которые обеспечивают научное использование результатов основных геодезических и нивелирных работ.

---

# Г л а в а I

## О ТРИАНГУЛЯЦИИ ВООБЩЕ

### § 6. Триангуляции и нивелировки. Составление карт

Под тригонометрическими или триангуляционными работами понимают совокупность полевых геодезических действий и последующих вычислений, имеющих задачей из системы треугольников, проложенных на земной поверхности, точно определить относительное положение системы геодезических пунктов, вообще удаленных друг от друга на значительное расстояние и покрывающих значительные площади.

Такие работы необходимы: 1) для определения вида и размеров фигуры Земли из градусных измерений и для решения других научных задач геодезии; 2) для научного обоснования топографических съемок на значительных площадях, для правильной организации этих значительных топографических работ, для постоянного и надежного контроля в их исполнении, для уменьшения затрат на их исполнение и для обеспечения правильности и легкости сводки результатов таких работ в одно целое, т. е. для составления точных карт; 3) для правильного исполнения и успешной организации геодезической части работ при разных изысканиях, при строительстве больших сооружений, при строительстве городов и т. п., когда по результатам этих работ предстоит делать точные расчеты и проектирования на местности.

В § 2 и 4 уже достаточно выяснено все значение триангуляции для осуществления научных задач высшей геодезии. Триангуляция является единственным и притом превосходным средством для определения длин таких значительных дуг, которые должны быть взяты по меридианам и по параллелям при изучении фигуры и размеров Земли.

Первым, применившим триангуляцию к определению размеров Земли, является голландский ученый Снеллиус, исполнивший свою работу по определению величины земного радиуса в 1614—1616 гг. В настоящее время градусное измерение по меридиану или параллели слагается из ряда примыкающих друг к другу частных дуг, имеющих каждая длину около 200 км. Астрономо-геодезические работы по каждой частной дуге слагаются из: 1) прокладки (черт. 5) цепи треугольников *dce, cef, efg, egh, ..., lrq*, приблизительно равносторонних со сторонами в 25—40 км; 2) точного измерения горизонтальных углов в этих треугольниках со средней ошибкой  $\pm 0''.5$ — $0''.7$ ; 3) измерения двух базисов *ab* и *mp* длиной не менее 6 км, со средней ошибкой, меньшей 1 : 600 000; 4) точного измерения горизонтальных углов в ба-

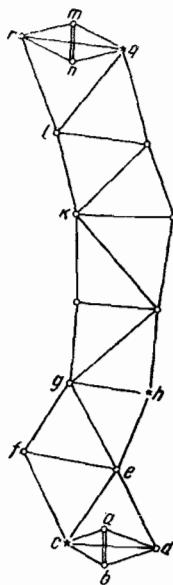
зисных сетях  $acbd$  и  $mnpq$ , имеющих передко вид ромба и обеспечивающих определение длин выходных сторон  $cd$  и  $rq$  тригонометрического ряда со средней ошибкой, меньшей  $1 : 300\,000$ ; 5) определения высот всех пунктов тригонометрического ряда; 6) точного определения астрономических широт, долгот и азимутов в каждой базисной сети: или на обоих концах выходных сторон (точки  $c$  и  $d$ , черт. 5), или на одном конце выходной стороны и на одном конце базиса (точки  $q$  и  $n$ ). Широты определяются со средней ошибкой  $\pm 0'',2$ , долготы — со средней ошибкой  $\pm 0'',4$  и азимуты — со средней ошибкой, не превышающей  $\pm 0'',7$ ; 7) точного определения астрономических широт и долгот на промежуточных пунктах ряда ( $h$  и  $k$ ), отстоящих друг от друга и от астрономических пунктов базисных сетей примерно на 70 км.

Эта современная схема астрономо-геодезических работ в градусных измерениях отличается от проводившейся до начала нынешнего столетия тем, что ранее астрономические определения обычно производились только в двух конечных пунктах частной дуги, т. е. например, только в пунктах  $q$  и  $c$ , причем в случае измерения по меридиану долготы и на этих двух пунктах не определялись. Забегая вперед, скажем, что указанная современная схема астрономо-геодезических работ в градусных измерениях вполне совпадает со схемой этих же работ в современной триангуляции I класса СССР с той лишь разницей, что в триангуляции I класса требуется на промежуточных астрономических пунктах  $h$  и  $k$  определять не только их астрономические широты и долготы, но астрономические азимуты с них на один из смежных тригонометрических пунктов. Как увидим во второй части курса, астрономические азимуты вместе с астрономической долготой пункта, с которого взят азимут, имеют существенное значение для контроля измерений в триангуляции и для устранения в ней накопления влияния ошибок измерений углов. Другими словами, производственные задания в современном их понимании требуют в основных геодезических работах

более обширной программы в отношении определений астрономических азимутов, чем научные задания.

Почти одновременно с применением триангуляции в научных целях для определения длин дуг меридианов и параллелей, геодезисты стали использовать в качестве опорных тригонометрически определенные пункты при исполнении полевых картографических работ; первыми в этом деле оказались французские ученыс Ж. Кассини, Маральди и Лайр, приступившие к составлению карты Франции, в масштабе  $1 : 130\,000$  еще в середине XVIII столетия.

Вследствие значительности площади, па которой для составления карт должны быть выполнены топографические работы, необходимо всегда подразделить эту площадь на значительное число мелких участков; каждый такой участок должен иметь строго определенные границы на местности и на карте, представляемые некоторыми математическими линиями; площадь его должна составлять задание отдельного топографа и соответствующая ей часть идеальной земной поверхности



Черт. 5

должна быть принимаема за плоскость. Чем полнее будет обеспечена независимость работы каждого топографа на его участке от всех остальных и чем надежнее будет контроль в его работе, тем легче будет организация топографических работ сразу на значительном числе съемочных участков, на значительных территориях, тем больше топографов можно одновременно поставить на работу и тем скорее можно получить результат в виде карты. При сведении результатов работ на отдельных съемочных участках в одно целое, т. е. при внесении топографических материалов на карту, необходимо, конечно, считаться с кривизной Земли и необходимо, с другой стороны, поставить дело так, чтобы не возникло надобности в передвижке рамок съемочных участков и в переделке начессных уже на карту контуров со съемочных участков, исполненных ранее, чем рассматриваемые.

Все эти требования к организации и постановке больших топографических съемок и последующих камеральных работ по составлению карт целиком выполняются при наличии системы опорных геодезических пунктов, в значительном проценте определяемых методом триангуляции, и именно следующим образом. До произведения полевых топографических работ на площади, охватываемой ими, разбивается достаточно густая тригонометрическая сеть, восполняемая в некоторых районах полигонометрическими ходами, с таким расчетом, чтобы на каждый съемочный участок пришлось не менее четырех тригонометрических пунктов. При вычислении координат этих пунктов, поверхность геоида принимается совпадающей с поверхностью референц-эллипсоида, принятого в данном государстве (см. § 4). В соответствии с тем, что на карте основными линиями являются меридианы и параллели, съемочные участки определяются граничными линиями в виде меридианов и параллелей, с заданными их геодезическими широтами и долготами на референц-эллипсоиде. Другими словами, часть поверхности эллипса, соответствующая площади съемки, разбивается рядом меридианов  $abcq, defp, ghi\dots$  и рядом параллелей  $adgk, behl, cfim\dots$  (черт. 6) на клетки, и каждая такая клетка, ограниченная двумя смежными меридианами и двумя смежными параллелями, принимается за отдельный съемочный участок. При указанном образовании границ съемочных участков или планшетов разность долгот  $\Delta l$  двух смежных меридианов и разность широт  $\Delta \varphi$  двух смежных параллелей принимаются постоянными для всех планшетов, а самый выбор  $\Delta l$  и  $\Delta \varphi$  делается в зависимости от масштаба съемки и сообразуясь с принятой в государстве системой листов карт разных масштабов. (Если масштаб съемки 1 : 50 000, то  $\Delta \varphi = 10'$  и  $\Delta l = 15'$ ). Конечно, при такой системе деления территории на съемочные участки, положение их на карте точно известно.

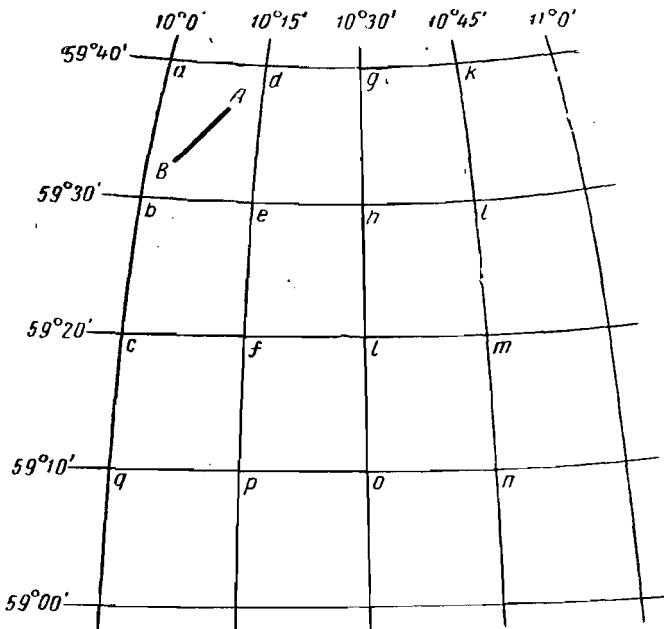
Тригонометрические или вообще опорные геодезические пункты определяются их координатами или в виде геодезических широт  $B$  и долгот  $L$ , отнесенными к референц-эллипсоиду, или — как это делается теперь в СССР — так называемыми прямоугольными координатами Гаусса-Крюгера, причем последние, будучи плоскими, определенно связаны с референц-эллипсоидом или, что все равно, с геодезическими широтами и долготами тех же точек.

Часть поверхности эллипса в пределах каждого съемочного участка можно принимать при определении горизонтальных положений точек за плоскость, касательную к эллипсу в средней точке клетки, причем кривые, ограничивающие участок в натуре, можно заменить: меридианы дуги  $ab, de\dots$  равными им по длине прямыми  $a_1b_1,$

$a_1e_1, \dots$  (черт. 7), а дуги параллелей  $ad$  и  $be$  равными им соответственно круговыми дугами  $a_1d_1$  и  $b_1e_1$ . Если широты точек  $a$  и  $b$  суть соответственно  $B_1$  и  $B_2$ , то длины дуг меридианов  $ab$  и длины дуг параллелей  $ad$  и  $be$  рассчитываются по формулам (4) и (5) так:

$$ab = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(B_1 - B_2)''}{\rho''}; \quad B_m = \frac{B_1 + B_2}{2};$$

$$ad = \frac{a \cdot \Delta l'' \cdot \cos B_1}{\rho'' \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}; \quad be = \frac{a \cdot \Delta l'' \cos B_2}{\rho'' \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}.$$



Черт. 6

Радиус круговой дуги  $a_1d_1$  равен

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \cos B_1.$$

Обычно величины  $ab$ ,  $bc, \dots$ ,  $ad$ ,  $be, \dots$  просто извлекаются готовыми из особых таблиц «размеров рамок съемочных планшетов». После построения рамки  $a_1d_1b_1e_1$  планшета (черт. 7) приходящиеся на его площадь тригонометрические пункты, если они даны в геодезических координатах  $B$  и  $L$ , наносятся при помощи тех же таблиц, которые служили для расчета длин дуг  $ab$ ,  $ad$ ,  $be \dots$ . Например, нам нужно нанести тригонометрический пункт  $A$ , для которого  $B = 59^{\circ}36'2''$  и  $L = 10^{\circ}8'40''$ ; из таблиц находят для параллелей с широтами  $59^{\circ}40'$

и  $59^{\circ}30'$  значения длин дуг  $ad$  и  $be$  и затем вычисляют отрезки  $a_1s$  и  $b_1t$  по формулам

$$a_1s = \frac{ad \cdot 520''}{900''},$$

$$b_1t = \frac{be \cdot 520''}{900''}.$$

На прямой  $st$  нужно будет отложить отрезок  $At$ , рассчитываемый следующим образом

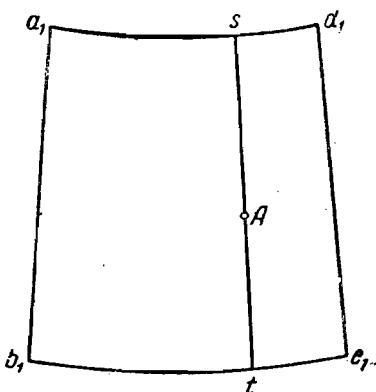
$$At = \frac{ab \cdot 362''}{600''}.$$

(Конечно, эти построения делают с контролем, рассчитывая еще  $sd_1$ ,  $te_1$ ,  $As$ .)

Если тригонометрические пункты даны в проекции и в координатах Гаусса-Крюгера, то тогда в специальных таблицах (например, В. В. Каврайского) даются координаты Гаусса-Крюгера для вершин ( $a, b, c, d$ ) рамок планшетов, и, конечно, построив сетку прямоугольных координат для наложения вершин рамки планшета, этой же сеткой воспользуемся и для нанесения тригонометрических точек по их координатам Гаусса-Крюгера в той же зоне.

После налесания на планшет опорных геодезических пунктов приступают к съемке, начиная ее, в случае применения мензуры, с составления геометрической сети; при этом направление  $AB$  с тригонометрического пункта  $A$  на тригонометрический пункт  $B$  служит для правильного ориентирования планшета (так, что при съемке стороны рамки  $a_1b_1$  и  $d_1e_1$  будут соответственно параллельны крайним меридианам съемочного участка); расстояние же между этими пунктами  $A$  и  $B$  послужит базисом. Конечно, опорные геодезические пункты определяют положение планшета на местности с некоторой погрешностью, обусловленной неточностью нанесения опорных пунктов и неточностью их определения.

Первая причина влияет, имея притом чисто местное значение, очевидно, ничтожно, не более 0,1 мм в масштабе плана. Что касается второй причины, то даже при больших площадях, например при квадрате со сторонами в 800 км, положение крайних планшетов относительно центральных определяется с ошибкой, не превышающей 5 м, что дает при съемке масштаба 1 : 50 000 только 0,1 мм, а при съемке масштаба 1 : 25 000 — только 0,2 мм. Кроме того, эта малая ошибка в положении планшетов будет крайне медленно и плавно возрастать по мере удаления от центра территории к ее краям, и различие ее значений для смежных планшетов будет совершенно ничтожно, так что никаких захождений или несмыканий смежных планшетов не может быть обнаружено. Несмыкания съемок друг с другом могут произойти лишь в том



Черт. 7

случае, когда одна съемка большой площади, основанная на самостоятельно обработанной тригонометрической сети, примкнула к съемке другой площади, основанной на другой, самостоятельно обработанной тригонометрической сети, без связи с сетью первой площади. Если представить себе, что две эти сети построены в одной системе, т. е. на одном и том же референц-эллипсоиде и при одном и том же исходном пункте (т. е. с одними и теми же исходными геодезическими координатами и азимутом), то отдельная обработка этих сетей при значительности территории может, вследствие неизбежных ошибок в триангуляции, привести к несмыканиям двух съемок, может быть, и на 10, а, может быть, и на 20—30 м. Но общая обработка всей главной триангуляции, т. е. триангуляции I класса, делает невозможными в настоящее время такие факты, хотя лет 30 назад они имели место.

Уклоняясь немного в сторону, позволим себе теперь отметить, что наличие геодезических опорных пунктов, конечно, значительно облегчает построение геометрической сети и дает в этой работе надежнейший контроль. Но этого мало; если число тригонометрических пунктов на планшете слишком мало, то топограф неизбежно должен сперва покрыть большими треугольниками всю свою площадь; после этого на той или другой части площади развить для передачи высот сеть более мелких треугольников и вести в этой части съемку, не имея, однако, вполне прочных гарантий, что при обработке следующей части планшета определенные им ранее высоты при смыкании этих частей не дадут певязок. Получается, конечно, и излишняя работа и неуверенность в ее результатах. Наоборот, если число опорных пунктов достаточно, то тогда, начиная работу в любой части планшета, можно развивать в ней сразу геометрическую сеть из сравнительно мелких треугольников, передавая надежно высоты и контролируя горизонтальное положение пунктов геометрической сети посредством опорных геодезических пунктов; при этом значительно меньшая величина частей, в каждой из которых геометрическая сеть развивается самостоятельно, вполне гарантирует отсутствие невязок при смыкании съемок таких частей. Следует не скучиться на обеспечение геодезической основой съемочных участков, чтобы затем при съемке иметь свободу действий, экономию в работе и полную уверенность в результатах. Хотя при съемке масштаба 1:25 000 мы могли бы помириться с неверным положением рамок планшета на местности до 10 м, но следует иметь в виду, что такую же невязку при сводке планшетов мы будем допускать и для образовавшегося из них замкнутого кольца с общим периметром в 400—600 км. Это же достижимо только в случае общей связи планшетов на основе хорошей триангуляции точностью не ниже так называемой триангуляции II класса.

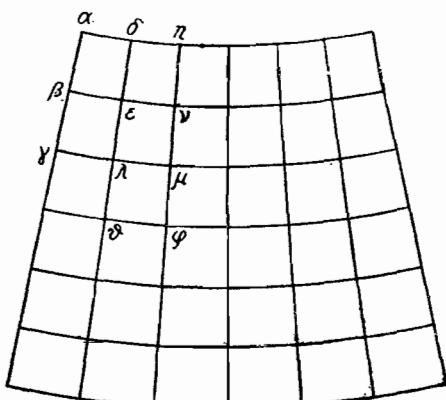
Съемка мензулей все более и более заменяется аэросъемкой. Вопрос развития геодезического обоснования при аэросъемочных работах претерпел существенные изменения за последние десять лет. Если при первых постановках аэросъемочных работ на более или менее значительных площадях замечалась тенденция к большему сгущению тригонометрической основы по сравнению с мензульной съемкой, то теперь дело заметно изменилось. В контурно-комбинированной аэросъемке трансформирование снимков и связь группы их при получении фотоплана можно достигнуть, не пользуясь вовсе геодезическими опорными пунктами, а используя так называемую фототриангуляцию. Связь фотопланов в отношении горизонтального их положения и координиро-

вание их по высоте достигается в открытых местах прокладкой геометрической сети, в закрытых и полузакрытых местах — прокладкой полигонометрических и тахеометрических ходов.

Следовательно, роль триангуляции и густота тригонометрически определенных пунктов остаются по существу те же самые, что и при мензульной съемке, без какого-либо их сгущения. Нужно отметить, что в самые последние годы делаются попытки путем прокладки (между геодезическими пунктами) основных фототриангуляционных рядов получить горизонтальную основу для связи всего аэрофотосъемочного материала, т. е. для связи фотопланов при контурно-комбинированной съемке в средних масштабах. При этом, конечно, ставится цель иметь более редкую геодезическую основу и устранить нужду в добавочной основе в виде геометрической сети или теодолитных ходов. Но эти опыты еще находятся в стадии разработки, и, кроме того, получение аэрофотограмметически добавочной горизонтальной основы оставляет в прежнем положении вопрос о высотном обосновании. В последние же годы разрабатываются вопросы так называемой «пространственной» триангуляции, причем решается положительно вопрос о горизонтальном обосновании аэрофотосъемки для планов масштаба 1 : 25 000 при условии базирования этой пространственной триангуляции на обычной триангуляции с пунктами, отстоящими друг от друга на 12–15 км. Такое обоснование, конечно, примерно в 1,6 раза реже, чем геодезическое обоснование при мензульной съемке масштаба 1 : 25 000.

Что касается внесения планшетов на карту, то эта задача в общем решается следующим образом. На карте прежде всего строится кartoграфическая сеть, т. е. условное изображение сети меридианов и параллелей. В этом условном изображении меридианы эллипсоида изображаются одним семейством линий на плоскости, а параллели эллипсоида — другим семейством линий, причем оба семейства выбираются так, чтобы соблюдались наперед установленные условия, которым должно отвечать получаемое изображение эллипсоида на плоскости. Обычно, при составлении точных топографических карт отдельные их клетки  $\alpha\beta\epsilon\delta$ ,  $\delta\epsilon\eta$ ,  $\eta\gamma\epsilon\dots$  (черт. 8) соответствуют каждая группе смежных съемочных планшетов, например, четырем или шестнадцати планшетам; проекция же карты берется такая, чтобы при графических построениях можно было в пределах каждой такой клетки принимать

сохранение подобия в целом и в ее частях с соответствующей ей клеткой и соответствующими частями ее на эллипсоиде. При этом влияние проекции будет сказываться в том, что если клетка  $\alpha\beta\epsilon\delta$  дает изображение соответствующей ей клетки эллипсоида в масштабе  $m$ , то клетка  $\eta\gamma\epsilon\delta$  дает изображение ей соответствующей клетки эллипсоида — в масштабе  $m + \Delta_1$ , а клетка  $\lambda\theta\varphi\mu$  — в масштабе  $m + \Delta_2 \dots$ . Величины  $\Delta_1, \Delta_2 \dots$  малы по сравнению с  $m$ , составляя несколько тысячных долей даже при расстоянии клетки  $\lambda\theta\varphi\mu$  от клетки  $\alpha\beta\epsilon\delta$ .



Черт. 8

в 200 км. Зная закон условного изображения эллипсоида на плоскости, мы можем рассчитать масштабы  $m$ ,  $m + \Delta_1$ ,  $m + \Delta_2 \dots$  Следовательно, задача составления карты — в смысле технического заполнения материалом ее листов — сводится к простой вставке в соответствующие клетки карты групп планшетов, уменьшенных предварительно (обычно путем фотографирования) в известных, заранее рассчитанных размерах.

Из изложенного ясно, что хорошо составленная тригонометрическая сеть страны в создании ее точной карты по существу необходима. Понятно, что чем больше страна и чем крупнее масштаб общегосударственной топографической карты, тем тщательнее должно исполнять общую триангуляцию страны. Понятно также, что чем крупнее масштаб съемки, тем расстояние между опорными геодезическими точками должно быть меньше.

При сплошных съемках городов, при маркшейдерских съемках и в ряде других случаев к землемерным работам предъявляются требования дать числовой материал: 1) для составления общего плана на территорию в несколько тысяч гектар (иногда и более) в очень крупных масштабах 1 : 1000, 1 : 500 (иногда даже 1 : 200) с точным показанием мест и размеров отдельных земельных участков, насаждений, всех построек с их деталями в плане, всех сооружений и т. п.; 2) для обеспечения точных расчетов при проектировании и перенесении проектов в натуре при проведении новых улиц, при регулировании проездов, при проведении новых каналов, тоннелей и т. п.

Хотя при указанных работах общая площадь сравнительно невелика, но высокая точность определения ряда пунктов и линий, ответственность за точное перенесение в натуре инженерного проекта, чрезвычайная крупность масштаба плана и наличие тысяч контуров, подлежащих точному определению в общей их связи, вызывают надобность в тщательно исполненной и серьезно продуманной геодезической основе. Здесь нередко к главной основе в виде триангуляции предъявляют требования точности, несколько не уступающие требованиям к так называемой государственной триангуляции I класса; здесь точность самой детальной съемки настолько высока, что геодезическая основа второго и третьего порядка (после главной) должна быть значительно выше по своей точности, чем геодезическая основа, используемая непосредственно для обоснования топографических работ даже в масштабе 1 : 10 000. Контроль землемерных работ и успех составления общего плана в указанных особых случаях (съемки городов, маркшейдерские съемки, разбивки для больших сооружений) вполне зависят от того, насколько хорошо площадь работ обеспечена тщательно определенными тригонометрическими и, на основе их, полигонометрическими пунктами.

Приходится отметить, что существенное значение триангуляции заключается не только в обеспечении требований той или другой точности в результатах съемочных работ — она значительно облегчает организацию этих работ и их выполнение, обеспечивая, кроме того, простоту их систематизации и общей их сводки.

При государственных топографических съемках рельеф местности, вырисовываемый горизонталями, должен быть отнесен везде, конечно, к одному уровню, именно к уровню моря. Очевидно для этого необходимо иметь опорные точки по высоте, другими словами, тригонометрические пункты должны быть надежно определены не только в плане (по широте и долготе), но и по высоте. Только тогда

каждый съемщик сможет вести свою работу по съемке рельефа независимо от других съемщиков и только тогда можно посредством геометрической сети или тахеометрических ходов надежно передать высоты на разные части площади съемки, а при сводке горизонталей между несколькими смежными планшетами не будет возникать существенных недоразумений. Взгляд, имеющий место до сих пор, что при сечении рельефа через 10 м можно фиксировать положение планшета по высоте до 2,5 м, совершенно ошибочен. Высоты тригонометрических пунктов можно определять довольно быстро из геодезического нивелирования. Но даже при постепенной и последовательной передаче высот таким нивелированием по тригонометрическим пунктам, отстоящим друг от друга на 10 км, накопление ошибок в высотах, выведенных таким образом, сделает эти высоты не отвечающими запросам правильно поставленной большой съемки, если она распространяется на территории радиуса 100 км. Поэтому правильная организация государственных топографических работ предполагает непременное исполнение обще-государственной нивелирной сети методами геометрического нивелирования, что необходимо, кроме того, для ряда запросов, связанных с строительством железнодорожной сети, с использованием водной энергии, с регулированием рек, с большими гидротехническими сооружениями.

Обычно посредством так называемого нивелирования высокой точности, выполняемого по железным дорогам и главным шоссе, образуется государственная нивелирная сеть первого разряда в виде полигонов с периметром от 600 до 1200 км; полигоны высокоточного нивелирования рассекаются ходами точного нивелирования или нивелирования второго разряда; между линиями высокоточного и точного нивелирования прокладываются ходы нивелирования третьего разряда, после которого идет так называемое техническое нивелирование, к которому относятся четвертый и пятый разряды нивелировки.

Густота главной нивелирной сети США характеризуется выполнением требования, чтобы ни одна точка страны не находилась далее 40 км от марок или реперов нивелирования первого или второго разряда; ходы нивелирования третьего разряда передают (очевидно, длина каждого такого хода — не более 80 км) высоты на планшеты государственной съемки, так что каждый планшет ставится в США по высоте на основании привязки его нивелированием третьего разряда к главной нивелирной сети государства. Во Франции так называемое генеральное нивелирование страны представлено нивелированием четырех разрядов: первый разряд образует замкнутые полигоны с периметром около 500 км; эти полигоны рассекаются ходами нивелирования второго разряда; линии нивелирования третьего разряда идут друг от друга и от линий первого и второго разрядов всего в расстояниях 20—30 км. Очевидно, что все четыре разряда дают очень густую нивелирную сеть, так что каждая деревенская община имеет на своей территории нивелирный репер. Понятно, что все опорные геодезические пункты получают во Франции высоту из геометрического нивелирования.

В Германии все тригонометрические пункты I класса определяются по высоте посредством ходов нивелирования II разряда от ближайших к ним марок I и II разрядов.

В СССР мы имеем до сих пор еще редкую высотную основу в виде линий нивелирования I и II разрядов. Поэтому от марок и реперов I и II разрядов приходится пролагать ходы нивелирования III разряда

довольно значительного размера, чтобы определить высоты пунктов триангуляции — не всех, конечно, а с такими интервалами между ними, в пределах каждого из которых можно было бы надеяться на определение пунктов, приходящихся между конечными в интервале и определенными нивелированием III разряда, достаточно точно посредством геодезического нивелирования соответственно поставленного. (Впрочем, в степной полосе СССР этот прием не дает успеха, и там приходится посредством ходов IV разряда, пролагаемых от ходов III разряда, давать несколько пунктов, определенных геометрическим нивелированием, на каждый планштат масштаба 1 : 50 000.)

В заключение параграфа уместно отметить, что точное нивелирование передко производится независимо от потребности в нем общетопографической съемки государства. Исследования и регулирования рек, гидротехнические работы по осушению и обводнению больших площадей, инженерные работы по использованию водной энергии, канализационные работы в городах и т. п. всегда сопровождаются прокладкой линий или сетей точного нивелирования, которое дает опору для детальных нивелировок или доставляет необходимые данные для основных инженерных расчетов и проектировок.

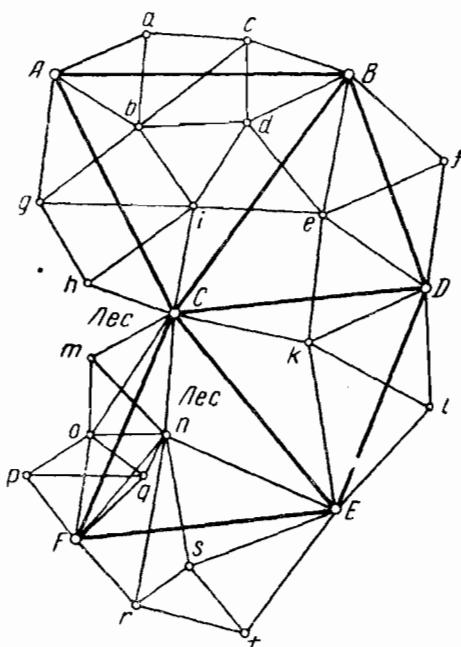
## § 7. Тригонометрические сети разных классов и схемы их построения

Тригонометрические сети, прокладываемые для целей определения вида и размеров Земли, обычно представляют собой ряды треугольников или геодезических четырехугольников, расположенные по меридианам и по параллелям; стороны треугольников при этом обычно имеют размеры от 25 до 40—50 км. Для возможности правильно использовать тригонометрическую сеть при значительных топографических работах государственного значения, расстояния между смежными пунктами сети должны быть около 8 км, а в ряде землемерных работ и съемок крупного масштаба — всего только 2—3 км. Другими словами, при практическом использовании триангуляции приходится на площади работ определять весьма значительное число тригонометрических точек, и здесь неминуемо возникает вопрос о том, каким образом построить обширную триангуляцию, чтобы с наименьшими затратами средств и времени прийти к достаточно точному определению координат значительного числа пунктов. При решении этого вопроса приходится иметь в виду (что будет доказано ниже), что ошибки длин сторон треугольников и ошибки в координатах точек сети быстро возрастают вместе с числом треугольников, отдаляющих рассматриваемую сторону или точку от базиса триангуляции или от исходного начального пункта триангуляции. Вследствие этого, если бы мы решили всю площадь будущей карты покрыть сразу мелкими, примыкающими друг к другу треугольниками, например, со сторонами в 8 км, то при большом числе таких треугольников нам пришлось бы считаться с быстрым накоплением погрешностей, и чтобы достичь на краях площади той точности определения тригонометрических пунктов, которое обусловливает вышеуказанное значение их в больших топографических работах, нам пришлось бы измерения на всех пунктах делать с большой тщательностью, с такой, какая непосредственно нужна собственно в работах научного значения; при обработке же собранного огромного материала нам пришлось бы применить строгие методы; кроме того, всякое новое расширение сети вызывало бы переработку запово всего материала —

и ранее собранного, и нового. Все это сделало бы применение метода триангуляции на больших площадях делом громоздким, дорого стоящим и медленно выполняемым. Вследствие этого приходится следовать по иному пути, чем только что очерченный, именно по пути, в котором соблюдается основное правило геодезии—перехода от общего к частному.

В чисто теоретическом рассмотрении этот путь представляется в таком виде (черт. 9). Разбив на всей территории топографических работ общего значения сеть больших треугольников  $ABC, BCD, CDE, CEF\dots$  со сторонами в 25—40 км и определив с высокой степенью точности положение вершин этих больших треугольников, будем теперь между пунктами  $A, B, C, D, E\dots$  вставлять ряды небольших треугольников со сторонами 8—12 км: например, сперва вставим ряд  $Aab, abc, \dots, deb, bef, efd$ ; затем ряд  $Abg, bgf, gih, iCh$  и т. д. При вставке этих небольших треугольников между точно определенными точками  $A, B, C, D\dots$  можно измерения их углов выполнять более простыми инструментами и способами и для определения каждого угла исполнять более короткие ряды наблюдений, нежели при измерении углов главных треугольников  $ABC, CBD\dots$ . Накопление погрешностей измерений здесь будет происходить лишь между каждыми двумя смежными точками сети из больших треугольников, а не на всей площасти триангуляции. Кроме того, небольшое накопление погрешностей в коротком ряде  $Aab, abc, bcd\dots bef, efd$  будет в известной степени устраиваться при уравнительных вычислениях, при вставке этого ряда между твердыми точками  $A, B$  и  $D$ . Самая обработка материалов измерения углов малых треугольников разобьется на части: можно будет каждый ряд из небольших треугольников или, лучше, группу рядов обрабатывать отдельно и независимо от прочей массы этих треугольников, умело используя связи между отдельно уравниваемыми группами рядов в порядке, например, применения метода постепенных приближений в этой части обработки.

Следует еще отметить, что точное определение пунктов из ряда треугольников требует развития цепей из треугольников, близких к равносторонним; между тем, к пунктам детальной сети предъявляются еще всегда требования топографических, заключающиеся в удобстве использования этих опорных пунктов при съемке. Два эти требования трудно удовлетворить одновременно. Но если разбить сперва главную основу в виде равносторонних треугольников  $ABC, BCD, CDE, \dots$ , то при выборе точек  $a, b, c, d\dots$  мы можем заботиться о соблюдении равносторонней формы треугольников  $Aab, abc, bcd$  в



Черт. 9

меньшей степени, проводя при этом выборе непременно соблюдение удобства будущего использования пунктов  $a, b, c, d$  при топографических работах.

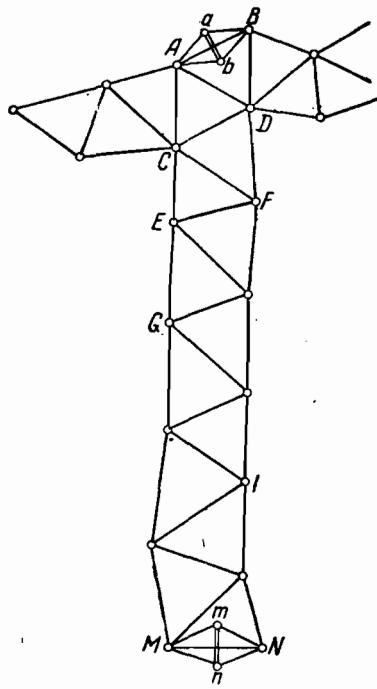
Треугольники  $ABC, BCD, DCE\dots$  назовем треугольниками I класса, треугольники  $Aab, acb, bcd, \dots, hic$  — треугольниками II класса; понятно, если бы нам понадобилось иметь тригонометрические пункты с расстояниями между ними в 4—6 км, то тогда пришлось бы обосновать на вершинах и сторонах треугольников II класса сети и ряды треугольников III класса.

Мы рассмотрели сейчас один из теоретически возможных методов развития детальных тригонометрических сетей. В действительности, разделение сетей на классы и постепенность перехода от класса к классу соблюдаются всегда, но в разных государствах, в разных задачах и в разных районах по-разному. Не приходится вовсе говорить о покрытии всей площади более или менее значительного государства сплошной сетью треугольников I класса. Сплошные первоклассные сети, покрывающие всю площадь государства, проложены лишь в Англии, Италии, в части Пруссии и еще в некоторых незначительных по площади государствах. Медленность работ и значительная их стоимость являются существенным препятствием к развитию сплошных сетей I класса на значительных территориях. Во всех значительных государствах триангуляцию I класса образуют, прокладывая по меридианам и по параллелям (иногда и по другим направлениям) ряды из треугольников I класса (или из геодезических четырехугольников или из других фигур) с расстояниями между смежными меридианными рядами и между смежными рядами по параллелям от 100 до 400 км.

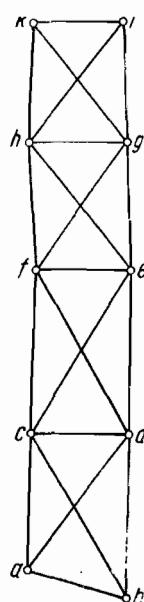
В СССР нормальное расстояние между смежными рядами по меридианам и между смежными рядами по параллелям принимается равным 200—250 км, а самые ряды образуются так называемыми простыми цепями треугольников со сторонами 25—40 км (черт. 10). Базисы в триангуляции I класса СССР измеряют в местах скрещения рядов по меридианам и по параллелям, т. е. примерно через 200—250 км друг от друга по каждому ряду. Длина этих базисов  $ab, mn$  около 8 км и для перехода от них к выходным сторонам  $AB$  и  $MN$  ряда служат базисные сети  $AaBb$  и  $MmNn$ . В точках  $A, B, M, N$  или в точках  $a, b, m, n$  исполняется точное определение астрономической широты, астрономической долготы и астрономического азимута, так что астрономические азимуты в концах звена получаются всегда двусторонними (по направлениям  $AB$  и  $BA$  или  $Ab$  и  $bA$  и т. д.). Звеном мы называем часть ряда I класса между смежными скрещениями его с рядами перпендикулярного направления. Кроме скрещений рядов, астрономические определения исполняются еще на промежуточных пунктах  $G$  и  $I$  звена, отстоящих друг от друга на 70 км (определяются в  $G$  и в  $I$  широта, долгота и азимут). Астрономические пункты, в которых определены и долгота и азимут, называются пунктами Лапласа. В Америке, в Канаде и еще в ряде других государств (Япония, Мексика) ряды I класса образуются из геодезических четырехугольников\*  $acdb, cfed, hgef \dots$  (черт. 11) со сторонами от 25 до 60 км; в США нормальное расстояние между рядами одноименного направления принято равным 170 км, но до последнего времени пролагались ряды в рас-

\* В каждом четырехугольнике надлежит измерять восемь углов.

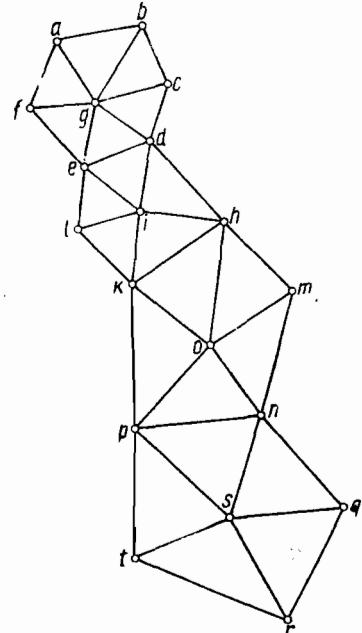
стояниях, в три-четыре раза больших, и только в последние годы выполняется сгущение рядов I класса с доведением расстояния между ними до 170 км. В Индии англичане ряды триангуляции I класса образовывали из центральных систем *abcgdef, edhikl...* (черт. 12),



Черт. 10



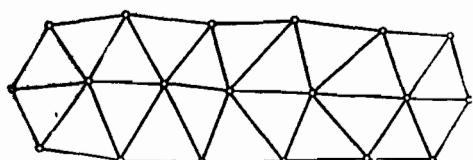
Черт. 11



Черт. 12

причем расстояния между такими смежными рядами из центральных систем по меридианам брали менее 200 км, нередко снижая его до 50 км, а расстояние между смежными рядами по параллелям — около 400 км. При вытянутой с севера на юг стране это несомненно давало преимущества при заполнении промежутков между рядами I класса второклассной триангуляцией. В последнее время в Германии и иногда в других странах стали прокладывать первоклассные ряды в виде

двойных цепей треугольников (черт. 13), причем расстояние между такими рядами одноименного направления берется всего 50—80 км, что весьма облегчает задачу последующего развития триангуляции II класса. Сравнение построения триангуляционных рядов I класса из простых цепей треугольников, из цепей из геодезических четырехугольников, из центральных систем, из двойных цепей треугольников можно сделать только после главы III. Сейчас же отметим, что при выборе того или другого вида построения рядов триангуляции I класса должно учитывать физико-географические особенности отдель-



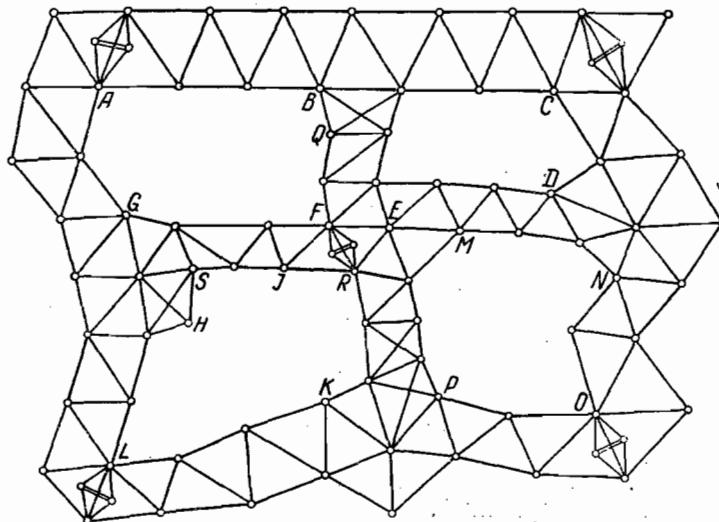
Черт. 13

ных районов, достижение определенной жесткости построения основы I класса и наибольший успех в проложении триангуляции II класса. Поэтому нередко выгодно применять комбинации всех этих основных типов построения рядов I класса.

Первоклассная триангуляция в каждом государстве рассматривается как предприятие общегосударственного и даже международного значения. Поэтому она составляется, следуя некоторому общему ее проекту для всей территории государства, и выполняется специальными геодезическими учреждениями по согласованному плану. Точность результатов первоклассной триангуляции должна отвечать научным запросам самой геодезии и других областей знания, но, как увидим в главе III, запросы производственные, т. е. запросы построения триангуляции II класса, предъявляют к результатам триангуляции I класса очень высокие требования точности — именно в силу того, что вместо вставки рядов или сетей II класса на площади одного треугольника I класса, как это было бы при покрытии всей территории сплошной сетью треугольников I класса, приходится заполнять триангуляцией II класса более или менее значительную площадь клетки или полигона, образованного двумя смежными рядами I класса по меридианам и двумя смежными рядами I класса по параллелям.

Треугольники II класса имеют стороны от 8 до 20 км; базисы обычно в сетях II класса не измеряются, а также обычно отсутствует в них и определение астрономических пунктов. Развитие сети II класса только тогда не представляет затруднений, когда смежные ряды триангуляции I класса достаточно сближены. Если этого нет, то значительное количество треугольников II класса, которые должны заполнить площадь между смежными рядами I класса, непременно приведет к значительному понижению точности результатов триангуляции II класса: допустимые невязки в системе треугольников II класса будут достигать таких величин, при которых будут покрываться и неудачно выполненные наблюдения в том или другом месте триангуляции II класса; контролирующее значение триангуляции I класса будет заметно ослаблено. Хотя результаты такой триангуляции и будут отвечать чисто топографическим целям, но дальнейшее ее использование для построения сетей III класса будет сопровождаться рядом недоразумений: противоречия, возникающие при определении точек III класса, можно будет относить с одинаковым правом как за счет недопустимых ошибок в наблюдениях для определения точек III класса, так и за счет погрешностей в самой основе II класса, лишенной в данном случае надлежащей жесткости. На эти соображения приходится обратить особое внимание, потому что они часто недооцениваются. Нужно считать, что надлежащее построение триангуляции II класса не является столь простым вопросом, как это считалось до 1917 г. в России и как нередко считается и сейчас в СССР. В СССР, как уже указывалось, в настоящее время проводится построение триангуляции I класса при расстояниях между смежными рядами по меридианам в 200—250 км и между смежными рядами по параллелям — также 200—250 км. Образующиеся из таких рядов полигоны I класса, подлежащие заполнению триангуляцией II класса, имеют свободную площадь (т. е. площадь между внутренними сторонами рядов) от 30 000 до 50 000 км<sup>2</sup>, на которой укладывается от 200 до 300 треугольников II класса. Очевидно, в этих условиях не посредственный переход от триангуляции I класса к триангуляции II класса надлежащим образом неосуществим. По предложению проф.

Ф. Н. Красовского с 1925 г. в СССР стали выделять из триангуляции II класса особые основные ряды II класса. Эти основные ряды рассекают нормальный полигон I класса на четыре части: один ряд идет посередине полигона по меридиану, второй—посередине полигона по параллели. В пересечении этих рядов (черт. 14) FR измеряется базис и выполняется астрономическое определение широты, долготы и азимута



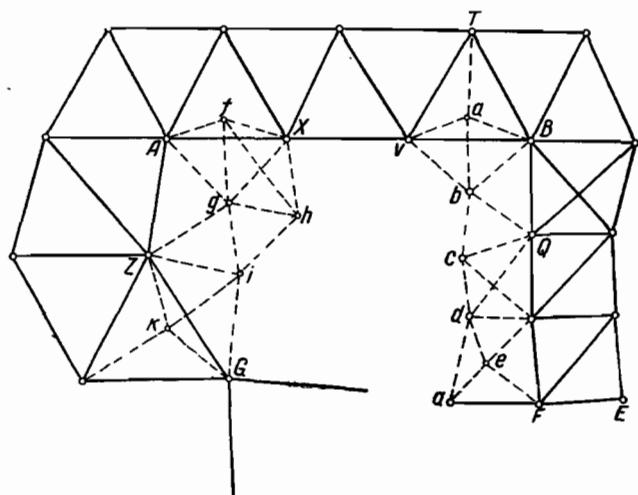
Черт. 14

на одном из пунктов базисной сети. Точность измерения углов в основных рядах II класса достаточно высокая—она характеризуется средней ошибкой  $\pm 1,0 - 1''$ , тогда как в триангуляции I класса для средней ошибки угла имеем  $\pm 0,7 - 0''$ . Стороны треугольников в основных рядах II класса несколько менее сторон триангуляции I класса, но более сторон в обычной триангуляции II класса (около 20–25 км). Надлежащее геодезически обдуманное выполненная вставка основных рядов II класса должна приводить к определению положения их пунктов почти с той же точностью, какая была бы достигнута при прокладке их, как рядов триангуляции I класса без измерения в скрещивании их базиса и определения здесь пункта Лапласа. Число треугольников II класса, подлежащих разбивке в пределах каждой части, на которые разделился полигон I класса основными рядами II класса, сведется теперь к 30–40. В пределах каждой такой части (черт. 14) ABFSG, EDC, HIKL, MNOP триангуляция II класса должна бы строиться вообще в виде сплошной сети треугольников II класса, т. е. в виде так называемой заполняющей сети II класса, с измерением углов со средней ошибкой  $\pm 2 - 2''$ . Забегая вперед, отметим, что измерение угла в триангуляции со средней ошибкой  $\pm 2,0 - 2''$  не в два, а, может быть, в десять и более раз легче, чем измерение угла со средней ошибкой  $\pm 1,0 - 1''$ . Нужно отметить, что даже при наличии основных рядов II класса совместное построение заполняющей сети II класса в пределах, например, клетки ABFSG (черт. 14) в количестве 40–50 треугольников представляется достаточно тяжелым делом и в полевом исполнении, и в последующей

обработке. Поэтому в практике имеются такие тенденции: 1) увеличивать размеры сторон треугольников II класса, доводя их, где позволяет местность, до 25—30 км; 2) вместо построения сети, покрывающей всю площадь, строить по выгодным направлениям ряды треугольников, оставляя между смежными рядами люки и оставляя эти смежные ряды геодезически между собой связанными не непосредственно, а лишь через посредство пунктов и сторон I класса и основных рядов II класса. Первый прием должен быть вообще осужден, потому что установленной программе и обстановке измерения углов в сети II класса с точностью  $\pm 2 - 2'',5$  соответствует, конечно, расстояние в 10—15 км.

Второй прием, приводя к значительной экономии в полевой работе, приводит к раздельной обработке проложенных рядов, например, на площади  $ABFSG$  (черт. 14), причем будет достигнута и значительная экономия в вычислительных работах; но при этом средние точки смежных рядов одного направления, удаленные друг от друга, например, на 30 км (ширина люка), могут оказаться смещенными относительно друг друга на 2 м (рекомендуется сделать расчет, пользуясь формулами главы III), что поведет к недоразумениям при последующем определении пунктов III класса.

Имея в виду сказанное, приходится рекомендовать при прокладке основных рядов II класса давать ряд добавочных точек, опорных для будущих заполняющих сетей II класса, выбирая эти точки на местах, которые, несомненно, будут использованы при построении этой заполняющей сети (преимущественно господствующие вершины).



Черт. 15

Чертеж 15 является иллюстрацией определения таких добавочных точек: пользуясь открытой и всхолмленной местностью к западу от основного ряда II класса  $BFE$  одновременно с его проложением, были определены пункты  $a, b, c, d, e$  — применяя те же методы и программы наблюдений и инструменты, что и при исполнении самого ряда  $BFE$ . В тот же полевой период выполнения основных рядов II класса в пр

делах полигона I класса, изображенного на черт. 14, были определены относительно пунктов I класса  $X, A, Z, G$  пункты  $f, g, h, i, k$ , применив методы, программы и инструменты наблюдений те же, что и при проложении основных рядов II класса. Конечно, треугольники  $TaY, TaB, Ya\bar{b}$   $abB, BbQ, bcQ, \dots, aeF$  следует уравнивать вместе с треугольниками основного ряда  $BFE$ , а сеть  $Af Xhi GkZ$  уравнивать между твердыми точками I класса  $A, X, G, Z$ , как самостоятельную сеть. Итак, возможные уширения основных рядов II класса и прокладка местами сетей вида  $Af Xhi GkZ$ , которые следует назвать основными сетями II класса, — вот что следует проводить при надлежащем построении общей триангуляции II класса. Конечно, проект возможных уширений основных рядов II класса и проект основных сетей II класса должны составляться вместе с проектом основных рядов II класса, принимая при этом во внимание и последующее развитие заполняющей сети II класса на площади всего полигона I класса  $ACOL$  (черт. 14).

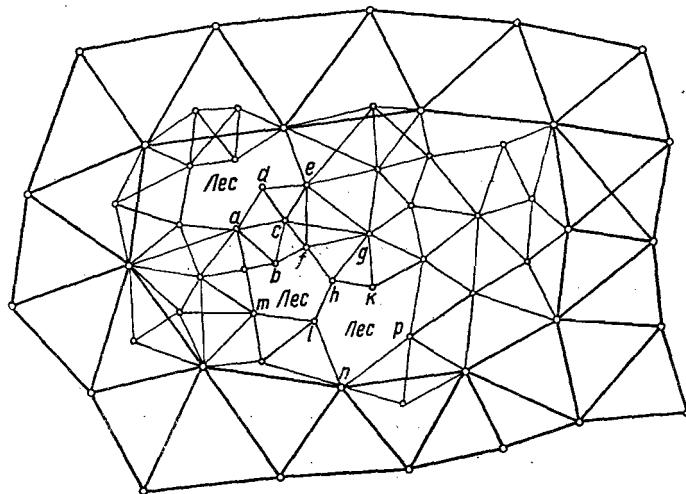
Надлежащее проведение указанных мер облегчит развитие заполняющей сети II класса и придаст ее результатам жесткость, необходимую для развития сетей III и IV классов. Приходится иметь в виду, что в недалеком будущем развитие государственных топографических работ в масштабе 1 : 10 000 придет на смену съемкам в масштабах 1 : 50 000 и 1 : 25 000, и, конечно, нельзя не предвидеть сейчас гораздо более повышенных требований, которые тогда возникнут к основе II класса.

Укажем еще на одно затруднение, которое неизбежно возникает при прокладке заполняющих сетей, если при отсутствии основных сетей II класса приходится при прокладке заполняющих сетей идти от пунктов I класса: визирование с пункта I класса на пункт I класса и измерение примычных к сторонам I класса углов будет производиться инструментом и в условиях, несоответствующих значительным расстояниям, вследствие чего соединение заполняющей сети с триангуляцией I класса будет заметно страдать в точности.

Отметим также, что в США принято при исполнении триангуляции I класса определять засечками не менее чем с трех пунктов I класса боковые пункты, которые играют впоследствии, при составлении сети II класса, конечно, такую же роль, как пункты  $f, h, g \dots$  (черт. 15).

Если местные условия, например, значительные лесные площади заставляют отказаться от покрытия всей площади  $ABFSG$ , или площади  $ECD, MNOP$  (черт. 14) сплошной сетью треугольников, то заполняющую сеть II класса строят в виде рядов, избирая для них выгоднейшие направления и начиная и кончая каждый ряд сторонами I класса или основных рядов II класса. Однако, в этом случае необходимо в соответствующих местах пролагать или короткие связующие цепи треугольников между такими рядами или связующие их ходы точной полигонометрии (траверсы), причем при обработке триангуляции II класса нужно будет обрабатывать вместе все проложенные в пределах клетки  $ABFSG$  ряды и все связи между ними. Черт. 16 поясняет только что сказанное, причем сеть  $adegfb$  является соединительной между сетями II класса в левой и в правой половинах участка, разделенных лесной площадью; этой же цели соединения служит траверс  $lh$ , который одновременно служит для обоснования, вместе с триангуляционными точками  $f, b, m, n, p$ , сети полигонометрических ходов, дающих обоснование съемкам в залесенной площади.

Обработка всех вместе треугольников заполняющей сети, показанной на черт. 16, и траверса  $hl$  между твердыми сторонами и пунктами I класса и основных рядов II класса, является в известной (значительной—хотя и не полной) степени гарантией того, что пункты заполняющей сети II класса определяются в общем удовлетворительно, без



Черт. 16

развития основных сетей II класса. Это общее уравнивание сети типа, изображенного на черт. 16, приходится делать, применяя способ уравнивания координат или способ уравнивания посредственных наблюдений (см. главу XIII), который позволяет при очень сложных условиях, возникающих в сетях рассматриваемого типа и при значительном числе условий, без особого напряжения решить задачу даже при 30 вновь определяемых пунктах.

При развитии сетей II класса следует помнить, что пункты этих сетей должны отвечать еще и топографическим требованиям и распределяться выгодно относительно границ плацдармов съемки масштабов 1 : 50 000 и 1 : 25 000; при составлении проекта сети последнее требование должно быть учтываямо.

Теперь обратимся к точкам III и IV классов. При съемке в масштабе 1 : 50 000 обычно точки III класса доводят до надлежащей густоты опорную сеть, представленную сетью II класса; в этом случае нет нужды развивать сеть III класса, а достаточно с точек II класса определить ряд дополнительных или уединенных точек\*, которые и представляют собой точки III и IV классов, причем нередко такими дополнительными точками служат постоянные местные предметы (вершины башен, мельницы, флагштоки зданий); иногда же приходится строить на пунктах III класса небольшие геодезические знаки—вехи III класса, пирамиды III класса. При съемке в масштабе 1 : 25 000 представляется возможным также обойтись определением дополнительных пунктов III класса. Поэтому потребность

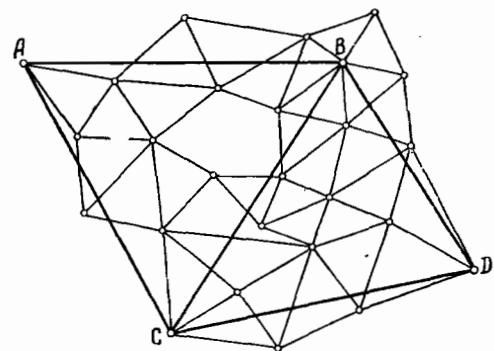
\* Без связи треугольниками самих этих точек.

развитии сетей III класса возникает при съемке значительных площадей в масштабах 1 : 10 000 и еще более крупных.

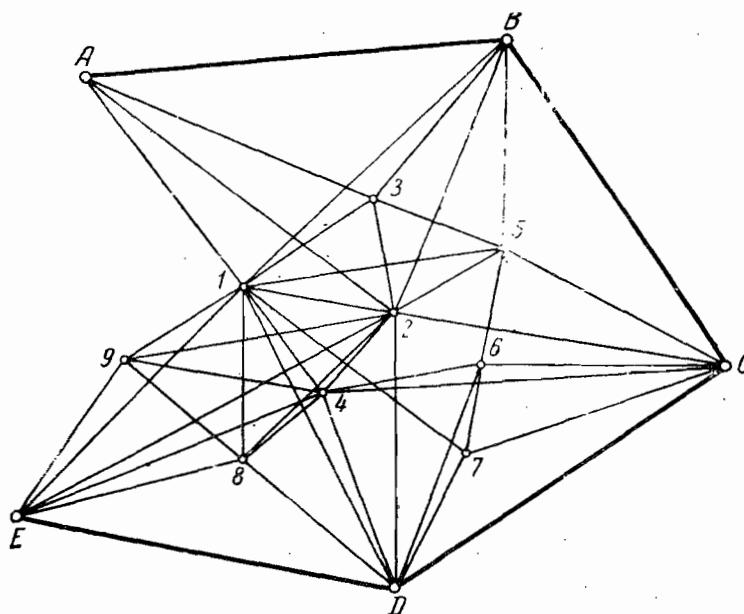
Предполагая, что стороны треугольников II класса имеют длину в среднем около 15 км, а пункты III класса должны располагаться примерно через 4—6 км друг от друга, приведем сперва два способа построения сети III класса, являющихся типичными с теоретической точки зрения.

Первый способ может быть назван способом вставки сетей треугольников III класса между пунктами II класса. Он представлен на черт. 17: сплошная сеть треугольников III класса хорошей формы покрывает всю площадь, опираясь на пункты II класса  $A, B, C, D$ , причем при ее построении визирований по сторонам  $BC, AB, BD, DC$  не производится (или может не производиться). Очевидно, при применении этого способа местность должна быть открытой.

Второй способ может быть назван способом вставки точек III класса между сторонами II класса. Сущность его представ-



Черт. 17



Черт. 18

лена на черт. 18: где-нибудь в середине участка, обслуживаемого пунктами II класса  $A, B, C, D, E$ , выбирают два пункта 1 и 2, видимые один с другого и пунктов II класса и до известной степени командующие над окружающей их местностью. Эти пункты 1 и 2 определяют совместно,

используя: визирования на пункт 1 с A, B, E и D; на пункт 2 с B, C, D, A, E; визирования с 1 на A, B, E, D и на 2; визирования с 2 на B, C, D, A, E и на 1.

Следующая точка 3 определяется визированиями на нее с A, B, 1 и 2, и визированиями с нее на те же пункты. При определении пункта 4 используются визирования на него с 1, 2, E, D и C и обратные визирования с него на те же пункты. Задача ставится так, чтобы каждый следующий пункт III класса определялся надежно посредством

использования пунктов II класса и ранее его построенных пунктов III класса, вовсе не стремясь к образованию треугольников хорошей формы между смежными пунктами III класса. Визирование на значительное число пунктов III класса с каждого пункта II класса характерно для этого способа в противоположность первому способу.

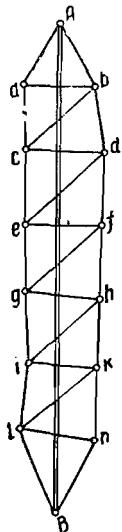
В практике геодезических работ СССР развитие сетей III класса на значительных (более или менее) площадях только что начинается, причем передко это выполняется в районах, где надлежащая густая сеть II класса еще не имеется. Поэтому в действительности у нас в практике схемы способа вставки сети III класса и способы вставки точек III класса не применяются, а каждый раз задача решается своеобразно и очень по-разному. Так, в практике недостающая триангуляция II класса заменяется основными рядами III класса, между которыми развивается сплошная сеть III класса. Все-таки следует иметь в виду приведенные теоретические схемы, имеющие обширное применение в практике Германии и Австрии.

Прокладка триангуляции III класса в виде ряда, а не сети иногда неизбежна, например, в случае речной долины в сильно залесенной местности. Наконец, в заключение параграфа укажем еще на один способ построения сетей низших разрядов — это способ вставки цепи треугольников между двумя пунктами высшего класса. Черт. 19 поясняет вставку цепи треугольников между точками высшего класса A и B; измерение углов  $iBA$  и  $aAB$  при этом не производится (или может не производиться). Уравнив углы в каждом из треугольников  $Aab$ ,  $abc$ ,  $cdb$ , ...,  $nBl$ , далее, приняв произвольный азимут  $a_0$  стороны  $Aa$  и произвольную ее длину  $s_0$ , мы вычисляем координаты точек  $a$ ,  $b$ , ...,  $l$ ,  $n$  и  $B$ . Далее по полученным таким образом координатам точки  $B$  и заданным координатам  $A$  вычисляем длину линии  $AB$  и ее азимут. Допустим, мы получили для длины  $AB$  значение  $S_0$ , тогда как действительное ее значение есть  $S$ , а для азимута диагонали  $AB$  пусть мы получим значение  $A_0$  вместо действительного значения его  $A$ . Очевидно, истинное значение  $s$  стороны  $Aa$  найдется из пропорции

$$\frac{s}{s_0} = \frac{S}{S_0},$$

а истинное значение  $\alpha$  азимута стороны  $Aa$  будет равно

$$\alpha = \alpha_0 + A - A_0.$$



Черт. 19

В некоторых случаях указанный только-что способ построения основы низшего класса может найти применение, почему он здесь и приведен.

Соображения, приведенные в настоящем параграфе, являются основными при составлении проектов триангуляции; они должны быть сопоставлены с материалом, приводимым в следующих главах, и хорошо после этого усвоены.

---

## Г л а в а II

### **ДЕЙСТВИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ТРИАНГУЛЯЦИИ**

#### **§ 8. Вес функции уравненных элементов при условных наблюдениях**

Этот вопрос целиком относится к способу наименьших квадратов, но мы приводим его здесь ввиду удобства пользования в последующем соответствующими формулами. Пусть имеем следующую систему условных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + c_2y + a_3z + \dots + w_1 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + \dots + w_2 = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z + \dots + w_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad (8)$$

в которой  $x, y, z, \dots$  — поправки наблюденных величин,  $w_1, w_2, w_3, \dots$  — свободные члены.

Этой системе соответствует следующая система нормальных уравнений коррелат:

$$\left. \begin{array}{l} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_3 + \dots + w_1 = 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_3 + \dots + w_2 = 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] k_3 + \dots + w_3 = 0 \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Число уравнений (8), равное числу уравнений (9), пусть будет  $s$ . Величины  $p$  суть веса наблюденных величин. Допустим далее, что имеем некоторую функцию:

$$F = \varphi(X, Y, Z, \dots),$$

причем

$$\begin{aligned} X &= l_1 + x, \\ Y &= l_2 + y, \\ Z &= l_3 + z, \end{aligned}$$

т. е.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  суть уравненные значения наблюдаемых величин. Конечно, мы напишем

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z + \dots + \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots),$$

пренебрегая малыми величинами порядка  $x^2, y^2, xy \dots$ . Обозначая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 \dots, \quad (10)$$

напишем еще

$$F = f_1 \cdot x + f_2 \cdot y + f_3 \cdot z + \dots + \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots). \quad (11)$$

Для определения веса  $P$  функции  $F$  мы должны, конечно, выразить  $x, y, z \dots$  через наблюдаемые независимо друг от друга величины. Для этого прежде всего напишем выражения  $x, y, z \dots$  через коррелаты:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + \dots}{p_x}; \\y &= \frac{a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + \dots}{p_y}; \\z &= \frac{a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 + \dots}{p_z},\end{aligned}$$

и подставим их в (11). Тогда получим

$$F = \left\{ \left\lfloor \frac{af}{p} \right\rfloor k_1 + \left\lfloor \frac{bf}{p} \right\rfloor k_2 + \left\lfloor \frac{cf}{p} \right\rfloor k_3 + \dots \right\} + \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots). \quad (12)$$

Очевидно, вопрос выражения  $F$  через наблюденные непосредственно величины свелся к исключению коррелат  $k_1, k_2, k_3 \dots$  из (12), пользуясь уравнениями (9). Для этого умножим сперва уравнения (9) каждое соответственно на неопределенные множители  $r_1, r_2, r_3 \dots r_s$  и сложим их с (12). В результате получим:

Неопределенные множители  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_s$ , называемые также переходными коэффициентами, определяем из условия, чтобы в уравнении (13) коэффициенты при  $k_1, k_2, \dots, k_s$  обратились все в нули. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{af}{p} \right] &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{bf}{p} \right] &= 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{bc}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{cf}{p} \right] &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

$$F = r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 + \dots + r_s w_s + \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots). \quad (15)$$

Из уравнений (14) величины  $r$ , конечно, определяются только в функции коэффициентов  $a, b, c, \dots, f$ ; если эти величины  $r$  будут вычислены из уравнений (14), то для определения веса  $P_f$  функции  $F$  напишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l_1} &= a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 + \dots + f_1 \\ \frac{\partial F}{\partial l_2} &= a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 + \dots + f_2 \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial F}{\partial l_i} &= a_i r_1 + b_i r_2 + c_i r_3 + \dots + f_i \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

потому что

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial l_1} &= a_1; \quad \frac{\partial w_1}{\partial l_2} = a_2; \dots \quad \frac{\partial w_1}{\partial l_i} = a_i; \\ \frac{\partial w_2}{\partial l_1} &= b_1; \quad \frac{\partial w_2}{\partial l_2} = b_2; \dots \quad \frac{\partial w_2}{\partial l_i} = b_i; \\ \frac{\partial w_3}{\partial l_1} &= c_1; \quad \frac{\partial w_3}{\partial l_2} = c_2; \dots \quad \frac{\partial w_3}{\partial l_i} = c_i; \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial l_1} &= f_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} = f_2; \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_i} = f_i. \end{aligned}$$

Имея в виду (16), мы напишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= \frac{(a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 + \dots + f_1)^2}{p_1} + \frac{(a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 + \dots + f_2)^2}{p_2} + \\ &+ \dots + \frac{(a_n r_1 + b_n r_2 + c_n r_3 + \dots + f_n)^2}{p_n} \end{aligned} \quad (17)$$

( $n$  — число неизвестных, входящих в  $F$  или в  $\varphi$ ). Но числовое решение уравнений (14) может вовсе не выполняться и вместо изложенного пути применяют иной, а именно следующий. Введем обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 + \dots + f_1 \\ \lambda_2 = a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 + \dots + f_2 \\ \lambda_3 = a_3 r_1 + b_3 r_2 + c_3 r_3 + \dots + f_3 \\ \dots \end{array} \right\} \quad (18)$$

Тогда согласно (17)

$$\frac{1}{P_f} = \left[ \frac{\lambda \lambda}{p} \right].$$

Если будем рассматривать систему уравнений (18) как систему уравнений погрешностей, в которой роль наблюдаемых величин играют величины  $f$ , то

$$\left[ \frac{\lambda \lambda}{p} \right] = \frac{1}{P_f} = \left[ \frac{ff}{p} \cdot s \right],$$

или

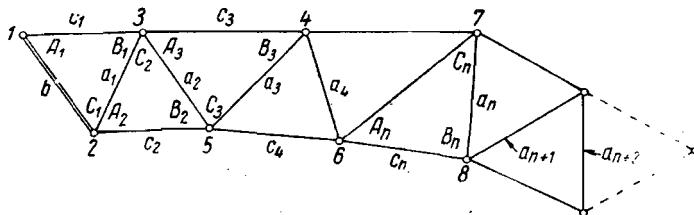
$$\frac{1}{P_f} = \left[ \frac{ff}{p} \right] - \left[ \frac{\frac{af}{p}^2}{\frac{aa}{p}} \right] - \left[ \frac{\frac{bf}{p} \cdot 1}{\frac{bb}{p} \cdot 1} \right] - \left[ \frac{\frac{cf}{p} \cdot 2}{\frac{cc}{p} \cdot 2} \right] - \dots \quad (19)$$

Очевидно, для получения  $\frac{1}{P_f}$  должно при решении уравнений (9) в Гауссовой схеме приписать еще один столбец (и одну строку) с коэффициентами  $\left[ \frac{af}{p} \right]$ ,  $\left[ \frac{bf}{p} \right]$ ,  $\left[ \frac{cf}{p} \right]$ , ...,  $\left[ \frac{ff}{p} \right]$ , и с числами этого столбца поступать при вычислении Гауссовой схемы совершенно так же, как и с числами всех остальных столбцов системы (9), решая как будто бы не  $s$ , а  $s+1$  уравнений. Коэффициент при неизвестном, соответствующем этому добавочному столбцу, полученный по исключении всех  $s$  неизвестных  $k$ , и будет равен  $\frac{1}{P_f}$ .

### § 9. Средняя квадратическая ошибка связующей и промежуточной сторон в простой цепи треугольников

Пусть на черт. 20 изображена простая цепь треугольников, в которой сторона  $b$  является выходной и в каждом треугольнике которой измерены все три угла. Стороны  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , которые служат для построения следующих треугольников цепи, называются связующими; углы  $A$  и  $B$ , им противолежащие, называются связующими углами цепи; стороны  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  называются промежуточными и противолежащие им углы  $C$  — промежуточными углами. Допустим, что мы измерили все углы  $A_1, B_1, C_1, A_k, B_k, C_k$  независимо один от другого. Этого в большинстве случаев нет в действительности, так как обычно мы непосредственно наблюдаем не углы, а направления; так, например, на пункте 3 мы получаем направления с него на пункты 1, 2, 5, 4 и, вычитая эти направления друг

из друга, получаем уже, как разности двух соответствующих направлений, углы  $B_1, C_2$  и  $A_3$ . При этом под направлением следует понимать некоторый окончательно выведенный отсчет по горизонтальному кругу угломерного инструмента, ориентированному произвольно, по тождественно однаково для всех направлений, определяемых с данного пункта. Конечно, каждый из углов  $B_1, C_2$  и  $A_3$  связан со смежными углами одним общим направлением, и поэтому наблюденные их значения  $B^0_1, C^0_2, A^0_3$  не будут независимыми друг от друга. Но понятно, возможен и такой порядок измерений, при котором мы будем измерять углы  $B_1, C_2$  и  $A_3$  совершенно отдельно и независимо друг от друга.



Черт. 20

В настоящем параграфе мы допустим, что наблюденные значения углов

$$A_1^0, B_1^0, C_1^0, A_2^0, C_2^0, B_2^0, \dots, A_n^0, B_n^0, C_n^0$$

все независимы друг от друга.

Далее мы предполагаем, что веса всех этих наблюденных углов равны между собой и равны просто единице. Тогда, очевидно, уравнивание нашей цепи сводится к исправлению наблюденных углов на третью невязки в соответствующем треугольнике. Назовем уравненные таким образом значения углов через

$$A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2, \dots, A_n, B_n, C_n.$$

Длина  $a_n$  стороны  $n$ -го треугольника получится, конечно, так

$$a_n = \frac{b \sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 \cdots \sin A_n}{\sin B_1 \cdot \sin B_2 \cdot \sin B_3 \cdots \sin B_n} = s = F - \dots \quad (a)$$

Будем пока определять вес стороны  $a_n$  только в зависимости от ошибок углов треугольников цепи.

Условные уравнения сети в данном случае напишутся так:

$$\left. \begin{array}{l} (a_1) + (b_1) + (c_1) + w_1 = 0 \\ (a_2) + (b_2) + (c_2) + w_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ (a_n) + (b_n) + (c_n) + w_n = 0 \end{array} \right\} \quad (b)$$

При этом под (a), (b) и (c) понимаются поправки наблюденных углов, а под  $w$  — невязка суммы углов в треугольнике. Соответствую-

щая система нормальных уравнений коррелат будет в данном случае такова:

$$\left. \begin{array}{l} 3k_1 + w_1 = 0 \\ 3k_2 + w_2 = 0 \\ 3k_3 + w_3 = 0 \\ \vdots \\ 3k_n + w_n = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

При этом все неквадратичные коэффициенты в Гауссовой схеме, т. е. коэффициенты  $[ab]$ ,  $[ac]$ ,  $[ad]$ ,  $[bc]$ ,  $[bd]$ ,  $[ef]$ , ... равны нулю, каждый же из квадратических коэффициентов равен просто трем, т. е.

$$[aa] = [bb] = [cc] = \dots = 3.$$

Применяя выводы § 8, мы легко находим

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial A_1} = s \operatorname{ctg} A_1; \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial B_1} = -s \operatorname{ctg} B_1; \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial C_1} = 0;$$

$$f_{3n-2} = \frac{\partial F}{\partial A_n} = s \operatorname{ctg} A_n; \quad f_{3n-1} = \frac{\partial F}{\partial B_n} = -s \operatorname{ctg} B_n; \quad f_{3n} = \frac{\partial F}{\partial C_n} = 0;$$

Таким образом, в (19)

$$\left[ \frac{ff}{p} \right] = s^2 \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k),$$

$$\left[ \frac{af}{p} \right]^2 = (s \operatorname{ctg} A_1 - s \operatorname{ctg} B_1)^2 = s^2 (\operatorname{ctg} A_1 - \operatorname{ctg} B_1)^2,$$

$$\left[ \frac{aa}{p} \right] = 3.$$

Далее, так как в (9) все неквадратичные коэффициенты в данном случае — нули, то именно для этого случая в (19)

$$\begin{aligned} [bf \cdot 1] &= [bf]; \quad [bb \cdot 1] = [bb] \\ [cf \cdot 2] &= [cf]; \quad [cc \cdot 2] = [cc] \\ [df \cdot 3] &= [df]; \quad [dd \cdot 3] = [dd] \end{aligned}$$

Это ясно из равенств (20), так как в данном случае при решении уравнений (9) в Гауссовой схеме все строки ее, кроме строк самих нормальных уравнений, будут заполнены нулями, и никаких исключений для получения элиминационных уравнений делать не нужно. Следовательно, ясно, что

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1] &= 3; \quad [cc \cdot 2] = 3; \quad [dd \cdot 3] = 3 \\ [bf \cdot 1] &= [bf] = s \operatorname{ctg} A_2 - s \operatorname{ctg} B_2 \\ [cf \cdot 2] &= [cf] = s \operatorname{ctg} A_3 - s \operatorname{ctg} B_3 \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (19) получится теперь в таком виде

$$\frac{1}{P_{a_n}} = s^2 \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k) - \frac{1}{3} s^2 \sum_1^n (\operatorname{ctg} A_k - \operatorname{ctg} B_k)^2,$$

или

$$\frac{1}{P_{a_n}} = \frac{2}{3} s^2 \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k). \quad (21)$$

Теперь, очевидно, средняя ошибка в стороне  $a_n$ , обусловленная как действием ошибок углов, так и действием ошибки выходной стороны, представляется в таком виде

$$m_{a_n}^2 = m_b^2 \frac{s^2}{b^2} + \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k),$$

или

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \frac{m''^2}{\rho''^2} \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k)}. \quad (22)$$

В (22):  $\frac{m_b}{b}$  — средняя относительная ошибка выходной стороны,  $m''$  — средняя ошибка измеренного угла в секундах.

Треугольники в триангуляции близки к равносторонним. Если мы примем, что в нашей цепи треугольники приблизительно одинаковы по форме, и пренебрежем влиянием  $\frac{m_b}{b}$ , то напишем

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{m''}{\rho''} \sqrt{n} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}}. \quad (23)$$

Формула (23) дает основание заключить, что в триангуляции точность определения сторон убывает пропорционально корню квадратному из числа треугольников, отделяющих рассматриваемую сторону от выходной.

В триангуляции I класса  $\frac{m_b}{b} < 1 : 300\,000$ , а  $m'' = \pm 0'',7$ ; при равносторонней форме треугольников

$$\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B = 1.$$

Поэтому в триангуляции I класса мы имеем

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot n}. \quad (24)$$

При  $n = 16$ , т. е. при длине ряда в 240 км, получим

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = 1 : 86\,200,$$

а если бы мы пренебрегли влиянием  $m_b$ , то  $\frac{m_{a_n}}{a_n}$  было бы равно  
 $1 : 91\,000$ .

Если ряд триангуляции II класса из 12 треугольников, т. е. длиной 80—90 км, начат от стороны основного ряда II класса, определенной с точностью  $\frac{m_b}{b} = 1 : 50\,000$ , то при  $m'' = \pm 2'',5$  получим

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\left(\frac{1}{50\,000}\right)^2 + \frac{4,16 \times 12}{(206\,000)^2}} = 1 : 25\,200.$$

Уже отсюда видно, что в заполняющей триангуляции II класса не следует удаляться более 60 км от сторон I класса или от сторон основных рядов II класса, чтобы иметь возможность на сторонах заполняющей сети строить триангуляцию III класса. Выражение

$$\frac{2}{3} (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k)$$

называется ошибкой геометрической связи треугольника.

Заметим, что приближенно

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta \lg s}{\mu}$$

( $\mu$  — модуль неперовых логарифмов). Далее назовем через  $\delta_A$  приращение логарифма синуса угла  $A$  при перемене этого угла на одну секунду, тогда

$$\frac{\operatorname{ctg} A}{\rho''} = \frac{\delta_A}{\mu}.$$

Отсюда:

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \frac{m_{\lg a_n}}{\mu} = \sqrt{\frac{m_{\lg b}^2}{b^2} + \frac{2m''^2}{3\mu^2} \sum_1^n (\delta_{A_k}^2 + \delta_{B_k}^2 + \delta_{A_k} \cdot \delta_{B_k})},$$

понимая под  $m_{\lg a_n}$  среднюю ошибку в логарифме  $a_n$ . Или окончательно

$$m_{\lg a_n} = \sqrt{m_{\lg b}^2 + \frac{2}{3} m''^2 \sum_1^n (\delta_{A_k}^2 + \delta_{B_k}^2 + \delta_{A_k} \cdot \delta_{B_k})}. \quad (25)$$

Конечно, формула (25) удобна для расчетов и поэтому ею и пользуются, выбирая величины  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  из логарифмических таблиц или из особой американской таблички, приводимой ниже.

Как уже отмечено в начале этого параграфа, приведенные выводы основываются на не имеющем нередко в действительности места предположении о независимости друг от друга наблюденных углов  $A_k^0$ ,  $B_k^0$ ,  $C_k^0$ . При измерении на пунктах триангуляции направлений мы должны в условные уравнения (b) и в выражение (a) для стороны  $a_n$  подставить вместо углов или их поправок разности соответствующих направлений или их поправок. Тогда неквадратичные коэффициенты  $[ab]$ ,  $[ac]$ ,  $[bd] \dots$

не были бы нулями, и получение слагаемых в формуле (19) для веса  $P_f$  окажется более сложным. В § 10 мы приводим вывод ошибки связующей стороны в цепи, в которой уравниваются не углы, а направления, однако, для частного случая — именно, когда имеем

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \dots = A_h = B_h,$$

т. е. для цепи из равнобедренных треугольников. В настоящем же параграфе ограничимся приведением из диссертационной работы А. А. Изотова «Оценка точности триангуляции». Формулы для ошибки  $a_n$  в цепи равносторонних треугольников, в которой были измерены направления и уравнивались также направления. Именно по А. А. Изотову,

$$\frac{m^2 a_n}{a_n^2} = \frac{m^2 b}{b^2} + \frac{1}{3} \left( 2n - \frac{1}{5} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \quad (26)$$

для случая, однако, если сторона  $a_n$  является конечной в цепи. Для случая, если  $a_n$  является конечной в цепи, а мы отыскиваем ошибку стороны  $a_k$ , отделенной  $k$  треугольниками от исходной стороны  $b$  цепи, будем иметь вместо формулы (26) такую формулу

$$\frac{m^2 a_k}{a_k^2} = \frac{m^2 b}{b^2} + \frac{1}{3} \left( 2k - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \frac{N_k}{N_{n+1}} N_{n-k} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2}, \quad (27)$$

причем числа  $N$  принадлежат к так называемому ряду Фибоначчи, в котором

|            |                  |                        |
|------------|------------------|------------------------|
| $N_0 = 0$  | $N_6 = 144$      | $N_{12} = 46\ 363$     |
| $N_1 = 1$  | $N_7 = 377$      | $N_{13} = 121\ 393$    |
| $N_2 = 3$  | $N_8 = 987$      | $N_{14} = 317\ 811$    |
| $N_3 = 8$  | $N_9 = 2584$     | $N_{15} = 832\ 040$    |
| $N_4 = 21$ | $N_{10} = 6765$  | $N_{16} = 2\ 178\ 309$ |
| $N_5 = 55$ | $N_{11} = 17711$ |                        |

При  $k \geq 3$  член  $\frac{3}{4} \frac{N_k}{N_{n+1}} N_{n-k}$  менее 0,12.

Результаты, получаемые по формулам (24) и (26), весьма между собой близки для случая равносторонних треугольников. Так, при  $n = 16$  и  $m = \pm 0''\cdot7$ , мы по (26) получим  $\frac{m a_n}{a_n} = 1 : 86\ 500$ , что совершенно неощутимо отличается от прежнего расчета по (24). Мы здесь не будем рассматривать случая, часто встречающегося в триангуляциях II класса, когда, имея измеренные направления, цепь уравнивают, однако, по углам. В этом случае получаем для  $\frac{m a_n}{a_n}$  результат, лежащий между близкими между собою результатами, даваемыми формулами (24) и (26). Поэтому в дальнейшем можем пользоваться формулой (25) во всех простых цепях, составленных из близких к равносторонним треугольников и обрабатываемых по углам или по направлениям. Обычно в основных рядах триангуляции II класса член  $m^2 \lg b$  отбрасывают и получают:

$$m_{\lg a_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} m'' \sqrt{\sum_1^n (\delta^2_{A_k} + \delta^2_{B_k} + \delta_{A_k} \cdot \delta_{B_k})}. \quad (28)$$

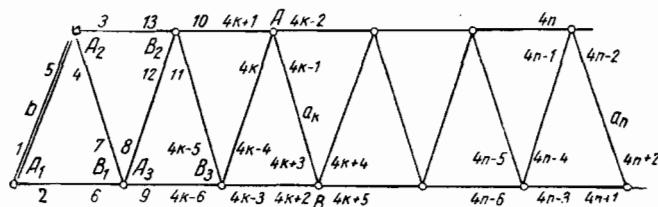
Если бы мы оценивали среднюю ошибку в промежуточной стороне  $c_n$  (черт. 20), то в формуле (а) все осталось бы без изменения, но только  $\sin A_n$  заменился бы  $\sin C_n$ . Поэтому нетрудно сообразить, что

$$\frac{m_{c_n}}{c_n} = \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \frac{m''^2}{\rho''^2} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} B_k \cdot \operatorname{ctg} A_k) + \right.} \\ \left. + \operatorname{ctg}^2 C_n + \operatorname{ctg}^2 B_n + \operatorname{ctg} C_n \operatorname{ctg} B_n \right]. \quad (29)$$

Для значений величин  $R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \cdot \delta_B$  имеется таблица, в которой эти величины даны в единицах шестого знака логарифма (табл. 1). Этой таблицей значений  $R$  и пользуются при расчетах по формуле (28) значений  $m_{\lg a_n}$ ; такие расчеты приходится делать уже при рекогносцировке триангуляции, чтобы при выборе пунктов триангуляции незамедлительно убеждаться в достаточном достоинстве ее фигур или в достаточном геометрическом весе цепи.

### § 10. Средняя ошибка произвольной связующей стороны простой цепи равнобедренных треугольников, уравненной за условия фигур по направлениям

Ряд наш, состоящий из  $n$  треугольников, изображен на черт. 21; его выходная сторона равна  $b$ ; нужно определить среднюю ошибку



Черт. 21

связующей стороны  $AB$  треугольника с номером  $k$ , причем  $k < n$ . Мы имеем условия фигур в цепи в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} (2) - (1) + (5) - (4) + (7) - (6) + w_1 &= 0 \\ (4) - (3) + (8) - (7) + (13) - (12) + w_2 &= 0 \\ (9) - (8) + (12) - (11) + (15) - (14) + w_3 &= 0 \\ (4k-3) - (4k-4) + (4k) - (4k-1) + (4k+3) - \\ &\quad - (4k+2) + w_k &= 0 \\ (4k-1) - (4k-2) + (4k+4) - (4k+3) + (4k+9) - \\ &\quad - (4k+8) + w_{k+1} &= 0 \\ \dots & \\ (4n-3) - (4n-4) + (4n-1) - (4n-2) + (4n+2) - \\ &\quad - (4n+1) + w_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

### Таблиц

Значения величин  $R = \delta_{Ak}^2 + \delta_{Bk}^2 + \delta_{Ak} \cdot \delta_{Bk}$

(в единицах шестого знака логарифма)

Далее

$$a_k = AB = b \cdot \frac{\sin [2-1]}{\sin [7-6]} \cdot \frac{\sin [4-3]}{\sin [13-12]} \cdot \frac{\sin [9-8]}{\sin [15-14]} \cdots \\ \cdots \cdot \frac{\sin [[4k-3]-[4k-4]]}{\sin [[4k+3]-[4k+2]]},$$

причем под  $[2-1]$ ,  $[4-3]$  и т. д. понимается разность уравненных направлений.

Нормальные уравнения напишутся так:

$$\begin{aligned} 6k_1 - 2k_2 + w_1 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 - 2k_3 + w_2 &= 0 \\ -2k_2 + 6k_3 - 2k_4 + w_3 &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ -2k_{k-2} + 6k_{k-1} - 2k_k + w_{k-1} &= 0 \\ -2k_{k-1} + 6k_k - 2k_{k+1} + w_k &= 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ -2k_{n-1} + 6k_n + w_n &= 0 \end{aligned}$$

Другими словами:

$$\begin{aligned} [aa] &= 6; \quad [ab] = -2; \quad [ac] = [ad] = \cdots = [ak] = [an] = 0 \\ [bb] &= 6; \quad [bc] = -2; \quad [bd] = [be] = [bg] = \cdots = [bn] = 0 \\ [cc] &= 6; \quad [cd] = -2; \quad [ce] = [cg] = \cdots = [cn] = 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ [kk] &= 6; \quad [kl] = -2; \quad [km] = \cdots = [kn] = 0 \\ \cdots \cdots \cdots & \\ [nn] &= 6 \end{aligned}$$

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab] \cdot [ab]}{[aa]} = 6 - \frac{4}{6} = \frac{16}{3} \cdots \quad (31)$$

$$[cc \cdot 2] = [cc] - \frac{[ac] \cdot [ac]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1] \cdot [bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

$$[cc \cdot 2] = 6 - \left\{ [bc] - \frac{[ac] \cdot [ab]}{[aa]} \right\}^2$$

$$[cc \cdot 2] = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6}} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 [dd \cdot 3] &= [dd \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \\
 [dd \cdot 3] &= [dd \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \left\{ [cd \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1][bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \right\} \\
 [dd \cdot 3] &= 6 - \frac{\{-2\}^2}{[cc \cdot 2]} = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6}}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

Уравнениями (31), (32), (33) вполне выявился закон образования коэффициентов  $[bb \cdot 1]$ ,  $[cc \cdot 2]$ ,  $[dd \cdot 3]$ ,  $[ee \cdot 4]$ , ..., входящих в выражение  $\frac{1}{P_j}$  по формуле (19). При данном виде нормальных уравнений эти коэффициенты суть последовательные подходящие непрерывной дроби

$$\begin{array}{c}
 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \dots}}}
 \end{array}$$

Предел этой дроби равен 5,236044. Имеем

$$\begin{aligned}
 [aa] &= 6; \quad [bb \cdot 1] = \frac{16}{3}; \quad [cc \cdot 2] = \frac{42}{8}; \quad [dd \cdot 3] = \frac{110}{21}; \\
 [ee \cdot 4] &= 5,237.
 \end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты вида  $[tt \cdot m]$  можно принять равными  $[ee \cdot 4]$ . Величины  $f$  определяются так

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -a_k \operatorname{ctg}[2-1]; \quad f_2 = a_k \operatorname{ctg}[2-1]; \quad f_3 = -a_k \operatorname{ctg}[4-3]; \\
 f_4 &= a_k \operatorname{ctg}[4-3]; \quad f_5 = 0; \quad f_6 = a_k \operatorname{ctg}[7-6]; \\
 f_7 &= -a_k \operatorname{ctg}[7-6].
 \end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты до  $f_{4k-2}$  будут равны

$$\begin{aligned}
 &\pm a_k \operatorname{ctg}[R_{s+1}-R_s], \text{ но } f_{4k-2}=0; \quad f_{4k-1}=0 \text{ (черт. 21)}; \\
 f_{4k} &= a_k \operatorname{ctg}[(4k+1)-4k]; \quad f_{4k+1}=-a_k \operatorname{ctg}[(4k+1)-4k]; \\
 f_{4k+2} &= a_k \operatorname{ctg}[(4k+3)-(4k+2)]; \\
 f_{4k+3} &= -a_k \operatorname{ctg}[(4k+3)-(4k+2)].
 \end{aligned}$$

Все последующие коэффициенты  $f$  с индексами более старшими чем  $4k+3$ , будут равны нулю. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 [ff] &= a_k^2 [2 \operatorname{ctg}^2 A_1 + 2 \operatorname{ctg}^2 B_1 + 2 \operatorname{ctg}^2 A_2 + \\
 &\quad + 2 \operatorname{ctg}^2 B_2 + \dots + 2 \operatorname{ctg}^2 A_k + 2 \operatorname{ctg}^2 B_k] = \\
 &= 2a_k^2 \sum_1^k (\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i).
 \end{aligned}$$

Перейдем теперь к частному случаю равнобедренных треугольников вида

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \dots = A_k = B_k.$$

Обозначим  $\operatorname{ctg} A_i = \operatorname{ctg} B_i$  через  $c$ , а  $a_k = b_k = s$ . Тогда

$$[af] = -s \cdot c; \quad [bf] = 0; \quad [cf] = 0;$$

$$[df] = 0; \quad [kf] = s \cdot c; \quad [lf] = s \cdot c;$$

$$[mf] = 0; \quad [nf] = 0;$$

$$[bf \cdot 1] = [bf] - \frac{[ab][af]}{[aa]} = -\frac{s}{3} \cdot c;$$

$$[cf \cdot 2] = [cf \cdot 1] - \frac{[bf \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = [cf] - \frac{[bf \cdot 1][bc]}{[bb \cdot 1]} = -\frac{s \cdot c}{8};$$

$$\begin{aligned} [df \cdot 3] &= [df \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2][cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = [df] - \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \left\{ [cd \cdot 1] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[bc \cdot 1][bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \right\}; \end{aligned}$$

$$[df \cdot 3] = -\frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cd \cdot 1] = -\frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cd] = \frac{2[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{s \cdot c}{21};$$

$$[ef \cdot 4] = \frac{2[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} = -\frac{s \cdot c}{55};$$

$$[hf \cdot 5] = \frac{2[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]} = -\frac{s \cdot c}{2,618 \times 55};$$

$$[kf \cdot (k-1)] = s \cdot c - \frac{s \cdot c}{8 \cdot (2,618)^{k-3}};$$

$$[ef \cdot k] = s \cdot c - \frac{s \cdot c}{8 \cdot (2,618)^{k-2}}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= 4s^2 k \cdot c^2 - s^2 c^2 \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{336} + \frac{1}{2100} + \dots \right] - \frac{s^2 \cdot c^2}{5,236} - \\ &\quad - \frac{s^2 c^2}{5,236} + \frac{1}{4} \frac{s^2 c^2}{(2,618)^{k-2}}. \end{aligned}$$

При  $k > 5$  можно написать

$$\frac{1}{P_f} = 4s^2 kc^2 - \frac{3}{5,24} s^2 \cdot c^2. \quad (34)$$

Средняя ошибка стороны  $AB = a_k$  получается так

$$\frac{m^2_{s_k}}{s^2_k} = \frac{m^2_b}{b^2} + \left[ 2c^2 \cdot k - \frac{3}{10,48} c^2 \right] \frac{m''^2}{\rho''^2}, \quad (35)$$

понимая под  $m''$  попрежнему среднюю квадратическую ошибку измерения угла. Эта формула является более общей, чем приведенная в § 9 формула (26). Изотова; конечно, при  $k > 4$  и при  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  формула (34) отличается от (26) совсем не ощутимо. Для случая  $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \dots = A_k = B_k$  раньше выведенная формула (22) дает

$$\frac{m^2_{s_k}}{s^2_k} = \frac{m^2_b}{b^2} + 2kc^2 \frac{m''^2}{\rho''^2}. \quad (36)$$

Так как  $-\frac{3}{10,48} c^2$  составляет при  $k > 4$  менее 1 : 25 от  $2kc^2$ , то практически (35) и (36) дают один и тот же числовой результат. Будем ли мы уравнивать ряд, в котором наблюдались углы; будем ли уравнивать ряд, в котором наблюдались направления — по направлениям или даже по углам, — для оценки точности вывода из такой цепи связующей стороны мы можем во всех трех случаях принять формулу (36), конечно, для цепи, составленной из равнобедренных в отношении связующих сторон треугольников. Очевидно, можно заключить, что формула (22) работает и для случая рядов, уравниваемых по направлениям за условия фигур, если в этих рядах несколько и нарушается равенство и постоянство длин связующих сторон в тех пределах, которые обычно имеют место в действительности в работах СССР.

### § 11. О выгоднейшей форме треугольников

Можно рассуждать в этом вопросе так: любая сторона сети I или II класса может послужить в дальнейшем исходной при развитии соответственно или сети II класса или сети III класса. Поэтому естественно потребовать, чтобы

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \frac{m_{c_n}}{c_n},$$

а это по (29) и по (22) приводит к такому условию

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 A_n + \operatorname{ctg}^2 B_n + \operatorname{ctg} A_n \cdot \operatorname{ctg} B_n &= \operatorname{ctg}^2 B_n + \operatorname{ctg}^2 C_n + \operatorname{ctg} C_n \cdot \operatorname{ctg} B_n; \\ \operatorname{ctg}^2 A_n + \operatorname{ctg} A_n \cdot \operatorname{ctg} B_n &= \operatorname{ctg}^2 C_n + \operatorname{ctg} C_n \cdot \operatorname{ctg} B_n. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (37), очевидно, требует, чтобы

$$\operatorname{ctg} A_n = \operatorname{ctg} C_n$$

и

$$A_n = C_n.$$

Конечно, условие равенства углов  $A$  и  $C$  или условие равнобедренности относится не только к  $n$ -му, а к любому треугольнику в цепи.

Следовательно,

$$B_k = 180^\circ + \varepsilon = 2A_k.$$

Теперь формулу (22) перепишем так

$$\frac{m^2 a_n}{a_n^2} = \frac{m^2 b}{b^2} + \frac{2}{3} \frac{m''^2}{\rho''^2} \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 2A_k - \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} 2A_k). \quad (38)$$

Конечно, понятие выгоднейшей формы треугольников в цепи или в сети достаточно неопределенное. Мы, например, можем при специальных требованиях к триангуляционному ряду ставить условие наилучшего определения длины его диагонали 2—8 (черт. 20) и соответственно этому отыскивать выгоднейшую форму треугольников. Но, имея в виду триангулирование некоторой территории, приходится требовать возможно лучшего определения любой стороны каждого треугольника. А тогда вопрос наш сводится, очевидно, к нахождению минимума выражения

$$Q = \operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 2A_k - \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} 2A_k;$$

$$Q = \operatorname{ctg}^2 A + \frac{\operatorname{ctg}^4 A - 2 \operatorname{ctg}^2 A + 1}{4 \operatorname{ctg}^2 A} - \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2};$$

$$Q = \frac{3 \operatorname{ctg}^4 A + 1}{4 \operatorname{ctg}^2 A} = \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 A + \frac{1}{4 \operatorname{ctg}^2 A}.$$

Приравнивая нулю производную  $\frac{\partial Q}{\partial A}$ , будем иметь

$$-6 \operatorname{ctg} A \cdot \frac{1}{\sin^2 A} + 2 \operatorname{tg}^3 A \cdot \frac{1}{\sin^2 A} = 0,$$

или

$$-3 + \operatorname{tg}^4 A = 0;$$

$$\operatorname{tg} A = \sqrt[4]{3};$$

$$A = 52^\circ 46',$$

следовательно,

$$A_k = 52^\circ 46'$$

$$C_k = 52^\circ 46'$$

$$B_k = 74^\circ 28'$$

Однако, если мы начнем строить цепь треугольников полученной формы, то мы придем к довольно быстрому убыванию сторон в ней (черт. 22).

Полученное решение, очевидно, неприемлемо, и неприемлемость его обусловлена тем, что при развитии триангуляции на некоторой территории нужно стремиться к наилучшему определению любой ее стороны при условии одновременного наибольшего продвига в развитии сети, т. е. минимума работы по ее составлению. Конечно, ряд, изображенный на черт. 20, должен быть прямолинейным, но тогда  $A_k = B_k$  и, следовательно, треугольники должны быть равносторонними. Так как равносторонний тре-

угольник при данном периметре имеет наибольшую площадь, то очевидно, что при равносторонних треугольниках мы будем иметь покрытие территории наименьшим числом треугольников заданного периметра, т. е. определение пунктов на краях района потребует наименьшего числа геодезических передач, причем каждая передача будет выполняться с хорошей точностью, так как значение  $R$  для равностороннего треугольника равно 4,4, а для треугольников, изображенных на черт. 21, равно 3,6 в единицах шестого знака логарифма. Другими словами, введение равносторонних треугольников вместо треугольников, строго приводящих к наилучшему определению сторон триангуляции, понижает мало ощутимо точность определения сторон треугольников (при  $m = \pm 0'',7$  всего примерно на одну миллионную в отдельном треугольнике), одновременно приводит к экономии при выполнении сплошного триангулирования некоторой территории и, кроме того, дает наиболее надежное определение положения геодезических пунктов на краях этой территории. По этим соображениям, в которых учитывается построение всей триангуляционной сети, а не отдельной ее точки, применение равносторонних треугольников является наиболее выгодным.

Черт. 22

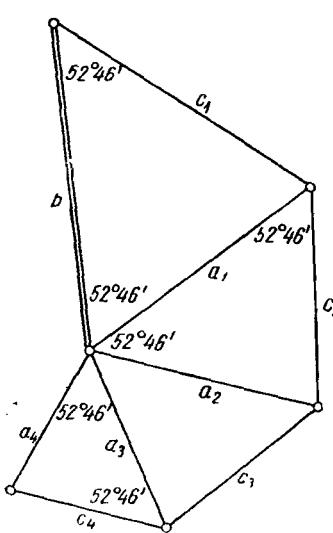
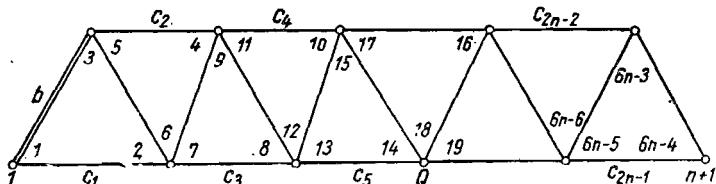


Diagram illustrating a network of triangles where all interior angles are labeled as  $52^{\circ}46'$ . The network consists of several triangles sharing common vertices. Vertices are labeled with letters  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_{18}, c_{19}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{27}, c_{28}, c_{29}, c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{35}, c_{36}, c_{37}, c_{38}, c_{39}, c_{40}, c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}, c_{45}, c_{46}, c_{47}, c_{48}, c_{49}, c_{50}, c_{51}, c_{52}, c_{53}, c_{54}, c_{55}, c_{56}, c_{57}, c_{58}, c_{59}, c_{60}, c_{61}, c_{62}, c_{63}, c_{64}, c_{65}, c_{66}, c_{67}, c_{68}, c_{69}, c_{70}, c_{71}, c_{72}, c_{73}, c_{74}, c_{75}, c_{76}, c_{77}, c_{78}, c_{79}, c_{80}, c_{81}, c_{82}, c_{83}, c_{84}, c_{85}, c_{86}, c_{87}, c_{88}, c_{89}, c_{90}, c_{91}, c_{92}, c_{93}, c_{94}, c_{95}, c_{96}, c_{97}, c_{98}, c_{99}, c_{100}$ . Vertices also include  $a, b, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ .

## § 12. Продольная ошибка триангуляционного ряда, составленного из равносторонних треугольников

Обычно на пунктах триангуляции I и II классов применяют при измерении углов способ круговых приемов (и способ Шрейбера в триангуляции I класса) и в результате получают на каждом пункте в качестве непосредственно и независимо друг от друга наблюденных величин не



Черт. 23

углы, а направления. Однако, ради упрощения решения поставленного в заголовке параграфа вопроса, мы допустим, как и в § 9, что все углы нашего ряда (черт. 23): 1, 2, 3, 4, 5, ...,  $(6n - 3)$ , получены из наблюдений независимо друг от друга и уравнивание ряда выполняется за условия фигур\* по углам, а не по направлениям.

\* Условие фигуры в данном случае есть условие равенства суммы уравненных углов треугольника ее теоретическому значению.

Наш ряд пусть имеет  $2n - 1$  треугольников и одну выходную сторону  $b$ . Определим среднюю ошибку диагонали  $1, n + 1$  ряда, равной

$$c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}.$$

Условные уравнения ряда, как и в § 9, напишем так

$$(1) + (2) + (3) + w_1 = 0$$

$$(4) + (5) + (6) + w_2 = 0$$

$$(6n - 5) + (6n - 4) + (6n - 3) + w_{2n-1} = 0$$

В Гауссовой схеме решения нормальных уравнений будем иметь, как в § 9,

$$[aa] = 3; \quad [ab] = [ac] = [ad] = [ae] = \dots = 0$$

$$[bb] = 3; \quad [bc] = [bd] = [be] = \dots = 0$$

$$[cc] = 3; \quad [cd] = [ce] = \dots = 0$$

$$[dd] = 3; \quad [de] = \dots = 0$$

$$[bb \cdot 1] = [bb]; \quad [bf \cdot 1] = [bf]$$

$$[cc \cdot 2] \equiv [cc]; \quad [cf \cdot 2] \equiv [cf]$$

$$[dd \cdot 3] = [dd]; \quad [df \cdot 3] = [df]$$

Конечно, мы предполагаем веса всех углов цепи равными единице. Функция уравненных элементов ряда в нашем случае представится так

$$F = b \left\{ \frac{\sin 3}{\sin 2} + \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 9}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 8} + \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 11 \cdot \sin 15}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10 \cdot \sin 14} + \right.$$

$$+ \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 11 \cdot \sin 13 \cdot \sin 17 \cdot \sin 21}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10 \cdot \sin 14 \cdot \sin 16 \cdot \sin 20} + \dots +$$

$$\left. + \frac{\sin 1 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \dots \sin (6n-3)}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 8 \dots \sin (6n-4)} \right\}.$$

Обозначая,

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = c; \quad c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = s,$$

будем иметь

$$f_1 = \operatorname{ctg} 1 \cdot (c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}) = (n-1) s \cdot c$$

$$f_2 = -\operatorname{ctg} 2 \cdot (c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}) = -ns \cdot c$$

$$f_2 \equiv \operatorname{ctg} 3 \cdot s \equiv s \cdot c$$

$$f_4 = -\operatorname{ctg} 4 \cdot (c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-1)s \cdot c$$

$$f_5 \equiv \operatorname{ctg} 5 \cdot (c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}) \equiv (n-1) s \cdot c$$

$$f_6 \equiv 0$$

50

$$\begin{aligned}
 f_7 &= \operatorname{ctg} 7 \cdot (c_5 + c_7 + \dots + c_{2n-1}) = (n-2) s \cdot c \\
 f_8 &= -\operatorname{ctg} 8 \cdot (c_3 + c_5 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-1) s \cdot c \\
 f_9 &= \operatorname{ctg} 9 \cdot c_3 = s \cdot c \\
 f_{10} &= -\operatorname{ctg} 10 \cdot (c_5 + c_7 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-2) s \cdot c \\
 f_{11} &= \operatorname{ctg} 11 \cdot (c_5 + c_7 + \dots + c_{2n-1}) = (n-2) s \cdot c \\
 f_{12} &= 0 \\
 f_{13} &= \operatorname{ctg} 13 \cdot (c_7 + c_9 + \dots + c_{2n-1}) = (n-3) s \cdot c \\
 f_{14} &= -\operatorname{ctg} 14 \cdot (c_5 + c_7 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-2) s \cdot c \\
 f_{15} &= \operatorname{ctg} 15 \cdot c_5 = s \cdot c \\
 f_{16} &= -\operatorname{ctg} 16 \cdot (c_7 + c_9 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-3) s \cdot c \\
 f_{17} &= \operatorname{ctg} 17 \cdot (c_7 + c_9 + \dots + c_{2n-1}) = -(n-3) s \cdot c \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Или напишем еще так

$$\begin{aligned}
 f_2 &= -ns \cdot c \\
 f_1 &= -f_4 = f_5 = -f_8 = (n-1) s \cdot c \\
 f_3 &= f_9 = f_{15} = f_{21} = \dots = f_{6n-3} = s \cdot c \\
 f_6 &= f_{12} = f_{18} = \dots = f_{6n-6} = 0 \\
 f_7 &= -f_{10} = f_{11} = -f_{14} = (n-2) s \cdot c \\
 f_{13} &= -f_{16} = f_{17} = -f_{20} = (n-3) s \cdot c \\
 f_{19} &= -f_{22} = f_{23} = -f_{26} = (n-4) s \cdot c \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Очевидно, индексы в каждой последующей строчке мы получим простым увеличением на 6 индексов в предыдущей строчке. Таким образом

$$\begin{aligned}
 [af] &= [bf \cdot 1] = [cf \cdot 2] = [df \cdot 3] = \dots = [nf \cdot n-1] = 0 \\
 [ff] &= s^2 c^2 \{ n^2 + n + 4 [(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1] \} \\
 \frac{1}{P_f} &= [ff] = s^2 c^2 \left\{ n^2 + n + 4 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 4n^2 \right\}. \\
 \left( 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \right) &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
 \frac{1}{P_f} &= s^2 c^2 \left\{ 4 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - 3n^2 + \dots \right\} \\
 \frac{1}{P_f} &= \frac{8n^3 - 6n^2 + 10n}{6} s^2 \cdot c^2 \\
 \frac{1}{P_f} &= \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3} s^2 \cdot c^2 \\
 \frac{1}{P_f} &= \frac{4n^2 - 3n + 5}{3n} \cdot L^2 \cdot c^2. \tag{39}
 \end{aligned}$$

В (39) под  $L$  понимается длина диагонали  $1, n+1$  ряда, образуемая  $n$  промежуточными его сторонами. Так как  $c^2 = 1 : 3$ , то

$$\frac{1}{P_f} = \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} L^2. \quad (40)$$

Нужно помнить, что, во-первых, при получении  $\frac{1}{P_f}$  мы вовсе не учитывали ошибочность выходной стороны  $b$  ряда, а, во-вторых, что  $n$  в (40) и в (39) — не число треугольников ряда, а число промежуточных сторон в рассматриваемой его диагонали. Средняя ошибка длины диагонали  $L$ , конечно, выразится так

$$m_L^2 = L^2 \left( \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \right), \quad (41)$$

понимая под  $m''$  среднюю ошибку измерения угла в триангуляции в секундах.

Формула (41) относится к ряду, изображеному на черт. 23. Если бы ряд был построен так, как показано на черт. 24, то мы имели бы

$$m_L^2 = L^2 \left( \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{4n^2 + 3n + 5}{9n} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \right). \quad (42)$$

Если бы мы, имея в нашем ряде измеренными направления, уравнивали его за условия фигур по направлениям, то получили бы формулу для ряда черт. 23

$$m_L^2 = L^2 \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \left( \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} - \frac{10n^2 - 7n - 9}{300n^2} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \right] \quad (43)$$

(см. И з с т о в, «Оценка точности триангуляции»).

Сделаем расчет  $m_L$  по (41) и (43), принимая  $L = 240$  км,  $n = 8$ ,  $m = 1,03$ ; мы получим при  $\frac{m_b}{b} = 1 : 300 000$  по формуле (41)

$$m_L = 2,33 \text{ м},$$

по формуле (43)

$$m_L = 2,31 \text{ м}.$$

Влияние третьего члена в скобке в (43) составляет всего около  $\frac{1}{25n}$  от  $m_L$ . Отсюда ясно, что формулой (41) можно пользоваться в простой цепи равносторонних треугольников, если в ней измерялись углы и уравнивались углы и если в ней измерялись и уравнивались направления. Но без доказательства отметим, что (41) можно пользоваться и в случае измерения в цепи направлений, и уравнивания в ней углов.

В действительности каждый ряд пролагается между двумя выходными сторонами (или между двумя сторонами триангуляции высшего класса). Разобьем диагональ  $1, n+1$  на две равные части точкой  $Q$ , если  $n$  четное, и на две части с  $\frac{n-1}{2}$  и  $\frac{n+1}{2}$  числом промежуточных сторон, если  $n$  нечетное. Вообразим далее, что каждую такую часть мы уравняли за условия фигур по углам, причем вовсе выбросим треугольник с вершиной  $Q$  и с углами (черт. 23) 16, 17 и 18. Это, конечно,

исколько не скажется на результате уравнивания и на длинах отрезков  $l$ ,  $Q$  и  $Q, n+1$ , из которых один вычисляется от выходной стороны  $b$  в пункте  $l$ , а другой — от выходной стороны  $b_1$  в пункте  $n+1$ ; очевидно также, что эти длины  $l$ ,  $Q$  и  $Q, n+1$  определяются независимо друг от друга. Применяя теперь формулу (41), напишем при  $n$  четном

$$\begin{aligned} m^2_L &= \frac{2L^2}{4} \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{n^2 - \frac{3}{2}}{\frac{9}{2}n} \cdot \frac{n+5}{\rho^{*2}} \cdot \frac{m^{*2}}{\rho^{*2}} \right], \\ m^2_L &= \frac{L^2}{2} \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} \cdot \frac{m^{*2}}{\rho^{*2}} \right]; \end{aligned} \quad (44)$$

при  $n$  нечетном

$$\begin{aligned} m^2_L &= \frac{L^2(n-1)^2}{4n^2} \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{(n-1)^2 - \frac{3}{2}(n-1) + 5}{9(n-1)} \cdot \frac{2m^{*2}}{\rho^{*2}} \right] + \\ &+ \frac{L^2(n+1)^2}{4n^2} \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1) + 5}{9(n+1)} \cdot \frac{2m^{*2}}{\rho^{*2}} \right], \\ m^2_L &= \frac{L^2}{2} \left[ \frac{n^2 + 1}{n^2} \cdot \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{2n^3 - 3n^2 + 16n - 3}{9n^2} \cdot \frac{m^{*2}}{\rho^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Так как ряд пролагается всегда между двумя выходными или основными сторонами, то в нем, кроме условий сумм углов в каждом треугольнике (условий фигур), возникает еще условие базисное, заключающееся в требовании, чтобы при вычислении по уравненным углам сторон треугольников ряда мы, идя от первой выходной стороны и проходя этим вычислением через весь ряд, получали бы для второй выходной стороны заданное ее значение. Понятно, пренебрежение этим условием и уравнивание ряда, в котором измерены направления, не по направлениям, а по углам, вносит приближенность в формулы (44) и (45); кроме того, самый прием разбивки ряда на две части — равные или почти равные — не обоснован доказательством (хотя как будто бы и излишним), что он вытекает из принципа наибольшего веса и, следовательно, приводит к лучшему приближению получаемого результата кциальному. Наконец, должно отметить, что выходные или основные стороны ряда всегда имеют еще твердо установленные геодезические азимуты, и поэтому, кроме условий фигур и базисного, в ряде возникает еще азимутальное условие, которое мы не учитывали. Возьмем строгую формулу для продольного сдвига ряда, уравненного по направлениям за условия фигур, базисов и азимутов, из указанного уже труда А. А. Изотова

$$\begin{aligned} m^2_L &= \frac{L^2}{2} \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \left( \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(52-n)^2}{60(25n+17)n^2} \right) \frac{m^{*2}}{\rho^{*2}} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Формула (46) полагает, однако, азимуты выходных сторон без ошибочными и дает поэтому несколько преувеличенный результат для  $m_L$ . Формула (46) относится к  $n$  четному.

Принимая попрежнему  $m = \pm 1''$ ,  $\frac{m_b}{b} = 1 : 300\,000$ ,  $n = 8$ ,  $L = 240 \text{ км}$ , получим по формуле (44)

$$m_L = \pm 1,21 \text{ м},$$

по формуле (46)

$$m_L = \pm 1,18 \text{ м.}$$

Для случая  $n$  нечетного формула (46) обращается в следующую

$$m^2_L = \frac{L^2}{2} \left[ \frac{n^2 + 1}{n^2} \cdot \frac{m^2_b}{b^2} + \left( \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} - \frac{(52 - n)^2}{60(25n + 17)n^2} \right) \frac{m'^2}{\rho'^2} \right].$$

Так как влияние членов третьего и четвертого в правой части равенства (46) составляет около  $\frac{1}{25n}$  от  $m_L$ , то мы совершенно определенно заключаем о возможности пользоваться при оценке продольного сдвига ряда формулой (44) или (45), предполагая, что ряд проложен между двумя выходными или основными сторонами. Сравнение равенств (41) и (44) приводит к важному заключению, что прокладка ряда между двумя базисами уменьшает продольную ошибку ряда почти в два раза по сравнению с ошибкой ряда такой же длины, но проложенного от одной выходной стороны (свободный ряд). Конечно, измерение базисов через 200 км в рядах триангуляции I класса имеет существеннейшее значение, сводя продольную ошибку ряда от  $\pm 1,4 \text{ м}$  к  $\pm 0,6 - 0,7 \text{ м}$ . Пользуясь формулой (46), мы примем  $n = 6$ ,  $L = 200 \text{ км}$ ,  $m = \pm 0'',7$  и  $\frac{m_b}{b} = 1 : 400\,000$ . Тогда мы приближимся к действительным условиям хорошей триангуляции I класса и получим

$$m_L = \pm 0,63 \text{ м!}$$

Существенно отметить, что из этих 0,63 м не более 0,52 м приходится на долю влияния ошибок углов, а 0,35 м — на долю влияния ошибок выходных сторон. Это показывает, что выходные стороны следует определять в триангуляции I класса с средней ошибкой, приближающейся к  $1 : 500\,000$ , а отсюда вытекает требование высокой точности измерения базисов, от которых переход к выходной стороне выполняется непосредством базисной сети. Эти вопросы мы затронули пока попутно, а в соответствующих параграфах еще остановимся на них.

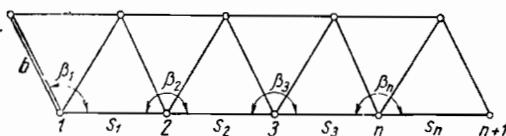
Очевидно, надлежащая исполненная триангуляция I класса дает расстояние в 200 км между конечными пунктами ряда с точностью не ниже  $1 : 330\,000$ .

Построение триангуляции I класса на обширной территории все-таки сводится к постепенному прикладыванию друг к другу значительного числа полигонов этой триангуляции; имея в виду накопление ошибок

в таком процессе прикладывания при развертывании его на большой территории, а также дальнейшее заполнение каждого полигона сетями II класса, должно признать указанную точность вывода длины отдельного звена соответствующей задаче и подлежащей уверенному достижению в действительных работах. Применим (41) к ряду II класса, беря  $m = 2'',5$ ;  $n = 6$ ;  $L = 90 \text{ км}$ ;  $\frac{m_b}{b} = 1 : 150\,000$  соответственно точности определения стороны I класса, от которой начинается ряд II класса. Мы получим  $m_L = \pm 1,67 \text{ м}$ . При вставке ряда II класса между твердыми точками I класса и основного ряда II класса, этот сдвиг  $m_L = \pm 1,67 \text{ м}$  будет, конечно, аннулироваться, и длина нашего вставляемого ряда будетискажена на столько, на сколько искажено расстояние между стороной I класса и стороной основного ряда II класса, между которыми этот ряд вставляется. Но это последнее искажение, выраженное среднеквадратической его величиной, должно быть, понятно, в несколько раз менее  $\pm 1,67 \text{ м}$ , например, в 3—4 раза, чтобы вставка триангуляции II класса в рамки триангуляции I класса и основных рядов II класса контролировала бы работу по заполняющим сетям II класса и вносила бы в их построение не ухудшение, а улучшение. К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем, но и теперь уже можно заключить, что вставка сетей II класса предъявляет к построению рядов I класса и основных рядов II класса строгие требования; в свою очередь вставка сетей III класса предъявляет достаточно строгие требования к построению триангуляции II класса.

### § 13. Поперечный сдвиг триангуляционного ряда. Ошибки азимутов сторон ряда и диагонали ряда. Лапласовы азимуты

Будем предполагать ряд прямолинейным. Пусть, далее, промежуточные стороны в нем  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  равны между собой; углы при вершинах  $1, 2, 3, \dots, (n+1)$  (черт. 24) ходовой линии  $1—2—3—\dots—n$  назовем соответственно через  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ . При решении вопроса о поперечном сдвиге ряда будем сперва пользоваться неуравненными значениями этих углов  $\beta$  и предположим пока, что азимут выходной стороны  $b$  не имеет погрешности. Обозначая среднюю ошибку измерен-



Черт. 24

ного угла  $\beta$  через  $m''$ , легко получаем, что ошибка угла  $\beta_1$  вызовет средний поперечный сдвиг точки  $n+1$ , равный  $\frac{m''}{\rho''} n \cdot s$ ; ошибка угла  $\beta_2$  вызовет средний сдвиг точки  $n+1$ , равный  $\frac{m''}{\rho''} (n-1) s$ , ошибка угла  $\beta_3$  — сдвиг  $\frac{m''}{\rho''} \cdot s (n-2)$ , и т. д. Поэтому, обозначая через  $q$  средний поперечный сдвиг точки  $n+1$ , получим

$$\begin{aligned}
 q^2 &= \frac{m''^2}{\rho''^2} s^2 [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1] = \\
 &= \frac{m''^2}{\rho''^2} L^2 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^2}; \\
 L &= ns; \\
 q^2 &= \frac{m''^2}{\rho''^2} L^2 \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{6n}. \tag{47}
 \end{aligned}$$

Отсюда ошибка  $m_\Phi$  в направлении ряда равна

$$m_\Phi = m'' \sqrt{\frac{(2n+1)(n+1)}{6n}}. \tag{48}$$

Если будем учитывать ошибку азимута  $\alpha_1$  выходной стороны в пункте 1, то, очевидно, для полного поперечного сдвига имеем

$$Q = L \sqrt{\frac{m_{\alpha_1}^2}{\rho''^2} + \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{6n}} \tag{49}$$

и для ошибки азимута диагонали 1,  $n+1$ :

$$m_{\alpha_{1,n+1}} = \sqrt{m_{\alpha_1}^2 + m''^2 \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{6n}}. \tag{50}$$

Если будем считать все углы в цепи треугольников измеренными независимо друг от друга и будем уравнивать эти углы за условия фигур, то, приняв равными между собой все промежуточные стороны по линии 1,  $n+1$  (черт. 24), будем иметь следующее выражение для поперечного сдвига  $q_0$  точки  $n+1$

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \{n \cdot (1) + (n-1)[(2)+(6)+(7)] + (n-2)[(8)+(12)+(13)] + \dots \\
 &\quad \dots + (n-3)[(14)+(18)+(19)] + \dots [(20)+(6n-6)+(6n-5)] \cdot 1\} s. \tag{51}
 \end{aligned}$$

Здесь (1), (2), (6), (7) ... — ошибки измеренных углов. Так как условные уравнения сети будут те же, что и ранее, т. е.

$$(1) + (2) + (3) + w_1 = 0$$

$$(4) + (5) + (6) + w_2 = 0$$

$$(7) + (8) + (9) + w_3 = 0$$

$$(10) + (11) + (12) + w_4 = 0$$

.....

$$(6n-4) + (6n-5) + (6n-3) + w_{2n-1} = 0,$$

то имеем, как в § 12 и 10,

$$\begin{aligned}
 [aa] &= 3; & [ab] = [ac] = [ad] = [ae] = \dots = 0 \\
 [bb] &= 3; & [bc] = [bd] = [be] = \dots = 0 \\
 [cc] &= 3; & [cd] = [ce] = \dots = 0 \\
 &\dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\
 [bb \cdot 1] &= [bb]; & [bf \cdot 1] = [bf] \\
 [cc \cdot 2] &= [cc]; & [cf \cdot 2] = [cf] \\
 [dd \cdot 3] &= [dd]; & [df \cdot 3] = [df] \\
 &\dots & \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Теперь легко по (51) сообразить, что

$$\begin{aligned}
 \{[ff]\} &= s^2 \{n^2 + 3(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + 3(n-3)^2 + \dots + \\
 &\quad + 3[n-(n-2)]^2 + 3\} \\
 [ff] &= s^2 \{3[n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1] - 2n^2\} = \\
 &= s^2 \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$[af] = s[n+n-1] = (2n-1)s$$

$$[bf] = s(n-1)$$

$$[cf] = s[(n-1)+(n-2)] = (2n-3)s$$

$$[df] = s(n-2)$$

$$[ef] = s[(n-2)+(n-3)] = (2n-5)s$$

Закон образования этих коэффициентов совершенно ясен. Таким образом, (19) дает

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P_f} &= s^2 \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n^2 \right] - \frac{(2n-1)^2}{3}s^2 - \frac{(n-1)^2}{3}s^2 - \\
 &\quad - \frac{(2n-3)^2}{3}s^2 - \frac{(n-2)^2}{3}s^2 - \frac{(2n-5)^2}{3}s^2 - \dots - \frac{s^2}{3}.
 \end{aligned}$$

Иначе

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P_f} &= s^2 \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{s^2}{3} [(2n-1)^2 + (2n-2)^2 + (2n-3)^2 + \dots + 1] + \\
 &\quad + \frac{4}{3}s^2 [(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1] - \\
 &\quad - \frac{s^2}{3} [(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1];
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{P_f} = s^2 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n^2 - \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{18} + \right. \\ \left. + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right\}$$

$$\frac{1}{P_f} = \frac{s^2}{9} n(4n^2 - 3n + 5) = \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} \cdot L^2.$$

Отсюда поперечный сдвиг  $q$

$$q = \frac{L}{3} \sqrt{\frac{4n^2 - 3n + 5}{n} \cdot \frac{m''^*}{\rho''}}. \quad (51')$$

Другими словами, для поперечного сдвига получилась та же самая формула (41), что и для продольного сдвига в цепи равносторонних треугольников. В цепи равносторонних треугольников, если бы в ней измерялись независимо друг от друга углы треугольников, после уравнивания таких углов за условия треугольников, продольный и поперечный сдвиги были бы равны между собой.

В только что приведенном выводе углы  $(2+6+7)$ ,  $(8+12+13)\dots$  (черт. 23) считались имеющими вес, равный одной трети веса углов  $1, 2, 3, 4, 5, 6\dots$

Конечно, никто не будет составлять триангуляции так, чтобы углы  $(2+6+7)$ ,  $(8+12+13)\dots$ , определяющие направление ряда и поперечные сдвиги его пунктов, были бы измерены хуже, с заметно меньшей точностью, чем углы  $1, 2, 3, 6, 12, \dots$ . Понятно, что если даже измерялись в триангуляции независимо друг от друга углы  $1, 2, 3, 6, 7, 8, 12, 13, \dots$ , то непременно триангулятор с тем же весом измерит и углы  $3$ , т. е. углы  $(2+6+7)$ ,  $(8+12+13)\dots$ . Поэтому формула (51') не подлежит применению: она вследствие несоответствия вывода при ее получении принятому в действительности порядку собирания материалов по угловым измерениям в триангуляции, дает неверные результаты; то, что не оказывало влияния на вывод продольного сдвига, а именно уменьшение в три раза веса углов  $3$ , сильно сказывается при выводе поперечного сдвига. Самый вывод этой формулы (51'), данный проф. Чеботаревым, мы привели лишь для возможных сопоставлений в дальнейшем и для иллюстрации того, что далеко не всегда можно пренебречь теми связями, которые обращают отдельные треугольники в триангуляционный ряд.

Обратимся теперь к выводу поперечного сдвига в цепи, в которой были измерены направления и уравнивание которой за условия фигур выполняется по направлениям. Занумеруем направления, как показано на черт. 25. Условные уравнения напишутся так:

$$(2) - (1) + (5) - (4) + (7) - (6) + w_1 = 0$$

$$(4) - (3) + (8) - (7) + (13) - (12) + w_2 = 0$$

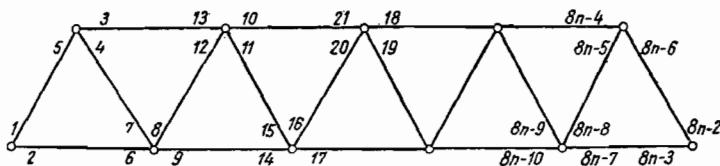
$$(9) - (8) + (12) - (11) + (15) - (14) + w_3 = 0$$

.....

\* Вывод этой формулы дан проф. А. С. Чеботаревым в журнале «Геодезист», 1928, № 6.

Нормальные уравнения, им соответствующие, будут

$$\begin{aligned} 6k_1 - 2k_2 + w_1 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 - 2k_3 + w_2 &= 0 \\ -2k_2 + 6k_3 - 2k_4 + w_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ -2k_{2n-3} + 6k_{2n-2} - 2k_{2n-1} + w_{2n-2} &= 0 \\ -2k_{2n-2} + 6k_{2n-1} + w_{2n-1} &= 0 \end{aligned}$$



Черт. 25

Другими словами

$$\begin{aligned} [aa] &= 6; \quad [ab] = -2; \quad [ac] = [ad] = [ae] = \dots = 0 \\ [bb] &= 6; \quad [bc] = -2; \quad [bd] = [be] = \dots = 0 \\ [cc] &= 6; \quad [cd] = -2; \quad [ce] = [ch] = \dots = 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = 6 - \frac{4}{6} = \frac{16}{3} \quad (52)$$

$$[cc \cdot 2] = [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \quad (53)$$

$$[cc \cdot 2] = 6 - \left\{ [bc] - \frac{[ac][ab]}{[aa]} \right\}^2 \cdot \frac{1}{[bb \cdot 1]} = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6}} \quad (53)$$

$$[dd \cdot 3] = [dd \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = 6 - \frac{[-2]^2}{[cc \cdot 2]} = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6}}} \quad (54)$$

Уравнения (52), (53) и (54) вполне выясняют закон образования коэффициентов  $[bb \cdot 1]$ ,  $[cc \cdot 2]$ ,  $[dd \cdot 3]$ ,  $[ee \cdot 4]$ ... Очевидно, при данной виде нормальных уравнений эти коэффициенты — просто последовательные подходящие непрерывной дроби:

$$\begin{aligned} 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{\dots}}}} \end{aligned}$$

Предел этой дроби 5,23 6044. Имеем

$$[aa] = 6; \quad [bb \cdot 1] = \frac{16}{3}; \quad [cc \cdot 2] = \frac{42}{8}; \quad [dd \cdot 3] = \frac{110}{21}; \quad [ee \cdot 4] = 5,237; \dots$$

все следующие коэффициенты типа  $[hh \cdot 5] \dots$  можно принимать просто равными 5,237. Выражение (51) для  $q_0$  перепишется теперь так

$$q_0 = \{n[(2)-(1)] + (n-1)[(9)-(6)] + (n-2)[(17)-(14)] + \dots + [(8n-7)-(8n-10)]\} s.$$

Вычислим теперь

$$[ff] = \{2n^2 + 2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + \dots + 2 \cdot 1^2\} s^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} s^2$$

$$[af] = (2n+n-1)s = (3n-1)s; \quad [bc \cdot 1] = -2$$

$$[bf] = 0; \quad [bd \cdot 1] = [be \cdot 1] = \dots = 0$$

$$[cf] = (2n-3)s; \quad [cd \cdot 1] = -2; \quad [ce \cdot 1] = [ch \cdot 1] = \dots = 0$$

$$[df] = 0; \quad [de \cdot 1] = -2; \quad [dh \cdot 1] = [dg \cdot 1] = \dots = 0$$

$$[ef] = (2n-5)s; \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$[hf] = 0; \quad [cd \cdot 2] = -2; \quad [ce \cdot 2] = [ch \cdot 2] = \dots = 0$$

$$[gf] = (2n-7)s; \quad [de \cdot 2] = -2; \quad [dh \cdot 2] = [dg \cdot 2] = \dots = 0$$

$$\dots \dots \dots [de \cdot 3] = [de \cdot 2] = -2; \quad [dh \cdot 3] = [dg \cdot 3] = \dots = 0$$

$$[(2n-1) \cdot f] = 1 \cdot s$$

Отсюда

$$[bf \cdot 1] = 0 - \frac{-2(3n-1)s}{6} = \frac{(3n-1)s}{3} = 2 \cdot \frac{[af]}{[aa]}$$

$$[cf \cdot 2] = [cf \cdot 1] - \frac{[bf \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = (2n-3)s - \frac{-2(3n-1)s}{3 \cdot 16} \cdot 3$$

$$[cf \cdot 2] = s \left[ 2n-3 + \frac{3n-1}{8} \right] = s \cdot \frac{19n-25}{8} = [cf] + 2 \cdot \frac{[bf \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

$$[df \cdot 3] = [df \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2][cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = [df \cdot 2] - \frac{-2[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$$

$$[df \cdot 3] = \frac{2[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = \frac{19n-25}{21} \cdot s = [df] + 2 \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$$

$$[ef \cdot 4] = [ef \cdot 3] - \frac{[df \cdot 3][de \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} = [ef] + \frac{2[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}$$

$$[ef \cdot 4] = (2n-5)s + \frac{19n-25}{55} \cdot s$$

$$[hf \cdot 5] = [hf] + \frac{2[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}$$

.....

Закон образования и этих коэффициентов вполне выяснился.  
Таким образом

$$[bf \cdot 1] = 0 + \frac{2(3n-1)}{6} s$$

$$[cf \cdot 2] = \left[ (2n-3) + \frac{2 \cdot 2(3n-1)}{6} \cdot \frac{3}{16} \right] s$$

$$[df \cdot 3] = 0 + 2 \left[ (2n-3) + \frac{2 \cdot 2(3n-1)}{6} \cdot \frac{3}{16} \right] \cdot \frac{8}{42} s$$

$$[ef \cdot 4] = (2n-5) s + 2 \cdot 2 \left[ (2n-3) + \frac{2 \cdot 2(3n-1)}{6} \cdot \frac{3}{16} \right] \frac{8}{42} \cdot \frac{21}{110} s$$

$$\begin{aligned} [hf \cdot 5] = 0 + 2 & \left\{ (2n-5) + 2 \cdot 2 \left[ (2n-3) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2 \cdot 2(3n-1)}{6} \cdot \frac{3}{16} \right] \frac{8}{42} \cdot \frac{21}{110} \right\} \frac{s}{5,237} \end{aligned}$$

.....

Теперь имеем

$$[bf \cdot 1]^2 = \frac{(3n-1)^2}{9} s^2$$

$$[cf]^2 = (2n-3)^2 s^2 + (2n-3) \frac{(3n-1)}{3} \cdot \frac{3}{8} s^2 + \frac{4(3n-1)^2}{9} \left( \frac{3}{16} \right)^2 s^2$$

$$\begin{aligned} [df \cdot 3]^2 = & \left( \frac{8}{21} \right)^2 \cdot s^2 \left[ (2n-3)^2 + 2(2n-3) \cdot \frac{3n-1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \right. \\ & \left. + \frac{(3n-1)^2}{9} \left( \frac{3}{8} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

В дальнейшем обозначим  $\frac{2}{5,237} = k$  и будем не различать от  $k$  такие величин:  $\frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \dots$ . Кроме того, имеем право пренебречь членами с  $k$  в степени выше четвертой.

Поэтому напишем

$$\begin{aligned} [ef \cdot 4]^2 = s^2 & \left\{ (2n-5)^2 + (2n-3)^2 k^4 + 2(2n-3)(2n-5) k^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2(2n-5)(3n-1)}{3} k^3 \right\} \end{aligned}$$

$$[hf \cdot 5]^2 = s^2 \{ (2n-5)^2 k^2 + 2(2n-3)(2n-5) k^4 \}$$

$$\begin{aligned} [gf \cdot 6]^2 = s^2 & \{ (2n-7)^2 + (2n-5)^2 k^4 + 2(2n-5)(2n-7) k^2 + \\ & + 2(2n-7)(2n-3) k^4 \} \end{aligned}$$

$$[if \cdot 7]^2 = s^2 \{ (2n-7)^2 k^2 + 2(2n-5)(2n-7) k^4 \}$$

$$[kf \cdot 8]^2 = s^2 \{ (2n - 9)^2 + (2n - 7)^2 k^4 + 2(2n - 7)(2n - 9)k^2 + \\ + 2(2n - 9)(2n - 5)k^4 \}$$

· · · · ·

Теперь образуем сумму  $\Sigma$

$$\Sigma = \frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \dots + \frac{[kf \cdot 8]^2}{[kk \cdot 8]} + \dots$$

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{s^2} = & (3n - 1)^2 \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{336} + \frac{1}{2310} \right] + \frac{2}{3}(3n - 1) \left[ \frac{2n - 3}{13,72} + \right. \\ & \left. + 2(n - 2)k^4 \right] + (1 + k^2 + k^4) \frac{k}{2} [(2n - 3)^2 + (2n - 5)^2 + (2n - 7)^2 + \\ & + \dots + 3^2] + \frac{k}{2} + k(k^2 + k^4) [(2n - 3)(2n - 5) + (2n - 5)(2n - 7) + \\ & + \dots + 5 \cdot 3] + 3k^8 + k^5 [(2n - 3)(2n - 7) + \\ & + (2n - 5)(2n - 9) + \dots + 5 \cdot 1]. \end{aligned}$$

Далее с некоторой хорошей приближенностью

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{s^2} = & (3n - 1) \left[ \frac{(3n - 1) \cdot 9,16}{48} + \frac{2}{3} \frac{8,86n - 14,3}{47,08} \right] - (k^2 + k^4) \frac{k}{2} + \\ & + (1 + k^2 + k^4) \frac{k}{2} \cdot \frac{(n - 1)}{3} (4n^2 - 8n + 3) + 3k^8 + k^5 + \\ & + k(k^2 + k^4) \left[ \frac{n(4n^2 - 18n + 23)}{3} - 5 \right] + \frac{k^5 \cdot n(4n^2 - 24n + 35)}{3}. \\ \frac{\Sigma}{s^2} = & \frac{(3n - 1)(174,6n - 98,3)}{250} + \frac{(n - 1)(4n^2 - 8n + 3)}{15,71} + 3k^8 + \\ & + \left( \frac{k^3}{2} + \frac{k^5}{2} \right) (4n^3 - 16n^2 + 19n - 12) + k^5 \left[ \frac{n(4n^2 - 24n + 35)}{3} + 1 \right] \\ \frac{\Sigma}{s^2} = & \frac{99n^3 + 188n^2 - 110n - 43}{250} \\ \frac{1}{P_f} = & \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{3} s^2 - \frac{99n^3 + 188n^2 - 110n - 43}{250} s^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$q^2 = \left\{ \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n} - \frac{99n^2 + 188n - 110}{500n} \right\} \frac{m^{*2}}{p^{*2}} L^2 \quad (55)$$

причем в уравнении (55) под  $m$  попрежнему понимается средняя ошибка угла.

Если бы ряд, в котором были измерены направления, мы уравняли до углам, то величина  $q$  была более даваемой формулой (55) примерно на 12%.

Полный сдвиг  $Q$  будет равен

$$Q = \sqrt{\frac{m_{\alpha}^2}{\rho''^2} + \left[ \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{99n^2 + 188n - 110}{500n} \right] \frac{m''^2}{\rho''^2}} L. \quad (56)$$

Теперь, если мы имеем ряд, проложенный между двумя азимутами и базисами, то принимаем во внимание, что базисное условие, конечно, будет сравнительно мало влиять на поперечный сдвиг ряда, но азимутальное условие может повлиять заметно, уменьшая  $Q$ , рассчитываемое по (56). Предполагая  $n$  четным, разделим наш ряд на две части: одну, опирающуюся на азимут  $\alpha_1$  в точке 1, и другую — опирающуюся на азимут  $\alpha_{n+1}$  в точке  $(n+1)$ -ой. Применив к каждой части (56), получим

$$\begin{aligned} Q^2_1 = Q^2_2 &= \left\{ \frac{m_{\alpha_1}^2}{\rho''^2} \left[ \frac{(n+2)(n+1)}{6n} - \frac{\frac{99n^2}{4} + 94n - 110}{250n} \right] \frac{m''^2}{\rho''^2} \right\} \frac{L^2}{4}, \\ Q' &= \sqrt{Q^2_1 + Q^2_2} = \\ &= \frac{L}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_{\alpha}^2}{\rho''^2} + \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2 + 94n - 110}{250n} \right] \frac{m''^2}{\rho''^2}} \end{aligned} \quad (57)$$

При  $n = 6$ ;  $L = 200$  км;  $m'' = m_{\alpha} = \pm 0'',7$  имеем

по формуле (49)  $Q = \pm 1,32$  м;

по формуле (56)  $Q = \pm 0,95$  м с влиянием ошибок углов на  $\pm 0,70$  м;

по формуле (57)  $Q' = \pm 0,66$  м с влиянием ошибок углов на  $\pm 0,43$  м.

Нужно ожидать, что при тех же условиях, но при принятии в расчет и базисного условия  $Q'$  будет не более  $\pm 0,60$  м. Важно стремиться к высокоточному определению азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_{n+1}$ , сводя их среднюю ошибку  $k \pm 0'',5^*$ . Что касается вопроса о средней ошибке азимута  $A_k$  любой промежуточной стороны ряда с номером  $k$ , то при пользовании неуравненным рядом мы имели бы

$$\begin{aligned} m_{A_k}^2 &= m_{\alpha_1}^2 + km''^2, \\ m_{A_k}^2 &= m_{\alpha_{n+1}}^2 + (n+1-k)m''^2. \end{aligned}$$

Отсюда можно было бы получить весовое среднее. Но мы воспользуемся формулой Изотова для ошибки в азимуте любой промежуточной стороны ряда, уравненного за условия фигур, азимутов и базисов

$$m_{A_k}^2 = \frac{m_{\alpha}^2}{2} + m''^2 \left[ \frac{2k-1}{5} - \frac{17}{20(2n-1)} - \frac{(20k-17)^2}{100(10n+7)} \right]. \quad (58)$$

С некоторым приближением можно (55) и (56) переписать так

$$q^2 = \frac{2}{15} \frac{m''^2}{\rho''^2} \frac{n^2 + n + 3}{n} L^2; \quad q = \sqrt{\frac{2}{15} \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{n^2 + n + 3}{n}} \cdot L}; \quad (55')$$

\* Потому что при  $m_{\alpha} > 0'',5$  влияние ошибок в исходных азимутах в  $Q$  более влияния ошибок углов треугольников.

$$Q = \sqrt{\frac{m_{\alpha}^2}{\rho''^2} + \frac{2}{15} \frac{m''^2}{\rho''^2} \frac{n^2 + n + 3}{n}} \cdot L; \quad (56')$$

$$Q' = \frac{L}{\rho'' \sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_{\alpha}^2}{\rho''^2} + \frac{n^2 + 1,9n + 12}{15n} m''^2}. \quad (57')$$

Формула (58) предполагает, что  $m_{\alpha_1} = m_{\alpha_{n+1}}$ ; в ней  $2n - 1$  — число всех треугольников ряда,  $2k - 1$  — порядковый номер треугольника в ряде, содержащего промежуточную сторону с номером  $k$ . Если возьмем ряд между двумя выходными сторонами с  $n = 7$ , то  $2n - 1 = 13$ ; средняя сторона — четвертая — будет иметь наибольшую ошибку азимута, для нее  $2k - 1 = 7$ ; при  $m_{\alpha} = m'' = \pm 0'',7$  получим из (58)

$$m_{\alpha_i} = \pm 0'',82.$$

Сравнивая (57) и (56), мы можем сказать, что тщательное определение геодезических азимутов на обоих концах ряда приводит к уменьшению поперечного сдвига ряда примерно в 1,5 раза, одновременно заметно влияя на повышение точности вывода азимутов каждой стороны ряда.

Азимут геодезический вообще, конечно, определяется из геодезических измерений, т. е. из той же триангуляции, и относится к определенному эллипсоиду (по размерам его и ориентировке). Если геодезические азимуты выходных сторон определялись бы из самой триангуляции, то, конечно, контролирующее их значение было бы равно нулю и, будучи сами функциями измеренных углов, они не могли бы служить для их уравнивания. Но, если иметь в виду сеть нечisto геодезическую, а астрономо-геодезическую, то на концах ряда в пунктах  $1$  и  $n + 1$  мы определяем тщательно астрономические азимуты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выходных сторон и астрономические долготы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  пунктов  $1$  и  $n + 1$ , и тогда переход к геодезическим азимутам совершаем так

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 \\ A_2 &= \alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (59)$$

Вывод этих уравнений, очень важных в геодезии, будет дан во II части курса\*, в них под  $L_1$  и  $L_2$  понимаются геодезические долготы пунктов  $1$  и  $n + 1$  (черт. 23), а под  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — широты тех же пунктов. Долготы  $L_1$  и  $L_2$  получают из предварительного вычисления триангуляции; конечно, они также являются функциями углов триангуляции, но должно помнить, что продольный сдвиг ряда длиной в 200 км равен  $\pm 0,6$  м, что при расположении ряда по параллели в наших широтах дает в разности долгот концов ряда среднюю ошибку всего в  $\pm 0'',03$ . Следовательно, если точка  $1$  будет удалена по параллели от исходного пункта триангуляции на 2400 км, то средняя ошибка в  $L_1$  будет всего

$$0'',03 \sqrt{12} = \pm 0'',1.$$

Таким образом, очевидно, что определение азимутов  $A_1$  и  $A_2$  обусловливается в главнейшей степени ошибкой определения астрономических

\* Часть II курса напечатана в IV т. Избранных сочинений Ф. Н. Красовского.

азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и в значительно более слабой степени — ошибками определения астрономических долгот  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и уже совсем в ничтожной степени — ошибками углов триангуляции, влияющими лишь на сотые доли секунды в геодезических долготах. Выводимые по (59) геодезические азимуты  $A_1$  и  $A_2$  называются Лапласовыми азимутами и для этих Лапласовых азимутов характерно, что они могут считаться определенными совершенно независимо от углов триангуляционных рядов. Обстоятельства, могущие понизить точность этих азимутов (они разбираются во II части курса), во всяком случае не стоят в связи с точностью измерения углов в триангуляции. Точность Лапласова азимута может быть получена на любом ряде триангуляции весьма высокой, характеризуемой средней ошибкой  $\pm 0'',7$ . Очевидно, что эта независимость Лапласовых азимутов  $A_1$  и  $A_2$  от углов ряда и высокая точность их определения позволяют использовать их и для контроля углов в ряде и для уравнивания этих углов. Введение этих азимутов в обработку ряда вполне аналогично введению в нее базисов, измеренных на концах ряда. Поскольку эти два базиса влияют сильно на уменьшение продольного сдвига ряда, поскольку два Лапласовых азимута также сильно влияют на уменьшение поперечного сдвига ряда и на уменьшение поперечных деформаций внутри ряда.

Характерно, что в силу (59) каждый новый азимут Лапласа получается в высокой степени независимо от предыдущих и от последующих и независимо от ошибок углов в триангуляции. Поэтому очевидно, что, ориентируя ряд по Лапласовым азимутам в начале или конце его, мы эту ориентировку делаем без искажения ее всеми ошибками триангуляции от исходного ее пункта до начала рассматриваемого ряда (или, вернее, эти искажения будут очень малы). Таким образом, Лапласовые азимуты являются как бы реперами, при подходе к которым аперилируется накопление ошибок в ориентировке элементов триангуляции. Ряд вблизи Архангельска и ряд вблизи Новосибирска будут геодезически ориентированы благодаря азимутам Лапласа, по существу с одной и той же точностью. Любое звено обширной триангуляции можно геодезически ориентировать со средней ошибкой около  $\pm 0'',6$ .

Необходимость определения в триангуляции Лапласовых азимутов очевидна из сказанного и из расчетов настоящего параграфа. Триангуляция с надлежаще расположенными пунктами Лапласа называется уже астрономо-геодезической сетью, потому что при ее построении и вычислении астрономические элементы играют существенную роль.

Применяя формулу (56) к триангуляции II класса, найдем, что при  $m'' = \pm 2'',5$ ,  $m_{\alpha_1} = \pm 1'',0$  и при  $n = 6$  и  $L = 90 \text{ км}$   $Q = \pm 1,22 \text{ м}$ . При  $n = 3$  и  $L = 45 \text{ км}$  мы получим  $Q = \pm 0,52 \text{ м}$ . Отсюда ясно, что поперечные сдвиги могут заметно испортить результаты триангуляции II класса, если ее не заключать между хорошо определенными сторонами основных рядов II класса и I класса. Отсюда же вытекает, что Лапласов азимут должен быть дан в пересечении основных рядов II класса.

Если расстояние между основными рядами II класса и рядами I класса не превышает  $80 \text{ км}$ , то при  $n = 5$ ,  $m'' = \pm 2'',5$ ;  $m_A = \pm 1'',0$  получим по формуле (57):

$$Q' = \pm 0,60 \text{ м.}$$

Это будет сдвиг в конце ряда II класса; в его середине  $Q'$  будет примерно около  $\pm 0,38 \text{ м}$ . При окончательной вставке нашего ряда

II класса между твердыми точками I класса и основного ряда II класса в середине ряда будет наибольший поперечный сдвиг относительно начала или конца ряда, и значение его будет слагаться из величины  $\pm 0,38 \text{ м}$  и из влияния поперечного сдвига пункта основного ряда II класса, конечного для нашего ряда относительно пункта I класса, начального для этого основного ряда.

### § 14. Среднее значение отношений весов уравненных и измеренных величин

**1. Весовые коэффициенты.** Здесь мы просто напомним нужные нам сведения из способа наименьших квадратов. Пусть имсем при посредственных наблюдениях результаты измерений в виде наблюденных величин

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$$

с весами

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n.$$

Вероятные значения этих наблюдаемых величин обозначим соответственно через

$$M_1, M_2, M_3, \dots, M_n.$$

Конечно,

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = l_1 + \delta_1 \\ M_2 = l_2 + \delta_2 \\ \vdots \\ M_n = l_n + \delta_n \end{array} \right\}, \quad (60)$$

если под  $\delta$  понимать вероятную поправку наблюденной величины. Так как речь идет о посредственных наблюдениях, то величины  $M_1, M_2, \dots, M_n$  суть функции искомых неизвестных  $X, Y, Z, \dots$ , число которых  $m < n$ . Мы имеем

$$M_1 = f_1(X, Y, Z \dots)$$

$$M_2 = f_2(X, Y, Z \dots)$$

...

$$M_i = f_i(X, Y, Z \dots)$$

или, вводя приближенные значения неизвестных  $X_0, Y_0, Z_0, \dots$  и их поправки  $x, y, z, \dots$ , напишем

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = l_1 + \delta_1 = M^0_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots \\ M_2 = l_2 + \delta_2 = M^0_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots \\ \vdots \\ M_i = l_i + \delta_i = M^0_i + a_i x + b_i y + c_i z + \dots \\ \vdots \\ M_n = l_n + \delta_n = M^0_n + a_n x + b_n y + c_n z + \dots \end{array} \right\}, \quad (61)$$

причем

$$a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x}; \quad b_i = \frac{\partial f_i}{\partial y}; \quad c_i = \frac{\partial f_i}{\partial z}, \dots$$

$$M^0_i = f_i(X_0, Y_0, Z_0 \dots).$$

Уравнения погрешностей напишутся так

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \dots + w_1 = \delta_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots + w_2 = \delta_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \dots + w_n = \delta_n \end{array} \right\}, \quad (62)$$

причем

$$w_i = M^0_i - l_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Нормальные уравнения, соответствующие системе (62), имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \dots + [paw] = 0 \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z + \dots + [pbw] = 0 \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \dots + [pcw] = 0 \end{array} \right\} \quad (63)$$

Из (63) неизвестные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяются как функции величин  $w$ , и мы имеем право написать

$$\left. \begin{array}{l} -x = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = [\alpha w] \\ -y = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n = [\beta w] \\ -z = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_n w_n = [\gamma w] \end{array} \right\}. \quad (63')$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... определяются, как известно, из способа наименьших квадратов, по следующему правилу. Мы должны написать, кроме (63), такие системы уравнений.

$$\left. \begin{array}{l} [paa]Q_{1\cdot 1} + [pab]Q_{1\cdot 2} + [pac]Q_{1\cdot 3} + \dots + [pam]Q_{1\cdot m} = 1 \\ [pab]Q_{1\cdot 1} + [pbb]Q_{1\cdot 2} + [pbc]Q_{1\cdot 3} + \dots + [pbm]Q_{1\cdot m} = 0 \\ [pac]Q_{1\cdot 1} + [pbc]Q_{1\cdot 2} + [bcc]Q_{1\cdot 3} + \dots + [pcm]Q_{1\cdot m} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ [pam]Q_{1\cdot 1} + [pbm]Q_{1\cdot 2} + [pcm]Q_{1\cdot 3} + \dots + [pmm]Q_{1\cdot m} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)_1$$

$$\left. \begin{array}{l} [paa]Q_{1\cdot 2} + [pab]Q_{2\cdot 2} + [pac]Q_{2\cdot 3} + \cdots + [pam]Q_{2\cdot m} = 0 \\ [pab]Q_{1\cdot 2} + [pbb]Q_{2\cdot 2} + [pbc]Q_{2\cdot 3} + \cdots + [pbm]Q_{2\cdot m} = 1 \\ [pac]Q_{1\cdot 2} + [pbc]Q_{2\cdot 2} + [pcc]Q_{2\cdot 3} + \cdots + [pcm]Q_{2\cdot m} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)_1$$

$$[\text{pam}]O_{1..2} + [\text{pbm}]O_{3..2} + [\text{pcm}]O_{2..2} + \dots + [\text{pmm}]O_{2..m} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} [paa] Q_{1\cdot 3} + [pab] Q_{2\cdot 3} + [pac] Q_{3\cdot 3} + \dots + [pam] Q_{3\cdot m} = 0 \\ [pab] Q_{1\cdot 3} + [ppb] Q_{2\cdot 3} + [pcb] Q_{3\cdot 3} + \dots + [pbm] Q_{3\cdot m} = 0 \\ [pac] Q_{1\cdot 3} + [pcb] Q_{2\cdot 3} + [pcc] Q_{3\cdot 3} + \dots + [pcm] Q_{3\cdot m} = 1 \\ [pad] Q_{1\cdot 3} + [pbd] Q_{2\cdot 3} + [pcd] Q_{3\cdot 3} + \dots + [pdn] Q_{3\cdot m} = 0 \end{array} \right\} \quad (3)_1$$

$$[pam]Q_{1\cdot 3} + [pbm]Q_{2\cdot 3} + [pcm]Q_{3\cdot 3} + \dots + [pmm]Q_{3\cdot m} = 0$$

В уравнениях (1)<sub>1</sub>, (2)<sub>1</sub>, (3)<sub>1</sub>, ... коэффициенты при неизвестных те же, что и в нормальных уравнениях (63), но свободные члены иные,

именно:  $1, 0, 0, 0 \dots 0; 0, 1, 0, 0, \dots 0; 0, 0, 1, 0, \dots 0; 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots 0; 0, 0, 0, \dots 0, 1, 0; 0, 0, 0, \dots 0, 0, 1$ . Число групп  $(1)_1, (2)_1, (3)_1, \dots$ , конечно, равно  $m$ .

## Величины

$$\begin{array}{ccccccccc}
Q_{1 \cdot 1}, & Q_{1 \cdot 2}, & Q_{1 \cdot 3}, & Q_{1 \cdot 4}, & \dots, & Q_{1 \cdot m} \\
& Q_{2 \cdot 2}, & Q_{2 \cdot 3}, & Q_{2 \cdot 4}, & \dots, & Q_{2 \cdot m} \\
& & Q_{3 \cdot 3}, & Q_{3 \cdot 4}, & \dots, & Q_{3 \cdot m} \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & Q_{m-1 \cdot m-1}, & Q_{m-1 \cdot m} \\
& & & & Q_{m \cdot m}
\end{array}$$

называются весовыми коэффициентами. Вычисление их выполняют, приписывая лишние столбцы к Гауссовой схеме решения нормальных уравнений (63): каждый столбец соответствует одной из групп  $(1)_1, (2)_1, (3)_1, \dots, (m)_1$  и заменяет графу со сводными членами в Гауссовой схеме решения уравнений (61).

Имея весовые коэффициенты, вычисляем

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= p_1 [a_1 Q_{1 \cdot 1} + b_1 Q_{1 \cdot 2} + c_1 Q_{1 \cdot 3} + \dots + m_1 Q_{1 \cdot m}] \\
 \alpha_2 &= p_2 [a_2 Q_{1 \cdot 1} + b_2 Q_{1 \cdot 2} + c_2 Q_{1 \cdot 3} + \dots + m_2 Q_{1 \cdot m}] \\
 &\dots \\
 \alpha_n &= p_n [a_n Q_{1 \cdot 1} + b_n Q_{1 \cdot 2} + c_n Q_{1 \cdot 3} + \dots + m_n Q_{1 \cdot m}] \\
 \gamma_1 &= p_1 [a_1 Q_{3 \cdot 1} + b_1 Q_{3 \cdot 2} + c_1 Q_{3 \cdot 3} + \dots + m_1 Q_{3 \cdot m}] \\
 \gamma_2 &= p_2 [a_2 Q_{3 \cdot 1} + b_2 Q_{3 \cdot 2} + c_2 Q_{3 \cdot 3} + \dots + m_2 Q_{3 \cdot m}] \\
 &\dots \\
 \gamma_n &= p_n [a_n Q_{3 \cdot 1} + b_n Q_{3 \cdot 2} + c_n Q_{3 \cdot 3} + \dots + m_n Q_{3 \cdot m}]
 \end{aligned} \quad , \quad (64)$$

и т. д.

Из (64) вместе с  $(1)_1$ ,  $(2)_1$ ,  $(3)_1, \dots$  следует

$$\left. \begin{array}{l} [a\alpha] = 1; \quad [b\alpha] = 0; \quad [c\alpha] = 0; \dots [m\alpha] = 0 \\ [a\beta] = 0; \quad [b\beta] = 1; \quad [c\beta] = 0; \dots [m\beta] = 0 \\ [a\gamma] = 0; \quad [b\gamma] = 0; \quad [c\gamma] = 1; \dots [m\gamma] = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [a\mu] = 0; \quad [b\mu] = 0; \dots \dots \dots [m\mu] = 1 \end{array} \right\}. \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1 \cdot 1} &= \left[ \frac{\alpha x}{p} \right]; & Q_{1 \cdot 2} &= \left[ \frac{\alpha \beta}{p} \right]; & Q_{1 \cdot 3} &= \left[ \frac{\alpha \gamma}{p} \right]; & \dots & Q_{1 \cdot m} &= \left[ \frac{\alpha \mu}{p} \right] \\ Q_{2 \cdot 2} &= \left[ \frac{\beta \beta}{p} \right]; & Q_{2 \cdot 3} &= \left[ \frac{\beta \gamma}{p} \right]; & \dots & Q_{2 \cdot m} &= \left[ \frac{\beta \mu}{p} \right] \\ &\dots &&\dots &&\dots &&\dots \\ &&&&&& Q_{m \cdot m} &= \left[ \frac{\mu \mu}{p} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (66)$$

причем

$$Q_{i \cdot k} = Q_{k \cdot i}.$$

Веса неизвестных  $x, y, z, \dots$  определяются так

$$P_x = \frac{1}{Q_{1,1}}; \quad P_y = \frac{1}{Q_{2,2}}; \quad P_z = \frac{1}{Q_{3,3}}; \quad (67)$$

Подставляя (64) в (63'), получаем

$$\left. \begin{aligned} -x &= [paw] Q_{1\cdot 1} + [pbw] Q_{1\cdot 2} + [pcw] Q_{1\cdot 3} + \dots + [pmw] Q_{1\cdot m} \\ -y &= [paw] Q_{1\cdot 2} + [pbw] Q_{2\cdot 2} + [pcw] Q_{2\cdot 3} + \dots + [pmw] Q_{2\cdot m} \\ -z &= [paw] Q_{1\cdot 3} + [pbw] Q_{2\cdot 3} + [pcw] Q_{3\cdot 3} + \dots + [pmw] Q_{3\cdot m} \end{aligned} \right\}. \quad (68)$$

2. Вывод среднего значения отношений весов уравненных и измеренных величин. Из (60) мы видим, что вес уравненных величин  $M_1, M_2, \dots, M_n$  равен соответственно весам величин  $l_1 + \delta_1, l_2 + \delta_2, \dots$

Из (61) пишем

$$l_i + \delta_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots + M^0 i.$$

Ho no (63')

$$\left. \begin{array}{l} x = -[\alpha w] \\ y = -[\beta w] \\ z = -[\gamma w] \\ \vdots \end{array} \right\}. \quad (69)$$

Следовательно,

Обозначая среднюю ошибку единицы веса через  $\varepsilon$ , будем иметь далее

$$m^2_{Mi} = [a_i \alpha_1 + b_i \beta_1 + c_i \gamma_1 + \dots + m_i \mu_1]^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{p_1^2} +$$

$$+ [a_i \alpha_2 + b_i \beta_2 + c_i \gamma_2 + \dots + m_i \mu_2]^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{p_2^2} +$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ [a_i \alpha_n + b_i \beta_n + c_i \gamma_n + \dots + m_i \mu_n]^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{p_n^2},$$

или для веса  $P_i$  величины  $M_{ij}$

На основании же (66)

$$\frac{1}{P_i} = a_i \{ a_i Q_{1 \cdot 1} + b_i Q_{1 \cdot 2} + c_i Q_{1 \cdot 3} + \dots + m_i Q_{1 \cdot m} \} + \\ + b_i \{ a_i Q_{1 \cdot 2} + b_i Q_{2 \cdot 2} + c_i Q_{2 \cdot 3} + \dots + m_i Q_{2 \cdot m} \} + \\ \vdots \\ + m_i \{ a_i Q_{1 \cdot m} + b_i Q_{2 \cdot m} + c_i Q_{3 \cdot m} + \dots + m_i Q_{m \cdot m} \} \quad (71)$$

Из уравнений (64) переписываем

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (a_i Q_{1 \cdot 1} + b_i Q_{1 \cdot 2} + c_i Q_{1 \cdot 3} + \cdots + m_i Q_{1 \cdot m}) p_i \\ \beta_i &= (a_i Q_{2 \cdot 1} + b_i Q_{2 \cdot 2} + c_i Q_{2 \cdot 3} + \cdots + m_i Q_{2 \cdot m}) p_i \\ &\vdots \\ \mu_i &= (a_i Q_{m \cdot 1} + b_i Q_{m \cdot 2} + c_i Q_{m \cdot 3} + \cdots + m_i Q_{m \cdot m}) p_i \end{aligned}$$

и теперь (71) перепишутся так

$$\frac{1}{P_i} = \frac{a_i \alpha_i}{p_i} + \frac{b_i \beta_i}{p_i} + \frac{c_i \gamma_i}{p_i} + \dots + \frac{m_i \mu_i}{p_i}.$$

Отсюда

$$\frac{p_i}{P_j} = a_i \alpha_t + b_i \beta_t + c_i \gamma_t + \dots + m_i \mu_i. \quad (72)$$

Применяя (72) ко всем измеренным величинам, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{P_1} &= a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + \dots + m_1\mu_1 \\ \frac{p_2}{P_2} &= a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 + \dots + m_2\mu_2 \\ &\vdots \\ \frac{p_n}{P_n} &= a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \dots + m_n\mu_n\end{aligned}$$

Складывая последние уравнения, напишем

$$\left[ \frac{p}{P} \right] = [a\alpha] + [b\beta] + [c\gamma] + \dots + [m\mu].$$

Но применяя (65), это последнее уравнение напишем так

$$\left[ \frac{p}{P} \right] = m.$$

Среднее значение отношений весов измеренного значения  $l$  и уравненного значения  $M$  одной и той же величины получим теперь так

$$\left[ \frac{p}{P} \right] = \frac{m}{n} . \quad (73)$$

Итак, в среднем вес  $P$  уравненного значения величины более веса  $p$  наблюденного значения той же величины в  $\frac{n}{m}$  раз, где  $n$  — число всех наблюденных величин, служивших для определения по ним  $m$  независимых неизвестных.

### § 15. Американские формулы подсчета погрешностей в триангуляции. Геодезический четырехугольник

1. В американской практике средняя ошибка всегда заменяется вероятной ошибкой. Для оценки точности определения стороны из  $r$  «фигур», например из  $r$  геодезических четырехугольников или из  $r$  центральных систем, применяется формула

$$m^2_r = \frac{4}{3} (d'')^2 \sum_1^r \frac{D - C}{D} \sum (\delta_A^2 + \varepsilon_A \delta_B + \delta_B^2), \quad (74)$$

где  $m$  — вероятная ошибка в логарифме стороны;  $d$  — вероятная ошибка наблюдаемого направления;  $D$  — число всех наблюденных направлений в фигуре (в каждой из которых образовалась цепь триангуляции) без двух (направления по исходной стороне каждой фигуры при этом как бы не идут в счет);  $C$  — число условий в каждой фигуре;  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  — перемены логарифмов синусов связующих углов  $A$  и  $B$  в треугольниках фигуры при изменении этих углов на одну секунду (даются в единицах шестого знака логарифма). Величина  $\Sigma(\delta_A^2 + \delta_A \delta_B + \delta_B^2)$  берется в каждой фигуре для всех треугольников, дающих лучшее определение стороны. Сравним эту формулу (74) с (25), заменяя в последней  $m''$  через  $\sqrt[1]{2} d$ , мы получим, пренебрегая членом  $\frac{m_b}{b}$

$$m^2_k = \frac{4}{3} (d'')^2 \sum_1^k (\delta_A^2 + \delta_A \delta_B + \delta_B^2)^*. \quad (25')$$

Если в (25') величины  $m$  и  $d$  считать вероятными ошибками, то разница между (25') и (74) заключается, во-первых, во введении в (74) множителя  $\frac{D - C}{D}$ , а во-вторых, в том, что формула (25') при уравнивании цепи по направлениям действительна только для цепи из равнобедренных (в отношении связующих сторон) треугольников между тем как американская формула (74) этого не оговаривает и в американской практике формула (74) считается применимой при любой форме треугольников, образующих те отдельные фигуры, из которых цепь строится. Другими словами, при уравнивании направлений считается, что (25') или (25) могут как бы применяться неограниченно; это, конечно, совершенно необоснованно.

Только в некоторых случаях можно в цепях, образованных из сложных фигур и уравниваемых по направлениям, переходить от (25') к (74) при посредстве добавки множителя  $\frac{D - C}{D}$ : это будут случаи, когда цепь строится из геодезических четырехугольников, имеющих форму, близкую к ромбу, при угле в нем против меньшей диагонали

\* В случае цепи из геодезических четырехугольников в формуле (25') нужно при сопоставлении ее с (74) считать  $k = 2r$ .

около  $60^\circ$ ; или случаи, когда геодезические четырехугольники заменяются центральными системами из треугольников, близких к равносторонним.

Величины  $\frac{D-C}{D}$  высчитываются американцами так для треугольника

$$\frac{D-C}{D} = \frac{4-1}{4} = 0,75;$$

для геодезического четырехугольника

$$\frac{D-C}{D} = \frac{10-4}{10} = 0,60;$$

для шестиугольной центральной системы

$$\frac{D-C}{D} = \frac{22-7}{22} = 0,68.$$

Из предыдущих параграфов видно, что нет, конечно, никаких оснований вводить множитель  $\frac{D-C}{D} = 0,75$ , если «фигуры» обратились просто в треугольники, близкие к равнобедренным (в отношении связующих сторон); если же фигуры обратились в треугольники произвольной формы, то формула (25') не работает (при уравнивании направлений), а, следовательно, не существует для этого случая и формула (74).

Но допустим, что «фигуры» ряда являются геодезическими четырехугольниками в виде ромбов с углом против меньшей диагонали в  $60^\circ$ . Тогда, выбросив в таком ряде временно длинные диагонали, мы получили бы простую цепь из равносторонних (или близких к ним) треугольников и применяли бы с полным правом для  $m_k^2$  формулу (25'). Назовем через  $m_{k,0}^2$  ту же ошибку в логарифме стороны  $a_k$ , разграничающей ромб с номером  $r = \frac{k}{2}$  от ромба с номером  $r+1 = \frac{k+2}{2}$ , но при условии вывода этой стороны  $a_k$  не по уравненным, а просто по измеренным направлениям.

На основании (73) § 13 мы напишем

$$\frac{m_{k,0}^2}{m_k^2} = \frac{2+4k-k}{2+4k} = \frac{2+3k}{2+4k}$$

( $2+4k$  — число всех наблюденных направлений, связанных  $k$  условиями), что при  $k=4$  дает 0,78, а при  $k=10$  дает 0,76.

Представим себе теперь, что наблюдения исполнены и по большим диагоналям каждого ромба. Каждый ромб дает четыре условия, уменьшающих число независимых, определяемых по способу наименьших квадратов неизвестных, на четыре. Поэтому в формуле (73) будем иметь

в случае одного ромба:  $n=12$ ;  $m=12-4=8$

» „ двух ромбов:  $n=22$ ;  $m=22-8=14$

» „  $r$  „ „  $n=2+10k$ ;  $m=2+10k-4k=6k+2$ .

Таким образом значения  $\frac{m}{n}$  будут

$$\begin{aligned} \text{для одного ромба: } & 0,75 \\ \text{, , двух ромбов: } & 0,64 \\ \text{, , трех } & \text{, } 0,64 \\ \text{, , } r & \text{, } \frac{6k+2}{10k+2}. \end{aligned}$$

С увеличением  $k$  это отношение стремится к 0,60. Если назовем через  $m_{k,y}^2$  среднюю ошибку стороны, разделяющей ромбы с номерами  $r$  и  $r+1$  после уравнивания в ряде всех направлений, то

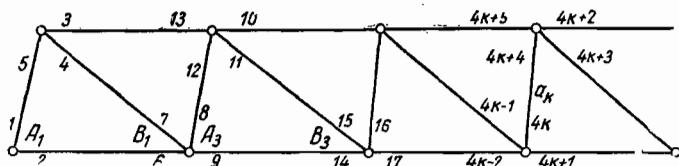
$$\frac{m_{k,y}^2}{m_{k,0}^2} = \frac{6k+2}{10k+2}$$

и поэтому

$$\frac{m_{k,y}^2}{m_k^2} = \frac{(6k+2)(2+4k)}{(10k+2)(2+3k)}.$$

Это отношение очень близко к 0,8. Отсюда вытекает, что для перехода от  $m_k^2$ , даваемого формулой (25'), к  $m_{k,y}^2$  для цепи из указанных ромбов, следует результат, полученный по (25'), умножить на 0,8. Итак, для этого случая ряда из ромбов с углами против меньших диагоналей около  $60^\circ$  в (74)  $\frac{D-C}{D}$  нужно взять не 0,6, как делают в Америке, а 0,8.

Возьмем теперь ряд, изображенный на черт. 26, но не будем делать, как в § 10, предположения, что все треугольники равнобедренные, а ограничимся предположением, что углы  $A$  в нечетных треугольниках



Черт. 26

равны между собой и равны углам  $B$  в четных треугольниках; углы  $A$  в четных треугольниках равны между собой и равны углам  $B$  в нечетных треугольниках, но  $A_k$  не равно  $B_k$ . Понятно, что в этом случае коэффициенты  $[bb \cdot 1]$ ,  $[cc \cdot 2]$ ,  $[dd \cdot 3] \dots$  будут те же самые, что и в § 10. Называя  $\operatorname{ctg} A_1 = \alpha$  и  $\operatorname{ctg} B_1 = \beta$ , получим легко из выводов § 10

$$[ff] = 2a_k^2 \cdot k (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -a_k\alpha; \quad f_2 = a_k\alpha; \quad f_3 = -a_k\beta; \quad f_4 = a_k\beta; \quad f_5 = 0 \\ f_6 &= a_k\beta; \quad f_7 = -a_k\beta; \quad f_8 = -a_k\alpha; \quad f_9 = a_k\alpha; \quad f_{10} = -a_k\beta \\ f_{11} &= a_k\beta; \quad f_{12} = a_k\alpha; \quad f_{13} = -a_k\alpha; \quad f_{14} = a_k\beta; \quad f_{15} = -a_k\beta \\ f_{4k-2} &= +a_k\beta; \quad f_{4k-1} = -\beta a_k; \quad f_{4k} = 0; \quad f_{4k+1} = 0; \quad f_{4k+2} = 0 \end{aligned}$$

$$f_{4k+3} = 0; \quad f_{4k+4} = a_k \alpha; \quad f_{4k+5} = -a_k \beta; \quad \text{все последующие } f = 0$$

$$[af] = (2\alpha - 3\beta) a_k; \quad [bf] = 3(\beta - \alpha) a_k; \quad [cf] = 3(\alpha - \beta) a_k$$

$$[df] = 3(\beta - \alpha) a_k; \dots \dots \dots \quad [kf] = 2(\beta - \alpha) k; \quad [lf] = \alpha a_k$$

Далее, пользуясь соотношениями, установленными в § 10 и 13 для данного вида условных уравнений и выражаящимися формулами

$$[hf \cdot 5] = [hf] + \frac{2[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}$$

$$[sf \cdot s-1] = [sf] + \frac{2[rf \cdot s-2]}{[rr \cdot s-2]},$$

имеем

$$[af] = (2\alpha - 3\beta) a_k = [2(\alpha - \beta) - \beta] a_k$$

$$[bf \cdot 1] = [bf] - \frac{2(\alpha - \beta) - \beta}{3} \cdot a_k =$$

$$= a_k \left[ -3(\alpha - \beta) + \frac{2(\alpha - \beta) - \beta}{3} \right] = -\frac{7(\alpha - \beta) + \beta}{3} \cdot a_k$$

$$[cf \cdot 2] = 3(\alpha - \beta) a_k - \left[ \frac{7}{8}(\alpha - \beta) + \frac{\beta}{8} \right] a_k = \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{8} a_k$$

$$[df \cdot 3] = \left[ -3(\alpha - \beta) + \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{42} a_k \right]$$

$$[ef \cdot 4] = \left[ 3(\alpha - \beta) - \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} + \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{21 \cdot 5,236} \right] a_k$$

$$[gf \cdot 5] = \left[ -3(\alpha - \beta) + \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} - \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} + \frac{34(\alpha - \beta) - 2\beta}{21 \cdot (5,236)^2} \right] a_k$$

$$[hf \cdot 6] = \left[ 3(\alpha - \beta) - \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} + \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} \right] a_k$$

$$[if \cdot 7] = \left[ -3(\alpha - \beta) + \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} - \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} \right] a_k$$

$$[k-1 \cdot f \cdot k-2] = \left[ +3(\alpha - \beta) - \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} + \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} \right] a_k$$

$$[kf \cdot k-1] = \left[ -2(\alpha - \beta) + \frac{3(\alpha - \beta)}{2,62} - \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} \right] a_k$$

$$[lf \cdot k] = \left[ \alpha - \frac{2(\alpha - \beta)}{2,62} + \frac{3(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} \right] a_k$$

Теперь вычисляем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_k^2 P_f} &= 2k(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{[2(\alpha - \beta) - \beta]^2}{6} - \frac{[7(\alpha - \beta) + \beta]^2}{48} - \\
 &- \frac{[17(\alpha - \beta) - \beta]^2}{336} - \frac{1}{5,236} \left[ 9(\alpha - \beta)^2(k - 4) + 4(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \right. \\
 &+ \frac{9(\alpha - \beta)^2 \cdot (k - 4)}{(2,62)^2} + \frac{4(\alpha - \beta)^2}{(2,62)^2} + \frac{(17(\alpha - \beta) - \beta)^2}{42^2} \left( 1 + \frac{1}{(2,62)^2} \right) - \\
 &- \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{7} (\alpha - \beta) - \frac{18(\alpha - \beta)^2}{2,62} (k - 5) - \frac{12(\alpha - \beta)^2}{2,62} - \\
 &- \frac{4\alpha(\alpha - \beta)}{2,62} + \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{7 \cdot 2,62} (\alpha - \beta) + \frac{18(\alpha - \beta)^2}{(2,62)^2} (k - 6) + \\
 &\quad \left. + \frac{12(\alpha - \beta)^2}{(2,62)^2} + \frac{12\alpha(\alpha - \beta)}{(2,62)^2} - \frac{17(\alpha - \beta) - \beta}{7 \cdot (2,62)^2} (\alpha - \beta) \right] \\
 \frac{1}{a_k^2 P_f} &= 2k(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{35,7\alpha^2 - 78\alpha\beta + 45\beta^2}{14} - \frac{1}{5,236} \{ (2,13k - \\
 &- 3,73)(\alpha - \beta)^2 \} - \frac{1}{5,236} \{ \alpha^2 + 0,09(\alpha - \beta)\beta + (3,93k - 18,83)(\alpha - \\
 &- \beta)^2 + 0,22(\alpha - \beta)\alpha \} \\
 \frac{1}{a_k^2 P_f} &= 2k(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{35,7\alpha^2 - 78\alpha\beta + 45\beta^2}{14} - \\
 &- \{ (1,16k - 4,38)(\alpha - \beta)^2 + 0,23\alpha^2 \}. \tag{75}
 \end{aligned}$$

Формула (75) приводит к следующему выражению ошибки  $m$  связующей стороны  $a_k$  треугольника с номером  $k$  в цепи из  $r = \frac{k}{2}$  параллелограммов из треугольников с связующими углами  $A$  и  $B$ , котангенсы которых равны соответственно  $\alpha$  и  $\beta$  в нечетных и  $\beta$  и  $\alpha$  в четных треугольниках

$$\begin{aligned}
 \frac{m^2_k}{a_k^2} &= \frac{d''^2}{\rho''^2} \left\{ 2k(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{35,7\alpha^2 - 78\alpha\beta + 45\beta^2}{14} - \right. \\
 &\quad \left. - (1,16k - 4,38)(\alpha - \beta)^2 + 0,23\alpha^2 \right\}. \tag{75'}
 \end{aligned}$$

При  $\alpha = \beta$  результат, получаемый по формуле (75'), практически совпадает с прежним результатом, полученным по (36). Чтобы перейти теперь от этого  $m_k^2$  к соответствующим геодезическим четырехугольникам в виде параллелограммов, т. е. чтобы учесть влияние выполнения наблюдений по второй диагонали параллелограмма, нужно результат по (75') умножить на 0,8.

Возьмем теперь частный случай, когда  $\alpha = 0$ , т. е. когда геодезические четырехугольники обращаются в прямоугольники. Тогда

$$m^2_r = d''^2 \{ 0,84k + 1,15 \} 0,8 \delta_B^2, \tag{75''}$$

понимая уже под  $m_r$  ошибку в логарифме стороны цепи из четырехугольников.

Для этого же случая формула (74) дает

$$m_r^2 = \frac{4}{3} d''^2 \cdot 0,6 \cdot \frac{k}{2} \cdot 2\delta_B^2 = 0,8 d''^2 \cdot k \cdot \delta_B^2.$$

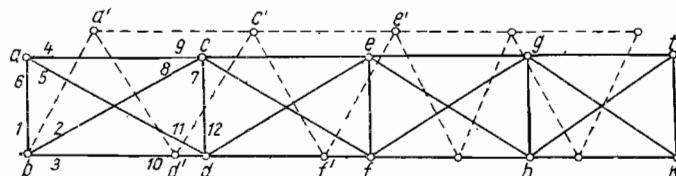
Отсюда получаем результаты, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

| Число четырехугольников | $m_r^2$ по (74)               | $m_r^2$ по (75')               |
|-------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1                       | $1,6 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $2,26 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 2                       | $3,2 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $3,61 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 3                       | $4,8 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $4,95 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 4                       | $6,4 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $6,30 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 5                       | $8,0 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $7,64 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 6                       | $9,6 d''^2 \cdot \delta_B^2$  | $9,00 d''^2 \cdot \delta_B^2$  |
| 7                       | $11,2 d''^2 \cdot \delta_B^2$ | $10,33 d''^2 \cdot \delta_B^2$ |

Табл. 1 показывает, что формула (74) соображена вполне удачно для случая ряда из геодезических четырехугольников, близких к прямоугольникам и уравниваемых по направлениям. Конечно, числа таблицы для  $r=1$  и  $r=2$  не следует принимать во внимание при оценке правильности формулы (74); при обычных, имеющих значение в практике величинах  $k$  и  $r$  погрешность  $m$ , вычисляемая по формуле (74), не превысит 4%, да и то в сторону запаса, в сторону некоторого преувеличения  $m$ . Однако, нельзя формулу (74), как это делают американцы, применять при любой форме геодезического четырехугольника.

Отметим, что формула (25') непригодна для оценки средних ошибок сторон той простой цепи треугольников, которая получилась бы из ряда четырехугольников, если в нем выбросить диагонали  $bc$ ,  $de$ ,  $fg$ , ... (черт. 27), потому что условие равенства связующих сторон в такой цепи очень заметно нарушается.



Черт. 27

Возьмем теперь четырехугольник  $abdc$  (черт. 27), в котором углы при  $b$  и  $c$  равны  $90^\circ$ , а отношение  $bd : ba$ , которое будем называть продвигом фигуры, равно 1,5; в треугольнике  $abd$  угол при  $a$  равен  $56^\circ 5'$ , а угол при  $d$  равен  $33^\circ 5'$ .

По формуле (74) найдем

$$m^2_r = d''^2 k \cdot 0,8 \cdot 10,11 = d''^2 \cdot k \cdot 8,09.$$

Представим себе теперь (черт. 27) цепь равносторонних треугольников  $ba'd'$ ,  $a'd'c'$ ,  $d'c'f'$ , ..., имеющую то же число  $k$  треугольников, что и  $r$  четырехугольников. Тогда по (25') имеем

$$m^2_r = \frac{4}{3} d''^2 k \cdot 4,44 = d''^2 k \cdot 5,92.$$

Следовательно, связующие стороны в ряде из взятых четырехугольников определяются несколько грубее, чем в простой цепи из равносторонних треугольников. Но в действительности стороны равносторонних треугольников будут вряд ли более  $1,2 ab$  и длина простой цепи из  $k$  треугольников будет  $0,6 \bar{ab} \cdot k$ , тогда как длина цепи из четырехугольников будет  $0,75 \bar{ab} \cdot k$ . Следовательно, нам нужно сравнивать не 8,09 и 5,92, а  $8,09$  и  $5,92 \times \frac{0,75}{0,60} = 7,40$ . Как видно, ряд из геодезических четырехугольников с продвигом 1,5 дает в отношении определения связующих сторон точность почти ту же самую, что и простая цепь равносторонних треугольников, имеющая почти ту же ширину (на 5% большую), чем ряд из четырехугольников. Однако, число пунктов в простой цепи будет на 20% более, чем число пунктов в ряде из четырехугольников, что определенно говорит в пользу четырехугольников.

При дальнейшем увеличении продвига четырехугольника, т. е. при уменьшении угла  $\beta = \angle adb$ , уменьшение точности вывода сторон  $dc$ ,  $fe$ ,  $hg$  (черт. 27) быстро нарастает, и по существу, несмотря на экономию из-за уменьшения числа фигур при увеличении продвига, не следует в точной триангуляции применять продвиг, больший 1,6—1,7, и углы  $\beta$ , меньшие  $30^\circ$ . Нужно отметить, кроме того, что при увеличении сторон  $bc$ ,  $de$ ,  $df$  и т. д. (сверх 40 км) точное измерение направлений крайне затрудняется атмосферными условиями и, затрачивая очень много времени на работу по наблюдениям направлений на каждом пункте, мы не будем иметь уверенности, что величина  $d''$  в формуле (74) не возросла более или менее заметно. По отчетам геодезической службы Канады на наблюдения на пункте I класса затрачивается\*:

|                             |       |     |        |
|-----------------------------|-------|-----|--------|
| при средней длине стороны в | 27 км | ... | 5 дней |
| "                           | "     | "   | 40 "   |
| "                           | "     | "   | 120 "  |

Эта табличка очень поучительна и показывает, что не следует гнаться за большим увеличением продвига четырехугольника, тем более, что в ряде районов возможность применения разборных стальных башен при наблюдениях резко снижает ту экономию, которую дают четырехугольники в отношении расходов по постройке геодезических сигналов при применении деревянных сигналов; при этом и в последнем случае нужно иметь в виду, что экономия за счет уменьшения числа построек (сигналов) в довольно большом проценте аннулируется из-за необходимости несколько увеличивать высоту построек вследствие увеличения длин многих сторон в четырехугольниках по сравнению с простой цепью.

\* В районах с сравнительно нередко повторяющимися туманами.

В отдельном четырехугольнике, не принимая во внимание ошибки его выходной стороны, логарифм промежуточной стороны  $bd$  определяется с ошибкой при  $\angle bda = 33^\circ 5'$

$$m^2 = \frac{4}{3} d''^2 \cdot 0,6 \cdot 16,4 = 3,3$$

при  $d = \pm 0'',5$ , если применять формулу (74), и с ошибкой  $m^2 = 3,67$ , если вывод делать строго по способу наименьших квадратов. Для стороны  $bd'$  (черт. 27) в простой цепи имеем при  $d = \pm 0'',5$

$$m^2 = 1,46.$$

Отношение сторон  $bd'$  и  $bd$  будет около 0,7—0,8. Отсюда уже видно, что промежуточные стороны в ряде из геодезических прямоугольников даже при продвиже фигуры в 1,5 будут определены с заметно меньшей точностью, чем в соответственных фигурах в цепи из равносторонних треугольников. Приходится, следовательно, продвигать четырехугольника иметь вообще не более 1,4 и угол  $\beta > 35^\circ$ . Понятно, что и продольный сдвиг в цепи из геодезических четырехугольников с продвижением 1,4—1,5 и более мы должны ожидать большим, чем в цепи из равносторонних треугольников, имеющей то же протяжение и примерно ту же ширину.

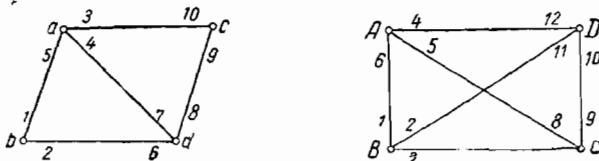
Однако, если отношение квадратов ошибок логарифмов сторон  $bd$  и  $bd'$  равно почти двум, то это отношение для сторон  $df$  и  $d'f'$  будет уже значительно меньшим: во-первых, получение связующих сторон  $cd$  и  $c'd'$  будет почти одинаково точно, и это даст одинаковый квадратический добавок при образовании средних ошибок логарифмов и  $df$ , и  $d'f'$ ; во-вторых, добавочные связи в четырехугольниках скажутся благоприятно для второй фигуры в большей степени. Вообще, в благоприятную сторону на продольный сдвиг в ряде из четырехугольников будет действовать и значительное число добавочных в нем связей по сравнению с простой цепью, и меньшее число фигур, и большая при продвиже 1,4 точность определения связующих, раздельных для фигур сторон.

Не делая достаточно сложного вывода для продольного сдвига ряда из четырехугольников, приведем результат выполненных проф. Ф. Н. Красовским подсчетов для ряда из 6 четырехугольников, в которых

$$\begin{aligned}\angle abd &= 90^\circ, \\ \angle adb &= 35^\circ, \\ \angle bad &= 55^\circ.\end{aligned}$$

Отношение продольных сдвигов ряда из таких четырехугольников и ряда из равносторонних треугольников, имеющего одинаковое протяжение и одинаковую ширину с первым рядом, равно 1,13 (т. е. отношение соответственных  $m^2$  равно 1,27). Следовательно, все понижение точности в ряде из четырехугольников в отношении продольного сдвига выражается 13% по сравнению с рядом из равносторонних треугольников, если продвиг четырехугольника равен 1,43. При большем продвиге этот процент будет быстро возрастать. Так как при уравнивании простой цепи за условия базисов продольный сдвиг при длине цепи в 200 км всего  $\pm 0,63$  м, то, очевидно, при длине звена в 200 км в ряде из четырехугольников будем иметь средний продольный сдвиг около  $\pm 0,72$  м, и конечно, практически эти цифры: 0,72 и 0,63 имеют совершенно одно и то же значение.

2. Перейдем теперь к сравнению точности передачи азимутов в рядах из четырехугольников и в рядах из простых цепей. Возьмем два смежных треугольника (черт. 28) и определим среднюю ошибку азимута стороны  $dc$ , не считаясь с ошибкой ориентировки стороны  $ab$ .



Черт. 28

Имеем условные уравнения

$$(2) - (1) + (5) - (4) + (7) - (6) + w_1 = 0,$$

$$(4) - (3) + (8) - (7) + (10) - (9) + w_2 = 0.$$

Искомая функция  $F = 2 - 1 + 8 - 6$ . Поэтому

$$f_1 = -1; \quad f_2 = +1; \quad f_3 = f_4 = f_5 = 0; \quad f_6 = -1; \quad f_7 = 0; \quad f_8 = +1;$$

$$f_9 = 0; \quad f_{10} = 0;$$

$$[ff] = 4; \quad [af] = +3; \quad [bf] = +1$$

$$[aa] = 6; \quad [ab] = -2; \quad [bb] = +6$$

$$[bb \cdot 1] = \frac{16}{3}; \quad [bf \cdot 1] = 1 + \frac{2,3}{6} = +2$$

$$\frac{1}{P_f} = 4 - \frac{9}{6} - \frac{4,3}{16} = 1,75$$

Возьмем далес геодезический четырехугольник, изображенный на черт. 28, и определим среднюю ошибку азимута его стороны  $CD$ . Условные уравнения в нем напишутся следующим образом

$$(2) - (1) - (6) - (4) + (12) - (11) + w_1 = 0$$

$$(3) - (2) + (9) - (7) + (11) - (10) + w_2 = 0$$

$$(6) - (5) + (3) - (1) + (8) - (7) + w_3 = 0$$

$$\alpha_{6-5} \{(6) - (5)\} - \beta_{5-4} \{(5) - (4)\} + \beta_{3-2} \{(3) - (2)\} -$$

$$- \alpha_{11-10} \{(11) - (10)\} + w_4 = 0$$

В четвертом условии  $\alpha$  и  $\beta$  — изменения логарифмов синусов соответственных углов; так как  $\alpha_{3-1}$  и  $\beta_{12-10}$  равны нулю, то поэтому в четвертом условии не сохранены члены с поправками углов 3—1 и 12—10. Кроме того,

$$\alpha_{6-5} = \alpha_{11-10} = \alpha; \quad \beta_{5-4} = \beta_{3-2} = \beta.$$

Четвертое условие перепишем поэтому еще так:

$$-\beta(2) + \beta(3) + \beta(4) - (\alpha + \beta)(5) + \alpha(6) + \alpha(10) - \alpha(11) + w_4 = 0.$$

Заменяя  $\alpha$  и  $\beta$  котангенсами и принимая  $\alpha = \frac{2}{3}$ ;  $\beta = 1,5$ , получим

$$-1,5(2) + 1,5(3) - 1,5(4) - 2,16(5) + 0,67(6) + 0,67(10) - \\ - 0,67(11) + w_4 = 0.$$

Искомая функция

$$F = 3 - 1 + 9 - 7.$$

Далее

$$f_1 = -1; f_2 = 0; f_3 = +1; f_4 = f_5 = f_6 = 0; f_7 = -1; f_8 = 0; \\ f_9 = +1; f_{10} = f_{11} = f_{12} = 0.$$

$$[ff] = 4; [af] = +1; [bf] = +3; [cf] = +3; [df] = +1,5 \\ [aa] = 6; [ab] = -2; [ac] = +2; [ad] = -1,65 \\ [bb] = 6; [bc] = +2; [bd] = +1,65 \\ [cc] = 6; [cd] = +4,33 \\ [dd] = 12,76$$

$$bb \cdot 1 = \frac{16}{3}; [cc \cdot 2] = 4; [dd \cdot 3] = 7,39$$

$$[bf \cdot 1] = \frac{10}{3}; [cf \cdot 2] = +1; [df \cdot 3] = -0,55$$

Отсюда для  $\frac{1}{P_f}$  получаем 1,45.

Сравнивая этот результат с полученным ранее значением 1,75 для пары треугольников, мы уже отсюда видим, что азимуты в геодезических четырехугольниках передаются лучше, чем в цепях из треугольников. Как и должно было ожидать, отношение  $\frac{1,45}{1,75} = 0,82$ , т. е. близко к 0,8. Значительное число добавочных связей в ряде из четырехугольников и меньшее число передач по сравнению с простой цепью треугольников благоприятно влияют на вывод азимутов и на уменьшение попечерных сдвигов в ряде из четырехугольников. Формула (56') § 13, конечно, может быть применена к любой простой цепи, лишь бы в ней соблюдались постоянство длины промежуточных сторон и примерная прямолинейность цепи.

Поэтому если мы выбросим в ряде, изображенном на черт. 27, диагонали  $bc, de, fg, \dots$ , то будем иметь

$$q = \sqrt{\frac{2}{15} \frac{n^2 + n + 3}{n} \cdot \frac{m''}{\rho''} L}.$$

При переходе к четырехугольникам умножим подкоренное количество на 0,8 и получим

$$q_{\text{четырехуг.}} = \sqrt{0,8 \cdot \frac{2}{15} \frac{n^2 + n + 3}{n} \frac{m''}{\rho''} L}.$$

Если возьмем простую цепь того же протяжения и ширины, что и ряд из четырехугольников, и назовем в пей через  $n'$  число промежуточ-

ных сторон, то при продвиге четырехугольника в 1,4 и при длине промежуточной стороны  $b d'$  (черт. 27) в  $1,18 ab$  будем иметь  $n' = \frac{6}{5} n$  и, следовательно, при  $n = 5$  или при  $n = 10$  можем написать

$$q_{\text{трекг.}} = \sqrt{\frac{2}{15} \cdot \frac{n^2 \cdot \frac{36}{25} + \frac{6}{5} n + 3}{\frac{6}{5} n} \frac{m''}{\rho''} L}.$$

Другими словами, поперечный сдвиг для ряда из четырехугольников примерно в  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  менее, чем поперечный сдвиг для простой цепи, составляя 0,81 от этого последнего сдвига. Конечно, отношение полных сдвигов  $Q$  будет иное, так как ошибки исходных азимутов действуют однобразно и в случае ряда из четырехугольников и в случае ряда из треугольников; отношение  $Q$  для ряда из четырехугольников к  $Q$  для простой цепи примерно равно 0,93. Так как Лапласовы азимуты располагаются через 200 км, то указанное уменьшение поперечного сдвига  $q$  изменяет его размер с  $\pm 0,70$  м на  $\pm 0,57$  м, если цепь не уравнивается между Лапласовыми азимутами, и с  $\pm 0,43$  м на  $\pm 0,35$  м при уравнивании ее между азимутами Лапласа. Полный сдвиг будет изменяться только (5—6) сантиметров.

Вряд ли можно говорить о более или менее частом применении геодезических четырехугольников с продвигом более 1,5. Имея в виду ряды с продвигом 1,4—1,5 и менее, мы можем сказать, что точность определения разных элементов этих рядов (длин сторон, их азимутов, длины и направления диагонали ряда, соединяющей его конечный и начальный пункты) практически в общем одна и та же, что и в цепи из равносторонних треугольников, хотя поперечные сдвиги в ряде из геодезических четырехугольников будут менее на 7—8%, а продольные сдвиги — более на 12—13%, чем в цепях из равносторонних треугольников. Конечно, при этом сопоставлении ряд из треугольников берется того же протяжения и той же ширины, что и ряд из четырехугольников. Преимущества ряда из геодезических четырехугольников заключаются:

1) в более полном контроле наблюдений в каждой фигуре — четыре условия вместо двух в простой цепи; это имеет очень существенное значение в полевых работах и может приводить к лучшей их организации;

2) в меньшем числе пунктов, примерно на 15—16% по сравнению с простой цепью; однако вообще больший метраж построек (сигналов) в ряде из четырехугольников, заметно большая программа наблюдений на каждом пункте триангуляции и большие затруднения при наблюдениях на более длинные расстояния (32—45 км) могут это второе преимущество свести к нулю, а в некоторых районах даже привести к обратному эффекту;

3) в возможности безболезненного перехода, по условиям местности, от более вытянутых фигур к заметно менее вытянутым, от ряда одной ширины к ряду заметно иной ширины; это делает ряды из геодезических четырехугольников значительно более легко приспособляемыми к условиям местности, ее рельефу, чем это имеет место в случае простой

цепи, по необходимости, долженствующей быть почти прямолинейной, и с треугольниками почти равносторонними. Последнее преимущество очень важное для геодезиста; на нем мы остановимся в главе о рекогносцировке. Если в некоторых районах второе преимущество из трех указанных не работает, то преимущества первое и третье остаются в силе, и они настолько существенны, что и в таких районах, путем уменьшения длин сторон  $bd$ ,  $df$ ,  $fh$ , ..., все-таки следует стремиться сохранять, по возможности, построение ряда из четырехугольников.

---

## Г л а в а III

### ОСНОВНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ ТРИАНГУЛЯЦИИ

#### § 16. Общая сводка расчетных формул главы II

Ввиду того, что оценка действия погрешностей играет существенную роль в проектировании триангуляции, мы соберем вместе формулы главы II, снабдив их соответствующими замечаниями, а также приведем и некоторые добавочные формулы.

Вводим следующие обозначения:

$m''$  — средняя ошибка наблюденного угла;

$d''$  — средняя ошибка наблюденного направления;

$b$  — выходная сторона ряда;

$\delta_A$  и  $\delta_B$  — изменения логарифмов синусов связующих углов треугольников ряда при изменении этих углов на одну секунду;

$m_b$  — ошибка выходной стороны;

$m_{s_k}$  — средняя ошибка связующей стороны треугольника с номером  $k$ ;

$m_{a_k}$  — средняя ошибка в геодезическом азимуте той же связующей стороны (она является основной для следующего треугольника с номером  $k+1$ );

$L$  — длина ряда;

$N$  — число всех треугольников ряда;

$n$  — число промежуточных сторон в полной диагонали ряда, идущей по одному краю ряда (согласно черт. 24);  $N$  — число нечетное;  $n = \frac{N+1}{2}$ ;  $L = ns$ ;

$m_L$  — средний продольный сдвиг ряда;

$q$  — средний поперечный сдвиг ряда, обусловленный ошибками углов;

$m_A$  — средняя ошибка Лапласова или геодезического азимута в начале и в конце ряда;

$\vartheta$  — азимут диагонали ряда, соединяющей его конечный пункт с начальным;

$m_x$  — средняя ошибка абсциссы вершины последнего треугольника с номером  $N$ ;

$m_y$  — средняя ошибка ординаты вершины последнего треугольника с номером  $N$ .

### I. Формулы для ошибок связующих сторон

а) При уравнивании по углам простой цепи только за условия фигур, если углы треугольников измерялись независимо один от другого

$$m^2 s_k = m^2 b \cdot \frac{s^2_k}{b^2} + \frac{2}{3} s^2_k \cdot \frac{m'^2}{\rho'^2} \sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i), \quad (22)$$

$$m^2 \lg s_k = \sqrt{m^2 \lg b + \frac{2}{3} m'^2 \sum_{i=1}^k (\delta^2_{A_i} + \delta^2_{B_i} + \delta_{A_i} \delta_{B_i})}. \quad (25)$$

б) При уравнивании ряда из равнобедренных треугольников ( $A=B$ ) по направлениям только за условия фигур

$$\frac{m^2 s_k}{s^2_k} = \frac{m^2 b}{b^2} + (2k - 0,3) \operatorname{ctg}^2 A \cdot \frac{m'^2}{\rho'^2}, \quad (35)$$

$$m^2 \lg s_k = m^2 \lg b + (2k - 0,3) m'^2 \delta^2_A. \quad (a)$$

Для случая цепи из треугольников, близких к равносторонним, формулу (a) можно применять как при уравнивании цепи по углам, так и по направлениям; практически наиболее применимым будет такой ее вид

$$m^2 \lg s_k = 1,7 m'^2 \sqrt{k} \dots \text{ в единицах 6-го знака логарифма} \quad (76)$$

[в (76) мы пренебрегли влиянием ошибки выходной стороны].

в) В цепи равносторонних треугольников, уравненной за условия фигур, базисов и азимутов по направлениям

$$m^2 \lg s_k = \frac{m^2 \lg b}{2} + 0,37 m'^2 \cdot \left[ \frac{8(N-k)k}{N} - \frac{2N+11}{5N+12} \right]. \quad (b)$$

В большинстве случаев можно практически вместо (b) применить такую формулу

$$m^2 \lg s_k = 2,96 m'^2 \frac{(N-k)k}{N} \dots \text{ в единицах 6-го знака логарифма.} \quad (77)$$

г) В ряде из близких к прямоугольникам геодезических четырехугольников, уравниваемом по направлениям (но без приятия в расчет условий базисов и азимутов)

$$m^2 \lg s_r = m^2 \lg b + 0,6 (d'')^2 \sum_{i=1}^{k=2r} (\delta^2_A + \delta^2_B + \delta_A \cdot \delta_B), \quad (c)$$

понимая под  $s_r$  конечную сторону четырехугольника с номером  $r$ , общую со следующей фигурой  $(r+1)$ -ой. В ряде из четырехугольников в виде ромбов с углами  $60^\circ$  и  $120^\circ$ , в формуле (c) множитель 0,6 перед  $d''^2$  заменяется через 0,8.

## II. Формулы для ошибок геодезических азимутов связующих сторон

д) В простой цепи, уравненной за условия фигур по углам

$$m_{\alpha_k}^2 = m_A^2 + \frac{2}{3} k \cdot m''^2. \quad (78)$$

е) В простой цепи, уравненной за условия фигур по направлениям,

$$m_{\alpha_k}^2 = m_A^2 + \frac{2k+5}{10} m''^2. \quad (79)^*$$

## III. Формулы для средних ошибок в координатах и для средних продольных и поперечных сдвигов цепи равносторонних треугольников, уравниваемых только за условия фигур

ж) При уравнивании ряда по направлениям вводим такие выражения:

$$\left| \begin{array}{l} Q_{x \cdot x} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{9} - \frac{10n^2 - 7n - 9}{300} \\ Q_{y \cdot y} = \frac{2}{15} n (n^2 + n + 3) \\ Q_{x \cdot y} = -0,77 n (n - 1) \end{array} \right|. \quad (80)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad m_x^2 &= \frac{m_b^2}{b^2} \cdot L^2 \cos^2 \vartheta + L^2 \sin^2 \vartheta \cdot \frac{m_A^2}{\rho''^2} + \\ &+ \frac{m''^2}{\rho''^2} L^2 \left( \frac{Q_{x \cdot x} \cos^2 \vartheta + Q_{y \cdot y} \sin^2 \vartheta + Q_{x \cdot y} \sin \vartheta \cos \vartheta}{n^2} \right). \\ m_y^2 &= \frac{m_b^2}{b^2} L^2 \sin^2 \vartheta + L^2 \cos^2 \vartheta \cdot \frac{m_A^2}{\rho''^2} + \\ &+ \frac{m''^2}{\rho''^2} L^2 \cdot \frac{Q_{x \cdot x} \sin^2 \vartheta + Q_{y \cdot y} \cos^2 \vartheta + Q_{y \cdot x} \sin \vartheta \cos \vartheta}{n^2}. \end{aligned} \quad (81)$$

и) Средний продольный сдвиг  $m_L$  цепи, уравненной по углам при измерении углов в треугольниках, независимо один от другого

$$m_L^2 = L^2 \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \right]. \quad (41)$$

к) Средний продольный сдвиг цепи, уравненной по направлениям или по углам, в случае измерения на ее пунктах направлений

$$m_L^2 = L^2 \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \left( \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} - \frac{10n^2 - 7n - 9}{300n^2} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \right]. \quad (43)$$

Формула (43) может заменяться формулой (41).

\* Формула (79) приближенная.

л) Средний поперечный сдвиг цепи, уравненной по направлениям,

$$Q = L \cdot \sqrt{\frac{m_A^2}{\rho''^2} + \frac{2}{15} \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n}}. \quad (56')-(82)$$

При уравнивании цепи, в которой измерялись направления, по углам в формуле (82) величина  $q = \sqrt{\frac{2}{15} \frac{m''^2}{\rho''^2} \sqrt{\frac{n^2 + n + 3}{n}}}$  увеличивается на 15%.

#### IV. Формулы для ошибок в координатах и для продольных и поперечных сдвигов в цепи равносторонних треугольников, уравненной за условия фигур, базисов и азимутов

м) Средний продольный сдвиг ряда при уравнивании направлений

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2} \left\{ \frac{m_b^2}{b^2} + \left[ \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} - \frac{(52 - n)^2}{60(25n + 17)n^2} \right] \frac{m''^2}{\rho''^2} \right\}. \quad (46)$$

Формула (46) предполагает при уравнивании цепи исходные азимуты безошибочными. Упрощению

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2} \left\{ \frac{m_b^2}{b^2} + \left[ \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} \right] \frac{m''^2}{\rho''^2} \right\}. \quad (83)$$

Формула продольного сдвига для случая уравнивания углов, измеренных независимо один от другого в треугольниках цепи

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2} \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} \frac{m''^2}{\rho''^2} \right]. \quad (44)$$

Практически формулу (44) можно применять вместо (83), а также и при уравнивании по углам цепи, в которой измерены направления.

н) Средний поперечный сдвиг ряда при уравнивании направлений

$$Q = \frac{L}{\sqrt{2 \cdot \rho''}} \sqrt{m_A^2 + \frac{n^2 + 1,9n + 12}{15n} m''^2}. \quad (57')$$

При уравнивании по углам ряда, в котором измерялись направления, величина  $q$

$$q = \sqrt{\frac{n^2 + 1,9n + 12}{15n} \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{2}}}$$

увеличивается в (57') на 15%.

$$\begin{aligned} \text{o) } m_{x}^2 &= L^2 \left\{ \frac{m_b^2}{2b^2} \cos^2 \vartheta + \frac{m_A^2}{2\rho''^2} \sin^2 \vartheta + \frac{m''^2}{\rho''^2} \frac{(Q'_{x,x} \cos^2 \vartheta + Q'_{y,y} \sin^2 \vartheta)}{n^2} \right\}^* \quad (84) \\ m_y^2 &= L^2 \left\{ \frac{m_b^2}{2b^2} \sin^2 \vartheta + \frac{m_A^2}{2\rho''^2} \cos^2 \vartheta + \frac{m''^2}{\rho''^2} \frac{(Q'_{x,x} \sin^2 \vartheta + Q'_{y,y} \cos^2 \vartheta)}{n^2} \right\}^* \\ Q'_{x,x} &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 10n}{18} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{300} - \frac{(52 - n)^2}{120(25n + 17)} \\ Q'_{y,y} &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{75n^3 + 108n^2 - 58n}{250} - \frac{(66n - 15)^2}{500(20n - 11)} \end{aligned}$$

Выражения для  $Q'_{x,x}$  и  $Q'_{y,y}$  даны А. А. Изотовым. Они могут быть существенно упрощены, а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q'_{x,x} &= \frac{2n^3 - 3n^2 + 10n}{18} = \frac{n}{18} (2n^2 - 3n + 10) \\ Q'_{y,y} &= \frac{n(n^2 + 2n + 12)}{30} - \frac{(13n - 3)^2}{20(20n - 11)} \end{aligned} \right\}. \quad (84')$$

Все формулы III и IV разделов этого параграфа относятся к рядам из пячетного числа треугольников. Как они изменяются в случае четного числа треугольников, можно видеть из сопоставления формул (41) и (42). Формула (43) заменяется тогда такой:

$$m_L^2 = L^2 \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \left( \frac{4n^2 + 3n + 5}{9n} - \frac{10n^2 + 7n - 5}{300n^2} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \right], \quad (43')$$

а формула (82) — следующей:

$$Q = L \sqrt{\frac{m_A^2}{\rho''^2} + \frac{m''^2}{15\rho''^2} \cdot \frac{2n^2 + 5n + 5}{n}}. \quad (82')$$

Очевидно, что формулы (57') и (82) для поперечного сдвига не зависят от формы треугольников цепи; а требуют лишь приблизительной прямо-линейности цепи и равенства между собой промежуточных сторон, расположенных по той диагонали, сдвиг конца которой рассчитывается.

#### V. Сводка формул для практического применения в цепи равносторонних треугольников

а) Уравнивание только за условия фигуры  
 $m_{lg_{sk}} = 1,7m'' \sqrt{k} \dots$  (76) — в единицах шестого знака логарифма;  
 (76) применяется во всех случаях.

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{m_A^2 + \frac{2}{3} km''^2} \dots \text{при уравнивании углов и при изменении углов в цепи} \quad \left. \right\} (78)$$

\* В формулах для  $m_x$  и  $m_y$  величины  $Q'_{x,x}$  и  $Q'_{y,y}$  получены при предположении, что ряд уравнивается между выходными сторонами с безошибочными азимутами, и влияние ошибочности азимутов учитывается отдельно членом с  $m_A^2$ , что, конечно, не вполне правильно.

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{m_A^2 + \frac{2k+5}{10} m''^2} \dots \text{при уравнивании направлений} \quad (79)$$

$$m_L^2 = L^2 \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{4n^2 - 3n + 5}{9n} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \right]. \quad (41) \text{ и } (42)$$

Формулы (41) и (42) применяются во всех случаях; знак -- соответствует (41) и нечетному числу треугольников в цепи

$$Q = \frac{L}{\rho''} \sqrt{m_A^2 + \frac{2}{15} m''^2 \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n}} \dots \text{при уравнивании направлений и при } N \text{ нечетном} \quad (82)$$

$$Q = \frac{L}{\rho''} \sqrt{m_A^2 + \frac{m''^2}{15} \cdot \frac{2n^2 + 5n + 5}{n}} \dots \text{при уравнивании направлений и при } N \text{ четном} \quad (82')$$

б) Уравнивание за условия фигуры, базисов и азимутов по направлениям

$$m_{\lg s_k}^2 = 2,96 m''^2 \cdot \frac{(N-k)k}{N} \dots \text{в единицах шестого знака логарифма;} \quad (77)$$

$$m_{\alpha_k}^2 = \frac{m_A^2}{2} + \frac{m''^2}{25} \left[ (5k+12) - \frac{(5k+6)}{5N+12} \right]; \quad (\alpha)$$

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2} \left[ \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} \right]. \quad (44)$$

Формулу (44) можно применять и при уравнивании по углам, если в цепи измерены направления,

$$Q = \frac{L}{\sqrt{2\rho''}} \cdot \sqrt{m_A^2 + \frac{n^2 + 2n + 12}{15n} m''^2}. \quad (57')$$

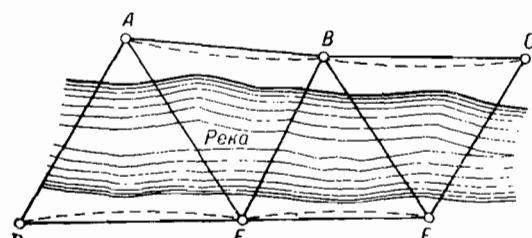
Конечно, раздел V приведен лишь для удобства пользования расчетными формулами — это выборка из сводки.

## § 17. Действие систематических ошибок в углах треугольников

До сих пор мы говорили лишь о действии в триангуляции ошибок случайного характера. Но, конечно, измерение горизонтальных углов в триангуляции сопровождается еще систематическими погрешностями, зависящими отчасти от инструмента и принятого метода измерения углов, а, главным образом, от внешних влияний. Нетрудно сообразить, что систематическая ошибка в угле, меньшая в два с половиной раза величины  $m''$ , обусловит при  $n=6$  тот же поперечный сдвиг цепи, что рассчитываемый по формуле (57'). Итак, систематические ошибки в угле порядка  $\pm 0'',2$  уже имеют значение в триангуляции I класса, а систематические ошибки в  $\pm 0'',8$  — в триангуляции II класса. Отсюда ясно, с какой осторожностью, вдумчивостью и тщательностью нужно производить наблюдение углов в триангуляции.

Мы можем надеяться на то, что влияние систематических ошибок углов на длину ряда заметно снижается при уравнивании ряда за условие базисов, а влияние их на поперечные сдвиги пунктов ряда заметно снижается при уравнивании ряда за условия азимутов. Но так как при

этих уравниваниях искажки условий будут слагаться из суммы случайных ошибок и из суммы влияний систематических ошибок, то успех уравнивания в значительной степени зависит от малости влияний случайного характера. Во всяком случае ясно, что в основной триангуляции на работу по наблюдениям углов нужно смотреть, как на очень тонкую научно-техническую работу. Считаясь с внешними влияниями, приходится при проектировании триангуляции и при ее рекогносцировке учитывать те особенности местности, которые могут оказываться вредно на результатах наблюдений углов, в частности, — в смысле их систематических искажений. Опыт, например, достаточно выявил возможность систематических искажений углов в тех случаях, когда направления, образующие угол, проходят вдоль склонов речной долины: лучи  $AB$ ,  $BC$ ,  $DE$ ,  $EF$  искривляются (черт. 29) в сторону реки.



Черт. 29

Географическое изучение района работ в особом геодезическом разрезе и ознакомление с его физико-географическими особенностями непосредственно на месте должны предшествовать составлению проекта основных геодезических работ на его территории.

### § 18. Деформации при вставке тригонометрических сетей между опорными пунктами и сторонами высшего класса

Положим для триангуляции I класса

$$m'' = \pm 0'',7; \quad s = 30 - 32 \text{ км};$$

для основных рядов II класса

$$m'' = \pm 1'',2; \quad s = 25 \text{ км}; \quad L = 200 \text{ км};$$

для заполняющих сетей II класса

$$s = 15 \text{ км}; \quad m'' = \pm 2'',5; \quad L = 80 - 90 \text{ км}.$$

Рассмотрим сперва частный пример. Пусть на черт. 30:  $AB$  и  $AC$  — ряды триангуляции I класса;  $BD$  — основной ряд II класса; между рядами  $AC$  и  $BD$  вставляется ряд  $CD$  триангуляции II класса. Расстояние  $AB = 80 - 90 \text{ км}$ , расстояния  $AC$  и  $BD$  — около  $45 \text{ км}$ . Примем  $A$  за начало координат и  $m_A$  для ряда  $AC$  и  $AB$  равным нулю. Расчет средней ошибки в ординате  $C$  сделаем так

$$m_y = \frac{0'',7}{\rho''} \sqrt{(45\,000)^2 + (15\,000)^2} = \pm 0,16 \text{ м.}$$

Далее этот результат, так как мы должны ввести уравненные углы, умножаем на  $0,8$  и получаем  $\pm 0,12 \text{ м}$ .

При расчете ошибки в ординате  $B$  применим (41) и тогда получим  $\pm 0,35$  м. Но звено  $AB$  и его продолжение уравнивались за базисы и азимуты, причем точка  $B$  лежит в середине ряда, для конечного пункта которого это уравнивание понижает результат по (41) в 1,87 раза. Допустив, что уравнивание за базисы и азимуты уменьшает попечерный сдвиг, свойственный уравниванию только за условия фигур, в 1,25 раза для средней точки ряда, мы будем близки к истине. Таким образом, получаем:  $m_y$  для  $B$  равно  $\pm 0,28$  м. Принимая в  $B$  среднюю ошибку исходного азимута равной  $\pm 1''$ , подсчитываем по формуле (82) накопление средней ошибки в ординате по ряду  $BD$  и получаем его равным  $\pm 0,19$  м, и тогда выводим среднюю ошибку в ординате пункта  $D$ :

$$\sqrt{(0,28)^2 + (0,19)^2} = \pm 0,34 \text{ м.}$$

Для ряда  $CD$  сделаем подсчет  $m_L$  по формуле (44) при

$\frac{m_b}{b} = 1 : 120\,000$  и получаем:  $m_L = \pm 0,92$  м. Нетрудно сообразить, что среднее искажение расстояния  $CD$ , обусловленное ошибками построения рядов  $AC$ ,  $AB$  и  $BD$ , равно

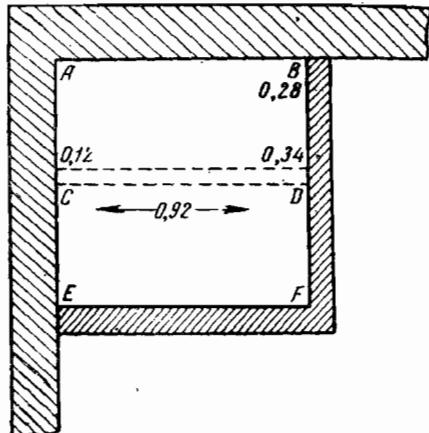
$$\sqrt{(0,12)^2 + (0,28)^2 + (0,19)^2} = \pm 0,36 \text{ м.}$$

Эта величина  $\pm 0,36$  м несколько преувеличена, так как не принято во внимание при ее подсчетах влияние уравнивания полигона I класса и уравнивания при вставке основных рядов II класса в полигон I класса. Сопоставление 0,92 с 0,36 показывает, что принятая система построения рядов высших классов дает хорошие по жесткости рамки для контроля заполняющих сстей II класса и для обработки этих сстей.

Но возьмем теперь среднюю точку  $M$  на ряде  $CD$  и рассчитаем ту среднюю ошибку в ее ординате, которая получится в результате вставки ряда  $CD$  между опорными точками  $C$  и  $D$  как между жесткими. Допустим сперва, что элементы ряда  $CD$  измерены совершенно безошибочно. Тогда, учитывая ошибочность определения выходных сторон в  $C$  и  $D$  и принимая во внимание, что при вставке ряда  $CD$  веса координат точек  $C$  и  $D$  будут приниматься бесконечно большими и точки  $C$  и  $D$  будут рассматриваться совершенно жесткими, мы получим

$$m_{y_m}^2 = \frac{(012)^2 + (034)^2}{4} + \frac{(22\,500)^2}{(180\,000)^2} + \frac{(22\,500)^2}{(110\,000)^2},$$

$$m_{y_m} = \pm 0,25 \text{ м.}$$



Черт. 30

назовем через  $\delta_{y_m}$ . Применим для точки  $M$  формулу Изотова для продольного сдвига промежуточной точки ряда, уравненного за условия фигур, базисов и азимутов

$$(m_L^k)^2 = \left\{ \frac{4n_k^3 - 3n_k^2 + 5n_k}{9} - \frac{10n_k^2 - 7n_k - 9}{300} - \frac{(20n_k^2 - 11n_k + 1)^2}{60(20n - 11)} - \frac{(25n_k^2 - 24n_k + 1)^2}{60(50n + 34)} \right\} \frac{m''^2}{\rho''^2} s^2, \quad (84'')$$

причем  $n_k$  — число промежуточных сторон от  $C$  до  $M$ , равное трем, а  $n$  — число всех промежуточных звеньев в ряде; в нашем случае  $n = 6$ . При  $s = 15\ 000\ m$ ,  $m = \pm 2'',5$  получаем из этой формулы Изотова

$$\delta_{y_m} = \pm 0,42\ m.$$

Следовательно, действительная средняя ошибка  $M_{y_m}$  в положении точки  $M$  по оси ординат, слагающаяся и из действия ошибок в ординатах  $C$  и  $D$ , и из действия ошибок самого ряда  $CD$ , вычисляется так

$$M_{y_m}^2 = m_{y_m}^2 + \frac{2 \cdot (0,42)^2}{4} = (0,25)^2 + \frac{(0,42)^2}{2},$$

$$M_{y_m} = \pm 0,36\ m.$$

Итак, если окончательное искажение в положении по оси ординат точки  $M$  характеризуется средней ошибкой  $\pm 0,36\ m$ , то в этом числе  $\pm 0,25\ m$  падает на долю влияния ошибок координат пунктов рядов I класса и основных рядов II класса; эта последняя деформация вовсе не мала по сравнению с общей деформацией. При больших, чем приведенные в нашем примере, расстояниях между рядами I класса и основными рядами II класса соотношение между  $m_{y_m}$  и  $M_{y_m}$  сделалось бы более невыгодным.

Если представить себе, что параллельно ряду  $CD$  в расстоянии от него в 15—20 км проложен ряд II класса, то средняя точка  $M'$  этого ряда будет иметь среднюю ошибку в ординате около  $\pm 0,30\ m$ , а разность ординат  $M'$  и  $M$  будет искажена средней ошибкой  $\pm 0,43\ m$  при расстоянии между точками около 15 км. Конечно, такое искажение приведет к недоразумениям при дальнейших сгущениях сетей. Но если мы или покроем сплошной сетью треугольников II класса всю площадку  $ABFE$  (черт. 30) и будем уравнивать и вычислять треугольники такой заполняющей сети все вместе, или если между цепями заполняющей сети мы сделаем соединения (перемычки) и применим и в этом случае общее уравнивание всех таких цепей и соединительных рядов или треугольников между ними, то, очевидно, деформации, обусловленные ошибками в самой заполняющей сети, будут после такого общего уравнивания изменяться при переходе от группы в 3—4 треугольника к группе смежной из такого же числа треугольников медленно и на небольшие величины; различие же деформаций для таких смежных групп, обусловленных ошибками опорных рядов высших классов, будет само собой очень невелико. Все это обеспечит удовлетворительные результаты в построении всей заполняющей сети.

На южной границе полигона  $ABFE^*$  (рис. 30) деформации в координатах, обусловленные ошибками рядов высших классов, достигнут  $\pm 0,30 \text{ м}$  при общей деформации  $\pm 0,43 \text{ м}$ , т. е. здесь деформации, вносимые ошибками координат опорных рядов, сравняются с деформациями в самих сетях II класса. Однако, нужно помнить, что деформации самих сетей II класса при этом определяются в зависимости от благоприятного действия на них уравнивания между сторонами и азимутами в триангуляциях высших классов.

Другими словами, ряды I класса и основные ряды II класса уменьшают посредством условий базисов и азимутов почти в два раза деформации в ординатах точек  $M$ , лежащих на среднем меридиане полигона (аналогичное явление будет иметь место в отношении абсцисс точек, лежащих на средней параллели полигона), и такие уменьшенные деформации 0,43 и 0,35 мы сравниваем соответственно с деформациями 0,30 и 0,25, вносимыми при вставке сети II класса в координаты пунктов этой сети уже после уравнивания сети II класса за условия фигур, базисов и азимутов.

Таким образом, отлично определенные длины сторон и их азимуты в триангуляции I класса и в основных рядах II класса делают из крупных малых те деформации, которые мы назвали деформациями самой сети II класса; но, принеся эту большую пользу, ряды высших разрядов затем неизбежно вносят в окончательное построение сети II класса добавочные малые искажения, соответствующие неизбежным различиям искажений в координатах разных точек высших разрядов. Понятно, что для построения сетей II класса важно, чтобы при этом добавочные деформации, вносимые ошибками координат пунктов высших разрядов, мало изменялись бы с изменением места определяемого пункта II класса на площади  $ABFE$ . Это достигается в высокой степени при принятой у нас схеме построения рядов I класса и основных рядов II класса и удостоверяется приведенными значениями средних ошибок ординат точек  $C, B, D$  и  $E$ , изменяющихся от  $\pm 0,12 \text{ м}$  до  $\pm 0,23 \text{ м}$  на протяжении 90 км. Тем не менее, при соображении допусков при составлении условий координат в сетях II класса, ошибки координат исходных пунктов должно принимать во внимание.

## § 19. Основные соображения при проектировании триангуляции

**1. Длина сторон.** Увеличение длины сторон треугольников в равнинных или в слегка всхолмленных районах приводит к необходимости сооружать на тригонометрических пунктах высокие геодезические сигналы до 40—60 м высотой. Кроме того, в районах этого типа атмосферные условия очень затрудняют выполнение точных наблюдений, если расстояние между смежными пунктами триангуляции более 25—30 км. Малая прозрачность низших слоев атмосферы, почти постоянные нарушения равновесия в этих слоях (конвекционные токи) приводят к тому, что в ожидании благоприятного для наблюдений времени геодезист должен терять недели на каждом пункте, если длина сторон взята слишком большой для условий видимости в данном районе.

В средних и северных районах СССР обилие лесов и болот приводит при равнинном характере территории к тому, что видимость наблю-

\* Если бы взяли за начало координат  $E$ , то сказанное относилось бы к северной части полигона.

даемых в триангуляции предметов сильно снижена вследствие избытка влаги в нижних слоях атмосферы; здесь не следует применять в триангуляции I класса расстояний более 30 км. В южных степных районах СССР дело обстоит еще хуже и иногда даже много хуже; значительное нагревание воздуха днем и резкое остывание почвы и воздуха ночью сопровождаются значительными перемещениями и перемешиваниями нижних воздушных слоев; удовлетворительная видимость удаленных земных предметов нередко имеет место всего 1 час или даже менее за сутки. Здесь нередко приходится ставить вопрос о длине сторон в триангуляции I класса между 20 и 25 км. В районах горных и с крупным рельефом дело в большинстве случаев существенно меняется: здесь вообще выгодно переходить к значительным по длине сторонам в триангуляции I класса. В этих районах стороны триангуляции I класса могут быть длиной в 70 км и даже в 100 км; в периоды туманов здесь не видны как далекие, так и близкие предметы, но когда туманы, иногда длящиеся неделями, рассеиваются, то прекрасная видимость устанавливается и для очень далеких объектов.

Для наших обычных условий нормальную длину стороны триангуляции I класса следует считать около 30 км и скорее несколько менее 30 км, чем более. На нашей огромной территории наблюдается значительное разнообразие районов в физико-географическом отношении. Предварительное изучение особенностей районов, важных при проведении основных геодезических работ, должно давать основание к установлению размера сторон треугольников I класса в тех или иных районах. К сожалению, программы такого изучения не установлены, и использование физической географии в геодезии носит еще примитивный характер.

В заполняющей сети II класса длины сторон должны быть в среднем около 15—16 км, не превосходя вообще 20 км. Надежность измерения горизонтальных углов в триангуляции зависит не только от инструмента, наблюдателя и принятой программы наблюдений, но и в значительной степени от внешних условий. Опыт показывает, что при расстояниях более 20 км определение направления с средней ошибкой около  $\pm 1'',7$ , как это должно быть в триангуляции II класса, требует уже в большинстве случаев применения так называемой «световой сигнализации» (см. главу «Об измерениях углов»). Это, однако, не практикуется в триангуляции II класса и поэтому здесь приходится идти на снижение длины стороны в среднем до 15 км, что вполне согласуется, кроме того, с топографическими требованиями к этой триангуляции.

**2. Частота базисов.** Любая сторона триангуляции I класса может быть использована в качестве базиса для построения на ней триангуляции II класса. Обращаясь к черт. 30, подсчитаем по формуле (84') § 18 часть ошибки в разности абсцисс точек  $B$  и  $D$ , обусловленную только действием ошибок углов; при этом  $n_k = 2$ ;  $s = 22\ 500$  м;  $n = 4$  и для  $m_L$  получаем при  $m'' = \pm 1'',2$  значение  $\pm 0,19$ . Применяя (41), получим  $m_L = \pm 0,22$  м. Влияние ошибок базисов даст при  $\frac{m_b}{b} = 1 : 200\ 000$  искажение  $\frac{45}{200\sqrt{2}}$ , равное  $\pm 0,16$  м, и полная ошибка в разности абсцисс точек  $B$  и  $D$  окажется равной  $\sqrt{0,0360 + 0,0256} = \sqrt{0,0616} = \pm 0,25$  м. Принимая во внимание расчеты в § 18, вряд ли

следует идти на увеличение этой ошибки, чтобы не поколебать значения триангуляции I класса при вставке в ее полигоны сетей II класса. Таким образом, мы приходим к заключению, что в рядах I класса следует держаться точности вывода сторон после уравнивания рядов за условия фигур, базисов и азимутов, не ниже 1 : 180 000—1 : 200 000.

Формула (77) показывает, что наиболее слабо определяется в ряде триангуляции I класса сторона среднего треугольника; при  $k = \frac{N}{2}$  мы имеем

$$m^2_{\lg b} = \frac{m^2_{\lg b}}{2} + 2,96 m''^2 \cdot \frac{N}{4}.$$

Так как  $m'' = 0'',7$ , а 1 : 200 000 в единицах шестого знака логарифма равно 2,17, то

$$\frac{m^2_{\lg b}}{2} + 1,48 \frac{N}{4} = (2,17)^2,$$

Принимая  $\frac{m_b}{b} = 1 : 400 000$ , имеем далее

$$0,59 + 0,37 N = 4,71;$$

$$N \approx 13.$$

В триангуляции I класса ошибки выходных сторон дают в базисном условии член, среднее квадратическое значение которого равно  $\sqrt{2 m^2_{\lg b}}$ ; в том же условии ошибки углов дают при равносторонних треугольниках член  $\sqrt{\frac{2}{3}} m'' \sqrt{N} \sqrt{4,47}$ . Пусть  $\frac{m_b}{b} = 1 : 300 000$ , т. е.  $m_{\lg b} = 1,44$ ; потребуем, чтобы

$$\sqrt{2 m^2_{\lg b}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} m'' \sqrt{N} \sqrt{4,47}.$$

Только тогда контрольющее значение базисов в определении связующих сторон будет достаточно и не излишне обеспечено.

Теперь получаем

$$4,15 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 N \cdot 4,47,$$

$$N \approx 11.$$

Это достаточно согласуется с предыдущим расчетом.

Таким образом, в рядах триангуляции I класса следует иметь базисные сети через 12—13 основных треугольников при общей длине ряда ( $n = 6$ ) в 6 s, т. е. в наших условиях длина стороны полигона I класса должна быть около 180—200 км. Так как  $\delta^2_A + \delta^2_B + \delta_A \delta_B = 4,2$  для равностороннего треугольника, то можно дать такое указание при составлении проекта ряда I класса и при выполнении его рекогносировки: сумма величин  $(\delta^2_A + \delta^2_B + \delta_A \delta_B)$ , выбираемых для треугольников ряда по таблице § 9 — не должна превышать  $13 + 12 \times 4,2 = 63$ .

Заметим, что в США требуют иметь стороны полигонов I класса в 166 км, но наибольшая  $\Sigma R'$  для ряда между двумя базисами устанавливается в 75—80; при этом под  $R'$  попимается  $\frac{D-C}{D} (\delta^2_A + \delta^2_B + \delta_A \cdot \delta_B)$ . Для четырехугольника с продвигом 1,5 величина  $R' = 12$ ; следовательно,

ряд между базисами составится из 6—7 таких четырехугольников и будет иметь длину около 240 км. И действительно, в США нередки случаи, когда базисные сети согласно этому расчету не приходятся в местах скрещивания рядов I класса, имеющих взаимно перпендикулярные направления. (Это, конечно, не служит к удобству дальнейшей обработки рядов I класса). Очевидно, требования в США к точности результатов триангуляции I класса весьма близки к нашим: в самом деле, ошибка в логарифме последней стороны ряда у нас будет вычисляться так

$$\sqrt{\frac{2}{3} (m'')^2 \cdot 63} = \sqrt{\frac{63}{3}} \approx \pm 4,6.$$

При длине ряда, образованного из пяти четырехугольников в 200 км, имеем при продвиге 1,5:  $\Sigma R' = 60,0$ ; ошибка же в логарифме конечной стороны пятого четырехугольника будет:  $\sqrt{\frac{4}{3} (d'')^2 \Sigma R'}$ , т. е. она вычисляется как  $\sqrt{\frac{60}{3}} = \sqrt{20} = 4,5$ . Но, конечно, это относится только к четырехугольникам, близким к прямоугольникам.

**3. Длина базисов и вид базисных сетей.** Здесь приходится исходить из соображения, приведенного уже в § 12, а именно: подсчеты продольных сдвигов в рядах триангуляции I класса, уравненных за условия базисов и азимутов, показывают, что ошибки углов треугольников дают средний продольный сдвиг ряда длиной в 200 км всего около  $\pm 0,52$  м; ошибки же выходных сторон дают около  $\pm 0,36$  м, если каждая из них имеет точность 1 : 400 000, и  $\pm 0,47$  м — при точности их 1 : 300 000. Точность определения суммарных элементов триангуляции, т. е. длины и направлений полных диагоналей ряда, оказывается весьма высокой, и, конечно, никак нельзя пойти на то, чтобы определение этих элементов, поскольку оно зависит от ошибок углов треугольников, ухудшилось бы заметно ошибками выходных сторон. Отсюда ясно, что длина базиса и вид базисной сети должны возможно приближать точность определения выходной стороны к 1 : 400 000. (Это требование совершенно не согласуется, между прочим, с мнением, которое существовало у некоторых геодезистов лет 30—40 назад и заключалось в том, что так как уже во втором-третьем треугольнике связующие стороны будут искажены действием ошибок углов на 1 : 100 000, то, следовательно, высокая точность определения выходной стороны бесполезна.)

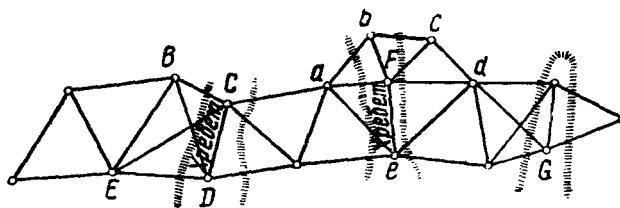
В главе «Базисные сети» будут обоснованы выгоднейшие построения базисных сетей, и, как увидим там, наиболее простое решение, обеспечивающее точность выходной стороны в 1 : 400 000, требует длины базиса около 8 км и базисной сети в виде ромба, короткой диагональю которого служит базис, а углы при концах длиной диагонали которого должны быть около 34—35°. Но местность нередко ставит существенные препятствия для осуществления этого наилучшего решения, — главным образом, в выборе места для базиса. Например, в Карелии и в районе Мурманской железной дороги местность покрыта достаточно причудливыми цепями небольших гор и отдельными возвышенностями, причем узкие долины заняты озерами и болотами; здесь выбор базиса длиной в 3—4 км представляет существенные трудности; напрашивается измерение базисов по крупным озерам — зимой по льду. На Дальнем Востоке сплошная заболоченность долин, обусловленная

мерзлотой, ставит существеннейшие препятствия к измерению длинных базисов. Поэтому вовсе не приходится, во-первых, рассматривать определение выходной стороны в триангуляции I класса с точностью 1 : 400 000 как требование категорическое; во-вторых, при проектировании триангуляции нужно иметь достаточные сведения о подлежащей геодезическому обслуживанию территории, собранные в порядке исполнения так называемой геодезической разведки. Выбор базиса является делом, настолько тесно связанным с деталями местности, что проектирование базисов наперед, по имеющимся картам, в большинстве случаев дает решение, которое затем сильно изменяется на местности; с выбором же базиса связан и вид базисной сети. Но тем не менее геодезическая разведка, предшествующая составлению проекта, позволит при составлении проекта паметить с известным основанием ту сторону ряда, которая может быть принята за выходную, или то место ряда, в котором расположится будущая базисная сеть; эта же разведка может дать возможность запроектировать и наилучший для данного района тип базисных сетей, возможно, очень отличающийся от простой ромбической, но дающей удовлетворительный результат. Хоть эти проектирования могут оказаться и далеко не всегда приемлемыми на местности, но обдумать их заранее перед исполнением будущей рекогносцировки далеко не лишнее. Виды особых построений базисных сетей будут даны в соответствующей главе.

**4. Вид фигур, применяемых при проектировании ряда.** При проектировании триангуляции I класса следует с выгодой использовать рельеф местности и применять именно те фигуры, которые, соответствующа этому рельефу, дают удовлетворительную точность определения сторон треугольников и координат их вершин. Этим самым будет избегнута в ряде случаев необходимость возведения высоких построек для наблюдений, и сами наблюдения будут проходить в более благоприятных условиях, что обеспечит и большую скорость их выполнения, и большую точность их результатов. Нужно помнить, что если между двумя пунктами  $A$  и  $B$  имеется препятствие, например, в виде леса или возвышенности, которое удалось преодолеть сооружением в  $A$  и в  $B$  высоких геодезических сигналов, то все-таки визирный луч с  $A$  на  $B$  или с  $B$  на  $A$  при наблюдениях и с этих высоких сигналов будет обычно проходить сравнительно близко к препятствию между  $A$  и  $B$ ; это может приводить к постоянному искривлению луча  $AB$ , и, по существу, получение точных результатов в этом случае требует выполнения наблюдений, растянутых на очень длинный период времени.

Следует принять, что ряд I класса может образовываться из комбинаций различных фигур, т. е. из треугольников, близких к равносторонним, из геодезических четырехугольников, из центральных систем. Именно введение в цепь из равносторонних треугольников в соответствующих ес местах геодезических четырехугольников и центральных систем или позволит с успехом обойти препятствие в виде возвышенности, или даст безболезненный переход к треугольникам с заметно меньшими сторонами, соответствующими продвижению ряда по узкой долине, или, наконец, даст возможность безболезненно изменить направление ряда соответственно изменившемуся направлению водоразделов. Следует, наоборот, помнить, что стремление образовать ряд непременно только из равносторонних треугольников равносильно отрицанию необходимости приспособляться к местности, которая не может отвечать геометрическим построениям. С этой же точки зрения для нас не-

приемлемо в жесткой форме и полное отрицание в триангуляции I класса простых цепей из близких к равносторонним треугольников, которое выдвигается в настоящее время по линии Международного геодезического союза. Требование строить ряды I класса только из сложных фигур (центральных систем или из геодезических четырехугольников) может в местностях со слабым рельефом и притом достаточно залесенных приводить к значительному удорожанию работ и к значительному их замедлению; между тем, как показал анализ действия погрешностей в главе II, точность результатов и в простых цепях в общем не ниже, чем в рядах, составленных из сложных фигур (при условии, конечно, соответственного оснащения простых цепей базисами и азимутами Лапласа). Черт. 31 представляет собой пример построения ряда с использованием комбинаций разных фигур. Возвышенность по линии *CD*



Черт. 31

препятствует разбивке следующего за *BED* равностороннего треугольника и, наоборот, благоприятствует осуществлению геодезического четырехугольника *BCDE*, дающего прекрасное определение сторон. Возвышенность *bFe*, препятствующая развитию равносторонних треугольников к востоку от *ae*, позволяет разбить центральную систему *abcdg* с полюсом в *F*, дающую хорошую жесткость. Пользуясь таблицей величин *R* § 9 и соображая для сложных фигур множитель  $\frac{D-C}{D}$ , мы рассчитываем для ряда, изображенного на черт. 31, накопление ошибок в его связующих сторонах и сопоставляем результат с требованиями, выдвинутыми в п. 2 настоящего параграфа. Эта же таблица показывает, что  $\delta^2_A + \delta^2_B + \delta_A \cdot \delta_B$  равно 4,4 для ряда треугольников, заметно отличающихся по форме от равносторонних. Следовательно, можно подобрать сложные фигуры, комбинация которых вместе с равносторонними треугольниками не даст понижения точности ряда\*, позволяя в то же время с выгодой обходить препятствия. Правда, ряд, изображенный на черт. 31, требует 11 пунктов, тогда как ряд из равносторонних треугольников имел бы 8 пунктов. Но, если рассчитать общий метраж построек и учесть быстрое возрастание их стоимости с высотой сигнала, то стоимости обоих рядов окажутся одинаковыми или, вероятно, стоимость ряда из 11 пунктов будет менее стоимости простой цепи из 8 пунктов, потому что на 5 пунктах из этих 8 должны быть возведены очень высокие сигналы. Прямолинейность ряда и малая возможность варьирования длинами сторон треугольников при прокладке его в виде простой цепи треугольников, близких к равносторонним, приводят к нарастанию числа препятствий и, если удается в триангуляции СССР все-таки осуществлять ряды I класса в виде достаточно прямолинейных цепей, то это дости-

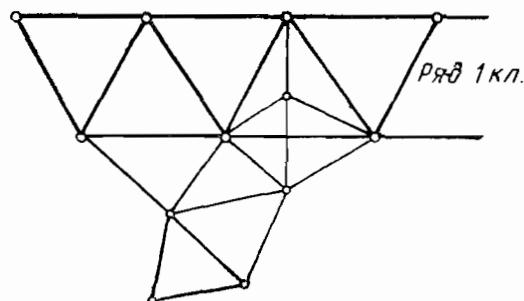
\* В отношении вывода связующих сторон и размеров продольного сдвига.

гаются отчасти за счет увеличения числа высоких сигналов и отчасти за счет низкого прохождения в ряде случаев визирных лучей над препятствиями; последнее же обстоятельство очень невыгодно оказывается и на результатах наблюдений, и на их продолжительности на пунктах I класса. Если подсчет погрешностей в ряде, составленном из комбинации сложных фигур с равносторонними треугольниками, покажет при данном проектировании ряда нежелательное заметное уменьшение точности определения сторон и координат пунктов, то можно или несколько укоротить звено, идя на некоторый скос звеньев перпендикулярного направления, примыкающих в будущем к концу нашего звена, или же придется проектировать промежуточный базис в середине ряда. Однако, думается, к последнему придется прибегать только в тех редких случаях, когда условия местности заставили в части ряда идти заметно уменьшенными треугольниками, например, со сторонами в 18—20 км. Иногда окажется более выгодным вместо промежуточной базисной сети проложить вдоль одной из срединных сторон ряда высокоточный полигонометрический ход (траверс I разряда).

В триангуляции II класса (заполняющей), прокладываемой в клетке между рядами I класса и основными рядами II класса, можно допускать большую свободу в отступлениях формы треугольников от равносторонней, а также можно допускать геодезические четырехугольники, для которых величины  $R$  в два раза более допустимых значений для них в триангуляции I класса.

Существенно отметить, что при проектировании основных рядов II класса следует, по возможности, примыкание их делать не к одной, а к двум сторонам триангуляции I класса (черт. 32).

**5. Частота азимутов Лапласа.** Как уже указывалось выше, в каждой базисной сети определяются Лапласовы азимуты, непременно с двух концов одной и той же стороны — только тогда мы получаем суждение, на сколько односторонние азимуты Лапласа искажены действием боковой (горизонтальной) рефракции, а уравнивание этих азимутов дает нередко существенное уменьшение искажений за боковую рефракцию в этих азимутах. Как указывалось в главе I, в СССР определяют Лапласовы азимуты еще и на пунктах ряда I класса, лежащих между базисными сетями на расстоянии друг от друга 70—100 км. Об использовании этих «промежуточных» Лапласовых азимутов будет сказано в главе об уравнивании триангуляции во II части курса. Здесь существенно отметить, что если местность заставила идти фигурами с уменьшенными сторонами, то следует промежуточные Лапласовы азимуты приурочить именно к началу и концу той части ряда, в которой построены такие фигуры, и сделать эти азимуты двусторонними, придав им тот же вес, как и Лапласовым азимутам в базисных сетях. Это заметно повлияет на уменьшение поперечных сдвигов пунктов ряда и несколько ослабит и продольные их сдвиги.



Черт. 32

**6. Подготовка к составлению проекта триангуляции.** Составление проекта ряда триангуляции I класса, а также и основных рядов II класса поручают геодезисту, имеющему, кроме геодезической, хорошую, топографическую подготовку, лично проведшему рекогносцировки с достаточным успехом в разнообразных районах и достаточно осведомленному в геоморфологии данного района.

Подготовка к проектированию начинается со сбора всех картографических и гипсометрических материалов по соответствующему району, а также сведений о ранее проложенных в районе триангуляциях; одновременно собираются литературные материалы по географическим описаниям района или его частей и по климатологии района. Далее следуют изучение всех этих материалов и составление первого наброска проекта. После этого, по нашему мнению, следует через того же геодезиста выполнить геодезическую разведку полосы, намеченной для проложения будущего ряда. Задачи этой разведки будут указаны в следующем параграфе. Сопоставлением результатов и выводов разведки с выводами из изучения картографических и географических материалов заканчивается подготовка к работе по составлению проекта.

При составлении проекта заполняющей сети II класса геодезическая разведка не производится, а, выяснив по собранному геодезическому и картографическому материалу наиболее выгодные направления для развития сети II класса, проектируют по ним части будущей сети, оставляя до рекогносцировки в поле остальные части сети в виде наметки.

Следует еще отметить, что ряды I класса всегда проектируют, по возможности, вдоль железных дорог или больших водных артерий, так как это дает значительные удобства и экономию в полевых работах.

**7. Особенности проекта триангуляции в больших городах.** Городская территория, в которую включаются как застроенные кварталы, так и площади, отведенные для расширения города, для промышленных предприятий города и для разных инженерных сооружений, обслуживающих современную сложную жизнь города, может быть достаточно значительна, особенно в условиях СССР. Нередко идет речь о площади радиусом в 30—40 км или о площади, тянущейся полосой на несколько десятков километров. Крупность масштаба съемки города (1 : 1000, 1 : 500) и необходимость дать ряд точек, координаты которых обеспечивали бы точные числовые расчеты при проектировании разных сооружений и полную точность переноса проектов в натуре\*, заставляют к геодезической основе на территории города предъявлять требования очень повышенной точности. Кроме того, густота этой основы здесь должна быть доведена до необычайных для полевых топографических работ пределов — до расстояний между смежными опорными пунктами в 1—1½ км с дальнейшим сгущением этой основы полигонометрическими ходами. По существу, на территории большого города приходится развивать основную триангуляцию в составе трех классов — I, II и III, а затем давать еще дополнительные тригонометрические пункты в виде точек IV класса, а иногда и точек V класса. При этом, вследствие наличия зданий, сеть III класса, по точкам которой определяются преимущественно пункты дополнительной триангуля-

\* Здесь передко ошибка в положении проектной линии в 0,2 м заставит переделывать проект сооружения, не размещающегося вследствие этой ошибки геодезических данных среди существующих зданий.

ции, должна иметь густоту большую, чем на территории обычного типа. При вставке сети II класса в сеть I класса произойдут добавочные деформации, о которых мы уже говорили в § 18, заметно меньших размеров, чем приведенные там; но при вставке сети III класса в сеть II класса эти добавочные деформации еще возрастут. Абсолютное положение точек III класса на территории большого города, может быть, будет определено в некоторых частях сети III класса с средней ошибкой до  $\pm 0,15 \text{ м}$ .

Правильная обработка городской триангуляции приведет к тому, что в группе смежных пунктов III класса эта средняя ошибка будет оставаться почти постоянной, и высокое качество сетей I и II классов обеспечит мелкость изменения этой средней ошибки при переходе от одной группы пунктов III класса к смежной. Однако, при определении дополнительной триангуляции ее пункты, сравнительно недалеко расположенные один от другого, будут вообще в условиях города определяться неизбежно каждый по разным группам пунктов III класса. В результате, учитывая и ошибки определения пунктов IV класса относительно пунктов III класса, можем получить расстояние в 2 км между пунктами IV класса в некоторых случаях со средней ошибкой в  $\pm 0,2 \text{ м}$  или с точностью 1 : 10 000. При последующей прокладке ходов точной полигонометрии между пунктами III и IV классов мы будем нередко получать противоречия в определении расстояний, которые никак не могут быть отнесены за счет ошибок полигонометрии, и, следовательно, в геодезической работе возникнут недоразумения и дискредитация триангуляции. Вышеописанная система развития триангуляции города в составе I, II, III и IV классов получила свое применение в Германии. Сравнительная незначительность триангуляции даже больших городов в Германии и применение в полигонометрии деревянных жезлов для линейных измерений значительно ослабили остроту противоречий между определениями расстояний из детальной триангуляции города и из полигонометрии. Но уже и в этих условиях в немецкой геодезической литературе эти противоречия были отмечены. При значительности территорий наших городов, при применении в современных полигонометрических работах в городах подвесных приборов (с проволоками или узкими лентами), при значительном повышении ответственности за результаты геодезических работ при больших проектировках в городах, выдвигаемых социалистическим строительством, — эти противоречия сильно дают себя чувствовать, и, по существу, описанная система триангуляционной основы в городе должна быть сильно видоизменена, причем следует правильно использовать в городе, вместе с основной триангуляцией, высокоточную полигонометрию.

Схема геодезической основы в городах СССР слагается:

а) из сети I класса со сторонами от 3 до 9 км (в зависимости от размеров города); в большом городе сеть I класса должна образовываться из сравнительно небольшого числа очень жестких фигур со сторонами треугольников, их образующих, около 8—9 км;

б) из дополнительных точек I класса, определяемых прямыми многократными засечками и наблюдениями с них на пункты сети I класса и выгодно расположенных для привязки к ним траверс, но не образующих друг с другом сети треугольников;

в) из высокоточных полигонометрических ходов I класса (траверсы 1 разряда), пролагаемых между пунктами I класса (основными и дополнительными).

нительными), при расстояниях между смежными ходами одного направления около 2 км;

г) из точных полигонометрических ходов II разряда (траверсы II класса).

Как видно, в американской практике триангуляция I класса представляет собой совокупность триангуляции I класса и триангуляции II класса по сравнению с практикой геодезических работ в больших западно-европейских городах. Характерно, что применяется триангуляция одного класса, весьма точно построенная, а дальнейшее сгущение геодезической основы делается путем не триангуляции, а полигонометрии.

В 1933 г. для геодезических работ в больших городах СССР мной была предложена следующая схема, принятая в настоящее время.

1) Триангуляция I класса со сторонами 7—15\* км, а в среднем 10 км (но не 25 км, как было в Ленинграде и в Москве в 1929—1930 гг.), охватывает всю территорию города и приводит к определению положения пункта I класса относительно смежных с ним пунктов I класса со средней ошибкой около  $\pm 2\text{--}3$  см (при средней ошибке угла треугольника  $\pm 0'',6$ ); комбинация равносторонних треугольников с геодезическими, близкими к квадратам, четырехугольниками и наблюдения в сети I класса добавочных диагоналей (с хорошей видимостью по ним и отсутствием действия боковой рефракции) должны обеспечить жесткость сети I класса; базисы и пункты Лапласа измеряют (или определяют) в числе не меньше двух. С пунктов сети I класса (основных) определяют ряд дополнительных пунктов I класса, чтобы облегчить последующую задачу определения пунктов II класса, которые должны отстоять один от другого на расстоянии около 4 км. Дополнительные пункты I класса определяются направлениями с 4—5 основных пунктов I класса, наблюдаемыми так же, как и направления, на основные пункты, но и с дополнительных пунктов делают наблюдения направлений на основные пункты. Желательно (но не обязательно) уравнивать и основную и дополнительную сеть I класса вместе.

2) Проект триангуляции II класса разрабатывается непременно в связи с проектом полигонометрической сети I класса. Треугольники II класса имеют стороны около 3—4 км; средняя ошибка измерения в них угла — около  $\pm 1'',0$ . Уравнивание триангуляции II класса желательно выполнять без разбивки ее на части. Кроме сети II класса, определяют еще дополнительные точки II класса разного назначения: а) пункты на концах полигонометрических ходов I разряда, если почему-либо эти пункты не совпали с пунктами основной сети II класса; точность определения этих пунктов должна быть та же самая, что и основных пунктов II класса, и само определение выполняется направлениями, взятыми на эти дополнительные пункты с основных и с этих дополнительных пунктов — на основные; однако каждая дополнительная точка определяется отдельно от основных пунктов II класса и после их вычисления; б) пункты, определяемые на самих полигонометрических ходах I класса примерно в их середине или в точке излома этого хода; назначение их — проконтролировать линейные измерения в полигонометрии в отношении промахов или грубых ошибок и дать, если это нужно, твердый азимут в середине хода; координаты этих пунктов при уравнивании полигонометрического хода не используются, а используется лишь азимут, если ход имеет значительный излом или если в этом

\* В зависимости от размера и формы территории города.

ходе по условиям местности получилось слишком большое число поворотов; в) местные предметы — башни, шпили на высоких зданиях и т. п., которые не используются вовсе в полигонометрии, а служат для чисто съемочных целей.

3) Далее следует полигонометрическая сеть I и II классов, причем ходы I класса опираются на пункты I и II классов триангуляции. Эта схема отличается от американской лишь тем, что переход от триангуляции I класса к полигонометрии I класса совершается через триангуляцию II класса. Это вызвано тем, что дать пункты I класса через  $\delta=4 \text{ км}$  один от другого на территории в  $300-400 \text{ км}^2$  с достижением во всех частях сети однобразий точности затрудительно. Но отсюда видно, что основная триангуляция II класса в городе представляет собой очень ответственную работу, выполняемую почти с такой же тщательностью, как и триангуляция I класса (в городах). Можно надеяться на то, что приведенная схема обеспечивает среднее искажение расстояния между смежными пунктами II класса порядка 1 : 60 000.

Для расчета погрешностей в городской триангуляции полезно привести формулу средней ошибки  $M_c$  в положении вершины  $C$  треугольника  $BAC$  относительно вершины  $A$

$$M_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3 \sin^2 c} \cdot \frac{m''^2}{\rho''^2} + \frac{m_c^2}{c^2} b^2 + \frac{m_{\alpha, \beta}^2}{\rho''^2} b^2.$$

Здесь  $a, b, c$  — стороны треугольника;  $b = AC$ ;  $\frac{m_c}{c}$  — относительная ошибка в стороне  $AB$ , определяемая из расчета погрешностей предыдущих треугольников;  $m_{\alpha, \beta}$  — ошибка азимута стороны  $AB$ , так же рассчитываемая из передач азимутов в предыдущих треугольниках.

## Глава IV

### ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАЗВЕДКИ (ОБСЛЕДОВАНИЯ) И РЕКОГНОСЦИРОВКА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗНАКИ

#### § 20. Геодезические обследования

Очень малая картографическая и географическая изученность большинства тех районов Сибири и Дальнего Востока, в которых в настоящее время ставятся и будут развиваться основные геодезические работы, вместе с заведомо известными своеобразными и тяжелыми условиями работ в них (в отношении путей сообщения, климата и т. п.), естественно, побуждают к выполнению в таких районах до разработки проекта триангуляции особых геодезических обследований или разведок, которые доставили бы ряд сведений по району, важных в геодезическом отношении. К сожалению, эта мысль не находит еще достаточного отклика в нашем геодезическом производстве, и мы не имеем ни одного конкретного примера выполненного геодезического обследования, который мог бы послужить основанием к установлению программ таких обследований. Между тем, без опыта в этом деле трудно давать конкретные указания и приходится ограничиваться лишь указаниями главных задач обследования.

Из сбора сведений в местных учреждениях, из бесед с местными специалистами, из осмотров местности при объездах полосы, на которой располагается намеченный ряд триангуляции, и из расспросов местных жителей геодезист должен получить правильное представление о рельефе и гидрографии района. Конечно, главные реки будут нанесены более или менее правильно и на плохую карту, но пополнение этой карты в отношении притоков этих главных рек, а поскольку возможно, и притоков этих притоков — составляет обязанность выполняющего разведку. При этом он отмечает характер речных долин: их извилистость, ширину в открытой части (т. е. длину визирного луча через долину), высоту и характер скатов долины (пологие, крутые, обрывистые). Обследование водоразделов, являющееся крайне важным, представит, конечно, ряд больших затруднений, но все-таки надлежит выяснить характер, направление и приблизительное положение водоразделов первого и второго порядка, чтобы дать хотя бы приблизительную их схему на карте; нужно суметь дать приближенные высоты водоразделов из выполнения по некоторым характерным профилям барометрического пневмирования. Умелый осмотр местности с водоразделов и фотографирование могут дать хороший материал для разработки предварительного проекта триангуляции. От проводников нужно получить сведения о «горах» в равнинно-холмистых залесенных районах — это обычно отдельные возвы-

шенностя высотой от 100 до 400 м; в таежных районах имеются места, с которых неожиданно открывается горизонт на значительные расстояния кругом, — такие места нужно нанести на карту, хотя бы и очень приблизительно; вообще наиболее высокие места района должны быть отмечены. Попутно с выполнением обследования в указанном направлении, геодезист должен собрать сведения:

а) о залесенности района и ее характере — иногда лес располагается сравнительно узкими гривами, тянущимися на десятки километров, но отделенными друг от друга открытыми местами; эти так называемые «колки» не создают существенных препятствий для триангуляции, хотя передко и вызывают впечатление сплошной залесенности; следует также выделить «боровые» места от таежных — боровой лес распространяется на более высоких и незаболоченных местах и легко проходим; наоборот, «тайга» является почти непроходимой и, занимая пониженные места, имеет много болот;

б) о болотах, их положении и характере;

в) о путях сообщения и средствах передвижения, нанося на карту или специальную схему не только дороги, но и все тропы, даже охотничьи, и все зимовки;

г) о строительных материалах, способах их заготовки и доставки к месту работ, о снабжении партий продовольствием;

д) о распространении мерзлоты в районе;

е) о количестве дождливых дней за время — май — октябрь, о периодах дождей (если таковые имеют место), о летних паводках, о туманах и их характере (сухие или обыкновенные), о силе ветров, о времени наступления заморозков; о средних месячных и годовых температурах, о количестве осадков; о различии в летние месяцы между дневными и ночных температурами.

При геодезической же разведке представляется много случаев для получения данных об условиях видимости в районе (на расстоянии 20—30 км); специальное внимание должен привлечь вопрос о возможности выбрать на концах ряда или вблизи них базис и базисную сеть — обследователь должен выяснить, на какую длину базиса можно рассчитывать в данном районе, какие препятствия встретятся при его измерении и какие типы базисных сетей будут наиболее подходящими. Попутно, что попутно с подобным обследованием геодезист собирает сведения о населенности района, о типе поселений, о развитии сельского хозяйства, о местных промыслах и т. д.

Наиболее трудной следует считать прокладку триангуляций в залесенных холмистых районах, так как гряды холмов, располагаясь в промежутках между пунктами триангуляции в разнообразных расстояниях друг от друга, препятствуют открытию видимости с пункта на пункт. Поэтому и приведенная выше «наметка» программы обследования относится, главным образом, к этим районам. В районах горных и полугорных назначение на местности вершин будущих треугольников заметно упрощается, и обследование рельефа может быть излишним, но оценка трудностей подступов к вершинам и условий геодезических работ, а также вопрос о базисах и базисных сетях должны быть предметом обследования. Отсутствие широких долин, свободных от леса, и наличие озер и болот в узких и извилистых долинах, покрытых лесом и трудно проходимых, могут вызвать в горных и полугорных районах значительные трудности в выборе базисов и значительные затруднения в переходах наблюдателя с пункта на пункт для измерения углов,

а также при организации световой сигнализации при этих измерениях. Обследователь должен выявить все эти трудности, чтобы затем запроектировать ряд мер к их преодолению.

Геодезист, хорошо подготовленный топографически, достаточно ориентированный в геоморфологии и проведший лично ряд рекогносцировок, будет при обследованиях подмечать на местности такие ее особенности и такие закономерности в рельфе, которые не доступны для лиц с иной подготовкой и которые позволяют ему из сравнительно быстрого осмотра составить себе ясное представление о территории и выполнить «умственную» топографическую съемку района. При составлении проекта ряда он придаст ему наивыгоднейшее положение, искривив его там, где это необходимо; он правильно сообразит выгодную длину сторон треугольников и возможности перехода в некоторых местах на сложные фигуры с выгодой для ускорения продвига ряда; с достаточными основаниями будут запроектированы им места геодезических пунктов и места, где нужно будет выбирать базисы и базисные сети; он же даст ряд ценных указаний по подготовке и организации рекогносцировки. Сведения о районе, им полученные и дополненные сведениями, полученными после выполнения рекогносцировки, являются очень ценными при составлении сметы работ по постройке геодезических сигналов и при подготовке к наблюдениям.

## § 21. Рекогносцировка

**1. Требования, предъявляемые к выбранному триангуляционному пункту.** Рекогносцировка имеет своей задачей, путем выполнения полевых изысканий, выбрать и назначить на местности пункты будущей триангуляции. Она исполняется после составления предварительного проекта триангуляции, который, однако, после выполнения рекогносцировки может существенно измениться. При выполнении рекогносцировки следует соблюдать некоторые достаточно твердые требования, а именно:

а) длина сторон треугольников должна быть примерно та, которая назначена в проекте триангуляции, т. е. в обычных районах от 25 до 30 км в триангуляции I класса, и от 10 до 20 км — в триангуляции II класса. Укорочение и удлинение сторон против этих размеров должны быть обоснованы при составлении проекта; если же этого проектом не предусмотрено, то, проектируя треугольники иных размеров, рекогносцировщик должен дать к этому серьезные основания;

б) связующие углы при проложении простых цепей I класса должны быть не менее  $40^\circ$  и не более  $100^\circ$ ; в геодезических четырехугольниках наименьший угол не следует иметь менее  $35^\circ$ . Во всяком случае, в звене I класса длиной 200 км  $\Sigma(\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B)$  должна быть обычно не более 60; рекогносцировщик должен постепенно образовывать эту сумму при проведении полевой работы;

в) ряды I и II классов (основные) прокладываются, по возможности, вдоль железных дорог, больших шоссе или больших рек;

г) выбранные пункты не должны находиться в непосредственной близости от селений; они должны находиться достаточно далеко от полотна железной дороги, от телеграфных и телефонных линий; от всех этих предметов геодезический пункт должен быть удален на двойную и даже на тройную высоту триангуляционного знака на нем, а от проводов высокого напряжения — не менее чем на 120 м;

д) триангуляционные знаки должны стоять на местах, которые отвечают условиям долговременной сохранности знака (на крепком, не

ползучем грунте, не на отвалах, в стороне от разработок ископаемых и т. п.);

е) с каждого пункта в рядах I и II классов должно быть видно не менее двух предыдущих пунктов и не менее двух последующих, а при повороте ряда — не менее трех последующих;

ж) пункты II (и с основные) и III классов должны быть выбраны на таких местах, чтобы, пользуясь этими пунктами, было удобно распространять геометрическую сеть на соответствующих планшетах;

з) густота пунктов заполняющих сетей II класса и пунктов III класса должна отвечать масштабу государственных съемок в данном районе;

и) привязка основных рядов II класса к рядам I класса должна выполняться, как правило, сложными фигурами, дающими добавочные контроли и обеспечивающими жесткость привязки и удобный переход от сторон I класса к меньшим сторонам основного ряда II класса. Желательно при этом примыкание основного ряда II класса иметь к двум сторонам I класса;

к) положение пункта должно обеспечивать прохождение визирных лучей с него на другие пункты в расстоянии не менее 6—10 м от местных предметов (край леса, здание, обрыв, скат речной долины и т. п.);

л) высота знака должна быть рассчитана так, чтобы при наблюдениях на пунктах I класса визирный луч располагался выше препятствий и местных предметов (лес, крыши зданий, почва) не менее чем на 6—8 м\*; в основных рядах II класса высота визирного луча над препятствиями и местными предметами должна быть не менее 4—6 м\*;

м) желательно на пунктах II класса иметь видимость с земли не менее одного соседнего пункта или постоянного предмета местности (башни, водокачки, колокольни и т. п.); направления на такие пункты служат для ориентировки при съемках;

н) постоянные местные предметы, удобные для наблюдений с них, следует включать в заполняющие сети II класса при условии приспособления их для постановки инструмента и для получения удобной цели при обратных наблюдениях этого пункта со смежных;

о) материалы старых триангуляций непременно используются при рекогносцировке и там, где это возможно, старые пункты включаются в новые ряды.

## 2. Методы и средства рекогносцировки

При подъеме  $h$  наблюдателя над землей при совершении ровной, не имеющей скатов местности, дальность  $s$  видимого горизонта определяется формулой

$$s^2 = \frac{h \cdot 2R}{1 - k},$$

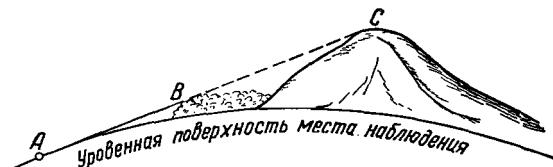
где  $R$  — радиус Земли (6378 км),  $k$  — коэффициент земного преломления, равный примерно 0,14—0,16. В этих условиях, при подъеме наблюдателя в открытой и ровной местности над землей на 25 м, местность, удаленная от него на 19,5 км, будет уже невидима, а при подъеме на 10 м предел обзора местности ограничивается 12 км.

Небольшой лес  $b$ , находящийся в 10—12 км от места осмотра, может поэтому (черт. 32а) совершение закрыть холмы  $C$ , возвышающиеся над местом осмотра на 60 м и удаленные от него на 30 км, вследствие

\* В зависимости от характера препятствия.

чего составится неверное представление, что эти холмы нельзя использовать для целей триангуляции.

Существенно при рекогносцировке обозревать местность, поднимаясь над землей на 20—40 м, но, конечно, не менее важно уметь память места осмотра. Понятно, что постоянные высокие предметы местности — колокольни, башни,

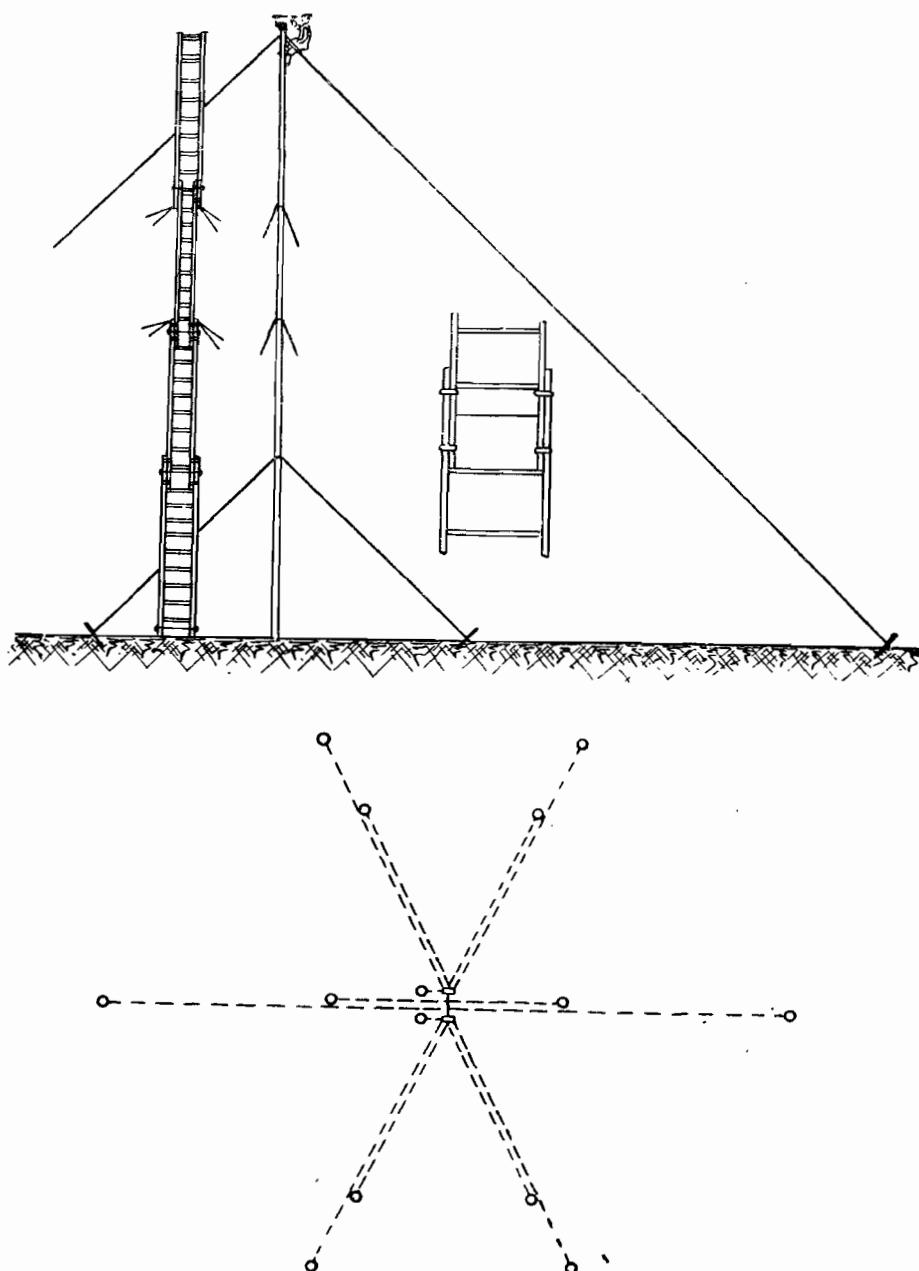


Черт. 32а

водокачки и т. п. должны быть использованы для осмотра с них местности. В районах лесо-степных, имеющих всегда достаточно проезжих дорог, с успехом можно применять для осмотра местности деревянную разборную лестницу, перевозимую на подводе. По этой лестнице (черт. 33) можно подняться на 17,5 м. Она состоит из четырех частей, 5-метровой длины каждая. Части эти соединяются внакладку и скрепляются четырьмя железными хомутами и на каждом соединении — одним болтом-стержнем. Лестница удерживается в отвесном положении десятью веревками от 20 до 30 м длиной и толщиной по диаметру  $1\frac{1}{2}$  см и двумя концами троса — длиной 35 м и толщиной 4 мм. Растяжки располагаются в плоскостях, образующих одна с другой углы в  $60^\circ$ . В лесных районах, где рекогносцировка особенно трудна, осмотр местности может выполняться, главным образом, с деревьев, на которые влезают, пользуясь примитивными средствами (например, «когтями» или канатом, укрепленным за верхние сучья); иногда к вершине дерева прибивают солидную веху, по которой взираются выше леса (черт. 34); это требует привычки и большой осторожности.

В Германии не стесняются воздвигать при рекогносцировке триангуляции I класса временные вышки типа, изображенного на черт. 35; высота этих вышек доводится до 40—50 м. Конечно, при помощи их бессспорно решается вопрос о пригодности намеченного пункта и о высоте на нем будущего геодезического сигнала и значительно облегчается продолжение рекогносцировки, так как осмотр местности вперед с таких вышек делается наилучшим образом и рекогносцировщик с вновь обслежуемых пунктов видит пункты предыдущие. Такой порядок требует наличия в рекогносцировочной партии отряда строительных рабочих с довольно тяжелым оборудованием и неприемлем поэтому при сколько-нибудь широком размахе геодезических работ и, в особенности, в условиях малообжитых районов Сибири и Дальнего Востока, хотя постройка временной вышки высотой в 50 м и занимает всего около четырех дней.

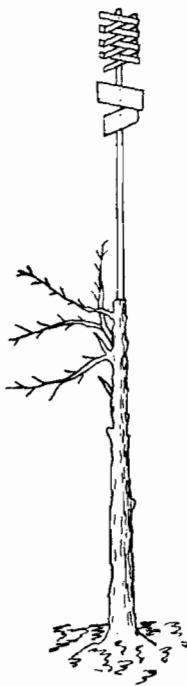
У нас отрекогносцированный, т. е. считающийся пригодным, пункт закрепляется и обозначается на местности следующим образом: в открытых местах — вехой, вкопанной на 1 м, высотой 7—10 м, с перекладиной и с пучком соломы паверху; веха окапывается с четырех сторон канвой квадратной формы со стороной 2 м; в лесистой местности веха прибивается к дереву (черт. 34), и для облегчения розыска этого пункта



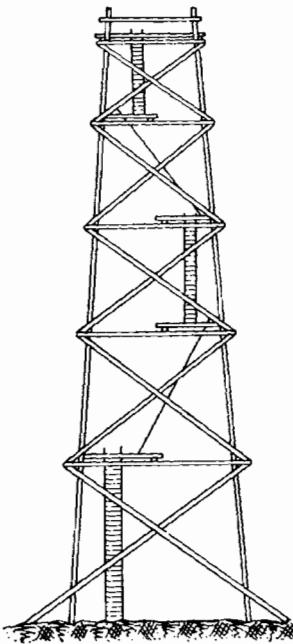
Черт. 33

в последующем дорога к нему отмечается затесами на деревьях. Кругом пункта в радиусе 0,5 км исполняется полуинструментальная съемка в масштабе 1 : 25 000; кроме того, с пункта измеряют углы на приметные предметы местности: геодезические сигналы, колокольни, мельницы, отдельно стоящие деревья, сараи, зимовья и т. п. Понятно, что

все это обеспечивает разыскание намеченных рекогносцировкой пунктов при последующей постройке на них геодезических сигналов, по рекогносцировщик далеко не всегда видит со следующего рекогносцируемого им пункта такие вехи, поставленные на предыдущих пунктах, главным образом, для их закрепления. Это отсутствие в ряде случаев, а иногда и в значительном числе случаев знаков, которые безошибочно и легко



Черт. 34



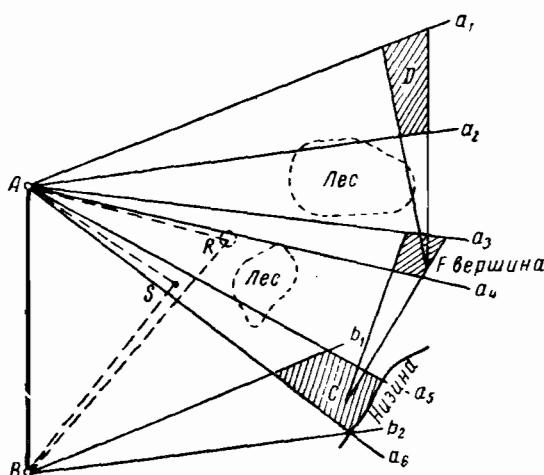
Черт. 35

позволяют видеть и опознавать с последующих пунктов места предыдущих пунктов, является характерной особенностью современных советских и американских рекогносцировок. При такой постановке дела существенную роль играет опытность рекогносцировщика и его особая способность ориентироваться на местности, запоминать ее подробности и разбираться в ее рельефе, правильно оценивая те его складки, которые могут явиться препятствиями для развития триангуляции, и с выгодаю используя пониженные и повышенные места.

Следует дело ставить так, чтобы лицо, выполнявшее геодезическое обследование района и составившее предварительный проект триангуляции, выполняло и рекогносцировку. Во всяком случае до выезда в поле рекогносцировщик должен тщательно собрать и изучить все топографические и картографические материалы по району, ознакомиться по литературе с выполненными географическими обследованиями и описаниями района, а в случае выполнения геодезического обследования получить все данные и материалы его и тщательно их усвоить с помощью исполнившего это обследование. Карту района масштаба 1 : 500 000 или, лучше, 1 : 200 000 с нанесенным на ней проектом триангуляции должно подготовить так, чтобы на ней особенно резко выделились во-

дотки и водоразделы. Для этого реки поднимают на карте синим цветом, а водоразделы намечают красным карандашом с усилением там, где приходятся наиболее высокие места. Такая карта наклеивается на холст и при работе в поле прикрепляется кнопками на планшетку. Для работ в поле геодезист снабжается биноклем 8× и 12×, двумя анероидами с термометрами-пращами, ориентир-буссолю, ручной буссолю, малой мензулой и малым кипрелем с вертикальным кругом, полотняной рейкой, рулеткой, масштабной линейкой, малой готовальней, транспортиром, фотографическим аппаратом, а также подсобным оборудованием: малыми блоками, молотками, пилой (ножовка), топорами, лопатами, веревочной 12-м лестницей, веревками и тросом, гвоздями, телеграфными косями, гелиотропом и походным снаряжением.

При осмотре местности с намечаемых пунктов геодезист должен выявлять так называемые секторы видимости, т. е. пространства, ограниченные направлениями, между которыми находятся места с достаточной дальностью видимости. Для пояснения работы при осмотре рассмотрим пример, приведенный на черт. 36. Пусть пункты *A* и



Черт. 36

*B* принадлежат уже исполненному ранее ряду, от которого рекогносцируемый ряд должен распространяться на восток. При осмотре местности с сигнала в *A* фотографируют на правильно ориентированной карте или на прикрепленном к планшетке листе (с которого потом незамедлительно главный материал переносят на карту) те направления  $Aa_1$  и  $Aa_2$ ,  $Aa_3$  и  $Aa_4$ ,  $Aa_5$  и  $Aa_6$ , между которыми горизонт виден далеко и которые ограничивают секторы видимости  $a_1Aa_2$ ,  $a_3Aa_4$ , ...; для этих направлений тщательно берут магнитные азимуты. Кроме того, прочерчивают направления и берут магнитные азимуты на постоянные предметы местности и на выдающиеся примечательные места горизонта (например: поляна в лесу на плоской возвышенности; резко выдающийся гребень среди ряда параллельных, выступающих друг из-за друга гряд или увалов леса, которые обычно занимают открывающуюся удаленную панораму в лесу и похожи на кулисы декорации).

Установление дальности видимости представляет собой трудную задачу, требующую особо значительного навыка; соображения по карте

и расспросы проводников и охотников, привлекаемых к осмотру местности, могут оказать известную пользу. В каждом секторе видимости тщательно изучается вид горизонта и делаются соответствующие зарисовки и заметки в журнале рекогносцировки; характерные детали, отмеченные при этом, много способствуют разысканию впоследствии на местности точек  $D$ ,  $F$ ,  $C$ , намеченных из  $A$  (например, едва заметная группа деревьев, обрыв, седловина, выступ леса и т. п.). Но осмотр горизонта и зарисовки необходимо сделать и в секторах невидимости, отмечая род, высоту и дальность препятствия, загораживающего горизонт, и зарисовывая число и вид увалов или гряд леса, которые заполняют дальнюю панораму, особенно отмечая повышенные и пониженные в них места. Следует фотографировать ряд мест горизонта. При недостаточной высоте подъема при осмотре в лесу, как это нередко имеет место в условиях наших работ, возможно, что на данном пункте не будет открыто никаких явных секторов видимости, но правильно оценивая препятствия к видимости и видимые профили по нужным направлениям и создавая мысленно их невидимые продолжения, т. е. выполняя, как говорят американские геодезисты, «умственную топографическую съемку», можно наметить с достаточной достоверностью предполагаемые секторы видимости.

На намеченные из  $A$  в качестве будущих пунктов триангуляции точки  $D$ ,  $F$ ,  $C$  следует взять магнитные азимуты и особенно тщательно запомнить и отметить особенности местности вблизи них. Точно так же в лесных районах, а иногда и в открытых районах следует по желаемому направлению, по которому видимость не открыта, но имеется значительная вероятность ее открытия после постройки сигналов, особенно запомнить местность вблизи препятствия по этому направлению и взять, конечно, азимут. Возвращаясь к нашему примеру (черт. 36), допустим, что в  $B$  устанавливается сектор видимости  $b$ ,  $Bb_2$ ; пересечение его с сектором  $a_5Aa_6$  дает общую площадь, заштрихованную на черт. 36, в пределах которой должны находиться пункты, видимые с  $A$  и с  $B$  и образующие с ними приемлемый треугольник, если только дальности видимости в секторах  $a_5Aa_6$  и  $b_1Bb_2$  были установлены более или менее правильно. Но опытный геодезист может, пользуясь развитой им способностью, помнить местность, узнать при осмотре из  $B$  ту точку  $C$ , которую он наметил при осмотре из  $A$ ; это даст тогда гарантию правильности работы. Секторы видимости, конечно, тем и важны, что в их пересечениях мы можем с известной уверенностью намечать точки следующего осмотра или следующие пункты ряда. Направления, взятые с  $A$  и  $B$  на местные предметы  $S$  и на разные характерные места (например, роща  $R$ ), не показанные на карте, служат для пополнения карты предметами ориентировочного значения, которые позволяют впоследствии определяться в следующих местах осмотра. Намеченную с  $A$  и  $B$  точку  $C$ , которая казалась вполне приметной с них, далеко не всегда легко разыскать на местности, и, конечно, всегда довольно трудно — в лесу. Ведь в общем случае нашей постановки рекогносцировки сигналов в  $A$  и  $B$  не существует. Обратные магнитные азимуты в  $C$  на  $A$  и  $B$  будут в этом общем случае играть роль постольку, поскольку при осмотре из  $C$  удастся верно установить, по запечатленным в памяти характерным особенностям местности, места пунктов  $A$  и  $B$ . Обращаясь к нашему примеру, допустим, что осмотр из  $C$  не дал сектора видимости на  $D$ , но при осмотре с  $F$  сектор на  $D$  открылся, и точка  $D$  была опознана. Очевидно, между  $D$  и  $C$  имеется препятствие, которое

в данном случае выясняется легко — это лес между линиями  $a_2A$  и  $a_3A$ . Выяснение препятствий и расчет высот сигналов, при которых они будут устранены, составляет важный момент в рекогносцировке.

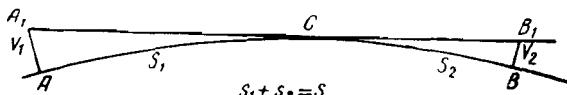
В открытых и полузакрытых местах для выяснения препятствия с успехом служит прокладка упрощенной геометрической сети, вершины которой не обозначаются вехами, а приурочиваются к местным предметам: большой камень, курган, мельница, отдельно стоящее дерево и т. п.; только при перекидке через полосу леса прибивают в нем на высоком дереве веху (так называемый «корел»). Из определения высот пунктов такой геометрической сети и из определения попутно высот главных перегибов местности и умелого ее осмотра получают хорошее определение нужных профилей местности; конечно, при наличии переселков измеряют в них высоты деревьев. Но и в открытых, и в закрытых местах нередко для выяснения препятствия с успехом может служить прокладка одного или нескольких мензульных ходов, с ориентировкой мензулы по буссоли и посыпкой рейки всегда только вперед. Наконец, в трудно проходимых лесных местах придется прибегнуть к барометрическому нивелированию, при котором помощник геодезиста остается в начальной точке маршрута со вторым анероидом, отсчитываемым им в обусловленные моменты времени. С первым анероидом, после его слияния со вторым, отправляется по маршруту геодезист, который прокладывает маршрут, пользуясь буссолю и шагомерным определением расстояний, и определяет отметки на всех существенных перегибах рельефа; измерение высот леса обязательно. Второе сличение анероидов выполняется после завершения маршрута.

Прерывая пока общее освещение методов рекогносцировки, дадим необходимые для нее расчетные формулы. Для понижения  $v$  горизонта мы имеем формулу.

$$v = \frac{S^2(1-k)}{2R}, \quad (85)$$

где  $k = 0,16$ ;  $R = 6378$  км. На ровной, без скатов местности, чтобы из  $A$  видеть  $B$  (черт. 37), нужно в  $A$  и  $B$  подняться на

$$h = v_1 - v^2 = \frac{S^2(1-k)}{4 \cdot 2R} = \frac{S^2(1-k)}{8R}. \quad (86)$$



Черт. 37

При расстоянии  $S = AB = 30$  км получим для триангуляции I класса

$$h_1 = h_2 = \frac{S^2(1-k)}{8R} + 8 \text{ м} = 14,8 \text{ м} + 8 \text{ м} = 22,8 \text{ м}.$$

Таким образом, в триангуляции I класса высота геодезических сигналов на ровной открытой местности около 20 — 25 м.

Если в  $A$  уже построен сигнал высоты  $h_1$ , то касательная из  $A_1$  к уровенной поверхности  $ACB$  коснется ее уже не в средней точке  $C$  между  $A$  и  $B$ . Пусть расстояния  $C$  от  $A$  и  $B$  будут соответственно  $s_1$  и  $s_2$ , так что  $s_1 + s_2 = S$  (черт. 37). Нетрудно сообразить, что:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= AA_1 = \frac{1-k}{2R} s_1^2 \\ h_2 &= BB_1 = \frac{1-k}{2R} s_2^2 \end{aligned} \right\}, \quad (87)$$

или, принимая  $k = 0,16$ ,

$$S = \sqrt{\frac{R}{0,42}} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$

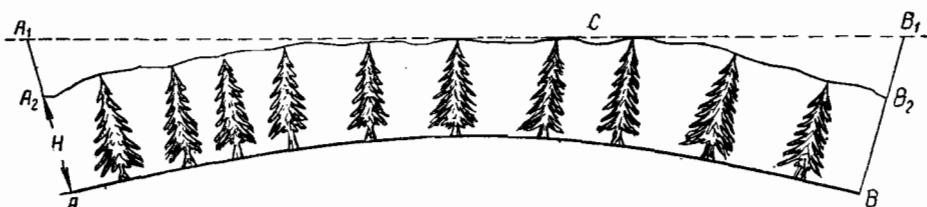
Выражая  $S$  в километрах, а  $h$  — в метрах, получим

$$S = 4 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (88)$$

На ровной, без скатов и открытой местности формула (88) служит:  
 а) для расчета высоты сигнала в  $B$  при заданных  $S$  и  $h_1$  (в пункте  $A$ );  
 б) для выяснения видимости между  $A$  и  $B$  при данных  $h_1$  и  $h_2$  и при данном расстоянии  $AB = S_0$ ; если  $S_0$ , рассчитанное по (88), оказывается менее  $S_0$ , то видимости не имеется. Поэтому формулу (88) нередко называют условием видимости точек. К рассчитанной по формуле (88) высоте  $h_2$  нужно прибавить  $8 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right) m$  в случае триангуляции I класса и  $4 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right) m$  в случае триангуляции II класса\*, выбирая  $s_1$  по  $h_1$  согласно (87) из таблиц поправок за кривизну Земли и рефракцию.

Если местность ровная, без скатов, но сплошь покрыта лесом высотой  $H$  (черт. 38), то тогда, очевидно, в (88) под  $h_1$  и  $h_2$  нужно понимать высоты точек  $A_1$  и  $B_1$  (вершин сигналов) над лесом. Получив по (88)  $h_2$ , нужно высоту сигнала в  $B$  рассчитать так

$$BB_1 = H + h_2 + 8 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right) m^*.$$



Черт. 38

В случае неровной местности между  $A$  и  $B$  и при нахождении высшей точки  $C$  препятствия между  $A$  и  $B$  в расстояниях  $s_1$  и  $s_2$  со-

\* Если  $\frac{s_2}{s_1} < \frac{1}{4}$ , то нередко будет выгоднее уменьшить  $h_2 + 8 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right) m$  счет целесообразного увеличения ранее установленного значения  $h_1$ .

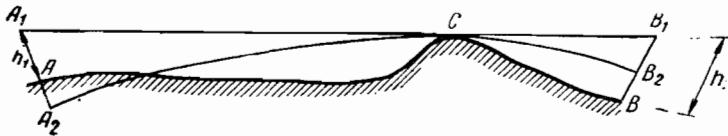
ответственно от  $A$  и  $B$ , очевидно, в (88) нужно заменить  $h_1$  через  $A_1A_2$  и  $h_2$  — через  $B_1B_2$  (черт. 39). Называя:

$$\Delta H_1 = H_A - H_C; \quad \Delta H_2 = H_B - H_C,$$

где  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $H_C$  — альтитуды  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получим по формуле (88):

$$S = 4 [\sqrt{h_1 + \Delta H_1} + \sqrt{h_2 + \Delta H_2}]. \quad (89)$$

Формула (89) может служить для расчета  $h_2$  по данным:  $S = s_1 + s_2$ ,  $h_1$ ,  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$  только в том случае, когда препятствие  $C$



Черт. 39

лежит в горизонте  $A_1$  (вершины сигнала в  $A$ ), т. е. когда выполнено условие

$$h_1 + \Delta H_1 = \frac{1-k}{2R} s_1^2 = v_1$$

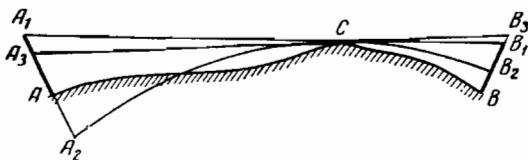
и если

$$\Delta H_2 \leq 0,$$

потому что при  $\Delta H_2 > 0$  точка  $C$  препятствием уже не служит.

Более общей формулой для расчета высоты сигнала при существовании препятствия служит следующая, выводимая из черт. 40, формула

$$\begin{aligned} AA_2 &= H_A - H_C = \Delta H_1 \\ BB_2 &= H_B - H_C = -\Delta H_2; \quad A_2C = s_1; \quad A_3A_2 &= v_1 \\ AA_1 &= h_1; \quad BB_1 = h_2; \quad CB = s_2; \quad B_3B_2 &= v_2. \end{aligned}$$



Черт. 40

Прямая  $A_3CB_3$  — касательная в  $C$  к уровенной поверхности  $A_2CB_2$ ;  $A_1CB_1$  — прямая.

$$\begin{aligned} A_1A_3 &= h_1 + \Delta H_1 - v_1 \\ B_1B_3 &= v_2 \Delta H_2 - h_2 = -(h_2 + \Delta H_2 - v_2) \\ \frac{h_1 + \Delta H_1 - v_1}{h_2 + \Delta H_2 - v_2} &= -\frac{s_1}{s_2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Формула (90) была дана топографом Рукавица.

Пример расчета по формуле (90), приведен в табл. 3.

Таблица 3

| Пункты | $H$     | $\Delta H$ | $s$     | $v$    | $h$    |
|--------|---------|------------|---------|--------|--------|
| $A$    | 100,0 м | + 4,8 м    | 25,4 км | 44,0 м | 20,0 м |
| $C$    | 95,2 "  | - 5,3 "    | 13,2 "  | 11,9 " | 27,2 " |
| $B$    | 89,9 "  |            |         |        |        |

Нужно помнить, что  $h_2$ , рассчитанное по формуле (90), увеличивается затем на  $8 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right)$  м в триангуляции I класса и на  $4 \left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right)$  м — в триангуляции II класса. Полезно еще пользоваться формулой США для расчета альтитуды  $H$  визирного луча с  $A$  на  $B$  на вертикали препятствия

$$H = H_1 + (H_2 - H_1) \cdot \frac{s_1}{s_1 + s_2} - 0,0674 s_1 \cdot s_2, \quad (91)$$

где  $H_1$  — альтитуда низшей, а  $H_2$  — альтитуда высшей из точек  $A$  и  $B$ .

Вместо расчетов по формулам можно с успехом применять расчеты по графику. Для этого на профильной бумаге строят кривую:

$$y = \frac{1-k}{2R} x^2,$$

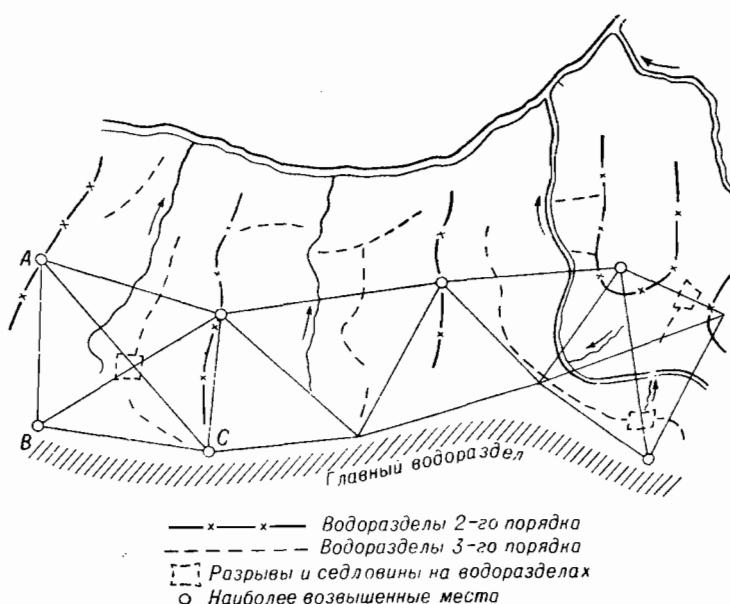
приняв при этом за начало координат препятствие  $C$  и располагая ось  $x$  горизонтально, а ось  $y$  — по вертикали в  $C$  книзу; абсциссами служат расстояния точек профиля от  $C$ ; ординаты откладывают в сильно увеличенном масштабе. От построенной «уровенной» кривой (это, конечно, не совсем верно) откладывают в соответственных ее точках по вертикали  $\Delta H_K = H_K - H_C$  вверх, если  $K$  выше  $C$ , и вниз, если  $K$  ниже  $C$ . Построив таким образом профиль местности относительно уровенной кривой точки  $C$ , далее легко по графику соображают высоты сигналов.

Имея в виду сказанное выше о средствах и условиях рекогносировки в СССР и о способах выполнения отдельных ее моментов, сделаем некоторый общий очерк выполнения этой задачи. Осмотры местности следует делать в часы отчетливых, спокойных изображений; близоподенный период дня, т. с. от 10 до 15 часов, вообще для этой цели не пригоден. В утренние часы следует делать осмотр к юго-западу, западу и отчасти к северу от пункта. В вечерние часы при солнечной погоде обычно наступают наиболее благоприятные условия для исследования дальнего горизонта; в это время иногда открываются в бинокль самые мелкие подробности местности, невидимые совсем в остальное время дня (прогалы и поляны в лесу, охотничьи избушки, части дороги, курганы).

Тригонометрические пункты должны располагаться на водоразделах, и, следовательно, одни стороны треугольников должны пересекать долины, а другие — идти вдоль водоразделов. Выгодно вести ряд вдоль более или менее значительной реки, если долина ее достаточно прямо-линейна и имеет ширину 25—30 км, т. е. когда водоразделы реки или

водораздельные ее плато удалены от нее на 15—20 км. Но нередко водоразделы более или менее значительных рек и водораздельные их плато отходят достаточно далеко — на 60—100 км. Тогда ряд приходится вести, придерживаясь примыкающего к водоразделу значительной реки пологого склона, пересекаемого водоразделами и долинами второго порядка. Эти водоразделы второго порядка в наших слабо всхолмленных районах располагаются нередко один от другого через 20—30 км и следуют примерно параллельно одни от другого. Неизбежно приходится располагать пункты триангуляции I класса на таких водоразделах, если нельзя использовать возвышенные части речной долины 1-го порядка. Однако, между этими водоразделами 2-го порядка размещаются водоразделы 3-го порядка в расстояниях друг от друга и от водоразделов 2-го порядка в среднем 8—15 км; эти водоразделы 3-го порядка образуют довольно густую и сложную сеть линий, нередко весьма прихотливых.

Так как нередко высоты водоразделов 3-го порядка в тех их частях, которые располагаются в верхней части бассейна, очень немногим менее высот водоразделов 2-го порядка, то очевидно, что эти водоразделы 3-го порядка могут заметно затруднить рекогносцировку. Важно использовать разрывы, нередко имеющиеся в этих водоразделах, и седловины



Черт. 41

на них; по направлениям через такие места видимость с земли с одного водораздела 2-го порядка на другой при отсутствии леса открывается нередко на 25—35 км. Конечно, нужно избегать направления сторон ряда по линиям, которые пересекают два-три водораздела 3-го порядка (черт. 41). При разбивке ряда из равносторонних треугольников такие случаи, однако, неизбежны, и наоборот, при разбивке геодезических четырехугольников можно, варьируя продвиг фигуры, с выгодой использовать пониженные места водоразделов 3-го порядка для прохождения

диагоналей четырехугольника. Отсюда можно сделать заключение, что в ряде из геодезических четырехугольников, если только идти с продвижением около 1,3 — 1,5, можно и в условиях нашей слабо всхолмленной и залесенной равнины нередко иметь высоты знаков заметно меньшими, чем в цепях из равносторонних треугольников.

В наших южных степных районах водоразделы (2-го порядка) указаны в натуре курганами — могильниками живших здесь более тысячи лет назад кочевников. В открытой или полузакрытой местности, применяя разборную лестницу, можно с пункта осмотра в большинстве случаев видеть вехи 10 м высотой, поставленные на предыдущих пунктах, или подробности местности на этих пунктах, если расстояние до них 25—30 км: это обуславливается именно тем, что тригонометрические пункты располагаются на повышенных точках водоразделов, а направления, намеченные с предыдущих пунктов на следующий, проходят или наперерез долины, или через пониженные места водоразделов 2-го порядка, или через разрывы в лесу. В местности открытой или полузакрытой навык в использовании рельефа и в его оценке обеспечивает при осмотре с высоты 17—20 м возможность в большинстве случаев правильно наметить секторы видимостей, в пересечении которых устанавливается следующий пункт триангуляции. При этом достаточно иметь уверенность, что с сигнала высотой 15—20 м, имеющего быть построенным на намеченном пункте, открывается обратная видимость на сигналы той высоты, которая рассчитана для предыдущих пунктов, или видимость будет достигнута при сравнительно небольшом увеличении этих высот на одном намечаемом пункте или и на нем и на предыдущих пунктах.

Эта уверенность создается вполне, если при осмотре на предыдущем пункте с высоты 17 м видна, например, верхушка мельницы, стоящей вблизи намечаемого пункта, или средняя часть стволов деревьев в ближайшей к нему роще. Если таких признаков на местности нет, — а о возможности видимости геодезист судит на основании оценки топографии местности, — то уверенность в правильности положения намеченного следующего пункта делается основательной только при обратном осмотре с этого пункта, когда с него при высоте подъема в 17 м удалось увидеть на предыдущем пункте местные предметы вроде перечисленных выше, а тем более, если при этом удалось видеть вехи, поставленной на этом предыдущем пункте. Конечно, геодезист должен документально подтвердить, что при намеченной им высоте сигналов видимость будет достигнута.

В тех случаях, когда определенно выявляется препятствие в виде значительной возвышенности, то пытаются эту возвышенность использовать для образования сложной фигуры, о чем уже сказано в § 19 и что было пояснено на черт. 31 Но нередко в этом случае возникает надобность выполнить или упрощенную геометрическую сеть или манзульные (реечные) ходы для выяснения как высоты и положения препятствия, так и возможностей его обхода, если это необходимо. Если чувствуется, что препятствие невелико, то можно поступить следующим образом. Пусть препятствие находится на некоторой линии  $AC$ ; оставив в  $A$  помощника с анероидом, геодезист переезжает на высшую точку препятствия  $D$  и по пути берет отсчеты анероида, внесшей температуры и времени только в самых крупных перегибах рельефа, отмечая положение их или на карте или на планшете глазомерной съемки. По

приезде в  $D$  он выполняет осмотр местности, поджидая помощника, который выезжает из  $A$  спустя время, нужное примерно на переезд геодезиста из  $A$  в  $D$ . Затем помощник остается с анероидом в  $D$ , а геодезист переезжает в  $C$ , набирая анероидом отметки некоторых точек по профилю  $DC$ . Работа заканчивается сличением анероидов в  $D$ , приближенным вычислением высот и построением графика профиля линии  $ADC$ . Точность определения высот будет невелика, но при исправных анероидах, вследствие незначительности промежутка времени, захватываемого соответственными наблюдениями (4—5 часов), и незначительности расстояния  $AC$ , которое вряд ли будет более 25 км, ошибки высот точек  $A$  и  $C$  относительно  $D$  не будут более 5 м, что вполне достаточно в данной задаче. Можно, конечно, с препятствия, подпираясь на нем в случае надобности на некоторую высоту, измерять вертикальные углы на верх вехи, поставленной в  $A$ , и на верх вехи, поставленной в  $C$ ; из таких измерений, заменяющих барометрическое нивелирование, вычисляют затем  $\Delta H_1$  и  $\Delta H_2$ , по точности их определения будет не более  $\pm 6$  м.

Все приведенное выше служит, думается, достаточным основанием к заключению, что в открытых районах или в полузакрытых, в которых, однако, леса представляют собой или перелески, или тянутся полосами, шириной не более 2—3 км с значительными свободными пространствами между пни, можно при навыке и развитой способности понимать местность и запоминать ее характерные черты, вести рекогносцировку, не прибегая, за исключением немногих случаев, к освещению местности пунктами геометрической сети и прокладкой речевых ходов. Осмотр местности с надлежащим выбором пунктов и надлежащее использование рельефа заменяют в этих районах, за исключением немногих случаев, изыскания, связанные с топографическими работами. Существенно иначе дело обстоит в лесных районах, слабо или средне всхолмленных. Понятно, что и здесь тригонометрические пункты должно памечать на водоразделах, и притом на наиболее возвышенных из них местах. Но отыскать водораздельную линию и ее держаться в лесу не так легко. Самое верное средство — идти по водотокам, которые непременно выведут на водораздел. Это, однако, нередко будет приводить к очень заметному удлинению пути и одновременно к передвижению по местам, наиболее трудно проходимым (переходы через притоки, заболоченные места в низинах и т. п.).

В этих условиях следует пользоваться указаниями проводников из местных лесников или охотников. Подъем в лесу на деревья для осмотра местности предполагает, что вершина избранного дерева господствует над окружающим лесом. Нужно иметь особые навыки к правильному выбору такого дерева. Очень нередко приходится делать в лесу небольшие порубки, чтобы получить даже с вершины правильно выбранного для осмотра дерева надлежащий кругозор; поэтому в составе партии необходимо для этого иметь рабочих. Крупные вехи, прибитые к деревьям на предыдущих пунктах, в рассматриваемых районах будут видны с вида обследуемого пункта далеко не всегда, вернее, в редких случаях, во-первых, потому, что между пунктами может проходить промежуточный водораздел с высоким лесом на нем, и, во-вторых, потому, — что подняться над лесом можно всего на несколько (5—7) метров, а не на 17—20 м, как в открытых районах.

В этих трудных условиях особенно важно, пользуясь помощью местных жителей, разыскать наиболее возвышенные точки в лесу: иногда с них открывается неожиданно обширнейший горизонт, позволяющий обозревать местность с земли на десятки километров. С таких точек можно зарисовать чередование долин и водоразделов на обширной площади, что весьма поможет при выборе последующих пунктов. Такие командующие точки найдутся во всяком лесу.

В рассматриваемых лесных слабо или средне всхолмленных районах рекогносцировка наиболее труда, и здесь требуется от рекогносцировщика особое чутье. Только в том случае, когда конечные точки линии  $AC$  в лесу заметно повышены относительно общего профиля по этой линии (метров на 20—25), можно говорить о реальном установлении сектора видимости с  $A$  на  $C$  и обратно. В большинстве же случаев можно лишь предполагать открытие этой видимости после сооружения в  $A$  и  $C$  сигналов соответствующей высоты. Эти предположения рекогносцировщика должны быть, однако, веско обоснованы и документально зафиксированы. Например, основой к достоверности предположения о видимости по линии  $AC$  (черт. 41) после постройки сигналов служат такие факты: обнаруженный при осмотре из  $A$  разрыв в водоразделе 3-го порядка, наличие в 8 км от  $A$  глубокой долины 3-го порядка; прохождение линии  $AC$  в остальной ее части над пониженными местами между водоразделом 2-го и 3-го порядка согласно схеме орографии, составленной во время рекогносцировки.

Намеченные на линии при осмотре с одного ее конца препятствие не легко разыскать в лесу, трудно на нем определиться, а измерение с него вертикальных углов на концы линии будет выполняемо в общем случае грубо.

В этих трудных условиях нужно располагать высотами (альти-тудами) намечаемых точек и высотами, взятыми на характерных местах профиля между этими точками, причем, конечно, вопрос идет об определении разностей высот интересующих нас пунктов с ошибкой, не превышающей  $\pm 6$  м.

Нам представляется, что при отсутствии сколько-нибудь солидного гипсометрического материала по району надлежащая организация барометрического нивелирования при рекогносцировке в лесных, слабо или средне всхолмленных районах приобретает существенное значение. Речь идет не об определении профилей из барометрического нивелирования по каждой стороне проектируемых треугольников, а о получении прежде всего правильной схемы рельефа местности и высот главных, характерных ее точек. Эти данные, вместе с навыками геодезиста понимать рельеф, схватывать его закономерности, позволят толково выбрать места осмотров, а при таких осмотрах более уверенно проектировать места и высоты будущих сигналов. Исследование же отдельных сомнительных профилей — или барометрическим нивелированием или другим, более подходящим методом — составит последующую и притом дополнительную работу, выполняемую на основе полученной ранее схемы рельефа и ряда осмотров.

К сожалению, в таком разрезе барометрическое нивелирование в рассматриваемых трудных районах не применялось. Поэтому из практики мы не имеем поучительных примеров и опыта. Но постановка дела представляется в таком виде. В учреждении, ведущем работы, должна быть лаборатория для испытания анероидов и отбора из них высококачественных для рекогносировочных отрядов. Во время работы в лес-

ном районе к анероидам должно быть самое заботливое отношение; партия снабжается четырьмя анероидами и двумя гипсотермометрами; последние служат не для определения высот, а для определения изменений в постоянной (добавочной) поправке анероидов, хотя и с невысокой точностью (средняя ошибка  $\pm 0,2\text{--}0,3 \text{ мм}$ ). В партию назначается второй помощник геодезиста. Соответственные наблюдения, проводимые геодезистом и этим помощником, лежат в основе нивелирования, но встречи их друг с другом могут происходить и через 3—5 дней, и геодезист вовсе не должен возвращаться в начальный пункт рейса, где была оставлена станция помощника: сличение анероидов с гипсотермометром освобождает от необходимости этого. При переезде помощника со станции на условленное место встречи с геодезистом, он определяет характерные точки рельефа на своем пути. Маршрут — и геодезиста и его помощника — непременно тут же наносится на планшет глазомерной папки, на котором нанесены с карты все важные предметы местности; расстояния определяются по времени, а направления — по буссоли. Нанесение маршрута опытным исполнителем устраниет возможность заблудиться в лесу при вынужденных поворотах и обходах и отчетливо даст положение пройденного пути и взятых профилей. Если соответственные наблюдения не имели места на части маршрута геодезиста из-за произошедшей невыдержанности сроков, назначенных для выполнения рейса геодезиста, то эта часть, всегда небольшая, переделывается. Предполагается, что расстояние между пунктами соответственных наблюдений не превышает 50 км. Когда помощник едет на соединение с геодезистом, то этот последний ведет наблюдения на своем пункте, как «на станции». В районах, достаточно обжитых, указанная организация нивелирования, думается, всегда осуществима без перебоев. В малообжитых районах выдерживание согласованности сроков в работе геодезиста и помощника гораздо труднее и здесь по необходимости придется добиваться успеха за счет расчета сроков с известным «запасом»; здесь же нужно озабочиться принятием мер к избежанию блужданий помощника при переезде на место встречи с геодезистом. При исполнении указанных маршрутов и геодезист и его помощник не только выполняют барометрическое нивелирование, но и зарисовывают схематически рельеф местности, ведут умелые расспросы проводников и местных жителей и, сообразуясь со своим топографическим чутьем, изменяют направление маршрутов. После охвата ходами барометрического нивелирования всего интересующего района отрабатывается схема его рельефа; после этого намечают места тригонометрических пунктов и приступают к осмотру с них местности и к рекогносцировке. Понятно, что всегда окажется несколько профилей, по которым придется сделать дополнительные детальные изыскания.

Мы имсем три системы рекогносцировок:

1) Немецкая, описанная выше, и для нас неприемлемая.

2) Старая, применявшаяся в США и отчасти у нас до начала прошлого столетия; для нее характерным является то, что за исключением случаев, сравнительно немногочисленных, когда устанавливалась реальная видимость, непосредственно на местности выполнялись довольно значительные топографические и геодезические работы для выяснения препятствий, профилей местности и обоснования расчетов высоты сигналов. Об этом методе американский геодезист Бильби пишет так:

«Начиная от какого-нибудь известного базиса, рекогносцировщик измерял вертикальные и горизонтальные углы и вычислял расстояния

между пунктами. По измеренным вертикальным углам определяли высоту препятствий и высоты знаков. Для этого было необходимо вводить много дополнительных точек и сооружать вехи с флагами или болванками. Требуя много времени, сил и средств, этот метод не давал надежных результатов вследствие больших ошибок, неизбежно вытекающих из самих условий работы».

3) Современная американская, основанная на предварительном тщательном изучении картографических материалов и удачном составлении на основе этого изучения предварительного проекта ряда.

По Бильби, при выборе точек на местности «главнейшей задачей является производство умственной топографической съемки района». При рекогносцировке необходимо обследовать те места, которые могут служить пунктами ряда. Положение их определяется магнитными азимутами, взятыми с них на предметы, нанесенные на карте. При осмотре с пункта выполняется изучение с помощью бинокля характерных черт выдающихся предметов местности и их запоминание. На точки, могущие служить пунктами, на предметы ориентировочного значения и на препятствия берут магнитные азимуты и оценивают глазомерно расстояния до них. При переездах пользуются представляющимися возможностями для осмотра местности. В лесах осмотр выполняют, взираясь на деревья. Анероидом пользуются только иногда, производя одностороннее нивелирование для выяснения препятствия. Объезды происходят на автомобиле.

Очевидно, что американская методика рассчитана на значительную опытность геодезиста и на значительно развитую у него способность к оценке местности.

Применяемые в СССР методы рекогносцировки близки к американским. Но поскольку в основе последней лежит надлежащая разработка предварительного проекта триангуляции, постольку при отсутствии у нас картографического материала и необходимых географических сведений по многим районам геодезических работ выявляется целесообразность предпосылать рекогносцировке общее геодезическое обследование района, дающее возможность разработать предварительный проект триангуляции не вслепую, а примерно на основании того же материала, как в США. Далее несомненно, что в США имеют дело вообще с более крупным рельефом, а это позволяет при опытности рекогносцировщика нередко осмотр и обследование местности делать достаточно бегло. В наших условиях выполнить требование — обследовать лишь те места, которые могут служить пунктами ряда, нередко возможно только после ряда проб на местности из-за отсутствия сколько-нибудь резкой выраженности в рельефе и из-за незакономерности и прихотливости в расположении водоразделов.

Думается, описанный выше порядок вносит соответствующие поправки в схему США в применении ее к нашим условиям.

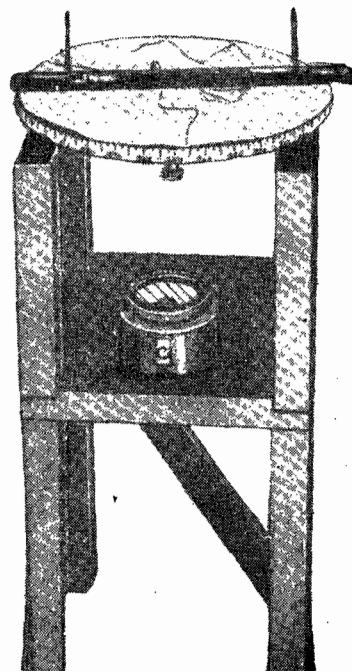
Рационализация рекогносцировки у нас должна пойти в незалесенных районах по линии применения автомобилей и перевозки на них раздвижных или разборных металлических вышек высотой до 25 м для осмотра местности.

В лесных районах, слабо или средне всхолмленных, обещает существенный успех применение рекогносцировки с аэроплана, уже введенное в геодезических работах в Канаде с 1929 г. На аэроплане устанавливается прибор типа мензулы (черт. 42), состоящий из

подставки, к которой прикреплены аэропланый компас и сверху круглая мензульная доска диаметром 35 см; на ребре доски нанесены градусные деления. Имеющаяся карта прикалывается к доске так, чтобы при установке доски на градус, указываемый стрелкой компаса, она была правильно ориентирована. Важные предметы местности: возвышенные пункты; пункты, определяющие водораздельные хребты; верховья рек и ручьев, устья рек и долин; поляны и разрывы в лесу, пониженные места водоразделов, предметы ориентировочного значения — определяются путем засечки алидадой. Точность написания пунктов местности, удаленных от аэроплана на 15—20 км, считается около 1,5 км. На безопасных для низкого полета местах самолет опускается на такую высоту, чтобы вершины некоторых холмов казались вблизи горизонта; с такой высоты можно судить об относительной высоте холмов и сделать довольно правильные зарисовки некоторых профилей местности. После первого облета следуют второй и третий, чтобы уточнить собранный материал, выяснить некоторые важные добавочные детали, выяснить видимость по ряду линий будущей триангуляции, уже намеченных в результате первого полета, но не подвергшихся еще при этом полете непосредственному исследованию. Этот метод применим в районах, изобилующих озерами и реками, с высотой холмов в нем 60—350 м над уровнем долин или озер. Но он не исключает необходимости выполнения добавочной наземной рекогносцировки по ряду направлений; тем не менее общее время на рекогносцировку и затраты на нее заметно сокращаются.

Попытки дополнять зарисовки и определения с аэроплана фотографическими (стереоскопическими) снимками не дали пока положительных результатов. По существу, все, что сказано выше, относится к рекогносцировке как рядов I класса, так и основных рядов II класса, так как стороны треугольников в последних не так уже заметно разнятся от сторон I класса.

Мы считаем еще раз уместным напомнить, что требования прямолинейности ряда, направления его по меридиану или по параллели, выдержанности размеров сторон треугольников вовсе не являются жесткими; направление ряда, вид фигур в нем и размеры их сторон следует выбирать соответственно рельефу местности; введение геодезических четырехугольников и иногда центральных систем может приводить к устранению ряда затруднений при рекогносцировке, к уменьшению высот сигналов и к более точным результатам при наблюдениях, выполняемых к тому же в меньшее время. Там, где, соблюдая форму треугольников, с трудом добились видимости путем постройки высоких сигналов, наблюдения обычно выполняются в тяжелых условиях и дают результаты только по выполнении рядов измерений, охватывающих значительный промежуток времени.



Черт. 42

При рекогносцировке заполняющих сетей II класса и сетей III класса нужно обеспечить известную густоту точек и удобство их использования при топографических работах, будь то мешульная съемка или аэрофотосъемка. На планшет съемки масштаба 1 : 25 000 нужно дать не менее четырех пунктов, определенных геодезически при мешульной топографической съемке. При применении аэросъемки дело зависит от ее вида, и поэтому должно при составлении проекта триангуляции II и III классов получить соответствующие данные и указания от фотограмметрической части производства. Разработка на основании изучения имеющихся картографических материалов предварительный проект триангуляции (заполняющей сети II класса или сети III класса), далее приступают к осмотру и выбору пунктов на местности, применяя в общем те же методы, как и описанные выше. Но в большинстве случаев в открытой и полузакрытой местности задача становится существенно более простой, чем в триангуляции I класса; этому способствуют: возможность больших отступлений треугольников от формы равностороннего треугольника, частота водоразделов второго порядка и в четыре раза меньшее действие кривизны Земли. Однако, это не освобождает от необходимости тщательного выполнения рекогносцировки и полной обоснованности предположенных высот сигналов, потому что в триангуляции II класса, а тем более III класса нужно иметь высоты геодезических сигналов значительно меньшие, чем в триангуляции I класса: здесь сигнал высотой в 20 м должен применяться как исключение; в большинстве же случаев нужно добиваться видимости с высоты платформы для инструмента в 6—8 м, а нередки должны быть и случаи наблюдений с земли. Поэтому и здесь опыт в использовании рельефа и тщательность в разыскании наиболее выгодных мест обязательны. Осмотр местности с колоколен, с деревьев, с крыш зданий, с лестниц, укрепленных веревочными тяжами, обычно приводит к правильному решению вопроса о пригодности данного пункта и о высоте постройки на нем. При отсутствии приспособлений для подъема на высоту, которая требуется для преодоления препятствия, профиль местности изучается при помощи барометрического нивелирования или мешульного речного хода; однако, в большинстве случаев в условиях триангуляции II и III классов с выгодой можно применить измерение вертикальных углов с препятствия на концы линий, так как всегда положение препятствия достаточно определяется обратными засечками на предметы местности, а видимость на концы линии будет достаточная и относительные высоты определяются с ошибкой менее 2 м. Большине леса нередко включают в кольцо треугольников II класса, имея в виду впоследствии через них проложить ходы точной полигонометрии. В лесах небольшой ширины прибивают к самым высоким деревьям вехи, которые должны быть видны с той и другой стороны леса. Такие вехи будут определены впоследствии засечками и дадут опорные точки, выгодно используемые при съемке; сеть же второго класса огибает лес.

Трудности рекогносцировки сетей II класса в лесных районах достаточно велики; необходимость поднимать инструмент при наблюдениях выше леса приводит и здесь к постройке высоких сигналов. Отсюда находит подкрепление себе мнение, что в лесных и притом с слабым рельефом районах выгодно триангуляцию II класса заменять точной полигонометрией. Думается, что это мнение нужно принимать с большой осторожностью: каждый ход полигонометрии дает обслуживание малой площади съемки, и нужно проложить очень густую сеть ходов, чтобы

дать надлежащее обоснование съемки на значительной площади и хороший контроль в ней. С другой стороны, нередко имеется возможность в лесных районах по некоторым выгодным направлениям проложить ряды триангуляции II класса с постройкой сигналов высотой 20—25 м, между этими же рядами дать (многократными засечками) редкие точки III класса. Опытный рекогносцировщик и при разбивке сети II класса в лесу может добиться существенного успеха.

## § 22. Рекогносцировка базисов и базисных сетей

Выбор базиса должен удовлетворять ряду условий, а именно:

а) длина базиса I класса должна быть около 8 км, а II класса — около 5—6 км;

б) грунт на всем протяжении базиса должен быть достаточно крепким, а встречающиеся на линии базиса как исключение мокрые места или пруды не должны быть шире  $\frac{3}{4}$  длины наиболее длинной из имеющихся базисных проволок (проводки имеют нормальную длину 24 м; затем имеются в небольшом количестве и проволоки 48 м и 72 м длины);

в) на линии базиса не должно быть построек и ценных насаждений;

г) овраги, ямы, канавы, ручьи и речки, пересекаемые базисом, не должны быть шире 40 м\*;

д) на базисах I класса общий наклон линии к горизонту не должен быть более 25—30 м, но на некоторых частях базиса можно допустить падение до 1,5—2 м на 24 м при условии, что такие части в сумме составят, однако, малую часть общей длины базиса, например, не более 1 : 20;

е) если базис по необходимости выбран на участке, отчасти заросшем лесом или кустарником, то должна быть обеспечена возможность прорубки просеки шириной в 5 м; конечно, участок, сплошь покрытый лесом, должен быть признан неподходящим;

ж) для провешивания линии базиса необходима видимость с одного его конца с сигнала или с земли сигнала, построенного на другом конце;

з) для астрономических определений должна быть видимость с земли с одного из концов базиса на сигнал на конце выходной стороны базисной сети, если только видимость с земли с одного из концов выходной стороны на сигнал на другом ее конце не будет иметь места.

Эти требования выполнимы все вместе не во всякой местности. В более или менее пересеченной местности нередко нельзя найти прямой базис надлежащей длины, и тогда прибегают к ломаному базису. Следует требовать в ломаном базисе прежде всего, чтобы была взаимная видимость с одного его конца на другой.

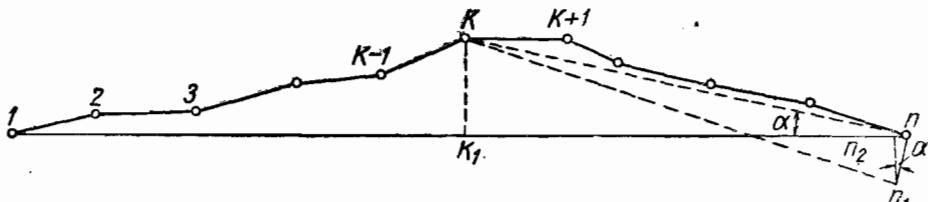
На черт. 43 изображен ломаный базис  $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ . Длина его  $l - n$  равна длине, замыкающей полигон  $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ . Пусть расстояние  $kk_1$  точки  $k$  от этой замыкающей есть  $h_k$ . Ошибка в угле  $(k-1, k, k+1)$  на величину  $\Delta\beta_k$  вызовет сдвиг конца диагонали  $kn$  в положение  $n_1$ , причем проекция  $n_1$  на замыкающую даст точку  $n_2$ .

\* Предполагая применение в этих случаях проволок длиной 48 м.

Треугольники  $n_1n_2n$  и  $nk_1k$  можно считать подобными и поэтому

$$\frac{nn_2}{nn_1} = \frac{h_k}{kn},$$

$$nn_2 = nn_1 \cdot \frac{h_k}{kn} = kn \cdot \frac{\Delta\beta''}{\rho''} \cdot \frac{h_k}{kn} = h_k \frac{\Delta\beta''}{\rho''}.$$



Черт. 43

Очевидно, что средняя ошибка в замыкающей  $1 - n$ , обусловленная ошибками измерения углов в полигоне  $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ , вычисляется теперь так

$$m_s^2 = \left( \sum_{k=2}^{n-1} h_k^2 \right) \cdot \frac{m''_\beta^2}{\rho''^2},$$

$$\frac{m_s}{s} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{n-1} h_k^2 \cdot m''_\beta^2}{s \cdot \rho''}}. \quad (92)$$

Если даже отрезки  $1 - 2, 2 - 3, \dots$  возьмем длиной примерно около 2,5 км, то все-таки вряд ли можно надеяться на измерение углов при вершинах базисного полигона со средней ошибкой менее  $\pm 3''$ : ошибки в центрировках на 0,5 мм будут уже давать в угле среднюю ошибку около  $\pm 1''.5$ .

Если средняя ошибка базиса I класса не должна быть меньше  $1 : 1500000$ , то  $\frac{m_s}{s}$  не должно быть более  $1 : 3000000$ . Поэтому получаем следующую расчетную формулу для рекогносцировки ломаного базиса I класса

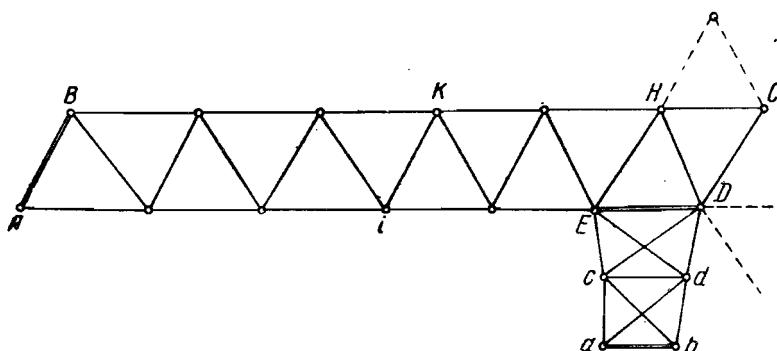
$$\sqrt{\sum_{k=2}^{n-1} h_k^2} \leq \frac{s}{45}. \quad (93)$$

Измерив грубо углы между элементами ломаного базиса и длины его частей, рекогносцировщик строит план ломаного базиса и по нему выбирает величины  $h$ . Если левая часть равенства (93) оказывается равна или менее  $\frac{s}{45}$  (где  $s$  — длины замыкающей  $1 - n$ ), то намеченный ломанный базис приемлем, однако, при условии, что длины его частей (стороны полигона  $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ ) — каждая не менее 2 км. При  $s = 10000$  м и при трех изломах базиса получим: среднее  $h$  равно 130 м,

допускаемые углы при точках 2, 3 и 4 — не более  $6^{\circ}5$ , а при концах базиса — не более  $3^{\circ}25$ . При одном изломе по середине базиса угол излома должен быть не более  $7^{\circ}$  и т. д.

Так как углы в фигуре  $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$  связаны двумя условиями, то после их уравнивания правую часть (93) можно увеличить, умножив ее согласно (73) на  $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$ , но только при  $n$ , большем четырех. Однако, не следует в базисах I класса иметь  $n$  более четырех, и поэтому нужно руководиться формулой (93).

В некоторых случаях, главным образом из-за заболоченности района, не представляется возможным выбрать надлежащее место для базиса так, чтобы выходной стороной служила сторона ряда  $CD$  или  $DH$  (черт. 44), приходящаяся в стыке рядов I класса, но имеется возможность выбрать длинный и удобный для измерения базис  $ab$  в стороне от ряда, например, в 40—50 км от него. При этом предполагается еще,



Черт. 44

что искривление ряда так, чтобы подойти совсем близко к  $ab$ , не представляется возможным. Если  $ab$ , — хотя бы в виде ломаного базиса, однако, проходящего по удобным для измерения местам, может быть доведено до 15 км, — то проектируют соединительный ряд  $EDdc$  —  $cdba$  из жестких фигур и, задаваясь повышенной точностью измерения углов в этом соединительном ряде (например, бера  $m'' = \pm 0'',5$ ), подсчитывают по правилам и формулам § 8 (19) вес и среднюю ошибку стороны  $ED$ . Лапласовы азимуты должны быть определены в  $E$ ,  $D$ ,  $a$  и  $b$ . Если точность стороны  $ED$  окажется близкой к  $1 : 300\,000$ , то соединительный ряд приемлем, и лучше измерить базис  $ab$  и выполнить этот ряд, чем осуществить базисную сеть в виде простого ромба, в котором длинной диагональю будет сторона  $CD$  (или  $HD$ ), но короткая диагональ — базис — пролегает по болотам, где точное измерение базиса невозможно (хотя и на болотах для базисов получают «высокую» точность результата, но это, конечно, мало убедительно). На тщательнейшее измерение углов в соединительном ряде придется обратить особое внимание; объем работы по сравнению с простой ромбической базисной сетью увеличивается собственно на измерение углов в фигуре  $EDdc$ . Мы вовсе не склонны рекомендовать такие базисы, находящиеся в стороне от ряда; но их можно допускать в виде исключения.

После выбора базиса приступают к рекогносцировке базисной сети. Обе эти задачи связаны тесно друг с другом, и при выборе базиса рекогносцировщик учитывает уже построение будущей базисной сети. Как уже было выяснено в главе III, желательно в триангуляции I класса стремиться к получению выходной стороны с точностью около 1 : 400 000. Точность определения выходной стороны обусловливается как фигурой базисной сети, так и точностью измерения «о т в ет - с т в е н н ы х» в ней углов, т. е. углов, сильно влияющих на определение длины выходной стороны. Задаваясь точностью выходной стороны в 1 : 400 000, мы получим среднюю ошибку в логарифме стороны в единицах шестого знака, равную  $\pm 1,1$ . Предполагая, что при уравнивании сети за неизвестные с весом единицы будут приняты направления, и уравнивание будет выполняться по направлениям, напишем при средней ошибке наблюденного угла  $\pm 0'',6$

$$\frac{0'',6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{P}} = 1,1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{P} = 9,4.$$

Приходится еще иметь в виду, что ответственные углы (см. главу «Базисные сети») в базисных сетях наблюдают с значительно большим весом, вследствие чего вес выходной стороны повышается примерно в  $\frac{4}{3}$  раза, но, конечно, среднюю ошибку наблюденного направления вряд ли можно считать менее  $\pm 0'',4$ . Таким образом, получается правило: обратный вес выходной стороны из уравненной базисной сети должен получаться около 12 единиц и не более 15 единиц, если коэффициенты в ее боковых уравнениях даны в единицах шестого знака логарифма и веса всех направлений считаются равными единице. Пример расчета веса выходной стороны приводится ниже. Геодезист обязан такой расчет сделать при самой рекогносцировке. Так как ответственные углы в базисной сети должны быть получены с особой точностью, то необходимо при рекогносцировке соблюсти непременно правило достаточно высокого прохождения визирных лучей над почвой и лесом и достаточно далеко в плане от стен зданий, скал, обрывов и т. п. В районах, для которых имеются подробные карты местности, рекогносцировка самой базисной сети не представляет особых затруднений. Выгоднейшая форма базисной сети — это ромб, в котором короткой диагональю является базис; сумма углов при концах длинной диагонали, являющейся выходной стороной, должна быть не менее  $34-35^\circ$  (см. главу «О базисных сетях»). В районах, для которых нет хороших карт, рекогносцировку базисной сети и базиса следует вести с помощью мензулы, определяя на ней важные точки местности графически, засечками, и выводя высоту их из вертикальных углов, измеренных кипрегелем; при этом придется измерить лентой вспомогательный базис или воспользоваться измеренной лентой длиной намеченного базиса в базисной сети. Только имея на планшете мензулы положения и высоты ряда характерных точек местности, главнейшие перегибы рельефа, реки, ручьи, овраги и болота, а также, хотя бы приблизительно, контуры лесов, можно с уверенностью наметить пункты базисной

сети и последующей поверкой на местности убедиться в правильности их выбора. В базисной сети должно измерять при этом все углы с точностью до полуградуса.

Выбранный базис следует хорошо провешить и измерить тщательно стальной 20-метровой лентой, ведя одновременно топографическую съемку полосы вдоль базиса достаточной ширины в масштабе 1 : 25 000; при этом следует взять необходимые высоты для получения профиля базиса и отметить все предметы, которые могут вызывать осложнения при измерении базиса, внося соответствующие сведения в журнал измерения. Через каждый километр базиса надо поставить солидный деревянный столб. В результате следует составить описание базиса.

Разные виды возможных базисных сетей будут даны в главе «О базисных сетях».

В заключение следует отметить, что по выполнении рекогносцировки ряда должны быть представлены:

- 1) на каждый пункт журнал с таблицей возможных направлений, с высотными профилями, с чертежом секторов видимости, с планом положения пункта, с расчтами высоты постройки; в журнале описывается также подъезд к пункту, указывается, где можно заготовить лес, и т. п.;

- 2) подлинная полевая карта со всеми сделанными на ней в поле дополнениями, замечаниями и с прочерченными направлениями;

- 3) все журналы, материалы съемки по рекогносцировке базиса и базисной сети и схема базисной сети в крупном масштабе с показанием ближайших деревень и станций;

- 4) карта с проектом ряда, с надписанной для каждого пункта высотой столиков для инструмента и гелиографа;

- 5) чертеж сети с показанием всех направлений, подлежащих наблюдениям, и с подписью приближенных величин углов;

- 6) описание района, дающее отчетливое представление об условиях выполнения геодезических работ в нем, и сведения об условиях закладки центров и, в особенности, о мерзлоте.

**Пример расчета веса выходной стороны базисной сети** (материал взят из брошюры «Практическое руководство по рекогносцировке пунктов триангуляции» инж. И. Н. Виноградского).

Выходная сторона —  $CD$  (черт. 45).

Имеем такие данные, приведенные в табл. 4.

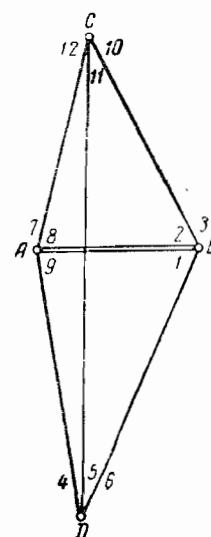
В ромбе  $ACBD$  будут три условия сумм углов в треугольниках и одно боковое условие, которое представим в виде требования, чтобы сторона  $AC$ , вычисленная по базису  $AB$  и по треугольникам  $ADB$  и  $ACB$ , получалась равной при вычислении ее по базису  $AB$  из треугольника  $ACB$ .

Мы имеем условные уравнения в таком виде

$$\Delta ABD: (2) - (1) + (6) - (4) + (9) - (8) + w_1 = 0, \quad (a)$$

$$\Delta ABC: (3) - (2) + (8) - (7) + (12) - (10) + w_2 = 0, \quad (b)$$

$$\Delta CDB: (3) - (1) + (6) - (5) + (11) - (10) + w_3 = 0. \quad (c)$$



Черт. 45

Таблица 4

| Разности направлений | Углы  | Изменения<br>$\lg \sin (\delta)$ | Разности направлений | Углы   | Изменения<br>$\lg \sin (\delta)$ |
|----------------------|-------|----------------------------------|----------------------|--------|----------------------------------|
| 3—2<br>8—7<br>12—10  | 62°,2 | + 1,1                            | 3—1                  | 122°,6 | - 1,4                            |
|                      | 80°,4 |                                  | 6—5                  | 25°,5  |                                  |
|                      | 37°,4 | + 2,7                            | 11—10                | 31°,9  | + 3,4                            |
| 2—1<br>6—4<br>9—8    | 60°,4 | + 1,2                            | 5—4                  | 4°,6   | + 26,1                           |
|                      | 30°,1 | + 3,6                            | 9—7                  | 169°,9 | - 11,8                           |
|                      | 89°,5 | + 0,01                           | 12—11                | 5°,5   | + 21,9                           |

Боковое уравнение напишется так

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{\sin [2 - 1 + (2) - (1)]}{\sin [6 - 4 + (6) - (4)]} \cdot \frac{\sin [5 - 4 + (5) - (4)]}{\sin [12 - 11 + (12) - (11)]} =$$

$$= \frac{\sin [3 - 2 + (3) - (2)]}{\sin [12 - 10 + (12) - (10)]}.$$

Через (3), (2) ... обозначены поправки измеренных направлений  $3 + (3)$ ,  $12 + (12) \dots$  представляют собой искомые значения направлений  $3, 12, \dots$ . Величины  $w_1, w_2, w_3$  представляют собой сумму углов, измеренных в треугольнике минус теоретическая сумма этих углов; в поставленной задаче (см. § 8) они нам не нужны и остаются неизвестными

Пользуясь соотношением

$$\lg \sin [A + \Delta A] = \lg \sin A + \delta_A \cdot (\Delta A)'',$$

где под  $\delta_A$  понимается приращение логарифма синуса угла  $A$  при изменении этого угла на одну секунду, переписываем боковое условие после его логарифмирования следующим образом

$$\delta_{2-1} \cdot \{(2) - (1)\} + \delta_{5-4} \cdot \{(5) - (4)\} + \delta_{12-10} \cdot \{(12) - (10)\} -$$

$$- \delta_{6-4} \cdot \{(6) - (4)\} - \delta_{12-11} \cdot \{(12) - (11)\} - \delta_{3-2} \cdot \{(3) - (2)\} + w_4 = 0,$$

где

$$w_4 = \lg \frac{\sin [2 - 1] \cdot \sin [5 - 4] \cdot \sin [12 - 10]}{\sin [6 - 4] \cdot \sin [12 - 11] \cdot \sin [3 - 2]}.$$

Подставляя  $\delta_{2-1}, \delta_{5-4} \dots$  из табл. 4, получаем

$$\left. \begin{aligned} & - 1,2(1) + 2,3(2) - 1,1(3) - 22,5(4) + 26,1(5) - 3,6(6) - \\ & - 2,7(10) + 21,9(11) - 19,2(12) + w_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Сумма коэффициентов в этом уравнении (d) должна быть равна нулю. Логарифм отношения  $\frac{CD}{AB}$  есть та функция  $F$ , вес которой мы определяем. Имеем

$$F = \lg \frac{\sin [\text{III} - \text{I}] \sin [\text{IX} - \text{VIII}]}{\sin [\text{VI} - \text{IV}] \sin [\text{XI} - \text{X}]},$$

понимая под I, III, XI уравненные направления.

Далее

$$F = F_0 + \delta_{3-1} \{(3) - (1)\} + \delta_{5-8} \{(9) - (8)\} - \delta_{6-4} \{(6) - (4)\} - \delta_{11-10} \{(11) - (10)\};$$

$$F_0 = \frac{\sin [3 - 1] \sin [9 - 8]}{\sin [6 - 4] \cdot \sin [11 - 10]}, F_0 \text{ не вычисляется.}$$

«Весовая» функция после подстановки значений  $\delta$  напишется так

$$+ 1,4(1) - 1,4(3) + 3,6(4) - 3,6(6) - 0,1(8) + 0,1(9) + + 3,4(10) - 3,4(11) \quad (\text{f})$$

Теперь выписываем в табл. 5 коэффициенты условных уравнений и весовой функции.

Таблица 5

| № №<br>напра-<br>влений | $a$ | $b$ | $c$ | $d$    | $f$    | $s$    |
|-------------------------|-----|-----|-----|--------|--------|--------|
| 1                       | - 1 | -   | - 1 | - 1,2  | + 1,4  | - 1,8  |
| 2                       | + 1 | - 1 | -   | + 2,3  | -      | + 2,3  |
| 3                       | -   | + 1 | + 1 | - 1,1  | - 1,4  | - 0,5  |
| 4                       | - 1 | -   | -   | - 22,5 | + 3,6  | - 19,9 |
| 5                       | -   | -   | - 1 | + 26,1 | -      | + 25,1 |
| 6                       | + 1 | -   | + 1 | - 3,6  | - 3,6  | - 5,2  |
| 7                       | -   | - 1 | -   | -      | -      | - 1,0  |
| 8                       | - 1 | + 1 | -   | -      | - 0,01 | - 0,01 |
| 9                       | + 1 | -   | -   | -      | + 0,01 | + 1,01 |
| 10                      | -   | - 1 | - 1 | - 2,7  | + 3,4  | - 1,3  |
| 11                      | -   | -   | + 1 | + 21,9 | - 3,4  | + 19,5 |
| 12                      | -   | + 1 | -   | - 19,2 | -      | - 18,2 |

Здесь графа  $s$  дает суммы

$$s_k = a_k + b_k + c_k + d_k + f_k.$$

Нормальные уравнения напишутся так

$$6k_1 - 2k_2 + 2k_3 + 22,4k_4 + w_1 = 0 \quad [af] = - 8,6$$

$$+ 6k_2 + 2k_3 - 19,8k_4 + w_2 = 0 \quad [bf] = - 4,8$$

$$+ 6k_3 - 5,0k_4 + w_3 = 0 \quad [cf] = - 13,2$$

$$+ 2063,9k_4 + w_4 = 0 \quad [df] = - 151,8$$

$$[as] = - 19,8; \quad [bs] = - 18,6 \quad [ff] = + 53,0$$

$$[cs] = - 8,2; \quad [ds] = + 1909,7; \quad [fs] = - 125,3$$

Вычисление веса ведем в Гауссовой схеме, приведенной ниже. Итак,  $\frac{1}{p}$  равен 7,9.

Принимая среднюю ошибку направления равной  $\pm \frac{0^{\circ},6}{\sqrt{2}}$  (ошибка единицы веса), получим среднюю ошибку в логарифме выходной стороны в единицах шестого знака логарифма (не считаясь с ошибкой базиса)

$$m_{\lg CD} = \frac{0,6}{\sqrt{2}} \sqrt{7,9} = \pm 1,2,$$

т.е.  $CD$  определится с средней ошибкой  $\frac{1,2}{0,4343 \times 1000000} = 1 : 362000$ ,

если все направления в базисной сети считать измеренными одинаково точно. При так называемом «выгоднейшем распределении весов» в базисной сети получим для выходной стороны еще большую точность.

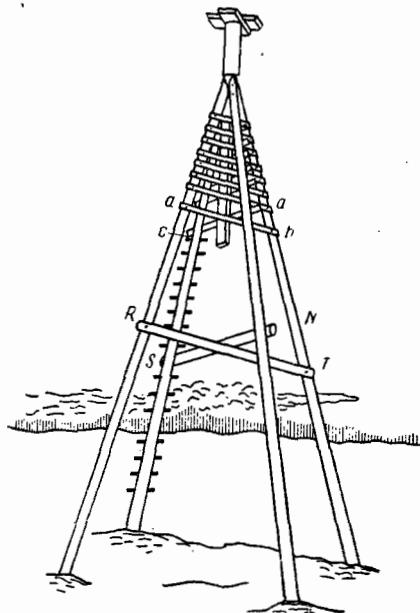
| $k_1$   | $k_2$   | $k_3$   | $k_4$  | $f$  | $s$    |
|---|---|---|--|--|--------|
| + 6   | - 2   | + 2   | + 22,4   | - 8,6  | - 19,8 |
| $\begin{array}{l} + 6 \\ - 0,667 \end{array}$                                     | $\begin{array}{l} + 2,0 \\ + 0,667 \end{array}$                                     | $\begin{array}{l} - 19,8 \\ + 7,467 \end{array}$                        | $\begin{array}{l} - 4,8 \\ - 2,867 \end{array}$            | $\begin{array}{l} - 18,6 \\ + 6,600 \end{array}$ |        |
| + 5,333   | + 2,667   | - 12,333  | - 7,667  | - 12,000   |        |
| $\begin{array}{l} + 6,0 \\ - 0,667 \\ - 1,333 \end{array}$                        | $\begin{array}{l} - 5,0 \\ - 7,467 \\ + 6,167 \end{array}$                          | $\begin{array}{l} - 13,2 \\ + 2,867 \\ + 3,833 \end{array}$             | $\begin{array}{l} - 8,2 \\ - 6,600 \\ + 6,000 \end{array}$ |  |        |
| + 4,000   | - 6,300   | - 6,500   | - 8,800  |  |        |
| $\begin{array}{l} +2063,9 \\ - 83,63 \\ - 28,52 \\ - 9,92 \end{array}$            | $\begin{array}{l} - 151,8 \\ + 32,11 \\ - 17,72 \\ - 10,24 \end{array}$             | $\begin{array}{l} +1909,7 \\ - 73,92 \\ - 27,75 \\ - 13,86 \end{array}$ |  |  |        |
| +1941,83  | - 147,65  | +1794,17  |  |  |        |
| $\begin{array}{l} + 53,0 \\ - 12,33 \\ - 11,02 \\ - 10,56 \\ - 11,22 \end{array}$ | $\begin{array}{l} - 125,3 \\ + 28,38 \\ - 17,25 \\ - 14,30 \\ + 136,40 \end{array}$ |   |  |  |        |
|   | 7,87  | 7,93  |  |  |        |

### § 23. О тригонометрических знаках

**1. Геодезические сигналы.** Над тригонометрическим пунктом для возможности наблюдать его со смежных пунктов возводится геодезический сигнал того или иного вида, который имеет в верхней своей части или визирный цилиндр, наблюдаемый со смежных пунктов, или площадку для установки на ней приборов, подающих световые сигналы на смежные пункты. (Впрочем, не так редко верхний визирный цилиндр сохраняется и в тех сигналах, в которых устраивается площадка для световой сигнализации.)

Для возможности наблюдать с данного пункта смежные с ним является необходимым в триангуляции I класса почти всегда, а нередко и в триангуляции II класса поднимать инструмент для наблюдений над землей на 10—20—50 и даже 60 м. Поэтому геодезический сигнал очень часто приходится строить так, чтобы в нем была весьма устойчивая, обеспечивающая полное отсутствие азимутальных поворотов инструмента подставка для угломерного инструмента, которая имела бы столик для инструмента на высоте от земли в 10—20—30—60 м. Понятно, что в этих случаях (очень частых) сигнал должен нести соответственно устроенную и расположенную на надлежащей высоте платформу для наблюдателя. В большинстве случаев геодезические сигналы строят из дерева; разрушение таких сигналов через несколько десятилетий не ведет к уничтожению сети опорных пунктов, так как на каждом тригонометрическом пункте закладывается в земле соответственной конструкции центр, предназначенный к долговременному существованию.

Если местность открытая и холмистая и с высоты штатива угломерного инструмента видны все соседние тригонометрические пункты, и именно верхние и средние части поставленных на них сигналов, то тогда достаточно (за исключением иногда пунктов I класса) на данном пункте построить простую или ординарную пирамиду (черт. 46), состоящую из четырех бревен, соединенных у вершины с вертикальным визирным цилиндром (или, как его иногда называют, болванкой). Простая пирамида строится из бревен длиной от 9 до 13 м при толщине их: на высоте груди — 18 см, а в верхнем отрезе — около 10 см; болванка ее приготавливается из отрезка бревна толщиной 18—20 см и длиной около  $3\frac{1}{2}$  м, причем она высекается из пирамиды сверху на 1 м. Сторона квадрата основания пирамиды принимается равной  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{3}$  ее высоты; ямы для столбов следует рыть глубиной около 1 м. Болванка прочно соединяется со столбами посредством двух горизонтальных брусков *ab* и *cd*, располагающихся в диагональных плоскостях пирамиды и прибиваемых один под другим к выруб-

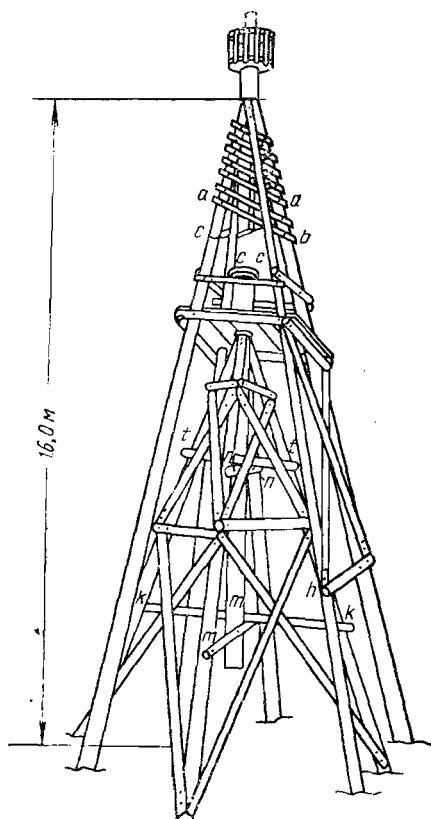


Черт. 46

кам в столбах и в нижней части болванки. В верхней части пирамиды из теса устраивается обшивка в несколько рядов по диагональным плоскостям. Для устойчивости столбы пирамиды еще соединяются крестовинами *RT* и *SN*. На одном из столбов пирамиды устраивается шведская лестница. Дно ям следует забивать слоем щебенки; к нижней части каждого столба, приходящегося в яме, следует прочно прибить брусков — это хорошо противодействует расщатыванию знака от сильных ветров.

Если с данного пункта сигналы на смежных пунктах открываются на 8—10 м, считая от их верха, только при подъеме инструмента над землей на данном пункте на 6—10 м, то тогда на нем строят двойную пирамиду или простой сигнал (см. ниже). Двойная пирамида состоит: из наружной пирамиды высотой 12—16 м (черт. 47) и из пирамиды внутренней — высотой до 8 м. Наружная пирамида заканчивается вверху визирным цилиндром, прочно соединенным с основными столбами ее посредством двух диагональных брусков *ab* и *cd*. Болванка (визирный цилиндр) внешней пирамиды имеет размеры те же, что и в простой пирамиде; так же, как и в простой пирамиде, применяется в верхней части наружной пирамиды обшивка тесом в диагональных плоскостях. Сторона квадрата основания пирамиды берется от 4,5 до 5,8 м. Внутренняя пирамида служит штативом для инструмента. Поэтому на надлежащей высоте к основным столбам наружной пирамиды прибиваются горизонтальные переводины из брусков толщиной 12 см, несущие пол для наблюдателя.

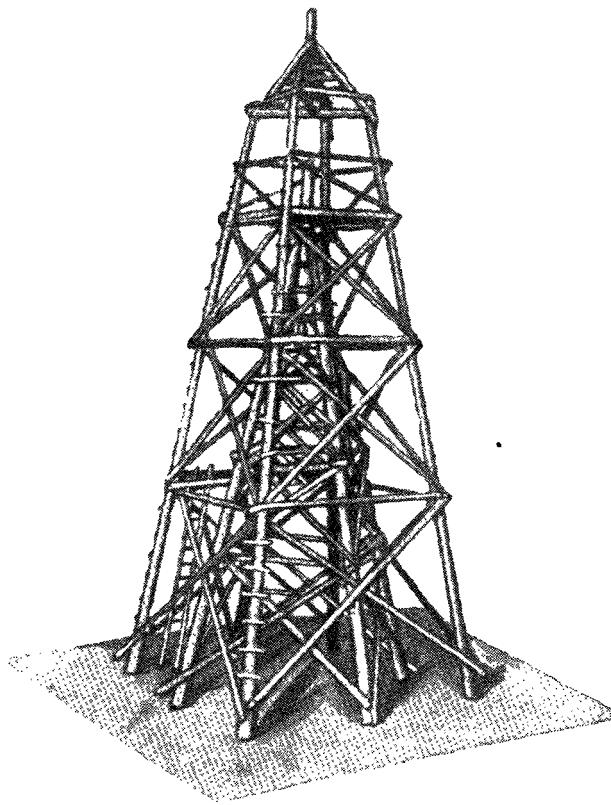
Сторона квадрата основания внутренней пирамиды берется немногим более корня квадратного из двух, помноженного на половину стороны квадрата основания наружной пирамиды (от 3,15 до 4,0 м). Таким образом, ямы для основных столбов внутренней пирамиды находятся на средине между ямами для основных столбов внешней пирамиды по сторонам квадрата ее основания. Болванка внутренней пирамиды имеет толщину 0,22 м; она высывается вверху на 1,1—1,2 м, но имеет общую длину 5—6 м. На солидное соединение ее с основными столбами внутренней пирамиды и на жесткость последней обращается особое внимание; диагональные бруски *nn*, *tt*, *kk* и *mm* связывают прочно нижнюю болванку со столбами внутренней пирамиды; внутренняя же пирамида обшивается по граням тремя венцами, и в каждой грани крестовинами (раскосами), располагающимися в трех ярусах: а) от первого венца,



Черт. 47

находящегося вблизи соединения столбов, до второго венца; б) между вторым и третьим венцом; в) ниже третьего венца — между ним и нижними концами столбов. К верхнему срезу болванки приколачивают стойку *сс*, образованный двумя кругами из 4-см досок, прочно соединенных друг с другом шпунтами и клесм. Почти всегда на наружной пирамиде устраивают еще один венец, кроме венца, служащего для настила пола, и по граням ее между этими венцами — крестовины; пол для наблюдателя должен быть совершенно изолирован от болванки внутренней пирамиды.

Для основных столбов берут лес толщиной: для внутренней пирамиды 0,18 м — внизу и 0,12 м — в верхнем отрезе; для ног наружной пирамиды 0,18 м — внизу и 0,10 м — в верхнем отрезе. Ямы для ног делают глубиной 1,5—1,7 м. На нижних частях ног, приходящихся в ямах, устраиваются якоря, о чем будет сказано ниже.

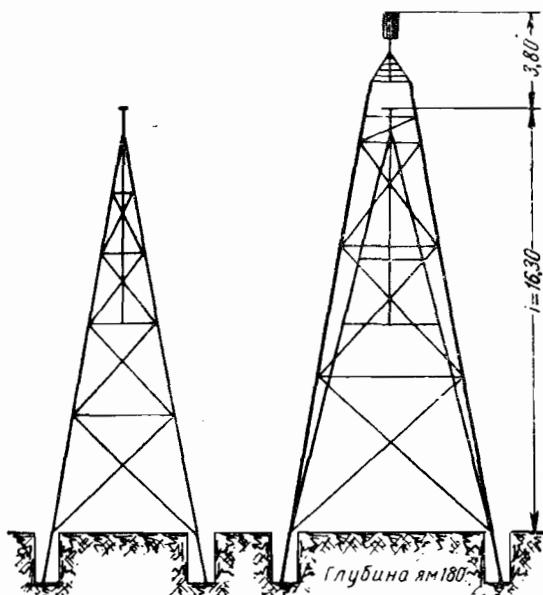


Черт. 48

Если для наблюдений на данном пункте инструмент надо поднять над землей на высоту от 10 до 16,3 м, то на таком пункте строят так называемый простой сигнал; при высоте инструмента более 16,3 м — простой сигнал заменяется в СССР сложным. Простой сигнал (черт. 48) состоит: а) из четырех основных столбов, поставленных почти вертикально, с уклоном около 1 : 10 относительно вертикаль-

ной линии; основные столбы несут пол для наблюдателя и верхнюю «головную» пирамиду с визирным цилиндром; б) из внутренней пирамиды больших размеров, служащей штативом для инструмента.

При высоте столика для инструмента в 11,5 м имеем такие размеры простого сигнала: сторона квадрата основания основных столбов 5,4 м; сторона квадрата основания внутренней пирамиды 4,1 м; толщина бревен для основных столбов и для ног внутренней пирамиды 0,22 м — на высоте груди и 0,12 м — в верхнем отрезе. Пол для наблюдателя имеет размеры 2,25 × 2,25 м; концы основных столбов возвышаются над полом на 2,4 м. Пол должен быть совершенно изолирован от внутренней пирамиды. Головная пирамида имеет высоту 1,8 м плюс высевающаяся кверху от ее вершины на 1,2 м часть ее болванки; болванка этой пирамиды общей длиной в 3 м соединяется прочно с основными столбами посредством двух горизонтальных брусков, располагающихся по диагоналям головной пирамиды и прибиваемых к основным столбам. Основные столбы стягиваются четырьмя венцами и по граням — крестовинами.

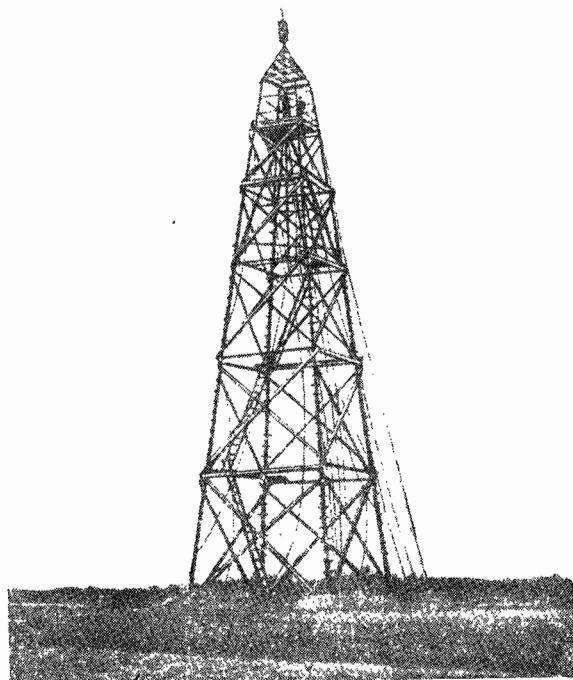


Черт. 49. Схема простого сигнала  
 $i = 16,30$ ;  $h = 20,10$

Третий снизу венец служит для настила пола для наблюдателя, а четвертый прибивается к самым верхним частям основных столбов. Толщина леса для венцов — первого, второго и третьего — 0,13 м, а четвертого — 0,09 м. Первый венец на высоте — 4,5 м от земли. Крестовины в каждой грани располагаются в трех ярусах: между первым венцом и основанием сигнала; между вторым и первым венцом; между третьим и вторым венцом. Раскосы, образующие крестовину, должны пересекаться друг с другом под углом  $90^\circ$  и под углом около  $45^\circ$  с основными столбами; в месте пересечения друг с другом раскосы прочно соединяются, образуя добавочный узел в сооружении. Внутренняя пирамида при высоте столика  $i = 11,5$  м имеет болванку длиной около 6 м, причем верхняя часть в 1,2 м высевается выше соединения столбов. Со-

единение болванки со столбами этой пирамиды выполняется весьма тщательно пригнанными в соединениях с ней и со столбами пирамиды тремя горизонтальными крестовинами, располагающимися: первая ниже соединения столбов на 1,3 м, вторая — ниже первой на 1,5 м, и третья — на уровне нижнего конца болванки. Столбы внутренней пирамиды стягиваются четырьмя венцами, из которых верхние три располагаются каждый на уровне указанных трех горизонтальных крестовин, а четвертый — он же первый снизу, на высоте 4 м от земли; на этой же высоте устраивается горизонтальная крестовина, стягивающая столбы пирамиды. Толщина леса для нижних венцов 0,13 м, для верхних 0,09 и 0,06 м. По граням пирамиды в четырех ярусах располагаются паклонные крестовины. Глубина ям для основных столбов сигнала и для столбов внутренней пирамиды около 1,6 — 1,7 м.

Если простой сигнал дает высоту столика для инструмента в 16,3 м (при высоте визирного цилиндра головной пирамиды в 20,1 м), то сторона квадрата основания сигнала берется в 6,9 — 7,0 м и сторона квадрата основания внутренней пирамиды — в 5,0 м. Толщина основных столбов — на высоте груди 0,22 м и в верхнем отрезе 0,13 м; толщина



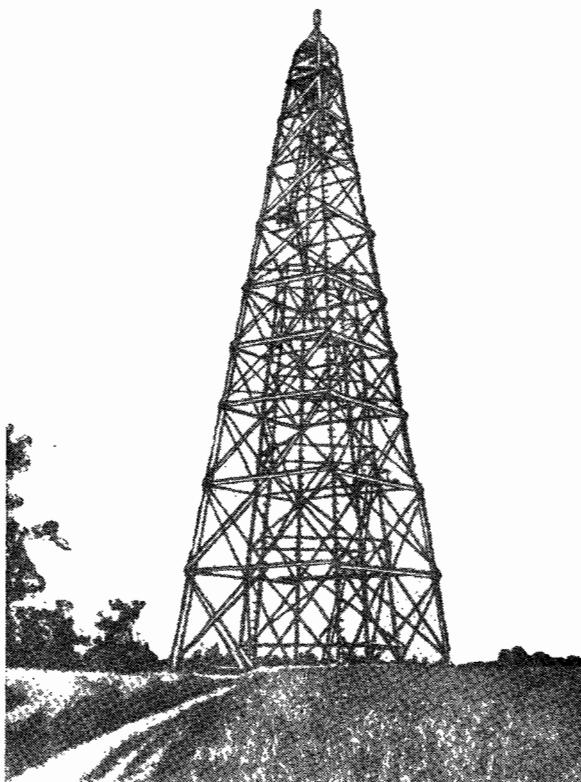
Черт. 50

столбов внутренней пирамиды та же — 0,22 и 0,13 м. Число венцов, горизонтальных крестовин и крестовин по граням остается вышеуказанное, но длина болванки внутренней пирамиды доводится до 8 м; высота же первого венца основных столбов от земли 6 м, а на внутренней пирамиде — 4,5 м.

Схема простого сигнала дается на черт. 49. Если подъем инструмента над землей должен быть более 16,3 м, то тогда в СССР строят

так называемые сложные сигналы. Для сложного сигнала является характерным то, что внутренняя пирамида, несущая столик для инструмента («инструментальная» пирамида), не идет с земли, а опирается своими ногами на основные столбы сигнала. Таким образом, здесь нет изоляции штатива для инструмента от основных столбов сигнала.

Основные столбы несут пол для наблюдателя, головную пирамиду с визирным цилиндром и внутреннюю, инструментальную пирамиду, служащую подставкой для инструмента. Общий вид сложного сигнала приведен на черт. 50 и 51. На черт. 52 дается схема сигнала, у которого высота столика для инструмента над землей равна 25,0 м.



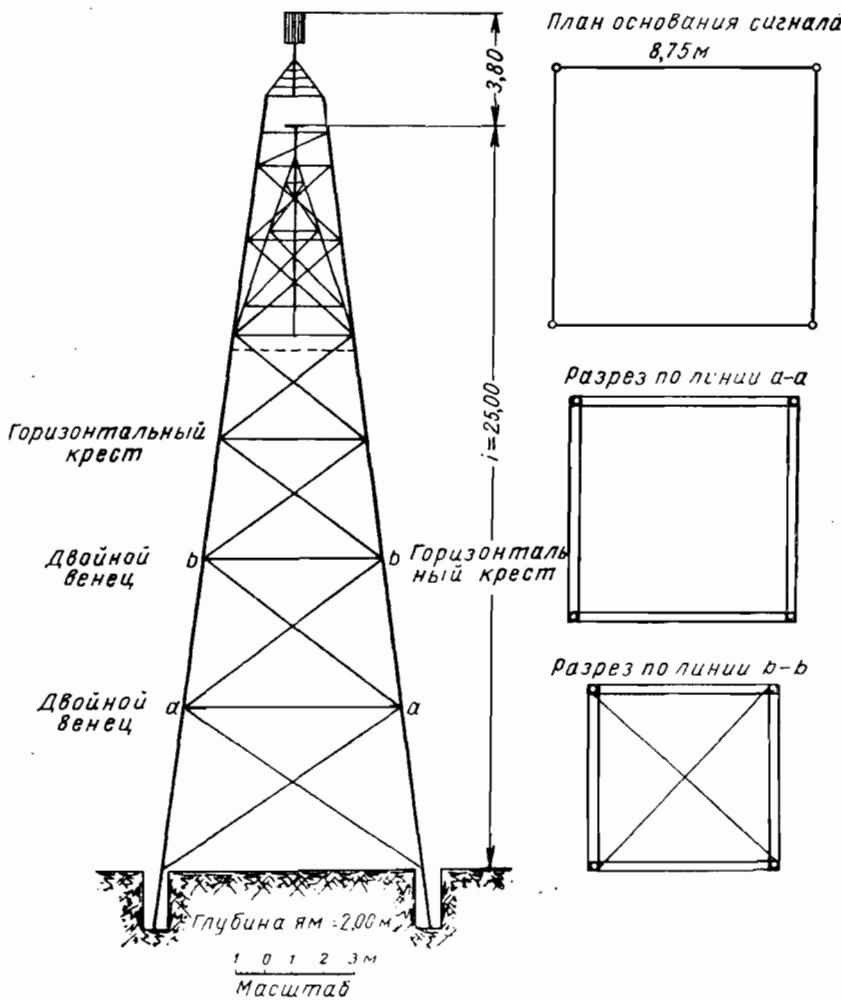
Черт. 51

Для всех сложных сигналов сторона квадрата основания берется равной одной четверти от высоты столика над землей плюс 2,5 (ширина платформы для наблюдателя). Таким образом, если  $i = 25,0$ , то сторона основания равна  $6,25 + 2,50 = 8,75$  м. Для сигнала с подъемом инструмента 50 м сторона основания равна  $12,5 + 2,5 = 15$  м.

При  $i = 25,0$  м основные столбы делаются из бревен толщиной 0,26 м и на высоте груди и 0,14 м — в верхнем отрезе. Основные столбы стягиваются:

а) семью венцами (не считая перил, ограждающих наблюдателей); два нижних из них делаются двойными;

- б) горизонтальным крестом, устраиваемым немногого ниже того места, где в основные столбы упираются ноги инструментальной пирамиды;  
 в) крестовинами по граням сигнала между венцами в шести ярусах.  
 Внутренняя пирамида имеет во всех сигналах одни и те же размеры

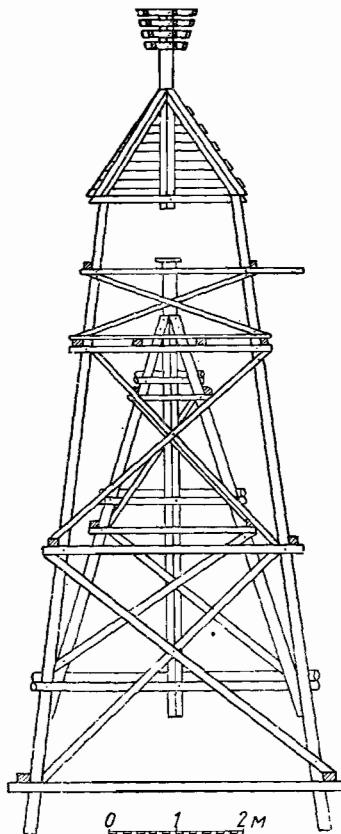


Черт. 52

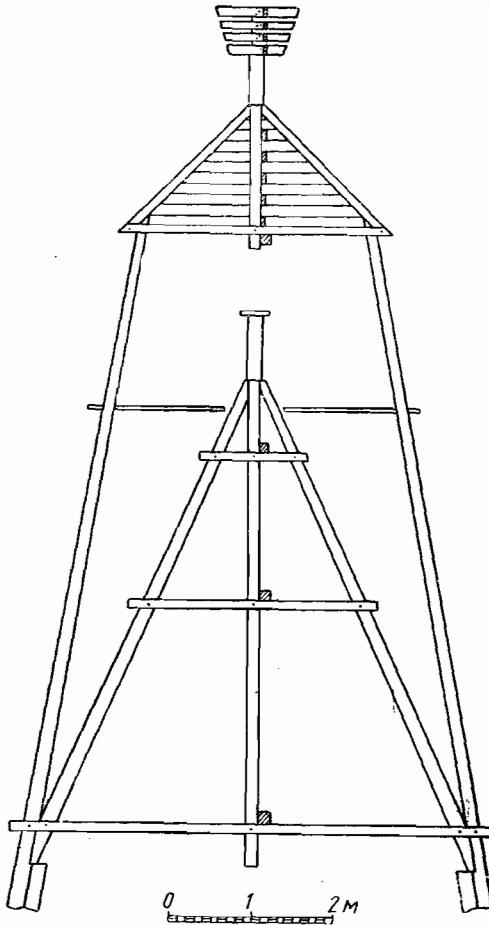
(а также и головная пирамида), так как размеры платформы для наблюдателя остаются всегда постоянными ( $2,5 \times 2,5$  м); схемы устройства внутренней и головной пирамид даются на черт. 53 и 54. Длина болванки внутренней пирамиды 7,10 м, ниже соединения ног приходится часть болванки длиной 6,0 м, следовательно, соединения ног внутренней пирамиды с основными столбами сигнала приходятся ниже пола для наблюдателя на 6,0 м. Болванка внутренней пирамиды соединяется с ее ногами посредством трех горизонтальных крестовин; ноги стягиваются тремя венцами и расположены между парами по граням пирамиды наклонными крестовинами.

Ямы для столбов сложных сигналов делают глубиной в 2,0 м при высоте сигнала до 30 м, при более высоких сигналах глубина ям доводится до 2,5 м.

Уже при высоте сложного сигнала в 25,0 м нижние венцы получают длину в 7 м, а нижние крестовины в 10 м; при большей высоте сигнала



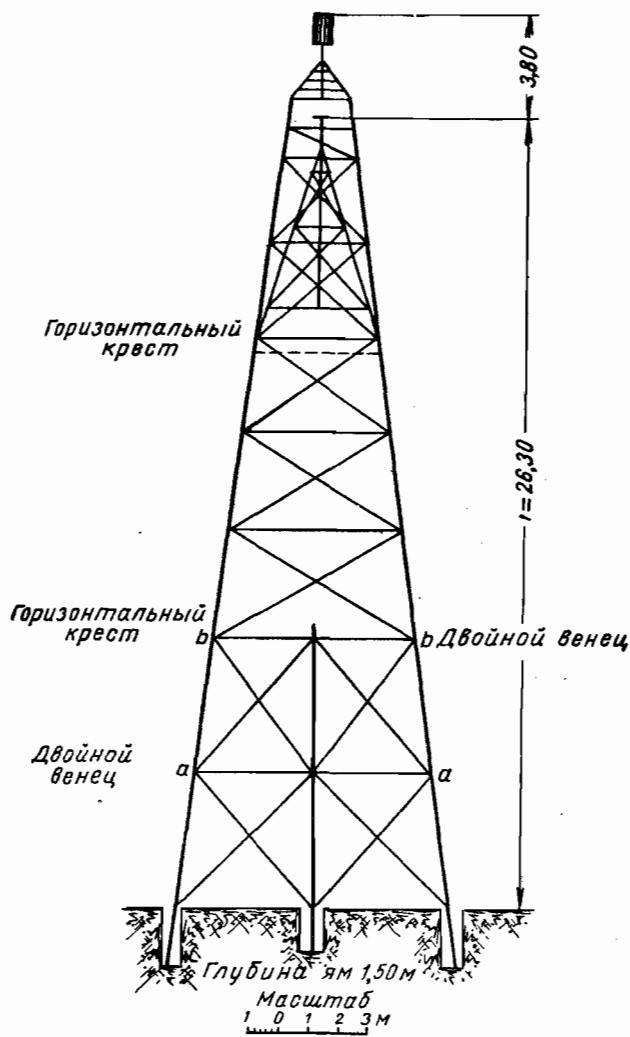
Черт. 53



Черт. 54

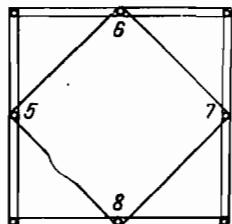
слишком длинные нижние венцы и крестовины в нижних ярусах будут заметно деформироваться под действием ветра и собственного веса и не будут обеспечивать жесткости сигнала. Поэтому, начиная с высоты столика инструмента в 26,3 м, сложные сигналы в ССС строят с промежуточными столбами: каждый промежуточный столб помещается в плоскости грани сигнала посредине между двумя основными столбами, образующими эту грань. При высоте  $i = 26,3$  м промежуточные столбы дают в двух первых ярусах (нижних) при длине столба в 9 м (от земли). При высоте  $i = 35,0$  м промежуточные столбы ведут в четырех нижних ярусах, т. е. от земли до высоты 20 м. При еще более высоких сигналах принимают за правило промежуточные

столбы давать от земли до высоты, равной  $\frac{2}{3}$  высоты сигнала (черт. 55, 56, 57, 58, 59). На черт. 55 дана схема сигнала при высоте столика 26,3 м: промежуточные столбы связаны с основными столбами посредством крестовин в двух нижних ярусах; в этих ярусах венцы взяты двойные; горизонтальный крест связывает основные столбы в плоскости

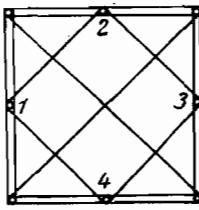


Черт. 55

*Скрепление промежуточных ног внутри сигнала*

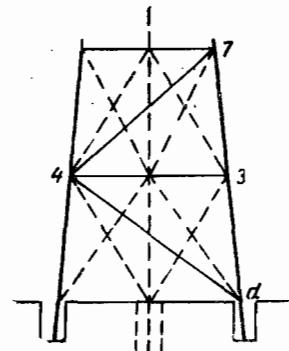


*Разрез по линии а-а*



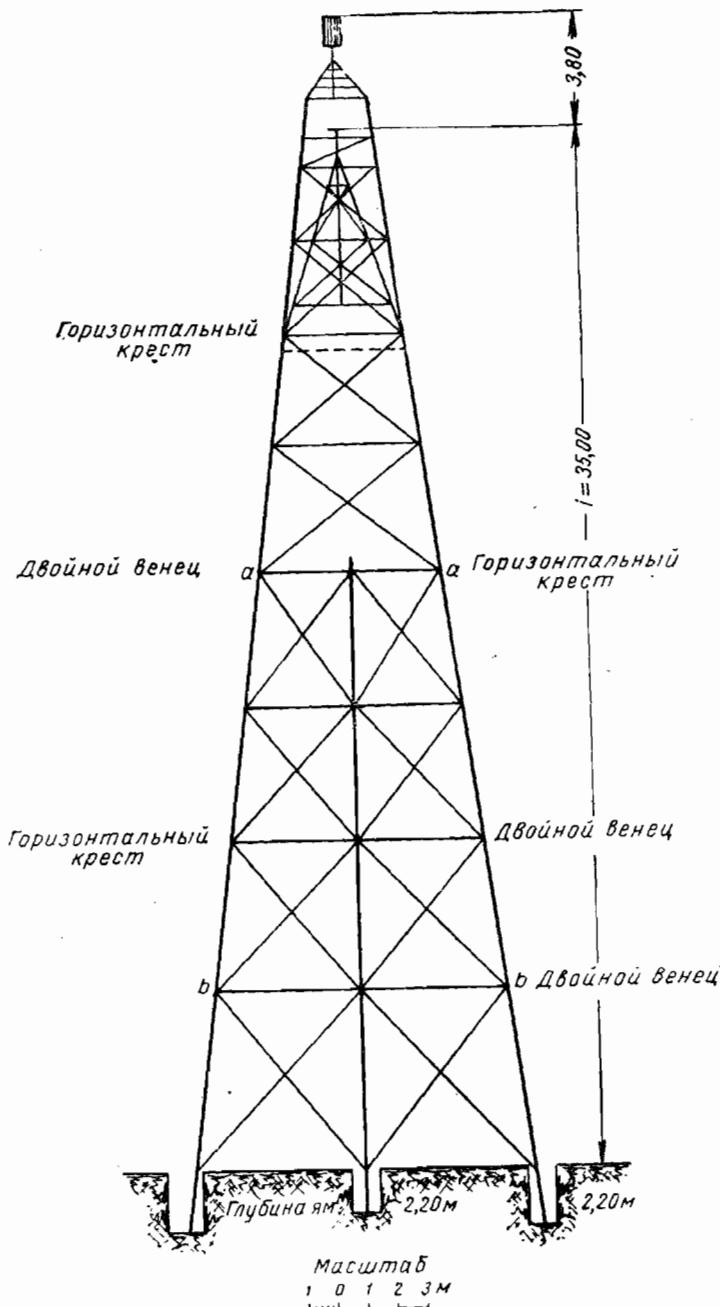
*Разрез по линии б-б*

Черт. 56



Черт. 57

второго (спизу) венца  $bb$ , горизонтальная же крестовина делается немного ниже пятого венца. В плоскости венца  $bb$  и в плоскости венца  $aa$  промежуточные ноги связываются одна с другой горизонтальными переводниками  $1-2, 2-3, 3-4, 4-1$  и  $5-6, 6-7, 7-8, 8-5$ , образующими квадрат в плоскости каждого венца (черт. 56 и 57) или внутренний венец; кроме того, промежуточные столбы связываются один с другим укосами  $d-4$  и  $4-7$  в плоскостях, содержащих попарно



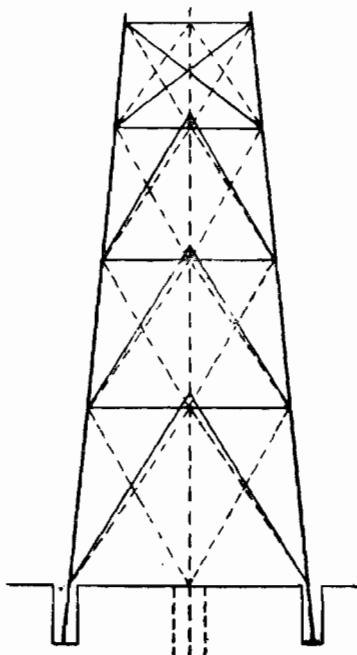
Черт. 58. Схема сложного сигнала  $i = 35,0$  м;  $h = 38,80$  м

два смежных промежуточных столба. Но было бы не лишним добавить еще в плоскости венца  $bb$  горизонтальную крестовину, соединяющую противоположные промежуточные столбы. При высоте столика сигнала  $i = 26,3$  м толщина бревен берется такая: основные столбы выводят

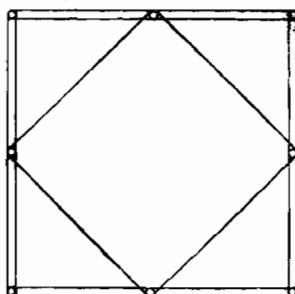
из двойных срощенных бревен —  $0,18 + 0,22$  на высоте груди и  $0,12 + 0,10$  на верхнем конце; промежуточные столбы —  $0,22$  на высоте груди и  $0,14$  в верхнем отрезе.

При высоте столика для инструмента  $i = 35,0$  м (черт. 58 и 59) двойными устраивают первый, второй и четвертый венцы; горизонтальные кресты для соединения основных столбов делают в плоскости второго и четвертого венцов и немного ниже шестого венца. Соединения

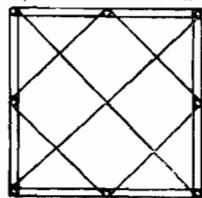
Скрепление промежуточных ног  
внутри сигнала



разрез по линии б-б



разрез по линии а-а



Черт. 59

промежуточных столбов одного с другим выполняются переводинами, образующими внутренние венцы в плоскостях первого, второго, третьего и четвертого венцов основных столбов; кроме того, промежуточные столбы связываются один с другим укосами в плоскостях, содержащих два смежных промежуточных столба (черт. 59). Представляется, что следует в плоскости четвертого венца к принятым горизонтальным связям промежуточных ног добавить еще горизонтальный крест для соединения противоположных промежуточных столбов. При высоте  $i = 35$  м и основные и промежуточные столбы делают из двойных срощенных бревен толщиной: для основных столбов на высоте груди  $0,26 + 0,22$  и в верхнем отрезе  $0,14 + 0,10$ ; для промежуточных столбов:  $0,22 + 0,18$  на высоте груди и  $0,12 + 0,10$  в верхнем отрезе. Глубина ям для основных столбов берется в  $2,5$  м.

При еще более высоких сигналах соблюдается правило: двойными делать два первых (снизу) венца, а затем — венцы четвертый, шестой и непременно тот, на котором оканчиваются промежуточные столбы. Горизонтальные кресты для соединения основных столбов делают в пло-

скостях ординарных венцов и непременно в плоскости венца (двойного), на котором оканчиваются промежуточные столбы. Для соединения промежуточных столбов употребляют те же связи, как уже указано выше. Глубина ям для основных столбов при  $i = 50$  м берется равной 2,5 м.

Указанные соединения промежуточных столбов между собой были предложены в 1928 г. инж. И. И. Виноградским. Эти соединения избавили, во-первых, от применения практиковавшихся ранее в высоких сигналах систем подпор, которые, увеличивая сопротивление сигнала ветровалу, в то же время всегда вызывали значительную вибрацию сигнала; во-вторых, они значительно увеличили жесткость высоких сигналов\*.

Характерным отличием наших сложных сигналов от применяющихся во всех других странах является укрепление ног инструментальной пирамиды на основных столбах сигнала, в то время как во всех других странах башня, несущая столик для инструмента, выводится с земли и является сооружением, совершенно изолированным от второй башни, несущей платформу для наблюдателя. Здесь как будто бы заключается слабая сторона наших геодезических работ. Но если все узлы нашего сложного сигнала тщательно выполнены, то, как показывает опыт, перемещения наблюдателя по платформе, которая удалена на 6,5 м от места соединений ног внутренней пирамиды с основными столбами, не сказываются «ощутимо» на показаниях трубы угломерного инструмента, установленного на столике внутренней пирамиды. Конечно, этот вопрос достаточно тонкий. Если в отдельном визировании азимутальный сдвиг около  $0''$ ,5 является неощутимым, то в среднем выводе из длинного ряда наблюдений такая погрешность должна уже считаться крупной при составлении триангуляции I класса. Возможно, что наша конструкция сложных сигналов заключает в себе причины, не позволяющие достигать той высокой точности результатов, которая обусловлена качеством инструмента, опытом наблюдателя и числом рядов наблюдений и которая характеризуется в новых работах Германии и Финляндии средней ошибкой направления (окончательно выведенного) в  $\pm 0'',3$ . Однако следует ожидать, что, при надлежаще построенном сигнале нашей конструкции, влияние ее недочетов, по сравнению с заграничными конструкциями, выражается на направление (окончательно выводимое) средней ошибкой около  $\pm 0'',3$  и вряд ли большей.

Все только что сказанное побуждает к большей тщательности в постройке сложного сигнала. Эта тщательность достигается при непременном соблюдении следующих мер и правил.

1. Лесоматериал должен быть подобран надлежащего качества и размеров; преимущественно употребляют сосновые деревья из свежерастущих, непременно здоровые и неискривленные; размеры в отношении толщины указаны выше, длина бревен устанавливается по заранее составленному чертежу постройки.

2. Особое внимание надлежит обращать на закрепление столбов в ямах. При среднем по твердости грунте на дно ям кладут в два слоя в перекресток отрезки бревен длиной 0,8 м и толщиной в 0,12—0,15 м; бревна отесывают на два канта и ряд с рядом сшивают коваными

\* В последних инструкциях по постройке геодезических знаков имеются некоторые отличия в конструкции геодезических знаков и в размерах отдельных их частей — по сравнению с указаниями «Руководства».

гвоздями. При мягком или слабом грунте делают забутовку толщиной 0,3 м из камня с утрамбовкой щебенкой и с заливкой цементом. Далее, основные столбы в сложных и простых сигналах должны иметь крепкие якори. Для якоря используют бруски длиной от 0,8 до 1,4 м (в зависимости от толщины основного столба) и толщиной 0,12 × 0,08 м. Два таких бруска прибивают параллельно один другому к основному столбу, в котором сделаны для них соответствующих размеров вырубки на расстоянии 0,6 м от его нижнего отреза. Затем бруски засыпают землей до верха и хорошо ее утрамбовывают. Поверх этих брусков кладут и прибивают к ним доски длиной 0,7—1,0 м и толщиной 4,5 см с засыпкой их землей и утрамбовкой ее до уровня следующей пары брусков. Эта вторая пара брусков прибивается к основному столбу перпендикулярно к первой паре, опять-таки в вырубках, сделанных заранее в столбе. По засыпке землей до верха этой второй пары брусков поверх их кладут и прибивают к ним следующий ряд досок и т. д. Число рядов брусков, располагающихся перпендикулярно друг к другу, должно быть не менее четырех в сигналах высотой до 35 м и доводится до 6—8 в сигналах большей высоты; вместе с высотой ряда брусков, следует постепенно укорачивать длину брусков и досок. Промежуточные столбы снабжаются такими же якорями.

3. Надлежит тщательно пригонять и выполнять все соединения. Это относится к сращиванию бревен, к отеске венцов и крестовин — там, где они соединяются друг с другом и со столбами сигнала, к правильному изготовлению врубок в бревнах столбов в местах пришивки к ним венцов и крестовин. Детали этого важного дела можно найти в книге инж. Виноградского «Практическое руководство по постройке тригонометрических знаков».

В 1937 г. инженерами В. Т. Егоровым и В. Н. Шишким было предложен специальный шаблон (и составлены особые таблицы), который позволяет заготовлять крестовины и венцы на земле настолько точно, что исключается кропотливая работа по их пригонке на самом знаке и увеличивается жесткость знака.

4. Следует достичь полной симметричности постройки относительно ее вертикальной оси и совершенно правильного расположения ее узлов относительно друг друга, в согласии с тщательно изготовленным проектом сигнала. Это осуществляется разбивкой па местности до постройки сигнала пункта, с разметкой коляями проекций наиболее важных точек сигнала и с проверкой теодолитом во время постройки получающегося расположения узлов.

Кроме требований, предъявляемых к геодезическому сигналу и указанных в § 21 в отношении выбора места для сигнала и высоты постройки, отметим еще следующие общие требования.

а) Сигнал должен быть прочным в смысле обеспечения долговременности его существования и значительной сопротивляемости разрушению его частей.

Кроме отбора для постройки надлежащего качества леса, большая долговременность службы сигнала достигается обжигом нижних частей основных бревен, захватывая обжигом части бревна, приходящиеся на 1 м к верху и к низу от того его места, которое придется в уровень с землей.

Прочность сигнала в смысле изготовления его обеспечивается, во-первых, надлежащим выполнением сращиваний и парашиваний бревен в основных столбах и, во-вторых, тщательнейшим выполнением

соединений в узлах посредством притесок, врубок и пришивки венцов и крестовин к столбам коваными гвоздями, концы которых, пропущенные сквозь столбы, должны быть затем загнуты. Разрушение какого-либо узла непременно приводит к разрушению сигнала. В конструктивном смысле прочность сигнала обеспечивается при заданной его высоте правильным, основанным на выводах строительной механики, расчетом всех его элементов, — однако, непременно в сочетании с выполнением еще требований устойчивости и жесткости сигнала.

Внутренние усилия и напряжения в сигнале обусловливаются весом сигнала и его частей, действием ветра и в условиях СССР — еще гололедом и намерзающим в зимнее время снегом (прямое действие последней причины, впрочем, совсем не велико). Эти внутренние усилия и напряжения должны быть соображенены при расчетах, обеспечивающих при надлежащей устойчивости сигнала ту прочность, при которой достигается хорошая сопротивляемость разрушению узлов и частей сигнала под действием весовой и ветровой нагрузок. Из двух сигналов одной высоты, одинаково хорошо сопротивляющихся действиям весовых нагрузок, сигнал с более широким основанием будет менее «прочен» из-за заметного увеличения в нем площади ветровой нагрузки: расшатывание соединений в нем произойдет скорее и в большей степени, чем в сигнале «узком».

Отсюда иногда делают вывод, что выгодно переходить от «широких» сигналов к «узким», достигая при этом как увеличения прочности и жесткости, так и экономии в работе по постройке сигнала и в лесоматериалах (см. С. В. Широков, «Американские методы геодезических работ», стр. 82). В практике геодезических работ США за последние 20 лет переход от широких сигналов к узким полностью осуществлен. Но надлежит при расчете сигнала принять еще во внимание требования устойчивости и жесткости и только тогда решать вопрос о «широких» и «узких» сигналах.

б) Сигнал должен быть устойчивым, т. е. оказывать надлежащее сопротивление опрокидыванию его ветром предельной силы, и должен не иметь общих вертикальных и боковых сдвигов под действием собственного веса. Увеличение площади основания, понятно, благоприятно оказывается на устойчивости сигнала, на уменьшении так называемых вертикальных опорных реакций в ногах сигнала, могущих приводить к его опрокидыванию. Нужно иметь в виду, что вертикальная реакция, стремящаяся выдернуть данную ногу сигнала, уменьшается противодействием веса этой ноги, но одновременно сопровождается противоположно направленной реакцией в другой ноге, усиливающейся весом ноги и стремящейся вдавить эту ногу в землю.

Надлежащая ширина основания сигнала, составляющая 1 : 5 — 1 : 6 его высоты плюс 2,5 м, обеспечивает устойчивость сигнала. Но, конечно, существеннейшую роль играет закрепление ног сигнала, т. е. система надлежаще устроенных якорей и глубина их закладки (ям). Неподвижность сигнала под действием собственного его веса обусловливается как размером площади его основания, так и устройством оснований для его основных и промежуточных столбов. При высоких сигналах в 40—50 м основные столбы следует ставить на бетонные подушки надлежащей площади (не менее 1,2 × 1,2 м) толщиной около 0,3 м и расположенные на хорошо утрамбованном слое забутовки. Устойчивость четырехгранных сигналов значительно большая, чем трехгранных.

в) Сигнал должен обладать зияющей жесткостью. Упругие деформации основных столбов, венцов и крестовин должны быть очень малыми, а также должно быть мало и кручение сигнала. Вообще жесткость выражается в требовании очень малых упругих деформаций в стержнях сигнала и в сигнале в целом и, кроме того, в постоянстве этих деформаций за известный, хотя и небольшой промежуток времени. Понятно, мы заинтересованы в неподвижности центра инструмента, но можем помириться, однако, с вызванным упругим прогибом всего сигнала поступательным движением столика для наблюдений на целый сантиметр. Однако, наши требования к деформациям, вызывающим азимутальные повороты столика для инструмента, будут существенно иными. Конечно, всякое вращение сигнала непременно сопровождается упругими деформациями в нем. Но представляется возможным всегда выделить в каждом горизонтальном сечении сигнала в этих деформациях части, которые соответствуют некоторому общему вращению в этой плоскости. Если такое общее вращение в плоскости пяток ног инструментальной пирамиды за короткое время 10—15 минут, потребное для выполнения приема измерения угла, будет совершаться пропорционально времени, то его влияние на результат измерений сводится почти к нулю при соответственном расположении наблюдений. Поэтому приходится выдвинуть требование медленного и равномерного нарастания деформаций, представляющихся в плоскости пяток ног инструментальной пирамиды для противоположных частей сигнала равными и противоположно направленными сдвигами; за 5—6 минут времени нарастание таких сдвигов для основных столбов должно быть не более 0,08 *мм*. Но приходится считаться и с различием деформаций в плоскости пяток ног инструментальной пирамиды\* для противоположных основных столбов. Приходится требовать, чтобы эти различия за время выполнения полуприема измерения угла изменились не более, как на 0,08 *мм* в триангуляции I класса.

Представляется, что существенной добавочной мерой к достижению указанной жесткости является самое тщательное изготовление венцов и горизонтальных диагональных схваток вблизи (немного ниже) пяток ног инструментальной пирамиды. Если при ветре средней силы сигнал непрерывно вибрирует, так что изображение предмета в трубе колеблется по азимуту в пределах  $\pm 2 - \pm 3''$ , то такой сигнал недостаточно жесток. Если при ветре средней силы, притом постоянного напряжения и направления, азимут инструмента изменяется за 5 минут времени на  $2''$  и более, то такой сигнал также недостаточно жесток.

Требования жесткости приводят к следующим расчетам: высота первого яруса сигнала должна быть не более 5,5 *м*; гибкость стержней, т. е. отношение  $\frac{4l}{d}$ , где *l* — длина стержня, а *d* — его диаметр, должна быть не более 170 для венцов и крестовин и не более 120 для основных столбов, т. е. длина, например, крестовин, образующих узел в их пересечении, не должна быть более 8 *м*, при диаметре их в 14 *см*. Тогда, при указанных выше размерах сигналов и толщине взятого на их постройку леса, мы будем иметь при ветре ураганной силы (130 *кг* на 1 *м<sup>2</sup>*) упругий прогиб сигнала высотой 25 *м* менее 1,5 *см* и сигнала высотой 50 *м* — менее 3 *см*.

\* Эти деформации направлены перпендикулярно к линии, соединяющей центр сечения сигнала и основной столб.

Оценивая приведенные выше размеры и конструкции сигналов, применяемых в СССР, с точки зрения требований к ним строительной механики, вытекающих в свою очередь в данном случае частично из требований точных геодезических наблюдений, мы можем сказать следующее.

1. Вряд ли следует уменьшать принятую глубину ям для основных и промежуточных столбов сигнала.

2. При условии сохранения этой принятой у нас глубины ям и при условии надлежащего изготовления якорей и устройства подушек для ног высоких сигналов, можно несколько уменьшить принятые у нас растворы ног сигналов и площадь его основания. Именно правило: «Сторона квадрата основания равна четверти высоты сигнала плюс 2,5 м», можно изменить в том смысле, что вместо четверти взять одну пятую высоты. Следовательно: при  $i = 50$  м можно иметь сторону квадрата основания не 15,0 м, а 12,5 м; при  $i = 35,0$  м — не 11,25 м, а 9,50 м; при  $i = 25,0$  м — не 8,75 м, а 7,50 м. Это даст экономию в лесоматериале, его подвозке и разделке от 16 до 10%.

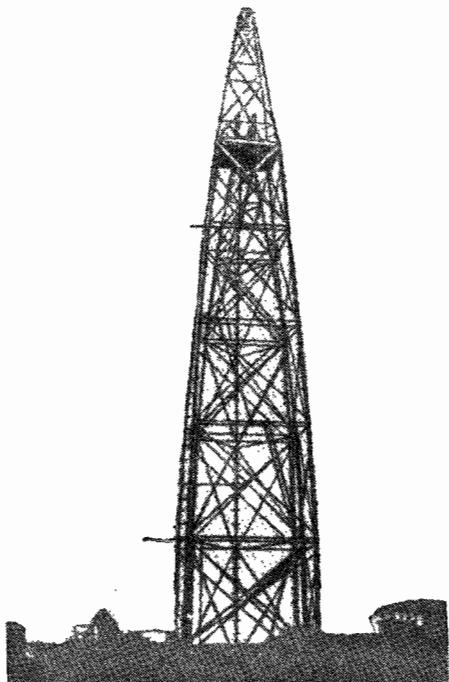
3. Если при соблюдении пунктов 1 и 2 одновременно задаваться высотой первого снизу яруса сигнала в 5 м (с соответственным уменьшением этой высоты в последующих ярусах и с добавкой из-за этого одного-двух венцов), то в принятых конструкциях сигналов можно допустить некоторое уменьшение толщины основных и промежуточных столбов примерно на 10—15%.

4. Надлежащую видимость наблюдаемых с данного пункта сигналов можно осуществить, поднимая, например, возможно выше площадку для установки приборов световой сигнализации. Так как в триангуляции I класса световая сигнализация обязательна, то естественно прийти к такой мысли: снизить высоту столика для инструмента за счет устройства на каждом сигнале особой, более или менее высоко над ним (столиком) расположенной площадки для установки приборов световой сигнализации. Эта мысль имеет большую давность — впервые она была применена 120 лет назад Струве в русских триангуляциях. Струве наблюдал нередко с земли или с внутренних пирамид незначительной высоты, выведенных с земли, но наблюдаемые им сигналы имели достаточную высоту. Возможно уменьшенная высота площадки для инструмента и надлежащий подъем над землей визирной цели — вот принцип, который следует проводить при постройке сигналов. Конечно, в достаточно залесенных районах нельзя обойтись без подъема инструмента на уровень верхушек деревьев; другими словами, в условиях СССР в триангуляции I класса нередко придется иметь высоту столика для инструмента все-таки не менее 30 м, но в ряде случаев эта высота могла бы быть снижена, и случаи применения высоты столика более 35 м могли бы быть сведены к единичным, если бы в конструкции наших сигналов предусматривалось сооружение особой площадки для световой сигнализации, расположенной на достаточной высоте над инструментальным столиком с устранением при этом головной пирамиды. Необходимость во время наблюдений придавать надлежащую устойчивость этим высоким и легким надстройкам, держащим площадку для световой сигнализации, вполне обеспечивается применением тросов.

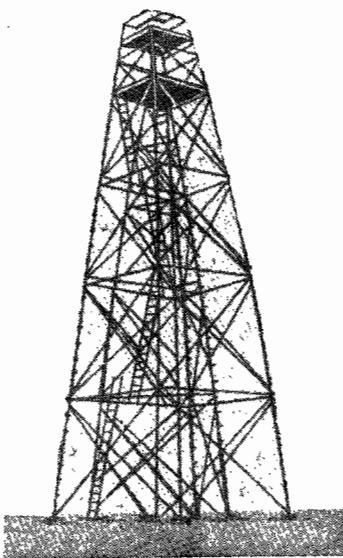
Если мы сравним теперь нашу практику с заграничной, то найдем существенные отличия в отношении конструкций сигналов, применяемых у нас и в других государствах. Прежде всего приходится отметить, что нигде, кроме СССР, не применяют сложных сигналов нашего типа;

везде считают обязательным внутреннюю башню, держащую инструмент при наблюдениях, выводить с земли и делать ее совершенно изолированной от внешней башни, несущей платформу для наблюдателя и площадку для световой сигнализации.

Такая конструкция приводит к более точным результатам наблюдений, о чем уже сказано выше, и, кроме того, совершенно избавляет от необходимости применения поверительной трубы при наблюдениях углов, что значительно осложняет работу наших геодезистов-наблюдателей по сравнению с иностранными. Поэтому и мы, очевидно, должны стремиться к замене наших конструкций сигналов другими, в которых принцип разделения двух башен был бы проведен.



Черт. 60



Черт. 61

Переходя к общему описанию геодезических сигналов, применяемых в Америке, отметим прежде всего постройку здесь сигналов не из круглого леса, а из брусков и досок. На черт. 60, 61 и 62 приведены рисунки сигналов США и Канады, а на черт. 63 -- схема американского сигнала высотой в 34 м. Внутренняя башня представляет собой всегда трехграниную пирамиду, «треножник» по американской терминологии. Так как треугольная ферма является неизменяемой, то, теоретически рассуждая, трехграничная пирамида должна быть жестче четырехгранной, хотя, с другой стороны, она сильно уступает четырехгранной в устойчивости и в отношении сопротивления упругим (продольным) прогибам всего сигнала. Треножник заканчивается наверху прибитой к его ногам доской толщиной 0,10 м и двумя другими размерами ее в 0,41 м. На эту доску ставится инструмент; в ней имеется в центре отверстие диаметром 7 см, позволяющее устанавливать посредством особого коллиматора

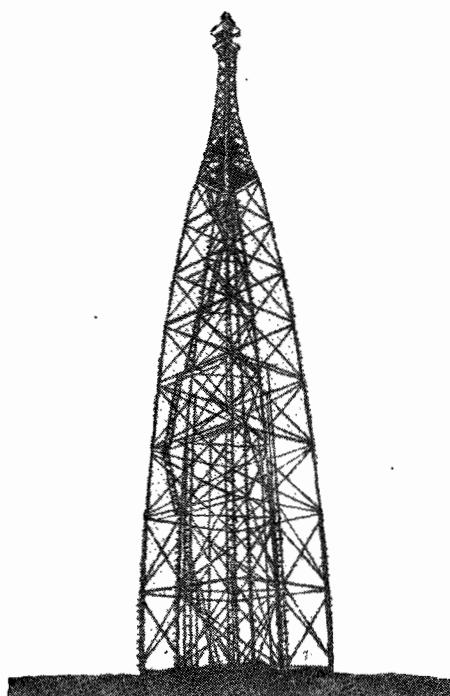
центр инструмента точно над центром сигнала. Это избавляет впоследствии от определения поправок за центрировки и редукции. Отсутствие болванки в пирамиде является также немаловажным отличием американских конструкций от наших. Внешняя башня—четырехгранная; центр ее основания совпадает с центром основания треножника, причем на середине стороны квадрата основания внешней башни приходится основание одной ноги треножника, основания же двух других ног треножника приходятся на линии, параллельной этой стороне основания внешней башни. Раствор ног берется достаточно заметно меньшим, чем у нас. Размеры сторон оснований и толщины ног сигналов приведены в табл. 6.

Таблица 6

| Высота знака<br>(в м) | Страна основания (в м) |                     | Толщина ног<br>у основания<br>(США) | Толщина ног<br>у основания<br>(СССР) |
|-----------------------|------------------------|---------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
|                       | внутренней<br>пирамиды | внешней<br>пирамиды |                                     |                                      |
| 33,7                  | 6,55                   | 8,00                | 0,20 × 0,20                         | 0,38 × 0,24                          |
| 24,5                  | 5,80                   | 7,70                | 0,15 × 0,15                         | 0,26 × 0,26                          |
| 15,3                  | 4,60                   | 5,80                | 0,10 × 0,10                         | 0,22 × 0,22                          |
| 9,1                   | 3,10                   | 3,70                | 0,10 × 0,10                         | 0,18 × 0,18                          |

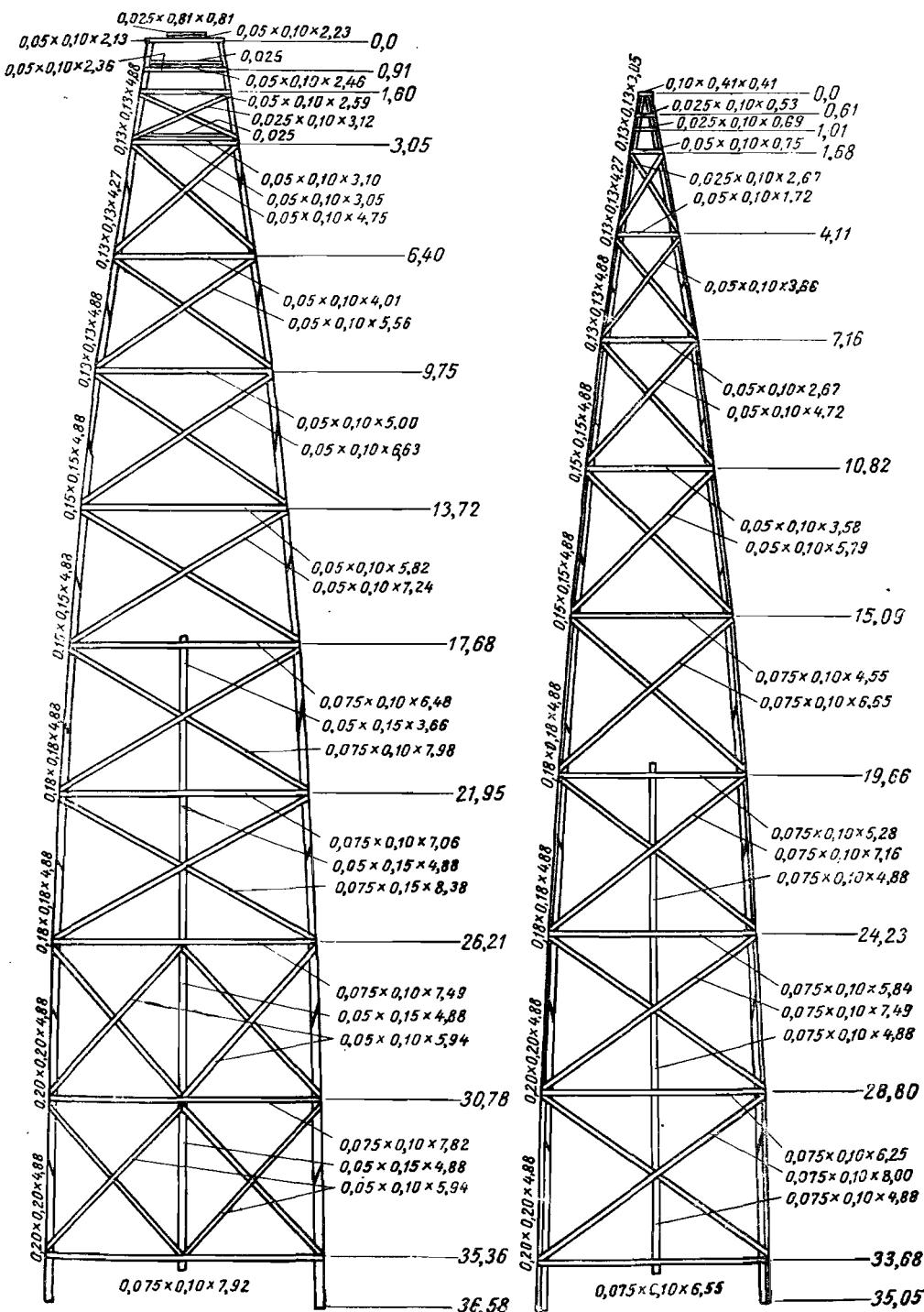
Как видно, следующим отличием сигналов США от наших является то, что у них значительно меньше сечения ног, венцов и крестовин и значительно меньший, примерно в 2,5 раза — вес. Употребление сухого леса в виде брусков позволяет при сколачивании плюс с венцами придавать ногам сигнала выпуклость, обращенную наружу, что увеличивает жесткость сигнала. Наконец, отметим наличие всегда на внешней башне американских сигналов площадки для световой сигнализации, передко значительно выступающей над столиком для инструмента. Это позволяет в ряде случаев ограничиваться высотой «треножника» в 35 м, достигая видимости выносом кверху визирной цели.

До 1912 г. в США употреблялись сигналы с широким основанием, как у нас в настоящее время, но с этого года американцы перешли на «узкие» сигналы и на заметно уменьшенную толщину ног, венцов и крестовин сигнала.



Черт. 62

Сделанный очерк позволяет заключить о существенной разнице в постройке сигналов у нас и в США. Больший в три раза объем лесных материалов, конечно, вызывает соответственно увеличение расходов на



Черт. 63

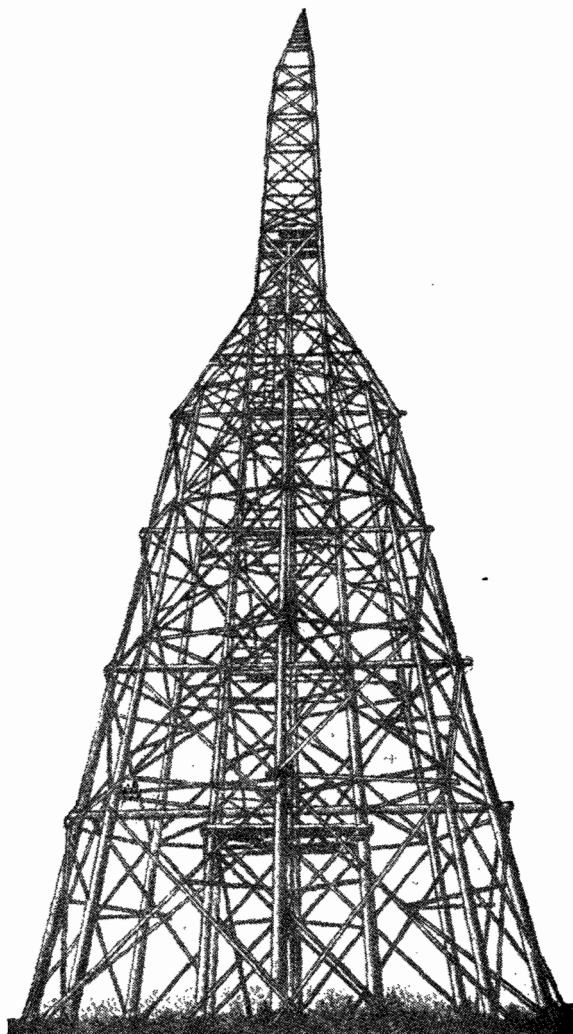
лесозаготовку, вывоз лесных материалов, разделку их и подготовку к сборке. Подъем значительно более тяжелых основных столбов требует более тяжелого оборудования и большего числа рабочих. С другой стороны, получается значительная экономия от отсутствия расходов на распиловку и обделку бревен.

Нужно сказать, что американские сигналы, не рассчитаны на ту прочность и устойчивость, на которую рассчитаны наши сигналы. Геодезические сигналы США не рассчитаны на действие штормового ветра и поэтому или нужно их держать постоянно на оттяжках, применяя для этого тросы, или иметь благоприятные условия к легкому и быстрому возобновлению разрушенного или опрокинутого сигнала (близость лесных складов, хорошая дорожная сеть). Если принять еще во внимание, что ветры, способные опрокинуть узкую трехгранную пирамиду, у нас вовсе не являются редкостью, то сказанного выше достаточно, чтобы прийти к заключению о преждевременности перехода у нас на геодезические сигналы с теми узкими основаниями и с той уменьшенной толщиной ног, венцов и крестовин, как это имеет место в США. Точно так же мы не можем еще переходить полностью к замене круглого леса брусковым, потому что для этого в большинстве случаев потребуется организация и проведение распиловки на месте каждой постройки, при осуществлении притом предварительной просушки леса за время от его заготовки до постройки сигнала. Последнее условие выполнимо, если заготовку делать в предыдущий календарный год. Распиловка же леса на месте постройки будет удлинять время на постройку сигнала на 15—20 дней.

Противоположностью американским в смысле громоздкости конструкции являются немецкие сигналы на пунктах I класса (черт. 64, высота  $i = 37$  м). Здесь так же, как и в США, проводится всегда принцип разделения башен, несущих инструмент и платформу для наблюдателя. Но башня, несущая платформу для наблюдателя и площадку для световой сигнализации, обращается в нижней своей части из внешней во внутреннюю, и во всяком случае внешней скорее может быть названа башня, несущая столик для инструмента. Эта последняя в высоких сигналах представляется в виде двух восьмиграных пирамид: одна нижняя, усеченная, служит основанием для второй верхней, имеющей высоту около 10 м и несущей столик для инструмента. Столик этот устраивается на верхнем конце болванки, которая продолжается ниже вершины второй верхней пирамиды на 10 м, упираясь в горизонтальную крестовину, укрепленную в верхней плоскости нижней пирамиды. Диагональ нижней пирамиды в ее основании около 24 м. Башня, несущая платформу для наблюдателя, четырехгранная, с почти вертикально поставленными основными столбами (уголок около 1:7) и довольно узким основанием (сторона квадрата около 6 м); она напоминает конструкции наших сигналов\*. Постройка сигнала высотой в 37 м занимает примерно около 40 дней. Стоимость ее — около 6000 марок золотом в ценах 1912 г. Жесткость и устойчивость постройки таковы, что окончательно выведенные направления имеют среднюю ошибку между  $\pm 0^{\circ}2$  и  $\pm 0^{\circ}3$ , в то время как наблюдения в США дают среднюю ошибку направления  $\pm 0^{\circ}5$  —  $\pm 0^{\circ}7$ . В сигналах высотой около 20—25 м две восьмигранные пирамиды, несущие инструмент, заменяются одной четырехгранный пирамидой (см. черт. 65), но имеющей очень

\* Т. е. наш сигнал эквивалентен только этой башне, несущей лишь пол для наблюдателя в Германии.

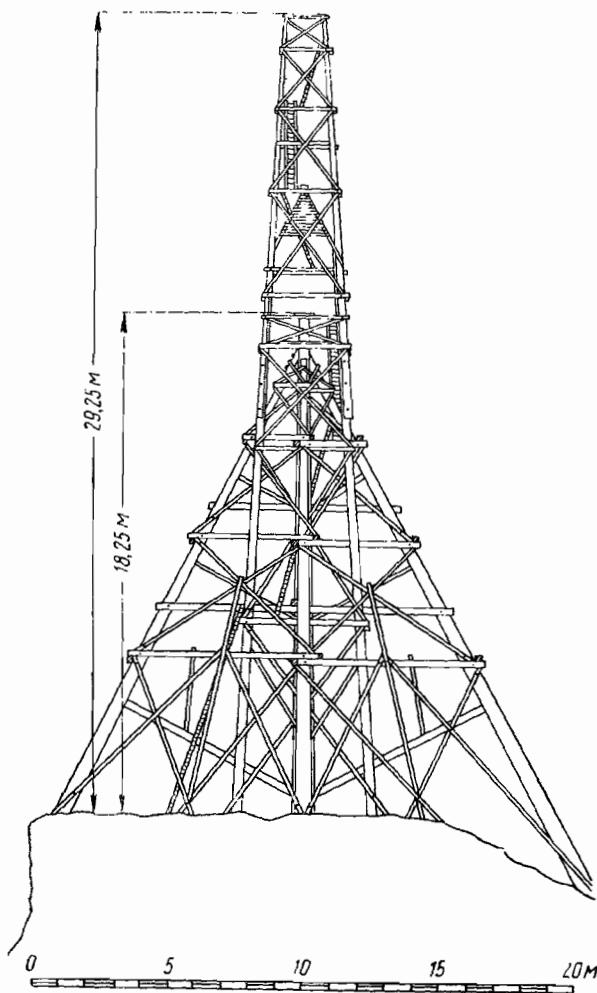
широкое основание: сторона его квадрата — около 15 м; болванка этой пирамиды, весьма массивная, идет вплоть до земли, т. с. имеет длину, равную вообще высоте столика для инструмента (высоте сигнала). Если в США совсем отказались от болванки в инструментальной пирамиде, то в Германии, наоборот, имеют болванки значительной длины. В этом отношении мы занимаем как бы среднюю позицию.



Черт. 64

В Дании в последнее время применяют на триангуляции I класса кирпичные башни в виде четырехгранный пирамиды, полой внутри, окруженной деревянным сигналом; этот деревянный сигнал несет лестницы и платформу для наблюдателя; высота каменной башни доводится до 30 м (черт. 66). Во Франции в настоящее время введены в практику деревянные сигналы конструкции, предложенной Дюраном; черт. 67

представляет основную схему конструкции, а черт. 68 — сигнал высотой 22 м, построенный по этой схеме. В основе схемы Дюрана лежит треножник, ногами которого являются фермы  $EFC$ ,  $DEB$  и  $DAF$ ; плоскости  $BEC$ ,  $FAC$  и  $DAB$  являются вертикальными. Точки  $F$ ,  $E$ ,  $D$  находятся на одной вертикальной линии соответственно с серединами сторон  $AC$ ,



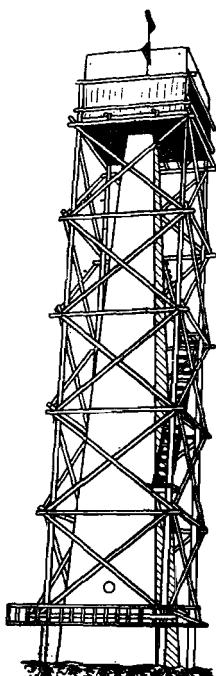
Черт. 65

$BC$  и  $BA$ . Внутренняя пирамида сигнала образуется из таких треножников, ставящихся в один, два или три этажа: два этажа дают высоту инструмента над землей в 22 м, а три — около 33 м; треножники разных этажей весьма прочно скрепляются друг с другом. Внешняя пирамида показана на черт. 68. В отношении конструктивной прочности, устойчивости и жесткости эта конструкция Дюрана заслуживает внимания.

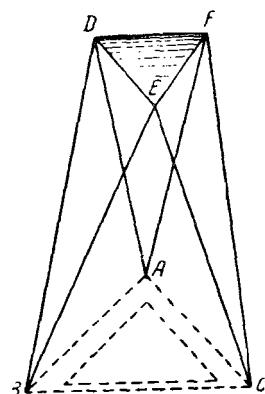
Представляется желательным провести опыты по ее применению у нас — возможно, что она приведет к конструкциям, которые явятсѧ падлежащей заменой наших сложных сигналов высотой до 35 м.

Как видно, в вопросе разработки надлежащих конструкций геодезических сигналов у нас следует провести не такую малую опытно-исследовательскую работу и вовсе нельзя считать этот вопрос отработанным. Наряду с сильно залесенными и бездорожными районами в СССР имеются обширные территории, где леса или совсем нет или очень мало и где легко наладить использование автотранспорта при геодезических работах. В таких районах является целесообразным во

всех отношениях применение вместо деревянных металлических разборных (стальных) сигналов, которые в разобранном виде перевозятся на автомобиле, быстро собираются и устанавливаются на подлежащих наблюдению с некоторой станции пунктах, а также, конечно, и на этой станции; по использовании же их — вновь разбираются и перевозятся на следующие по порядку места наблюдения. Понятно,



Черт. 66



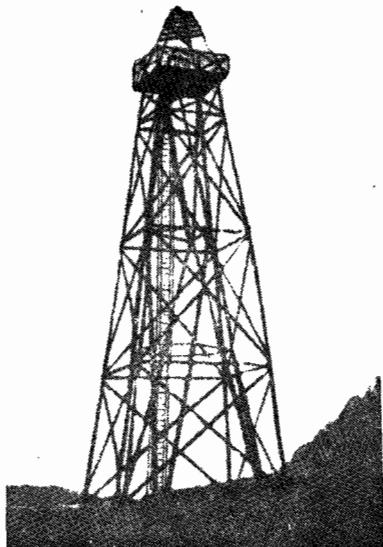
Черт. 67

что при применении таких разборных сигналов партия, исполняющая измерения углов в триангуляции, работает одновременно с партией, устанавливающей сигналы.

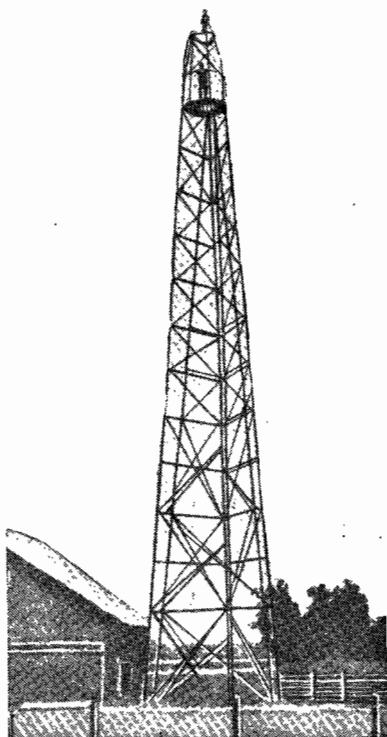
Применение разборные стальные сигналы получили в США с 1927 г. по изобретению инж. Бильби со соответствующей конструкцией. «Башня» Бильби (черт. 69) состоит из внутренней трехгранной пирамиды для инструмента и наружной башни, также трехгранной, несущей платформу для наблюдателя и площадку для световой сигнализации.

Высота внутренней пирамиды может быть доведена до 39,3 м и наружной — до 42,4 м. Вес сооружения около 3,4 тонны. Башня изготавливается из строительной стали высшего сорта; основные ноги состоят из звеньев длиной 4,2 м. Сборка башни требует 3 часов при 4—5 рабочих; разборка — того же времени при трех рабочих. В пределах максимальной высоты башня может быть построена разных высот, так как соответственно заданной высоте знака то или иное число нижних звеньев не будет употребляться. При высоте подъема инструмента в 31,4 м сторона треугольника основания внешней башни равна 6,45 м,

а внутренней — 5,79 м. При сборке прежде всего в каждой яме для ног устанавливается якорь, служащий одновременно и основанием ноги. Этот якорь состоит из массивной стальной стойки длиной 1,52 м, прикрепляемой болтами к деревянной доске, которая и ставится на дно ямы; к стойке болтами прикрепляется нижнее звено ноги, причем стойке заранее следует дать тот самый наклон, какой должна иметь нога пирамиды. Башни Бильби получили значительное применение в Америке и благодаря сильно развитой там дорожной сети для автотранспорта — даже и в лесных районах. У нас они начали применяться с 1931 г.



Черт. 68



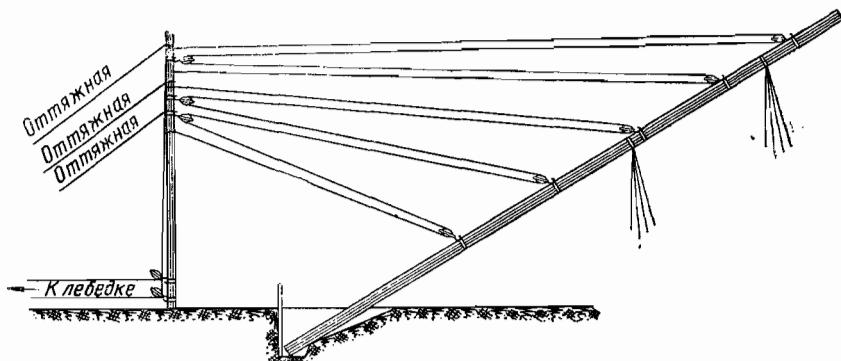
Черт. 69

в южных степных районах Европейской части Союза, в Казахстане и в Средней Азии.

Следует отметить, что материал для этих башен должен быть высокого качества, а изготовление всех частей — совершенно безукоризненное. Мы не будем вовсе касаться самого процесса постройки больших деревянных сигналов. Укажем лишь, что подъем основных столбов выполняется при помощи заранее поставленной, вкопанной и хорошо укрепленной оттяжными тросами или канатами вертикальной мачтой высотой 12 м. Мачта эта ставится обычно в средней точке основания сигнала. Подъем основного столба выполняется посредством лебедки, вытягивающей канат или трос, пропущенный через систему блоков на мачте и на самом столбе (см. черт. 70). Подробности процесса постройки можно найти в книге инж. Виноградского «Практическое руководство по постройке тригонометрических знаков».

**2. Центры и их закладка.** Центры, закладываемые на пунктах триангуляции под тригонометрическими знаками, служат: а) для сохране-

ния тригонометрических точек на местности на весьма продолжительное время; б) для приведения углов, измеряемых во время составления триангуляции, к точно обозначенным и неподвижным точкам, что необходимо вследствие того, что вершины тригонометрических знаков, которые или сами служат точками визирования, или несут на себе приборы световой сигнализации, вообще заметно изменяют свое положение с течением времени. В зависимости от класса тригонометрического пункта, а также в зависимости от характера местности (районы обыкновенные, глубокого промерзания почвы, мерзлоты, песчаные, горные и т. д.) устройство центра и его закладка могут быть достаточно различными.



Черт. 70

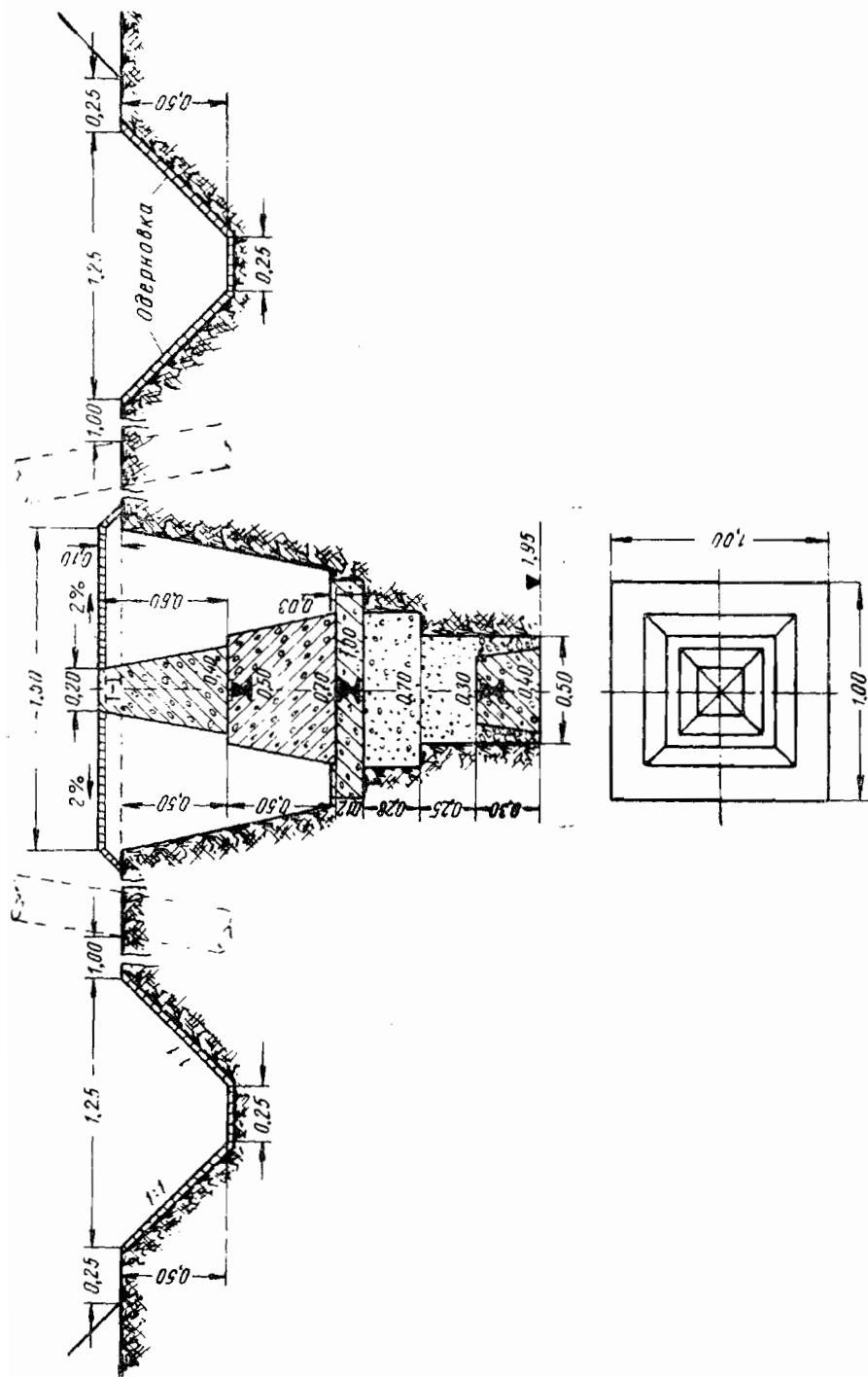
На пунктах I и II классов закладывают всегда двойные центры; нижний на глубине 1,5—2,0 м и верхний, приходящийся своей верхней плоскостью немного ниже поверхности земли. В настоящее время в СССР закладываются в обычных районах так называемые стандартные центры I, II и III классов. Центр I класса, изображенный на черт. 71, состоит из таких частей:

1. Наружный бетонный столб в виде усеченной пирамиды квадратного сечения таких размеров:

|                            |      |   |
|----------------------------|------|---|
| сторона верхнего основания | 0,20 | м |
| „      нижнего      „      | 0,40 | „ |
| высота      „      „       | 0,60 | „ |

Столб выступает над поверхностью земли на 0,10 м; вокруг столба насыпается площадка высотой 0,1 м и с диаметром основания около 1,5 м. Площадка одевается дерном или выкладывается камнями. На верхней плоскости столба центр обозначается пересечением диагоналей квадрата, вырезанных в бетоне. В основании столба должна быть круговая выемка глубиной в 2,5 см и диаметром, в два раза большим, чем диаметр закладываемой в верхнем центре чугунной марки. Столб ставится на верхнюю плоскость верхнего центра. Назначение столба — дать точку для привязок полигонометрических ходов III класса и теодолитных ходов, для отнесения к ней наблюдений в триангуляции IV класса и т. п.

2. Верхний центр представляет собой бетонный монолит в форме усеченной пирамиды с квадратным поперечным сечением следующих размеров:



|                           |      |          |
|---------------------------|------|----------|
| сторона нижнего основания | 0,70 | <i>м</i> |
| „ верхнего „              | 0,50 | „        |
| высота „ „                | 0,50 | „        |

В верхней части монолита закладывается чугунная марка на 2 см ниже его верхней грани. Монолит ставится на бетонную подушку размером  $1,0 \times 1,0 \times 0,15$  м, в которую он углубляется на 0,03 м. Эта подушка лежит на забутовке толщиной 0,30 м. В бетонной подушке закладывается чугунная марка.

3. Нижний центр представляет собой бетонный монолит в форме усеченной пирамиды квадратного сечения следующих размеров:

|                           |      |          |
|---------------------------|------|----------|
| сторона нижнего основания | 0,40 | <i>м</i> |
| „ верхнего „              | 0,30 | „        |
| высота „ „                | 0,30 | „        |

В верхней грани этого монолита закладывается чугунная марка, прикрываемая сверху доской. Земля между забутовкой, подстилающей подушку верхнего центра, и верхней гранью нижнего центра должна быть заменена песком, который при трамбовании поливается водой. Точно так же пространство между стенками ямы и боковыми гранями верхнего центра должно быть засыпано песком с мелкой галькой, без примеси глины. В забутовке также не должно быть глины. Дно ямы для нижнего центра предварительно утрамбовывается щебенкой. Центр на пунктах заполняющей сети II класса имеет такое же устройство, но меньшие размеры монолита для верхнего центра и меньшую глубину закладки. В центрах III класса верхний центр совсем отсутствует (сооружение состоит из наружной тумбы и нижнего центра). Следует принимать меры к отводу дождевой и талой воды от центров.

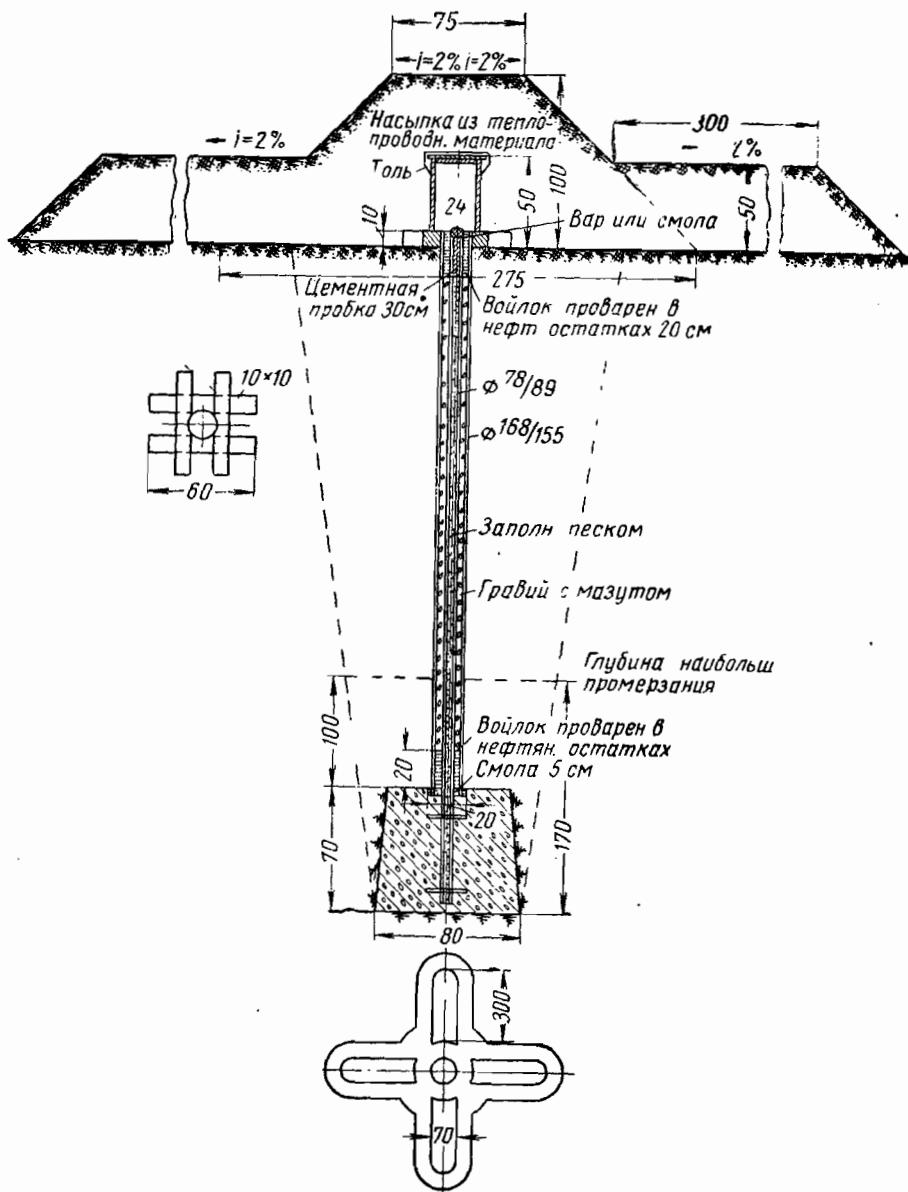
По поводу стандартных центров можно отметить, что глубина промерзания почвы в пределах той территории, которая в настоящее время охватывается основными геодезическими работами в СССР, в различных районах этой территории достаточно различна. Так, имеем следующие глубины промерзания (в м):

|                            |      |
|----------------------------|------|
| Ленинград . . . . .        | 1,77 |
| Москва . . . . .           | 1,80 |
| Киев . . . . .             | 1,07 |
| Одесса . . . . .           | 0,82 |
| Саратов . . . . .          | 2,0  |
| Челябинск — Омск . . . . . | 2,40 |
| Иркутск . . . . .          | 2,74 |

Конечно, глубина закладки нижнего центра в 1,8—2,1 м, устанавливаемая принятым стандартом для пунктов I класса, достаточна почти для всех районов Европейской части Союза, лежащих южнее 60-й параллели, за исключением северо-восточных районов, Урала и Приуралья. В Азиатской части СССР эта же глубина окажется пригодной для районов, вообще лежащих южнее 50-й и 51-й параллели и свободных притом от мерзлоты.

Несомненно, что верхний центр находится для большей части территории на такой глубине, при которой неподвижность его при оттаива-

ниях и замерзаниях почвы при некоторой ее увлажненности не обеспечена. Правда, эти движения верхнего центра будут происходить, главным образом, в вертикальном направлении; широкая же цементная



Черт. 72

подушка, на которой покоятся этот верхний центр, будет способствовать заметному уменьшению и без того малых смещений центра в горизонтальной плоскости. Но все-таки следует считать, что стандартные центры отвечают предъявляемым к ним требованиям при закладке на

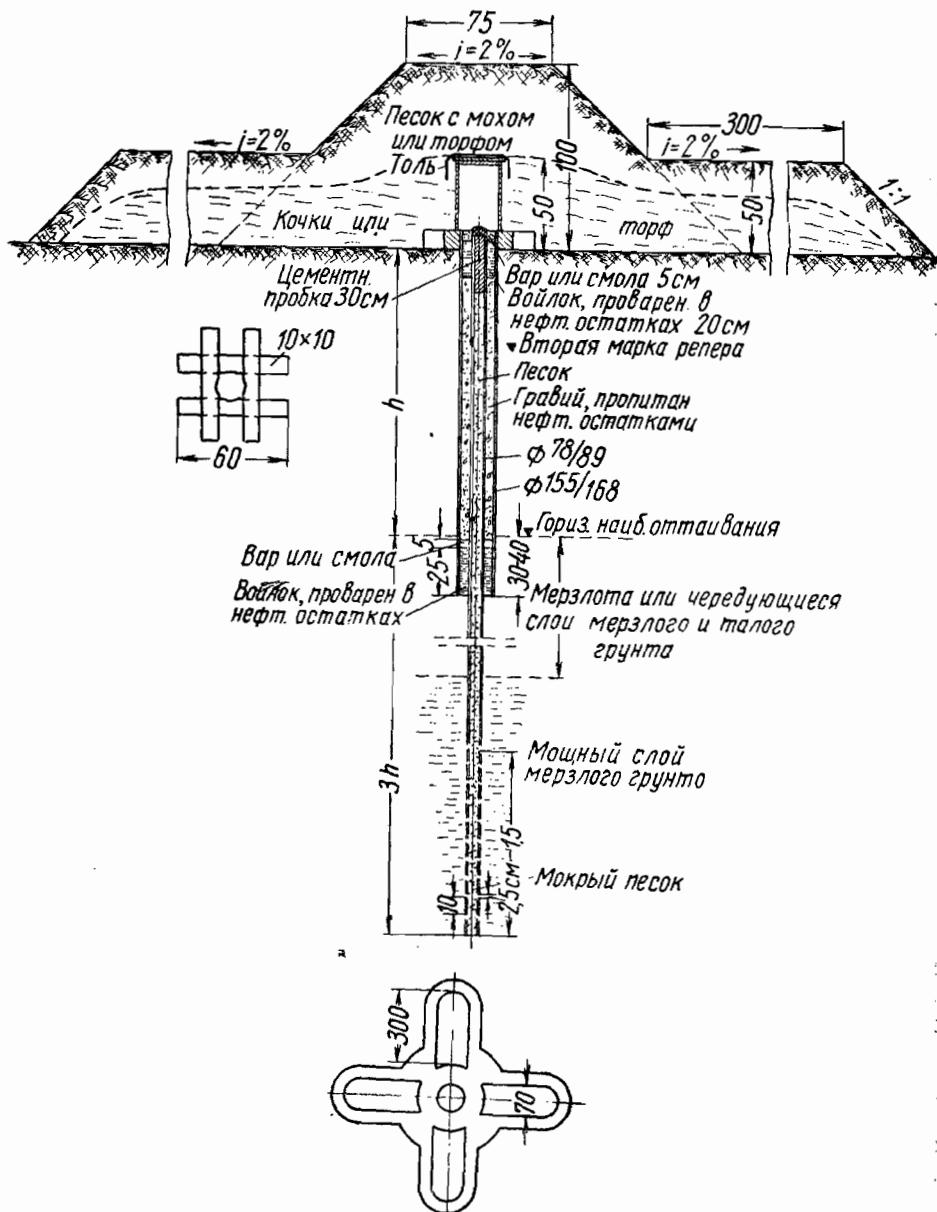
совершенно сухих участках. В районах глубокого промерзания -- и именно там, где глубина промерзания более 2,0 м, но менее 2,8 м, можно на участках совершенно сухих использовать конструкцию стандартного центра I класса (черт. 71), но с увеличением глубины закладки нижнего центра на величину  $H$  минус 1,9 м, где  $H$  -- глубина промерзания. В районах глубокого промерзания, где  $H$  более 2,8 м, или где  $H < 2,8$  м, но грунт насыщен влагой, нужно переходить на тип центра, изображенный на черт. 72.

Этот тип центра, запроектированный в ЦНИИГАиК, закладывается таким образом: вырывается котлован глубиной, равной глубине промерзания плюс 1,7 м. В котловане устанавливается железная труба диаметром 79–89 мм. Нижний конец трубы снабжен двумя крестообразно расположенным штырями; он заделывается в бетонный якорь в виде монолита высотой до 0,7 м, шириной в нижнем основании около 0,8 м и в верхнем основании — около 0,6 м. Труба засыпается сухим песком и сверху заделывается цементной пробкой толщиной 20 см, которая покрывается слоем вара или смолы толщиной 5 см; марка закрепляется в верхнем конце трубы болтами. На трубу надевается до верха бетонного якоря металлический кожух в виде трубы диаметром 150–169 мм; основание этого кожуха помещается в лунку, сделанную в монолите, диаметром 20 см и глубиной 5 см. Перед надеванием кожуха в эту лунку наливается густая смола или вар, а самая нижняя часть внутренней трубы обертывается на 20 см войлоком, насыщенным нефтью. Промежуток между трубами заполняется мелкой галькой и песком, предварительно насыщенными нефтяными отходами (перед насыщением песок нагревают до 50°).

Верхняя часть промежутка между трубами забивается пробкой из войлока, проваренного в нефтяных остатках. Толщина пробки 20 см; на пробку наливается смола или вар слоем в 5 см. Обе трубы прикрываются четырехугольной деревянной трубой, сколоченной на гвоздях из досок и просмоленной (ширина трубы 24 см, высота 0,4 м); эта деревянная труба устанавливается на деревянной раме и засыпается с боков до верха землей. Сверху труба прикрывается деревянной крышкой, покрытой берестой или толем. Над сооружением насыпается бугор из невлагоемкого и теплопроводного грунта (песок, щебень, камень); высота бугра 1 м, диаметр нижнего основания 3 м, верхнего 0,75 м; к бугру с четырех сторон присыпаются валики из невлагоемких и теплопроводных материалов. Размер валиков -- длина 3 м, ширина по верху 0,7 м и высота 0,5 м. В районах мерзлоты применяют также центр в виде трубы (черт. 73), но закладываемый бурением.

Этот тип центра представляет собой стальную обсадную трубу диаметром 78–89 мм, опускаемую на глубину, в четыре раза превышающую толщину ежегодно оттаивающего слоя почвы и не меньшую 6 м. Впрочем, в арктической зоне, при глубине оттаивания всего 0,2–3 м глубина закладки может быть взята 3 м. Нижний конец трубы, находящийся в постоянно мерзлом слое, должен служить мерзлотным якорем. Как видно из черт. 73, верхняя часть трубы, находящаяся в оттаивающем слое почвы, охватывается металлической обсадной трубой (кожухом) диаметром 155–168 мм. Кожух должен проникать в слой постоянной мерзлоты на 0,3–0,4 м. Промежуток между трубами заполняется крупным песком или мелким гравием, насыщенным нефтяными отходами (перед насыщением песок или гравий нагревают до 50°).

В нижней части кожуха делают между ним и трубой пробку: слой проваренного в нефтяных отходах войлока в 20 см и затем слой смолы или вара в 5 см. В самой верхней части промежутка между кожухом



Черт. 73

и трубой устраивается вторая пробка: сперва идет слой войлока в 20 см а над ним слой смолы или вара в 5 см. При закладке сперва ударно вращательными движениями опускают наружную трубу (кожух) так

чтобы нижний конец ее достиг должной глубины. Очистив кожух от заполняющего его грунта, углубляют скважину до расчетной глубины буром меньшего диаметра и опускают в нее внутреннюю трубу.

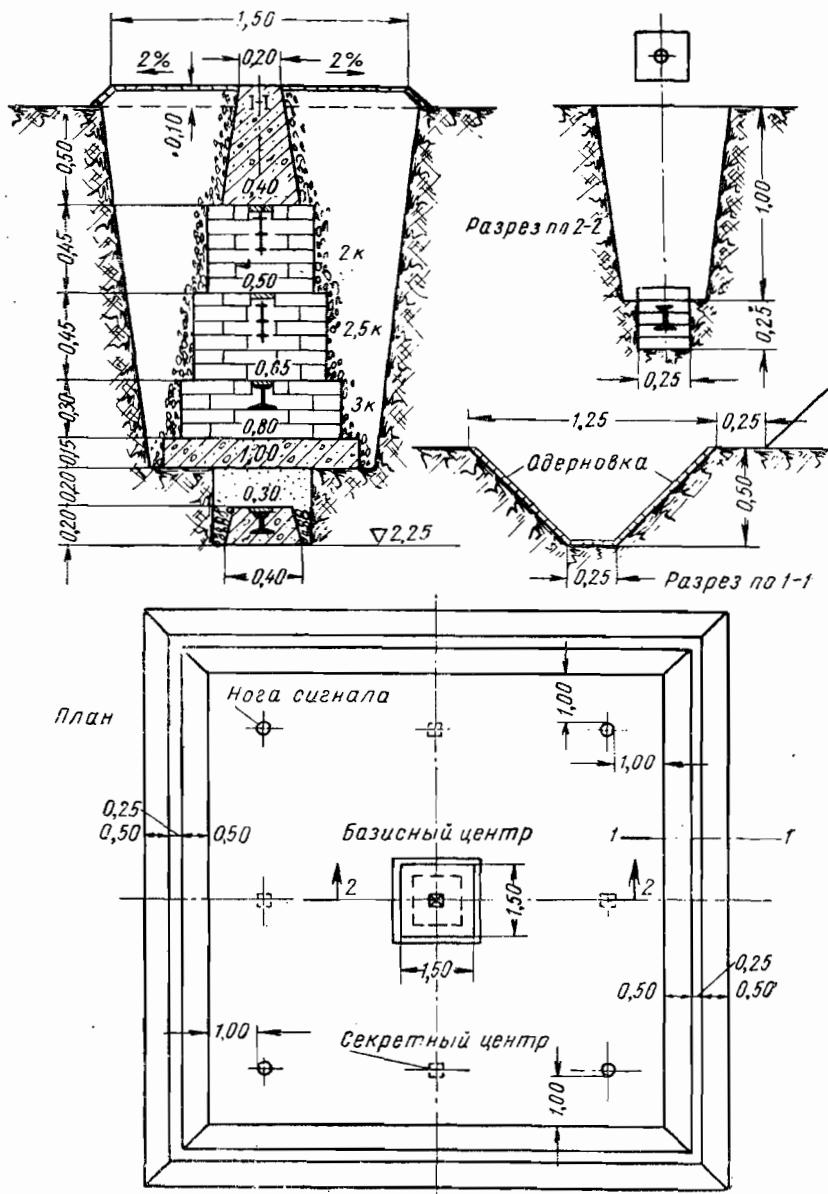
Нижнее колено внутренней трубы на протяжении 1,5 м от нижнего конца ее имеет 45 отверстий диаметром в 2 см, располагающихся в шахматном порядке, через 10 см друг от друга. Когда внутренняя труба будет на доведена при ее опускании на 1 м до полной глубины посадки (будет находиться на 1 м от забоя), тогда в скважину наливают 1,5 ведра холодной воды и продолжают обсадку трубы, доводя ее до расчетной глубины. Нижнюю часть трубы заполняют до высоты 1,5 м (от дна) песком с водой в равных объемах. Остальную часть трубы заполняют сухим песком до уровня, лежащего ниже верха трубы на 35—40 см; в самой верхней части трубы заливается цементный раствор для образования пробки толщиной 30—35 см. После затвердевания цементной пробки на нее наливается слой вара или смолы толщиной 5 см, и после этого болтами закрепляется в трубе марка. Когда марка установлена, то в нижнем конце кожуха делают описанным выше образом пробку, далее следует засыпка кожуха и устройство в нем верхней пробки, как уже сказано выше. Верхняя часть знака прикрывается деревянной трубой такого же устройства, как указано на черт. 72 для речеров в районах глубокого промерзания. Точно так же над центром насыпается курган и валики совершенно такого же устройства, как вышеописанное для центров в районах глубокого промерзания.

При закладке центра типа, изображенного на черт. 73, важно обеспечить образование мерзлотного якоря, т. е. получить хорошее смерзание трубы (нижней ее части) с мерзлым грунтом. Поэтому не безразлично, в какое время года делать закладку таких центров; наиболее выгодно делать закладку их в сентябре. Изображенные на черт. 72 и 73 центры разработаны в ЦНИИГАиК и будут применяться для закладки на пунктах I класса в соответствующих районах. Полного их испытания еще не имеется. Конечно, доставка в глухие районы тяжелого оборудования для таких центров сопровождается затруднениями.

В районах мерзлоты при закладке центра нужно стремиться к возможно меньшему нарушению существующего мерзлотного режима, а после закладки — надо принять меры к усилению этого режима, т. е. к уменьшению глубины оттаивания. Устройство довольно массивного кургана хорошо соответствует этой задаче. В районах глубокого промерзания, наоборот, при закладке центра стремятся уменьшить глубину промерзания. Инженеру-геодезисту, вследствии основные работы, необходимы систематически знакомиться по литературе с явлением мерзлоты и различными ее видами, а также и с распределением ее по территории СССР. Ряд важных указаний по этому поводу содержится в специальной инструкции, изданной ГУГСК и разработанной под руководством проф. Данилова в ЦНИИГАиК.

На черт. 74 изображен базисный центр, закладываемый на концах базиса I класса. Неподвижность базисных центров должна быть обеспечена в высокой степени — здесь имеют значение даже доли миллиметра. Эта задача не может быть достигнута одним увеличением массивности сооружения, несущего марку с центром, что, собственно, только и является особенностью принятой у нас конструкции. Следует увеличивать глубину закладки в зависимости от района; нужно всегда подушку, держащую кирпичный столб и с ним прочно соединенную, помещать ниже глубины промерзания. Далее следует кирпичный столб обводить

кофухом, изготовленным из котельного железа; пространство между кожухом и столбом нужно засыпать песком и мелкой галькой, насыщенным мазутом или нефтяными отходами.

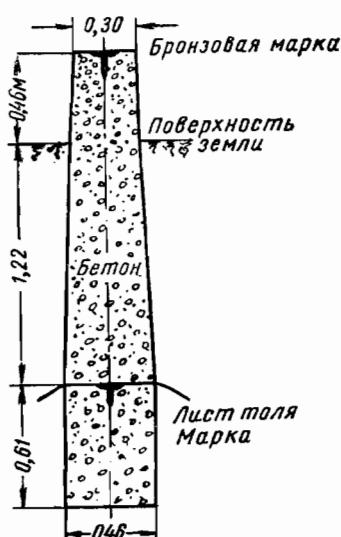


Черт. 74

Из центров, применяемых за границей, отметим лишь центр, применяемый в Канаде (черт. 75), с которым достаточно схожи и центры, применяемые в США; для центра выкапывается узкая яма глубиной

около 1,85 м, к дну яма несколько уширяется и имеет по дну ширину около 0,5 м. В яму набивается бетон; положив слой бетона в 0,2—0,5 м, закладывают нижнюю марку, которую прикрывают слоем песка и доской. Далее следует забивка ямы бетоном до глубины 0,22 м от поверхности земли. После этого в яму ставится деревянная форма высотой 0,30 м, заполняющаяся бетоном; сверху в бетон вдавливается марка с клином на конце стержня; после затвердения бетона деревянная форма снимается.

По окончании закладки центра и постройки сигнала надлежит тридцатисекундным теодолитом измерить углы между направлениями на смежные тригонометрические пункты и на несколько — не менее четырех — приметных, предназначенные к долговременному существованию предметов местности. Такие углы впоследствии могут быть использованы при разыскании тригонометрического пункта, если к тому времени построенные сигналы разрушатся, а также будут разрушены и канавы квадратной формы, которыми окапывается тригонометрический сигнал. Надлежит также взять по направлениям на местные и предназначенные к долговременному существованию предметы магнитные азимуты и, кроме того, использовать образующиеся створы между такими предметами, если эти створы проходят вблизи пункта.



Черт. 75

Г л а в а V

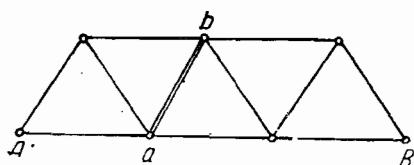
## **БАЗИСНЫЕ СЕТИ**

## § 24. Разные виды базисных сетей и их оценка

В триангуляции I класса выходная сторона ряда получается обычно в результате перехода к ней от непосредственно измеренного базиса при помощи базисной сети того или иного вида. Непосредственное измерение самой выходной стороны длиной в 25—30 км, с точностью 1 : 400 000—1 : 500 000, возможно далеко не во всех случаях, хотя, если пользоваться ломаным базисом, такие случаи не являются исключительными. Дело геодезиста — организатора работ — установить в каждом отдельном случае, будет ли выгоднее измерить базис длиной около 8 км и затем от него посредством базисной сети переходить к выходной стороне в 25—30 км, или, если позволяют условия местности, выполнить измерения элементов некоторой ломаной линии, замыкающейся которой служит искомая выходная сторона, причем, конечно, изломы этой линии не должны превосходить известных пределов.

Задача перехода от базиса длиной 6—10 км к выходной стороне в 25—30 км, решаемая при помощи базисной сети, требует вообще введения в эту сеть треугольников со связующими углами, значительно меньшими  $60^\circ$ ; это же ведет к значительному возрастанию ошибок геометрической связи.

Теоретически можно представить себе базисную сеть и без острых связующих углов — в виде цепи треугольников, близких к равносто-



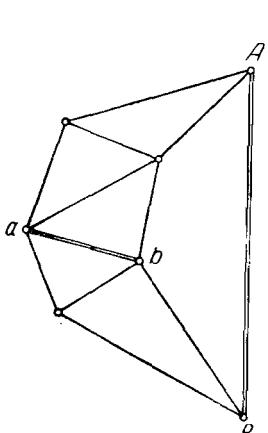
Черт. 76

и треугольников, близких к равносторонним и имеющих стороны, примерно равные длине базиса. На черт. 76 изображена такая базисная сеть с базисом  $ab$  и выходящей стороной  $AB$ , при  $ab = 8 \text{ км}$  и  $AB$  около  $25 \text{ км}$ , причем на основании формулы (43) § 16 главы III мы получим при  $m = -1^{\circ}0'5''$  среднюю ошибку в  $AB$ , обусловленную ошибками углов базисной сети, равную  $1 : 375\,000$ .

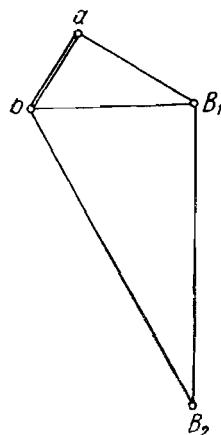
По сравнению с базисной сетью в виде простого ромба эта сеть черт. 76 требует трех лишних пунктов, а следовательно, заметных добавочных расходов (на 75%) на постройку сигналов и на измерение углов. Кроме того, в ряде случаев окажется затруднительным дать эту цепочку базисную сеть в виде треугольников, близких к равносторонним. По этим обстоятельствам в практике такие цепные базисные сети совсем не нашли себе применения. На черт. 77 изображена одна из базис-

ных сетей в Канаде; думается, что замена такой сети цепной была бы полезна делу. Другим словами, мы не имеем основания полностью отрицать применимость цепной базисной сети. Там, где местность покрыта холмами с крутыми склонами, а долины заняты озерами и болотами, возможно, что иногда цепная базисная сеть будет выгоднейшей. Нужно помнить, что все углы в ней одинаково ответственны, и потому измерение их доставит большую работу.

К следующему типу можно отнести базисную сеть из подобных прямоугольных треугольников, изображенную на черт. 78: при соответственном подборе величины углов  $B_1 = B_2$  мы получаем быстрое возрастание величины гипотенузы треугольника.



Черт. 77



Черт. 78

Обозначая через  $B$  угол  $aB_1b = \angle B_1B_2b$  при  $n$  треугольниках, дающих переход от базиса  $b$  к гипотенузе  $c_n$   $n$ -го треугольника, получим

$$v = \frac{c_n}{b} = \left( \frac{1}{\sin B} \right)^n,$$

понимая под  $v$  увеличение, даваемое базисной сетью. При этом

$$\frac{m_{c_n}}{c_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{m''}{\rho''} \operatorname{ctg} B \cdot \sqrt{n},$$

или

$$\frac{m_{c_n}}{c_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\lg v} \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\sqrt{\lg \operatorname{cosec} B}} \cdot \frac{m''}{\rho''}.$$

При решении вопроса о выгоднейшей форме треугольников, образующих рассматриваемую базисную сеть, мы должны руководствоваться условием: при заданном количестве работы на выполнение базисной сети достичь в ней при заданном увеличении  $v$  наибольшей точности определения выходной стороны. Количество работы мы можем измерять числом  $S$  присмов наблюдений углов на всех пунктах нашей сети. Так как углы  $baB_1$  и  $abB_1$  являются не ответственными для определения гипо-

тенузы  $bB_1$ , то можно принять, что углы  $B$  будут измеряться  $S:n$  при-  
смами каждый, и, следовательно, величина  $m''$  будет пропорциональна  
 $\sqrt{n}$ . Принимая  $m'' = k \sqrt{n}$ , получим

$$\frac{m_{c_n}}{c_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\lg v} \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\sqrt{\lg \operatorname{cosec} B}} k \sqrt{n}.$$

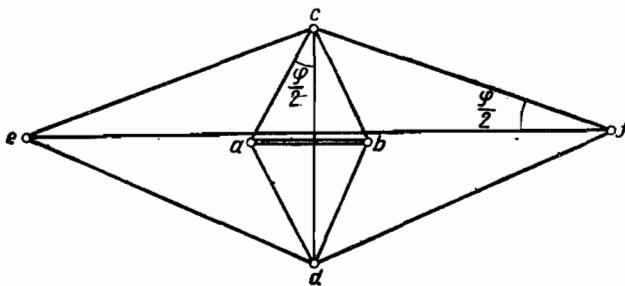
Заменяя здесь

$$\sqrt{n} = \sqrt{\lg v} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lg \operatorname{cosec} B}},$$

напишем окончательно

$$\frac{m_{c_n}}{c_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k \lg v \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\lg \operatorname{cosec} B}.$$

Следовательно, при заданном  $v$  и при заданном количестве работы, обусловившем точность измерения углов  $B$ , вопрос о выгоднейшем зна-  
чении угла  $B$  свелся к нахождению минимума дроби  $\frac{\operatorname{ctg} B}{\lg \operatorname{cosec} B}$ ; этот  
минимум имеет место при  $B = 27^\circ$ . При  $B = 27^\circ$  и  $n = 2$  увеличение,  
даваемое базисной сетью, будет около 5,3 раза и, следовательно, при  
 $ab = 5 \text{ км}$  мы получим выходную сторону в 26,5 км. При этом, если  
 $m'' = -0'',5$ , то  $\frac{m_{c_n}}{c_n} = 1 : 182\,000$ . При  $B = 30^\circ$  и  $n = 2$  будет иметь  
увеличение 4 и  $\frac{m_c}{c} = 1 : 206\,000$ . Как видно, в этом типе базисной сети  
мы, получая значительное увеличение, в то же время имеем такие точ-  
ности определения выходной стороны, которые не отвечают требованиям  
триангуляции I класса. Поэтому этот вид базисной сети из подобных  
прямоугольных треугольников не получил применения, хотя он привле-  
кает внимание простотой построения.



Черт. 79

Далее рассмотрим ромбическую базисную сеть, изображенную на  
черт. 79 и именно составленную из ромбов, подобных друг другу. До-  
пустим, что в каждом ромбе измерены независимо один от другого  
шесть углов, а именно углы:

$$1 = cab; \quad 2 = abc; \quad 3 = acb = \varphi; \quad 4 = bad; \quad 5 = abd; \quad 6 = adb = \varphi$$

Веса этих углов пусть будут:  $p_1$  для углов 1, 2, 4 и 5;  $p_2$  для углов 3 и 6. Зададимся целью отыскать среднюю ошибку высоты  $h_1$  треугольника  $acb$ , соответствующую основанию  $b = ab$ ; величина  $h_1$  будет составлять половину длины диагонали  $cd$  ромба. Мы имеем

$$(1) + (2) + (3) + w_1 = 0$$

$$h_1 = \frac{b \sin [1 + (1)] \sin [2 + (2)]}{\sin [3 + (3)]}$$

$$\lg h_1 = \lg b + \lg \frac{\sin 1 \cdot \sin 2}{\sin 3} + \delta_1(1) + \delta_2(2) - \delta_3(3),$$

где под  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  понимаются изменения  $\lg$  синусов соответственно углам 1, 2 и 3 при изменении этих углов на  $1''$ . Пренебрегая влиянием ошибки в базисе  $b$ , мы напишем при отыскании веса  $\lg h_1$  следующие равенства

$$f_1 = \delta_1; \quad f_2 = \delta_2; \quad f_3 = -\delta_3; \quad \delta_1 = \delta_2;$$

$$\left[ \frac{ff}{p} \right] = \frac{2\delta_1^2}{p_1} + \frac{\delta_3^2}{p_2};$$

$$\left[ \frac{af}{p} \right] = \frac{2\delta_1}{p_1} - \frac{\delta_3}{p_2}; \quad \left[ \frac{aa}{p} \right] = \frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

Поэтому на основании (19) имеем

$$\frac{1}{P} = \frac{2\delta_1^2}{p_1} + \frac{\delta_3^2}{p_2} - \frac{\frac{4\delta_1^2}{p_1^2} - \frac{4\delta_1\delta_3}{p_1 p_2} + \frac{\delta_3^2}{p_2^2}}{\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2}}.$$

После простых преобразований

$$\frac{1}{P} = \frac{-2(\delta_3 + \delta_1)^2}{2p_2 + p_1} = \frac{2\mu^2 [\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} 1]^2}{(2p_2 + p_1) \rho''^2},$$

где  $\mu$  — модуль непсровых логарифмов, равный 0,4343. Так как

$$\frac{m_{h_1}}{h_1} = \frac{m_{\lg h_1}}{\mu} = \frac{m''}{\mu} \sqrt{\frac{1}{P}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} 1,$$

то

$$\frac{m_{h_1}}{h_1} = \frac{m''}{\rho''} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \left( \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right);$$

$$\frac{m_{h_1}}{h_1} = \frac{m''}{\rho''} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi};$$

$$m_{h_1} = \frac{m''}{\rho''} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{\sin \varphi};$$

$$m_{h_1} = \frac{m''}{\rho''} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \cdot \frac{b}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Отсюда средняя ошибка в  $cd$ , равном  $H_1 = h_1 + h_2$ , где  $h_2$  — высота треугольника  $abd$ , получается так

$$m_{cd} = m_{H_1} = \sqrt{2} m_{h_1} = \frac{m''}{\rho''} \cdot \frac{b}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}};$$

$$\frac{m_{H_1}}{H_1} = \frac{m''}{\rho''} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p_2 + p_1} \sin \varphi}.$$

Переходя к следующему ромбу  $cde$ , мы, очевидно, напишем, обозначая  $ef$  через  $H_2$

$$\frac{m_{H_2}^2}{H_2^2} = \frac{m_{H_1}^2}{H_1^2} + \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{1}{2p_2 + p_1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi};$$

$$\frac{m_{H_2}^2}{H_2^2} = \frac{2m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{1}{(2p_2 + p_1) \sin^2 \varphi};$$

$$\frac{m_{H_2}}{H_2} = \frac{\sqrt{2}m''}{\rho''} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p_2 + p_1} \sin \varphi}.$$

Если бы базисная сеть состояла из  $n$  ромбов и большая диагональ  $n$ -го ромба  $H_n$  служила выходной стороной триангуляции, то

$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \sqrt{n} \cdot \frac{m''}{\rho''} \frac{1}{\sqrt{2p_2 + p_1} \sin \varphi}.$$

Увеличение базиса, даваемое

одним ромбом равно . . . . .  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$

двумя ромбами . . . . .  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}$

$n$  .  $\operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2}$ .

Задаваясь числом  $S$  приемов измерения углов, предназначенных для выполнения базисной сети, получим

$$m'' = k \sqrt{n},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от  $S$ .

Кроме того,

$$v = \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2},$$

$$n = \lg v \cdot \frac{1}{\lg \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

Следовательно,

$$m'' = k \sqrt{\lg v} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lg \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}}.$$

Теперь напишем для  $\frac{m_{H_n}}{H_n}$ :

$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \frac{k}{\rho''} \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt{2p_2 + p_1}} \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{k}{\rho''} \cdot \frac{\lg v}{\lg \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sin \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2f_2 + p_1}}.$$

Так как  $k$  и  $v$  должны считаться постоянными при сравнении между собой разных базисных сетей ромбического типа, т. е. различающихся друг от друга значением угла  $\varphi$ , то выгоднейшее значение  $\varphi$  будет то, при котором:

$$\sin \varphi \cdot \lg \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

будет иметь максимум. Это имеет место при

$$\varphi = 33^\circ 30'.$$

Когда разбивают базисную сеть в виде одного ромба, то стремятся угол при длинной диагонали в каждом ромбе иметь именно около  $34^\circ$ . При этом угол один ромб дает увеличение  $v = 3,33$ , а два ромба  $11,1$ . Таким образом, при базисе в 8 км в базисной сети в виде ромба с углом  $\varphi = 33^\circ 30'$  мы получаем выходную сторону равной 27 км. Очевидно, углы:  $1 = \angle cab$ ;  $2 = \angle cba$ ;  $4 = \angle bad$ ;  $5 = \angle abd$ , являются мало ответственными углами: они близки к  $90^\circ$ , синусы их изменяются медленно, и ошибки в них мало влияют на определение  $h_1$  и  $h_2$ . Взяв  $p_1 = 1$  и  $m'' = \pm 0'',7$ , примем  $p_2 = 2$ , т. е. предположим измерение ответственных углов  $3 = \angle acb$  и  $6 = \angle adb$  с средней ошибкой  $\pm 0'',5$ .

Тогда при  $n = 1$  и  $\varphi = 33^\circ 30'$  имеем

$$\frac{m_{H_1}}{H_1} = \frac{0,7}{206\,000} \cdot \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 0,55}} = 1 : 363\,000.$$

Как видно, базисная сеть в виде простого ромба с углом  $\varphi = 33^\circ 30'$  является наивыгоднейшей по сравнению с рассмотренными ранее типами базисных сетей: при большем увеличении и при одном и том же количестве работы она дает заметно большую точность определения выходной стороны. Если условия местности позволяют измерить базис по короткой диагонали такого ромба, то, конечно, вопрос о базисной сети решается сам собой.

Приведенное рассмотрение вопроса о погрешностях в ромбической базисной сети имеет недочет в том, что предполагалось независимое измерение углов  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ , чего в действительности не соблюдается. Однако, углы  $3$  и  $6$  измеряют независимо друг от друга и от остальных углов, а ошибки именно в них при  $\varphi$  около  $30 - 40^\circ$  влияют, главнейшим образом, на образование ошибки диагонали  $cd$ . Поэтому при соображениях о выгоднейшей форме ромба указанный недочет нашего вывода не может иметь даже малого значения. Но при точных расчетах  $\frac{m_{H_1}}{H_1}$  нужно заменить углы разностями направлений, если в базисной сети измерялись направления, и находить ошибку диагонали  $cd$  не как ошибку суммы двух независимо определенных величин  $h_1$  и  $h_2$ , а как ошибку замыкающей стороны в треугольнике  $cad$ , в котором стороны  $ac$  и  $ad$  получаются соответственно из треугольников  $acb$  и  $adb$ , а

угол  $cad$  образуется, как разность направлений с  $a$  на  $d$  и с  $a$  на  $c^*$ . Конечно, сейчас же обнаруживается, что ответственными при определении  $ac$  и  $ad$  являются углы  $acb = 3$  и  $adb = 6$ , а ответственным при определении по ним и углу  $cad$  выходной стороны  $cd$  является и этот угол  $cad$ , так как вообще он отличается от  $180^\circ$  более чем на  $34^\circ$ .

Очевидно, чем менее угол  $\varphi$ , тем с большим весом должны быть измеряемы направления, его образующие; очевидно также, что вес направлений, образующих углы  $cad$  и  $cbd$ , должен повышаться вместе с увеличением отличия этих углов от  $180^\circ$ .

Возьмем теперь четырехугольник, изображенный на черт. 80; в нем  $ab$  — измеренный базис  $b$ , а диагональ  $cd$  должна служить выходной стороной. Мы напишем

$$\begin{aligned} \overline{cd}^2 &= b^2 \frac{\sin^2(8-7)}{\sin^2(2-1)} + b^2 \frac{\sin^2(7-6)}{\sin^2(10-9)} - \\ &- 2b^2 \cdot \frac{\sin(8-7) \sin(7-6)}{\sin(2-1) \sin(10-9)} \cos(5-3). \end{aligned}$$

Черт. 80

Обозначим: котангенсы углов  $2-1$ ,  $8-7$ ,  $7-6$ ... соответственно через  $c_{2-1}$ ;  $c_{8-7}$ ;  $c_{7-6}$ ...; стороны  $ac$  и  $ad$  — через  $a_1$  и  $a_2$ ;  $d_1 = ce = a_1 - a_2 \cos(5-3)$ ;  $d_2 = de_1 = a_2 - a_1 \cos(5-3)$ . Тогда по неуравненным углам базисной сети получим такое выражение для средней ошибки в квадрате стороны  $cd$

$$\begin{aligned} m_{\overline{cd}}^2 &= 4 \{ a_1^2 d_1^2 c_{2-1}^2 (m_2^2 + m_1^2) + a_2^2 d_2^2 c_{10-9}^2 (m_{10}^2 + m_9^2) + \\ &+ a_1^2 c_{8-7}^2 \cdot d_1^2 m_8^2 + a_2^2 d_2^2 c_{7-6}^2 m_6^2 + [a_2 d_2 c_{7-6} - a_1 d_1 c_{8-7}]^2 m_7^2 + \\ &+ a_1^2 a_2^2 \sin^2(5-3) (m_5^2 + m_8^2) \}. \end{aligned} \quad (94)$$

Очевидно, должно быть

$$m_2^2 = m_1^2; \quad m_{10}^2 = m_9^2.$$

Из уравнения (94) мы сразу видим, что коэффициенты при  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_9$  и  $m_{10}$  всегда будут значительно большими (в несколько раз), чем при остальных  $m$ ; таким образом, ясно, что веса углов  $2-1$  и  $10-9$  должны быть значительно большими, чем веса остальных углов в базисной сети, если эти углы ( $2-1$ ) и ( $10-9$ ) менее  $35^\circ$ . Далее, действие ошибок углов ( $8-6$ ) и ( $5-3$ ) будет тем более, чем более сами эти углы отличаются от  $180^\circ$  и чем более их составные части, т. е. углы ( $8-7$ ) и ( $7-6$ ), ( $4-3$ ) и ( $5-4$ ) отличаются от  $90^\circ$ .

По величинам коэффициентов в (94) мы уже можем судить, хотя и приближенно, о значениях тех или иных углов при определении выходной стороны базисной сети. Конечно, формулу (94) не приходится рекомендовать для расчетов средней ошибки выходной стороны: этот расчет делается при равных весах всех направлений так, как указано в пример в § 22, а при неравных весах наблюденных направлений, — вводя соответственные изменения, известные из способа наименьших квадратов.

\* Предполагается, что направления по диагонали  $cd$  не наблюдались.

В случае ромба мы должны в (94) положить

$$m_1 = m_2 = m_9 = m_{10} = \frac{d''}{\sqrt{p_1}};$$

$$m_8 = m_6 = m_5 = m_3 = \frac{d''}{\sqrt{p_2}},$$

понимая под  $d''$  среднюю ошибку направления с весом единица. Для ромба (94) перепишется так

$$m^2_{cd} = b^4 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d''^2}{p''^2} \left[ \frac{4}{p_1} \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{4}{p_2} \right]. \quad (95)$$

Сопоставления (по исполнении соответствующих вычислений) результатов, даваемых (94) и (95), показывают, что четырехугольник может заметно отступать от формы ромба без того, чтобы точность определения из него выходной стороны сколько-нибудь заметно понижалась, если только углы 2—1 и 10—9 остаются близкими к углу  $\varphi$  в ромбе.

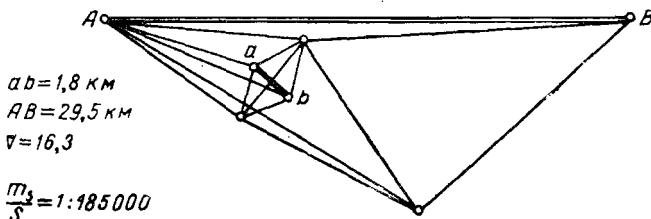
Оставляя углы (2—1) и (10—9) такими же, что и в ромбе, и именно близкими к  $34^\circ$ , мы можем остальные углы в треугольниках  $acb$  и  $adb$  (черт. 80) иметь отличающимися до  $10^\circ$  от соответственных углов ромба.

Несомненно, вопрос правильного распределения весов в базисных сетях имеет немаловажное значение. При измерении неответственного угла с тем же весом, что и угла ответственного, мы получаем вероятность, при затрате большей работы, получить затем для выходной стороны результат не улучшенный, а искаженный. Поэтому здесь дело не только в разумной экономии в работе. Вопрос распределения весов мы разберем в следующем параграфе. Сейчас же остановимся на другом вопросе, а именно — на значении добавочных диагоналей в базисных сетях и прежде всего на том, следует или не следует измерять углы, образуемые диагональю  $cd$  четырехугольника с его сторонами. Ошибки этих углов войдут в выражение ошибки стороны  $cd$  с коэффициентами столь значительными, что наблюдения направлений с  $c$  на  $d$  (черт. 80) и с  $d$  на  $c$  следует выполнить с весом наибольшим, заметно большим веса направлений 2 и 1, 9 и 10.

Между тем внешние условия ставят существенные препятствия для возрастания, после известного предела, точности измеряемого в базисной сети угла вместе с увеличением числа измерений этого угла. Вряд ли возможно говорить о получении угла с средней ошибкой, меньшей  $\pm 0'',4$ , или направления с средней ошибкой, меньшей  $\pm 0'',25$ . Если в базисной сети (черт. 80) мы стремимся направления 2, 1, 9 и 10 получить с средней ошибкой  $\pm 0'',3 - \pm 0'',4$ , то направления  $cd$  или  $dc$  следует получить с средней ошибкой, меньшей  $\pm 0'',2$ , чтобы с вероятностью надеяться на пользу введения этих направлений в базисную сеть для вывода выходной стороны. Но это неосуществимо и поэтому приходится сделать такое заключение: наблюдения по диагонали  $cd$  следует выполнить для контроля угловых измерений в базисной сети, но не использовать эти наблюдения при выводе выходной стороны. В действительных работах наблюдения направлений по диагонали  $cd$  выполняют не только для контроля угловых измерений в базисной сети, но еще и потому, что одно из этих направлений необходимо для передачи на выходную сторону астрономического азимута, обычно наблюдавшегося по сторонам  $ca$  и  $ac$  (или  $da$  и  $ad$ ). Однако, принято направ-

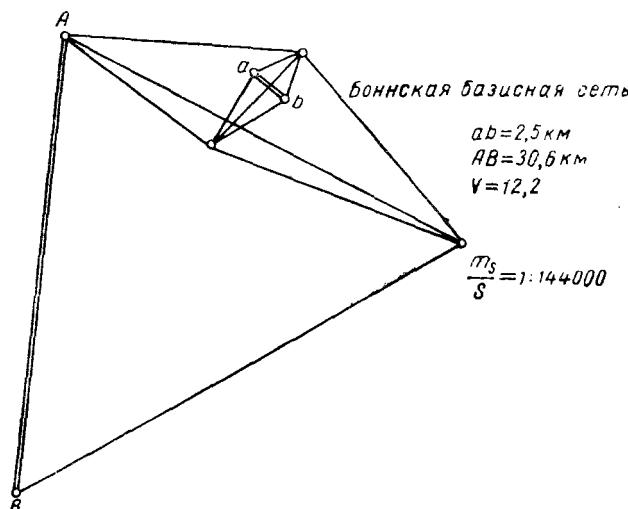
ления с  $c$  на  $d$  и с  $d$  на  $c$ , кроме использования их для передачи азимута на выходную сторону, вводить и в уравнивание базисной сети для определения выходной ее стороны. Этот прием представляется нам при углах  $\phi < 38^\circ$  неправильным: использовав наблюденные направления с  $c$  на  $d$  и с  $d$  на  $c$  для вывода окончательных значений наблюденных направлений в  $c$  и в  $d$  и образовав все условные уравнения сети для контроля по величинам их свободных членов качества угловых измерений, далее следует отбросить два условия, вызванных наблюдениями

Кенигсбергская базисная сеть



Черт. 81

по диагонали  $cd$ , и, уравнивая направления только за условия треугольников  $acb$  и  $adb$ , выводить затем значение выходной стороны. Что касается добавочных диагоналей в сложных базисных сетях, то их следует вводить в уравнивание базисной сети (а может быть, и в наблюдения)



Черт. 82

только в тех случаях, когда самостоятельная комбинация их с другими направлениями приводит к определению выходной стороны из треугольников с углами, не меньшими  $34^\circ$ .

Теперь остановимся на иллюстрации базисных сетей, построенных в разное время в разных государствах.

До 1925 — 1930 гг. в Германии избегали применять базисный прибор Едерина для измерения базисов I класса. Поэтому посредством так называемых железовых приборов (см. главу «О базисных измерениях») измеряли короткие базисы от 2 до 7 км, и, применяя значительное увеличение в базисной сети, иногда в 10—15 раз, переходили к выходной стороне длиной от 30 до 57 км (черт. 81, 82, 83). Точность выходных сторон в этих старых сетях, имеющих увеличение в 10—15 раз, не превосходит 1 : 150 000. Новые базисные сети в Германии (при Гумбинене, Шубине, Берлине) имеют вид двойных ромбов и при длине базиса в 5—7 км дают переход к выходной стороне длиной от 27 до 56 км с формальной точностью от 1 : 1 000 000 до 1 : 1 600 000. Такой результат получается потому, что наблюдаемым ответственным направлениям в этих сетях приписывается средняя ошибка, даже несколько меньшая  $\pm 0'',2$ .

Переход на базисные сети в виде двух ромбов с увеличением в

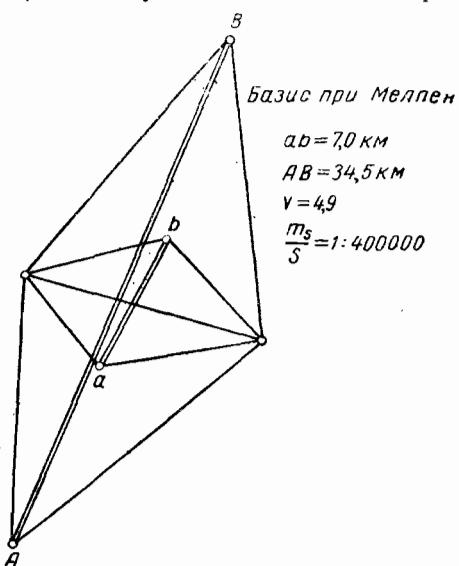
каждом около 2, 3, т. е. при  $\frac{\varphi}{2} = 24^\circ$ , характерен для современных западно-европейских геодезических работ.

Применяя формулу, ранее выведенную в этом параграфе

$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \frac{\sqrt{n} \cdot m''}{\varphi''} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2p_2 + p_1}) \sin \varphi},$$

при  $\varphi = 48^\circ$ ,  $n = 2$ ,  $m = \pm 0'',4$ ,  $p_2 = p_1 = 1$ , получим  $\frac{m_{H_n}}{H_n} = 1 : 490 000$ .

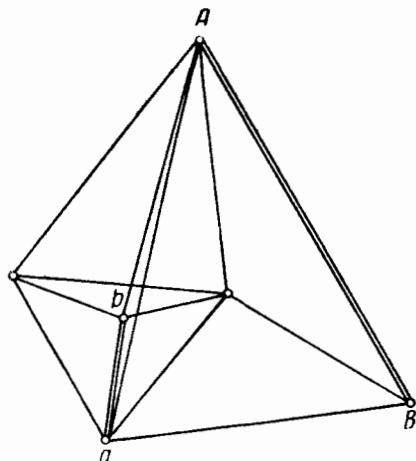
При надлежащем распределении весов эта точность еще заметно повысится и может дойти до 1 : 650 000, но, конечно, не до 1 : 1 600 000. На черт. 84, 85 и 86 изображены некоторые базисные сети США, а на черт. 87, 88, 89 и 90 — базисные сети Канады. Длина базисов в этих сетях около 8—9 км. Можно отметить, что нет тенденции в сетях США и Канады применять базисную сеть в виде одного ромба\*; однако, и двойной ромб, вошедший в практику новых работ Западной Европы, также здесь мало или, вернее, совсем не применяется. Замена первого или второго ромба (вернес, четырехугольника, более или менее близкого к ромбу) центральной системой из трех треугольников; построение на длинице диагонали первого ромба геодезического четырехугольника, не дающего, однако, увеличения для выходной стороны; комбинация двух четырехугольников, входящих друг в друга или следующих друг за другом, — вот что можно подметить в базисных сетях. Шесть или пять пунктов, образующих базисную сеть, позволяют при этих построениях почти избегать углов, меньших  $40^\circ$ , работающих на необходимый пере-



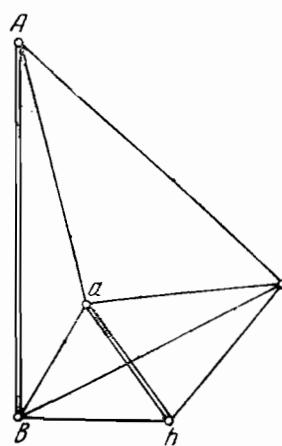
Черт. 83

\* В этом сходство геодезических работ США и Западной Европы.

ход от базиса к выходной стороне. В базисных сетях СССР средняя длина базиса оказывается около 13 км. Эта значительная длина базиса позволяет во многих случаях иметь увеличение базисной сети всего

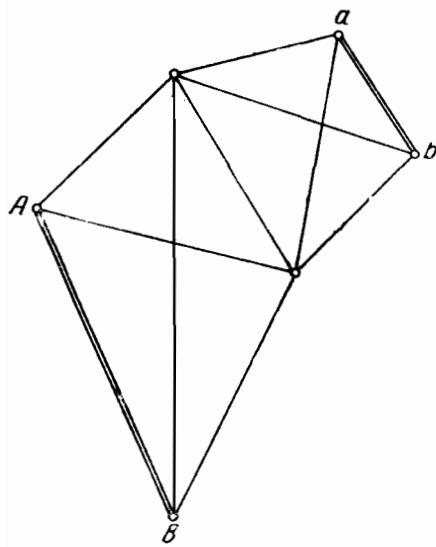


Черт. 84

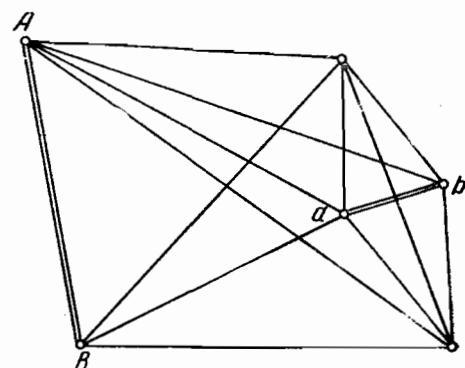


Черт. 85

около двух раз. Поэтому очень многие базисные сети в СССР представляют собой четырехугольник, близкий к ромбу, с углами  $\varphi$  при концах длинной его диагонали от  $40$  до  $45^\circ$ . Сравнительно немногие базисные сети, требующие увеличения базиса в  $4 - 4\frac{1}{2}$  раза, построены в СССР



Черт. 86

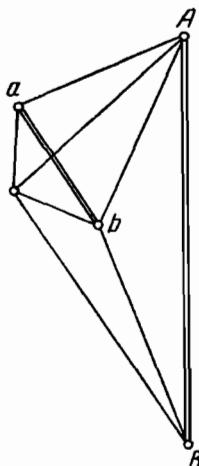


Черт. 87

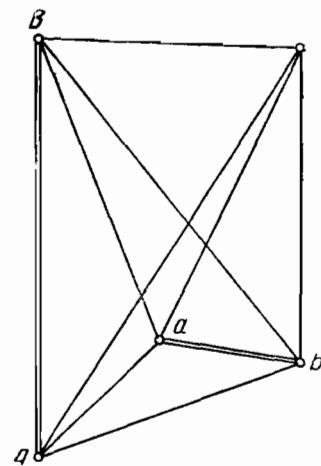
в виде двойного ромба и уже совсем небольшое число базисных сетей — в виде сложной системы треугольников. Точность перехода от базиса к выходной стороне в среднем из 120 базисных сетей характеризуется средней величиной относительной ошибки в  $1 : 500\,000$ .

Мы замечаем существенное различие в построении базисных сетей в СССР, в Западной Европе и в США. Из формулы

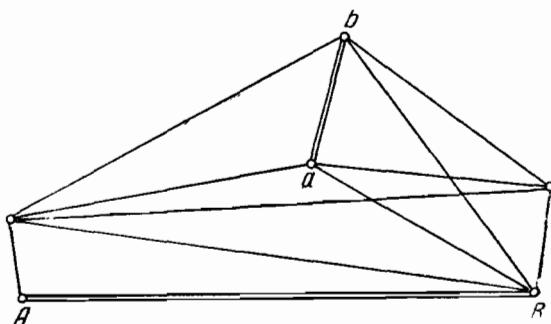
$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \frac{\sqrt{n} \cdot m''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2p_2 + p_1}) \sin \varphi}$$



Черт. 88



Черт. 89



Черт. 90

следует, что если мы достигаем одного и того же увеличения  $v$  посредством сперва одного ромба, а затем посредством двух ромбов, то

$$\mu_n = \left( \frac{m_{H_2}}{H_2} \right) = \frac{\sqrt{2} m''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_2 \sqrt{2p_2 + p_1}},$$

$$\mu = \frac{m_{H_1}}{H_1} = \frac{m''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_1 \sqrt{2p_2 + p_1}},$$

где через  $\mu_n$  и  $\mu$ , обозначены относительные ошибки выходной стороны соответственно в случае двух и одного ромба.

Таким образом

$$\mu_u : \mu_i = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2}};$$

$$\mu_u : \mu_i = \frac{\sqrt{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2}} = \frac{\sqrt{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_1}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2}}{(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_2}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2}}.$$

Но

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2} = v; \quad \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{v},$$

поэтому

$$\mu_u : \mu_i = \frac{\sqrt{2} (1+v) v}{(1+v^2) \sqrt{v}}.$$

При  $v=3$  имеем  $\mu_u : \mu_i = 0,97$

„  $v=4$  „  $\mu_u : \mu_i = 0,82$

„  $v=5$  „  $\mu_u : \mu_i = 0,73$ .

Следовательно, двойной ромб дает при том же увеличении ( $v \geq 3$ ) точность, несколько большую, чем один ромб.

С другой стороны, расчеты действия погрешностей в базисных сетях, основанные на применении способа наименьших квадратов, имеют вообще разную надежность в случае сети из одного ромба или в случае сети из нескольких ромбов. В двойном ромбе мы имеем все-таки заметно большую гарантию того, что действительная ошибка выходной стороны не превышает двойной средней, чем в сети из одного ромба. Случайные ошибки направлений в одном ромбе в своем влиянии на вывод длины выходной стороны будут компенсироваться в заметно меньшей степени, чем в случае сети из двух ромбов. Наконец, надо отметить, что иногда простота базисной сети получается за счет тяжелых условий измерения самого базиса, вытекающих из наличия на линии базиса существенных препятствий для высокоточных линейных измерений. Все эти соображения должны быть учитываемы при осуществлении базисной сети в виде одного ромба (или близкого к нему четырехугольника). Повышение расчетной точности в случае замены одного ромба двойным ромбом не имеет значения для базисных сетей из одного ромба в СССР, так как хотя случаи применения таких сетей у нас и многочисленны, но увеличение, даваемое этими базисными сетями, — менее трех или очень близко к трем (2,4; 2,8; 3,2). Однако, два последних соображения должны быть, наоборот, вполне учитываемы. Если местность позволяет выбрать длинный, удобный для измерения базис, при котором легко осуществляется переход к выходной стороне при помощи одного ромба, то необходимо иметь углы  $\varphi$  около  $40^\circ$  и обеспечить высокоточное измерение ответственных направлений в этом ромбе путем выбора опытных наблюдателей, применения инструментов высокого качества, увеличения рядов наблюдений, исполнения наблюдений только при благоприятных атмосферных условиях, осуществления полно-

жесткости геодезических сигналов и достижения, при помощи постройки этих сигналов и выбора их мест, прохождения визирных лучей высоко над препятствиями. Эти требования должны, конечно, соблюдаться и в более сложных базисных сетях.

При увеличении, большем трех, предпочтительнее переходить на двойные ромбы (или сети типа черт. 85). Заметим кстати, что в СССР пока не прививается измерение ломаных базисов, столь распространенное в США. Возможности к этому обоснованы в § 22. Обход препятствий посредством излома базиса и применение двойных ромбов могут в ряде случаев, обеспечивая проведение высокоточных линейных измерений только на удобной местности, дать хороший вывод выходной стороны. Предпочтительнее взять, если к тому имеются производственные возможности, базисную сеть из 5—6 точек с соответствующими углами  $\varphi$  около  $40^{\circ}$ — $45^{\circ}$ , чем базисную сеть в виде одного ромба с теми же углами  $\varphi$  около  $30^{\circ}$  ( $28^{\circ}$ — $33^{\circ}$ ), имея во втором случае несколько более длинный базис (процентов на 30%).

## § 25. Распределение весов угловых измерений в базисных сетях

Пусть истинные (или вероятные) значения  $n$  наблюдаемых величин  $h$  есть  $h_1 + \varepsilon_1, h_2 + \varepsilon_2, \dots, h_n + \varepsilon_n, \dots, h_n + \varepsilon_n$ .

Допустим, что мы имеем  $q$  условий, связывающих величины  $h$ , которые напишем в таком виде

$$\sum_1^n a_i \varepsilon_i = w_1; \quad \sum_1^n b_i \varepsilon_i = w_2; \quad \dots \quad \sum_1^n q_i \varepsilon_i = w_q.$$

Некоторую функцию  $F$  уравненных элементов мы можем представить в таком виде

$$F = F_0 + \sum_1^n l_i \varepsilon_i,$$

или иначе

$$F = F_0 - \sum_1^q k_v w_v + \sum_1^n p_i \varepsilon_i^2 + \sum_1^n l_i \varepsilon_i^*,$$

где под  $k_v$  понимаются корреляты условных уравнений. Последнее уравнение можно еще написать так

$$F = F_0 - \sum_1^q k_v w_v + \sum_1^n L_i \varepsilon_i, \quad (96)$$

причем

$$L_i = l_i + a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \dots + q_i k_q. \quad (97)$$

Конечно,  $F_0$  — значение  $F$  с измеренными значениями величин  $h$ .

\* Поправка под  $p_i$  вес наблюдаемой величины  $h_i$ .

Вообразим, что мы так или иначе установили нужную систему значений коррелат  $k_2$ ; тогда, имея уже тем самым минимум  $\sum_1^q k_y w_y$ , мы свели бы вопрос нахождения наибольшего веса функции  $F$  к нахождению минимума квадрата средней ошибки выражения  $\sum_1^n L_i \varepsilon_i$  или, понимая под  $\mu$  ошибку единицы веса, — к нахождению минимума величины

$$M^2 = \mu^2 \sum_1^n \frac{L_i^2}{p_i},$$

причем в распоряжении при отыскании минимума  $M^2$  имели бы только величины  $p_i$  и, следовательно, при этих обстоятельствах вопрос был бы сведен исключительно к вопросу выгоднейшего распределения весов в системе наших наблюдений  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Понятно, что минимум  $M^2$  надо находить под условием.

$$\sum_1^n p_i = S,$$

где  $S$  — наперед заданная сумма работы, затрачиваемая на получение из наблюдений величин  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ . Умножая, как всегда при условном минимуме, это условие  $\sum p_i = S$  на  $\lambda$ , приходим к таким уравнениям

$$L_i^2 = \lambda p_i^2; \quad p_i = \frac{|L_i|}{\sqrt{\lambda}}$$

и отсюда

$$S = \frac{\sum_1^n |L_i|}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{p_i}{S} = \frac{|L_i|}{\sum_1^n |L_i|} \quad (98)$$

(под  $|L_i|$  понимается абсолютное значение  $L_i$ ). Таким образом, при надлежащем установленной системе коррелат веса  $p_i$  пропорциональны абсолютным значениям  $L_i$ , вычисленным при помощи системы этих коррелат.

Но коррелаты наших условных уравнений

$$\sum_1^n a_i \varepsilon_i = w_1; \quad \sum_1^n b_i \varepsilon_i = w_2; \quad \dots \quad \sum_1^n q_i \varepsilon_i = w_q$$

сами будут функциями искомых величин  $p_i$ , при которых вес функции  $F$  будет наибольший. Другими словами, то система значений коррелат, по которой должны вычисляться  $L_i$ , а по этим  $|L_i|$  — величины  $p_i$ , будет известна тогда, когда будет известна система значений  $p_i$ . Получается замкнутый круг. Задача должна решаться косвенными приемами и, между прочим, методом постепенных приближений.

Рассмотрим решение, данное Гельмартом и Иорданом. В § 8 главы II мы имели формулу (17)

$$\frac{1}{P} = \frac{(a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 + \dots + l_1)^2}{p_1} + \frac{(a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 + \dots + l_2)^2}{p_2} + \dots + \frac{(a_n r_1 + b_n r_2 + \dots + l_n)^2}{p_n}, \quad (17)$$

в которой соответственно обозначениям настоящего параграфа  $f_1, f_2, \dots, f_n$  заменены через  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Коэффициенты  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_q$  носят название переходных коэффициентов.

Они должны удовлетворять, при применении способа наименьших квадратов к определению поправок наблюденных величин, системе уравнений (14) того же § 8 главы II:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{aq}{p} \right] r_q + \left[ \frac{al}{p} \right] &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{bq}{p} \right] r_q + \left[ \frac{bl}{p} \right] &= 0 \\ \dots &\dots \\ \left[ \frac{aq}{p} \right] r_1 + \left[ \frac{bq}{p} \right] r_2 + \left[ \frac{cq}{p} \right] r_3 + \dots + \left[ \frac{qq}{p} \right] r_q + \left[ \frac{ql}{p} \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

При любой системе значений  $p$ , напрежд заданных, вес  $P$  нашей функции уравненных элементов будет наибольшим, если величины  $r$  удовлетворяют уравнениям (14) в силу именно применения принципа наименьшей суммы  $|p\varepsilon^2|$ . Вообразим теперь, что нам известна та система значений  $p$ , которая является наивыгоднейшей. Тогда по ним мы вычислим соответствующие  $r$  по (14), но, очевидно, в (17)

$$|a_i r_1 + b_i r_2 + c_i r_3 + \dots + l_i|$$

должно быть пропорционально  $p_i$ , а тогда, следовательно, пропорционально на основании (98) величине  $|L'_i|$ . Установление коэффициента пропорциональности легко выполняется на основании условия

$$\sum_1^n p = S.$$

Отсюда открывается такой путь вычисления выгоднейших весов  $p_i$ . Сперва примем их все просто равными единице. Решив уравнения (14), мы получим  $r'_1, r'_2, r'_3, \dots, r'_q$ . С этими величинами вычисляем

$$L'_i = l_i + a_i r'_1 + b_i r'_2 + \dots + q_i r'_q.$$

Далее вычисляем коэффициент пропорциональности

$$\rho' = \frac{S}{\sum_1^n |L'_i|} \quad (99)$$

и с ним в первом приближении веса

$$p'_i = S \cdot \frac{|L'_i|}{\sum_1^n |L'_i|} = \varphi' \cdot |L'_i|. \quad (100)$$

С этими весами  $p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_n$  вновь решаем уравнения (14), определяем  $r''_1, r''_2, r''_3, \dots, r''_q$ , с ними выводим величины  $L''_i = l_i + a_i r''_1 + b_i r''_2 + \dots + q_i r''_q$ , получаем

$$\varphi'' = \frac{S}{\sum_1^n |L''_i|}$$

и вычисляем

$$p''_i = \varphi'' \cdot |L''_i|.$$

С вторыми значениями весов  $p''_1, p''_2, \dots, p''_n$  опять решаем уравнения (14) и переходим к следующему приближению и т. д.

Так как

$$M^2 = \mu^2 \cdot \sum_1^n \frac{L_i^2}{p_i} = \mu^2 \sum_1^n \frac{L_i^2 \sum_1^n |L_i|}{|L_i| \cdot S} = \mu^2 \frac{\sum_1^n |L_i|}{S} \cdot \sum_1^n \frac{L_i^2}{|L_i|} = \mu^2 \cdot \frac{\left\{ \sum_1^n |L_i| \right\}^2}{S},$$

то соблюдение в приближении с номером  $e$  равенства

$$\sum_1^n \frac{(L_i^e)^2}{p_i^e} = \frac{\left\{ \sum_1^n |L_i^e| \right\}^2}{S}.$$

указывает, что можно считать расчет весов законченным\*.

По вполне правильным соображениям Крюгера выгоднейшее распределение весов требует равенства центру стольких  $L_i$  и соответствующих им весов  $p_i$ , сколько имеется узлов в сети. Другими словами, при строгом проведении выгоднейшего распределения весов мы не должны совсем наблюдать ряда направлений в нашей сети. На этом мы становимся в конце параграфа.

В качестве примера на применение приема Гельмерта-Иордана рассмотрим базисную сеть, изображенную на черт. 45, для которой числовые данные приведены в § 22 главы IV. Мы имеем такие уравнения (14) при  $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_{12} = 1$

$$\left. \begin{aligned} 6r_1 - 2r_2 + 2r_3 + 22.4r_4 - 8.6 &= 0 \\ 6r_2 + 2r_3 - 19.8r_4 - 4.8 &= 0 \\ + 6r_3 - 5.0r_4 - 13.2 &= 0 \\ + 2063.9r_4 - 151.8 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$S = 12$$

\* Практически всегда достаточно двух приближений, а нередко можно ограничиться и одним первым приближением, дающим  $p'_i$ .

Из первого решения (14) получаем

$$r_1' = +0,815; \quad r_2' = +0,741; \quad r_3' = +1,745; \quad r_4' = +0,076.$$

С этими значениями  $r$  при помощи соответствующей таблицы § 22 (с заменой в ней обозначений  $f$  через  $l$ ) имеем

$$L_1' = +1,4 - 0,82 - 1,745 - 0,09 = -1,25$$

$$L_2' = +0,82 - 0,74 + 0,17 = +0,25$$

$$L_3' = +1,00; \quad L_4' = +1,07; \quad L_5' = +0,24; \quad L_6' = -1,31$$

$$L_7' = -0,74; \quad L_8' = -0,08; \quad L_9' = +0,82; \quad L_{10}' = +0,71$$

$$L_{11}' = +0,01; \quad L_{12}' = -0,72$$

$$\sum |L_i'| = 8,20; \quad \varphi' = 1,463$$

И теперь

$$p_1' = 1,84; \quad p_2' = 0,39; \quad p_3' = 1,45; \quad p_4' = 1,56; \quad p_5' = 0,35; \quad p_6' = 1,91; \\ p_7' = 1,08; \quad p_8' = 0,12; \quad p_9' = 1,20; \quad p_{10}' = 1,04; \quad p_{11}' = 0,01; \quad p_{12}' = 1,05.$$

Так как  $L'_{11}$  и  $L'_{12}$  определенно стремятся к нулю, то в последующем мы положим, что направления 11 и 12 (черт. 45) совсем не наблюдались, и напишем условные уравнения нашего четырехугольника в таком виде

$$(3) - (1) + (6) - (4) + (9) - (7) + (12) - (10) + w_1 = 0;$$

$$\frac{\sin [II - II] \cdot \sin [V - IV] \cdot \sin [XII - X]}{\sin [VI - IV] \cdot \sin [V - IV + IX - VII] \sin [III - II]} = 1;$$

$$-1,2(1) + 2,3(2) - 1,1(3) - 44,4(4) + 48,0(5) - 3,6(6) - 21,9(7) + \\ + 21,9(9) - 2,8(10) + 2,8(12) + w_2 = 0;$$

$$F_1 = b \frac{\sin [II - I] \cdot \sin [IX - VII]}{\sin [VI - IV] \cdot \sin [V - IV + IX - VII]};$$

$$F = -1,2(1) + 1,2(2) - 18,3(4) + 21,9(5) - 3,6(6) - 10,1(7) + 10,1(9).$$

Отсюда имеем новую табл. 7 условных уравнений.

Таблица 7

| № направлений | $a$ | $b$   | $t$   | $s$   |
|---------------|-----|-------|-------|-------|
| 1             | -1  | -1,2  | -1,2  | -3,4  |
| 2             | -   | +2,3  | +1,2  | +3,5  |
| 3             | +1  | -1,1  | -     | 0,1   |
| 4             | -1  | -44,4 | -18,3 | -63,7 |
| 5             | -   | +48,0 | +21,9 | +69,9 |
| 6             | +1  | -3,6  | -3,6  | -6,2  |
| 7             | -1  | -21,9 | -10,1 | -33,0 |
| 9             | +1  | +21,9 | +10,1 | +33,0 |
| 10            | -1  | -2,8  | -     | -3,8  |
| 12            | +1  | +2,8  | -     | +3,8  |

Взяв те веса, которые были получены ранее, но положив  $p'_{11} = 0,00$  и  $p'_8 = 0,00$ , делаем приведение  $\Sigma p'$  к 12 и именно исходим из такой системы  $p'$

$$\begin{aligned} p'_1 &= 1,84; \quad p'_2 = 0,39; \quad p'_3 = 1,45; \quad p'_4 = 1,56; \quad p'_5 = 0,35; \\ p'_6 &= 1,91; \quad p'_7 = 1,20; \quad p'_9 = 1,20; \quad p'_{10} = 1,05; \quad p'_{12} = 1,05. \end{aligned}$$

С этими значениями весов и пользуясь табл. 7 условных уравнений, получаем

$$\begin{aligned} 5,88 r_1 + 68,18 r_2 + 27,25 &= 0 \quad ([as] = 101,3) \\ 8684,0 r_2 + 3908,2 &= 0 \quad ([bs] = 12\,660,3) \end{aligned}$$

Отсюда:  $r'_1 = 0,642$ ;  $r'_2 = -0,455$ .

Новые значения  $L_i$  представляются так

$$\begin{aligned} L'_1 &= -1,30; \quad L'_2 = +0,15; \quad L'_3 = +1,14; \quad L'_4 = +1,26; \\ L'_5 &= +0,06; \quad L'_6 = -1,33; \quad L'_7 = -0,78; \quad L'_9 = +0,78; \\ L'_{10} &= +0,64; \quad L'_{12} = -0,64; \end{aligned}$$

$$\sum |L_i| = 8,08; \quad \rho'' = 1,485$$

Веса  $p_i''$  получаются такие:

$$\begin{aligned} p''_1 &= 1,93; \quad p''_2 = 0,22; \quad p''_3 = 1,69; \quad p''_4 = 1,87; \quad p''_5 = 0,10; \\ p''_6 &= 1,98; \quad p''_7 = 1,16; \quad p''_9 = 1,16; \quad p''_{10} = 0,96; \quad p''_{12} = 0,96 \end{aligned}$$

По существу, в смысле практическом, этот второй расчет весов ничего не прибавляется к результатам первого расчета; он лишь более резко выделяет большую ответственность углов 6—4 и 3—1.

В этом расчете весов для нас, конечно, совсем не важны в значениях  $\rho$  сотые доли. Важно прежде всего выделить наиболее ответственные углы, затем просто ответственные углы и, наконец, совсем неответственные углы. Углы в базисной сети должны получить веса соответственно их влиянию на точность определения выходной стороны. Иначе ошибка неответственного угла при выводе выходной стороны будет перекладываться на величины углов ответственных. В нашем примере получает наибольший — около единицы — вес угол 6—4, равный  $30^\circ$  и сильно влияющий на вывод диагонали четырехугольника; далее, значительный вес — около 0,9 — получает угол 3—1 соответственно сравнительной близости его к  $90^\circ$  ( $123^\circ$ ) и заметному отличию углов 2—1, 3—2 от  $90^\circ$ . Углы 9—7 и 12—10 имеют веса уже около 0,55. То обстоятельство, что угол 12—10 близок к  $40^\circ$ , уже заметно ослабило его ответственность, хотя он и приходится при конце длинной диагонали. Все остальные углы, образованные со сторонами четырехугольника той и другой его диагоналями, оказываются неответственными совершенно или очень мало ответственными, как, например, углы 2—1 и 2—3, близкие к  $60^\circ$ .

Очевидно, расчет весов должен делаться довольно приближенно. Кроме указанного, существуют и иные приемы для расчета весов в базисной сети (см. Krüger „Über die Bestimmung der Winkelgewichte in Basisnetzen“).

После расчета весов направлений далее следуют обычно расчет весов углов и составление рабочей программы наблюдений на пунктах базисной сети. Вопрос этот излагается в главе «Об уравнивании триангуляции», и в нем есть свои особенности, так как дело вовсе не сводится к применению формулы:

$$\frac{1}{p_{i \cdot k}} = \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_k},$$

в которой  $p_{i \cdot k}$  — вес угла между направлениями  $i$  и  $k$ . Для пояснения возьмем самый простой случай — наблюдения трех направлений на пункте — с данными их весами  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .

Измерив:

$$\begin{aligned} \text{угол } 1-2 \text{ с весом } \frac{1}{p_{1 \cdot 2}} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \\ \text{, } \quad 1-3 \text{ " } \quad " \quad \frac{1}{p_{1 \cdot 3}} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}, \end{aligned}$$

очевидно, после этого определим уже угол  $2-3$  как разность углов  $1-3$  и  $1-2$ , который получит тогда вес

$$\frac{1}{p_{2 \cdot 3}} = \frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3},$$

т. е. совсем не тот, который определялся для него заданными весами направлений  $2$  и  $3$ .

Дело сводится к составлению такой программы наблюдений на данном пункте, чтобы результат их оказался эквивалентным наблюдению направлений с этого пункта в одном фиктивном приеме с весами их, установленными из расчета выгоднейших весов в базисной сети. Здесь мы сталкиваемся с своеобразной задачей геодезии, которую изложим в главе «Об уравнивании триангуляции».

Вопрос этот еще осложняется тем, что при полевых измерениях, весьма ответственных в базисных сетях, необходимо иметь солидный контроль. Контроль на пунктах наблюдений, т. е. на станциях, достигается тем, что, кроме необходимых, измеряют еще углы добавочные; так, если имеем на пункте четыре направления  $1$ ,  $2$ ,  $3$  и  $4$ , то кроме углов  $1-2$ ,  $1-3$ ,  $1-4$  наблюдают еще углы  $2-3$ ,  $2-4$ ,  $3-4$ ; но понятно, кроме этого контроля, должен еще осуществляться контроль посредством свободных членов условных уравнений в сети. Очевидно, что для осуществления двух видов контроля необходимо установить некоторый, довольно высокий, однако, минимум для числа приемов наблюдений неответственных углов и притом такой, чтобы одновременно вес углов ответственных можно было получить заметно большим.

В практике геодезических работ СССР принимают нередко, что углы неответственных в базисных сетях надо получить, в результате обработки на каждом пункте наблюденного материала, с весом, соответствующим выводу углов из наблюдений в треугольниках триангуляции I класса, т. е. с весом 12, причем ошибка единицы веса соответствует наблюдению направления в одном полуприеме. Углы ответственные наблюдают тогда удвоенным или утроенным числом приемов.

| Пункты   | Углы  | Число приемов |
|----------|-------|---------------|
| <i>B</i> | 1—2   | 8             |
|          | 1—3   | 16 или 24     |
|          | 2—3   | 8             |
| <i>C</i> | 10—11 | 8             |
|          | 10—12 | 24            |
|          | 11—12 | 8             |
| <i>A</i> | 7—8   | 8             |
|          | 7—9   | 16 или 24     |
|          | 8—9   | 8             |
| <i>D</i> | 4—5   | 8             |
|          | 4—6   | 24            |
|          | 5—6   | 8             |

Соответственно этому, в случае четырехугольника (черт. 45), проводят такую программу.

После обработки материала (уравнивания станций) веса углов неответственных будут от 13 до 14, а веса углов ответственных — от 20 до 28. Такое построение программы наблюдений достаточно не соответствует выгоднейшему распределению весов. Представляется, что контроль наблюдений будет достаточным, если взять неответственные углы шестью приемами; углы ответственные, вроде углов 7—9 и 10—12 нашего примера, следует наблюдать 16-ю или 24-мя приемами, а углы наиболее ответственные, например, углы 4—6 и 1—3 (черт. 45), — 24-мя приемами. Тогда неответственные углы формально получают в окончательном выводе вес около 11—12, а наиболее ответственные — 27. Понятно, что в действительности веса углов будут возрастать во всем не в зависимости только от числа приемов. Существенно важно распределять большое число измерений наиболее ответственных углов на значительный промежуток времени. При соображении программы наблюдений на пунктах базисной сети обычно не учитывается задача измерения угла, служащего для передачи наблюденного астрономического азимута на выходную сторону. Этот угол наблюдается особо добавочным числом приемов против значащегося для него в программе, рассчитанного на определение выходной стороны.

Заметим, что если мы подсчитаем вес стороны *CD* (черт. 45), принимая ошибку единицы веса равной  $\pm \frac{0^{\circ},6}{\sqrt{2}}$ , то при выгоднейшем распределении весов получили бы среднюю ошибку этой стороны  $1 : 421\ 670$  вместо прежней  $1 : 361\ 820$ . Заметим еще, что если в базисной сети мы в качестве независимо наблюдаемых величин будем принимать не направления, а углы, то вес выходной стороны получим несколько большим. Объяснение этому для ромбических или близких к ним по форме сетей лежит, во-первых, в том, что величина  $\frac{D \cdot C}{D}$  при обработке базисной сети с измеренными в ней углами менее, чем при обработке сети с измеренными в ней направлениями; во-вторых, в том, что при независимо измеренных углах выходная сторона в ромбической сети определяется как сумма отрезков, выводимых независимо из соответ-

ствующих отдельных треугольников базисной сети. Конечно, Гельмарт не случайно в своей теории базисных сетей, использованной в § 24, вводил именно углы, а не направления. К мысли использования при расчете выгоднейшего распределения весов не направлений, а углов приходит и Крюгер. Все это приводит к выводу, что видимо и в программе наблюдений в базисной сети — ромбической или близкой к ней, нужно ориентироваться на получение в результате полевых работ с соответствующей точностью независимых друг от друга углов, например в применении к черт. 45 углов 10—12, 4—6, 7—8, 8—9, 7—9, 3—2, 2—1, 1—3, причем углы 1—3 и 7—9 получают значение только контрольное. Во всяком случае, здесь мы подошли к вопросу, который подлежит дальнейшему исследованию.

---

## Глава VI

### ИЗМЕРЕНИЕ БАЗИСОВ

#### § 26. Старые нормальные меры

В основе всех линейных измерений, в том числе и измерений длин базисов, лежат некоторые линейные единицы, физически реализованные, называемые нормальными мерами или эталонами; они хранятся в благоприятных условиях и служат для установления путем сравнений с ними истинных длин рабочих мер, непосредственно употребляемых при измерении базисов. Нормальные меры делаются в настоящее время исключительно в виде жезлов металлических или из плавленого кварца; по своему устройству они делятся на концевые и штриховые. Длиной концевой нормальной меры является расстояние между плоскостями, нормальными к оси жезла и соприкасающимися с конечными точками его; длина штриховой нормальной меры есть расстояние по оси жезла между двумя штрихами, нанесенными у концов жезла на верхней грани его, перпендикулярно к оси жезла.

Надлежаще изготовленные нормальные меры являются достоянием только самого последнего времени, начиная с конца прошлого столетия. Чем большей точности достигали в геодезических измерениях, чем выше становились требования и практической жизни, и науки к результатам геодезических работ, тем все более и более должна была повышаться точность определения длин нормальных мер, выражаемых в одной и той же основной единице длины, и тем все более возрастили требования к устранению всякой неопределенности из понятия этой основной единицы длины.

Первой по времени нормальной мерой следует считать так называемый «Перуанский тоаз», изготовленный в Париже в 1735 г. и служивший для сравнения с ним жезлов при измерении базисов в знаменитом градусном измерении в Перу; этот тоаз представляет собой плоскую железную линейку, на концах которой сделаны перпендикулярны к ее оси и доходящие до середины ее ширины срезы; принималось, что расстояние между плоскостями упомянутых срезов представляет собою длину, равную тоазу ( $1,94903632\text{ м}$ ) при температуре  $13^{\circ}\text{ R}$ , или  $16^{\circ}, 25^{\circ}$  (это средняя температура измерения базисов в Перу). Очевидно, Перуанский тоаз есть мера концевая и притом изготовленная сравнительно грубо. Перуанский тоаз и сделанные с него впоследствии копии (Борда-во Франции, Струве -- в России, так называемый тоаз Фортена 1821 и Бесселя -- в Германии) легли в основу большинства геодезических работ, исполненных в Европе до начала второй половины прошлого столетия.

Из других «старых» нормальных мер следует упомянуть так называемый «архивный» метр, изготовленный около 1800 г., т. е. в период создания метрической системы мер и хранящийся постоянно в Париже. Он представляет собой концевую меру — платиновый жезл прямоугольного сечения (25 мм ширины и 4 мм толщины), расстояние между концевыми плоскостями которого при 0° С (температура тающего химически чистого льда) и есть длина одного метра.

Русские геодезические измерения, исполненные до начала второй половины прошлого столетия, отнесены к двойному тоазу, изготовленному по заказу Струве в 1827 г. из кованого железа с квадратным сечением в 1½ дюйма и с концами в виде цилиндриков с выпуклыми полированными конечностями (черт. 91). Эта русская мера — двойной тоаз  $N$  — хранится всегда в Пулковской обсерватории и помещается в деревянном футляре, подпертая в двух точках, отстоящих на ½ тоаза от концов меры; длина ее равна двум тоазам при температуре +13° R (по определению межевого инженера А. П. Соколова, бывшего вице-директором Пулковской обсерватории, длина  $N = 3,898162$  м). Хотя двойной тоаз  $N$  — мера концевая, но она изготовлена весьма тщательно, и благодаря тому, что рабочие меры, которыми измерялись до последнего времени базисы русских первоклассных триангуляций, имели совершенно такое же устройство, как и этот двойной тоаз  $N$ , — сравнение их длин с его длиной выполнялось всегда с высокой степенью точности; вообще следует отметить, что выражение длии всех русских базисов в длине «двойного тоаза» осуществлено с высокой точностью.



Черт. 91

## § 27. Требования, предъявляемые к нормальным мерам

Указанные «старые» нормальные меры имеют два существенных недостатка: 1) они ведут свое происхождение от грубо изготовленной меры — Перуанского тоаза и 2) являются мерами концевыми. Кроме того, они имеют в разных государствах весьма разнообразное устройство, что затрудняет точное сравнение их между собой. Концевые меры, несомненно, хуже штриховых по своему устройству. Сравнение концевых мер между собой основано на принципе контакта и потому меры эти могут со временем стачиваться и тем изменять свою длину; штриховые меры сравниваются между собой оптическим путем, что максимально обеспечивает неизменность их длин. С другой стороны, само обозначение концов меры страдает некоторой неопределенностью в концевой мере, поскольку понятие «оси» жезла в этом случае остается в известной мере неопределенным; обстоятельство это, легко видеть, вредно влияет на результаты сравнения между собой длин концевых мер не только разного, но и одинакового устройства.

Даже в лучших концевых мерах, как, например, двойной тоаз Струве, указанное обстоятельство довольно определенно чувствуется, и потому выпуклым поверхностям, ограничивающим концы жезла, придают такую кривизну, чтобы влияние изменения положения «оси» в теле жезла на его длину было минимальным. Можно показать (см. К. Кларк, Геодезия, в переводе В. Витковского, СПБ, 1890, стр. 170), что радиус кривизны выпуклых поверхностей в этом случае должен равняться

длине жезла, т. е. центры кривизны этих выпуклых сферических поверхностей должны лежать на противоположных концах жезла. В штриховой мере «ось» жезла награвирована на зеркально отполированной поверхности его, и тем самым устраняется всякая неопределенность в понятии длины штриховой меры. Указанные причины заставляют отдавать определенное предпочтение штриховым мерам.

Каким же условиям должны удовлетворять современные нормальные штриховые меры?

В отношении самого устройства мер можно указать следующие основные требования.

1. Металл и вообще материал, из которого сделан жезл, должен быть так выбран и подвергнут такой механической и термической обработке, чтобы он отличался возможно большей молекулярной устойчивостью, так называемой стабильностью; только при этом условии можно рассчитывать на хорошую сохранность длины мер во времени. Кроме того, материал этот должен хорошо противостоять коррозии (не окисляться и пр.); хорошо шлифоваться; быть пригодным для нанесения на его поверхность тонких штрихов; быть достаточно твердым, чтобы при напесении делений поверхность его не деформировалась, но и не избыточно твердым, что затруднит обработку жезла; иметь большой модуль упругости и хорошую теплопроводность; иметь возможно более малый (особенно в рабочих мерах) и устойчивый коэффициент температурного расширения; иметь возможно меньшую магнитострикцию (деформация при перемене напряжения магнитного поля).

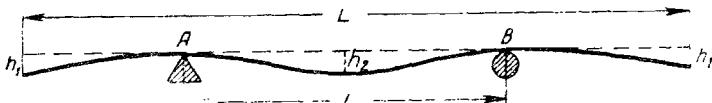
Следует иметь в виду, что при изготовлении нормальных мер редко употребляют какой-либо металл в химически чистом виде как потому, что освободить его от некоторых примесей бывает чрезвычайно трудно, так и потому, что наличие некоторых примесей, например, углерода, кремния, марганца, хрома и пр., в небольшом количестве, иногда в доле процента, увеличивает полезные свойства металлов. Иногда для получения нужных свойств берутся сплавы из двух или более металлов, например, иридевая платина, инвар, платинит и пр. (см. ниже).

2. Размеры и форма жезла должны быть таковы, чтобы нормальная мера была удобна в употреблении и отвечала своему назначению; имела при данной длине меньший вес и при данных длине и площасти поперечного сечения возможно большее сопротивление на прогиб; имела большую поверхность соприкосновения с окружающей средой, что обеспечивает более скорое принятие жезлом температуры этой среды; позволяла наносить конечные и промежуточные штрихи нормальной меры на нейтральной поверхности жезла (т. е. на слое, не подвергающемся растяжению или сжатию при прогибе жезла).

В отношении условий хранения мер можно указать следующие основные требования.

3. Нормальные меры должны быть хорошо предохранены от резких изменений температуры, от толчков, тряски и пр. Поэтому их нужно хранить всегда в специальных помещениях с двойными, хорошо изолированными стенами, иногда достаточно углубленными в землю, т. е. в таких помещениях, внутри которых ход температуры воздуха чрезвычайно медленный, а годовая амплитуда колебаний температуры ничтожна (например, не превышает 1—2°). Поэтому же нормальные меры не следует, по возможности, перевозить. Для обеспечения нормальных мер от возможных случайностей они должны находиться в двойных футлярах.

4. Нормальная мера должна покояться всегда на двух симметрично расположенных опорах, из которых одна — призма, другая — ролик, позволяющий жезлу свободно удлиняться или укорачиваться в связи с ходом температуры (черт. 92). Первоначально опорные точки располагались на расстоянии  $l = \pm 0,5 L$  друг от друга. Бессель рассчитал расстояние между опорами так, чтобы нормальная мера  $L$  укоротилась



Черт. 92

в результате прогибов жезла в середине и на концах (под влиянием веса жезла) минимально, и получил

$$l = 0,55938 L; \quad (101)$$

на этом расстоянии и стали располагать с того времени опорные точки  $A$  и  $B$ , получившие название «бесселевых точек». В самое последнее время расстояние  $l$  увеличили, доведя его до

$$l = 0,57166 L, \quad (102)$$

благодаря чему концы жезла припали практически горизонтальное положение. Так, для 3-м инварного жезла  $G_{14}$ , обслуживающего Ленинградский 24-м компаратор, прогибы па концах составляют всего  $h_1 = 0,074$  микрона (рис. 92), тогда как в середине прогиб  $h_2 = 227,71$  микрона. Обстоятельство это имеет чрезвычайно большое значение, так как облегчает фокусировку микроскопов компаратора, а главное, — в значительной мере способствует улучшению освещенности и видимости крайних штихов нормальной меры, что имеет существенное влияние на точность сравнения нормальных мер. (Подробности по этому вопросу см. А. Адамович, «Влияние упругих деформаций геодезических эталонов на точность измерения их», «Геодезист», 1933, № 7 — 8, стр. 14 — 27.)

## § 28. Современные нормальные меры

Необходимость соединения трансгуляций разных государств в одно целое, необходимость тщательных исследований в области вопроса об изменяемости длии мер, общее повышение требований к результатам геодезических работ — вот те причины, которые побудили во второй половине 19 столетия пересмотреть вопрос о нормальных мерах и привели в 1869 г. Петербургскую Академию Наук к убеждению о необходимости создания новых нормальных мер. В 1875 г., на основании этой мысли Академии Наук и последующей ее разработки в английских научных обществах, 16 государств Европы заключили конвенцию, в силу которой изготовление новых нормальных мер было поручено учрежденному в Париже Международному бюро мер и весов (Bureau international des poids et mesures). После ряда специальных исследований Международное бюро изготовило нормальные меры из сплава платины (90%) и иридия (10%), сплава, обладающего очень значительной молекулярной устойчивостью, большой твердостью и упругостью, исключительной со противляемостью коррозии и, по сравнению с чистой платиной, — значи-

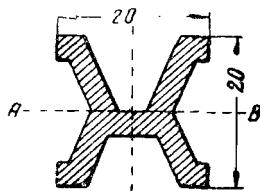
тельно меньшей пористостью. Эти нормальные меры имеют вид жезла длиной в 1,02 м с поперечным сечением в виде буквы X, вписанной в квадрат со стороной в 20 мм (поперечное сечение жезла в натуральном размере приведено на черт. 93). Удельный вес сплава 21,5; вес жезла 3,3 кг. На неей тральной поверхности АВ жезла, на каждой из зеркально отполированных площадок у обоих его концов нанесены: две параллельные черты вдоль оси жезла на расстоянии 0,2 мм

друг от друга (воображаемая средняя линия между этими параллельными чертами и есть «ось» нормальной меры) и три параллельных штриха толщиной сколо 8 $\mu$ , перпендикулярных к оси жезла, на расстояниях 0,5 мм друг от друга. Расстояние по оси жезла между двумя средними поперечными штрихами на левом и правом концах жезла и представляет собой длину нормальной меры. Жезл опирается всегда на две опоры, расстояние между осями которых удовлетворяет уравнению (101).

Описанные нормальные меры называются метрами-прототипами. Их было изготовлено 31. Сравнение длин метров-прототипов между собой и с длиной «архивного» метра было исполнено чрезвычайно точно, со средней ошибкой, меньшей 0,2 $\mu$ , или 1 : 5 000 000; это явилось следствием полного однообразия их устройства и того, что эти меры штриховые. Длина прототипа № 6 при 0° оказалась в точности равной длине «архивного» метра Франции. Поэтому метр № 6 был выделен, назван международным прототипом, и расстояние между его поперечными штрихами при температуре 0° и представляет собой реально ту меру, которую в настоящее время называют метром. Этот международный метр-прототип всегда хранится в Париже в Международном бюро мер и весов. На долю России достались метры-прототипы № 11, хранящиеся в Академии Наук СССР, и № 28, хранящийся во ВНИИМ (Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии, быв. Главная палата мер и весов) в Ленинграде.

Каждый метр-прототип хранится в несгораемом шкафу в футляре цилиндрической формы из букового дерева, выложенном внутри бархатом; футляр этот в свою очередь вкладывается в медную трубку с навивчивающейся на нее, запираемой замком крышкой. Из других метров-прототипов следует назвать № 26, принадлежащий Международному бюро мер и весов и являющийся его рабочим эталоном.

Декретом Совета народных комиссаров от 14 сентября 1918 г. о введении у нас метрической системы мер основным метром СССР признан упоминавшийся выше метр-прототип № 28. «Метрическая конвенция», признанная СССР (постановление СНК от 21 июля 1925 г.), предусматривает периодическое сличение всех метров-прототипов с международным прототипом. IV Метрологическая конференция (в 1907 г.) постановила делать эти сличения каждые 25 лет и начало этой работы приурочила к осени 1914 г. К сожалению, империалистическая война затянула выполнение этой работы; только на VII Метрологической конференции, состоявшейся в 1927 г., были доложены результаты этого сравнения (см. доклад об этой работе в «Comptes rendus des Séances de la Septième Conférence générale des poids et mesures réunie à Paris en 1927»), показавшие, что все сравнившиеся метры-прототипы сохранили свою длину, и только метр № 26 удлинился к 1925 г. на 0,38 $\mu$ ,



Черт. 93

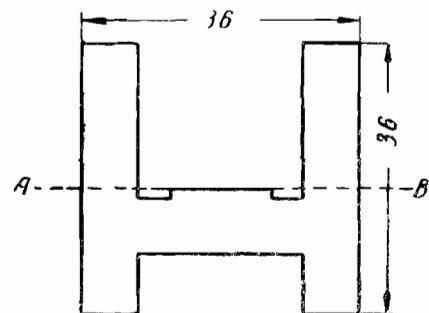
что, как указано на стр. 42 доклада, могло произойти в период времени между 1892 г. и 1901 г., и, повидимому, объясняется изменением конфигурации штрихов эталона в процессе чистки разделенной зеркальной поверхности этого жезла. К сожалению, метры-прототипы СССР, в числе метров-прототипов немногих других государств, в этом сравнении не принимали участия.

Из нормальных мер СССР упомянем еще платино-иридевую «полусажень»  $H_4$ , изготовленную из сплава одной плавки с метрами-прототипами и имеющую одинаковое с ними устройство; длина этого жезла 1089,7 мм. На нейтральной поверхности его нанесены две системы штрихов, дающие длины метра, аршина и ярда. Этalon этот хранится во ВНИИМ в Ленинграде.

Сравнение между собой длии метров трех основных нормальных мер Союза — № 28, № 11 и  $H_4$ , выполненное ВНИИМ в 1930 г., показало полную неизменность отношений их длии за 40 лет.

К нормальным мерам, следующим по классу за прототипами и имеющим значение в геодезическом производстве СССР, относятся комплексы однотипных метровых и трехметровых инварных и платинитовых жезлов, обслуживающих 24-м компараторы при определении длии 24-м инварных проволок. Из них следует особо упомянуть 3-м платинитовый жезл  $H_{15}$ , находящийся во ВНИИМ, и 3-м инварные жезлы:  $G_{14}$ , обслуживающий Ленинградский 24-м компаратор, и № 541, обслуживающий Московский 24-м компаратор (при МИИГЛК). Оба последних жезла хорошо изучены, ежегодно сравниваются между собой и с нормальными метрами во ВНИИМ (через посредство жезла  $H_{15}$ ); к ним и отнесены непосредственно измерения почти всех первоклассных базисов в СССР за последние 30 лет.

Указанные нормальные платинитовые и инварные меры имеют Н-образное поперечное сечение, вписанное в квадрат со стороной около 26 мм в однометровых жезлах, и 36 мм — в трехметровых. На черт. 94 изображено в натуральном размере поперечное сечение 3-м инварного жезла № 541. На нейтральной поверхности АВ нанесены: а) «ось» жезла — в виде биссектора двух параллельных линий на расстоянии 0,2 мм друг от друга (нанесены только параллельные линии); б) по 11 поперечных штрихов у каждого конца жезла, перпендикулярно к оси его, на расстоянии 0,2 мм друг от друга, расстояние по оси жезла между средними штрихами (около среднего штриха у левого конца жезла подписьана цифра «0» и у правого — цифра «3») есть длина жезла. Назначение миллиметровых шкал по концам жезла — служить для определения тип микрометров микроскопов компаратора; в этих целях промежутки между каждой парой смежных штрихов шкал определены с высокой точностью специальными исследованиями. Жезл № 541 лежит на двух опорах (призма и ролик), находящихся на расстоянии 1800 мм друг от друга, что на 51 мм больше расстояния в 1749 мм, рассчитанного по формуле (101); он помещается в деревянном футляре с прорезями для визирования на концевые штрихи жезла (прорезы закрываются



Черт. 94

выдвижными крышками) и окнами, забранными стеклами, для отсчетов температуры. Температура жезла отсчитывается с помощью двух точных термометров, расположенных на нейтральной поверхности жезла примерно в расстоянии  $\frac{1}{4}$  длины жезла от его концов; цена наименьшего деления термометра  $0^{\circ}0,2$  С.

В последнее время нормальные меры стали изготавливать также из плавленого кварца, обладающего большой стабильностью и имеющего чрезвычайно малый коэффициент расширения, близкий к таковому же инвара, а именно — около  $0,4 \cdot 10^{-6}$ . Плавленый кварц обладает целым рядом прекрасных метрологических свойств: по стабильности он не уступает платине, но неизмеримо дешевле последней; очень тверд, прекрасно полируется, совершенно не окисляется; температурный коэффициент его в 20 раз меньше, чем у платины; легко цианист и обрабатывается, очень легок (удельный вес около 2,5); единственный недостаток кварца тот, что при современном состоянии техники он не может быть приведен в жидкое состояние, а потому из него нельзя получить куски произвольных размеров и формы; хрупкость кварца не имеет особого значения, поскольку нормальные меры и без того требуют бережного обращения.

На изготовление жезлов идет непрозрачный кварц, получаемый из кварцевого песка путем нагрева его в электропечах; сырье имеет вид трубок, полых внутри, или сплошных цилиндрических стержней. Для ослабления вредных упругих напряжений кварцевый стержень должен быть подвергнут особой термической обработке — обжигу. Соответственно сказанному нормальные меры из плавленого кварца имеют вид или полых трубок с наваренными концами или цилиндрических стержней. Концевые меры, применяющиеся теперь при интерференционных методах компарирования или определения расстояний, имеют на концах жезла цилиндрики с выпуклыми поверхностями (сфера большого радиуса); в притиховых мерах концы жезла срезаются до половины поперечного сечения и на образовавшихся площадках, зеркально отполированных и совпадающих с нейтральной поверхностью жезла, пансиются обычным образом «ось» жезла и необходимые поперечные копечные штрихи с добавочными шкалками при них.

### § 29. «Уравнение» нормальной меры

Если длина нормальной меры была тщательно определена в некоторый момент, то для получения ее длины с той же точностью в некоторый другой момент необходимо учитывать следующие факторы, влияющие на определение действительной длины меры: 1) непрерывные изменения длины (*changements progressifs*), вызываемые изменениями молекулярного строения вещества во времени; 2) случаи изменения длины в результате резких колебаний температуры, толчков, тряски при перевозках и пр., что также приводит к изменениям молекулярного строения вещества; 3) изменения длины механического порядка, обусловленные гнущениями от толчков, длительной местной нагрузкой на жезл, изменениями в расположении его на подпорах; 4) температурные изменения, связанные с ходом температуры в окружающей жезл среде; 5) температурное последействие (в инварных мерах), заключающееся в том, что жезл, приняв температуру окружающей среды, имеет длину, не вполне соответствующую этой температуре, и получает в течение некоторого времени дополнительное изменение в длине, вызванное предшествующими температурными его состояниями.

Влияние первой причины или пренебрсаемо мало в нормальных мерах высоко устойчивого молекулярного строения, например, из иридевой платины, плавленого кварца, или учитывается достаточно частым сравнением с мерами этого типа. Влияние второй причины не имеет места в нормальных мерах, хранящихся в надлежащих условиях; в рабочих мерах оно учитывается путем сравнения рабочих мер с нормальными до и после полевых работ. То же можно сказать и о влиянии третьей причины, если с мерой бережно обращаться и держать ее на подпорах всегда единообразно. Влияние пятой причины пренебрегаемо в нормальных мерах, хранящихся почти при постоянной температуре, но имеет определенное значение для рабочих мер и должно учитываться в методике наблюдений. Влияние четвертой причины учитывается введением соответственных температурных поправок.

Если длина нормальной меры  $l_t$  есть некоторая функция ее температуры  $t$  и при начальной температуре  $t_0$  имеет значение  $l_0$ , то имеем соотношение

$$l_t = f [l_0 + (t - t_0)].$$

Раскладывая правую часть по строке Тейлора по степеням приращения аргумента и ограничиваясь вторыми степенями этого приращения, имеем

$$l_t = l_0 + \left( \frac{df}{dt} \right)_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)_0 \cdot (t - t_0)^2.$$

Вынося  $l_0$  за скобки и обозначая коэффициенты при степенях переменного через  $\alpha$  и  $\beta$ , имеем

$$l_t = l_0 [1 + \alpha (t - t_0) + \beta (t - t_0)^2], \quad (103)$$

или

$$l_t = l_0 + \alpha \cdot l_0 (t - t_0) + \beta \cdot l_0 (t - t_0)^2. \quad (104)$$

Если  $t_0 = 0$ , то формулы (103) и (104) примут более простой вид

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t + \beta t^2) \quad (105)$$

и

$$l_t = l_0 + \alpha l_0 t + \beta l_0 t^2. \quad (106)$$

Очевидно, второй и третий члены формул (103) — (106), поясняющих название «уравнений» нормальной меры, являются поправками к длине меры за переход от температуры  $t_0$  к температуре  $t$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  называются температурными коэффициентами, или коэффициентами расширения соответственно линейным и квадратическим. Если квадратический коэффициент мал и колебания температуры невелики, то третьим членом формулы (104) пренебрегают, и уравнение нормальной меры принимает вид

$$l_t = l_0 + \alpha l_0 (t - t_0) = l_0 [1 + \alpha (t - t_0)]. \quad (107)$$

Очевидно, формула (107) будет давать тем более точный результат, чем ближе температура  $t_0$  к средней температуре наблюдений.

Переписав уравнение (103) в несколько иной форме

$$l_t = l_0 \{1 + [\alpha + \beta (t - t_0)] (t - t_0)\}$$

и сопоставив с (107), увидим, что  $\beta(t - t_0)$  есть поправка к  $\alpha$  за переход от  $t_0$  к  $t$ , а квадратический член есть поправка к длине меры за изменение линейного коэффициента  $\alpha$  расширения. Очевидно, если в интервале температур от  $t_0$  до  $t$  мы желаем пользоваться упрощенной формулой (107), то нужно брать средний для этого интервала линейный коэффициент  $\alpha'$ , вычисляемый по формуле

$$\alpha' = \alpha + \frac{\beta}{2} (t - t_0). \quad (108)$$

Уравнение (107) примет тогда вид

$$l_t = l_0 + \alpha' \cdot l_0 (t - t_0) = l_0 [1 + \alpha' (t - t_0)]. \quad (109)$$

В базисных измерениях, если коэффициент  $\beta$  рабочей меры велик, нужно учитывать его влияние, пользуясь формулой (109) и определяя  $\alpha'$  для средней температуры каждой секции базиса по формуле (108).

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются специальным исследованием. Очевидно, если длина  $l_t$  нормальной меры будет определена для  $n$  разных температур, расположенных в пределах изучаемого температурного интервала, причем  $n > 3$ , то будем иметь  $n$  уравнений вида

$$\begin{aligned} l_{t_1} &= l_0 + \alpha \cdot l_0 (t_1 - t_0) + \beta \cdot l_0 (t_1 - t_0)^2 \\ l_{t_2} &= l_0 + \alpha \cdot l_0 (t_2 - t_0) + \beta \cdot l_0 (t_2 - t_0)^2 \\ l_{t_n} &= l_0 + \alpha \cdot l_0 (t_n - t_0) + \beta \cdot l_0 (t_n - t_0)^2 \end{aligned}$$

с тремя неизвестными:  $l_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Решая их по способу наименьших квадратов, найдем эти неизвестные и их средние ошибки, причем  $\alpha$  и  $\beta$  будут верны только для исследуемого интервала температуры. Следует иметь в виду, что температурные коэффициенты меняются с течением времени для таких малоустойчивых сплавов, как инвар, и, следовательно, подлежат периодическим определениям; в нормальных мерах, даже изготовленных из литья одной плавки и подвергнутых одинаковой термической и механической обработке, коэффициенты расширений все-таки различаются между собой. Уравнения упоминавшихся ранее метров-прототипов, определенные Международным бюро мер и весов в 1889 г., таковы (с ошибкой  $\pm 0,2 \mu$ ):

$$\begin{aligned} l_6 &= 1 \text{ м} + 0,0 \mu + 8,651 \mu \cdot t + 0,001 \mu \cdot t^2 \\ l_{11} &= 1 \text{ м} - 0,5 \mu + 8,650 \mu \cdot t + 0,001 \mu \cdot t^2 \\ l_{26} &= 1 \text{ м} + 0,9 \mu + 8,647 \mu \cdot t + 0,001 \mu \cdot t^2 \\ l_{28} &= 1 \text{ м} + 0,5 \mu + 8,650 \mu \cdot t + 0,001 \mu \cdot t^2 \end{aligned}$$

Коэффициент  $\alpha$  для всех 31 метров-прототипов колебался в пределах от  $8,632 \mu$  (метр № 4) до  $8,674 \mu$  (№ 29), т. е. на величину

$$\alpha_{29} - \alpha_4 = 0,042 \cdot 10^{-6}.$$

Повторные исследования дали: для метра № 26 в 1925 году (Международное бюро мер и весов)  $\alpha_{26} = 8,592 \cdot 10^{-6}$ , т. е. изменение с 1889 года достигло величины  $-0,045 \cdot 10^{-6}$ , а для метров № 11 и № 29 в 1932 году (ВНИИМ)

$$\alpha = +8,61 \cdot 10^{-6}; \quad \beta = +0,0015 \cdot 10^{-6}.$$

Так как метры-прототипы хранятся в особо благоприятных температурных условиях и не подвергаются никаким перевозкам, то длины метров-прототипов следует считать изменяющимися лишь вследствие четвертой причины. Учет влияния этой причины при хорошо известных  $\alpha$  и  $\beta$  сводится к возможно точному определению  $t$ , которое в свою очередь зависит: от способности меры быстро и равномерно принимать окружающую температуру, от устойчивости этой температуры (быстроты ее хода), от способа измерения температуры меры. Следует иметь в виду, что телу жезла всегда нужно некоторое время, чтобы принять температуру окружающей среды, и потому при некотором ходе температуры температура жезла будет несколько ниже (при повышении температуры) или выше (при понижении ее), чем температура этой среды; то же самое будет происходить и с термометром, лежащим на жезле, а так как масса термометра и жезла и их теплопроводности различны, то показания термометра будут отличаться от действительной температуры жезла (даже если термометр будет вделан в тело жезла). Все это создает чрезвычайные трудности в точных метрологических наблюдениях.

Из формулы (104), пренебрегая квадратическим членом, имеем следующую зависимость ошибки  $dl_t$  в длине меры от ошибки  $dt$  температуры

$$\frac{dl_t}{l_t} = \alpha \cdot dt. \quad (110)$$

Полагая для иридневой платины  $\alpha = 8,6 \cdot 10^{-6}$ , имеем, что для определения  $l_t$  по уравнению (104) с ошибкой, меньшей одной миллионной, температура меры должна быть определена с ошибкой  $dt$ , не превышающей  $0^{\circ},1$ ; для решения той же задачи с ошибкой, меньшей одной пятимиллионной,  $dt$  должно быть менее  $0^{\circ},02$ . Другими словами, задача определения длины меры-прототипа с ошибкой, меньшей  $1 : 5\,000\,000$ , является сложной и трудной. Только при условии погружения нормальной меры при определении ее длины в закрытую ванну, наполненную водой, и при условии достаточного изолирования наблюдателей можно достичь определения температуры меры с ошибкой в сотую долю градуса. Можно определенно утверждать, что ошибка учета температуры меры есть главный источник погрешности при точном определении длины меры. Отсюда понятно стремление переходить к нормальным мерам с малым температурным коэффициентом. Так, для плавленого кварца, у которого  $\alpha = 0,4 \cdot 10^{-6}$ , при точности сравнения до  $1 : 5\,000\,000$  температуру нужно знать с ошибкой не более  $0^{\circ},5$ . Для рабочих мер, особенно для мер, принимающих непосредственное участие в измерении базисов, требование малого температурного коэффициента совершение необходимо, так как ход температуры во время полевых измерений значителен, а условия для определения температуры меры несравненно труднее.

### § 30. Световые эталоны

Из предыдущего изложения видно, что даже самая совершенная нормальная мера непрерывно изменяет свою длину и свои постоянные (например, температурные коэффициенты). Поэтому в конце прошлого века появилась мысль за единицу длины принять длину световой волны, например, красной линии спектра кадмия. Тогда, очевидно,

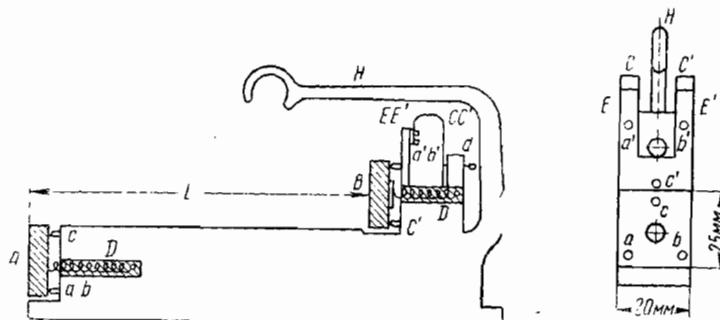
установив определенное соотношение между длинами международного метра-прототипа и световой волны, мы сообщаем установленному таким образом «метру» такое же постоянство во времени, каким обладает и световая волна. Кроме того, отпадает вопрос о регулярном сравнении между собой метров-прототипов, поскольку в любой момент можно проконтролировать длину исходного метра-прототипа данной страны посредством световых волн.

Первое по времени определение было исполнено Майкельсоном и Бенуа в Международном бюро мер и весов в Париже в 1892—1893 гг. (A. Michelson, *Détermination expérimentale de la valeur du mètre en longueurs d'ondes lumineuses*, „Travaux et Mémoires“, Tome XI, Paris 1895); более точные измерения, исполненные там же в 1905—1906 гг. Бенуа, Фабри и Перо (J. R. Benoit, Ch. Fabry et A. Perot, *Nouvelle détermination du rapport des longueurs d'onde fondamentales avec l'unité métrique*, „Travaux et Mémoires“, Tome, XV, Paris 1913), дали следующий результат:

$$1 \text{ м} = 1553164,13\lambda; \quad \lambda = 0,64384696 \mu,$$

где  $\lambda$  — длина волны красной линии кадмия при  $15^\circ \text{C}$  (по водородному термометру) и при  $760 \text{ мм}$  давления в абсолютно сухом воздухе; этот результат имеет вероятную ошибку в  $1 : 13\,300\,000$  или среднюю в  $1 : 9\,000\,000$ . Указанная величина  $\lambda$  носит название «числа Фабри и Перо». Окончательная фиксация этого или иного «числа» задерживается выжиданием результатов новых измерений, выполняемых Сирсом и Баррелем (J. E. Sears и H. Vagell) в Теддингтоне и Кёстерсом (W. Kösters) в Берлине.

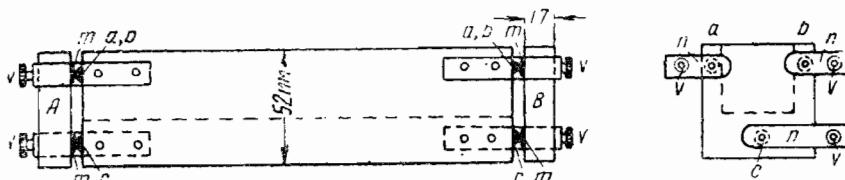
При интерференционных методах определения длин исходным эталоном является длина волны какого-либо монохроматического света, однако, в процессе работы нужны промежуточные эталоны. Финский физик Вейселе (Y. Väisälä) употреблял для этой цели концевую нормальную меру длиной в  $1 \text{ м}$  из плавленого кварца в виде трубы диаметром в  $20 \text{ мкм}$ , подпёртой в бесселевых точках, имеющей на концах



Черт. 95

две плоско-выпуклые кварцевые линзы с зеркально отполированными поверхностями; радиусы кривизны поверхностей  $0,5 \text{ м}$  на одном конце и  $1,0 \text{ м}$  — на другом; конец оси жезла на этой второй поверхности отмечен посеребренной точкой. Такой жезл очень удобен для точного определения расстояния между двумя параллельными друг другу зеркалами.

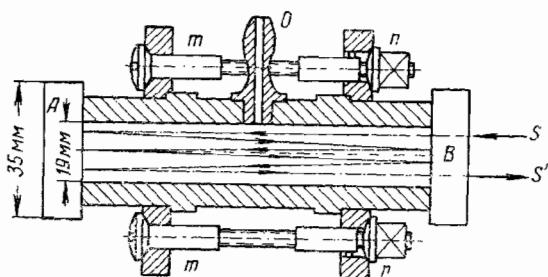
между которыми отражается пучок света. Майкельсон употреблял концевой эталон, ограниченный посеребренными поверхностями двух зеркал, установленных на параллельность оптическим путем. Устройство эталона видно на черт. 95: зеркала  $A$  и  $B$ , передние грани которых посеребрены, укреплены на бронзовом стержне (сечение  $20 \times 25$  мм); они прижаты пружинками  $D$  к выпуклым и отшлифованным поверхностям трех пуговок  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ; действием исправительных винтов  $d$  на стальные пружины  $C$  и  $C'$  изгибаются плечики  $E$  и  $E'$  и через пуговки  $a'$  и  $b'$  очень чувствительно юстируют положение зеркала  $B$  на параллельность с  $A$ ;  $H$  — рукоятка для переноса эталона.



Черт. 95

Бенуа, Фабри и Перо употребляли эталоны, устройство которых показано на схематическом черт. 96: зеркала  $A$  и  $B$  внутренними посеребренными поверхностями опираются на три пуговки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , укрепленные на концах U-образных инварных жезлов ( $52 \times 52$  мм); пружины  $n$ , связанные с телом жезла, при помощи винтов  $v$  прижимают зеркала к пуговкам; изменения давление пружин  $n$  через зеркала  $A$  и  $B$  на прокладки  $m$  из красной меди, находящиеся между зеркалами и пуговками, можно слегка изменять взаимное положение зеркал и тем юстировать их положение на параллельность.

В позднейших исследованиях Сирса и Барреля (J. E. Sears and H. Barrell, A new Apparatus for determining the Relationship between wave-lengths of light and the fundamental standards of length, London 1932) употреблялись концевые эталоны в виде герметически закрытых инварных трубок (черт. 97, схема) с притертymi на концах на молеку-



Черт. 97

лярный контакт зеркалами  $A$  и  $B$ , внутренние поверхности которых посеребрены. Инварные тяжи  $m$  в числе четырех, симметрично расположенные вдоль наружных степок жезла, позволяют при помощи гаек  $n$  юстировать взаимное положение зеркал на параллельность и длину

эталона. Канал о позволяет создавать в эталоне нужные давления или вакуум. Следует иметь в виду, что в эталонах последних двух типов внутренние поверхности зеркал посеребрены слабо, а потому луч света может как проходить через зеркала, так и отражаться от их посеребренных поверхностей, как это указано, например, на черт. 97.

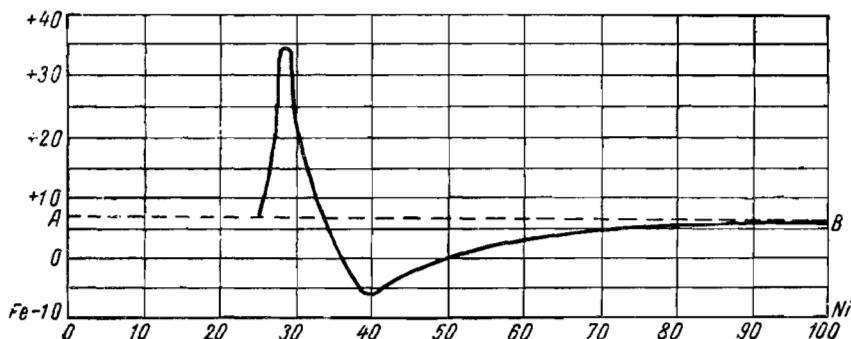
Три последних типа эталонов носят название световых эталонов. Для измерения длины метра-прототипа Майкельсон, а также Бенуа, Фабри и Перо употребляли эталоны длиной в 6,25 и 12,5 см, 25 и 100 см; длина первого эталона определялась непосредственно в длинах световых волн и передавалась далее на метровый эталон путем последовательного удвоения. Световые эталоны, как мы видим, не имеют устойчивости обычных эталонов и играют только вспомогательную роль в интерференционных методах определения расстояний или сравнения мер между собой.

### § 31. Инвар и некоторые другие сплавы

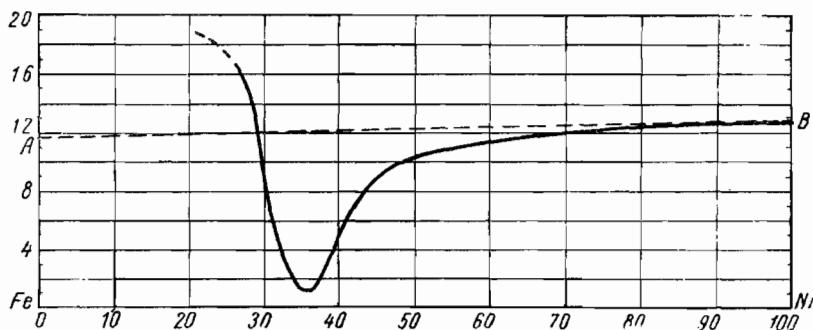
Инвар — сплав, состоящий примерно из 36% никеля (*Ni*) и 64% железа (*Fe*) с незначительными примесями углерода (*C*), кремния (*Si*), хрома (*Cr*), марганца (*Mn*), вольфрама (*W*), ванадия (*V*) и пр., — всего не более 0,5%. В результате более чем 30-летних исследований инвара, Гильом — директор Международного бюро мер и весов — всесторонне выяснил свойства этого замечательного сплава. Он обладает рядом прекрасных метрологических свойств: совершенство почти неокисляем; достаточно тверд, но не вызывает особых затруднений при обработке; прекрасно полируется; имеет больший модуль упругости ( $E = 15\ 500 \text{ кг}/\text{м}^2$ , в два раза выше, чем у иридевой платины) и хорошую теплопроводность. Инвар — светлый металл, благодаря чему проволоки и ленты из него малого поперечного сечения, применявшиеся в базисном приборе Елерина, не могут иметь температуру, сильно отличающуюся от температуры воздуха; он имеет очень малый коэффициент расширения (в среднем  $\alpha = 0,4 \cdot 10^{-6}$ ), в 20 с лишним раз меньший, чем у платины (отсюда название сплава: *invar* — неизменный). Последнее обстоятельство особенно важно: температуру инварного мерного прибора достаточно знать с точностью до  $2^\circ$ , чтобы влияние ошибки ее определения было менее 1 : 1 000 000. Вместе с тем инвар имеет ряд отрицательных свойств, на которых следует остановиться.

На графиках черт. 98 и 99 показан по Гильому ход температурных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  никелевых сталей с увеличением процентного содержания никеля; здесь линией *AB* показан ход коэффициентов, который должен был бы иметь место в неапомалийных сплавах. Графики показывают, что в интервале 20—50% содержания *Ni* инвар имеет чрезвычайно сильные отклонения от нормы; при 35,6% коэффициент  $\alpha$  достигает минимума и близок к нулю (около  $-1 \cdot 10^{-6}$ ); в некоторых случаях, при надлежащей термической и механической обработке, он обращается в пуль и может стать даже отрицательным. Другие примеси в небольшом количестве необходимы для обработки инвара и улучшения его свойств: примесь *Mn* и *C* препятствует образованию трещин; примесь *Mn*, кроме того, делает сплав более ковким и тягучим, а *C* поднимает предел упругости, особенно в соединении с *Cr* и *W*, но уменьшает стабильность инвара, так как происходят постепенное соединение *C* с *Fe* и образование  $Fe_3C$ ; присутствие *Cr*, который имеет большее сродство с *C*, чем *Fe*, увеличивает стабильность инвара в 10 раз

(de Graai Hunter, Geodesy, Dehra Dun, 1929, стр. 71); примеси  $W$  или  $V$  также улучшают стабильность инвара; примесь  $Cr$  делает никелевую сталь более твердой, но в слишком большом количестве она делает сплав зернистым, что препятствует его полировки; все эти примеси повышают коэффициент  $\alpha$  инвара до  $2 \cdot 10^{-6}$ .

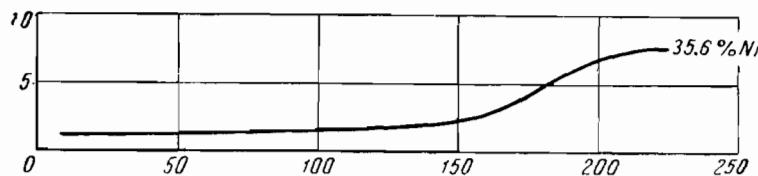


Черт. 98. Ход коэффициента  $10^{-9} \cdot \beta$  с увеличением процентного содержания никеля по Гильому



Черт. 99. Ход коэффициента  $10^{-6}$  с увеличением процентного содержания никеля при  $20^\circ\text{C}$ , по Гильому

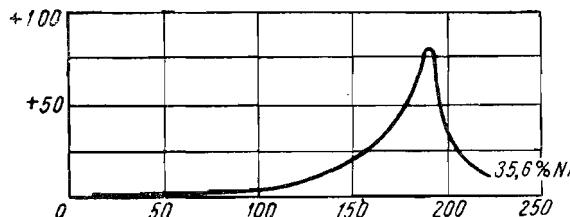
Из графиков чертежей 100 и 101, где показан ход коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  инвара с изменением температуры от 0 до  $220^\circ$ , видно, что в интервале обычных температур  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать величинами постоянными (это не значит, что они не меняются во времени).



Черт. 100. Ход  $10^6 \cdot \alpha$  с изменением температуры от  $0^\circ$  до  $220^\circ$  (по Гильому)

Неоднократно высказывавшееся Гильюмом мнение, что коэффициенты расширения инварных мер, изготовленных из одной плавки и под-

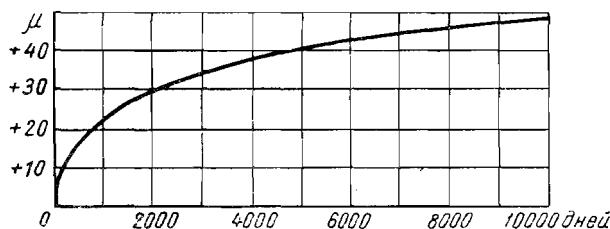
вергнутых одинаковой термической и механической обработке, одинаковы, международным опытом не подтверждается. Причина кроется, повидимому, в малой стабильности инвара. Поэтому термические коэффициенты инвариных мер нужно определять для каждой меры индивидуально и через известные промежутки времени.



Черт. 101. Ход  $10^9 \mu$  с изменением температуры от  $0^\circ$  до  $220^\circ$  (по Гильюму)

Основным недостатком инвара является малая его стабильность (молекулярная неустойчивость), причем неустойчивость тем более, чем меньшее коэффициент расширения инвара. Сказывается это в явлениях следующего рода:

1. Инварная мера с течением времени непрерывно удлиняется, следя диаграмме черт. 102, составленной Гильюмом на основании многолетних наблюдений; удлинение это спачала идет очень быстро,



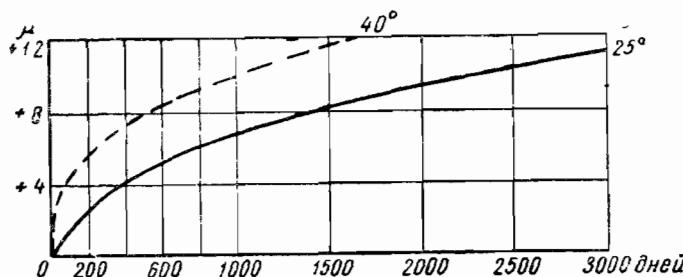
Черт. 102. Удлинение инварной меры, не подвергнутой этоважу

потом затухает. Чтобы ослабить этот процесс, инвар подвергают так называемому этюжу — искусственно старению. Состоит он в том, что выкованный жезл нагревают до температуры кипения воды (до  $100^\circ$ ) и через 4—5 дней начинают медленно (в течение 2—3 месяцев) опускать температуру до  $25^\circ$ . Благодаря такой термической обработке удлинение инварной меры становится значительно меньшим, как это видно из диаграммы черт. 103, и тем менее, чем более был продолжен процесс этоважа. Сопоставление диаграмм черт. 102 и 103 говорит о том, что этоваж как бы отсекает начало ветви в диаграмме черт. 102. Несмотря на это, нормальную меру не следует употреблять ранее, чем через 3—4 года после ее изготовления.

Гильюм даст следующую эмпирическую формулу для вычисления удлинения инварной меры в функции времени

$$\Delta l = a \cdot \lg(1 + bt), \quad (111)$$

где  $\Delta l$  — удлинение в микронах на 1 м,  $a$  и  $b$  — постоянные ( $a$  колеблется в пределах примерно от 10 до 30,  $b$  — от 0,003 до 0,008), определяемые для каждой меры;  $t$  — время в днях со времени этюважа. Например, для сплава № 504:  $a = 14,46$ ;  $b = 0,0073$ ; при  $t = 10\,000$  дням  $\Delta l = 27,0 \mu$ . Однако, для точного учета этих изменений в длине нормальной меры не следует пользоваться ни графиком, ни формулой (111); нужно через известные промежутки времени сравнивать данную меру с другой, длина которой хорошо известна, и для нужного момента поправку длины меры находить хотя бы линейным интерполированием.



Черт. 103. Удлинение инварной меры, подвергнутой этюважу, до 25° и 40°.

Следует иметь в виду, что этюваж несколько повышает коэффициент  $a$ , но, повидимому, делает его более устойчивым.

2. Молекулярная неустойчивость инвара сказывается и в том, что инварная мера, кроме непрерывного изменения своей длины, изменяет свою длину также скачками; последнее происходит от резкого изменения температуры, от удара, сотрясения и пр. Объясняется это явление, равно как и первое, отчасти тем молекулярным напряжением, которое создается в жезле, проволоке или ленте в результате их механической обработки в процессе изготовления, т. е. ковки, волочения, вытягивания и пр. Термическая обработка ослабляет это напряжение. Необходимо также подвергнуть жезл, проволоку или ленту ряду сильных ударов и сотрясений, чтобы приводит инвар в более устойчивое молекулярное равновесие (подробности об изготовлении инварных проволок и лент будут сообщены ниже). Очевидно, с указанным недостатком инварных мер нужно бороться; бережное обращение с жезлами и проволоками поэтому обязательно. Эталонирование проволок должно выполняться непосредственно до и после каждой ответственной операции по точному измерению.

3. Инварная мера испытывает, кроме того, временные изменения, так называемые температурные последействия. У инвара оно выражается в том, что при переходе к более высокой температуре жезл, приняв эту температуру, в течение некоторого времени укорачивается и, наоборот, приняв более низкую температуру, потом несколько удлиняется (при отрицательном коэффициенте расширения — наоборот). Таким образом, на длине меры в данный момент сказываются предшествующие температурные состояния жезла. Эти изменения длины тем меньше, иначе говоря, инварный

жезл приходит в равновесие тем скорее, чем выше температура жезла. Так, по данным Бюро стандартов (Bureau of Standard, Circular № 58, Washington 1923), при нагревании инварного жезла до 100° температурное последействие заметно в течение получаса; при нагревании до 40° — в течение целого дня. Ясно, конечно, что при обыкновенных температурах, с которыми приходится иметь дело в лабораторных и полевых условиях, температурное последействие оказывается еще более длительное время.

Гильом рекомендует учитывать температурное последействие по следующей эмпирической формуле (для интервала температур от 0 до 100°):

$$\Delta l = -0,00325 \cdot 10^{-6} \cdot l \cdot (t_2^2 - t_1^2), \quad (112)$$

где  $\Delta l$  — поправка к длине  $l$  жезла, рассчитанной по обычной формуле,  $t_2$  — температура данного момента,  $t_1$  — средняя температура недели, предшествующей этому моменту. Например, если 24-м инварная проволока хранилась при температуре  $+15^\circ\text{C}$ , а измерение базиса ведется при температуре  $+25^\circ\text{C}$ , то поправка за температурное последействие равна:

$$\Delta l = -0,00325 \cdot 10^{-6} \cdot 24 (25^2 - 15^2) = -31,2 \mu.$$

Легко рассчитать, что если ошибка в оценке температуры не превышает  $5-6^\circ$ , то ошибка поправки по формуле (112) не превысит  $1 : 1000000$ . Тарди полагает (P. Tardi, Traité de Géodésie), что ошибка температурного последействия «лимитирует действительную точность, с которой известна длина эталона в момент измерения».

В виду указанного недостатка инвара — малой его стабильности — для изготовления нормальных мер рекомендуется брать инвар средней расширимости как более устойчивый, но еще лучше для этой цели брать никелевую сталь с процентным содержанием никеля около 42—44, называемую платинитом, так как температурный коэффициент ее близок к таковому же платины. Сплав этот, по свидетельству Гильома, не обнаруживает ни постоянных, ни временных изменений, но вместе с тем почти неокисляется и хорошо полируется.

В последнее время японский ученый Мазумото предложил новые интересные сплавы: сверхинвар (sur-invar) типа инвара, в котором часть никеля заменена родственным ему кобальтом (*Co*) и который имеет чрезвычайно малый коэффициент расширения порядка  $2 \cdot 10^{-3}$ ; «некислящий инвар» (invar inoxydable) — сплав железа (36,5%), кобальта (54,5%) и хрома (9%) — совершенно неокисляемый сплав с температурным коэффициентом порядка  $2 \cdot 10^{-7}$ , отличию полирующийся и очень пригодный для напесения на нем точных делений; однако, оба эти сплава еще мало изучены.

### § 32. Сравнение мер. Первый тип компаратора

Так как все точные линейные измерения в геодезическом производстве должны быть в конечном счете отнесены к одной и той же единице — к длине международного метра-прототипа, то все рабочие меры должны систематически сравниваться с нормальными, а эти последние — с метром-прототипом № 28, хранящимся во ВНИИМ и являющимся исходной единицей всех линейных измерений в СССР. Приборы, служащие для сравнения длии мер между собой, называются компараторами.

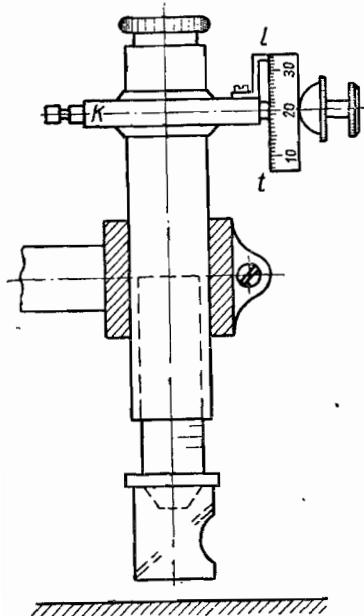
В настоящее время существуют компараторы двух типов: старого, основанного на принципе измерения малых разностей расстояний помошью микроскоп-микрометра, и нового — интерференционного, где эти малые разности расстояний измеряются в длинах световых волн.

Идея устройства компаратора старого типа следующая. Если сравниваются между собой нормальные меры одной длины, то достаточно иметь два микроскоп-микрометра (их оптические оси должны занимать отвесное положение), установленные вертикально так, что расстояние между их нульпунктами, называемое базисом компаратора, близко подходит к длине сравниваемых мер. Соотношение между длинами нормальных мер  $M$  и  $N$  будет установлено, если определить малые разности длии каждой из мер и базиса компаратора. Эти малые разности весьма точно и легко определяются микрометрами микроскопов компаратора. Если сравниваемые меры разной длины, но одна из них содержит с высокой степенью приближения целое число раз в другой, например, сравнивается трехметровый жезл с однометровым, то компаратор должен иметь четыре микроскоп-микрометра, установленных на одной прямой на расстояниях около 1 м друг от друга (в пределах нескольких микронов). Определяя при помощи однометрового жезла, длина которого хорошо известна, расстояния между нульпунктами каждой пары смежных микроскопов и суммируя их, получим длину базиса компаратора (расстояние между нульпунктами крайних микроскопов); сравнение последней с длиной трехметрового жезла решает вопрос сравнения двух подобных мер.

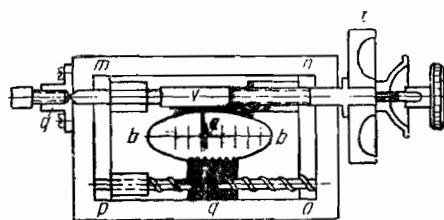
Основными частями компаратора являются: микроскоп-микрометры, фиксирующие базис компаратора; полотно компаратора (твердое основание), по которому перемещается по рельсам вдоль оси компаратора тележка, несущая жезл; платформа для наблюдателей. Тележка, несущая жезл, должна иметь следующие три движения: поперечное («по азимуту») — для установки оси жезла в створ базиса компаратора: по высоте — для приведения оси жезла в горизонтальное положение и для его фокусировки (для установки концов жезла по фокусам микроскопов); продольное — для подведения штрихов жезла под микроскопы. Движения эти осуществляются тремя наводящими винтами, имеющимися у концов платформы тележки. Микроскопы, полотно компаратора и платформа для наблюдателей должны быть полностью изолированы друг от друга; помещение для компаратора должно быть хорошо защищено от сотрясений; температура воздуха в нем должна оставаться почти постоянной в период времени, занятый выполнением компарирования.

Устройство микроскоп-микрометра будет подробно описано в главе VII, поэтому сейчас остановимся на нем лишь в самых общих чертах, поскольку это необходимо для уяснения вопросов, разбираемых в настоящей главе. Микроскоп-микрометр состоит из микроскопа (черт. 104), в окулярной части которого имеется особая, несущая в себе микрометр коробка  $K$  (черт. 104 и 105). В пазах, устроенных в боковых стенках коробки  $K$ , передвигается пластинка  $mpor$  посредством тщательно изготовленного микрометренного винта  $V$ . Этот винт, имеющий матку в выступе  $n$  пластинки  $mpor$ , упирается своим концом в гнездо  $g$  и должен, по идеи устройства прибора, лишь вращаться (без поступательного движения). Вращение винта  $V$  (целые обороты его отсчитываются по описанной ниже гребенке, доли оборота помошью индекса  $i$  — по шляпке барабана  $t$ , разделенной на мелкие доли) долж-

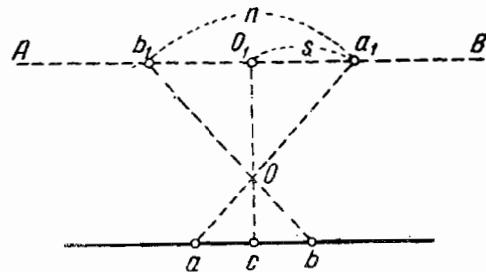
но быть строго пропорционально соответствующему ему поступательному движению пластиинки *тпор*; эта пластиинка имеет в середине вырез *a* (через него и поступают лучи от объектива) с двумя весьма близкими и натянутыми параллельно друг другу нитями. Вследствие достаточного увеличения микроскопа и малости расстояния между двумя упомянутыми нитями микрометра, совмещение биссектора этих нитей со штрихом некоторой тщательно изготовленной шкалы может выполняться с высокой степенью точности. Продольная ось выреза в пластиинке *тпор* отмечена неподвижной нитью *bb*, натянутой вне плоскости *тпор* и не связанный с движением пластиинки. К одной из стенок коробки *K* прикрепляется гребенка *q* с зубцами, соответствующими каждому одному полному



Черт. 104



Черт. 105



Черт. 106

обороту винта *V* и служащими поэтому именно для счета полных оборотов этого винта; один из зубцов (обычно средний) отмечается либо лырочкой в гребенке, либо делается более удлиненным, чем остальные,— эта отметка служит для грубого обозначения начала первого оборота винта *V*. Если нити микрометра находятся вблизи такого среднего, особо отмеченного зубца гребенки, т. е. вообще удалены от этого зубца менее чем на полуоборот винта *V*, и если в этот же момент отсчет по барабану микрометра равен точно нулю, то соответствующее положение нитей микрометра, очевидно, совершило строго фиксированное указанными условиями, называемое нормальным или совпадающим с нулем и наклоном микроскоп-микрометра: другими словами, указателем или наклоном микрометра считается та точка, лежащая в его плоскости и именно на продольной оси выреза *a* (отмечено горизонтальной нитью *bb*), через которую проходит биссектор нитей при нулевом отсчете по гребенке и по барабану или при нормальном положении нитей (чаще, для избежания отрицательных отсчетов,

отсчет по гребенке в нульпункте принимают равным не нулю, а какому-либо подходящему целому числу, например, 10 или 20).

Пусть  $a$  и  $b$  — смежные штрихи некоторой шкалы (черт. 106), рассматриваемой через микроскоп с микрометром, пити которого движутся в фокальной плоскости  $AB$ ; если оптический центр объектива микроскопа находится в  $o$ , то изображения штрихов  $a$  и  $b$  совпадут с точками  $a_1$  и  $b_1$ , лежащими на продолжении прямых  $oa$  и  $ob$ . Пусть нульпункт микрометра совпадает с  $o_1$  и прямая  $o_1o$  встречает шкалу в точке  $c$ ; пусть также подписи делений шкалы возрастают от  $a$  к  $b$ , т. е.  $a$  есть младший штрих шкалы и  $b$  — старший. Наводя биссектор микрометра на изображения штрихов  $a_1$  и  $b_1$  и делая отсчеты по барабану микрометра, мы очень точно определим в делениях барабана микрометра величины отрезков  $o_1a_1$  и  $a_1b_1$ ; пусть именно для  $o_1a_1$  мы получили  $s$  делений барабана, а для  $a_1b_1$  —  $n$  делений барабана. Обозначим также наименьшее деление шкалы, т. е. длину отрезка  $ab$  через  $m$ . Очевидно, имеем

$$\frac{ac}{ab} = \frac{o_1a_1}{a_1b_1} \text{ или } ac = \frac{m}{n} \cdot s = \mu \cdot s, \quad (113)$$

где

$$\mu = \frac{m}{n}. \quad (114)$$

Отсчитать шкалу посредством микроскоп-микрометра — это значит определить линейное расстояние от проекции нульпункта микрометра на шкалу, т. е. от точки  $c$  (проектирование здесь происходит по прямой  $o_1o$ ) до ближайшего к ней младшего штриха шкалы  $a$ . Как видно из уравнения (113), определение отсчета  $ac$  сводится к определению величин  $s$  и  $\mu$ . Очевидно,  $s$  — это отсчет по гребенке и барабану микрометра при совмещении биссектора с младшим штрихом шкалы; величина  $\mu$ , или так называемая «цена деления» барабана микрометра, определяется по формуле (114) из специального исследования, для чего нужно знать величину  $m$  наименьшего деления  $ab$  шкалы и точно определить соответствующее ему число делений  $n$  барабана микрометра. Для определения  $\mu$  используются упоминавшиеся выше мелкие деления на концах эталона, величины которых известны.

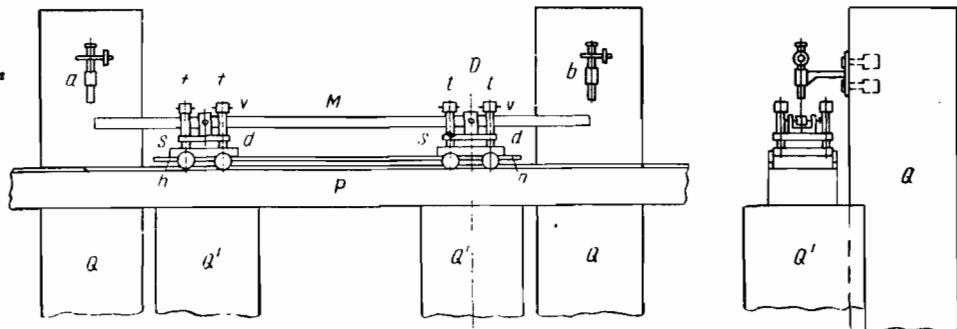
Если отсчет в нульпункте микроскопа принят равным не нулю, а некоторое величине  $s_0$  и если подписи делений гребенки и барабана возрастают при перемещении нитей микрометра в направлении от  $a_1$  к  $b_1$ , то величина  $o_1a_1$  (см. черт. 106) будет соответствовать уже не величине  $s$ , а  $s - s_0$ , понимая под  $s$  отсчет по гребенке и барабану при совмещении биссектора нитей микрометра с младшим штрихом шкалы, и отсчет по микроскоп-микрометру будет выражаться формулой

$$ac = \mu \cdot (s - s_0). \quad (115)$$

Вследствие весьма точного наведения нитей микрометра на штрихи шкалы, рассматриваемые под значительным увеличением, а также вследствие малой величины шага винта  $V$  и совершенной пропорциональности вращения этого винта поступательному движению нитей микрометра, отношение  $\frac{m}{n} = \mu$  определяется весьма точно, и микроскоп-микрометр дает возможность отсчитывать шкалы с чрезвычайно малыми, обычно лишь в десятых долях микрона, ошибками.

Компаратор простейшего устройства изображен на черт. 107. Он состоит:

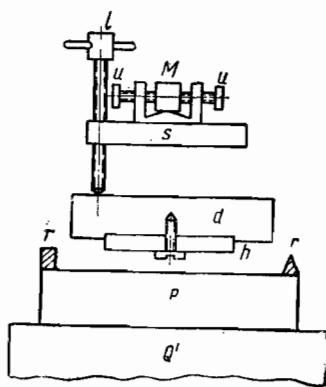
1) из двух микроскоп-микрометров *a* и *b*, укрепленных при помощи кронштейнов на столбах *Q*; основания кронштейнов имеют юстировочные винты для установки микроскопов в нужное положение;



Черт. 107

2) из балки *P*, уложенной на столбах *Q'*; балка *P* несет рельсы *rr*, образующие полотно компаратора; один рельс прямоугольного, другой — трехгранных сечения; последний рельс играет роль направляющего рельса;

3) из двух тележек *dd*,двигающихся по рельсам *rr* и несущих на себе два треножника *vv*; доской *hh* эти две тележки соединены в одну каретку-платформу, служащую для укладки на нее нормальной меры *M*. Каждая тренога *vv* состоит из имеющей форму буквы *T* основания *S* и из трех, пропущенных через это основание подъемных винтов *t* с вертикальными стержнями (на черт. 107 показаны в каждой треноге лишь два из этих винтов, третий же винт помещен в боковом разрезе на черт. 108); основание треноги *S* имеет на себе корытое, на которое во время сравнения и укладывается нормальная мера *M*; через стенки корыта идут два горизонтально расположенных винта *u*.



Черт. 108

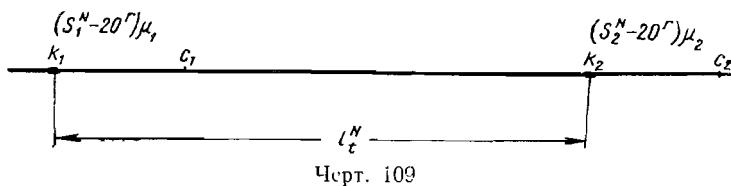
компаратора, складываются из камня, кирпича-обжига или делаются из железобетона. Столбы эти должны быть выведены с материка и совершенно изолированы от окружающих их верхних слоев почвы и от пола здания, на котором находится платформа для наблюдателя.

В основном, сравнение двух штиховых мер *M* и *N* происходит следующим образом. За несколько часов до компарирования (лучше за сутки) сравниваемые меры должны быть внесены в помещение компаратора и выпущены из футляров. Пусть длина меры *N* известна, *M* определяется, т. е. мера *N* будет эталоном. Два наблюдателя укладывают на треноги *vv* меру *N* и, передвигая платформу *hh*, а также дейст-

вую винтами треноги  $vv$  для грубой установки меры по высоте и азимуту, устанавливают концевые штрихи меры на продолжении осей соответствующих микроскопов компаратора; затем, действуя вертикальными и горизонтальными винтами подставок  $vv$ , приводят ось меры в вертикальную плоскость, содержащую оси микроскопов  $a$  и  $b$ , и одновременно дают такое положение мере  $N$  «по высоте», при котором изображения ее концевых штрихов будут располагаться в плоскостях микрометров соответствующих микроскопов компаратора (изображения штрихов меры «фокусируются»). Затем, действуя в разные стороны двумя расположеными параллельно осями компаратора вертикальными винтами одной из треног  $vv$ , осуществляют такое (очень малое) продольное перемещение меры, при котором концевые штрихи меры  $N$  расположились бы возможно близко к цульпунктам микроскопов. После этого наблюдатели тщательно определяют температуру  $t_1$  меры  $N$  отсчетом одного или нескольких ртутных термометров, имеющихся при ней, и затем немедленно наводят нити микрометров на концевые штрихи меры, причем необходимо, чтобы изображения на соответствующие штрихи были сделаны левым и правым наблюдателями одновременно. Записав отсчеты по барабанам микрометров, наблюдатели вторично определяют температуру  $t_2$  меры  $N$ ; очевидно, температура меры  $N$  в средний момент наблюдения ее концов будет

$$t_n = \frac{1}{2}(t_1 + t_2).$$

Затем на компаратор на место эталона  $N$  укладывают сравниваемую с ним меру  $M$  и выполняют с ней те же операции и в той же последовательности, как и с мерой  $N$ , с той лишь особенностью, что после «фокусировки» концов жезла, левый концевой штрих меры вводится в биссектор нитей микроскопа  $a$ , наведенный ранее на левый конец меры  $N$  и оставшийся в неизменном положении; благодаря этому отсчеты по барабанам микроскоп-микрометров при визировании на меры  $N$  и  $M$  будут близки друг к другу (длины мер при температуре сравнения обычно различаются между собой незначительно — менее чем на 20 микрон), а потому влияние неправильностей в работе микрометров и влияние ошибочности в принимаемых цепах делений микрометров



Черт. 109

будут сведены к минимуму. После указанной установки жезла  $M$  отсчитывают его температуру, визируют одновременно на концевые его штрихи с соответствующими отсчетами по барабанам микрометров и вновь отсчитывают температуру жезла. Полученных данных, вообще говоря, достаточно для определения длины меры  $M$  по длине эталона  $N$  при температуре сравнения.

Пусть на черт. 109 точки  $c_1$  и  $c_2$  представляют собой «проекции» (в указанном ранее смысле) цульпунктов микроскопов  $a$  и  $b$  на ось меры  $N$ ;  $k_1$  и  $k_2$  — положения концевых штрихов этой меры;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  —

цены делений барабанов микроскоп-микрометров  $a$  и  $b$  (левого и правого);  $S_1^N$  и  $S_2^N$  — отсчеты по левому и правому микроскопам при совмещении биссекторов их нитей со штрихами  $k_1$  и  $k_2$  меры. Предположим также, что при перемещении нитей микрометра слева направо мимо индекса  $i$  барабана идут все возрастающие подписи делений. Принимая отсчет в нульпункте микроскоп-микрометра равным 20 оборотам ( $S_0 = 20^\circ$ ), будем иметь для меры  $N$  (из черт. 109):

$$c_1 c_2 = k_1 k_2 - k_1 c_1 + k_2 c_2; \\ k_1 k_2 = l^N_{t_n}; \quad k_1 c_1 = (S_1^N - 20^\circ) \cdot \mu_1; \quad k_2 c_2 = (S_2^N - 20^\circ) \cdot \mu_2;$$

или

$$c_1 c_2 = l^N_{t_n} - (S_1^N - 20^\circ) \cdot \mu_1 + (S_2^N - 20^\circ) \cdot \mu_2,$$

причем  $l^N_{t_n}$  — длина эталона  $N$  при температуре  $t_n = \frac{t_1 + t_2}{2}$ . Принимая аналогичные обозначения для сравниваемой меры  $M$ , имеем

$$c_1 c_2 = l^M_{t_m} - (S_1^M - 20^\circ) \cdot \mu_1 + (S_2^M - 20^\circ) \cdot \mu_2.$$

Отсюда

$$l^M_{t_m} = l^N_{t_n} + (S_1^M - S_1^N) \cdot \mu_1 - (S_2^M - S_2^N) \cdot \mu_2. \quad (116)$$

Формула (116) решает вопрос. Подставляя в нее:

$$l^N_{t_n} = l_0^N + l_0^N \cdot \alpha_n (t_n - t_0),$$

$$l^M_{t_m} = l_0^M + l_0^M \cdot \alpha_m (t_m - t_0),$$

где под  $\alpha_n$  и  $\alpha_m$  для краткости обозначений подразумевается бином расширения ( $\alpha + \beta t$ ) соответственной меры, имеем окончательно

$$l_0^M = l_0^N + l_0^N \cdot \alpha_n (t_n - t_0) - l_0^M \cdot \alpha_m (t_m - t_0) + \\ + (S_1^M - S_1^N) \cdot \mu_1 - (S_2^M - S_2^N) \cdot \mu_2. \quad (117)$$

Здесь  $l_0^M$  и  $l_0^N$  — длины мер при некоторой нормальной температуре, например, при  $+15^\circ\text{C}$ . Уравнение сравниваемой меры будет, очевидно

$$l^M_{t_m} = l_0^M + l_0^M \cdot \alpha_m (t_m - t_0) + l_0^M \cdot \beta_m (t_m - t_0)^2.$$

Так как во время сравнения температуры  $t_n$  и  $t_m$  различаются ничтожно мало друг от друга и так как длины  $l_0^N$  и  $l_0^M$  различаются обычно только в сотых долях миллиметра, то, обозначая

$$\frac{t_m + t_n}{2} = t_c \text{ (средняя температура сравнения),}$$

$$\frac{l_0^M + l_0^N}{2} = l_0,$$

можем в большинстве случаев уравнение (117) переписать так

$$l_0^M = l_0^N + l_0 (t_c - t_0) (\alpha_n - \alpha_m) + (S_1^M - S_1^N) \cdot \mu_1 - (S_2^M - S_2^N) \cdot \mu_2. \quad (118)$$

Уравнение (118) ясно показывает, что чем больше различие коэффициентов расширения мер  $M$  и  $N$ , тем точнее нужно определять температуру мер при сравнении их длин для вывода длины меры  $M$ .

Микроскопы компаратора необходимо надлежаще установить до пользования ими, а именно: 1) привести нульпункт микрометра в совмещение с осью объектива микроскопа; 2) установить отвес по оси микроскопов; 3) если микроскопов более двух, привести их оси в одну

отвесную плоскость (створ компаратора); 4) установить микроскопы надлежащим образом по фокусу.

Вторая установка выполняется или помошью круглого уровня, надвасмого на объективное колено, или, еще лучше, помошью ртутного горизонта, основываясь на принципе автоколлимации (при правильном положении микроскопа пти микрометра, установленные в нульпункте, должны покрывать свое зеркальное изображение). Третье условие повествуется при помощи натянутой тонкой струны. Для выполнения четвертого условия под первую пару смежных микроскопов подводится жезл, приводится помошью накладного уровня строго в горизонтальное положение и одновременно ставится по высоте так, чтобы левый микроскоп оказался при этом отфокусированным; далее правый микроскоп фокусируется перемещением микроскопа в тубусах. После этого переходят к аналогичной установке следующей пары микроскопов. Очевидно, в самом процессе компарирования жезл будет принимать необходимое горизонтальное положение автоматически — при установке его концов на фокус высотными наводящими винтами тележки, несущей жезл.

В действительности компарирование исполняется по несколько иной программе, чем описано выше, так как приходится считаться с рядом ошибок, влияние которых должно быть, по возможности, ослаблено. Так как в помещении компаратора всегда имеется некоторый ход температуры (вызываемый присутствием наблюдателей, электрическим освещением и пр.), то всегда будет иметь место ряд ошибок, связанных с этим ходом температуры, например, непрерывное изменение длины базиса компаратора (расстояния между нульпунктами крайних микроскопов), опережение или отставание в показаниях термометров и пр. Если принять, что в течение короткого сравнительно отрезка времени температура жезла и помещения изменяется равномерно, и наблюдения выполняются также равномерно, то ошибки, связанные с ходом температуры, получат значительную компенсацию при выполнении наблюдений в следующем порядке: эталон, нормальная мера, эталон. При таком симметричном расположении наблюдений все выводы из наблюдений над обеими мерами будут отнесены к некоторому одному среднему моменту с определенной (средней) температурой. Чтобы ослабить влияние случайных ошибок паведений птиц микрометров на концевые штрихи жезла, делают три или пять пар одновременных паведений на штрихи жезла. Для ослабления влияния систематических ошибок паведений (так называемых личных ошибок наблюдателей) наблюдатели обязательно должны меняться местами. Поэтому один прием наблюдений, под которым понимают логически заключенный цикл симметричных наблюдений, при двух наблюдателях *A* и *B* состоит в следующем.

Эталон *N*: отчет температуры эталона *N*;

три пары одновременных отсчетов (наблюдатель *A* — слева);

перемена наблюдателей;

три пары одновременных отсчетов (*A* — справа);

отчет температуры эталона *N*;

Мера *M*: отчет температуры меры *M*;

три пары одновременных отсчетов (*A* — справа);

перемена наблюдателей;

шесть пар одновременных отсчетов (*A* — слева); (после первых трех пар отсчетов мера слегка сдвигается и вновь

устанавливается по фокусу и положению);  
перемена наблюдателей;

три пары одновременных отсчетов ( $A$  — справа);  
отсчет температуры меры  $M$ ;

Эталон  $N$ : отсчет температуры эталона  $N$ ;

три пары одновременных отсчетов ( $A$  — справа);  
перемена наблюдателей;

три пары одновременных отсчетов ( $A$  — слева);  
отсчет температуры эталона  $N$ .

Как мы видим, в этом (первом) приеме наблюдатель  $A$  начинал кончал работу у левого микроскопа; в следующем (втором) приеме он начинает и кончает работу у правого микроскопа. Таких приемов делается еще шесть, различающихся от первых двух и друг от друга перекладкой эталона  $N$  или меры  $M$  противоположными концами. Все эти восемь приемов, замыкающих круг полной симметрии в расположении наблюдателей и жезлов относительно микроскопов и друг друга, образуют одну серию наблюдений; таких серий берется несколько, например, две четыре, в зависимости от требуемой точности сравнения мер.

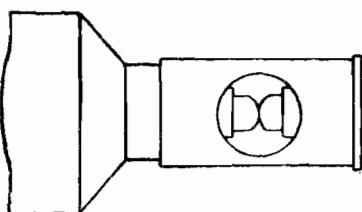
При описанных сравнениях мер, для точного учета температуры надлежит максимально обеспечить постоянство температуры среды окружающей жезлы и термометры. Для этого обе сравниваемые меры помещаются рядом в ванну, наполненную водой; несколько термометров также располагаются в ванне горизонтально, на уровне нейтральной плоскости мер; жидкость регулярно перемешивается в ванне особыми мешалками, приводимыми в движение электромоторами. Благодаря большой массе (например, две тонны) и большой теплоемкости жидкости, температура ее в течение одного приема будет меняться чрезвычайно медленно. В силу этого температуру жидкости можно измерять только в начале и в конце каждого приема (вышеупомянутая программа дана для случая, когда ванны нет).

Во время наблюдений, кроме того, регулярно отмечаются температура помещения и время наблюдений для учета влияния хода температуры в помещении и распределения наблюдений по времени при обработке и оценке материалов наблюдений.

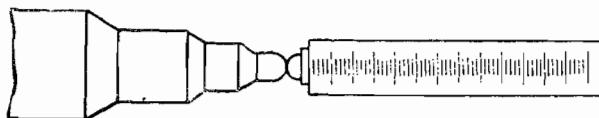
Если меры  $M$  и  $N$  имеют почти равные длины, но одна из них или обе они концевые, причем концы их устроены в виде цилиндров (черт. 91), то сравнение длин таких мер на компараторе описанного устройства выполняется в общем так же, как и в рассмотренном случае сравнения двух одинаковых по длине штриховых мер. При этом на оконечности концевых мер надеваются небольшие гильзы (черт. 110) и наблюдают в микроскоп компаратора точку соприкосновения выпуклых поверхностей цилиндра меры и совершению одинакового с ним по устройству и размерам цилиндра гильзы (сидящего на стержне с пружинкой).

Если концы меры устроены не в виде цилиндров, позволяющие надеть гильзу, то сравнение таких мер с штриховыми может быть выполнено лишь после устройства на компараторе особых приспособлений. Вообще сравнение штриховых мер с концевыми всегда сопровождается затруднениями; необходимо в этих случаях иметь под руками приспособления, при помощи которых на концевой мере отмечались бы посредством механического контакта точки, совпадающие с концами мер (и удобно наблюдаемые через микроскоп). При сравнениях дру-

с другом двух концевых мер, входящих в состав одного и того же базисного прибора, приходится обычно иметь дело с двумя мерами совершение одинакового устройства; для сравнения в каждом таком случае служит принадлежащий именно к соответственному базисному прибору особый компаратор, вообще значительно отличающийся от рассмотренного и изображенного на черт. 107, но отвечающий вполне особенностям устройства данных мер (см., например, ниже о компараторе В. Я. Струве). Особоесложнение возникает при сравнении двух мер, имеющих значительно разящиеся длины. Английский геодезист Кларк при международном сравнении основных нормальных мер разных государств в 1865 г. в Соутгемптоне употреблял при сравнении концевых мер с штриховыми и между собой особые добавочные разделенные пластиинки (черт. 111), имевшие на одном конце цилиндрики с выпуклыми, полированными поверхностями. Такие пластиинки, прикладывавшиеся к обоим концам концевой меры, особенно удобны для сравнения более коротких концевых мер с штриховыми. Действительно, после сравнения мер добавочные линейки контактировали между собой сферическими концами, и затем с надлежащей точностью измерялось расстояние между штрихами шкал, использованных при сравнении мер; расстояние это вычиталось потом из длины штриховой меры для получения длины концевой меры.



Черт. 110

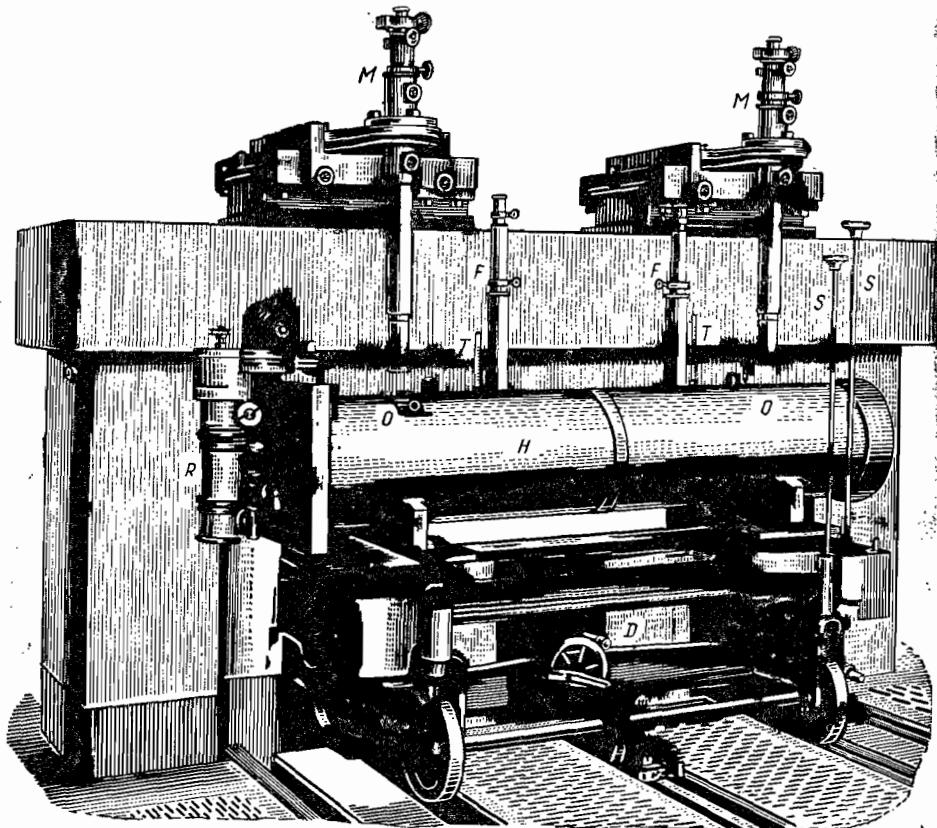


Черт. 111

«Уравнение меры», представленное формулой (104), содержит в качестве постоянных и существующих быть точно известными три величины:  $l_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Определение температурных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно с  $l_0$  выполняется лишь при сравнении мер в центральных метрологических учреждениях на специально оборудованных компараторах; такими учреждениями являются: в СССР — Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии (ВНИИМ, Ленинград), во Франции — Международное бюро мер и весов (Bureau international des poids et mesures, Севр, близ Парижа), в Англии — Национальная физическая лаборатория (National Physical Laboratory, Теддингтон, близ Лондона), в Германии — Государственный физико-технический институт (Physikalisch-Technische Reichsanstalt, Шарлоттенбург, близ Берлина), в США — Бюро стандартов (Bureau of Standards, Вашингтон) и т. д.

Компараторы этих учреждений представляют собой целые дорогостоящие сооружения. Помещением для таких компараторов нередко является здание с двойными стенами, что обеспечивает возможность иметь едва заметные колебания температуры за целый день; особые приспособления позволяют изо дня в день держать с постоянством определенную температуру воздуха в помещении (автоматическая

регулировка). Компаратор устанавливается на массивном фундаменте; на этом фундаменте выводятся массивные столбы, на которых покоится балка, несущая микроскопы. Балка представляет собой обычно полый толстостенный металлический вал, отделанный деревом; один конец балки наглухо укреплен в одном устое, а другой свободно лежит на другом устое на стальном шаре, покоящемся в соответственном металлическом гнезде устоя; с передней стороны в оправу балки вдевляется на всю длину компаратора прямоугольная, горизонтально расположенная металлическая пластина, к которой через 1 м друг от друга и подвижно прикреплены микроскопы; эта пластина носит название «направляющей»; точность отделки ее передней плоскости такова, что



Черт. 112

уклонение на 4 м не превосходит 0,1 мм, т. е., следовательно, две плоскости, содержащие одна — оси первого и третьего микроскопа, а вторая — оси второго и четвертого микроскопа, не должны образовывать угла, большего десяти секунд. Для уменьшения температурного расширения полая балка наполняется водой или маслом. В однометровом компараторе балка делается иногда из камня, как, например, в однометровом компараторе Берлинской палаты мер и весов, изображенном на черт. 112. В этом компараторе на балке укреплены две тяжелые медные пластины, несущие микроскопы ММ и снабженные приспособл

ниями для установки микроскопов в направлении продольном, попечном, по высоте и в отношении наклона к отвесной линии.

Микроскопы имеют увеличение от 70 до 100 крат, при общей длине их от 70 до 100 см; цена деления барабана микрометра обычно от 0,5 до 1,0  $\mu$ .

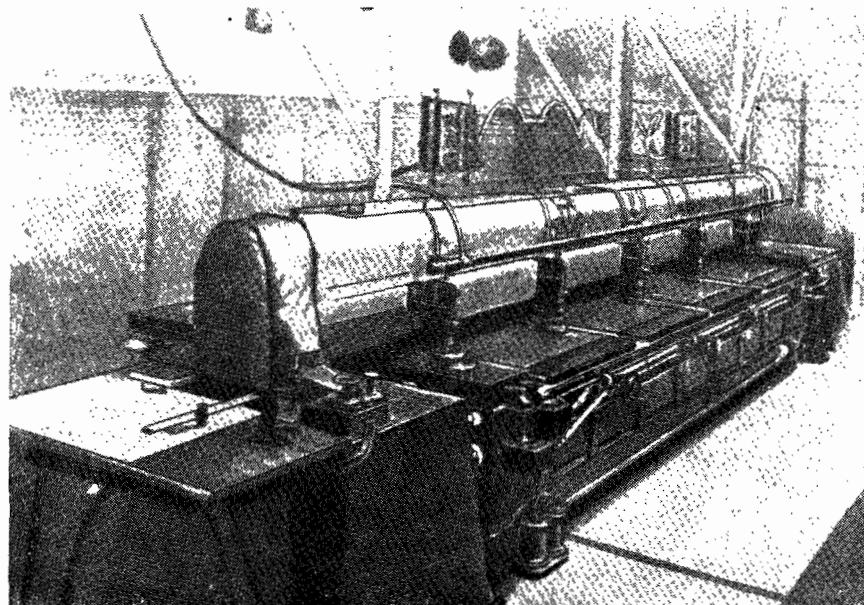
По рельсам, уложенным на фундаменте компаратора перпендикулярно к продольной оси его и симметрично относительно середины между крайними микроскопами, движется посредством электромотора (помощью третьего, среднего рельса) четырехколесная вагонетка с платформой  $D$ , несущей две ванны  $H$ , отстоящие друг от друга более чем на 1 м, — для помещения в них сравниваемых мер.

Если задача состоит в определении уравнения одной меры при помощи сравнения ее с мерой (эталоном), уравнение которой известно, или, следовательно, в определении разности длии этих мер при разных, вообще говоря, температурах (коэффициенты расширения  $\alpha$  и  $\beta$  обеих мер принимаются при этом известными), то обе меры помещаются рядом в одну большую ванну (вторая ванна остается тогда свободной); но если поставить задачу тщательно и вполне независимо определить температурные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  нашей меры, одновременно с определением ее начальной длины  $l_0$  при некоторой температуре  $t_0$ , то надлежит поместить эти две меры в разные ванны, причем в ванне с эталоном температура держится постоянной, например, 0° или 20° С, а в ванне с исследуемой мерой температура меняется в больших пределах, обусловленных интересующим нас интервалом. По существу, при полном сравнении нормальных мер всегда нужно решать вторую задачу.

Каждая ванна, имеющая внутри приспособления для приведения мер в нужное положение, имеет двойные стенки; наружная камера наполняется водой, температура которой регулируется электроподогревом; внутренняя камера с находящимися в ней мерами или оставляется свободной или также наполняется водой; ряд механизмов, действующих посредством электромоторов  $R$ , устанавливает равномерность температуры жидкости, на что уходит порядочно времени; с боков и по дну, а также снаружи ванна обложена плохо проводящим тепло слоем войлока; сверху она закрывается рядом покрышек, предохраняющих ее от потери или поступления тепла; для наблюдения концов мер через микроскоп в верхней покрышке футляра оставляются маленькие отверстия  $O$ , закрываемые съемными пластинками. Платформа вагонетки снабжена рядом винтов  $S$ , позволяющих легко дать ей окончательную установку, т. е. такую, при которой мера займет должное положение относительно микроскопов; эти винты приводятся в движение или рукой или посредством системы электромоторов. Точные термометры  $T$  отсчитываются через отверстия в крышке футляра особыми микроскопами  $F$  (без микрометров) до тысячных долей градуса. Погружение мер в жидкость дает действительную возможность определять их температуру до сотой доли градуса. Наблюдатели посредством особых приспособлений изолируются от микроскопов, чтобы теплота их тела не вызывала смешений в микроскопах.

В СССР во ВНИИМ имеются в настоящее время два высокоточных компаратора — одинметровый и четырехметровый. Лучшим из них является четырехметровый, установленный в 1924 г. Общий вид его приведен на черт. 113. Установлен он в специальном помещении на массивном фундаменте. Пустотелая балка длиной около 6 м и весом около 2½ тонн опирается на одном конце двумя регулировочными винтами на стальные

диски, вделанные в один устой; другой конец балки лежит свободно на стальном шаре, покоящемся в специальном гнезде в форме жёлоба на втором устое; ось жёлоба параллельна оси балки; указанное устройство позволяет балке изменять свою длину без деформаций. Пять микроскопов, установленных на расстоянии 1 м друг от друга, имеют увеличение около 100; цены делений барабанов микрометров — около 1  $\mu$ .



Черт. 113

Тележка, несущая две ванны, перемещается на стальных шарах, катящихся в направляющих пазах стальной рамы, укрепленной на верхней части фундамента компаратора; тележка свободно проходит под балкой с микроскопами. Для наблюдателей имеются две платформы, изолированные от тележки с ваннами, но передвигающиеся одновременно с ней по рельсам, вделанным в выступы основного фундамента. Медные двойные ванны, оббитые деревом, имеют значительную вместимость: большая — до двух тонн воды, малая — несколько более одной тонны; это обеспечивает хорошее постоянство температуры. Ванны закрываются латунными крышками, имеющими с наружной стороны деревянную, с воздушной прослойкой, обшивку; крышки внутренних ванн имеют круглые 40-мм отверстия для наблюдений в микроскопы, а также прорезы для отсчитывания термометров, располагаемых (в числе трех) на особых подставках горизонтально, на уровне нейтральных поверхностей мер. Перемешивание воды во внутренних и наружных ваннах происходит помощью турбинок, делающих до 1400 оборотов в минуту. Все перемещения — ванн, тележки, платформы для наблюдателей и пр. — и вращение турбинок осуществляются при помощи электромоторов, общее число которых в компараторе доходит до 22.

Оба компаратора ВИИМ дают возможность выполнять сравнение мер с высокой точностью: например, сравнение однометровых мер на

малом компараторе выполняется с средней ошибкой  $\pm 0,1 \mu$ , на большем —  $\pm 0,05 \mu$ , что дает относительные средние ошибки в 1 : 10 000 000 и 1 : 20 000 000 соответственно. Однако, необходимо помнить, что трудности точного учета температуры при точных сравнениях мер, учета молекулярных изменений и явлений упругости делают задачу точного компарирования относящейся к области физики. На описанных больших компараторах геодезист, достаточно осведомленный в физике, может получить точность в несколько миллионных долей длины, но только метролог вполне научно использует такой компаратор и сможет получить указанные выше точности.

В заключение приведем значения некоторых постоянных.

**Коэффициенты расширения на 1° С:**

|                                |                      |
|--------------------------------|----------------------|
| Платина . . . . .              | 0,0000 089           |
| Иридиевая платина . . . . .    | 086                  |
| Сталь отпущенная . . . . .     | 111                  |
| Сталь закаленная . . . . .     | 125                  |
| Медь красная . . . . .         | 172                  |
| Медь желтая (латунь) . . . . . | 187                  |
| Алюминий . . . . .             | 238                  |
| Никель . . . . .               | 125                  |
| Бронза . . . . .               | 180                  |
| Цинк . . . . .                 | 291                  |
| Стекло белое . . . . .         | 089                  |
| Кварц плавленый . . . . .      | 004                  |
| Серебро . . . . .              | 194                  |
| Золото . . . . .               | 145                  |
| Бетон . . . . .                | 126                  |
| Гранит . . . . .               | 087                  |
| Мрамор белый . . . . .         | 0,0000 105           |
| Мрамор черный . . . . .        | 042                  |
| Ель . . . . .                  | 036 } вдоль волокна. |
| Сосна . . . . .                | 061 }                |

**Длины мер**

Сажень = 84 дюйма = 7 футов = 2133,600 мм \*

Ярд = 36 английских дюймов = 914,3918 мм

Тоаз = 864 парижских липий = 1949,03632 мм

Английский дюйм = 25,3996 мм

Русский дюйм = 25,4 мм.

### § 33. Второй тип компаратора (интерференционный)

Устройство интерференционных компараторов основано на явлении интерференции света, состоящем в том, что два параллельных пучка света, исходящих из одного источника и проходящих разные расстояния, налагааясь друг на друга, дают или усиление света или ослабление его, в зависимости от разности ходов лучей: если разность ходов кратна длине световой волны (целой фазе), то имеет место максимум усиления; если она кратна длине полуволны (полуфазе), то — максимум ослабления. При иных значениях разности ходов будут иметь место промежуточные состояния. Явление интерференции возникает при соблюдении следующих условий:

1) Интерферирующие световые пучки должны исходить из одного источника света, по возможности, из одной спаяющейся точки, так как в противном случае они не будут когерентны, т. е. в каждый данный момент:

\* До введения метрической системы в СССР принималась 1 саж. = 2133,58086 мм.

- а) не будут находиться в одинаковых фазах,  
 б) плоскости колебания световых волн не будут совпадать.  
 2) Налагающиеся друг на друга световые пучки должны быть или взаимно параллельны или образовывать между собой небольшой угол (не свыше 5—6 минут).

3) Разность ходов лучей должна быть незначительна: при пользовании монохроматическим светом — не свыше 100 *мм*, при пользовании белым светом — не свыше 1,3  $\mu$  (около двух волн). Объясняется это недостаточной монохроматичностью спектральных линий, которыми пользуются в качестве источника света: все известные нам спектральные линии имеют, кроме основной линии, побочные, так называемые спутники, с разными длипами световых волн; при значительной разности ходов интерференционные явления основных линий и спутников налагаются друг на друга и портят интерференционную картину. Поэтому для интерференционных измерений в монохроматическом свете пользуются теми спектральными линиями, у которых спутники возможно более слабы или расположены близко и симметрично относительно основной линии.

Компарирование нормальной меры можно произвести или путем непосредственного сравнения с длиной световой волны (абсолютный метод) или сравнением с другой нормальной мерой — эталоном, длина которой уже известна (относительный метод); сравниваемые меры должны быть или равны между собой или кратны друг другу. В качестве эталонов употребляют концевые нормальные меры, описанные в § 30.

Непосредственно в длинах световых волн можно определять длину только коротких эталонов до нескольких сантиметров. Поэтому для получения длины нормальной меры в световых волнах нужно иметь несколько световых эталонов, кратных друг другу и связывающих исходный эталон с данной нормальной мерой. Так, Бенуа, Фабри и Перо употребляли набор световых эталонов (см. черт. 96) длиной в 6,25 *см* (исходный эталон); 12,5 *см*; 25 *см*; 50 *см* и 100 *см*. В настоящее время за единицу длины практически принимают длину световой волны красной линии спектра кадмия, равную при 20° С 760 *мм* давления и 10 *мм* упругости водяных паров:

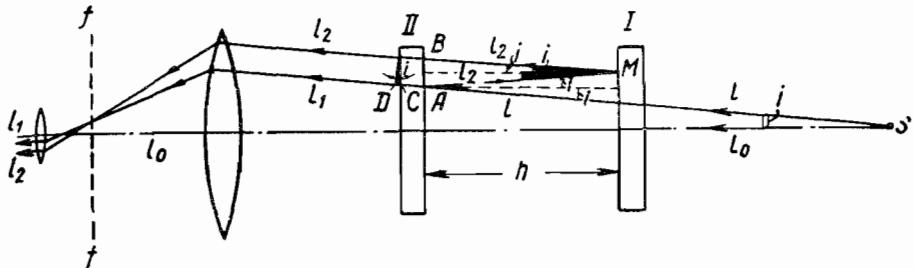
$$\lambda_{\text{Cd}} = 0,64385033 \mu.$$

Абсолютный метод компарирования состоит в следующем. Пусть широкий пучок расходящихся лучей некоторого монохроматического источника света (например, красной линии спектра кадмия) падает на световой эталон (черт. 114) одного из типов, изображенных на черт. 96—97 (как известно, внутренние поверхности плоско-параллельных зеркал I и II, установленных взаимно параллельно, и сплюснуты посеребрены). В точке A луч L раздвоится: одна часть  $L_1$  преломится и пройдет через зеркало II, а вторая  $L_2$  двукратно отразится от поверхностей зеркал II и I в точках А и М (углы падения и отражения будут равны  $i$ ) и, преломившись в зеркале II, выйдет в направлении  $L_2$ , параллельном  $L_1$ . Если рассматривать лучи  $L_1$  и  $L_2$  в зрительную трубу, установленную на бесконечность, то в фокальной плоскости ее FF мы увидим интерференционную картину в виде ряда темных концентрических колец, центр которых соответствует нормальному положению луча  $L_0$  по отношению к граням зеркал. Обозначим длину эталона (расстояние между внутренними гранями зеркал) че-

рез  $h$ . Легко видеть из черт. 114, что разность ходов  $\Delta$  лучей  $L_1$  и  $L_2$  равна

$$\Delta = AM + BM - CD = \frac{2h}{\cos i} - 2h \cdot \operatorname{tg} i \sin i = 2h \cdot \cos i$$

(следует иметь в виду, что луч  $L_2$ , отражаясь в точках  $A$  и  $M$ , теряет каждый раз по полфазы).



Черт. 114

Будем называть число, показывающее, сколько раз длина  $\lambda$  световой волны укладывается в разности ходов  $\Delta$ , порядком интерференции и соответственного светового луча  $L$ . Очевидно, задача компарирования эталона будет решена, если мы будем знать порядок интерференции  $P$  светового луча  $L_0$ , нормально падающего на поверхность зеркала ( $i = 0$ ; этому лучу соответствует центральная точка интерференционной картины); конечно,  $P = \frac{2h}{\lambda}$ . Пусть порядок интерференции лучей, соответствующих темному кольцу, ближайшему к центру интерференционной картины, будет  $N$ ; угловая величина  $\alpha$  диаметра этого кольца равна

$$\alpha = 2i,$$

где  $i$  — угол падения лучей. Очевидно, имеем соотношение:

$$N + \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2h \cdot \cos i}{\lambda} = P \cdot \cos i = P \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

где  $N$  — целое число, откуда

$$P = \frac{N + \frac{1}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = N + \frac{1}{2} + N \cdot \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^2}{16} = N + f \quad (119)$$

и

$$h = \frac{\lambda}{2} \cdot P. \quad (120)$$

Формула (119) показывает, что искомый порядок интерференции  $P$  равен целому числу  $N$  плюс некоторая дробная часть, равная

$$f = \frac{1}{2} + N \cdot \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^2}{16} \quad (121)$$

(условимся в тех случаях, когда  $f > 1$ , единицу в целой части  $f$  отнести к  $N$ , тогда  $f$  всегда будет правильной дробью). Если величина  $f$  известна, то дробная часть  $f$  легко найдется по формуле (121), стоя только найти  $a$  путем непосредственного измерения в плоскости  $F$  диаметра ближайшего к центру темного интерференционного кольца помощью особо устроенного окулярного микрометра, угловая величине деления барабана которого определяется из специального исследования. В частном случае, когда указанное кольцо обратилось в центрально расположенную точку,  $f = \frac{1}{2}$ .

Значительно сложнее нахождение целой части  $N$  порядка интерференции. Здесь пользуются предложенным Бенуа методом совпадения дробных частей. Состоит он в следующем. Определяют дробную часть  $f$  порядка интерференции для нескольких монохроматических источников света, например, для спектральных линий кадмия:

$$\text{Красная} \dots \lambda_1 = 0,643\,847 \mu$$

$$\text{Зеленая} \dots \lambda_2 = 0,508\,582 \mu$$

$$\text{Синяя} \dots \lambda_3 = 0,479\,991 \mu$$

$$\text{Фиолетовая} \lambda_4 = 0,467\,816 \mu.$$

Пусть эти значения  $f$  будут соответственно

$$f_1 = 0,35; f_2 = 0,79; f_3 = 0,17; f_4 = 0,53.$$

Далее, определив приближенно (до нескольких микрон) каким-либо способом длину эталона  $h_0$ , находят приближенно целую часть порядка интерференции для основной линии, например, красной, по формуле

$$P_0 = \frac{2 h_0}{\lambda_1} = N_0 + f_0,$$

где  $N_0$  — искомая целая часть  $P_0$ , полученная по отбрасыванию дробной части  $f_0$ . Пусть в данном случае  $N_0 = 1213$ . Образуют теперь столбец целых чисел, смежных с найденным значением  $N_0$ , и, приспав им найденную экспериментально дробную часть  $f_1 = 0,35$ , заполняют первый столбец табл. 8. Образовав частные

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,265965$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = 1,341373$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1,376281$$

умножают на них числа первого столбца табл. 8 и получают соответственно столбцы второй, третий и четвертый этой же таблицы. Сравнивая дробные части чисел в таблице построчно с приведенными выше дробными частями  $f$ , найденными экспериментально, видим, что ближе всего к ним подходят значения четвертой строки, набранные жирные

Таблица 8

| $\lambda_1$    | $\lambda_2$    | $\lambda_3$    | $\lambda_4$    |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1209,35        | 1530,99        | 1622,19        | 1664,41        |
| 1210,35        | 1532,26        | 1623,53        | 1665,78        |
| 1211,35        | 1533,53        | 1624,87        | 1667,16        |
| <b>1212,35</b> | <b>1534,79</b> | <b>1626,21</b> | <b>1668,54</b> |
| 1213,35        | 1535,06        | 1627,55        | 1669,91        |
| 1214,35        | 1537,32        | 1628,90        | 1671,29        |
| 1215,35        | 1538,59        | 1630,24        | 1672,66        |

шрифтом. Следовательно, величине  $h$  соответствуют следующие значения порядка интерференции для разных линий спектра:

$$P_1 = 1212,35$$

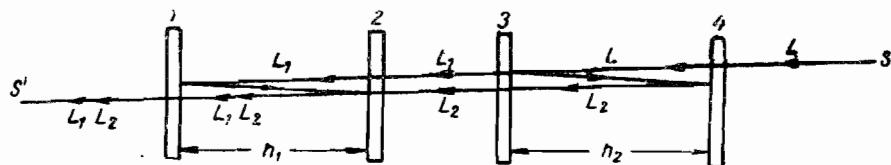
$$P_2 = 1534,79$$

$$P_3 = 1626,17$$

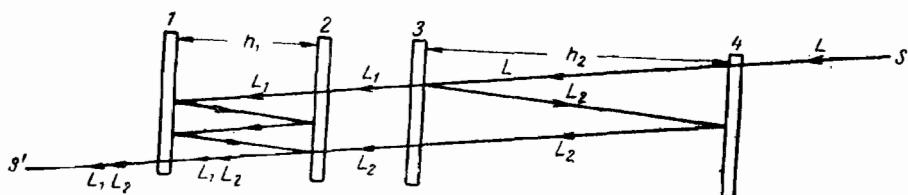
$$P_4 = 1668,53$$

Умножая их по формуле (120) на соответственные значения  $\frac{\lambda}{2}$ , получим четыре разных значения  $h$ , из которых берем среднее.

С т н о с и т е л ь н ы й м етод к омп а р и р о в а н и я , которым сравнивают между собой указанные выше световые эталоны, состоит в том, что сравниваемые эталоны 1—2 и 3—4 (черт. 115 и 116) располагают рядом так, чтобы плоскости их зеркал были параллельны между



Черт. 115



Черт. 116

собой, и пропускают через них широкий пучок монохроматического света (из источника  $S$ ). Если длины  $h_1$  и  $h_2$  эталонов близки к равенству между собой ( $h_1 = h_2$ , черт. 115), то после двукратного отражения от внутренних полупосеребренных поверхностей (благодаря четному числу отражений фазы сохраняются) лучи  $L_1$  и  $L_2$ , выйдя в направлении  $S'$

(параллельно друг другу), будут интерферировать. Рассматривая выходящие лучи через зрительную трубу, мы увидим описанную выше интерференционную картину. Очевидно, для нормально падающего луча ( $i = 0$ ) разность ходов лучей  $\Delta$  будет равна

$$\Delta = 2(h_2 - h_1) = \lambda \cdot P, \quad (122)$$

откуда искомая разность длин эталонов

$$h_2 - h_1 = \frac{\Delta}{2} = \frac{\lambda}{2} \cdot P \quad (123)$$

где  $P$  — порядок интерференции нормального луча, определяемый описанным выше методом колец равного наклона.

Если  $h_2 \approx 2h_1$  (черт. 116), то луч  $L_2$  будет претерпевать двукратное, а луч  $L_1$  — четырехкратное отражение; формула (122) примет вид:

$$\Delta = 2h_2 - 4h_1 = \lambda \cdot P$$

и длина  $h_2$  эталона 3—4 будет определяться через длину  $h_1$  эталона 1—2 по формуле

$$h_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot P + 2h_1. \quad (124)$$

Так как величина  $\Delta$  очень малая, то очевидно, что с увеличением отношения  $\frac{h_2}{h_1}$  увеличивается число отражений луча  $L_1$ , а вместе с тем сильно падает его яркость, что приводит к быстрому ухудшению интерференционной картины; поэтому на практике редко пользуются кратностью, превышающей  $\frac{h_2}{h_1} = 8$ .

Распространенный в геодезической практике относительный метод компарирования, предложенный Вейселе (Väisälä), будет рассмотрен в § 41; там будет также рассмотрен и принцип сравнения штрихового жезла с концевым.

Из предыдущего изложения видно, что интерференционный метод компарирования основан на определении разности ходов интерференционных лучей, но так как световой луч проходит всегда в некоторой оптической среде, а оптический путь луча равен, как известно из оптики, произведению геометрического пути  $S$  на коэффициент преломления  $n$  среды относительно безвоздушного пространства, то определяемая из наблюдений разность ходов лучей, соответствующая определенным температуре  $t$ , давлению воздуха  $B$  и упругости водяных паров  $e$ , должна быть приведена к некоторым нормальным значениям элементов среды, например,  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $B_0 = 760 \text{ mm}$ ;  $e_0 = 10 \text{ mm}$ . Иначе говоря, если в формулах (120), (123) и (124) мы пользовались некоторой нормальной длиной волны  $\lambda_{t_0, B_0, e_0}$ , то вычисленное значение длины нормальной меры должно быть исправлено некоторой поправкой  $\Delta h$  за счет перехода к действительному имевшей место длине волны  $\lambda_{t, B, e}$ , пользуясь формулой

$$\Delta h = - \left( \frac{\lambda_{t_0} B_0 e_0}{\lambda_{t, B, e}} - 1 \right) \cdot h = \left[ 273,3 - \frac{0,386 B}{1 + 0,00367 t} + \right. \\ \left. + 0,052 (e - 10) \right] 10^{-6} \cdot h. \quad (125)$$

(коэффициенты в этой формуле отнесены к средней длине волны  $\lambda = 0,500 \mu$ ).

Если наблюдения велись в условиях, близких к нормальным, или  $h$  незначительно, то можно пользоваться следующей упрощенной формулой

$$\Delta h = [0,93(t - 20^\circ) - 0,36(B - 760) + 0,05(e - 10)] \cdot 10^{-6} \cdot h. \quad (126)$$

Из формулы (126) видно, что каждая из ошибок

$$\Delta t = 0^\circ,1$$

$$\Delta B = 0,3 \text{ мм}$$

$$\Delta e = 2 \text{ мм}$$

вызывает в длине  $h$  относительную погрешность порядка  $1 : 10\,000\,000$ . В силу этого при точных измерениях интерференционным методом нужно с высокой степенью точности соблюдать постоянство температуры, давления и влажности в рабочем помещении, учитывая с надлежащей точностью их изменения по формулам (125) и (126).

При соблюдении этих условий точность компарирования интерференционным методом для длины в 1 м характеризуется средней относительной ошибкой порядка  $\pm 0,03 \cdot 10^{-6}$ , более легко достижима точность порядка  $\pm 0,2 \cdot 10^{-6}$ , что для геодезических целей вполне достаточно. Принимая во внимание, что лучшие современные компараторы, основанные на механическом принципе, дают среднюю ошибку сравнения порядка  $\pm 0,1 \cdot 10^{-6}$ , нужно признать за интерференционным методом компарирования определенные преимущества, особенно учитывая то обстоятельство, что единица измерения — длина световой волны — всегда находится под руками.

### § 34. О базисных приборах вообще; жезловые приборы

Приборы, служащие для точного измерения длины базиса и называемые базисными приборами, можно разбить на две группы: жезловые, в которых для измерения служит твердый жезл, концевой или штриховой, длиной от 2 до 4 м, и приборы с проволоками, в которых измерение ведется проволокой или лентой со шкалами на концах длиной в 24 м и более, подвешиваемой с постоянным натяжением; хорда, соединяющая нулевые штрихи шкал проволок, если последние находятся на одном уровне, будет иметь постоянную длину. До конца прошлого столетия первоклассные базисы измерялись во всех странах только жезловыми базисными приборами. Прибор с проволоками предложен шведским геодезистом профессором Едерином (E. Jäderin) в 1880 г. После первых пробных измерений и, в особенности, после пробных измерений в России в 1888 г. на Пулковском и Молосковицком базисах прибор показал столь значительные преимущества в отношении скорости и простоты работы, возможностей преодолевать местные препятствия — при достаточной точности результатов, — что стал быстро вытеснять жезловые приборы, особенно со временем открытия инвара Гилььомом и внесения им усовершенствований в прибор Едерина. Уже к двадцатым годам текущего столетия все страны перешли на измерение базисов прибором Едерина. Дольше всех удержались жезловые приборы в Германии, но и там с 1932 г. перешли к прибору Едерина; более того, в Германии решено даже все старые первоклассные базисы переизмерить этим прибором как наиболее совершенным, чтобы освободить первоклассную сеть от довольно значительных систематических ошибок прежних базисных измерений.

Знакомство с жезловыми базисными приборами тем не менее и в настоящее время нужно геодезисту, во-первых, потому, что в них отражается с разных сторон строгая методика высокоточных линейных измерений, очень поучительная вообще, имеющая существенное значение в воспитании геодезиста и в той или другой степени входящая и в методику измерения прибором Гилььома-Едерина; во-вторых, вовсе не исключается в настоящем и в будущем возможность измерения коротких базисов жезловыми приборами в некоторых научно-исследовательских целях и при некоторых научных запросах, идущих со стороны не геодезии, а других отраслей прикладного знания. Наконец, следует отметить историческое значение жезловых базисных приборов и необходимость и в настоящее время правильно оценивать точность результатов, полученных ими для старых базисов, давно измеренных, но уцелевших в патре и не утративших своего значения.

Жезловые базисные приборы можно разбить на концевые и штиховые. Измерение базиса прибором с концевыми жезлами сводится к последовательной укладке в створе базиса нескольких, обычно четырех, концевых жезлов, небольшие промежутки между которыми измеряются с большой точностью тем или другим способом. (Не менее четырех рабочих жезлов необходимо по следующей причине: в то время, как четвертый жезл приводится в нужное положение и измеряется промежуток между ним и третьим жезлом, второй жезл находится в покое — от него начинается измерение в случае, если сбит третий жезл, а первый переносится вперед и укладывается на новое место.) В этом случае в базисный прибор обычно входят: а) четыре рабочих жезла; б) один нормальный жезл; в) компаратор специального устройства для сравнения рабочих жезлов с нормальным; г) вспомогательное оборудование для установки жезлов в створ базиса для определения их наклонностей, для проектирования концов жезлов на землю и пр. При применении прибора с штиховым жезлом в створе базиса выставляются последовательно на расстояниях, равных длине штиховой меры, микроскопы с микрометрами (на солидных штативах), расстояния между нульпунктами (или, вернее, их проекциями) которых тщательно промеряются штиховым жезлом. Поэтому в состав базисного прибора входит только одна рабочая мера; нормальная мера и компаратор здесь большей частью отсутствуют, но зато нужен комплект микроскоп-микрометров, штативов для их установок и пр.

Каждый крупный ученый из числа тех, которые принимали участие в градусных измерениях, предложил свой базисный прибор, по устройству существенно отличающийся от всех иных приборов. Внимание этих ученых при конструировании ими базисных приборов, главным образом, останавливалось на разрешении вопросов об определении с надлежащей точностью температуры мерных жезлов во время самого измерения базиса и расстояний между концами смежных, последовательно укладывающихся, жезлов; различие в принятых решений этих вопросов и обусловливает в основном различие базисных приборов, построенных разными учеными. Геодезисты разных стран пользовались всегда базисным прибором соответственного ученого, так, в России до конца прошлого столетия базисы первоклассных сетей измерялись прибором В. Я. Струве, стоявшего во главе предприятия по измерению дуги меридиана от Дупая до Ледовитого океана; в Англии — прибором Кольби, руководившего измерениями в Ирландии; в Германии первоначально базисы основных первоклассных сетей измерялись прибором

Бесселя, стоявшего во главе градусных измерений в Восточной Пруссии, а позднее измерялись, кроме того, прибором Прусского геодезического института, построенного по указаниям Гельмерта, и т. д. Несмотря на возможность значительного разнообразия в устройстве базисных приборов, каждый из них должен непременно удовлетворять следующим общим требованиям:

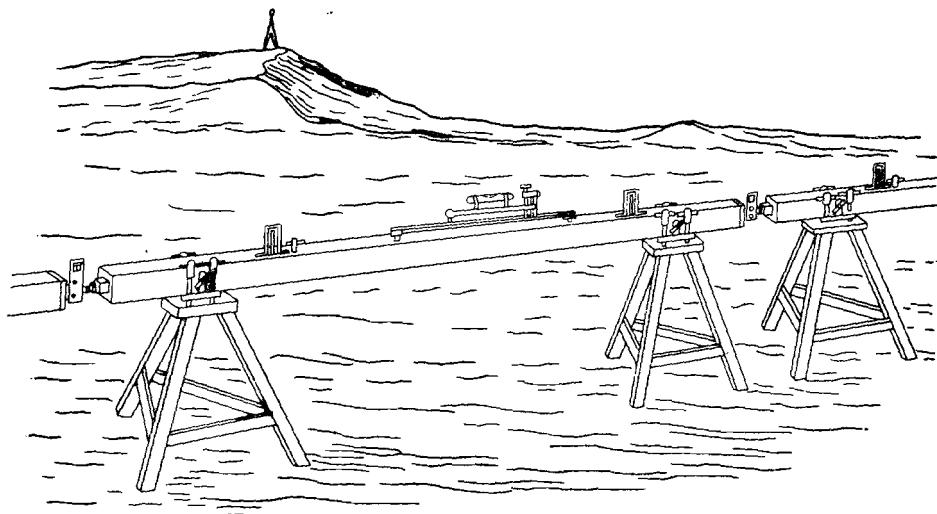
- 1) температура жезлов во время самого измерения должна определяться надежно;
- 2) коэффициенты расширения жезлов должны быть отлично известны;
- 3) в составе базисного прибора должен быть компаратор, позволяющий удобно и с надлежащей точностью определять длины мерных жезлов — сравнением с нормальной мерой;
- 4) установка жезлов на подставках при измерении базиса должна быть стабильна и исполняться быстро, а введение осей жезлов в створ базиса должно производиться с удобством и с совершенной точностью;
- 5) в базисном приборе должны быть приспособления для определения малых расстояний между смежными — предшествующим и последующим — мерными жезлами, откладываемыми по базису;
- 6) каждый жезл во время измерения должен быстро устанавливаться в вертикальной плоскости так, чтобы после его установки оставалась лишь малая наклонность его оси к горизонту; эта оставшаяся наклонность должна точно определяться при помощи уровня;
- 7) в прибор должны входить приспособления и инструменты: для точного проектирования начальной и конечной точек измерений, для прекращения работы по измерению в любой момент, для точного установления жезлов в створе базиса, для определения остатков, т. е. частей мерных жезлов, уложившихся в базисе сверх целого числа последних, и пр.

Останавливаясь теперь в общих чертах на том, каким именно образом в различных базисных приборах осуществляются перечисленные выше общие к ним требования, обратимся прежде всего к требованию относительно точного определения температуры жезлов во время самого измерения базиса.

По способу определения температуры мерных жезлов базисные приборы могут быть разделены на приборы с простыми, биметаллическими и компенсационными жезлами.

Примером прибора с простыми жезлами является русский прибор Струве, изображенный на черт. 117 и 127. В этом приборе жезлы из кованого железа, обложеные ватой и обернутые холщевой лентой, заключены в деревянные ящики, окрашенные белой масляной краской спаружи и внутри; в теле жезла, в верхней его грани и ближе к концам, имеются два углубления, в которых помещаются шарики двух ртутных термометров; шарики засыпаны железными опилками, а углубления закрыты пластинками; шкала каждого термометра, стоящая вертикально, заключена в деревянную коробку со стеклянной передней стенкой, закрываемой деревянной задвижкой (при отсчете температуры задвижка выдвигается вперед). Определение температуры в приборе Струве, как и во всех приборах с простыми жезлами, сводится к тщательному отсчету шкал ртутных термометров (предварительно определяются специальным исследованием поправки термометров). При применении приборов с простыми жезлами непременно приходится считаться с падением температуры ртути в термометре с истинной

температурой соответственного жезла, значительно более защищенного от внешних влияний по сравнению с трубкой термометра. Здесь именно возникает вопрос о возможности искажения результатов измерения базиса систематической ошибкой вследствие указанного несовпадения отсчитываемых по термометрам температур с истинными температурами жезлов. Вопрос о возможных размерах такой систематической ошибки окончательно еще не решен; выводы, сделанные Бесселем



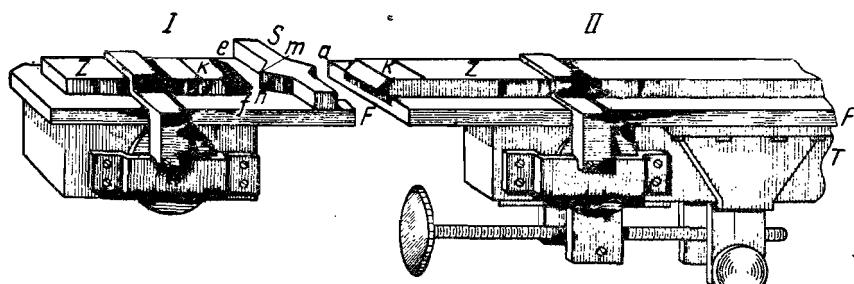
Черг. 117

при измерениях в Восточной Пруссии, с одной стороны, послужили основанием для западно-европейских геодезистов считать эту систематическую ошибку весьма значительной и простые жезлы — даже непригодными для точных измерений, хотя результаты Бесселя, как это теперь выяснилось, далеко не обладают надлежащей для обоснования указанного вывода точностью; с другой стороны, в России, несмотря на значительное число измеренных прибором Струве базисов, выводы относительно размеров рассматриваемой систематической ошибки, обусловленной неверным определением температуры жезлов, получены лишь косвенным путем и из небольшого материала, причем эти выводы оказываются противоположными западно-европейским; так, В. Я. Струве считал эту ошибку сводящейся к нулю, а А. С. Васильев (из измерений на Шпицбергене) полагал ее не превышающей 1 : 450 000 доли длины. Спор этот решен в пользу Струве в недавнее время упоминаемыми ниже фундаментальными исследованиями немецкого геодезиста Г. Фёрстера: последний пришел к выводу, что базисные приборы с простыми жезлами дают меньшую систематическую ошибку, чем приборы двух остальных типов.

Относительно несовпадения температур термометра и жезла можно предположительно сказать следующее: при измерениях летом, в ранние утренние часы термометр показывает температуру, весьма близкую к температуре жезла, затем по мере нагревания наружного воздуха термометры уходят вперед, т. е. показывают более высокие температуры по сравнению с соответственными температурами жезлов. После полудня

яник и обертка жезла обусловливают более медленное, по сравнению с наружным воздухом, остывание меры, и поэтому после полудня показания термометров оказываются меньше одновременных с пими температур жезлов. Эти расхождения показаний ртутного термометра и истинной температуры жезла выражаются вообще несколькими десятыми долями градуса. При условии измерения базиса как в дополуденное, так и в послеполуденное время мы в результате измерения получим некоторую компенсацию односторонних ошибок, вызываемых несоответствием показаний ртутного термометра истинной температуре жезла; но эта компенсация никогда не будет полной, и остающаяся ошибка в длине базиса, конечно, имеет характер систематической ошибки — она будет вообще пропорциональна длине базиса. Необходимо иметь в виду, что ошибка в определении температуры жезла из кованого железа на  $0^{\circ}1$  С вызывает ошибку в определении длины жезла на  $1 : 850\,000$  ее долю. Несомненно, размер этой ошибки можно существенно уменьшить, пользуясь при измерении базиса переносными щирмами, закрывающими с боков и сверху весь одновременно устанавливаемый комплект жезлов, и надевая на коробки с термометрами покрышки. Можно также лабораторным путем определить коэффициенты температурного отставания жезла и затем, пользуясь ими, вводить поправки в отсчеты по термометру. Правда, нужно иметь при этом в виду, что температурные отставания жезла в закрытом помещении и на воздухе — разные, как установлено исследованиями Фёрстера, что также следует учесть при определении указанных коэффициентов.

По указанным уже соображениям в Западной Европе отказались от употребления приборов с простыми жезлами, а стали пользоваться преимущественно биметаллическими приборами. Применение принципа биметаллизма мы рассмотрим на примере базисного прибора Бесселя. Этот прибор, как и все приборы с концевыми рабочими мерами, состоит из четырех жезлов. На черт. 118 изображены: задний конец идущего впереди при измерении жезла II и передний конец жезла I, предыдущего по отношению к жезлу II. Каждый жезл состоит:



Черт. 118

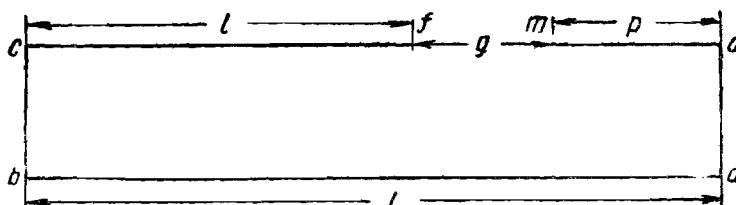
1) из двух полос — верхней  $Z$ , цинковой, и нижней  $F$ , — железной; цинковая полоса в приборе Бесселя первоначального устройства лежала свободно своей нижней поверхностью на железной полосе, будучи спаяна с ней и соединена винтами лишь своим левым, задним концом (и не имела более нигде никаких скреплений с железной полосой);

в приборах более позднего устройства цинковая полоса лежит на маленьких роликах, укрепленных на верхней плоскости железной полосы, соединяясь с последней, как и прежде на заднем левом конце, винтами и спайкой; концами цинковой полосы служат стальные клинья  $k$  с горизонтальными ребрами;

2) из стальной призмы  $S$ , привинченной наглухо к переднему концу железной полосы и имеющей вертикальные ребра;

3) из железного осциллятора  $T$  в виде бруса с поперечным сечением около  $4 \text{ см}^2$ , предохраняющего цинковую и железную полосы от продольного прогиба и несущего на себе семь поперечных осей для семи пар роликов, на которые укладывается своей нижней поверхностью полоса  $F$ ; при помощи особого винта железная полоса  $F$  (вместе с цинковой) может получать на этих роликах поступательное движение. Описанные жезлы помещаются в деревянных ящиках, из которых во время измерения выступают наружу лишь клинья  $k$  (и призма  $S$ ); ящики с жезлами во время измерения устанавливаются на деревянных козлах. К прибору Бесселя принадлежит компаратор особого устройства и мерный клип (из стекла) с ценой одного деления в одну сотую долю парижской линии, что составляет  $0,0225 \text{ мм}$ ; с 1908 г. стали употреблять клинья с ценой одного деления в  $0,02 \text{ мм}$ ; на глаз можно оценивать десятые доли наименьшего деления.

Под длиной  $L$  жезла (при некоторой температуре) в приборе Бесселя понимается расстояние от горизонтального ребра (линии пересечения образующих клинья и склонных плоскостей) левого (заднего) клина  $k$  цинковой полосы до переднего вертикального ребра стальной призмы  $S$ . Расстояние  $q$  между задним ребром  $mn$  призмы  $S$  и передним ребром  $ef$  цинковой полосы заметно изменяется вместе с изменениями температуры жезла, потому что цинковая полоса  $Z$  может свободно расширяться, независимо от железной полосы  $F$ , а коэффициент  $k_1$  ее расширения почти в три раза больше коэффициента расширения  $k$  железной полосы. Измерения  $q$  уломанным мерным клипом обнаруживают изменения этой величины, соответствующие сравнительно незначительным изменениям в температуре жезла. Определив точно, из особого исследования, величину  $q_0$  и длину  $l_0$  цинковой полосы  $Z$ , соответствующие температуре  $t_0$ , можно составить уравнение, выражающее  $q - q_0$  в функции  $t - t_0$ , и из него вывести затем температуру  $t$ , соответствующую измеренному мерным клипом значению  $q$ . Пусть (черт. 119)  $bd$



Черт. 119

изображает железную полосу жезла,  $cf$  — цинковую,  $mn$  — призму  $S$ , причем  $c$  и  $f$  пусть соответствуют серединам горизонтальных ребер клиньев цинковой полосы, а  $m$  и  $a$  — ребрам  $mn$  и  $a$  призмы  $S$ . Из черт. 119 имеем соотношение

$$L_0 = l_0 + q_0 + p_0, \quad (127)$$

в котором  $L_0$ ,  $l_0$ ,  $q_0$  и  $p_0$  соответствуют температуре  $t_0$ . Очевидно, при переходе от температуры  $t_0$  к температуре  $t$  приращения отрезков  $bd$  и  $ca$ , т. е. обеих частей равенства (127), будут равны между собой. Поэтому

$$k \cdot L_0(t - t_0) = k_1 l_0(t - t_0) + (q - q_0) + k \cdot p_0(t - t_0),$$

где  $k$  и  $k_1$  — коэффициенты расширения железной и цинковой полос соответственно. Отсюда

$$t - t_0 = \frac{q - q_0}{k(L_0 - p_0) - k_1 l_0}$$

или, принимая во внимание соотношение (127), имеем окончательно

$$t - t_0 = \frac{q - q_0}{k(l_0 + q_0) - k_1 l_0},$$

$$t - t_0 = \frac{q - q_0}{(k - k_1) l_0 + k q_0}. \quad (128)$$

Решение вопроса об определении  $t - t_0$  равносильно определению длины жезла  $L$ . Определение мерным клином малой разности  $q - q_0$  может быть выполнено весьма точно, со средней ошибкой  $\pm 0,005 \text{ мм}$ ; нетрудно видеть, что при такой точности определения  $q - q_0$  и при  $t_0 = 2$  то градуса  $\approx 3898 \text{ мм}$  средняя ошибка определения  $t - t_0$  из уравнения (128) не превысит  $\pm 0^{\circ}06$ ; с другой стороны, при одном и том же опытном наблюдателе в разности  $q - q_0$ , а, следовательно, и в разности  $t - t_0$ , трудно ожидать систематических влияний. Другими словами, в приборе Бесселя определение температуры выполняется как будто бы с высокой степенью точности, оставляющей позади точность вывода температуры в приборе Струве. Но все предыдущие рассуждения основаны, во-первых, на предположении отсутствия каких-либо задержек и трения в движении цинковой полосы относительно железной, что не соблюдается в полной мере даже в приборах последнего устройства; во-вторых, на утверждении, что в каждый данный момент температуры железной и цинковой полос жезла совершенно равны между собой. В действительности ход изменения температуры металлической штанги во время полевых измерений зависит от удельной теплоемкости и плотности металла, объема и поверхности штанги, способности поглощения и теплоизводности металла, причем скорость изменения температуры штанги или, вернее, скорость восприятия ею новой температуры окружающего ее воздуха убывает с увеличением первых трех из перечисленных элементов и возрастает с увеличением остальных трех. В приборе Бесселя скорости изменений температур для цинковой и железной полос относятся друг к другу, как  $1 : 0,6$ . Другими словами, при возрастании температуры воздуха расстояние  $q$ , измеренное мерным клином, оказывается преуменьшенным, а при убытии температуры — преувеличением. Так как погрешность в  $q$ , обусловленная неодинаковостью скоростей восприятия температур цинком и железом, может достигать как будто бы величины  $\pm 0,025 \text{ мм}$ , то, следовательно, в выводе температуры жезла во время измерения может быть сделана систематическая ошибка в  $\pm 0^{\circ}3$ , причем в среднем из результатов измерений, исполненных до полудня и после полудня, влияние этих ошибок будет компенсироваться лишь отчасти. Таким образом, определение

длины базиса прибором Бесселя с ошибкой, меньшей 1 : 500 000, становится гадательным из-за систематических погрешностей в определении температуры жезлов.

Построенные позже базисные приборы Ибаньеса-Бруннера (Испания), Репсольда (для Англии), Прусского геодезического института (черт. 124—126) и др. состоят так же, как и прибор Бесселя, из биметаллических жезлов, построенных из меди и платины (Прусского геодезического института) или из стали и цинка (прибор Репсольда), а металлический термометр осуществляется так: вблизи каждого конца жезла на платиновой полосе и на платиновой пластинке, привинченной к медной полосе, нанесены шкалы с подразделениями через 0,1 мм, причем шкала медной полосы приходится против соответственной шкалы платиновой полосы; обе полосы соединяются винтами по середине их длины, не касаясь более нигде друг друга (подробности устройства приведены ниже), а упомянутые шкалы отчитываются микроскоп-микрометрами. По определенным весьма точно этими микроскоп-микрометрами изменениям в относительном расположении штрихов шкал, построенных на медной и на платиновой полосах, можно определить температуру жезла во время измерения, если коэффициенты расширения полос хорошо известны и если хорошо известно из особых исследований расстояние между некоторыми двумя (стоящими друг против друга) штрихами шкал на медной и на платиновой полосах при определенной, также хорошо известной, температуре  $t_0$ .

Вышеизложенные соображения об основном недостатке базисных приборов, построенных на принципе биметаллизма, — значительная систематическая ошибка в получении температуры жезла, вытекающая из различия в температурном запаздывании разных металлов, — нашли полное подтверждение в опубликованных недавно исследованиях базисных приборов Бесселя и Бруннера, исполненных Фёстером. Поводом к этим исследованиям послужили неоднократно наблюдавшиеся значительные расхождения результатов измерений одного и того же базиса двумя разными базисными приборами. Так, значения длины Боннского базиса (около 2,5 км длины), измеренного приборами Бесселя и Бруннера в 1892 г., разошлись примерно на 1 см, т. е. на 1 : 250 000; при измерении базиса под Гумбиненом (Восточная Пруссия) в 1906 г. приборами Бесселя и Едерина результаты разошлись на:

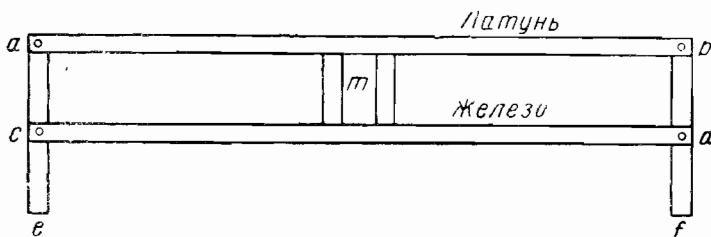
$$\text{Бессель} - \text{Едерин} = \pm 44,45 \text{ мм},$$

что при длине базиса около 6 км дает 1 : 135 000. Фёстер установил, что в приборе Бесселя цинковая полоса принимает температуру воздуха на 3—6 минут раньше, чем железная полоса; в приборе Бруннера — медная полоса принимает температуру воздуха на 1—2 минуты ранее платиновой полосы. После введения в базис под Гумбиненом в полученный прибором Бесселя результат поправки за разность температурных отставаний цинковой и железной полос, приведенное выше, расхождение значительно уменьшилось (до 1 : 530 000):

$$\text{Бессель} - \text{Едерин} = \dots 11,34 \text{ мм}.$$

Вместе с тем Фёстер нашел, что показания металлического термометра в приборе Бесселя искажены температурными последействиями цинковой полосы, т. е. влиянием предшествующих температурных состояний на ее длину, а следовательно, и на ве-

личину  $q$ ; Фёрстер подозревает, что такое же температурное последействие, но в меньшем размере испытывает и медная полоса в приборе Бруниера. Вышеприведенные факты привели Фёрстера к выводу, что от принципа биметаллизма в базисных приборах следует отказаться и в жезловых приборах лучше всего пользоваться жезлом из плавленого кварца, отличающегося, как указано выше в § 28, хорошей стабильностью и малым коэффициентом расширения (от  $0,4 \cdot 10^{-6}$  до  $0,5 \cdot 10^{-6}$ ); в частности, он отмечает, что при измерении базиса прибором Бруниера получается значительно более точные результаты, если длину платиновой полосы определять, исходя из температуры, отсчитываемой по термометру, просто положенному на платиновую полосу.



Черт. 120

В компенсационных приборах жезл состоит из нескольких полос, изготовленных из разных металлов и соединенных между собой так, что расстояние между некоторыми двумя точками жезла остается постоянным при всяких температурах. Так, в приборе Кольби, которым измерялись базисы в Индии, жезл состоит из полос: латунной  $ab$  и железной  $cd$ , наглухо соединенных между собой в средней части двумя перекладинами  $m$ ; на концах обе полосы связаны шарпирами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  (черт. 120) с язычками  $ae$  и  $bf$ ; расстояние между штрихами  $e$  и  $f$  язычков будет, очевидно, постоянным, если в приборе соблюдено условие

$$\frac{ae}{ce} = \frac{bf}{df} = \frac{k}{k_1},$$

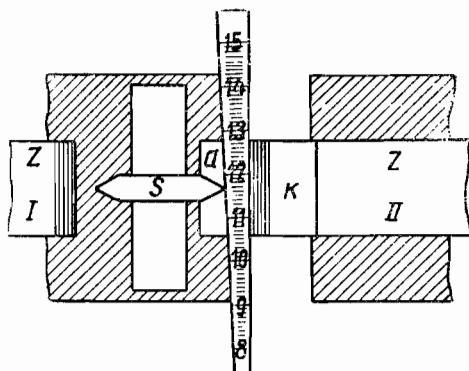
где  $k$  и  $k_1$  — коэффициенты расширения соответственно латунной и железной полос. Прибор Кольби на практике не оправдал, однако, возлагавшихся на него надежд; очевидно, компенсационные жезлы обладают всеми недостатками биметаллических и по указанным выше причинам должны быть отброшены.

Наилучшим базисным прибором, с точки зрения участия температуры, нужно признать прибор американского геодезиста Уудварда (Woodward): он состоит из стального 5-мм штрихового жезла, покоящегося во время измерения в корыте, наполненном измельченным льдом. Жезл находится, таким образом, постоянно при нулевой температуре, чем исключаются полностью ошибки за счет температуры и ошибки температурных коэффициентов жезла. Однако, большая громоздкость прибора делает его применение весьма ограниченным (например, измерение экспериментальных базисов или базисов-эталонов).

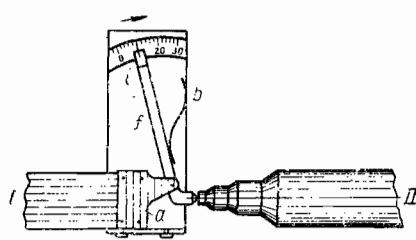
Перейдем теперь к вопросу о способах контактирования между собой концов жезлов, т. е. определения расстояния между передним концом заднего, предшествующего жезла  $I$  и задним концом последующего, укладываемого вслед за ним при измерении базиса жезла  $II$ . В базис-

ных приборах с концевыми жезлами применяются разные способы «механического контакта», в которых расстояния между жезлами измеряются какими-либо механическими способами, например, при помощи высоков с вертлюгами (приборы Борда, Тейнера), мерных клиньев (прибор Бесселя), фольгебеля (прибор Струве) и пр.: в приборах с штриховыми жезлами осуществляется «оптический контакт», т. е. расстояние между передним штрихом жезла при  $n$ -ой укладке его вдоль базиса и задним штрихом при  $n+1$ -ой укладке того же жезла определяется микрометром микроскопа, положение которого за время переноса жезла должно быть неизменным.

В приборе Бесселя упомянутый выше мерный клин всовывается между вертикальным ребром  $a$  стальной призмы  $S$  жезла  $I$  (черт. 121) и горизонтальным ребром клина  $k$  цинковой полосы жезла  $II$ : это ребро служит направляющей при движении мерного клина, а отсчет происходит при точке  $a$ . Всовывание медного клина вызывает некоторое упрогое раздвигание концов жезлов, т. е. в приборе Бесселя расстояние между концами смежных жезлов  $I$  и  $II$  получается всегда несколько большее, чем следует: систематическая ошибка в длине базиса, обусловленная этим недостатком прибора, иногда (для некоторых наблюдателей) может достигать весьма заметного значения (до 1 : 300 000).



Черт. 121



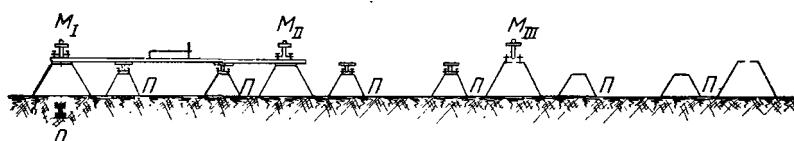
Черт. 122

В приборе Струве один конец жезла представляет собой цилиндрик, изображенный при жезле  $H$  на черт. 122; этот так называемый «твёрдый» конец при измерениях всегда является задним концом жезла. Другой «мягкий» конец жезла, идущий при измерениях всегда впереди, имеет следующее устройство (черт. 122). К жезлу привинчены пластиинки  $a$  и  $b$ , несущие короткую попеченную ось фюльгебеля; длинное плечо  $f$  этого рычага-фюльгебеля снабжено указателем  $i$ , а короткое нижнее плечо оканчивается цилиндриком такого же вида, каковой имеется на твердом конце жезла; на фюльгебель давит пружина, прикрепленная другим концом к пластинке  $b$ . По указателю  $i$  фюльгебеля отсчитывается шкала, напечатанная на пластинке  $b$ : среднее деление шкалы обычно подписывается цифрой 15, и подпись делений возрастает слева направо. Описанный фюльгебель с пластинками  $a$  и  $b$  помещается в особой, привинченной к жезлу медной коробке, из которой выступает наружу лишь цилиндрик фюльгебеля. При измерениях твёрдый конец жезла  $H$  подводится осторожно (см. ниже) до соприкосновения с цилиндриком фюль-

гебеля заднего жезла  $I$ , причем это соприкосновение можно выполнить благодаря действующей на фюльгебель пружине без удара, т. е. без сдвига жезла  $I$  (уже установленного) и без повреждения концов обоих жезлов. Изменению отсчета по индексу  $i$  на одно деление соответствует перемещение цилиндра фюльгебеля (вдоль оси жезла) на 0,01 парижской линии. Длиной  $l_t$  мерного жезла при некоторой температуре  $t$  в приборе Струве называется расстояние между его концами при совпадении указателя фюльгебеля с делением 15. При измерении базиса довольноются такими установками жезлов, при которых отсчеты  $f$  по шкалам фюльгебелей лишь незначительно разнятся от 15, но зато впоследствии, при вычислении базиса, длину  $l$  каждого отложенного жезла вычисляют по формуле

$$l = l_t + v(15 - f),$$

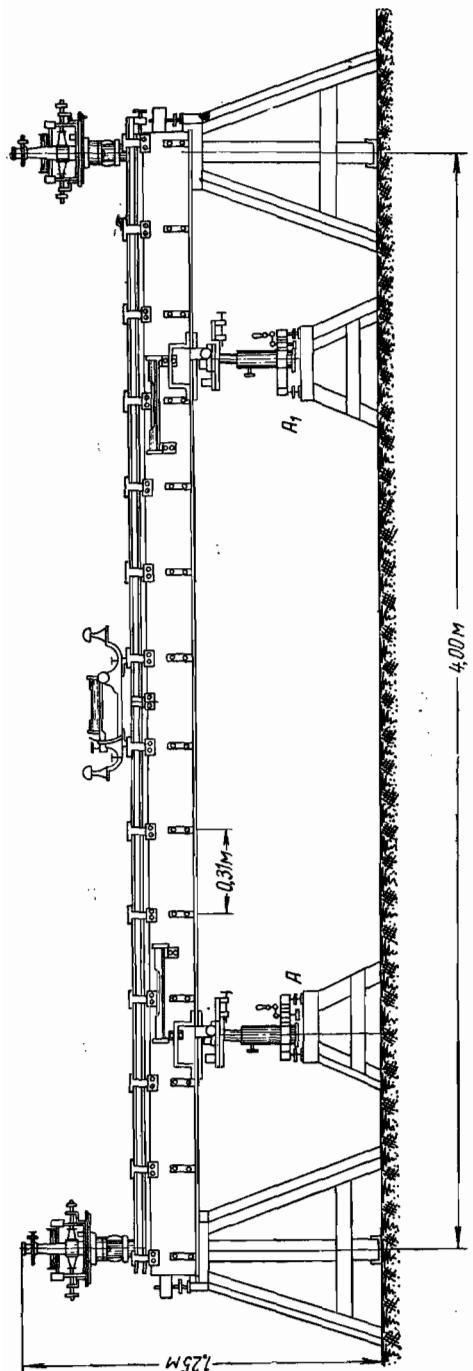
в которой  $v$  — цена деления фюльгебеля; член  $v(15 - f)$  представляет собой поправку за фюльгебель.



Черт. 123

На черт. 123 схематически изображено измерение базиса прибором с штиховыми жезлами: вдоль базисной линии устанавливают сперва штативы  $P$ , число которых обычно равно 8; затем устанавливают микроскоп  $M_1$  так, чтобы ось его была вертикальна и располагалась строго над базисным центром, обозначающим начало базиса; после этого устанавливают второй  $M_{II}$  и третий  $M_{III}$  микроскопы так, чтобы их оси были вертикальны, находились в вертикальной плоскости базиса (в створе базиса) и отстояли бы: ось второго микроскопа от оси первого и ось третьего — от оси второго на расстояния, почти совпадающие с длиной жезла.

Для осуществления этих установок подставки микроскопов имеют микрометрические приспособления, позволяющие перемещать микроскопы в продольном и поперечном к базису направлениях. Далее, провизировав биссектором нитей первого микроскопа на базисный центр и сделав соответственные отсчеты по гребенке и барабану микроскопа, устанавливают жезл, пользуясь подставками штативов  $P$  так, чтобы в микроскопы  $M_1$  и  $M_{II}$  можно было точно наблюдать штрихи шкал на концах меры. После наведения нитей микроскопов на эти штрихи и отсчетов по шкалам и барабанам жезла переносится далее по линии базиса и устанавливается для отсчитывания его посредством микроскопов  $M_{II}$  и  $M_{III}$ ; за время этой второй установки жезла и его отсчитывания микроскопами  $M_{II}$  и  $M_{III}$  микроскопы  $M_1$  и  $M_{II}$  должны неизменно сохранять свое положение, по окончании же этого отсчитывания микроскоп  $M_1$  переносится на уточненную длину жезла вперед и подлежащее устанавливается, а затем следуют перенос жезла, установка его и отсчеты по микроскопам  $M_{III}$  и  $M_1$  и т. д. Если при некоторой установке жезла оказывается, что передний микроскоп стоит слишком высоко или низко, то положение микроскопа исправляется передвижением его в обоймах подставки. Приборами с штиховыми жезлами являются



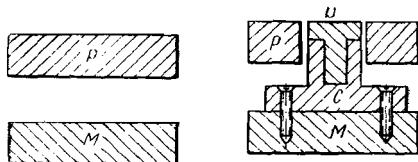
Черт. 124

базисные приборы Ибаньеса-Бруннера, Репольда, Прусского геодезического института; во всех этих приборах, как уже указано выше, жезлы биметаллические.

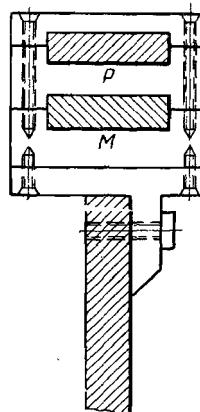
На черт. 124 изображен общий вид базисного прибора Прусского геодезического института, на черт. 125 слева показано устройство жезла (поперечный разрез), справа — поперечный разрез его концевой части. Жезл состоит из платиновой полосы  $P$  длиной 4 м, с поперечным сечением  $5 \times 21$  мм, и медной полосы  $M$  — тех же размеров; обе полосы разделены свободным пространством и не касаются друг друга (медная полоса лежит ниже платиновой на 7 мм); в средней части они наглухо соединены между собой (соединение это показано на черт. 126). Массивная железная штанга длиной в 4 м, показанная в поперечном разрезе на черт. 126, несет на себе обе полосы  $P$  и  $M$ , причем каждая из них лежит на 14 роликах, тщательно отрегулированных по высоте (подставки для роликов выведены от железной штанги). На конце к медной полосе  $M$  (черт. 125, справа) привинчен наглухо выступ  $C$  из меди, а в платиновой полосе  $P$  сделано отверстие  $\vartheta$ ; полосе  $P$  имеется едва заметный промежуток, который не препятствует полосам  $P$  и  $M$  свободно расширяться; на верхней плоскости части  $b$  и на пластине  $P$  нанесены штрихи через 0,1 мм, взаимное положение которых определяется из отсчетов по микроскоп-микрометрам.

В число принадлежностей к базисному прибору входит теодолит, служащий для установки микроскопов или жезлов в створе базиса. При

измерений пользуются особыми переносными ширмами, защищающими жезл от непосредственного нагревания солнцем. Очевидно, на точности измерения базиса сказываются: правильность ориентировки жезла в створе базиса и точность учета наклонности оси жезла к горизонту. Для установки жезла в створе базиса намечают предварительно при помощи теодолита ряд точек, лежащих точно на линии базиса и отстоящих друг от друга на 200—300 м. Употребляемый при этом теодолит должен иметь достаточно сильную трубу (с увеличением около 40) и лимб, отсчитываемый микроскопом-микрометрами с точностью до 5"; движение трубы такого теодолита около горизонтальной оси должно быть совершенно правильным, а выверка инструмента выполнена с полной тщательностью. Становясь с теодолитом на середине базиса и направляя его трубу (с переводом ее через зенит) на отчетливо видимые марки, установ-



Черт. 125



Черт. 126

ленные на концах базиса, находят на линии базиса первую вспомогательную точку, положение которой считают окончательно установленным, если горизонтальный угол при ней отличается от  $180^\circ$  на 2—3''. Пользуясь маркой, поставленной над этой первой точкой, находят таким же образом между ней и соответственным концом базиса вторую (и третью) точку и т. д.

При измерении базиса концевыми жезлами теодолит устанавливается сперва на первой (от начала) вспомогательной точке и по указаниям наблюдателя при теодолите передний конец каждого откладываемого жезла вводится в линию базиса (задний конец устанавливается непосредственно против конца уже отложенного предшествующего жезла); по измерении первого участка базиса теодолит переносится на следующую вспомогательную точку и т. д. При пользовании штриховым жезлом таким же образом последовательно устанавливаются микроскопы строго в створе базиса.

Если ось некоторого жезла образует угол  $\alpha$  со створом базиса, то вместо длины  $l$  этого жезла, очевидно, будет отложена величина, меньшая на  $2l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . Пренебрегая поправками вида  $2l \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , мы сделаем в длине базиса относительную ошибку

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha'^2_m}{2} \sin^2 1',$$

поправка под  $\alpha_m'$  среднее для базиса значение угла  $\alpha$ . Ставя требование, чтобы указанная ошибка была меньше 1 : 2 000 000, имеем соотношение

$$\frac{\alpha'^2_m}{2} \sin^2 1' \leq \frac{1}{2 000 000},$$

откуда

$$\alpha_m \leqslant 3',4.$$

Отсюда вытекает, что при 4-метровой длине жезла разность ошинок в установке заднего и переднего концов жезла не должна быть более 4 м.м. Так как 4 м.м с наибольшего расстояния теодолита от жезла, равного 300 м, т. е. расстоянию между смежными вспомогательными точками, усматриваются под углом в 3'', то, очевидно, труба теодолита должна иметь увеличение порядка сорока.

Наклонность оси жезла к горизонту определяется с помощью настенного уровня (черт. 124), ось которого должна быть строго параллельна оси жезла. Называя угол наклона оси жезла через  $i$  и имея в виду, что откладываемая длина будет равна в этом случае  $l \cos i$ , легко получим, что относительная ошибка в длине жезла, обусловленная ошибкой  $di$  в определении  $i$ , равна  $\sin idi$ ; величина  $di$  слагается всегда из систематической части  $db$  и чисто случайной части. Принимая во внимание, что влияние случайной части на ошибку в базисе достаточной длины (напр. 6—7 км) пренебрегаем по сравнению с влиянием систематической части, можно приять, что относительная ошибка  $\Delta$  длины базиса, обусловленная ошибками в  $i$ , равна

$$\Delta = \sin i_m \cdot db,$$

где  $i_m$  — среднее значение угла  $i$  для всего базиса. Ставя попрежнему требование, чтобы  $\Delta$  было не более 1 : 2 000 000, имеем соотношение

$$\sin i_m \cdot db'' \sin 1'' \leqslant \frac{1}{2\ 000\ 000},$$

откуда при  $i$ , не превышающем  $0^{\circ},5$ ,

$$db \leqslant 11''.8.$$

Таким образом, при учете наклонности жезла наиболее опасной является систематическая ошибка  $db$ , обусловленная, например, ошибкой в определении нульпункта уровня, ошибкой от сползания пузырька уровня в сторону солнца и пр.

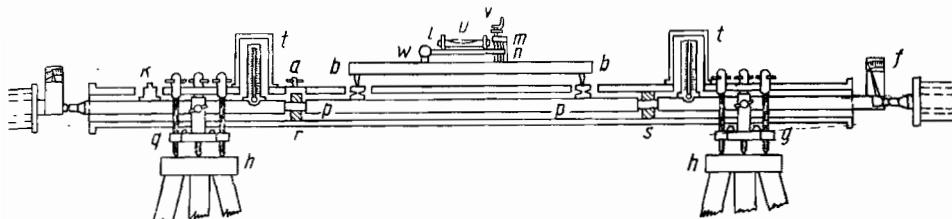
Из вышеизложенного следует, что в базисных приборах, предназначенных для измерения длин первоклассных базисов, необходимо тщательно определять из специальных исследований постоянные, входящие в вычисление длины базиса, например: уравнение жезла, температурные коэффициенты его, нульpunkt уровня, цены делений барабанов микрометров и пр., так как влияние их на длину базиса носит систематический характер и может достигать заметной величины.

Дополнительные подробности по измерению базисов жезловыми приборами приведены в следующем параграфе.

### § 35. Базисный прибор Струве, измерение им базиса и вычисление длины последнего

Базисный прибор Струве состоит из четырех мерных (рабочих) и одного нормального жезлов (концевых), изготовленных из кованого железа и имеющих длину в два тоаза при квадратном поперечном сече-

нии со стороной около 4 см. Нормальный жезл имеет оба конца «твёрдые», т. е. оканчивается цилиндриками с тщательно полированными и слегка выпуклыми передними их поверхностями. Рабочие жезлы имеют один копец твёрдый, а другой — мягкий с фюльгебелем, устройство которого уже описано выше. Жезл поконится в ящике на двух медных подставках  $r$  и  $s$  (черт. 127) в виде разборных перегородок,



Черг. 127

имеющих одна — круглое, а другая — квадратное отверстия; подставки отстоят от концов жезла на  $\frac{1}{4}$  его длины; в этих местах, соответственно отверстиям перегородок  $r$  и  $s$ , жезл имеет квадратное и круглое сечения, суженные по сравнению с общей толщиной жезла; через перегородку  $r$  (и верхнюю крышку деревянного ящика) пропущен зажимной винт  $a$ , закрепляющий в нужном положении жезл в ящике. Вблизи перегородок  $r$  и  $s$  находятся описанные выше термометры  $t$ . За исключением суженных мест жезл по всей своей длине обернут ватой и обвит холщевой лентой. К жезлу припаяны еще два столика  $p$ , служащие подставками для пакладного уровня. Благодаря широким продольным отверстиям, сделанным в крышке ящика у стержня  $k$ , у зажимного винта  $a$ , у столиков  $p$  и у термометров  $t$ , а также благодаря достаточной длине суженных частей жезла у подиорок  $r$  и  $s$ , жезл может передвигаться внутри ящика по своей оси в пределах 2,5 см в ту и другую сторону. Эти передвижения производятся посредством особого ключа, надеваемого на стержень  $k$  и на стержень на ящике (не показанный на чертеже).

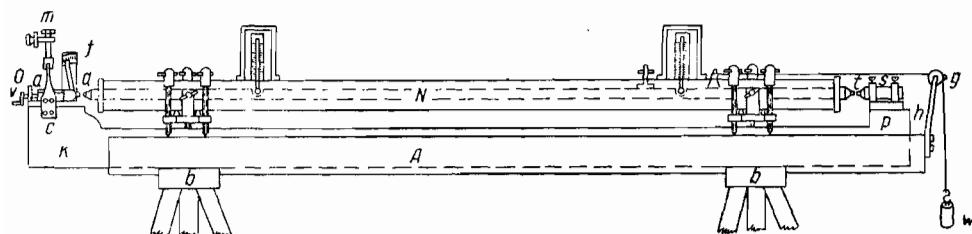
Уровень, ставящийся тремя ножками на столики  $p$  жезла, имеет основание  $bb$  в виде удлиненной буквы  $T$ , несущее — муфту-подставку  $tt$  и маленькую колонку  $w$  с гнездом для поперечной горизонтальной оси; на эту ось одним концом пасажена линейка  $l$ , несущая уровень  $U$  и имеющая на другом конце матку для винта  $v$ . На муфте-подставке  $tt$  укреплена шкала в виде дуги с 250 делениями, которые отчитываются по указателю на линейке  $l$ : цена одного деления шкалы равна примерно  $100''$ , а средняя ошибка отсчета по указателю не превышает  $5''$ . При определении при помощи описанного уровня наклонности  $i$  оси жезла, по установке его ножек на столиках, врачают рукоятку при винте  $u$  до тех пор, пока пузырек уровня  $U$  не придет на середину, после чего делают отсчет  $S$  по шкале уровня. Предполагая, что всегда при измерениях уровень ставится на столики  $p$  так, как это изображено на черт. 127, т. е. шкалой вперед — в направлении к фюльгеблю  $f$ , и называя через  $M$  место нуля на шкале (отсчет по шкале, когда ось уровня  $U$  располагается параллельно плоскости столиков  $p$ ) и через

$i$  — угол между плоскостью «столиков» и осью жезла, то для наклонности  $i$  оси жезла будем иметь формулу

$$i = M - m - S$$

(при условии, что подписи делений на шкале уровня возрастают снизу вверх).

**Компаратор прибора Струве** (черт. 128) имеет своим основанием три расположенных параллельно друг другу бруса  $A$ ,  $K$  и  $B$  (на черт. 128 брус  $B$  закрыт бруском  $K$ ). Крайние брусья  $A$  и  $B$  служат лишь для установки на них двух медных треугольников-подставок, несущих на себе во время сравнения ящик с жезлом и совершенно тождественных



Черт. 128

с изображенными на черт. 127 подставками  $qq$ ; оба бруса  $A$  и  $B$  соединены наглухо с козлами  $bb$  и, кроме того, правые их концы скреплены попечиной, к которой привинчена стальная пластина  $h$  с блоком  $g$ . Центральный массивный брус  $K$ , сделанный из дуба, не касается брусьев  $A$  и  $B$ . На левом конце этого бруса укреплена солидная медная пластина  $o$  и колонка  $s$ , несущая микроскоп-микрометр  $t$ . Пластина  $o$  имеет на своей верхней плоскости по середине продольный паз, достаточно глубокий, в котором может двигаться пластина  $a$ ; эта последняя несет на переднем своем конце фольгебель  $f$ , а на верхней своей горизонтальной плоскости имеет шкалу с мелкими делениями, наблюдаемую в микроскоп  $t$ . Движение пластины  $a$  осуществляется посредством бесконечного винта  $v$ . На правом конце бруса  $K$  укреплена стальная пластина  $p$ , несущая стальной цилиндр  $S$ , оканчивающийся совершенно таким же цилиндром  $l$ , такие имеются на твердых концах жезлов.

При откладывании на компараторе длины мерного жезла поступают так: отодвигают предварительно влево пластинку  $a$  с фольгебелем и устанавливают жезл с помощью винтов при подставках так, чтобы его мягкий конец пришелся против цилиндра  $t$ , а твердый — против цилиндра  $d$  фольгебеля компаратора; малым поступательным движением жезла в ящике приводят его мягкий конец в соприкосновение с цилиндром  $t$  так, чтобы фольгебель жезла стал ровно на деление 15, и затем придвигают, действуя винтом  $v$ , пластинку  $a$  к твердому концу жезла так, чтобы отсчет по фольгебелю компаратора также был равен 15. После этого наводят нити микроскопа  $t$  на штрихи шкалы на пластинке  $a$ , ближайший к нульпункту микроскопа, и делают отсчеты по барабану микрометра и по термометрам жезла. При откладывании на компараторе нормального жезла он придвигается до соприкосновения с цилиндром  $t$  посредством привенивания к нему гири  $W$ , едва-едва

способной сдвигать жезл в ящике\*, придвигание же фюльгебеля компаратора к другому концу нормального жезла, равно как и соответственный отсчет по микрометру, производятся так же, как и для мерных жезлов. Называя для жезлов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и для нормального жезла  $N$  отсчеты по шкале пластиинки  $a$ , т. е. расстояния от нуля этой шкалы до нульпункта микрометра  $m$ , измеренные при компарировании, соответственно через  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $n$ , будем иметь, что разности длин каждого мерного и нормального жезлов при средней температуре сравнения равны соответственно  $n - a$ ,  $n - b$ ,  $n - c$ ,  $n - d$ .

Каждый базисный прибор до его употребления должен быть тщательно исследован, т. е. должны быть определены все постоянные прибора, входящие в вычисление длины базиса, с выводом погрешностей их определения и, кроме того, должно быть выяснено, на сколько хорошо подготовлены отдельные части прибора и нет ли каких-нибудь недостатков в соединении их друг с другом.

В частности, в приборе Струве должны быть выполнены такие исследования:

1) определение цены деления барабана микрометра  $m$  компаратора; вывод ходовых и периодических ошибок шнита этого микрометра; исследование делений шкалы пластиинки  $a$  и определение средней ошибки отсчета по этой шкале, выполняемого при помощи микрометра;

2) определение чувствительности фюльгебеля компаратора и исследование изменений в длине компаратора под действием тяжести  $W$  при откладывании на компараторе нормального жезла и от других причин;

3) определение коэффициентов расширения жезлов, сравнение мерных жезлов с нормальным и вывод средней ошибки определения разностей  $n - a$ ,  $n - b$ ... (см. выше);

4) определение цены деления фюльгебеля каждого мерного жезла в интервале делений 13—17 (крайние допускаемые при измерении базиса пределы);

5) исследование термометров жезлов с составлением таблиц поправок к отсчетам по их шкалам;

6) определение цены деления шкалы на дуге уровня и точности отсчета по ней; определение места нуля  $M$  этой шкалы (перестановкой уровня на  $180^\circ$ ) и угла  $m$  между плоскостью «столиков» и осью жезла (перекладкой жезла с уровнем на  $180^\circ$ ), а также вывод погрешностей определения величин  $M$  и  $m$ ;

7) получение «уравнений» мерных жезлов.

Измерение базиса состоит из трех основных операций:

1. Подготовительные, заключающиеся в подготовлении линии базиса к возможно удобному исполнению измерений;

2. Начальные и конечные, состоящие: в определении горизонтального расстояния от заднего конца первого жезла до центра па заднем конце базиса; в измерении «остатка» базиса, т. е. части базиса, меньшей длины жезла и равной горизонтальному расстоянию от переднего конца последнего, уложившегося еще целиком па базисе жезла до центра па переднем конце базиса; сюда же относятся «привязки» к промежуточным времененным центрам при перерыве работы на ночь или по случаю ненастной погоды.

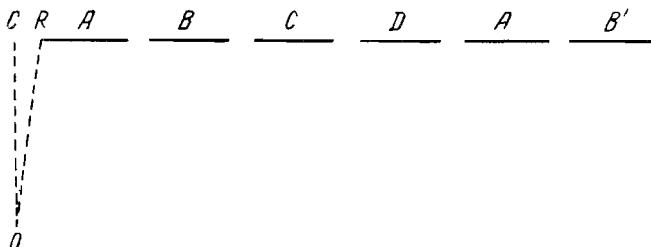
\* После придвигания гиря должна быть снята.

3. Собственно измерение базиса, состоящее в непрерывном откладывании друг за другом четырех мерных жезлов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  по линии базиса и в измерении малых промежутков между ними. В измерении базиса принимают участие четыре наблюдателя: наблюдатель 1 вводит посредством теодолита откладываемые жезлы в створ базиса; наблюдатели 2 и 3 устанавливают жезлы на подставках  $qq$  (см. черт. 127), определяют наклонности осей жезлов и отсчитывают термометры и фюльгебели; наблюдатель 4 заведует расстановкой по линии базиса деревянных табуретов  $hh$  и установкой на этих табуретах медных треножных подставок  $qq$ , несущих на себе жезлы (всего табуретов и подставок к ним, употребляющихся при измерении базиса, десять).

По указаниям наблюдателя 1 наблюдатель 4 устанавливает табуреты так, чтобы середины медных подставок под жезлы приходились в створе базиса; при этом установку по расстоянию выполняют, пользуясь особым деревянным правилом. Твердый конец первого жезла устанавливается над базисным центром по отвесу, а мягкий передний вводится в створ базиса при помощи горизонтальных (боковых) винтов подставок  $qq$  наблюдателем 3 по указанию наблюдателя 1. Задний конец каждого последующего жезла устанавливается наблюдателем 2 против установленного уже наблюдателем 3 переднего конца предыдущего жезла. Уже при установке подставок на табуретах наблюдатель 4, действуя их подъемными винтами, достигает того, что линия, соединяющая основания подставок, представляется либо плавной кривой, если участок базиса идет по местности с изменяющимися уклонами, либо прямой с некоторым уклоном, вообще меньшим, чем уклон местности. Этим достигается то, что при укладке некоторого последующего жезла задний его конец приходится уже сам собой почти против переднего конца предыдущего жезла, и оси их служат почти продолжением друг друга. Перенос некоторого заднего, уже отсчитанного, жезла вперед начинается всегда с того, что наблюдатель 2 посредством накладываемого на стержень  $k$  ключа (черт. 127) дает жезлу в ящике движение влево, отодвигая передний конец этого жезла от заднего конца следующего за ним жезла; после этого наблюдатели 2 и 3 осторожно поднимают ящик с жезлом и передают его рабочим, по приеме же жезла последними, наблюдатель 2, действуя ключом на стержень  $k$ , дает обратное движение жезлу в ящике так, чтобы он занял самое крайнее правое положение (пусть измерение базиса идет слева направо), закрепляет винт  $a$  и дает знак к переносу. Установка жезла начинается с того, что по указаниям малого поперечного уровня, ставящегося на задний столик, уничтожают, работая винтами подставок  $qq$ , поперечный скос жезла, а затем наблюдатель 2, действуя подъемными и боковыми винтами задней подставки, устанавливает ось цилиндрика на твердом конце жезла по продолжению оси уже установленного предшествующего жезла; одновременно наблюдатель 3 вводит свой конец жезла в линию базиса по указаниям наблюдателя 1 (жезлы всегда укладываются «мягким» концом вперед).

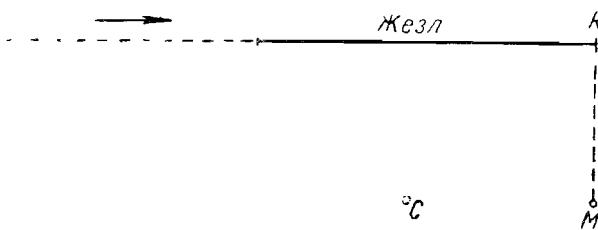
После такой первоначальной установки наблюдатель 2, действуя ключом, перемещает жезл в ящике до соприкосновения его твердого конца с фюльгебелем предшествующего жезла и, если нужно, несколько исправляет винтами подставки положение своего конца жезла, чтобы соприкосновение выпуклостей цилиндриков было центральным; одновременно наблюдатель 3, если это оказывается нужным, по указа-

ниям наблюдателя 1 исправляет положение переднего конца жезла. В самом начале измерения, как уже было сказано, твердый конец  $R$  (черт. 129) первого жезла  $A$  устанавливается над базисным центром  $C$  по отвесу, причем всегда будет иметь место малое уклонение  $R$  от  $C$ , измеряемое следующим образом. Еще до начала измерения восставляют теодолитом перпендикуляр  $CO$  к базису, на котором намечают точку  $O$  в расстоянии 8—10 м от  $C$ ;  $OC$  измеряется стальной лентой; над  $O$  устанавливают теодолит, которым и измеряют угол  $COR$  (при двух кругах); отрезок  $CR$  с соответственным знаком вычисляется, как катет,

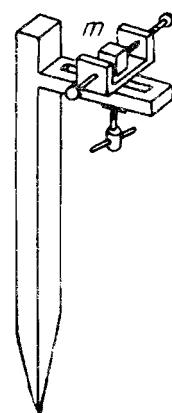


Черт. 129

по углу  $COR$  и катету  $OC$ . Установив первые четыре жезла  $A, B, C, D$ , отсчитывают наклонность оси жезла  $A$ , ставят уровень на  $B$ , отсчитывают термометры и фюльгебель при  $A$  (в это время наблюдатель 4 измеряет угол  $COR$ ), отсчитывают наклонность жезла  $B$ , ставят уровень на  $C$ , отсчитывают термометры и фюльгебель жезла  $B$ , отсчитывают уровень на  $C$  и ставят его на  $D$ . С этого момента наступает уже вполне определенный порядок работы, именно: по установке уровня на жезле  $D$  переносят жезл  $A$  в положение  $A'$ , устанавливают его в этом положении, отсчитывают уровень на  $D$  и ставят его на  $A'$ , отсчитывают термометры и фюльгебель жезла  $C$ , переносят жезл  $B$  в положение  $B'$  и устанавливают его, отсчитывают уровень на  $A'$  и ставят его на  $B'$ , отсчитывают термометры и фюльгебель жезла  $D$ , переносят жезл  $C$  и т. д. (переносят уровней, большого и малого, на следующий жезл выполняет наблюдатель 4).



Черт. 130



Черт. 131

При окончании работы наблюдатель 4 заблаговременно забивает в землю в створе базиса особую марку  $M$  (черт. 130 и 131) под передним или задним концом последнего отложенного по базису жезла, в зависимости от того, какой из концов жезла ближе к конечному

центру  $C$  базиса: расстояние марки от центра  $C$  должно быть меньше половины длины жезла. Устройство и употребление марки  $M$  понятно из черт. 130 и 131; точка  $m$  на верхней грани стального куба, перемещающегося в двух взаимно перпендикулярных направлениях, и есть центр марки. Когда точка  $R$  является передним концом последнего отложенного жезла, тогда устанавливают впереди еще один жезл, чтобы получить точку соприкосновения жезлов. При помощи теодолита, выставленного на перпендикуляре к базису в точке  $R$ , устанавливают центр марки  $m$  на отвесной линии с точкой  $R$  и затем на хорошо отделанном деревянном бруске, прикладываемом к марке  $M$  и к конечному центру базиса, отмечают надрезами пожом точки  $m$  и  $C$ . (Если точки  $m$  и  $C$  лежат не в одном уровне, то точка  $C$  переносится на бруском помощью теодолита.)

Пусть при откладывании некоторого жезла по линии базиса:  $t$  — его температура,  $i$  — угол наклона, выраженный в секундах,  $f$  — отсчет по фюльгебелю,  $v$  — цена деления фюльгебеля. Обозначим еще через  $l$  длину жезла при температуре  $t$  и через  $l_0$  — его длину при температуре компарирования. Так как поправка за наклонность  $i$  равна

$$-2l \cdot \sin^2 \frac{i}{2} = -l \cdot \frac{\sin^2 1''}{2} \cdot i''^2,$$

поправки же за температуру и за фюльгебель соответственно равны

$$+k \cdot l_0(t - t_0) \text{ и } +v(15 - f),$$

то, очевидно, откладывание данного жезла соответствовало продвижу в створе базиса по горизонтальному направлению на длину

$$l_0 + kl_0(t - t_0) + v(15 - f) - l \cdot \frac{\sin^2 1''}{2} \cdot i''^2.$$

Сумма  $L_0$  всех таких продвигов, соответствующих всем отложенным по линии базиса жезлам, плюс «остаток» базиса  $r$ , очевидно, равна

$$L_0 = \sum l_0 + k_m l_0 m \sum (t - t_0) + v_m \sum (15 - f) - l_0 m \cdot \frac{\sin^2 1''}{2} \sum i''^2 + r,$$

причем в малых поправочных членах этой формулы множители  $k$ ,  $l_0 m$  и  $v$  приняты для всех жезлов одинаковыми и равными соответственно:  $k_m$  — среднему из коэффициентов расширений четырех жезлов;  $l_0 m$  — среднему из длин четырех жезлов при температуре  $t_0$ ;  $v_m$  — среднему из цен делений для четырех фюльгебелей; в  $\sum l_0$  длина каждого жезла входит, конечно, столько раз, сколько раз этот жезл был отложен по базису.

Вводя поправки за наклонность, мы, очевидно, этим самым переходим от длины  $ab$  (черт. 132) паклонно отложенного жезла к проекции ее  $ac$  на горизонтальную поверхность, проходящую через начало (или, безразлично, — через конец) жезла. Следовательно, если  $C$  есть задний конец первого отложенного по базису жезла, а  $C_1$  — передний конец последнего жезла, то  $L_0$  равно сумме горизонтальных элементов ломаной линии  $CC_1$ , причем каждый такой элемент имеет одинаковое значение с  $ac$ , т. е. представляет собой проекцию соответственного паклонно отложенного жезла; остальные элементы этой линии  $CC_1$  образованы проектирующими отвесными линиями. Пусть все эти отвесные линии пересекаются в одной точке  $O$ , — другими словами, примем на протяжении

базиса уровневые поверхности за сферические (вследствие малости базиса по сравнению с земным радиусом такое допущение вполне возможно). Соединяя  $O$  с  $C$  и  $C_1$ , мы в пересечении отвесных линий  $CO$  и  $C_1O$  с уровневой поверхностью океана получим точки  $M$  и  $N$ , которые, очевидно, будут проекциями на поверхность океана базисных центров. Длина дуги  $MN$ , лежащей в плоскости  $MON$ , нормальной к поверхности океана (в створе базиса), называется проекцией  $L$  базиса на уровень океана. Чтобы получить ее значение, сравним длину горизонтального элемента  $d$ , находящегося на высоте  $H$  над уровнем океана, с длиной  $d_1$  его проекции, причем назовем через  $R := OM = ON$  радиус кривизны дуги  $MN$ . Имеем

$$\frac{d_1}{d} = \frac{R}{R+H}; \quad \frac{d - d_1}{d} = \frac{H}{R+H};$$

$$d - d_1 = \frac{d \cdot H}{R+H} = \frac{H}{R} \cdot d \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-1},$$

или

$$d_1 - d = -d \cdot \frac{H}{R} + d \cdot \frac{H^2}{R^2} - \dots$$

Отсюда, принимая  $\Sigma d = L_0$  и заменяя отдельные  $H$  их средним значением  $H_m$  — средней высотой базиса над уровнем океана, имеем

$$L_0 - L = -L_0 \cdot \frac{H_m}{R} + L_0 \cdot \frac{H_m^2}{R^2} - \dots \quad (129)$$

Так как в формуле (129) члены второго порядка и выше в совокупности не превышают 1 мм при  $L_0 = 10$  км и  $H_m = 2000$  м, то, пренебрегая ими, имеем следующую формулу поправки в длину базиса за приведение к уровню океана

$$L_0 - L = -L_0 \cdot \frac{H_m}{R}, \quad (130)$$

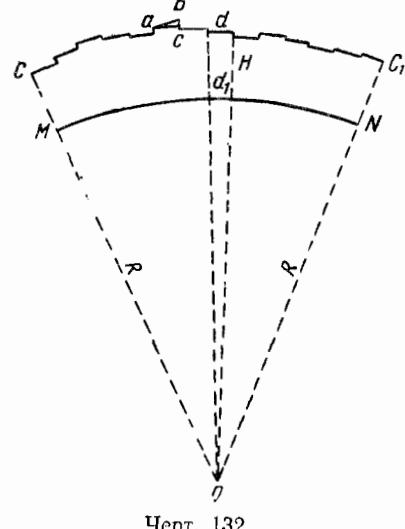
где  $R$  вычисляется по формуле

$$R = \sqrt{MN} \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\alpha\right), \quad (131)$$

в которой  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны соответственно меридиану и первому вертикалу земного сфероида под широтой  $\varphi$ ;  $\alpha$  — азимут базиса;  $e$  — эксцентриситет меридианного эллипса (см. проф. Ф. П. Красовский, Избранные сочинения, т. IV, 1955; стр. 28).

Дифференцируя формулу (130) и заменяя дифференциалы конечными приращениями, имеем

$$\frac{\Delta L}{d} = \frac{\Delta H_m}{R}. \quad (132)$$



Черт. 132

Полагая в формуле (132)

$$\frac{\Delta L}{L} < \frac{1}{2\,000\,000},$$

$$R = 6000 \text{ км},$$

имеем

$$\Delta H_m < 3 \text{ м},$$

т. е. для получения поправки в длину базиса за приведение к уровню океана с предельной ошибкой не свыше 1 : 2 000 000, среднюю высоту базиса над уровнем океана нужно знать с ошибкой не более 3 м.

Окончательная формула для вычисления проекции базиса на уровень океана, при измерении базиса прибором Струве, будет, следовательно, такая

$$L = \sum l_0 + k_m \cdot l_0^m \sum (t - t_0) + v_m \sum (15 - f) - l_0^m \cdot \frac{\sin^2 1''}{3} \sum i''^2 + \\ + r - L_0 \cdot \frac{H_m}{R} \quad (133)$$

### § 36. Точность измерения базисов жезловыми приборами

Вопрос оценки точности измерения базиса является одним из сложнейших вопросов, на который можно дать только приближенный ответ. Если базис измерен одним и тем же прибором несколько раз, то обычный метод оценки по уклонениям отдельных результатов от среднего — по так называемой внутренней сходимости — не может дать правильного представления о действительной точности измерения базиса, так как в эти уклонения входят только случайные ошибки измерений и совсем не входят систематические. Между тем, влияние систематических ошибок на результат гораздо более значительно, чем случайных. Это и понятно: случайные ошибки в базисах достаточной длины в значительной степени компенсируются (влияние случайной ошибки какого-либо вида на образование относительной ошибки результата убывает пропорционально корню квадратному из длины базиса); систематическая же ошибка данного рода обусловливает в длине базиса относительную ошибку, или совсем не зависящую или в слабой степени зависящую от длины базиса; абсолютная ошибка результата нередко близка систематической ошибке отдельного откладывания жезла умноженной на число отложенных жезлов. Отсюда понятны приведенные в § 34 большие расхождения между результатами измерения базисов Боннского и под Гумбиненом разными приборами, при очень малой средней ошибке результата по каждому базисному прибору, выведенной по внутренней сходимости. Единственным путем приближенной оценки точности измерения базиса является учет, на основании выводов из соответственных исследований, влияния каждого из источников погрешностей, свойственных данному базисному прибору, на окончательный результат и последующее суммирование этих влияний. Разберем этот метод оценки на примере базисного прибора Струве используя данные по измерению этим прибором семи базисов в южной части дуги Струве (В. Я. Струве, Дуга меридиана, том I, СПБ. 1861).

Можно выделить следующие основные источники погрешностей при измерении базиса прибором Струве.

1. Ошибка за уклонение оси жезла от створа базиса. Она имеет систематический характер и всегда преувеличивает длину базиса; среднюю величину ее можно оценивать в  $\pm 0,1 \mu$ , понимая под  $\mu$  одну миллионную долю длины базиса.

2. Систематическая ошибка в учете наклонности жезлов. Для шести базисов средняя величина ее оказалась  $\pm 10''$  и для одного  $\pm 20''$  (для среднего из четырех жезлов). Примем среднюю величину ее для среднего из четырех жезлов  $\pm 12''$ ; тогда согласно § 34 влияние ее на величину базиса будет  $\pm 0,25 \mu$  при среднем наклоне базиса в  $15'$ .

3. Ошибка в длине нормальной меры  $N$ ; среднюю величину ее можно принять  $\pm 0,5 \mu$ .

4. Ошибка сравнения рабочих мер с нормальной  $N$  для среднего из четырех жезлов; средняя величина ее, на основании исследований Струве, может быть принята  $\pm 0,44 \mu$ .

5. Личные ошибки наблюдателей при отсчетах по термометрам, уровню и фольгебелям. Все эти отсчеты делаются для каждого жезла двумя разными наблюдателями независимо. Из расхождений двух результатов величины каждого из семи базисов, вычисленных для каждого наблюдателя, средняя ошибка в длине базиса за личные ошибки наблюдателей оказалась  $\pm 0,43 \mu$ .

6. Ошибка учета температуры жезлов слагается из следующих ошибок:

а) ошибки шкал термометров жезлов; главной из них является ошибка нульпункта шкалы, влияющая на результаты измерений систематически; средняя величина ее из 8 термометров определена Струве в  $\pm 0^{\circ}0,075$ , что дает  $\pm 0,84 \mu$ ;

б) ошибки отсчетов по шкалам термометров; для среднего из 8 термометров средняя ошибка отсчета оказалась  $\pm 0^{\circ}0,005$ , что на весь базис даст среднюю случайную ошибку  $\pm 0,06 \mu$ ;

в) систематические ошибки в отсчетах по термометрам за температурное отставание; в среднем для семи базисов температура окончания работ (вечером) была на  $4^{\circ},46$  выше температуры начала работ (утром); очевидно, средняя температура, показанная термометрами на протяжении измерения базиса, поскольку выше действительной средней температуры жезлов, что при положительном коэффициенте расширения последних приводит к систематическому преувеличению длины базиса; среднюю величину температурного отставания жезла примем равной удвоенному систематическому расхождению в показаниях переднего и заднего термометров жезлов, т. е. в  $0^{\circ},15$ . Отсюда средняя систематическая ошибка преувеличения длины базиса за температурное отставание составит  $0,15 : 85\,000 = 1,77 \mu = 1 : 565\,000$  (это несколько менее приведенной в § 34 величины, данной В. А. Сильевым).

7. Ошибки температурных коэффициентов жезлов. По данным, приведенным Струве, вытекающая отсюда средняя ошибка в длине базиса составит  $\pm 0,15 \mu$ .

Из рассмотренных погрешностей только две (см. п. 1 и 6, в) имеют определенно положительный знак; знаки остальных ошибок неизвестны, т. е. вероятность положительного и отрицательного знаков у них одинакова, а потому суммарное влияние всех источников погрешностей на длину базиса составит:

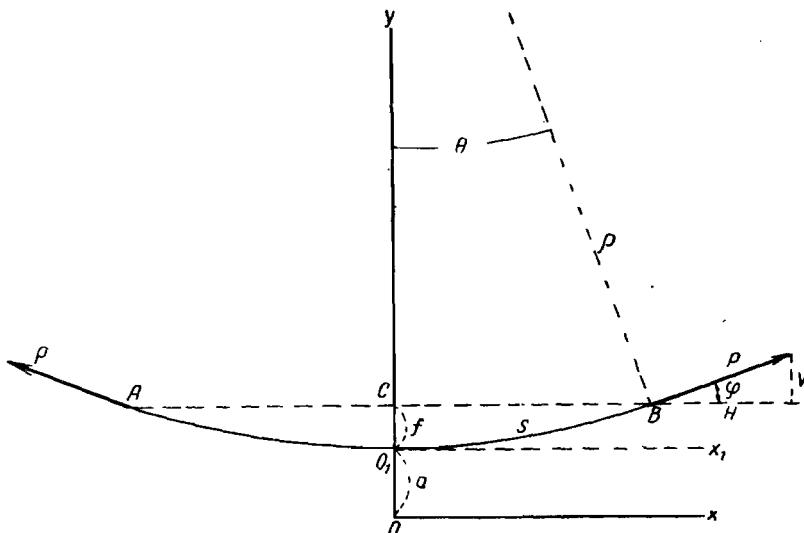
$$\mu \sqrt{(+0,1+1,77)^2 + (\pm 0,25)^2 + (\pm 0,5)^2 + (\pm 0,44)^2 + (\pm 0,43)^2 + (\pm 0,84)^2 + (\pm 0,06)^2 + (\pm 0,15)^2} = \pm 2,2 \mu (1 : 450\,000).$$

Следует иметь в виду, что оценка наиболее крупной из погрешностей (п. б, в) наименее надежная, а потому и вся оценка в целом все-таки довольно приближенная.

### § 37. Базисный прибор с проволоками. Теоретические обоснования его применения

Применение базисного прибора Едерина-Гилььома (с проволоками или лентами) основано на следующих соображениях:

1. Пусть имеем (черт. 133) гибкую нерастяжимую и тяжелую нить  $BO_1A$  (проводку), удерживаемую в равновесии приложенными в ее концах  $A$  и  $B$  (лежащих на одном уровне) равными силами  $P$ . Кривая



Черт. 133

$BO_1A$  будет цепной линией, уравнение которой, если оси прямоугольных координат расположить так, как показано на черт. 133 ( $O_1$  — самая низкая точка цепной линии; ось игреков расположена на нормали к цепной линии в точке  $O_1$ ), будет таково

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad (134)$$

где  $a = OO_1$  — параметр цепной линии;  $e$  — основание неперовых логарифмов. Назовем: горизонтальную составляющую натяжения через  $H$ , вертикальную — через  $V$ ; вес единицы длины проволоки (одного метра) — через  $p$ ; угол, образуемый направлением силы натяжения  $P$  с осью  $x$ -ов, через  $\varphi$ ; длину проволоки от  $O_1$  до  $A$  (или  $B$ ) через  $s$ . Как известно из механики, горизонтальная составляющая силы натяжения

в текущей точке  $M$  цепной линии не зависит от положения этой точки на кривой и есть величина постоянная для всех точек проволоки, вертикальная же составляющая той же силы равна весу части проволоки от ее низшей точки  $O_1$  до рассматриваемой точки  $M$ . Следовательно,

$$V = p \cdot s. \quad (135)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} = \frac{p \cdot s}{H}. \quad (136)$$

Из уравнения (134) имеем

$$s = \sqrt{y^2 - a^2}. \quad (137)$$

Если начало координат перенести в  $O_1$ , то ордината  $y_1 = y - a$  точки  $A$  станет равной стрелке провеса  $CO_1$  цепной линии; называя эту стрелку через  $f$ , из (137) напишем

$$s^2 = f^2 + 2af; \quad a = \frac{s^2 - f^2}{2f}.$$

С другой стороны, из (134) и черт. 133 имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = \frac{s}{a} = \frac{2f \cdot s}{s^2 - f^2}. \quad (138)$$

Следовательно, принимая во внимание (136)

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot s}{H} &= \frac{2f \cdot s}{s^2 - f^2}; \quad ps^2 - pf^2 = 2f \cdot H; \\ f &= \frac{ps^2}{2H} - \frac{pf^2}{2H}. \end{aligned}$$

Обозначая длину всей дуги  $BO_1A$  через  $S$  и имея в виду, что  $A$  и  $B$  лежат на одном уровне, имеем

$$S = 2s$$

и, следовательно,

$$f = \frac{pS^2}{8H} - \frac{pf^2}{2H}.$$

Пренебрегая членом  $\frac{pf^2}{2H}$  по его малости (при  $S=24$  м,  $p=0,0173$  кг,  $H \approx P = 10$  кг,  $f = 0,12$  м, этот член меньше 0,02 мм), имеем окончательно

$$f = \frac{pS^2}{8H}. \quad (139)$$

В виду малости  $p$  по сравнению с  $P$  стрелка  $f$  мала сравнительно с  $S$ , и цепная линия на протяжении дуги  $BO_1A$  близка к окружности.

Принимая дугу  $BO_1A$  за круговую и называя ее радиус через  $\rho$ , а половину соответствующего ей центрального угла через  $\Theta$ , напишем

$$s = \rho\Theta; \quad x = AC = \rho \cdot \sin \Theta = \rho \left( \Theta - \frac{\Theta^3}{6} + \dots \right);$$

$$s - x = \frac{\rho \Theta^3}{6}; \quad f = \rho - \rho \cos \Theta = \rho - \rho \left(1 - \frac{\Theta^2}{2} + \dots\right); \\ f = \frac{\rho \Theta^2}{2} = \frac{s \Theta}{2}; \quad \Theta = \frac{2f}{s}.$$

При малости  $f$  по сравнению с  $s$  угол  $\Theta$  будет, очевидно, мал, и в предыдущей выкладке при разложении  $\sin \Theta$  и  $\cos \Theta$  в ряды были удержаны лишь члены порядка  $\Theta^3$ . Далее имеем

$$s - x = \frac{f \Theta}{3} = \frac{f \cdot 2f}{3s} = \frac{2f^2}{3s}.$$

Отсюда, обозначая длину хорды  $AB$  через  $l_0$ , имеем

$$2s - 2x = \frac{4f^2}{3s} = \frac{4f^2}{3 \cdot \frac{s}{2}} = \frac{8f^2}{3S}; \\ S - l_0 = \frac{8f^2}{3S}. \quad (140)$$

Подставляя в (140) значение  $f$  из (139), имеем окончательно

$$S - l_0 = \frac{\rho^2 \cdot S^3}{24H^2}. \quad (141)$$

Приближенность вычислений при получении (141) и допущения, сделанные при этом, приводят к погрешности в  $S - l_0$ , вообще меньшей 0,001 мм.

2. До сих пор мы предполагали, что путь перастяжима. Если теперь принять в расчет, что в действительности мы имеем дело с растяжимой проволокой, и назвать через  $\sigma$  растяжение единицы длины проволоки под влиянием веса  $\rho$ , то растяжение всей проволоки при действии на нее силы  $P$  будет равно  $\frac{\sigma \cdot s \cdot P}{\rho}$ . Пусть длина проволоки, расположенной без всякого натяжения на горизонтальной плоскости, равна  $S_0$ ; при действии натяжения  $P$  длина  $S$  проволоки будет равна  $S_0 + \frac{\sigma \cdot s_0 \cdot P}{\rho}$ , а длина  $l_0$  хорды  $AB$  при положении точек  $A$  и  $B$  на одной высоте будет равна согласно формуле (141)

$$l_0 = S_0 + \frac{\sigma S_0 P}{\rho} - \frac{\rho^2 S_0^3}{24P^2} \quad (142)$$

[в формуле (141) величина  $H$  при горизонтальном положении хорды  $AB$  мало отличается от  $P$  и потому заменена этой последней величиной].

Очевидно, формула (142) дает нормальную длину хорды при горизонтальном ее положении и натяжении  $P$ , называемую «длиной» проволоки; она-то и находится экспериментально при компарировании проволоки. Действительная длина хорды в поле будет иная по ряду причин, рассмотренных ниже. В частности, действительное натяжение проволоки в поле, даже при горизонтальном положении хорды, будет отличаться от того, какое она имела при компарировании, на некоторую величину  $\Delta P$ , обусловленную различием в трении блоков, перекосом

их и пр. Дифференцируя формулу (142) по  $P$  и называя изменение в длине хорды через  $\Delta l_0$ , имеем

$$\Delta l_0 = \left( \frac{\sigma S_0}{p} + \frac{p^2 S_0^3}{12 P^3} \right) \cdot \Delta P. \quad (143)$$

Для никелевой стали (инвар), из которой теперь изготавливаются проволоки,  $\sigma = 0,00051 \text{ мм}$ ,  $p = 0,0173 \text{ кг}$  (при принятии метра за единицу длины); поэтому при  $S = 24 \text{ м}$  и при  $P = 10 \text{ кг}$  из (143) находим

$$\Delta l_0 = (0,70 \text{ мм} + 0,34 \text{ мм}) \cdot \Delta P$$

(здесь  $\Delta P$  выражено в килограммах). Следовательно, при  $\Delta P = 0,1 \text{ кг}$   $\Delta l_0 = 0,104 \text{ мм}$ , что составляет 1 : 240 000 долю длины проволоки. Отсюда следует, что если пользоваться проволоками с  $\sigma = 0,00051 \text{ мм}$ ,  $p = 0,0173 \text{ кг}$  и  $S = 24 \text{ м}$ , то, поддерживая постоянство натяжения с точностью до 0,04 кг, т. е. осуществляя постоянство натяжения с ошибкой, меньшей 0,04 кг, мы будем иметь колебания длины хорды  $AB$  в пределах, меньших 1 : 600 000. Так, при пользовании станками Витрама для натяжения проволок (см. ниже) средняя ошибка натяжения будет порядка 0,025 кг; пристекающая отсюда средняя ошибка в длине хорды  $AB$  будет порядка 1 : 1 000 000. Очевидно, если ошибка в натяжении будетносить случайный характер, она не опасна, так как на протяжении всего базиса ее влияние заметно компенсируется; наоборот, систематические ошибки в натяжении опасны и должны, по возможности, исключаться или соответственным расположением наблюдений или введением специальных поправок. Вопрос о том, какие значения для  $p$  и  $P$  будут выгоднейшими при данной длине  $S$ , решается вообще лишь на основании результатов многочисленных опытов с проволоками. Однако при полевых действиях применение больших натяжений является неудобным; в практике при  $S = 24 \text{ м}$  проволока натягивается всегда с силой в 10 кг, при  $S = 48 \text{ м}$  — с силой 15 кг.

3. Кроме изменений, вызываемых перемещами в величине натяжения, длина хорды  $AB$  претерпевает еще изменения, соответствующие переменам температуры проволоки. Предполагая попрежнему, что стрелка провеса  $f$  мала по сравнению с  $S$ , мы имеем основание сказать, что изменениям  $S$ , обусловленным переменами температуры  $t$  проволоки, соответствуют равные им изменения в длине хорды  $AB$ . Иначе говоря, изменения в длине хорды  $AB$ , связанные с ходом температуры, будут пропорциональны длине хорды, и длина последней при некоторой произвольной температуре  $t$  может быть выражена обычным «уравнением» (см. формулу 106), в котором  $l_0$  — длина хорды при некоторой начальной температуре  $t_0$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — температурные коэффициенты проволоки; величины  $l_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  определяются специальным исследованием (см. § 39).

Первоначально в базисном приборе Едерипа учет температуры основывался на принципе биметаллизма: в базисный прибор входили две проволоки, сделанные из металлов со значительно разняющимися коэффициентами расширения, например, медная и стальная, и каждый пролет базиса измерялся обеими проволоками. В настоящее время пользуются инварными проволоками, температуру которых принимают равной температуре воздуха, измеряемой термометром-пращем; малое поперечное сечение проволоки (около 1,65 мм) и белый цвет металла способствуют тому, что инварная проволока имеет температуру, близкую

к температуре воздуха, чрезвычайно же малый коэффициент расширения инвара делает достаточным учет температуры проволоки с точностью до 1°. В результате в базисном приборе Едерина-Гилььома учет влияния температуры выполняется с значительно большей точностью, чем в жезловых базисных приборах.

4. Далее следует принять в расчет, что в действительных работах концы проволоки  $A$  и  $B$  не находятся на одной высоте, и цепная линия поэтому не будет симметричной относительно хорды  $AB$ . В этом случае возникают следующие поправки.

Поправка за несимметрию цепной линии — положительная величина, вычисляемая по формуле:

$$+ \frac{p^2 h^2 S_0}{24 P^2},$$

где  $h$  — разность высот точек  $A$  и  $B$ ,  $P$  — нормальное натяжение.

Поправка за отличие натяжения на наклонных участках от нормального натяжения  $P$ . При неравенстве высот натяжения в  $A$  и  $B$  не будут, при равновесии проволоки, равными: натяжение в верхнем конце проволоки будет больше натяжения в нижнем конце на величину  $ph$ , понимая под  $h$  разность высот, выраженную в метрах. Если проволока натягивается динамометром, как это имеет место в современной практике СИИА, и динамометр находится, допустим, всегда при переднем конце проволоки, то когда передний конец выше заднего, при заднем конце натяжение равно  $P - ph$ , а среднее натяжение будет равно  $P - \frac{ph}{2}$ ; наоборот, когда передний конец ниже заднего, то на заднем конце имеем натяжение  $P + ph$ , а среднее натяжение будет равно  $P + \frac{ph}{2}$ . Поэтому, согласно формуле (143), если под  $h$  понимать: «альтитуда переднего целика минус альтитуда заднего целика», то искомая поправка для одного пролета за отличие натяжения от нормального  $P$  выразится так

$$- \left( \frac{\sigma \cdot S_0}{2} + \frac{p^3 S_0^3}{24 P^3} \right) \cdot h, \quad (144)$$

а для всего базиса

$$- \left( \frac{\sigma \cdot S_0}{2} + \frac{p^3 S_0^3}{24 P^3} \right) \cdot \sum h. \quad (145)$$

Нетрудно видеть, что эта поправка в обратном ходе измерения базиса будет равна по величине, но обратна по знаку поправке в прямом ходе измерения.

Очевидно, на наклонном участке формула (142) для длины хорды примет вид

$$l = S_0 + \frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{p} - \frac{p^2 \cdot S_0^3}{24 P^2} + \frac{p^2 h^2 S_0}{24 P^2} - \left( \frac{\sigma \cdot S_0}{2} + \frac{p^3 S_0^3}{24 P^3} \right) h. \quad (146)$$

Если проволока натягивается гилями равного веса, как это и имеет место в современном базисном приборе Едерина-Гилььома, то на наклонном участке проволока должна скатиться вниз под влиянием собственного ее веса. Для равновесия необходимо, чтобы

вверху работала гиря, имеющая на  $ph$  больший вес, чем гиря внизу. Вследствие трения в блоках явление сползания проволоки вниз обнаруживается лишь при значительных  $h$ , больших, во всяком случае 1 м. Такие  $h$  встречаются на базисах довольно редко. Если приходится иметь дело с участком столь значительного наклона, при котором проволока скатывается вниз, то при измерении такого участка приходится удерживать проволоку, слегка прижимая к целику (см. ниже) или шкалу проволоки на верхнем конце или шкалу на нижнем ее конце. Обычно в этих случаях поступают так: а) делают ряд отсчетов по шкалам, имея нижнюю шкалу свободной, а верхнюю — слегка прижатой к целику; при этом имеют на верхнем конце силу  $P + ph$ , а на нижнем  $-P$ ; б) делают столько же отсчетов по шкалам, имея теперь верхнюю шкалу свободной, а нижнюю — слегка прижатой к целику; при этом на верхнем конце будет работать сила  $P$ , а на нижнем  $P - ph$ . Очевидно, средний результат из обоих измерений будет отнесен к среднему натяжению, равному  $P$ , и поэтому в формуле (146) последний член обратится в нуль, и для данного случая она напишется так:

$$l = S_0 + \frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{p} - \frac{p^2 \cdot S_0^3}{24 P^2} + \frac{p^2 h^2 S_0}{24 P^2}. \quad (147)$$

Рассмотренный случай является исключительным: на большинстве же или, вернее, почти на всех наклонных участках проволока остается неподвижной, что, конечно, обусловливается трением в блоках. Раз приходится считаться с этим трением, то задержка проволоки является одинаково вероятной в любом из ее концов. Предположение, что удерживающая сила приложена в верхнем конце, одинаково вероятно с предположением, что удерживающая сила приложена в нижнем конце. С другой стороны, если один из блоков, через которые передается натяжение, имеет большее трение, чем другой, то при принятом у нас методе работы, когда при переходе от пролета к пролету передний блочный станок остается на месте и только переставляется у штатива с целиком в противоположное положение, а задний станок переносится вперед, удерживающая сила будет прикладываться, очевидно, поочередно то у переднего, то у заднего конца проволоки, а потому при суммировании пролетов рассматриваемая погрешность будет компенсироваться. Легко видеть, что, если при обратном ходе блочные станины поменять местами, то рассматриваемая остаточная результативная ошибка в базисе в обратном ходе изменит свой знак на обратный, и в среднем из результатов измерения вперед и назад получится еще более полная компенсация.

Поэтому при применении гирь нет оснований к учету на наклонных участках поправки за уклонение  $\Delta P$  среднего натяжения на пролете от нормального  $P$  по формуле (143), и, следовательно, придется иметь дело только с поправкой за несимметрию цепной линии, т. е. длину хорды  $AB$  определять по формуле (147).

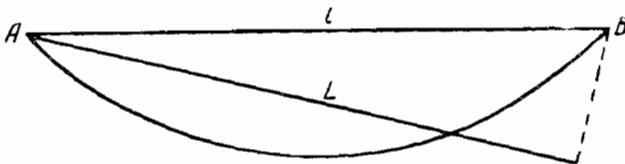
Поправка за приведение длины хорды к горизонту. Из черт. 134 следует, что горизонтальная проекция  $L$  хорды равна

$$L = (l^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} = l \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$L - l = - \frac{h^2}{2l} - \frac{h^4}{8l^3} - \dots \quad (148)$$

Так как  $h$  обычно не превышает 1 м и  $\frac{h}{l}$  есть малая величина, то в уравнении (148), в правой его части, удерживают только первый член и поправку к  $l$  вычисляют, как  $-\frac{h^2}{2l}$ ; при значительных  $h$  обязательно



Черт. 134

следует учитывать и второй член (при  $h = 1$  м и  $l = 24$  м второй член равен 9 μ). Для подсчета поправки по формуле (148) существуют особые таблицы.

5. Длина хорды должна быть исправлена еще за изменение силы тяжести в связи с различием географической широты и высоты над уровнем моря места измерения базиса и места компарирования проволок. Поправка будет различна, в зависимости от того, натягивается ли проволока гилями или динамометром. Преобразовав формулу (142)

$$l_0 = S_0 + \frac{\sigma}{P} \cdot S_0 \cdot P - \frac{S_0^3}{24} \cdot \left( \frac{P}{P} \right)^2, \quad (149)$$

мы видим, что в первом случае (при гилях) отношения  $\frac{\sigma}{P}$  и  $\frac{P}{P}$  не будут зависеть от изменения силы тяжести, а потому, дифференцируя формулу (149) по  $P$ , имеем

$$\Delta l_0 = + \frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{P} \cdot \frac{\Delta P}{P} = + \frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{P} \cdot \frac{\Delta g}{g_1}, \quad (150)$$

где  $g_1$  — ускорение силы тяжести в месте компарирования проволок. Легко видеть, что в этом случае форма цепной линии остается без изменения.

Во втором случае, т. е. при пользовании динамометрами, в формуле (142) остаются без изменения  $\frac{\sigma}{P}$  и  $P$ ; изменяется  $P$ , а потому при дифференцировании формулы (142) по  $P$  имеем

$$\Delta l_0 = - \frac{P^2 \cdot S_0^3}{12 P^2} \cdot \frac{\Delta p}{p} = - \frac{P^2 \cdot S_0^3}{12 P^2} \cdot \frac{\Delta g}{g_1}. \quad (151)$$

Введем обозначения

$\varphi_1$ ,  $H_1$  и  $g_1$  — соответственно широта, высота над уровнем моря и ускорение силы тяжести в месте компарирования проволок;

$\varphi_2$ ,  $H_2$  и  $g_2$  — то же в месте измерения базиса; тогда в формулах (150) и (151):

$$g_1 = 9,80615(1 - 0,002642 \cos 2\varphi_1) - 0,000\,00309 H_1, \quad (152)$$

$$\Delta g = g_2 - g_1 = 0,025\,905(\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2) + 0,000\,00309(H_1 - H_2), \quad (153)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  выражены в метрах;  $9,80615 = g_{45^\circ}$ ;  $\varphi$  достаточно брать до минут,  $H$  — до 10 м. Если разность  $H_1 - H_2$  велика, то в формулах (152) и (153) члены вида

$$-0,000\,00309 H$$

вычисляются по формуле Буге

$$-g_0 \cdot \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3D}{4D_m}\right), \quad (154)$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на уровне моря;

$R$  — радиус Земли;  $D_m = 5,52$  — средняя плотность Земли;

$D$  — плотность земной коры (обычно принимается равной  $0,5 \cdot D_m = 2,76$ ).

Так как в формуле (150) при  $\sigma = 0,00051$  мм;  $p = 0,0173$  кг;  $S_0 = 24$  м;  $P = 10$  кг, коэффициент

$$\frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{p} = 7,02 \text{ мм},$$

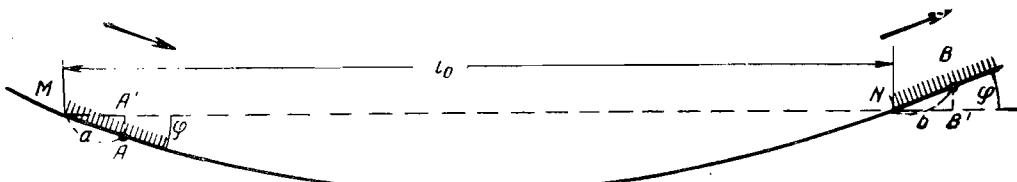
то для проволоки обычных размеров формула (150) перепишется так

$$\Delta l_0 = +7,02 \cdot \frac{\Delta g}{g_1} \text{ мм}. \quad (155)$$

6. Под длиной проволоки  $l_0$ , определяемой компарированием, понимается расстояние между нулевыми штрихами шкал (см. черт. 137), которыми снабжена проволока на концах. В действительности расстояние между смежными целиками-марками, установленными на местности в створе базиса, отличается от величины  $l_0$  в пределах нескольких сантиметров и определяется, как

$$l_0 + (b - a), \quad (156)$$

где  $b$  и  $a$  — отсчеты по передней и задней шкалам (подписи делений на шкалах возрастают в направлении измерения базиса). Так как шкалы располагаются всегда наклонно, то величина, полученная по формуле (156), должна быть исправлена поправкой за наклон шкал.



Черт. 135

Пусть на черт. 135  $M$  и  $N$  — нулевые штрихи шкал и хорда  $MN = l_0$  расположена горизонтально;  $A$  и  $B$  — целики;  $a$  и  $b$  — отсчеты по задней и передней шкалам проволоки (направление возрастания подписей шкал

показано стрелками);  $\varphi$  — абсолютная величина углов наклона шкал, в данном случае равных между собой;  $A'B'$  — искомая проекция хорды  $AB$  на горизонтальную плоскость.

Непосредственно из чертежа имеем

$$A'B' = l_0 + (b - a) \cdot \cos \varphi, \quad (157)$$

Из (136) получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p \cdot s}{H},$$

где  $s = \frac{S_0}{2}$ .

Заменяя  $H$  с достаточным приближением через  $P$ , имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{p \cdot S_0}{2P} \\ \cos \varphi &= (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{p^2 \cdot S_0^2}{8P^2}. \end{aligned}$$

Заменяя  $\cos \varphi$  в (157), получим окончательно

$$A'B' = l_0 + (b - a) - (b - a) \cdot \frac{p^2 \cdot S_0^2}{8P^2}. \quad (158)$$

Из сопоставления (158) и (156) видно, что искомая поправка равна

$$-(b - a) \cdot \frac{p^2 \cdot S_0^2}{8P^2}. \quad (159)$$

На наклонных участках поправка за наклон шкал имеет более сложный вид

$$-(b - a) \cdot \frac{p^2 \cdot S_0^2}{8P^2} + (b - a) \cdot \frac{p^2 h^2}{4P^2} + (a + b) \cdot \frac{p^3 \cdot S_0^2 \cdot h}{16P^3}, \quad (160)$$

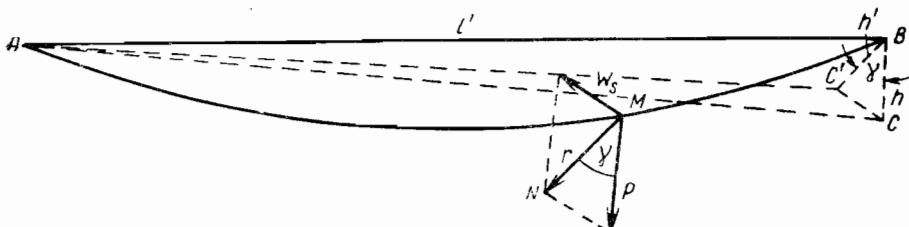
где  $h$  — разность высот целиков (см. E. Giga's, Handbuch für die Verwendung von Invariäten bei Grundlinienmessungen. Berlin 1934, стр. 44). Однако в обычных условиях, когда  $S_0 = 24$  м,  $h < 2$  м и  $(b - a) < 8$  см, второй член формулы (160) меньше 0,24 μ и третий — меньше 0,06 μ, а потому они могут быть отброшены.

Значения поправки, вычисляемой по формуле (159), таковы

$$\begin{array}{cccccc|c} b - a & 1 \text{ см} & 2 \text{ см} & 4 \text{ см} & 6 \text{ см} & 8 \text{ см} & \\ -(b - a) \cdot \frac{p^2 \cdot S_0^2}{8P^2} & -2 \mu & -4 \mu & -9 \mu & -13 \mu & -17 \mu & | \quad S_0 = 24 \text{ м} \end{array}$$

Отсюда видно, что поправка за наклон шкал может достигать заметной величины, но при равномерном уклонении расстояний между целиками от 24 м на разных пролетах в ту и другую стороны пренебрежение ими не опасно, так как соответственные ошибки меняют знаки и компенсируются; при одностороннем же уклонении  $AB$  от  $l_0$  ошибки становятся систематическими и могут дать на весь базис накопление в несколько миллиметров.

7. Влияние ветра на длину хорды  $AB$  носит систематический характер и потому должно быть учитываемо, если при измерении базиса был ветер. Выведем формулу поправки за ветер. Силу давления ветра на проволоку длиной  $S_0$  можно разложить на три составляющие, действующие по направлению: отвесной линии  $W_v$ , оси проволоки  $W_s$  и перпендикулярно к двум первым составляющим  $W_h$ , влияние первых двух составляющих ничтожно по сравнению с влиянием последней и потому может быть практически отброшено. Пусть имеем (черт. 136)



Черт. 136

наклонную расположенную хорду  $AB$ , разность высот концов которой  $BC = h$ . Обозначим часть горизонтальной составляющей  $W_s$ , приходящуюся на единицу длины проволоки (на 1 м), через  $w_s$ , т. е.

$$w_s = \frac{W_s}{S_0}. \quad (161)$$

Тогда на некоторую точку  $M$  проволоки будут действовать две силы:  $w_s$  и  $p$  (вес единицы длины проволоки), равнодействующая которых  $r = MN$  будет связана с ними соотношением

$$r^2 = p^2 + w_s^2. \quad (162)$$

Обозначим угол между силами  $r$  и  $p$  через  $\gamma$ ; из черт. (136) имеем

$$\cos \gamma = \frac{p}{r}.$$

Очевидно, под действием силы  $r$  проволока будет провисать не в отвесной плоскости  $ABC$ , а в наклонной  $ABC'$  ( $BC'$  параллельна  $MN$ ) и также будет представлять собой цепную линию, хорда которой  $AB = l'$  будет попрежнему выражаться формулой (147), если в ней в последних двух членах  $p$  заменить через  $r$  и  $h$  — через  $h'$  (см. черт. 136); легко видеть, что отношение  $\frac{h}{p}$  во втором члене остается без изменения. Сделаем такую замену и, принимая во внимание, что из черт. 136

$$h' = h \cdot \cos \gamma = \frac{h \cdot p}{r},$$

получим

$$l' = S_0 + \frac{\sigma \cdot S_0 \cdot P}{p} - \frac{r^2 \cdot S_0^3}{24 P^2} + \frac{p^2 \cdot h^2 \cdot S_0}{24 P^2}. \quad (163)$$

Вычтем (147) из (163)

$$l' - l = - \frac{(r^2 - p^2) \cdot S_0^3}{24 P^2}$$

и, пользуясь соотношениями (162) и (161), получим поправку  $\delta_w$  за ветер в форме

$$\delta_w = - \frac{W_s^2 \cdot S_0}{24 P^2}. \quad (164)$$

Сила  $W_s$  может быть или непосредственно измерена на местности специальным прибором или вычислена по формуле

$$W_s = c \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot S_0 d \sin^2 \alpha, \quad (165)$$

где  $c$  — некоторый коэффициент, определяемый экспериментально;  $\rho$  — плотность воздуха, зависящая от его температуры  $t$  и давления  $B$ ;  $v$  — скорость ветра в метрах в секунду;  $S_0$  — длина проволоки;  $d$  — диаметр проволоки;  $\alpha$  — угол, образуемый направлением ветра с направлением проволоки (см. K. Reicheneder, Windeinfluss bei Basismessungen mit Invardrähten). Подставляя (165) в (164), имеем

$$\delta_w = - c^2 \cdot \frac{\rho^2 v^4 d^2 S_0^3}{96 P^2} \cdot \sin^4 \alpha, \quad (166)$$

или окончательно

$$\delta_w = - c^2 \cdot K \cdot \sin^4 \alpha, \quad (167)$$

где

$$K = \frac{\rho^2 v^4 d^2 S_0^3}{96 P^2}.$$

Вычисление поправки по формуле (167) облегчается таблицами 9—13:  $c^2$  выбирается из табл. 10 по аргументам  $v$  и  $v \cdot 10^5$ ; под  $v \cdot 10^5$  понимается так называемая кинетическая вязкость воздуха — она выбирается из табл. 9 по  $t$  и  $B$ ;  $K$  получаем из табл. 12 по аргументам  $v$  и  $\rho$ , причем  $\rho$  предварительно выбирается из табл. 11 по  $t$  и  $B$ ;  $\sin^4 \alpha$  получаем по табл. 13.

Таблица 9  
Кинетическая вязкость воздуха  $v \cdot 10^5$  ( $m^2/\text{сек}$ )

| $t$ в $^{\circ}\text{C}$ | $B=700$ | 720  | 740  | 760  | 780  |
|--------------------------|---------|------|------|------|------|
| 0                        | 1,44    | 1,39 | 1,36 | 1,32 | 1,29 |
| 5                        | 1,49    | 1,45 | 1,40 | 1,37 | 1,33 |
| 10                       | 1,53    | 1,49 | 1,44 | 1,41 | 1,38 |
| 15                       | 1,58    | 1,54 | 1,49 | 1,46 | 1,42 |
| 20                       | 1,63    | 1,59 | 1,53 | 1,49 | 1,46 |
| 25                       | 1,69    | 1,64 | 1,60 | 1,55 | 1,51 |

Таблица 10

Значение коэффициента  $c^2$ 

| $v$ в м/сек | $v \cdot 10^5 = 1,20$ | 1,30 | 1,40 | 1,50 | 1,60 | 1,70 |
|-------------|-----------------------|------|------|------|------|------|
| 1           | 1,25                  | 1,27 | 1,29 | 1,31 | 1,33 | 1,35 |
| 2           | 1,20                  | 1,20 | 1,21 | 1,21 | 1,22 | 1,23 |
| 3           | 1,13                  | 1,14 | 1,15 | 1,16 | 1,17 | 1,18 |
| 4           | 1,10                  | 1,10 | 1,11 | 1,12 | 1,13 | 1,14 |
| 5           | 1,05                  | 1,06 | 1,07 | 1,08 | 1,10 | 1,11 |
| 6           | 1,00                  | 1,01 | 1,02 | 1,03 | 1,05 | 1,07 |
| 7           | 0,97                  | 0,98 | 1,00 | 1,01 | 1,02 | 1,03 |
| 8           | 0,95                  | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 1,00 |
| 9           | 0,94                  | 0,94 | 0,95 | 0,96 | 0,97 | 0,98 |
| 10          | 0,92                  | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,96 | 0,97 |

Таблица 11

Плотность воздуха  $\rho$   $\left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{сек}^2 \right)$ 

| $t$ в $^{\circ}\text{C}$ | 6700  | 720   | 740   | 760   | 780   |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0                        | 0,121 | 0,125 | 0,128 | 0,132 | 0,135 |
| 5                        | 0,119 | 0,122 | 0,126 | 0,129 | 0,133 |
| 10                       | 0,117 | 0,120 | 0,124 | 0,127 | 0,130 |
| 15                       | 0,115 | 0,118 | 0,122 | 0,125 | 0,128 |
| 20                       | 0,113 | 0,116 | 0,120 | 0,123 | 0,126 |
| 25                       | 0,111 | 0,114 | 0,117 | 0,121 | 0,124 |

Таблица 12

Значение  $K = \frac{\rho^2 v^4 d^2 S_0^3}{96 P^2}$  в  $\mu$ 

| $v$ в м/сек | $\rho = 0,110$ | 0,115 | 0,120 | 0,125 | 0,130 | 0,135 |
|-------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1           | 0,0            | 0,1   | 0,1   | 0,1   | 0,1   | 0,1   |
| 2           | 0,8            | 0,8   | 0,9   | 1,0   | 1,1   | 1,1   |
| 3           | 3,8            | 4,2   | 4,6   | 5,0   | 5,4   | 5,8   |
| 4           | 12,2           | 13,3  | 14,4  | 15,7  | 17,0  | 18,3  |
| 5           | 29,6           | 32,3  | 35,2  | 38,2  | 41,4  | 44,6  |
| 5,5         | 43,4           | 47,4  | 51,6  | 56,0  | 60,5  | 65,2  |
| 6           | 61,4           | 67,1  | 73,1  | 79,4  | 86,0  | 92,6  |
| 6,5         | 84,5           | 92,5  | 100,8 | 109,5 | 118,2 | 128,0 |
| 7           | 114            | 124   | 136   | 148   | 159   | 172   |
| 7,5         | 150            | 164   | 178   | 194   | 210   | 226   |
| 8           | 194            | 212   | 231   | 250   | 270   | 293   |
| 8,5         | 247            | 270   | 295   | 320   | 345   | 373   |
| 9           | 310            | 340   | 370   | 401   | 435   | 470   |
| 9,5         | 386            | 421   | 460   | 499   | 540   | 580   |
| 10          | 474            | 518   | 563   | 611   | 661   | 713   |

Таблица 13  
Значения  $\sin^4 \alpha$

| $\alpha$ | $\sin^4 \alpha$ | $\sin^4 \alpha$ | $\alpha$ |
|----------|-----------------|-----------------|----------|
| 90°      | 1,000           | 0,984           | 85°      |
| 80       | 0,941           | 0,871           | 75       |
| 70       | 0,778           | 0,675           | 65       |
| 60       | 0,562           | 0,450           | 55       |
| 50       | 0,345           | 0,250           | 45       |
| 40       | 0,171           | 0,108           | 35       |
| 30       | 0,063           | 0,032           | 25       |
| 20       | 0,014           |                 |          |

Пример.  $S_0 = 24 \text{ м}$ ;  $d = 1,65 \text{ мм}$ ;  $t = 15^\circ \text{ С}$ ;  $B = 765 \text{ мм}$ ;  $v = 5,2 \text{ м/сек.}$ ;  $\alpha = 80^\circ$ . Из табл. 9:  $v \cdot 10^5 = 1,45$ ; из табл. 10:  $c^2 = 1,08$ ; из табл. 11:  $\rho = 0,126$ ; из табл. 12:  $K = 46,0 \mu$ ; из табл. 13:  $\sin^4 80^\circ = 0,941$ ; следовательно: поправка  $= -1,08 \times 46,0 \times 0,941 \mu = -46,8 \mu$  ( $1 : 512\,000$ ).

Как видно из приведенного примера, поправка за ветер — непренигаемая величина; из формулы (166) следует, что она быстро возрастает с увеличением длины проволоки (пропорционально кубу длины) и скорости ветра (пропорционально четвертой степени  $v$ ); поэтому:

а) измерять первоклассные базисы при ветре со скоростью, большей 3—4 м в секунду для 24-м проволок и 2—3 м в секунду — для 48-м проволок, не следует;

б) прецизионными лентами в приборе Едерина можно пользоваться только в безветренную погоду;

в) ввиду систематического характера поправки за ветер, ее следует вводить в результаты измерения базиса при скорости ветра свыше 2 м/сек.;

г) так как величины  $v$  и  $\alpha$  измеряются довольно грубо, то поправку за ветер следует вычислять сразу для целой секции по формуле

$$-n \cdot c^2 \cdot K \cdot \sin^4 \alpha, \quad (168)$$

где  $n$  — число пролетов в секции,  $c$ ,  $K$  и  $\alpha$  — средние для секции значения соответственных величин, получаемые по средним из измеренных в нескольких характерных местах секции значениям  $v$ ,  $a$ ,  $t$  и  $B$ .

8. Влияние дождя и росы на длину хорды  $AB$  также посит систематический характер, и соответствующая поправка в длину хорды, как это видно из вывода формулы (15!), будет иметь вид

$$-\frac{p \cdot S_0^3}{12 P^2} \cdot \Delta p, \quad (169)$$

где  $\Delta p$  — изменение единицы длины проволоки (одного метра) под влиянием осевшей на ее поверхности влаги. Обозначая через  $d$  диаметр проволоки, через  $\tau$  — толщину слоя влаги на поверхности проволоки, имеем:

$$\Delta p = \pi \cdot d \cdot \tau \quad (170)$$

(здесь  $d$  и  $\tau$  выражены в мм,  $\Delta p$  получается в граммах).

Пример:  $d = 1,65 \text{ мм}$ ;  $\tau = 0,05 \text{ мм}$ ;  $p = 0,0173 \text{ кг}$ ;

$$S_0 = 24 \text{ м}; \quad P = 10 \text{ кг.}$$

$$\Delta p = 3,14 \times 1,65 \times 0,05 = 0,259 \text{ г.}$$

$$\text{Поправка} = -51,6 \mu \quad (1 : 466\,000).$$

При  $S_0 = 48 \text{ м}$ :

$$\text{поправка} = -51,6 \times 8 = -413 \mu \text{ или } 1:116\,000.$$

Из приведенных примеров видно, что влияние дождя и росы чрезвычайно велико, а так как величины  $\tau$  или  $\Delta r$  практически неопределены, то производить измерения первоклассных базисов во время оседания влаги на проволоках не следует.

### § 38. Аппаратура базисного прибора с проволоками

В базисный прибор Едерина, усовершенствованный Гилььомом, входят:

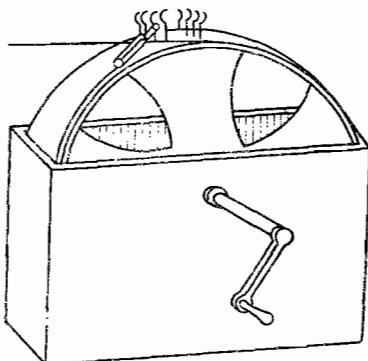
1) Несколько пар проволок или лент. Наиболее употребительна длина проволок в 24 м (диаметр 1,65 мм), при которой достигается удобство сравнения длины проволок с длиной трехметровых или четырехметровых жезлов на компараторах особого устройства (см. § 40). Для перехода препятствий пользуются также проволоками длиной 48, 72 и 96 м. На концах проволоки имеются шкалы длиной 8 см, разделенные на миллиметры; устройство шкал показано на черт. 137; ребро шкалы  $ab$ , которым она касается целика (см. черт. 141), находится на



Черт. 137

оси проволоки; подпись делений на обеих шкалах возрастает в одном направлении; вследствие этого перемена местами наблюдателей при шкалах и вторичная группа отсчетов по ним приводят к частичному исключению в среднем из обоих результатов влияния постоянных личных ошибок наблюдателей в отсчетах по шкалам. При переноске проволоку берут за кольцо  $c$  (черт. 141), пристегнутое к ушку  $a$  шкалы при помощи карабин  $k$ ; карабин  $k$  может свободно вращаться около оси, соединяющей его с колечком  $b$ , и вследствие этого при работе можно без скручивания проволоки осуществлять надлежащую установку шкал, а также все операции с проволокой — сматывание, разматывание и пр.

По предложению Гилььома проволоки хранятся и перевозятся навернутыми (свободно) на барабан (черт. 138) диаметром 0,5 м; этим устраняется опасность повреждения проволок при разматывании и наматывании, а также при перевозках. На поверхности барабана имеется ряд твердых стоек  $a$  и мягких стоек  $b$  (черт. 139); при наматывании на барабан проволока надевается ушком задней шкалы на твердую стойку  $a$  и по окончании сматывания пристегивается ушком передней шкалы к мягкой (отгибающейся на шарнире  $c$ ) стойке  $b$ ; высота стоек рассчитана так,

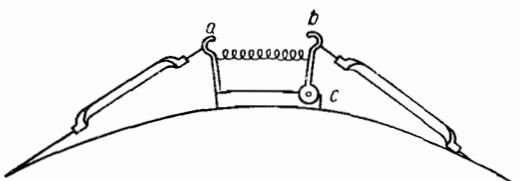


Черт. 138

что шкалы не касаются барабана. Для облегчения веса барабан делается из алюминия и имеет вырезы.

Так как коэффициент расширения алюминия во много раз больше, чем у инвара (см. стр. 241), то при резком изменении температуры (в сторону повышения) намотанная на барабан инварная проволока может подвергнуться значительному растяжению (например, при повышении температуры на  $20^{\circ}$  сила растяжения может достигнуть 16,5 кг). Чтобы устранить это вредное обстоятельство, в последнее время

(в сторону повышения) намотанная на барабан инварная проволока может подвергнуться значительному растяжению (например, при повышении температуры на  $20^{\circ}$  сила растяжения может достигнуть 16,5 кг). Чтобы устранить это вредное обстоятельство, в последнее время



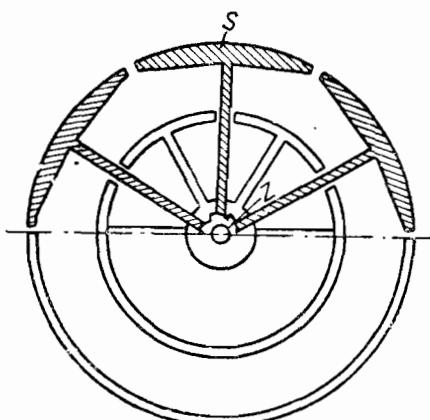
Черт. 139

барабаны стали делать разрезными (черт. 140): поворотом зубчатки  $Z$  приподнимают слегка сегменты барабана  $S$  и наматывают проволоку; далее снова опускают их и тем дают проволоке достаточный простор для расширения.

Для измерения «остатков» употребляются более короткие проволоки — 8 м и 9 м длиной, а также 4-м инварная ленточка, разделенная на дециметры; по обе стороны каждого дециметрового деления имеется по одному миллиметровому делению; кроме того, в начале и в конце ленты имеются дециметровые шкалы, разделенные на миллиметры.

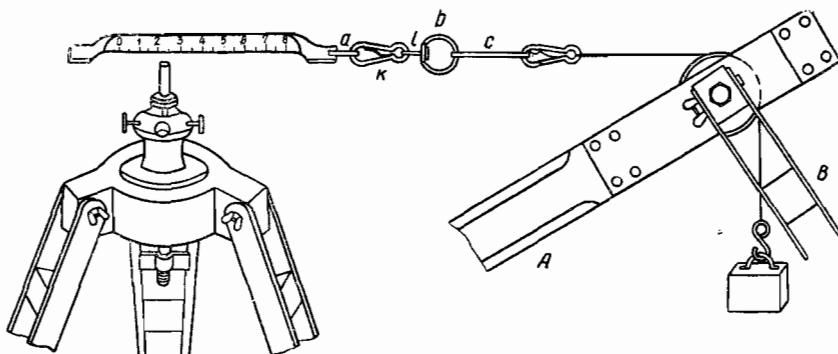
Инварные ленты, употребляемые в настоящее время в США для измерения базисов, имеют длину 50 м при поперечном сечении 6 мм на 0,5 мм (кроме того, с обеих сторон ленты имеются свободные концы по 1 м); в начале и в конце ленты имеются дециметровые шкалы, разделенные на миллиметры. Каждая лента хранится и перевозится навернутой на особое колесо диаметром 0,5 м. В рабочем положении ленты подпираются в трех или пяти точках (симметрично); в таком же положении они и компарируются. Ленты по сравнению с проволоками более прочны в употреблении, менее подвергнуты гниению, не имеют кручения, но зато им нельзя работать в ветреную погоду.

2) Особые треножные блочные станки, посредством которых с помощью гирь производится натягивание проволок; устройство станков Карпантье показано на черт. 141 и 142; на стальной оси  $OO$ , опирающейся на две боковые поги  $BB$ , вращается на шариковом подшипнике блок  $D$ ; в жёлобе блока ходит стальная, очень тонкая струна, к нижнему концу которой подвешивается гиря весом в 10 кг, а верхний конец легким карабинчиком пристегивается к кольцу  $c$  проволоки (черт. 141). Длинная нога  $A$  треножника, несущая обойму блока, устанавливается строго в створе базиса; окончательная установка проволоки по высоте и азимуту в положение, при котором ребро шкалы проволоки слегка

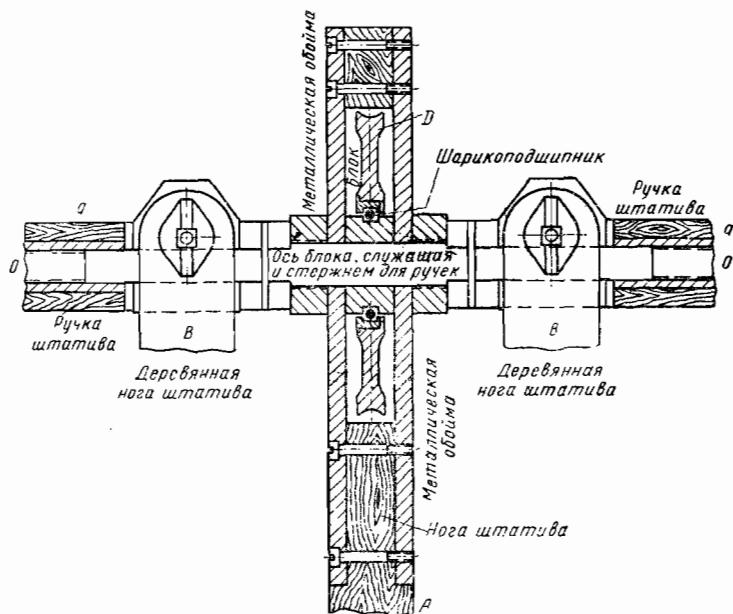


Черт. 140

касается выпуклой поверхности целика и проходит через точку пересечения взаимно перпендикулярных штрихов его, осуществляется нажатием на боковые ноги станка: после некоторого навыка это удается довольно скоро и точно; окончательное положение станка



Черт. 141

*Разрез блочного станка*

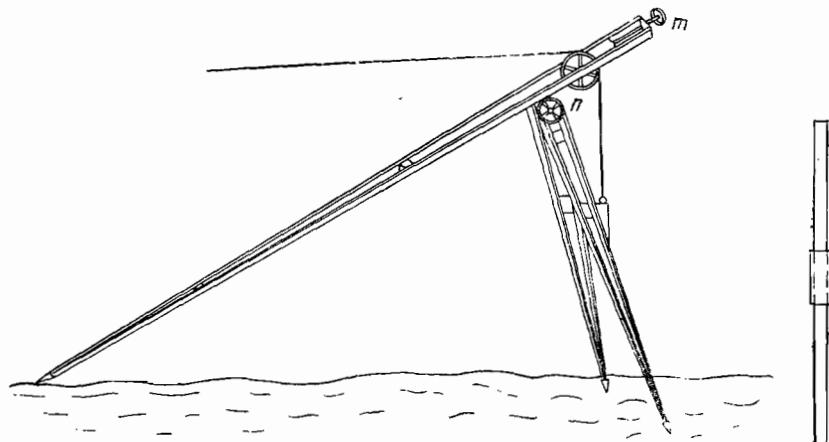
Черт. 142

закрепляется ручками *qq*. Гири должны быть выверены с точностью до нескольких граммов. Замена употреблявшихся ранее динамометров гирами облегчает работу наблюдателей и повышает точность отсчетов шкал.

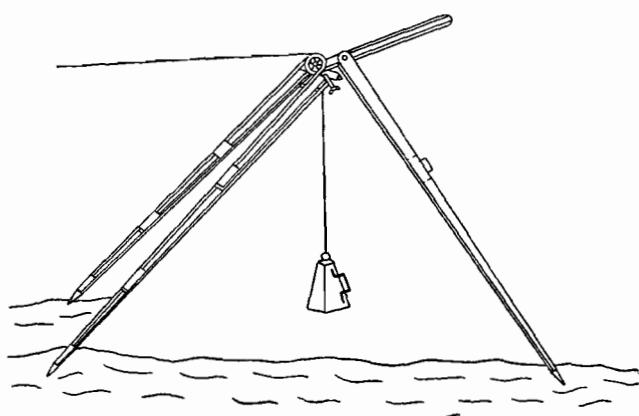
Описанные выше станки Карпантье, употребляющиеся у нас при измерении первоклассных базисов, позволяют осуществлять натяжение с ошибкой не более 40 г. Они особенно удобны в тех случаях, когда

каждый пролет измеряется и сколькими проволоками, одной за другой. В настоящее время за границей употребляют усовершенствованные станки — в том отношении, что окончательная высотная и тальная установки шкалы по целику осуществляются микрометрическими движениями, причем сначала делают сравнительно грубую установку станка в нужное положение, а потом доводят шкалу до требуемого положения медленными движениями.

На черт. 143 изображен станок, применяющийся в англо-американской практике; здесь  $m$  — высотный, а  $n$  — азимутальный вращательный движение.



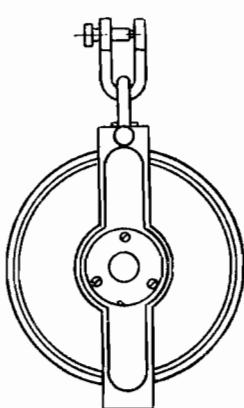
Черт. 143



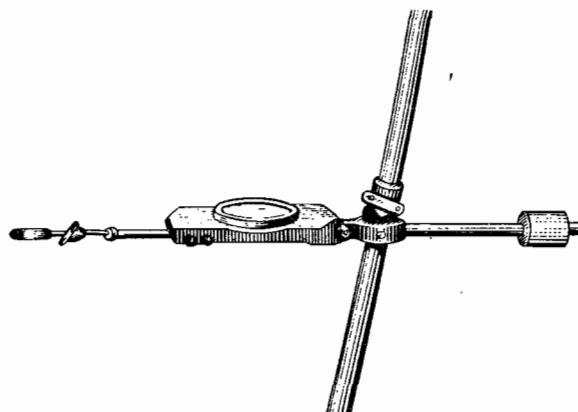
Черт. 144

Франции применяют станок, изображенный на черт. 144. В тальное движение осуществляется перемещением блока от его оси, а движение по высоте — удлинением или укорочением, особого микрометрического движения, задней ноги станка, устремляемой в створе базиса. Главный недостаток описанных станков — нитительное трение за перекос блока, возникающее в силу ориентирования блока в створе базиса (трение патяжной

о стенки жёлоба блока и пр.). Недостаток этот полностью устранен в станках проф. Витрама (астронома Пулковской обсерватории) с самоориентирующими блоками (черт. 145 и 146): легкая деревянная рама *H* с костылем упирается шипом *Q* в землю и удерживается в верхнем конце рабочим на высоте его груди в слегка наклонном положении; по раме перемещается обойма *S*, к которой подвешен снизу блок *R* с осью на шариковом подшипнике так, что он может совершенно свободно вращаться по азимуту. Установив обойму *S* на нужной высоте и закрепив ее зажимом *Z*, пристегивают к тонкой стальной ленточке, переброшенной через блок, проволоку и груз; под влиянием ленточки как направляющей блок устанавливается строго в створе проволоки; окончательная установка шкалы проволоки делается легким наклоном рамы влево или вправо, вперед или назад. Точность натяжения станками Витрама — порядка 20 г. Благодаря большой скорости и простоте установки они особенно удобны в тех случаях, когда целая секция базиса измеряется сразу одной проволокой. Станки Витрама, начавшие применяться впервые в России в начале девятисотых годов (1910), нашли в последнее время исключительное применение в базисных работах в Германии и в других странах, примыкающих к Балтийскому морю.



Черт. 146

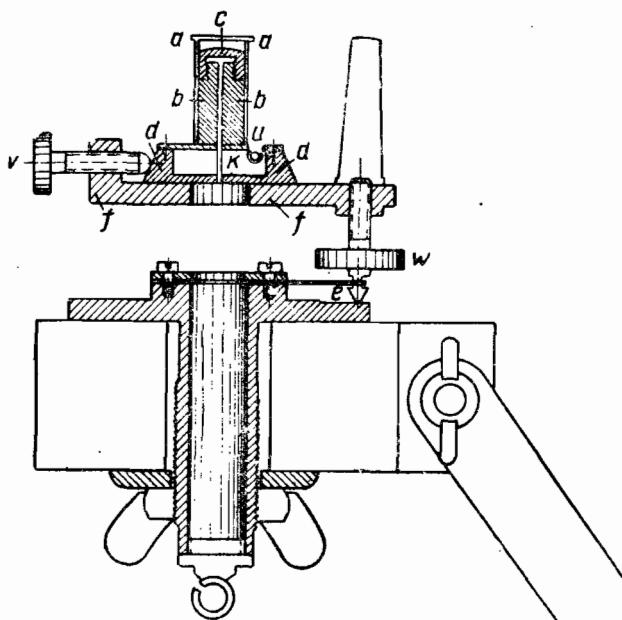


Черт. 147

В США натяжение ленты осуществляется не гирами, а динамометром с одного конца (черт. 147); динамометр с противовесом имеет свободное качание на оси, укрепленной на обойме; последняя перемещается по телу багра и удерживается на нужной высоте трепием; с противоположного конца лента удерживается багром с кожаной петлей и крючком, к которому она присоединяется. Динамометр несколько раз в день поверяется нормальным грузом весом в 15 кг при горизонтальном положении динамометра, для чего пристяжной шнур перебрасывается через чувствительный блок. Точность натяжения динамометрами не превышает 100 г.

3) Несколько десятков штативов с целиками, служащих для фиксирования концов откладываемой проволоки в створе базиса. На черт. 148 и 149 изображен штатив с целиком механика Карпантье, применявшийся во Франции. На головке обыкновенного трехугольного штатива закреплен при помощи стапового винта трегер *ff* с тремя подъемными

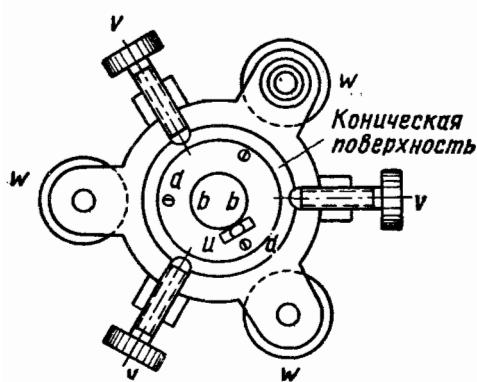
вилтами  $w$  и уровнем  $u$ , по которому ось трегера приводится в отвесное положение. На трегере укреплен цилиндрический целик с выпуклой посеребренной головкой  $c$ , на которой нарезаны два тонких взаимно



Черт. 148

перпендикулярных штриха; колпачком  $aa$  целик прикрывается в нерабочее время и при нивелировке штативов. Винты  $v$  служат для окончательной установки целика в створе базиса (по азимуту); грубая перестановка целика по азимуту,

а также вдоль створа базиса исполняется перемещением всего трегера на головке штатива по, освобождении становового винта.

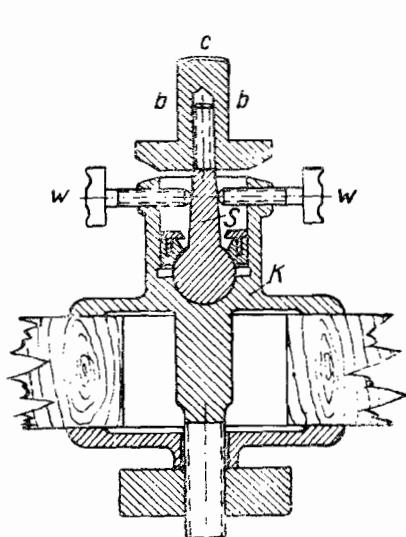


Черт. 149. Обойма с уровнями  
План головки штатива Карнантье

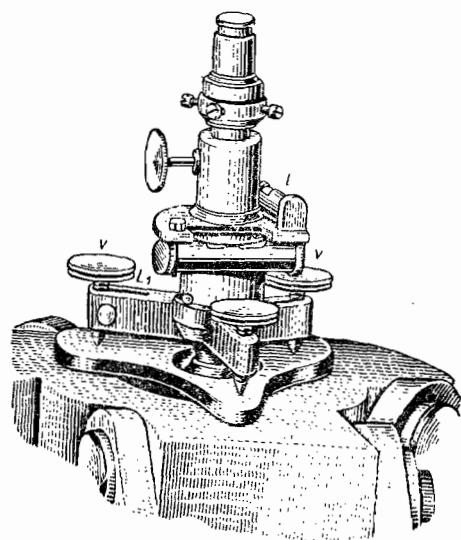
и по азимуту исполняется перемещением всей подставки  $K$  по освобождении становового винта. Целик устанавливается всегда так, чтобы один из взаимно перпендикулярных штрихов располагался нормально к створу базиса.

У нас применяется система штативов с целиками (система Красовского), изображенная на черт. 141 и 150; целик  $bb$  навинчен на стержень  $S$ ; при помощи четырех винтов  $w$  по показаниям двух, расположенных взаимно перпендикулярно уровней  $u$  ось стерженька  $S$  легко приводится в отвесное положение; установка целика по оси базиса

4) Для привязки к центрам, заложенным на концах базиса или в промежутке между ними, служат центриры или лот-аппараты. На черт. 151 изображен оптический центрир: на трех подъемных



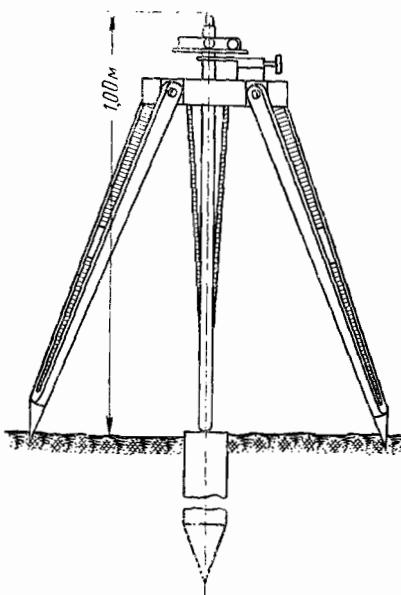
Черт. 150



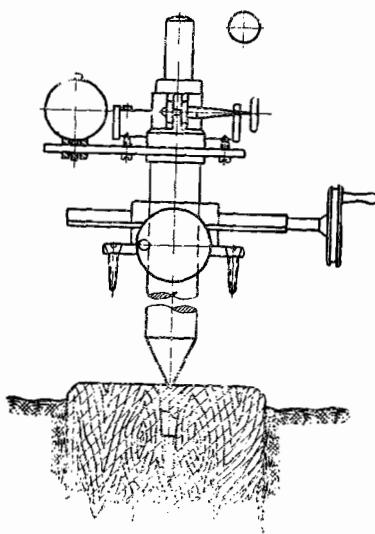
Черт. 151

Общий вид

Деталь головки центрира



Черт. 152

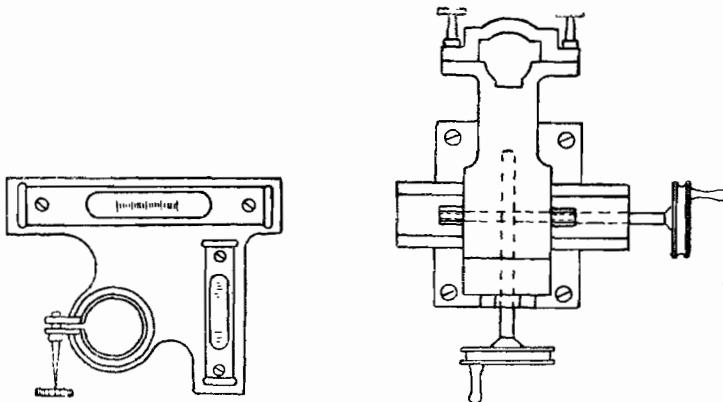


винтах  $v$  установлена вертикальная короткофокусная труба, приводимая в отвесное положение помошью двух взаимно перпендикулярных цилиндрических уровней  $L$  и  $L_1$ ; после установки центрира над центром

на окуляр трубы надевается крышечка с выпуклой поверхностью с нарезанным на ней крестом. Чтобы исключить влияние неотвесного положения визирной оси центрира и несмещения с ней креста этой крышечки, центрир поворачивают на  $180^\circ$  и вторично исполняют центрирование над центром и отсчеты по шкале проволоки. Точность центрирования таким лот-аппаратом — около  $\pm 0,3$  мм.

Большую точность и простоту в работе дает штанговый центрир (черт. 152 и 152а), состоящий из деревянного штатива с твердым отвесом в виде длинной цилиндрической штанги, наставляемой до нужной длины

обойма с уровнями



Черт. 152а. Суппорт для передвижений  
в двух перпендикулярных направлениях

дополнительными колесами. Эта штанга вверху имеет целик, совершенно подобный целику *bb* (черт. 148), а внизу оканчивается лежащим на ее оси острием, которое совмещается с «точкой» в базисном центре. Вверху штанга удерживается особой обоймой, которая может двигаться по голове штатива в двух перпендикулярных направлениях; для приведения оси штанги в отвесное положение служат два имеющихся при ней уровня. Как и в оптическом центрире, центрирование исполняется дважды, с поворотом штанги на  $180^\circ$  в промежутке.

5) Несколько термометров-прашей для определения температуры воздуха, хорошо выверенных; проволочный капатик длиной в 24 м с мало точным динамометром к нему — для расстановки целиков на нужном расстоянии друг от друга; чистоир повышенной точности с увеличением трубы 30—40 $\times$  и ценой деления уровня 7''—10'', с двусторонней рейкой около 1 м длины — для пивелирования целиков.

### § 39. Инварные проволоки. Обращение с ними

Лучшими инварными проволоками в настоящее время являются проволоки, изготовленные из французского инвара, выпускаемого сталелитейными заводами в *Impfhy*. Убедившись в том, что полученный сплав инвара имеет небольшой коэффициент расширения, изготавливают из него проволоку первоначально диаметром 2 мм, пропуская ее через волочильный стакан со стальными отверстиями; далее диаметр ее уменьшается до 1,65 мм путем волочения через рубиновые отверстия, чем достигается большая гладкость поверхности и большее однородное

диаметра проволоки, а также сообщается ей большая жесткость и больший модуль упругости. В процессе волочения в «волокнах» проволоки возникают вредные упругие напряжения, вызывающие неустойчивость в длине проволоки — именно тенденцию к укорочению, особенно при сотрясениях и толчках. Для ослабления этого напряжения и придания, таким образом, проволоке большей стабильности, ее подвергают упомянутому в § 31 этюважу, т. е. искусственному старению. Как известно, в процессе этюважа достигается и другая задача — значительное ослабление явления непрерывного удлинения инварной проволоки со временем.

Для выполнения этюважа проволоку наматывают на металлический барабан диаметром 50 см, наполняемый водой; снаружи барабан обертывают толстым слоем асбеста. Нагрев воду до температуры 100° (точки кипения), поддерживают ее в состоянии кипения в течение четырех-пяти дней; далее воду постепенно охлаждают, примерно в течение трех месяцев, до температуры 25° и тем медленнее, чем ниже температура. В экспериментальной мастерской МИИГАИК этюваж выполняется в особой изотермической камере, нужная температура внутри которой получается электронагревом (температура определяется термопарами).

Следует иметь в виду, что в процессе волочения проволоки ее температурный коэффициент  $\alpha$  значительно снижается и даже становится отрицательным; последующий этюваж несколько увеличивает его, но делает более устойчивым — в пределах  $\pm 0,03 \cdot 10^{-6}$ . Если в результате волочения коэффициент  $\alpha$  стал отрицательным, то этюваж несколько усугубит его (и уменьшит абсолютную величину на величину порядка  $1,5 - 2,0 \cdot 10^{-6}$ ) и может сделать близким к нулю.

После этюважа напряжение в «волокнах» проволоки ослабляется, проволока укорачивается; однако, для придания ей еще большей стабильности, проволоку подвергают ряду сильных ударов (о пол) в числе, не меньшем 400, благодаря чему последующие, менее значительные сотрясения при работе с проволокой не меняют существенно ее длины. Разумеется, этюваж не устраниет, а только ослабляет процесс непрерывного удлинения инварной проволоки, а потому по выходе из этюважа проволоку хранят при обычновенной температуре в течение трех-четырех лет, после чего прикрепляют шкалы и пускают ее в работу.

После изложенного понятны известные факты из жизни инварных проволок: в рабочие периоды они имеют тенденцию укорачиваться, в периоды покоя — удлиняться.

Из опыта пайдсю, что диаметр барабана, на котором хранится проволока в рабочее время и при перевозках, должен быть не меньше 50 см; в противном случае наружные «волокна» проволоки получают столь значительное напряжение, что в процессе наматывания и разматывания проволока меняет свою длину. Для уменьшения этого напряжения инварная проволока, по выходе из волочильного станка, еще в горячем состоянии, наматывается на барабан диаметром 60 см, а потом уже, но охлаждении, перематывается на барабан нормального диаметра 50 см.

По изготавлению проволоку подвергают натяжению в 60 кг в течение 24 часов, чтобы убедиться в надежности прикрепления шкал и в общей стабильности длины проволоки. В рабочем положении проволоку не рекомендуется натягивать с силой, большей 20 кг, так как это вызывает уже через несколько часов удлинение ее в пределах одной миллионной. Следует иметь в виду, что коэффициент расширения

инварной проволоки зависит от ее натяжения (уменьшается с увеличением натяжения), а потому должен определяться всегда при рабочем натяжении проволоки в 10 кг.

Обычно порядок вышеуказанных операций следующий: подвергнув проволоку 200 ударам, прикрепляют пикалы, подвергают ее натяжению в 60 кг в течение 24 часов и вновь ударами в числе от 100 до 200.

В виду возможности внезапных изменений в длине проволоки от сотрясений, резкой смены температуры и пр., базисы следует всегда измерять несколькими проволоками, что позволит своевременно выделить проволоку, изменившую свою длину.

В целях учета влияния температурных последствий на длину проволоки (см. § 31) необходимо следить за температурными состояниями проволоки в рабочий и предшествующий ему периоды, именно — следует знать среднюю температуру проволоки в предыдущую неделю с ошибкой, не превышающей 5—6°. Тогда поправка за температурное последствие может быть определена по формуле (112). Для уменьшения влияния ошибки в этой трудно учитываемой поправке полезно одну половину проволок, входящих в комплект для базисных измерений, брать с положительным коэффициентом, а другую половину — с отрицательным коэффициентом расширения; в таком случае остаточные ошибки за температурное последствие в обеих группах проволок будут иметь противоположные знаки и в среднем из всех проволок дадут хорошую компенсацию.

Для учета случайных и систематических изменений длии проволок (напр., систематического удлинения с течением времени) все проволоки, входящие в базисный прибор, тщательно компарируются и определяются перед и после измерения ими базиса; за окончательную длину проволоки берут среднее из обоих результатов, если они разошлись между собой не свыше 50  $\mu$  (для 24-м проволок), или же величину, получаемую для момента измерения базиса простым интерполярованием по времени.

Следует различать индивидуальные изменения длии проволок (в рабочий или нерабочий периоды) и групповые, свойственные всем проволокам одной плавки, находившимся в одипаковых условиях. Изучение советских материалов по 15 проволокам, находившимся в работе с 1925 г. по 1935 г. показало, что в то время, как индивидуальные изменения инварных проволок в рабочий период составляют  $\pm 21 \mu$  (на 24-м проволоку), групповые изменения составляют  $\pm 26 \mu$  в среднем. При измерениях Балтийской геодезической комиссией семи базисов Балтийского кольца групповые изменения восьми употреблявшихся инварных проволок составили даже в среднем  $\pm 82 \mu$ . Вообще можно сделать заключение, что даже при употреблении большого числа проволок одной плавки вывод средней их длины может заметно отличаться от действительного ее значения во время измерения той или другой части базиса. Поэтому при отборе проволок для первоклассных измерений в комплект проволок следует включать проволоки разных плавок. В отношении индивидуальных изменений длины проволок чрезвычайно различны. Очевидно, для первоклассных измерений нужно отбирать только проволоки, хорошо держащие свою длину.

Международной практикой установлено, что коэффициенты расширения инварных проволок не являются величинами постоянными и что они подвержены довольно значительным и часто незакономерным изме-

нениям; поэтому время от времени их нужно определять. Международным геодезическим союзом рекомендовано даже определять температурные коэффициенты при каждом компарировании проволок. С другой стороны, исследования последних лет показали, что квадратический коэффициент  $\beta$  иногда довольно велик и существенно влияет на средний коэффициент расширения проволоки; так, наблюдались случаи, когда взаимодействие коэффициентов  $\beta$  и  $\alpha$  (в случае, когда знаки их противоположны) приводило к тому, что средний температурный коэффициент даже менял свой знак на обратный в рабочем интервале изменения температуры (от  $-10$  до  $+30^\circ$ ). Теперь можно считать установленным, что при определении температурных коэффициентов проволок нужно определять каждый раз оба коэффициента —  $\alpha$  и  $\beta$ , а не только коэффициент  $\alpha$ , как это обычно делалось до сих пор. Трудности довольно точно определения коэффициента  $\beta$  и необходимость определять температурные коэффициенты достаточно часто налагаются на современные компараторы для эталонирования инвариальных проволок и лент особые требования к их устройству.

Из предыдущего изложения ясно, что инвариальные проволоки, предназначенные для измерения первоклассных базисов, требуют чрезвычайно бережного обращения с ними. Проволоки или ленты не следует подвергать резким изменениям температуры, толчкам, сильной тряске; при измерениях в жарких странах и при переездах через них следует, по возможности, избегать сильного нагревания проволок (есть основания полагать, что аналогичные указания в полной мере относятся и к низким температурам).

При пользовании проволоками всегда есть опасность погнуть их, особенно в местах соединения проволоки со шкалами, поэтому переноску проволок можно поручать только очень надежным и опытным рабочим. Еще лучше, если принятая методика измерений позволяет переносить проволоку самим наблюдателям (см. § 41); переносить проволоку следует всегда, только держа ее за кольцо карабина. Наматывание проволоки на барабан и разматывание с барабана должны исполняться самим наблюдателем; при этом нужно следить за тем, чтобы карабин на другом конце проволоки не «заедал» и он свободно вращался у основания своего кольца вместе с проволокой. Лента менее подвергнута гибкости, чем проволока, и потому предпочитается некоторыми странами, но совершенно не пригодна к употреблению во время встреч.

Проволоки и ленты, а также гири следует очищать от грязи и пыли, которые могут изменять их вес; при хранении их следует слегка смазывать вазелином, удаляя его каждый раз перед работой; после дождя или росы проволоку или ленту следует протереть сухой тряпочкой и слегка смазать вазелином.

Вопрос относительно условий хранения проволок окончательно пока не выяснен, у нас и в большинстве других стран проволоки хранятся намотанными на барабан; в Германии проволоки предпочитают хранить в свободно подвешенном состоянии или с небольшим натяжением.

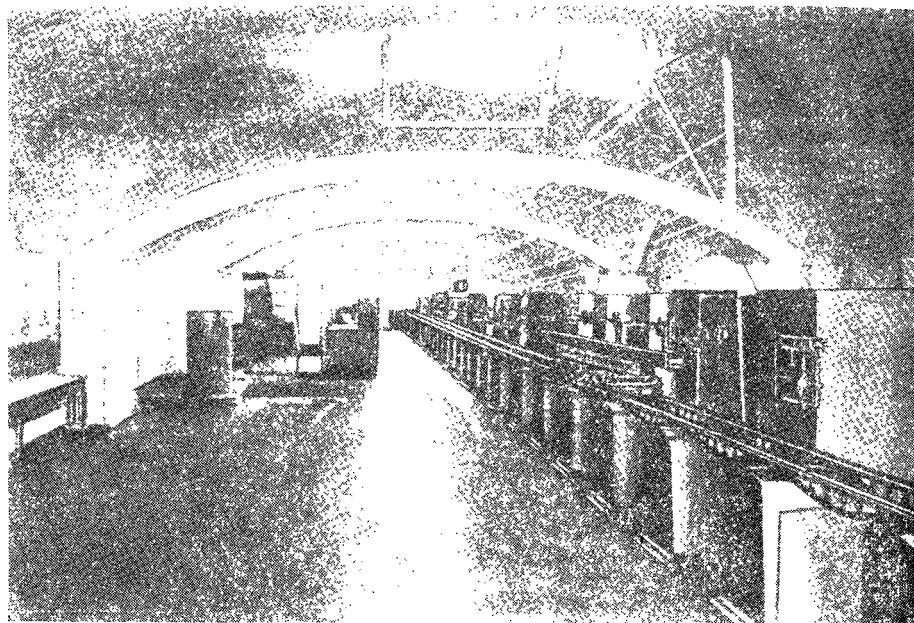
## § 40. Компарирование проволок и лент

Определение длины проволоки или ленты представляет собой задачу более трудную, чем определение длины четырехметрового жезла базисного прибора с жезлами. В трудности решения этой задачи заключается основной недостаток базисного прибора с проволоками или

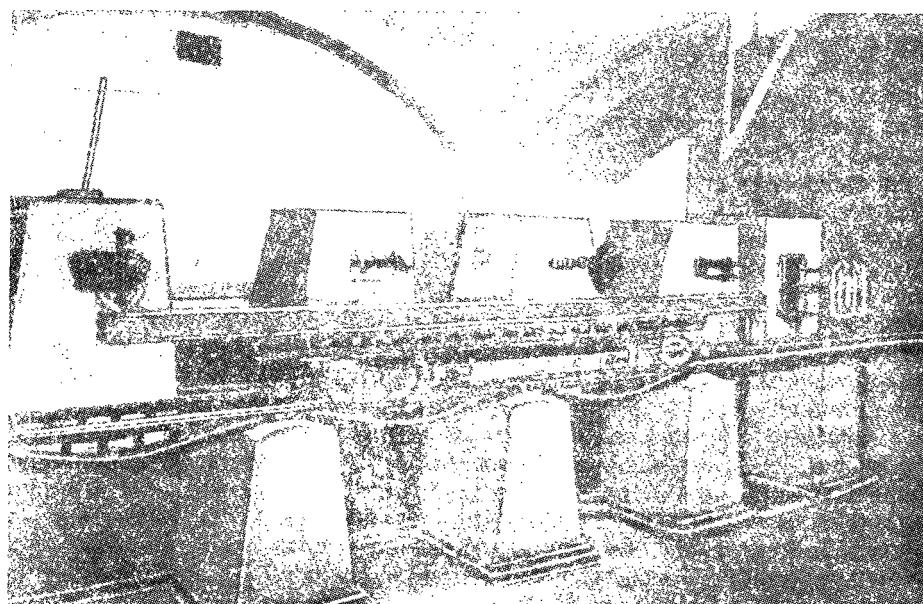
лентами. Существует два пути эталонирования проволок: первый заключается в измерении эталонируемыми проволоками малого временного базиса, так называемого контрольного базиса, длина которого хорошо известна из многократных определений надежным же зловым базисным прибором, проволоками с хорошо известной длиной или интерференционным методом. Второй путь состоит в устройстве особого компаратора, на котором чрезвычайно точно откладывается длина в 24 м, промеряемая затем эталонируемыми проволоками.

Контрольный базис делается длиной от 240 до 960 м; в последнее время длина его берется обычно в 960 м и во всяком случае не меньше 480 м. Такая длина обусловлена: кратностью длины применяемых инвариных проволок; малым влиянием температурных сдвигов конечных центров базиса на его длину; сравнительно малым влиянием ошибок центрировок на концах базиса при измерении его длины. Базис выбирается на геологически устойчивом основании: на скалистом или на песчаном грунте, с низкими грунтовыми водами; конечные точки базиса, а иногда и промежуточные отмечаются солидными постоянными центрами, в большинстве случаев опущенными несколько ниже поверхности почвы. Измерив контрольный базис данным комплектом проволоки и зная его длину, мы легко получаем «уравнения» проволок, в которые войдут, очевидно, и систематические ошибки, свойственные данному методу и применяемой аппаратуре. Если такое компарирование проволок выполнять до и после измерения данного первоклассного базиса, то мы определяем каждый раз отношение длины данного базиса к длине контрольного; эта длина контрольного базиса, таким образом, является как бы единицей измерения базисов в стране. Как мы видим, главное достоинство компарирования проволок или лент на контрольном базисе — это освобождение результатов измерений от систематических ошибок, свойственных данному методу и данному базисному прибору. Недостаток этого метода компарирования — сравнительная его громоздкость.

В СССР проволоки прибора Едерина первоначально компарировались на 240-м базисе в Пулкове, но затем были построены специальные 24-м компараторы. В настоящее время такие компараторы имеются в Москве, Ленинграде, Ташкенте и Тбилиси. Последним по времени постройки и наиболее совершенным является компаратор Института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии в Москве, изображенный на черт. 153—155. Компаратор расположен в полуподвальном этаже главного здания Института и имеет устройство, описанное велде ниже. На девяти изолированных друг от друга и от пола помещения каменных столбах с глубоким фундаментом укреплены помостью особых кронштейнов девять микроскоп-микрометров; оси микроскопов расположены в одной огневной плоскости — створе компаратора; расстояния между пульпунктами каждой пары смежных микроскопов близки к 3 м, а расстояние между пульпунктами крайних микроскопов (базис компаратора) близко к 24 м. Под микроскопами проходит полотно компаратора, состоящее из двух параллельных друг другу рельсов, ложенных на ряде каменных стелл, выведенных на изолированном от пола основании; один рельс — ведущий, треугольного сечения, другой — плоский. Рельсы состоят из однометровых отрезков, положение которых регулируется особыми исправительными винтами; установку рельсов выполняют, пользуясь тягой пятым шуром и накладывающимся на рельсы большим уровнем. По полотну базиса



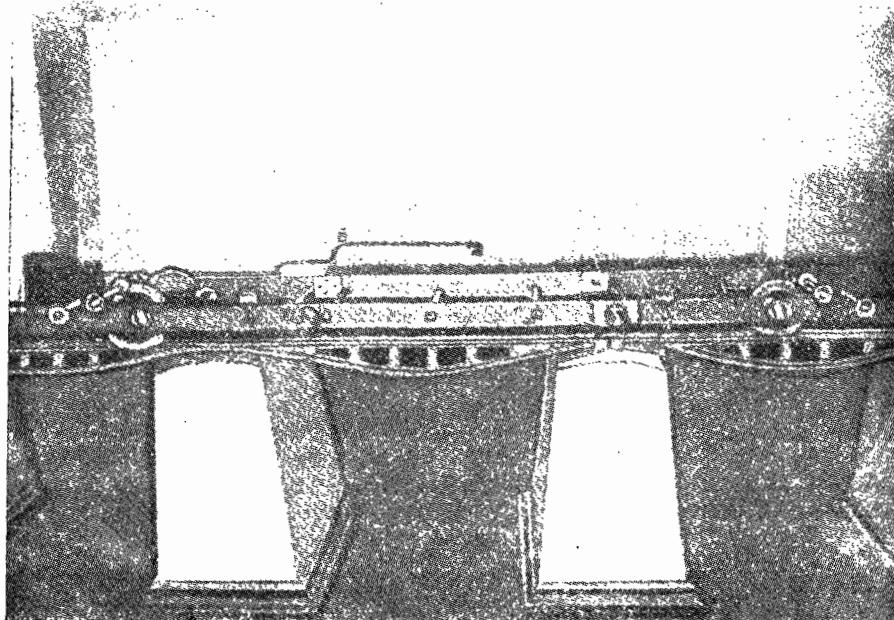
Черт. 153



Черт. 154

перемещается во время компарирования тележка на четырех колесах, несущая нормальную меру.

Эта нормальная мера представляет собой трехметровый жезл  $l_{54}$  из инвара **Н**-образного сечения, описанный в § 28; длина этого жезла и его температурные коэффициенты определяются во ВНИИМ из сравнений с метром-прототипом. Эта трехметровая нормальная мера покоятся в деревянном футляре (черт. 154), имеющем в крышке оконечки против



Черт. 155

концов меры и против лежащих на жезле термометров. Тележка для футляра с мерой, изображенная на черт. 154 и 155, имеет остроумные приспособления для малых передвижений меры по трем направлениям: вдоль компаратора (поступательное перемещение), поперек его (по азимуту) и по высоте. Слева от первого микроскопа и справа от девятого на особых столбах с самостоятельным фундаментом укреплены станики для подвески и натяжения проволок в виде легких металлических откидных рам (черт. 153), на которых укреплены блоки (на шариковых подшипниках); блоки имеют микрометрические перемещения по азимуту и по высоте, позволяющие устанавливать шкалы проволоки в нужное положение под крайними микроскопами. Имеется также специальное приспособление, позволяющее заменять блоки откидных рам компаратора блоками, применяющимися на полевых работах. Как видно из черт. 153, между восьмым и девятым микроскопами имеются еще два промежуточных микроскопа на расстоянии 1 м друг от друга, служащие для сравнения трехметрового жезла с однometровым. С правой стороны полотно компаратора выступает на линии 5 метров, образуя запасный путь, на котором находится тележка с жезлом во время эталонирования самих проволок. Микроскопы имеют увеличение около 25 $\times$ ; цена наи-

меньшего деления барабана микрометров микроскопов около 1 $\mu$ ; на глаз легко отчитываются десятые доли деления барабана. Температура помещения отсчитывается при помощи трех термометров, подвешенных на деревянных стойках. Помещение компаратора имеет довольно ровную годовую температуру, близкую к +15° С.

Благодаря укреплению микроскопов на отдельных столбах с изолированными фундаментами базис компаратора чрезвычайно хорошо держит свою длину - в пределах немногих микропов в течение нескольких часов работы на компараторе. Этого нельзя сказать про остальные из упомянутых выше компараторы, хотя некоторые из них построены в специальных павильонах; однако, микроскопы у них укреплены на общей стеле, имеющей довольно большой коэффициент расширения - порядка 1 : 200 000 - 1 : 250 000, что приводит к довольно быстрому ходу длины базиса компаратора. Помещения большинства компараторов имеют специальную отопительную систему, позволяющую поднимать температуру помещения от нормальной до +30° и поддерживать ее на нужном уровне (правда, очень несовершенную систему, без автоматической регулировки температуры помещения).

Проволоки эталонируются на компараторе до и после измерения базиса в сроки, возможно более близкие к моменту измерения базиса, каждый раз шестью приемами при измерении первоклассного базиса, и тринадцатью - при измерении второклассного базиса. Один прием эталонирования проволок состоит из определения длины компаратора, определения длины проволок путем сравнения их с длиной компаратора и из вторичного определения длины компаратора.

Определение длины компаратора производят следующим образом: два наблюдателя отчитывают температуру жезла и, действуя винтами тележки, устанавливают концевые нитрихи жезла в фокусах 1-го и 2-го микроскопов и возможно ближе к их нульпунктам, соблюдая одновременно и установку жезла по азимуту; затем следует двух- или трехкратное одновременное плаведение нитей обоих микрометров с отсчетами по их барабанам  $a$  и  $b$ ; продвинув затем тележку с жезлом на 3 м, устанавливают жезл так, чтобы задний его нитрих совместился с биссектором нитей 2-го микроскопа, оставшимся на отсчете  $b$ ; после этого отчитывают 2-й и 3-й микроскопы и получают отсчеты  $b_1$  и  $c$ ; затем, продвинув жезл еще на 3 м, вновь устанавливают его так, чтобы задний нитрих совместился с биссектором нитей 3-го микроскопа, который остался на отсчете  $c$ ; отчитывают микроскопы 3-й и 4-й и получают отсчеты  $c_1$  и  $d$ , и т. д. Пройдя весь компаратор, наблюдатели меняются местами, прогоняют жезл таким же образом в обратном направлении и вновь отчитывают температуру жезла. Общая длина  $B$  компаратора для хода жезла вперед или назад определяется по формуле:

$$B = 8N - a\mu_1 + (b - b_1)\mu_2 + (c - c_1)\cdot\mu_3 + (d - d_1)\cdot\mu_4 + \dots + (h - h_1)\mu_8 + i\cdot\mu_9 + 8Nz_m \cdot (t_m - t_0), \quad (171)$$

где:  $N$  - длина нормальной меры при температуре  $t_0$ ;  $t_m$  - средняя температура нормальной меры;  $z_m$  - средний коэффициент расширения жезла в интервале температур от  $t_0$  до  $t_m$ ;  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_9$  - цены делений барабанов микрометров, определяемые специальным исследованием. Из обоих результатов берут среднее.

Для сравнения длины проволоки с длиной компаратора подвешивают проволоку с постоянным натяжением, пользуясь гирями, и, по воз-

можности, блоками, которые применялись в поле. Установив шкалы проволоки по фокусу и отсчитав температуру воздуха в помещении, делают серию одновременных отсчетов по шкалам проволоки — по три пары отсчетов на штрихи с подицами 20, 40 и 60 м; затем снимают данную проволоку, подвешивают следующую и делают такую же серию отсчетов, и т. д. Далее наблюдатели меняются местами, выполняют наблюдения проводок в обратном порядке, визируя на те же штрихи шкал проволок, но в обратном порядке, т. е. 60, 40 и 20 м, и вновь отсчитывают температуру воздуха в помещении. Если  $O_1$  и  $O_9$  — средние отсчеты микрометров 1-го и 9-го микроскопов при визировании на шкалы проволок, то длина  $L_0$  проволоки при некоторой начальной температуре  $t_0$  будет равна

$$L_0 = B_m + C_1 \cdot \mu_1 - O_9 \cdot \mu_9 - L_0 \cdot z_m (t_m - t_0), \quad (172)$$

где  $B_m$  — средняя длина базиса компаратора из обоих результатов, полученных до и после собственному компарированию проволок;  $t_m$  — средняя температура компарирования проволок;  $z_m$  — средний коэффициент расширения проволоки для интервала температур от  $t_0$  до  $t_m$ .

Чтобы ослабить влияние трения блоков на напряжение проволоки, необходимо при переходе от одной пары отсчетов к другой слегка перемещать проволоку в противоположных направлениях. Очевидно, мы будем иметь тот же эффект, если один и тот же наблюдатель будет перемещать проволоку при ходе проволок вперед в одном направлении и при ходе проволок назад — в противоположном направлении. Пренебречь этим соображением при эталонировании проволок не следует, так как односторонняя ошибка за трение блоков может достигать 14  $\mu$  по Гильму и 24  $\mu$  по немецким источникам. Разрешается объединять смежные приемы, принимая второе определение длины базиса компаратора в одном приеме за первое в последующем приеме.

Так как отсчеты  $b$  и  $b_1$ ;  $c$  и  $c_1$  и т. д. в формуле (171) при принятом методе работы чрезвычайно близки друг к другу, то влияние ошибок определения цепи деления барабанов промежуточных микроскопов на длину базиса компаратора очень невелико; в формулу (172) эти величины даже совсем не входят; поэтому при определении цепей делений барабанов микроскопов особое внимание должно быть обращено именно на крайние микроскопы — 1-й и 9-й.

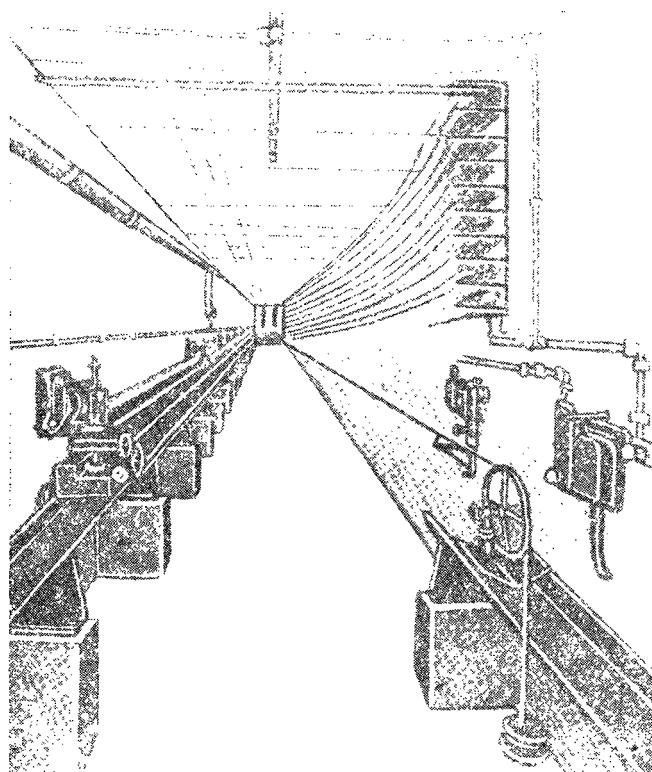
При эталонировании лент они подицаются так же, как и в поле, для чего компаратор при МИИГАИК имеет комплект соответствующих подиц.

Средняя ошибка эталонирования 24-м инварных проволок на описанном компараторе, определяемая по внутренней сходимости (по колебаниям между приемами), составляет около 5  $\mu$ . Принимая во внимание, что длина 3-м жезла известна нам с ошибкой  $-1.0 \mu$  (при условии ежегодного сравнения его во ВНИИМ с жезлом  $H_1$ ), имеем, что проходящая отсюда ошибка в длине компаратора составляет

$1.0 \times 8 \dots 8 \mu$ . Следовательно, средняя ошибка эталонирования проволоки равна  $-1.5^2 \dots 8^2 \dots 9.4 \mu$  или  $-0.4 \cdot 10^{-6}$  (около 1 : 2 500 000), не принимая во внимание ошибки в напряжении за трение блоков. Международный геодезический союз рекомендует эталонировать 24-м проволоки со средней ошибкой, не превышающей  $\pm 10 \mu$ . Так как ошибка за трение блоков и за изменяемость трения довольно велика, то эта точность недостижима. Если применять при

компарируании проволок те же блоки, которые употреблялись для натяжения их в поле, и если следить за компенсацией трения блоков в процессе эталонирования проволок, то средняя ошибка эталонирования на компараторе МИИГАиК не превысит  $\pm 15\mu$ , или  $\pm 0.6 \cdot 10^{-6}$ , включая и ошибку эталона.

Аналогичные компараторы имеются в центральных геодезических или метрологических учреждениях других стран. На черт. 156 показан новый 24-м компаратор Международного бюро мер

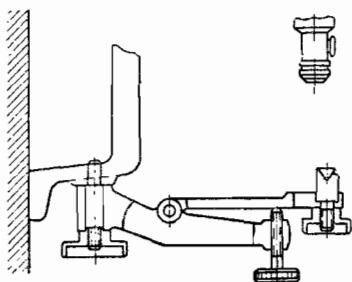


Черт. 156

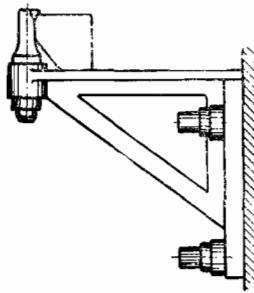
и весов в Брестелле близ Парижа. На первой ступени специального подвального помещения установлены семь микроскоп-микрометров на расстоянии 4 м друг от друга; расстояния между их нульpunktами определяются при помощи 4-м пиварной нормальной меры, перемещающейся по двум реивам; расстояние между нульpunktами крайних микроскопов передается на имеющиеся под ними специальные откильные марки (черт. 157). Расстояние между индексами этих марок передается, в свою очередь, при помощи комплекта нормальных пиварных проволок, служащих только для этой цели, на базе вспомогательного компаратора, устроенного на противоположной стенае изменения (справа на черт. 156) и служащего испосредственно для определения длин рабочих пиварных проволок. Концы вспомогательного базиса отмечены марками-целиками того же устройства, что и в приборе Едерина фирмы Карпантье

(черт. 158; цилиндрики со скошенным краем). Для натяжения проволок применяются переносные станки с блоками и грузами, устройство которых ясно из черт. 156.

50-м компаратор для проволок и лент Бюро стандартов в Вашингтоне имеет 11 микроскоп-микрометров, расположенных на расстоянии 5 м друг от друга; расстояния эти промеряются стальным жезлом длиной 5 м, покоящимся в наполненном битым льдом корыте.



Черт. 157



Черт. 158

Под крайними микроскопами, на бетонном основании на уровне пола, укреплены два металлических шарика, центры которых и служат концами 50-м базиса компаратора. На эти шарики ставятся во время компарирования две цилиндрические штанги (коническими полостями в нижних их концах) лотаппаратов, имеющих на верхних концах шкалки с миллиметровыми делениями. Шкалки располагаются в фокальных плоскостях крайних микроскопов; расстояние между нульпунктами этих микроскопов связывается при помощи отсчетов по микрометрам с расстоянием между нулевыми штрихами шкал, которым и пользуются при последующем компарировании 50-м проволок или лент. Промежуточные микроскопы через 1 м между 8 и 9 микроскопами позволяют сравнивать 5-м жезл с 1-м нормальной мерой, что обязательно входит в программу компарирования проволок или лент.

Основным недостатком всех описанных выше компараторов является различие условий, в которых проволоки находятся во время эталонирования и во время измерения базиса в поле; это различие условий заключается в том, что:

а) даже при употреблении при эталонировании полевых блоков влияние трения в них будет вообще иное, чем при полевых измерениях;

б) ось штриха шкалы проволоки при визировании на него помощью микроскопа и невооруженным глазом или лупой фиксируется наблюдателем в этих двух случаях существенно различно; в) освещение шкал проволок в компараторе иное, чем в поле, и пр.

Все это приводит к тому, что длины проволок, полученные в поле, не совпадают с полученными на компараторе, и расхождение между ними может достигать 10  $\mu$  и более (не считаясь, конечно, с собственно изменениями длин проволок). Поэтому уравнения проволок или лент лучше получать из измерения длины контрольного базиса до и после измерения базиса, так как условия измерения будут очень близкими, и уравнения проволок автоматически включат в себя систематические ошибки данного прибора. Длина контрольного базиса должна определяться достаточно часто с высокой точностью, лучше всего интер-

ференционным методом; пока опыт такого измерения был сделан только на 240-м контрольном базисе в Потсдаме (близ Берлина).

Инварные проволоки, как известно, мало стабильны. Идиодные изменения длин проволок обнаруживаются из совместного употребления нескольких проволок — по результатам измерения общих пролетов или секций разными проволоками. Групповые изменения, достигающие в среднем величины  $\pm 26 \mu$  и более (см. § 39), таким способом обнаружены быть не могут; очевидно, что измерение контрольного базиса до и после измерения основного базиса также здесь в полной мере не поможет. Поэтому желательно иметь возможность эталонировать проволоки тут же в поле, в процессе работы ими, чтобы иметь уверенность в том, что выведенные уравнения проволок отвечают действительным их длинам в поле. В этих целях в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии сейчас разрабатывается проект переносного 24-м полевого компаратора, основанного на интерференционном принципе и позволяющего отмечать и определять изменения в длинах инварных проволок, превышающие  $30 \mu^*$ .

Как было указано в § 29, для определения коэффициентов расширения проволок и лент необходимо определять их длину при разных температурах в пределах температурного интервала, для которого эти коэффициенты определяются. Эти температуры можно получить двумя путями: или охлаждением и нагревом всего помещения компаратора, или помещением испытуемого образца в специальную ванну, наполненную водой, температура которой меняется. Первый путь, которым пользовались у нас до сих пор, не может быть вполне рекомендован, так как с изменением температуры помещения меняется и температура нормальной инварной меры, что в корне противоречит принципам хранения ее и не позволяет знать ее длину с необходимой точностью. Второй путь достаточно затрудителен в осуществлении, так как необходимо определять температурный коэффициент всей проволоки, а не метрового отрезка ее из одного и того же бунта, как это делалось раньше; следовательно, нужно иметь ванны длиной в 24 и более метров. Такими ваннами располагают пока только Национальная физическая лаборатория в Теддингтоне в Англии и Геодезическая съемка Индии в Дерадуне. В Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии с 1936 г. начаты опыты по определению температурных коэффициентов путем электронагрева проволок и определения их температуры термопарами. Эти исследования еще не закончены\*\*.

#### § 41. Интерференционный компаратор для проволок прибора Едерина

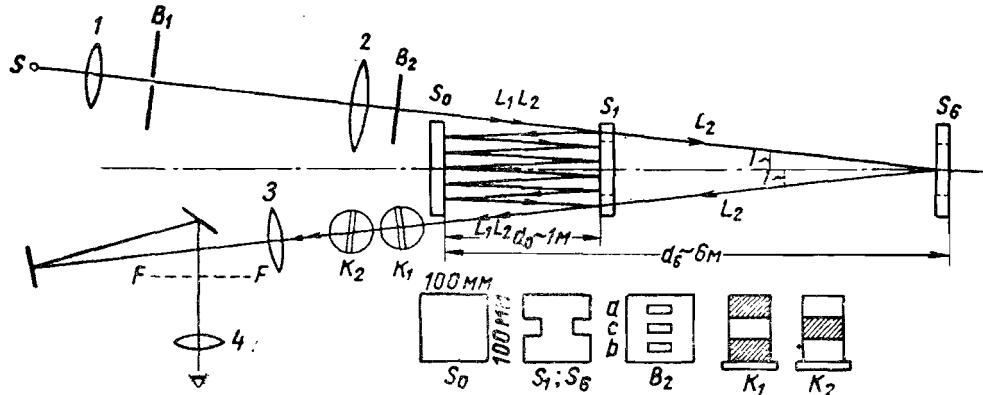
В настоящее время наиболее распространенным интерференционным компаратором для эталонирования 24-м инварных проволок является компаратор по схеме финского физика Вейсле, в котором исходным эталоном служит 1-м концевой жезл из плавленого кварца, описанный в § 30. Однометровое расстояние между зеркалами  $S_0$  и  $S_1$  (черт. 159), промеряемое при помощи кварцевого жезла, передается интерференционным способом на шестиметровое — между зеркалами  $S_0$  и  $S_6$ , а это

\* В настоящее время этот проект осуществлен и модель компаратора находится в процессе испытаний (редактор).

\*\* Исследования в этой области были завершены, и теперь коэффициенты проволок в СССР определяются только методом электронагрева (Редактор).

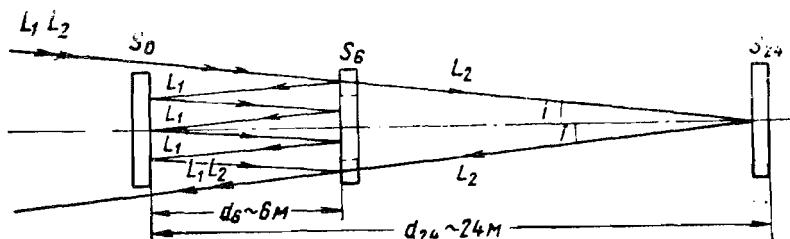
последнее тем же путем передается на двадцатичтырехметровое — между зеркалами  $S_0$  и  $S_{24}$  (черт. 160).

Для уяснения устройства компаратора обратимся к черт. 159. Пучок лучей, исходящий из источника белого света  $S$  (2-вольтовая электрическая лампочка с горизонтальной нитью), помошью короткофокусной линзы  $l$  концентрируется в плоскости бленды  $B_1$ , в центре малого отверстия последней, диаметром около 0,1 м, в светящуюся «точку» около



Черт. 159

6  $\mu$  в диаметре. Располагая ее в заднем фокусе длиннофокусного коллиматора 2 (с фокусным расстоянием около 3 м), получаем белый пучок параллельных лучей, падающих на экран  $B_2$  с тремя расположеными друг над другом прямоугольными отверстиями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , закрываемыми



Черт. 160

особыми задвижками. Средний пучок  $L_2$  параллельных лучей проходит, минуя зеркало  $S_0$ , через левый прямоугольный вырез в зеркале  $S_6$  и, отразившись от его посеребренной поверхности, проходит через правый вырез в зеркале  $S_1$ , мимо зеркала  $S_0$ , падает на объектив 3 длиннофокусной ломаной зрительной трубы, установленной на бесконечность, и в фокальной плоскости  $FF$  последней дает дифракционное изображение (черт. 163) среднего отверстия с экрана  $B_2$ . Верхний или нижний пучок  $L_1$  лучей, отразившись многократно (всего 11 раз) от посеребренных граней зеркал  $S_1$  и  $S_0$ , выходит параллельно пучку  $L_2$  и также падает на объектив зрительной трубы. Если зеркала установлены строго параллельно, с соблюдением соотношения  $S_0S_1 : S_0S_6 = 1 : 6$ ,

а коллиматор и зрительная труба отьюстированы так, что дифракционные изображения среднего и верхнего или среднего и нижнего отверстий экрана  $B_2$  налагаются друг на друга, то при разности ходов  $\Delta$  лучей  $L_1$  и  $L_2$ , меньшей  $1\text{--}2\mu$ , в центральной, наиболее светлой части дифракционной картины (черт. 163) мы увидим несколько горизонтально расположенных интерференционных полос, окрашенных к краям. Добиваясь того, чтобы псокрашенная полоса, соответствующая интерференционному максимуму, располагалась в середине дифракционного изображения источника света (продольным перемещением зеркала  $S_6$ ), мы уменьшим разность ходов лучей  $\Delta$  до нескольких десятых долей микрона, т. е. добьемся полной кратности отношений  $S_0S_1$  и  $S_0S_6$  (очевидно, верхний и нижний пучки света всегда будут интерферировать, так как при параллельности зеркал  $S_0$  и  $S_6$  разность их ходов равна нулю). Для установки зеркал на параллельность, а также для установки коллиматора и зрительной трубы в нужное положение имеются соответственные юстировочные приспособления; кроме того, зеркала  $S_6$  и  $S_{24}$  имеют прецизионное продольное перемещение помошью микрометренных винтов.

Из черт. 159 имеем

$$\Delta_6 = \frac{2d_6}{\cos i} - \frac{(m+1) \cdot d_0}{\cos i} = [2d_6 - (m+1) \cdot d_0] + \Delta_6 \cdot \frac{i^2}{2}, \quad (173)$$

где  $\Delta_6$  — разность ходов лучей  $L_1$  и  $L_2$  при переходе от  $d_0$  к  $d_6$ ;  $m = 11$  — число отражений от зеркала  $S_0$  и  $S_6$ ,  $i$  — угол падения лучей, выраженный в радианах. Так как в данном случае

$$i = \frac{4 \text{ см}}{5 \text{ м}} = \frac{1}{125},$$

а  $\Delta$  никогда не превосходит, как мы увидим ниже,  $0,5 \text{ мм}$ , то

$$\Delta_6 \cdot \frac{i^2}{2} < 0,016 \mu,$$

т. е. является пренебрежимо малой величиной (в действительности  $\Delta$  не превышает нескольких десятков микрон). Поэтому формулу (173) можно переписать так

$$\Delta_6 = 2d_6 - (m+1) \cdot d_0,$$

откуда

$$d_6 = \frac{m+1}{2} \cdot d_0 + \frac{\Delta_6}{2}, \quad (174)$$

или

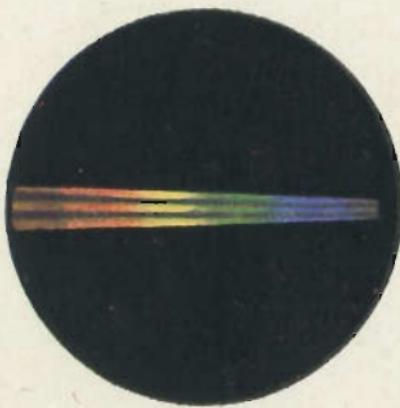
$$d_6 = 6d_0 + \frac{\Delta_6}{2}.$$

Для случая перехода от  $S_0S_6$  к  $S_0S_{24}$  (черт. 160), где  $m = 7$ , формула (174) перепишется так

$$d_{24} = 4d_6 + \frac{\Delta_{24}}{2},$$



Черт. 161.



Черт. 162.



Черт. 163.

или, подставляя значение  $d_6$ , будем иметь окончательно

$$d_{24} = 24 d_0 + 2 \Delta_6 + \frac{\Delta_{24}}{2}. \quad (175)$$

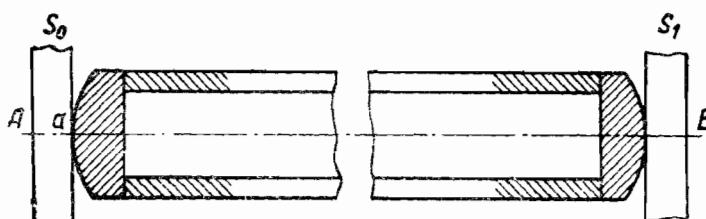
Если бы зеркала  $S_6$  и  $S_{24}$  можно было установить в нужном расстоянии с точностью до  $0,1\text{--}0,2 \mu$ , то каждая из величин  $\Delta_6$  и  $\Delta_{24}$  не превысила бы нескольких десятых долей микрона, а совокупная величина поправочных членов  $2\Delta_6 + \frac{\Delta_{24}}{2}$  в формуле (175) во всяком случае не превысила бы одного микрона, т. е. этими членами можно было бы пренебречь и считать  $d_{24} = 24d_0$ . В действительности, перемещения зеркал на такие малые величины физически неосуществимы, и потому на практике приходится пользоваться формулой (175), определяя величины  $\Delta$  при помощи так называемых компенсаторов.

Первоначальную установку зеркала  $S_6$  (или  $S_{24}$ ) при помощи инвариантной проволоки или ленты с постоянным натяжением удается сделать с точностью не более  $0,5 \text{ мм}$ ; дальнейшая установка с предельной ошибкой не свыше  $1 \mu$  когда можно уже наблюдать интерференционную картину в белом свете, осуществляется следующим образом. Перед окуляром зрительной трубы устанавливают призму спектроскопа и, открыв среднее и одно из крайних отверстий бланда  $B_2$  и смотря через призму, добиваются такого положения зеркала  $S_6$ , при котором в какой-либо части спектра появляются интерференционные полосы. Делают это последовательными приближениями: передвинув зеркало вперед или назад на  $20\text{--}30 \mu$ , поворачивают каждый раз призму на  $360^\circ$  и смотрят, не появится ли в каком-либо ее положении интерференционная картина; так обследуется весь участок, где можно ожидать появления интерференции. Она обнаруживается обычно при вертикальном расположении спектра (красная часть обращена кверху или книзу), как указано на черт. 161, в виде ряда параллельных, горизонтально расположенных темных полос, пересекающих какую-либо часть спектра. Это означает, что при данном положении зеркала разность ходов лучей не превышает  $50 \mu$ . Далее добиваются дополнительным последовательным перемещением зеркала  $S_6$  такого положения, при котором интерференционные полосы будут наблюдаться при все более наклонном положении спектра (при вертикальном положении его интерференционная картина будет уже не видна) до горизонтального включительно, когда интерференционные полосы пересекают все поле спектра (черт. 162). Ясно, что в этом положении зеркала  $S_6$  интерферируют лучи всех цветов спектра, а потому, убрав призму спектроскопа, мы увидим интерференционную картину и при белом свете (черт. 163), что говорит о достижении разности ходов не свыше  $1\text{--}2 \mu$ .

Так как перемещение зеркал  $S_6$  и  $S_{24}$  в пределах, меньших  $10 \mu$  чрезвычайно затруднительно, то вместо уменьшения величины  $\Delta$  до пренебрежимо малой величины предпочитают измерять ее с необходимой точностью помостью компенсаторов. Компенсатор представляет собой две плоско-параллельные пластинки  $K_1$  и  $K_2$  (черт. 159), вырезанные из одного куска стекла и имеющие поэтому совершенно одинаковую толщину  $d$  и коэффициент преломления  $n$ . Пластинка  $K_1$  стоит на пути верхнего или нижнего луча  $L_1$  и свободно пропускает средний луч  $L_2$  через прямоугольный вырез в средней своей части; пластинка  $K_2$ , наоборот, стоит на пути среднего луча  $L_2$  и пропускает свободно крайние лучи  $L_1$ , каждая из пластин может быть повернута вокруг некоторой

вертикальной оси, причем угол поворота  $i$  отсчитывается по соответственно разделенному кругу. Если обе пластиинки стоят нормально к падающим на них лучам, то разность ходов  $\Delta$  этих лучей останется без изменения; если одну из них повернуть на некоторый угол, то путь соответственного луча удалиется. Легко видеть, что, повернув пластиинку, стоящую на пути более короткого луча так, чтобы средняя белая интерференционная полоса оказалась в середине центрального поля дифракционной картины, мы уменьшим разность ходов  $\Delta$  до нескольких десятых долей микрона; очевидно, отсчет угла  $i$  поворота пластиинки позволит вычислить величину  $\Delta$  с той же точностью. Вывод формулы для  $\Delta$  в функции  $i$ ,  $d$  и  $n$  можно найти в работе Väisälä, Anwendung der Lichtinterferenz bei Basismessungen, а также у В. Г. Варлиха, «Интерференционный компаратор для эталонирования проволок» (Геодезист, 1932, № 9--10, стр. 22--24).

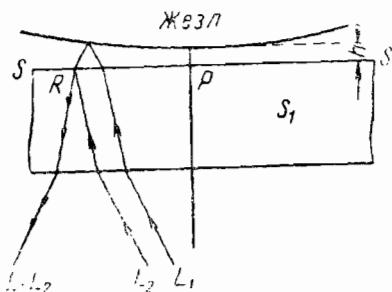
Таким образом, определяются величины  $\Delta_6$  и  $\Delta_{24}$  в формуле (175); расстояние  $d_0$  между зеркалами  $S_0$  и  $S_1$  находится при помощи жезла из плавленого кварца следующим образом. Жезл, подпертый в бесследевых точках, устанавливается горизонтально между зеркалами  $S_0$  и  $S_1$  так, что сферическим концом меньшего радиуса соприкасается на молекулярий контакт с зеркалом  $S_0$  (черт. 164), а между вторым концом



Черт. 164

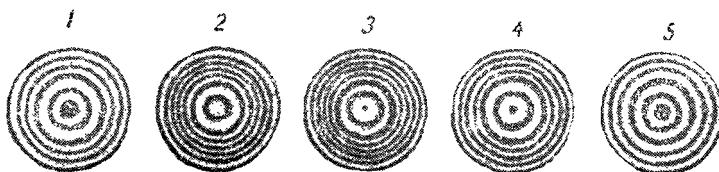
и зеркалом  $S_1$  остается промежуток в  $1\text{--}5 \mu$ , измеряемый интерференционным методом (особым грузиком жезл слегка прижимается к зеркалу  $S_0$ ; в центральных частях зеркала  $S_0$  и  $S_1$  свободны от амальгамы). В том, что достигнут молекулярий контакт, убеждаются, смотря на левый конец жезла через зеркало  $S_0$  со стороны  $A$ ; в месте соприкосновения жезла с зеркалом  $S_0$  должна быть видна черная точка, так как луч  $Aa$ , отражаясь от поверхности жезла, теряет полфазы.

Промежуток  $h$  между зеркалом  $S_1$  и правым концом жезла можно определить следующим образом (черт. 165). Пусть луч  $L_1$ , пройдя через зеркало  $S_1$ , отразится от поверхности жезла (при этом он потеряет полфазы) и, преломившись в точке  $R$  поверхности  $SS$  зеркала, обращенной к жезлу, выйдет в направлении  $L_1L_2$ ; второй луч  $L_2$ , параллельный  $L_1$  и падающий на поверхность  $SS$  в той же точке  $R$ , отразится от этой поверхности и также выйдет в направлении  $L_1L_2$  (луч  $L_2$  не



Черт. 165

потеряет полфазы, так как это имеет место только при отражении луча от поверхности, отделяющей данную среду, в которой происходит отражение, от среды оптически более плотной). Лучи  $L_1$  и  $L_2$  будут интерферировать при небольшой разности их ходов  $\Delta$ ; если  $\Delta$  равно четному числу полуволн, то в точке  $R$  (и по окружности радиуса  $PR$ ) будет иметь место интерференционный минимум, так как разность фаз будет равна  $(2n \pm 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ ; если  $\Delta$  равно нечетному числу полуволн, в точке  $R$  будет интерференционный максимум (разность фаз равна  $n \cdot \lambda$ ). В силу этого, смотря со стороны  $B$  (см. черт. 164), мы увидим ряд концентрически расположенных темных и светлых колец, так называемых колец Ньютона (черт. 166); при правильной юстировке жезла и зеркал



Черт. 166

в центре этих колец должна располагаться упоминавшаяся в § 30 посеребренная точка на правом конце жезла. Очевидно, если расстояние  $h$  между жезлом и зеркалом  $S_1$  кратно целому числу полуволн, то центральный луч  $P$  (черт. 165), падающий нормально к поверхности  $SS$ , будет иметь интерференционный минимум, и кольца Ньютона будут иметь вид 1 и 5 на черт. 166 (в центре — темное пятно); если  $h$  равно целому числу  $\frac{\lambda}{4}$ , то в центре будет интерференционный максимум — светлое пятно (случай 3 на черт. 166); в остальных случаях будут промежуточные состояния.

Обстоятельство это позволяет легко определить порядок интерференции  $P$  и далее величину  $h$  по формуле (120). Действительно, дробную часть  $f$  порядка интерференции (формула 119) можно найти оценкой на глаз дробной части полуволны, руководствуясь взаимным положением, размером и окраской колец (черт. 166). Целая же часть  $N$  могла бы быть найдена таким путем: если приблизить жезл к зеркалу  $S_1$  на одну полуволну  $\frac{\lambda}{2}$ , то интерференционная картина претерпит полный цикл изменений, приведенный на черт. 166, и вернется к первоначальному состоянию; приближая жезл постепенно, до соприкосновения с зеркалом, мы можем сосчитать число таких полных циклов; это и будет число целых полуволн, заключающихся в  $h$ , т. е. число  $N$ . Так как дробная часть  $f$  легко оценивается до четверти полуволны, то предельная ошибка в  $h$  не превысит  $\pm 0,1\mu$ .

В действительности, по вполне понятным причинам, целую часть  $N$  порядка интерференции  $P$  определяют, применяя не только что описанный способ (передвижением жезла), а несколько иным путем, наблюдая кольца Ньютона при наклонном освещении лучом, образующим с зеркалом последовательно углы падения от  $0$  до  $90^\circ$ , что дает тот же самый эффект.

На основании изложенного предельную ошибку передачи расстояния  $d_0$  на  $d_{24}$  (формула 175) можно считать равной:

$$\sqrt{[24 \cdot (\pm 0,1 \mu)]^2 + (\pm 1,0 \mu)^2} = \pm 2,6 \mu$$

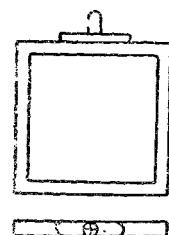
и среднюю квадратическую ошибку равной  $\pm 0,9 \mu$ . Разумеется, величины  $h$ ,  $\Delta_6$  и  $\Delta_{24}$  должны быть исправлены по формуле (126) за различие условий измерения от нормальных; величина  $d_0$  вычисляется по формуле:

$$d_0 = l_t + h - (\delta_0 + \delta_1).$$

где  $l_t$  — длина жезла при температуре наблюдения  $t$ , а  $\delta_0$  и  $\delta_1$  — толщина амальгамы зеркал  $S_0$  и  $S_1$ , определяемая с высокой точностью специальным исследованием, также интерференционным методом.

Коллиматор, зрительная труба, жезл и зеркала устанавливаются на солидных столбах с глубоким фундаментом, изолированных от пола для наблюдателя. Особенно трудоемкой является первоначальная юстировка компаратора. Сначала устанавливают коллиматор, трубу и зеркало  $S_0$  так, чтобы изображение среднего отверстия экрана  $B_2$  покрывало симметрично крест нитей зрительной трубы; далее открывают верхнее отверстие и устанавливают зеркала  $S_0$  и  $S_1$  так, чтобы верхний пучок, отразившись нужное число раз от зеркал  $S_0$  и  $S_1$ , дал изображение верхнего отверстия, также симметрично покрывающее крест нитей. Очевидно, при параллельности зеркал и изображение нижнего отверстия будет занимать то же положение, т. е. дифракционные изображения всех трех отверстий будут совмещены. После этого переходят к описанной ранее установке зеркала  $S_0$  путем продольного перемещения. Чтобы сгладить влияние остаточной непараллельности зеркал, величину  $d_0$  определяют дважды, пользуясь верхним и средним, а также нижним и средним отверстиями, и из обоих результатов берется среднее. (При юстировке зеркал следует перед объективом зрительной трубы установить второй экран с такими же прямоугольными отверстиями, как и в экране  $B_2$ ; необходимо, чтобы все три пучка после отражений от зеркал проходили через соответственные отверстия второго экрана). При переходе к расстоянию  $d_{24}$  зеркало  $S_1$  убирается; коллиматор и зрительная труба устанавливаются заново, под меньшим углом, и юстируется зеркало  $S_{24}$ .

Компариование проволок исполняется следующим образом. На оправах крайних зеркал, сверху, укреплены обычные целики прибора Едерина с награвированными на их головках крестами (черт. 167). Над целиками установлены на особых кронштейнах два микроскопа с микрометрами так, что изображения крестов целиков профокусированы и находятся в середине поля зрения микроскопов. Определив расстояние между крайними зеркалами, наводят нити микрометров на кресты целиков и делают отсчеты по гребenkам и барабанам микрометров; далее, обернув крайние зеркала на  $180^\circ$  (посеребрены обе грани крайних зеркал), еще раз повторяют ту же программу наблюдений, включая и новое определение расстояния между крайними зеркалами. Очевидно, взяв средние из отсчетов по каждому микроскопу и увеличив среднее значение  $d_{24}$  на полусумму толщин обоих крайних зеркал, особо определяемых, мы легко можем получить расстояние между пульпунктами микроскопов, т. е. длину



Черт. 167

базиса компаратора. Далее подвешивают, пользуясь обычными станками Карнантье, компарируемые проволоки так, чтобы шкалы их пришлились непосредственно над головками целиков, по линии марок, и делают обычную серию отсчетов по микроскоп-микрометрам. Один прием компарирования проволок, как всегда, состоит из определения длины базиса компаратора, компарирования проволок и вторичного определения длины базиса компаратора, с соблюдением симметрии во времени в каждой из операций.

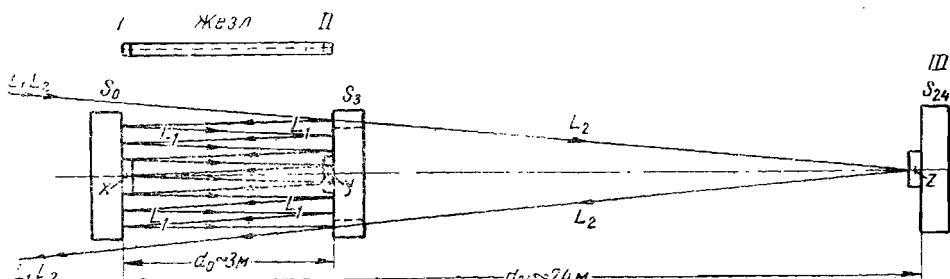
Основным недостатком способа Вейселе является возможность легко сбить (при подвеске и перемещениях проволок) крайние зеркала. Недостаток этот устранен в способе японских ученых Ватанабе и Имаизуми путем остроумного обращения самих крайних зеркал в шкаловые микроскопы, позволяющие шкалы ленты и штрихи целиков контактировать оптическим путем (см. N. Watanabe et M. Imaizumi, Procès verbaux, Comité Int. d. Poids et Mesures. II série. Tome XIII. Paris 1929).

Из предыдущего изложения видно, что на компараторе Вейселе по сравнению с обычным компаратором с большей точностью определяется длина базиса компаратора, но особых преимуществ в конечной точности компарирования отсюда не получается, так как она определяется, главным образом, ошибками отсчетов по шкалам проволок и ошибками пятачения проволок (не считая ошибок исходных эталонов).

В СССР Научно-исследовательским институтом геодезии, аэрофотосъемки и картографии (ЦНИИГАиК) разработан проект устройства 24-м интерференционного компаратора по схеме Г. В. Варлиха (сотрудник ВНИИМ). Эта схема в точности соответствует схеме Вейселе с той особенностью, что исходной единицей в ней служит 3-м инварийный штريховой жезл, от которого путем кратного увеличения в восемь раз осуществляется непосредственный переход к 24-м расстоянию. По проекту Варлиха компаратор имеет три микроскоп-микрометра, установленные на расстояниях 3 и 24 м друг от друга, на особых столбах; под микроскопами расположены параллельно друг другу три зеркала на расстояниях (черт. 168)

$$S_0 S_3 : S_0 S_{24} = 1 : 8.$$

К зеркалам притерты в верхней части на молекулярный контакт пленки Иогансона (черт. 168 и 169) по удалении слоя амальгамы; на

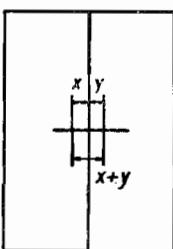


Черт. 168

этих пленках нанесены сверху по два взаимно перпендикулярных штрих (черт. 168). Штрихи, параллельные посеребренным граням зеркал, отстоят от них на небольшие расстояния  $x$ ,  $y$  и  $z$  порядка 100–150  $\mu$

зеркала установлены так, что указанные кресты профокусированы и находятся строго по оси компаратора, на осях соответственных микроскопов. Зеркала  $S_0$  и  $S_3$  и 3-м инварный жезл установлены на общем столбе, на особой платформе, имеющей поперечное и относительно оси базиса прецизионное движение, позволяющее подводить под микроскопы I и II, по желанию, жезл или зеркала с марками. Зеркало  $S_{24}$  установлено на независимом от микроскопа III столбе и имеет прецизионный микрометрический винт для перемещения зеркала вдоль оси компаратора; кроме того, оно может быть смешено в направлении, поперечном к оси компаратора, и вновь прецизионно установлено (по окончании компарирования проволок). Из коллиматора, установленного на бесконечность (на черт. 168 не показан), выходят три параллельных когерентных пучка белого света, из которых средний  $L_2$  (черт. 168) проходит мимо зеркала  $S_0$  через левый вырез в зеркале  $S_3$  и, отразившись от середины зеркала  $S_{24}$  и пройдя через правый вырез зеркала  $S_3$  мимо зеркала  $S_0$ , попадает в зрительную трубу (на чертеже не показана); верхний или нижний пучки  $L_1$  падают на зеркало  $S_3$  и, отразившись 15 раз от зеркал  $S_3$  и  $S_0$ , также попадают в зрительную трубу, в фокальной плоскости которой образуются, таким образом, три налагающие друг на друга дифракционные картины.

Чтобы определить расстояние  $d_0$  между зеркалами  $S_0$  и  $S_3$ , подводят их под микроскопы I и II, визируют на марки на ноганеоповских плитках и делают отсчеты; после этого под микроскопы подводят жезл, делают соответственные визирования на конечные штрихи жезла и отсчеты. Очевидно,  $d_0$  равно полученному таким образом расстоянию между марками плюс сумма отрезков  $x$  и  $y$  и минус сумма толщин амальгамы. С другой стороны, расстояние между марками зеркал  $S_0$  и  $S_{24}$  равно  $d_{24} = (x + z) \pm$  сумма толщин амальгамы. Величины  $(x - y)$  и  $(x - z)$  находятся специальным исследованием, для чего достаточно каждую из пар плиток притереть на молекулярный контакт гранями, обращенными к посеребренным поверхностям зеркал (черт. 170), и промерить соответственные расстояния микроскоп-микрометром.

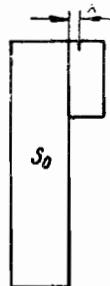


Черт. 170

Компарирование проволок должно выполняться в таком порядке. Сначала визируют на марки зеркал  $S_0$  и  $S_{24}$ , делают отсчеты и тем определяют расстояние между пульпунктами крайних микроскопов I и II; потом подвешивают проволоки с припятым пятнажением и делают группы отсчетов по шкалам проволок (при этом жезл и зеркала убираются с оси компаратора). Для подвески проволок употребляются такие же блочные рамы, как и в 24-м компараторе МИИГАИК (см. § 40).

Один прием компарирования проволок будет состоять в следующем:

- установка зеркал по микроскопам;
- установка зеркал на параллельность;
- получение интерференции сперва в спектре, потом в белом свете;
- отсчеты по микроскопам штрихов плиток всех зеркал;
- передвижение тележки и отсчеты по штрихам нормальной меры (жезла);



Черт. 169

е) повторная регулировка зеркал, получение интерференции и отсчеты по штрихам плиток всех трех зеркал;

ж) передвижение платформы и зеркала  $S_{24}$ , подвеска проволок и отсчеты по шкалам проволок, по микроскопам I и III;

з) повторное выполнение пунктов а--е.

В остальном наблюдения ведутся по тем же правилам, что и на обычных компараторах (§ 40).

Легко видеть, что интерференционный компаратор по схеме Варлиха дает меньшую точность, чем компаратор по схеме Вейсле, и даже меньшую точность, чем обычный компаратор для проволок Едерина, описанный в § 40, так как в последнем длина базиса компаратора получается суммированием восьми трехметровых отрезков, а у Варлиха — умножением на восемь трехметрового расстояния, определяемого с той же точностью. Однако, нужно полагать, компаратор Варлиха должен дать большую скорость в работе.

Скорость работы на интерференционных компараторах сильно зависит от числа промежуточных зеркал, а это последнее — от двух факторов:

а) благодаря существенно разному числу отражений, интерферирующие лучи имеют резко различающуюся яркость (например, уже при одиннадцатикратном отражении яркости относятся, как 1:24), что сильно затрудняет наблюдение интерференционной картины;

б) посеребренные поверхности зеркал быстро окисляются, тускнеют.

Чтобы уравнять яркость лучей, интенсивность серебрения поверхностей зеркал делают разной, более яркий пучок диафрагмируют. Однако, при всем том в существующих компараторах не применяют увеличения, большего восьми. В самое последнее время молодой советский ученик У. О. Шварц предложил новый, так называемый дифференциальный метод, позволяющий получать значительно большие увеличения, например, в 20 раз, сохранив обычный контраст яркостей интерферирующих лучей. Ввиду незаконченности исследований Шварца, мы не помещаем описания его метода.

## § 42. Измерение базиса прибором Едерина. Практика СССР и других стран

Измерение базиса прибором Едерина заключается:

- в подготовке полотна базиса к измерению,
- в установке штативов с целиками в створе базиса в расстоянии 24 м друг от друга;
- в весьма точном измерении проволоками промежутков между целиками — так называемых пролетов;

г) в определении температуры проволок во время измерения;  
д) в определении разностей высот целиков каждого двух смежных штативов.

Сначала провешивают линию базиса, давая на неё точки через 1–2 км, достаточно хорошо закрепленные. Такими точками пользуются затем, чтобы дать на участке дневной работы точки на линии базиса примерно через 300 м — для последовательных установок над ними теодолита, с помощью которого ставятся штативы. При вешении базиса одновременно делается очистка от леса, кустарника, посевов и пр. полосы шириной до 5 м. Для облегчения перехода через речки, овраги, болотца делаются специальные приспособления, мостики и пр. В международной практике принято измерение базисов по секциям длиной около 1 км, причем длина каждой секции делается кратной 24 м; концы каж-

дой секции отмечаются солидными бетонными центрами, заложенными несколько ниже уровня почвы. На этих центрах и заканчиваются работы при перерывах на ночь и пр. Очевидно, установка таких километровых центров требует довольно тщательного предварительного измерения базиса.

При расстановке штативов с целиками каждый штатив ставят сперва приближенно, причем установку его по расстоянию делают, пользуясь проволочным канатиком или лентой, с постоянным натяжением помошью динамометра. По укреплению ножек штатива (они должны быть достаточно широко расставлены, достаточно углублены в землю и закреплены зажимными винтами) приступают к окончательной установке его целика: введение целика в створ базиса выполняют посредством теодолита, удаленного не более чем на 300 м; окончательную же установку по расстоянию делают, допуская уклонение от 24 м меньше 4 сантиметров, что проверяется проволочным канатиком. Надлежит следить за тем, чтобы после окончательной установки целик штатива был вертикален, в чем убеждаются на глаз или с помощью круглого уровня, надсваемого на целик. Штативы устанавливают всегда так, чтобы третья ножка их располагалась поочередно то по одну, то по другую сторону базиса.

Расстановкой штативов занимаются два особых наблюдателя. Вслед за установкой первых десяти штативов третий наблюдатель приступает к нивелировке их, пользуясь нивелиром повышенной точности (цена деления уровня 5—10", увеличение трубы около 35—45×). Места для нивелира при этом выбираются так, чтобы с одной станции можно было взять на ровном месте взгляды на 4—5 штативов. Небольшая рейка (1,8 м длины), служащая при этой нивелировке, имеет на одной стороне 1-см, а на другой 1,1-см деления; она снабжена уровнем и устанавливается рабочим на целиках штативов, закрываемых при этом съемными шляпками; при каждой установке рейки отсчеты делаются для контроля, по обеим ее сторонам. В нашей практике выставляется обычно сразу 40—45 штативов, образующих секцию, промеряемую ходом вперед и ходом назад. В ходе вперед нивелировка предшествует, таким образом, измерению линии проволоками, в ходе назад — исполняется непосредственно вслед за измерением проволоками. Конечные точки секции отмечаются у нас временными центрами в виде деревянного кола, забиваемого в землю ниже уровня почвы с вбитым в его торец металлическим гвоздем с плоской шляпкой, на которой нарезается крест.

Дифференцируя формулу (148) по  $h$ , имеем

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{h}{l^2} \cdot \Delta h, \quad (176)$$

т. е. относительная ошибка в длине пролета, вызванная ошибкой  $\Delta h$  определения разности высот  $h$  смежных целиков, прямо пропорциональна  $h$  и обратно пропорциональна квадрату длины  $l$  пролета. Поэтому чем больше падение проволоки, и чем короче пролет (случаи так называемых «остатков»), тем точнее нужно выполнять нивелировку целиков. В силу этого пролеты с большим падением и «остатки» нивелируются с особой постановки инструмента, из середины.

Полагая, что средняя ошибка нивелировки пролета равна  $\pm 1 \text{ мм}$ , по подстановке в (176)  $h = 0,5 \text{ м}$ ,  $l = 24 \text{ м}$ ,  $\Delta h = \pm 1 \text{ мм}$ , получим:

$$\frac{\Delta l}{l} = \pm \frac{1}{1152000}.$$

Считая, что ошибки нивелировки содержат только случайную часть, мы придем к заключению, что при указанном  $\Delta h$  и при среднем падении местности в  $\pm 0,5 \text{ м}$  на  $24 \text{ м}$ , средняя ошибка в длине базиса, обусловленная ошибками нивелировки, будет составлять для базисов длиной в  $5$  и более  $\text{км}$  не менее одной десятимиллионной от длины базиса. Но правильнее считать  $\Delta h$  около  $\pm 2 \text{ мм}$ ; кроме того, нередко на наших базисах  $h$  более  $0,5 \text{ м}$ , поэтому правильнее оценивать среднюю ошибку (из-за случайных ошибок нивелировок) в базисе длиной  $5 \text{ км}$  около  $1 : 5\,000\,000$  и в базисе длиной в  $10 \text{ км}$  — около  $1 : 7\,000\,000$ . Но необходимо требовать отличной выверки нивелира в отношении строгой параллельности визирной оси трубы и оси уровня, так как равенство нивелира от реек не соблюдается; кроме того, приходится считаться с систематическими искажениями, вносимыми в величины  $h$  действием рефракции; время нивелировки целиков вовсе, ведь, не приурочивается к периодам малого действия рефракции. Действие систематических ошибок в нивелировке целиков, обусловленное инструментальными погрешностями и действием рефракции, может оказаться заметно большим действия случайных ошибок в той же нивелировке и может составить и  $1 : 1\,000\,000$  долю длины базиса. На это приходится обратить особое внимание, так как поправки за нивелировку никак не контролируются и ни с чем не соопоставляются. Нивелировку целиков должен вести опытный нивелировщик отлично выверенным инструментом; при быстром изменении температуры воздуха следует переходить на уменьшение числа шагатиков, захватываемых нивелировкой сразу с одной станции, достигая тем самым и уменьшения используемых расстояний от нивелира до рейки.

За нивелировкой начинается собственно измерение, в котором участвуют три наблюдателя (не участвующие ни в расстановке штативов, ни в нивелировке): два делают отсчеты по шкалам проволоки, третий ведет журнал измерения и отсчитывает температуру воздуха по термометру-пращу. Проволока подвешивается на станках Карантье так, чтобы шкалы ее едва касались сферических головок целиков, а ребра шкал проходили вдоль штихтов целиков, расположенных в створе базиса; далее наблюдатели делают три пары одновременных отсчетов по шкалам, перемещая проволоку между отсчетами так, чтобы получить независимые отсчеты (рекомендуется пользоваться средними частями шкал). Отсчеты считаются удовлетворительными, если разности их расходятся между собой не более чем на  $0,2 \text{ мм}$  для  $24\text{-м}$  проволок, и на  $0,3 \text{ мм}$  — для  $48\text{-м}$  проволок. Если проволоки располагать всегда так, чтобы подписи их шкал возрастали в направлении хода измерения базиса, то расстояние между целиками выражается формулой

$$l_t + (b - a), \quad (177)$$

где  $l_t$  — длина проволоки при температуре  $t$ ,  $a$  — отсчет по задней шкале проволоки,  $b$  — отсчет по передней шкале. Сделав отсчеты по одной проволоке, передают ее рабочим, подвешивают вторую проволоку, делают отсчеты по ней и т. д. Закончив наблюдения на данном пролете, переходят к следующему пролету, причем передний наблюдатель остается на месте, а задний переходит вперед и становится передним на следующем пролете. Чередуются местами также и блочные станки: передний ставок остается на месте и только переставляется на противоположную сторону у переднего штатива, а задний станок переносится вперед и на следующем пролете становится передним. Благодаря такому

чредованию наблюдателей компенсируются, хотя вряд ли в полной степени, их личные ошибки в отсчетах по шкалам. Чтобы компенсировать влияние трения блоков на пямяжение, проволока перемещается между отсчетами всегда в одном направлении (например, по ходу измерения) только передним наблюдателем, играющим в измерении ведущую роль. Очевидно, что при таком порядке измерения и при указанном выше чередовании штативов ошибка за трение блоков будет компенсироваться в той или другой степени в сумме каждой двух смежных пролетов. Легко видеть, что если в обратном ходе блочные станки поменять местами, а проволоку повернуть противоположными концами и соблюдать вышеуказанные правила перемещения проволоки между отсчетами, то в полу сумме из обоих ходов ошибка за трение блоков получит еще большую компенсацию. Поворачивание проволоки противоположными концами в обратном ходе имеет за собой то основание, что наблюдатели в этом случае идут в обратном ходе по другой сторону базиса, и шкалы проволок находятся в других условиях освещения. Очевидно также, что если на сильно наклонных участках проволоку, чтобы она не скатывалась, будет придерживать всегда передний наблюдатель, то в среднем из обоих ходов будет в значительной степени компенсироваться и ошибка за отличие пямяжения проволоки на наклонных участках от нормального.

Температура проволоки при базисных измерениях принимается равной температуре воздуха; последняя измеряется термометром-пращем через несколько пролетов и тем чаще, чем быстрее ход температуры. Некоторое расхождение в показаниях термометра с действительной температурой проволок компенсируется до известной степени тем, что в первой половине длины температура воздуха возрастает, а во второй — убывает, и влияние указанной ошибки будет входить с противоположным знаком в длины участков, измеряемых до и после полуудия. Для привязок к конечным и промежуточным центрам у нас пользуются преимущественно оптическими лотапшарарами, хотя следовало бы применять центриры с жестким отвесом, изображенным на черт. 152. Отсчеты по шкалам проволоки производят, оценивая на глаз десятую долю миллиметрового деления шкалы; среднюю случайную ошибку отсчета можно принять  $\pm 0,1 \text{ мм}$ .

В базисах длиной 8–12 км, при двукратном измерении — вперед и назад — и при упогреблении нескольких проволок, случайные ошибки в отсчетах обусловляют в длине базиса ошибку, меньшую пятимиллионной доли его длины. Особо стоит вопрос об ошибках делений шкал проволок: средняя ошибка положения штриха составляет  $\pm 30 \mu$ ; для отдельных штрихов эта ошибка доходит до  $\pm 70 \mu$ . Вообще говоря, влияние этих ошибок на длину базиса невелико, однако, шкалы проволок необходимо исследовать в этом отношении и, в случаях особо значительных ошибок делений шкал, исправлять отсчеты соответственными поправками. Конечно, полная компенсация личных ошибок при отсчитывании шкал может давать систематические искажения в длине базиса, размер которых установить трудно; есть основания полагать, что на базисах длиной более 5 км это влияние не превышает 1 : 2 000 000.

Вопрос о размерах некомпенсированного влияния трения блоков на пямяжение и перемены в трении блоков, вызываемых загрязнением блоков, остается открытым, однако, при правильном уходе за блоками (регулярная чистка и смазка их) погрешность эта едва ли превысит  $\pm 0,3 \cdot 10^{-6}$ . Необходимо при измерении базиса следить также за тем,

чтобы блоки не были перекошены, а пристяжные шпильки не терлись о щеки жёлоба.

В нашей практике первоклассных базисных измерений в комплект базисного прибора входят нессть рабочих проволок и одна-две запасных. Базис разбивается на три части, и каждая часть измеряется двумя проволоками вперед и другими двумя назад, чередуя проволоки в порядке:

| Части базиса | I            | II  | III  |
|--------------|--------------|-----|------|
| Проволоки    | { вперед 1,2 | 5,6 | 3,4  |
|              | { назад 3,4  | 1,2 | 5,6. |

Измерение каждой трети базиса исполняется по секциям, около 1 км длиной (40—45 пролетов), закрепляемым описанными выше временными центрами, — ходом вперед и по тем же штативам, сейчас же, не представляя их, — ходом назад.

Указанный выше порядок чередования проволок выгоден в том отношении, что, ускоряя процесс измерения базиса, уменьшает влияние индивидуальных изменений в длинах проволок в большей мере, чем когда весь базис измерялся бы всеми шестью проволоками вперед и назад. Действительно, в § 39 было указано, что индивидуальные изменения в длине проволок за рабочий период достигают в среднем  $\pm 21 \mu$ ; так как за окончательную длину проволоки берутся среднее из обоих эталонирований — до и после измерения базиса, — то влияние этого фактора на принятую длину проволоки будет вдвое меньше, т. е.  $\pm 10,5 \mu$ , или  $\pm 0,44 \cdot 10^{-6}$ . Легко видеть, что в первом случае среднее влияние индивидуальных изменений в длинах проволок на длину всего базиса составит

$$\frac{\pm 0,44 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{3}} = \pm 0,13 \cdot 10^{-6},$$

а во втором случае

$$\frac{\pm 0,44 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{6}} = \pm 0,18 \cdot 10^{-6}.$$

Можно полагать, что при указанной схеме пользования проволоками и групповые изменения их длии (§ 39) будут сказываться в меньшей мере, чем при применении всех проволок: в нашей схеме каждая проволока измеряет только две трети базиса и притом с перерывами в ее использовании.

Слабым местом прибора Едерина являются:

1) эталонирование проволок в моменты, отдаленные на более или менее значительные промежутки времени от измерения базиса, и выполняемое вообще в иных условиях, чем те, которые имеют место при самом измерении базиса;

2) изменяемость длии проволок, в том числе и та, которая обусловливается температурными последствиями. Тем не менее, результаты, даваемые прибором Едерина, имеют высокую точность.

При измерении базиса по слабому грунту под ножки штативов с целиками забиваются небольшие свайки; при измерении по болоту вместо штативов употребляются колья, забиваемые в дно болота на достаточноную глубину и спиливаемые на высоте 0,6—0,7 м от поверх-

ности болота; в торец кольев ввинчиваются базисные целики обычной формы.

Особое внимание должно быть обращено на измерение так называемых «остатков», под которыми понимаются неполные пролеты в конце базиса или его секций. Остатки измеряются 8-м инварными проволоками и 4-м инварной ленточкой, описанной выше в § 38, и особым тщательно пивелируются.

Длина  $D$  некоторой секции базиса вычисляется по формуле

$$\left. \begin{aligned} D = & n \cdot l_0 + n \cdot l_0 \cdot \alpha_m (t_m - t_0) + \sum (b - a) - \frac{\sum h^2}{2 l_0} + \\ & + \frac{l_0 \cdot p^2}{24 P^2} \sum h^2 - 0,00325 \cdot 10^{-6} (t_m^2 - t_1^2) \cdot n \cdot l_0 - \\ & - \frac{p^2 \cdot l_0^2}{8 P^2} \sum (b - a) \end{aligned} \right\} \quad (178')$$

Длина  $L$  всего базиса вычисляется по формуле

$$L = \sum D + r - \frac{H_m \cdot \Sigma D}{R} + 7,02 \cdot \frac{\Delta g}{g_1} \sum n. \quad (178)$$

В этих формулах:

$n$  — число пролетов в секции;

$l_0$  — длина хорды проволоки, выведенная из эталонирования при температуре  $t_0$ ;

$\alpha_m$  — средний коэффициент расширения проволоки;

$t_m$  — средняя температура проволоки при измерении секции;

$b$  — отсчеты по передней шкале проволоки;

$a$  — отсчеты по задней шкале проволоки;

$h$  — разность высот целиков в пролете;

$p$  — вес 1 м проволоки;

$P$  — натяжение проволоки ( $P = 10$  кг);

$r$  — «остаток» базиса, исправленный соответственными поправками;

$L$  — длина базиса, приведенная к уровню моря;

$H_m$  — средняя высота пролетов над уровнем моря;

$R$  — радиус кривизны нормального сечения рефренц-эллипсоида в створе базиса, вычисляемый по формуле (131);

$t_1$  — средняя температура проволоки за неделю, предшествующую дню измерения данной секции базиса;

$g_1$  — ускорение силы тяжести в месте эталонирования проволоки; вычисляется по формуле (152);

$\Delta g$  — разность ускорений силы тяжести в месте измерения базиса и в месте эталонирования проволоки; вычисляется по формуле (153);

$\Sigma n$  — число всех пролетов в базисе.

В формулах (178') и (178): второй член — поправка за температуру, третий — за отсчеты по шкалам проволоки, четвертый — за наклон проволоки, пятый — за несимметрию цепной линии, шестой — за температурное последствие, седьмой — за наклон шкал, восьмой — за остаток, девятый — за приведение к уровню моря и десятый — за изменение силы тяжести. Следует иметь в виду, что в нашей практике поправки шестая, седьмая и десятая, без должных к тому оснований, не вводятся.

По отношению к поправке за температурное последействие надлежит отметить, во-первых, что в формуле (178') знак перед этой поправкой относится к положительному коэффициенту расширения проволоки; при отрицательном коэффициенте расширения знак этой поправки нужно изменить на обратный; во-вторых, что при температурах, меньших нуля, правильность этой поправки не исследована.

Выше описана практика измерения первоклассных базисов в СССР. Рассмотрим особенности измерения базисов в других странах.

В Франции базисы измеряются, как правило, по кольям; только при скалистом грунте, не позволяющем забивать колья, применяются переносные штативы. Колья диаметром 10 см и длиной 1,50 м забиваются на глубину 60 см и укрепляются тремя подпорами; в торец спиленного кола ввинчивается базисный целик. Для натяжения проволок употребляются станки Витрама. Первоклассные базисы измеряются восьмью 24-м проволоками из двух разных штавок, с разными коэффициентами расширения. Базисы измеряются четырьмя проволоками в одном направлении и четырьмя другими — в обратном. Измерение ведется таким образом: проволокой № 1 проходят в прямом направлении весь базис или его секцию; затем проволокой № 2 проходят весь базис или ту же его секцию в обратном направлении; затем проволокой № 3 проходят весь базис или ту же его секцию в прямом направлении, и т. д. Очевидно, измерение каждой проволокой дает совершенно независимые результаты от измерений другими проволоками. При измерении секции в прямом ходе наблюдатель А идет все время со своим станком впереди, а наблюдатель В со своим станком все время находится при заднем конце проволоки. При переходе к измерению секции в обратном направлении наблюдатели и станки меняются местами, и наблюдатель А все время отсчитывает тогда заднюю, а наблюдатель В — переднюю шкалу, а станок, бывший все время передним в прямом ходе, теперь все время идет сзади.

Если базисы измеряются по секциям, то наблюдатели и станки меняются местами по прохождении  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$  длины всего базиса и, кроме того, проволока оборачивается противоположными концами по прохождении ею в прямом или обратном ходе половины базиса. На каждом пролете делаются три пары одновременных отсчетов по шкалам проволоки; температура воздуха измеряется термометром-пращем довольно редко, — иногда в начале и в конце измерения секции; нивелировка целиков делается одинократно при измерении базиса каждой проволокой в обоих направлениях. До и после измерения одного или нескольких базисов измеряются конгрольные базисы 240-м в Потсдаме и 720-м в Гельсингфорсе. При переходе значительных препятствий применяются 96-м проволоки.

Применение кольев значительно ускоряет работу собственно измерения базиса (до 1,3 км в 1 час), но ввиду большого температурного хода кольев по сравнению с штативами заставляет вести измерение возможно скорее — каждый раз только одной проволокой; последнее обстоятельство выгодно в том отношении, что делает результаты измерения каждой проволокой в полне независимыми друг от друга. Применение станков Витрама уменьшает ошибки натяжения проволок: по мнению проф. Бондорфа ошибка натяжения в этом случае не свыше 10 г.

В Германии измерения ведут также по кольям, но толщиной в 8—12 см и длиной в 2,30 м, забиваемым на глубину 1,60—1,70 м.

в предварительно сделанное ручным буром несколько меньшего диаметра отверстие; в торец кола ввинчивается целик. В программу измерения первоклассного базиса входят: эталонирование проволок, измерение контрольных базисов в Потсдаме (старого 240-м и нового 960-м), измерение базиса и вновь — измерение контрольных базисов и эталонирование проволок. Базисы измеряются шестью проволоками по секциям длиной 1—2 км, каждой проволокой вперед и назад: одна пара наблюдателей делает ежедневно не более 1,5 км двойного хода, чтобы утомление наблюдателей не снижало точности работы. На каждом пролете по шкалам проволоки делаются пять пар отсчетов; натяжение осуществляется станками Карпантье; наблюдатели и станки меняются между собой в том же порядке, что и у нас, но только через два пролета. Измерение каждой проволокой делается независимо от других; как и на Балтийских базисах, наблюдатели сами переносят проволоку от пролета к пролету. Нивелировка целиков исполняется один раз, перед измерением пролетов проволокой, по особой программе, предусматривающей увеличение числа приемов, в зависимости от величины падения пролета, от 2 до 6 приемов. Отклонение каждого целика от створа базиса тщательно определяется специальными угловыми измерениями, и в пролеты вводятся соответствующие поправки (правда, они только в редких случаях ощущимы и вообще не превышают 6 м на пролет).

В Франции базис разбивается на секции около 1200 м длиной; измерение пролетов ведется по штативам одновременно двумя проволоками в таком порядке: проволоки № 1 и 2 — в прямом измерении секции и проволоки № 2 и 3 — в обратном измерении секции. Наблюдатели меняются местами через каждые 10 пролетов.

В Англии и Индии предпочитают в настоящее время измерять базисы лентами длиной от 100 до 300 футов (от 30 до 92 м), так как ленты более однородны, менее легко изгибаются и позволяют при такой длине легче преодолевать препятствия; при длине ленты от 200 до 300 футов она подпирается в средней точке подвижным роликом на штанге, устанавливаемым на одной прямой с концами ленты.

В США базисы измеряются 50-м инварными лентами по кольям квадратного сечения ( $10 \times 10$  см), забиваемым в землю до высоты 0,5 м; колья, обозначающие километровые секции, укрепляются тремя подпорами. Ленты натягиваются с силой 15 кг. с одного конца, помощью динамометра (см. § 38). Измерение исполняется методом откладывания ленты, для чего на верхний срез кола набивается медная полоска одинаковой толщины с лентой, к краю которой прикладывается лента своими концами: передний конец ленты фиксируется паруской наперечник штриха на медной полоске, а задний конец в это время совмещается с прочерченным ранее штрихом на пластинке заднего кола. В средней точке лента подпирается при помощи петли, подвешенной к колью, на высоте прямой, соединяющей концы ленты. При встрече допустимой силы (менее 7 л в секунду) лента подпирается таким же образом в трех симметрично расположенных промежуточных точках (для всех указанных положений длина ленты определяется при эталонировании). Для ослабления трения ленты о головки кольев, концы ленты в момент натяжения устанавливаются на 1 мм выше поверхности кольев, а в момент фиксирования концов они прижимаются слегка к кольям. Для ослабления влияния личных ошибок наблюдателей, в обратном ходе измерения базиса наблюдатели меняются местами, но

идут по ту же сторону базиса, что и в прямом ходе измерения. Остатки измеряют, пользуясь 5-м делениями ленты и стальной 5-м лентой с делениями. Температура ленты отсчитывается (на каждом пролете) по двум термометрам, прикрепленным к ленте в расстояниях 1 м от ее концов при помощи металлической пластиинки с углублением для термометра и изоляционной ленты. В комплект базисного прибора для измерения базисов I класса входят 4 ленты, из которых одна — нормальная и три рабочих.

Соопоставление практики применения прибора Едерина-Гилььома в разных странах показывает, что существенные особенности имеются только в США, где применяются в два раза более длинные меры и вместо обычного метода отсчетов применяется метод откладывания ленты. В этом методе несколько увеличиваются случайные ошибки измерения сравнительно с методами, принятыми в других странах, но понятно, что на результат измерения достаточно длинного базиса это влияет несущественно, однако, лишь постольку, поскольку при этом не вызывается возрастания систематических ошибок. Методы, применяемые в отдельных странах, можно разбить на две группы: советско-французскую и финско-немецкую. Различие заключается, главным образом, в способах ослабления систематических влияний на результаты измерения. В первом случае каждый пролет измеряется двумя проволоками, что позволяет сравнивать их длины на каждом пролете и иметь, таким образом, суждение об относительной и изменчивости их длии, но зато результаты измерения обеими проволоками не являются независимыми друг от друга: сдвиг переднего целика в период перехода от данного пролета к следующему, действие ветра, трения в блоках и пр. влияют на результаты измерений обеими проволоками одинаково. Во втором случае результат измерения каждой проволокой совершенно независим от другого, т. е. имеет максимальную полноценность; об изменяемости длии проволок судят косвенно из соопоставления длины секций, полученных разными проволоками. Легко сообразить, что независимость измерений каждой проволокой требует замены штативов кольями, обеспечивающими измерение без перерыва в одном направлении 5—6 км; с другой стороны, только при быстром движении, когда пролеты измеряют только одной проволокой, и возможна замена штативов кольями. Расстановка кольев требует значительного времени, и хотя при использовании кольями собственно измерение идет значительно быстрее, чем по штативам, но в общем затраты времени на измерение базиса в том и в другом случае будут одинаковые. Но приходится еще отметить, что измерение по кольям избавляет от транспорта очень громоздкого имущества в виде 40—50 штативов, и, кроме того, при применении кольев работа идет вообще спокойнее, чем в особенности относится к перевозке целиков, которая при применении кольев может быть выполнена более тщательно, чем при применении штативов.

До 1923 г. у нас преимущественно измеряли базисы по кольям, но не низким, а высоким (1—1,1 м над землей) и не подпertenым тремя боковыми укосами, причем измерение пролета вели сразу 4—5 проволоками. Конечно, это была не совсем правильная постановка работы. С 1923 г. по настоящее время в СССР измеряют базисы по штативам, идя на перевозку их на большие расстояния; устойчивость штативов заметно большая, чем кольев (измерения по ним дают всегда полное удовлетворение наблюдателям по изящности получаемых результатов).

Характерной особенностью финско-германской практики является измерение до и после измерения основного базиса — контрольного базиса; таким образом, длины всех базисов относятся к одной и той же длине. Если длина контрольного базиса хорошо известна, то тем самым исключаются систематические ошибки, свойственные данному методу и базисному прибору. Затруднение лежит в точном и достаточно частом определении длины контрольного базиса, так как существующие железовые базисные приборы, даже лучшие, видимо, уступают в точности прибору Едерина, а интерференционный метод не получил еще достаточного развития в практике полевых измерений. Вместе с тем вопрос о постоянстве длины контрольного базиса пока мало изучен.

Идею контрольного базиса нужно считать правильной, так как все базисные приборы, в том числе и прибор Едерина, имеют ряд систематических ошибок, иногда нам неизвестных, которые не поддаются учету камеральным путем и могут быть определены только на контрольном базисе. Так, в приборе Едерина еще в 1903 г. А. С. Васильевым было отмечено наличие так называемой ошибки за одностороннее оседание штативов с целиками. Действительно, под тяжестью блочных станков и рабочих при них почва прогибается, целики несколько расходятся и расстояние между ними увеличивается: возникает систематическая ошибка преувеличения, порядок которой трудно определить и зависит, в частности, от твердости грунта. Очевидно, при употреблении контрольного базиса ошибка эта будет в известной части устраниена.

В нашу практику базисных измерений нужно внести следующие изменения и дополнения.

1) Измерять базис по секциям, концы которых должны быть закрепляемы на местности надежными бетонными центрами. Длины секций (около 1 км), как и длина всего базиса, должны быть кратны 24 м, чем избегаются остатки.

2) Следует перейти к станкам Витрама и к штанговым центрирам вместо оптических.

3) Следует достаточно часто определять оба термических коэффициента каждой проволоки.

4) Следует иметь на территории СССР несколько контрольных базисов длиной не менее 960 м, длины которых определять интерференционным методом через установленные опытом промежутки. В программу измерения каждого базиса включается и измерение ближайшего контрольного базиса.

5) Вычисление длины базиса следует вести более тщательно, вводя, в частности, поправки за температурное последействие, за наклон шкал и широту базиса.

В последнее время за границей и у нас стали пользоваться так называемыми ломаными базисами — в целях обхода препятствий и расположения линий, по которым ведется измерение, по более удобной местности. В этих случаях непосредственное измерение ведется по ломаной линии, соединяющей конечные точки базиса. Вопрос о допустимых углах излома этой ломаной линии и о числе изломов рассмотрен в § 22, где даны и расчетные формулы.

### § 43. Оценка точности измерения базисов прибором Едерина

В § 36 мы уже видели, что оценка точности измерения базиса тем или другим прибором — один из труднейших вопросов, пока не разрешенных окончательно. Трудность заключается в том, что оценка по уклонениям отдельных результатов измерения базиса от среднего вывода или оценка по так называемой внутренней сходимости характеризует, главным образом, случайную ошибку измерения, а между тем в точных линейных измерениях наиболее опасными являются систематические ошибки, которые превосходят, как правило, результативную случайную ошибку базиса в несколько раз и чрезвычайно трудно поддаются учету тем более, что некоторые из систематических ошибок остаются иногда совсем неизвестными нам. Все это в полной мере относится и к прибору Едерина. Как было указано выше, результативная случайная ошибка измерения базиса прибором Едерина очень невелика, и потому оценка по внутренней сходимости дает всегда несколько десятимиллионных долей длины базиса; действительная точность значительно ниже, так как систематические ошибки прибора Едерина легко опускаются ниже одной миллионной.

В настоящее время Международный геодезический союз рекомендует оценивать результаты измерения базиса прибором Едерина следующим образом.

Случайная средняя ошибка  $E$  базиса вычисляется по формуле

$$E = \sqrt{\frac{\sum v_1^2}{p_1(p_1-1)} + \frac{\sum v_2^2}{p_2(p_2-1)} + \dots + \frac{\sum v_n^2}{p_n(p_n-1)}}, \quad (179)$$

где  $n$  — число секций базиса;  $p_i$  — число разных проволок, которыми измерялась независимо каждая из секций;  $v$  — уклонения результатов измерений каждой проволокой от среднего значения для секции по всем проволокам.

Случайная средняя километровая ошибка  $E_k$  базиса вычисляется по формуле

$$E_k = \frac{E}{\sqrt{k}}, \quad (180)$$

где  $k$  — число километров в базисе.

Общая ошибка базиса  $E_t$  вычисляется по формуле

$$E_t = \sqrt{E^2 + \sum e^2}, \quad (181)$$

где  $e_1, e_2, e_3, \dots$  — отдельные систематические ошибки измерения, вытекающие из погрешностей компарирования проволок или лент, неточного значения коэффициентов их расширения, из ошибок поправок за температуру, за температурное последействие, за трение блоков и пр.;  $E$  — случайная средняя квадратическая ошибка базиса. Следует иметь в виду, что член  $\sum e^2$  очень быстро достигает величины члена  $E^2$  и в большинстве случаев значительно превосходит его.

Англо-американская практика позволяет оценивать вероятную ошибку измерения базиса прибором Едерина с лентами в 1 : 1 000 000,

что соответствует средней ошибке в 1 : 700 000. Европейская практика дает основания полагать, что при правильном обращении с инварными проволоками и при соблюдении всех необходимых предосторожностей при измерении базиса средняя ошибка его будет близка к 1 : 1 000 000. Окончательное суждение по этому вопросу мы будем иметь тогда, когда сможем сравнить результаты измерения достаточного числа базисов прибором Едерина с результатами существенно более точного определения их длины, например, интерференционным методом.

#### § 44. Заключительные соображения по базисным измерениям

Из предыдущего совершенно очевидны преимущества прибора Едерина перед жезловыми базисными приборами. Укажем еще, что скорость измерения прибором Струве, наиболее приспособленным для полевых условий и наиболее простым в работе, не превышает 800 м в день в одном направлении; скорость измерения прибором Прусского геодезического института (прибор Бруннера) не превосходит 240—300 м за 1 день в одном направлении, между тем прибор Едерина позволяет отрабатывать за день до 2 км в прямом и обратном направлениях. С другой стороны, при тщательном эталонировании проволок и надлежащем обращении с ними точность результатов, даваемых прибором Едерина, не ниже, а скорее выше точности, даваемой жезловыми приборами.

Изложение выше должно убедить, что измерение первоклассного базиса прибором Едерина требует ряда предосторожностей, внимательного и научного подхода к делу, именно:

1) отбор проволок для комплекта базисного прибора I класса не произволен, а должен удовлетворять ряду требований, которые выясняются лишь на основе соответственно поставленных исследований проволок;

2) выяснение работы блоков должно входить и в программу эталонирования и этим надо заниматься при полевых действиях;

3) хранение проволок и обращение с ними должно давать уверенность в наилучшем сохранении их длин (многочисленные мелкие изгибы проволоки, нередко наблюдаемые, в сумме заметно влияют на ее длину и, кроме того, делают последнюю величиной переменной, зависящей от положения плоскостей шкал);

4) влияние личных ошибок наблюдателей требует, чтобы отсчеты шкал поручались опытным наблюдателям; существует даже мнение, что наблюдатели в поле должны быть те же самые, которые проводили и эталонирование проволок (если иметь в виду принятное за границей обозначение концов базиса компаратора целиками, то это мнение, думается, приобретает значение обязательного); конечно, нужно считаться при работах в поле и с утомляемостью наблюдателей.

Особо приходится выделить в измерении базисов I класса вопрос об учете температурного последействия. Если длины проволок выводятся из двух эталонирований их на контрольном базисе, близких между собой по времени и температурным условиям, то в этом случае, видимо, можно и не учитывать поправки за температурное последействие (так поступают в Германии и в прибалтийских государствах). Но в СССР пока не пользуются контрольными базисами, и поэтому вопрос введения поправки за температурное последействие встает у нас в полной мере. Подбором проволок и ограничением периода времени, допустимого для

измерения первоклассных базисов, а также введением правила об определении температуры проволок и во время их хранения можно заметно ослабить ненадежность в учете этой поправки, вообще очень заметной. Французские ученые рекомендуют для того чтобы избежать неточностей в учете поправки за температурное последействие, измерять базисы I класса при температурах, не сильно отличающихся от 15°. Так как это требование мало осуществимо при проведении геодезических работ в обширных необжитых районах нашего Севера, то необходимо знать температурные коэффициенты инвариных проволок для более низких температур (в частности, отрицательных), при которых неизбежно придется измерять базисы I класса в северных районах СССР, и тщательными исследованиями установить поведение проволок, характер и размеры температурных последействий при тех же температурах. Пока этого не сделано, говорить о получении первоклассных по точности результатов при измерении базисов в этих условиях нельзя. Понятно, что базисы I класса требуют и соответствующей местности — в отношении величины уклонов и в отношении устойчивости грунта.

Роль контрольных базисов уже достаточно выяснена выше. Измерение контрольного базиса до и после измерения данного базиса вовсе не исключает необходимости в базисах I класса эталонировать проволоки на компараторе также до и после измерения данного базиса. Это вытекает как из необходимости накоплять материал для вывода длины самого контрольного базиса, так и для суждения о неизменности его длины. На Международной геодезической конференции в Лиссабоне в 1932 г. была выдвинута такая идея: каждая страна имеет свой контрольный базис (длиной от 500 до 1000 м), три из этих базисов — особо выделенные — служат для связи контрольных базисов всех стран, для чего каждая страна, кроме своего контрольного базиса, измеряет своими проволоками время от времени один из этих трех «международных базисов». В результате должно осуществляться отнесение базисов всех стран к однородной единице длины, к какому-то фиктивному метру, близкому к действительному, и таким путем будет достигнута высокая точность всех геодезических соединений.

Понятны трудности в осуществлении этой идеи, в особенности для таких больших государств, как СССР: ведь, успех использования контрольного базиса основывается на близости времен измерений контрольного и данного базисов. Очевидно, в СССР нужно иметь не один, а несколько контрольных базисов, и выбор мест для них, определение их длин и связь их между собой представляет достаточно громоздкую задачу.

Выходом из положения является не осуществление идеи, выдвинутой в Лиссабоне проф. Бонсдорфом, а применение интерференционного метода к определению длии контрольных базисов. Такие контрольные базисы должны быть у нас осуществляемы в местах, транспортирование на которые (или с которых) базисных приборов с мест расположения самих базисов требует двух-трех суток и может быть выполнено притом в спокойных для проволок условиях. Советские геодезисты работают сейчас именно в направлении разработки методов и аппаратуры для измерения таких базисов, пользуясь интерференцией и длиной световой волны.

Финский ученый Вейссле, упоминавшийся уже ранее, в результате десятилетних изысканий пришел к выводу, что непосредственное изме-

рение методом интерференции возможно для расстояний до нескольких сот метров; при больших расстояниях колебания воздуха не позволяют наблюдать интерференционную картину. Очевидно, препятствия к осуществлению аппаратуры, которая позволила бы продвигаться на четвертую часть (или треть) контрольного базиса длиной в 960 м, могут быть преодолены. Ближайшие годы, думается, приведут к возможности определять длину контрольного базиса с большой точностью и сравнительной легкостью и притом в моменты, близкие к времени измерения базиса, с расположением контрольного базиса в районе измерения данного базиса, или даже просто на самом этом базисе.

## Глава VII

### ОТДЕЛЬНЫЕ ЧАСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ УГЛОМЕРНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ. ОПИСАНИЕ ГЛАВНЫХ ТИПОВ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЙ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Геодезические инструменты подразделяются на теодолиты, геодезические универсалы, вертикальные круги. Теодолиты предназначены для точного измерения горизонтальных направлений или углов; вертикальный круг в теодолитах или совсем отсутствует или отсчитывается менее точно, чем круг горизонтальный. Универсальный инструмент характеризуется одинаковыми размерами горизонтального и вертикального кругов и одинаковой точностью их отсчитывания; однако, геодезические универсалы в подробностях конструкции более отвечают высокоточному измерению горизонтальных направлений, чем вертикальных углов. Вертикальные круги предназначаются только для измерения вертикальных углов и при больших размерах и большой точности отсчитывания вертикального круга имеют лишь небольшой горизонтальный круг — искатель, грубо отсчитываемый. Вертикальные круги применяются в триагуляционных работах только в Америке. В Европе, если в триангуляции измеряют, кроме горизонтальных и вертикальные углы, употребляют геодезические универсалы.

В дальнейшем будем считать, что в общих чертах устройство теодолита и универсального инструмента известно и что известны также из курса геодезии некоторые подробности относительно устройства отдельных частей геодезических инструментов.

#### § 45. Уровни

В теодолитах уровни служат:

- 1) для приведения оси алидады (а иногда оси лимба) в вертикальное положение;
- 2) для определения наклона к горизонту оси вращения трубы;
- 3) для определения малых перемен в положении прямой, соединяющей нульпункты противоположных микроскопов или нули верньеров на вертикальном круге.

Первая задача решается или при помощи уровней, прикрепленных к алидаде горизонтального круга\*, или при помощи уровня, ста-

\* А также к подставкам трубы.

вящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента. Вторая задача решается посредством точного уровня, ставящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента. Она возникает обычно не при измерениях углов в триангуляции, а при определении азимута некоторого направления. Третья задача решается посредством уровня, прикрепленного или к алидаде вертикального круга, или к подставке трубы параллельно ее коллимационной плоскости.

Остановимся прежде всего на определении наклонности  $I$  оси уровня к горизонту по отсчетам, взятым на концах пузырька. Допустим сперва, что нуль делений шкалы уровня находится по середине его трубы, и подпись делений возрастает в обе стороны от нуля. При такой подписи делений отсчет, соответствующий середине пузырька, очевидно, равен наклонности  $i$  оси уровня, выраженной в делениях уровня. Обозначим отсчеты по левому и правому концам пузырька соответственно через  $\lambda$  и  $n$ . Если оба конца пузырька находятся по одну сторону от нуля, то  $i = \pm \frac{\lambda + n}{2}$ ; если же концы пузырька находятся по разные стороны от нуля, то  $i = \pm \frac{\lambda - n}{2}$ . Знак + или — при  $i$  всего лучше согласовать со знаком поправки, которая вводится в отсчет по горизонтальному или вертикальному кругу за эту наклонность  $i$ . В инструментах обычного устройства, т. е. с подписью делений на горизонтальном круге по ходу часовой стрелки, поправку в отсчет по этому кругу за наклон оси вращения трубы надлежит вводить со знаком плюс, когда левый конец оси выше правого для наблюдателя, смотрящего от окуляра к объективу трубы. Очевидно, в таких инструментах нужно принять для определения наклонности оси уровня, ставящегося на горизонтальную ось, формулы:

- 1)  $i = \frac{\lambda - n}{2}$ , если концы пузырька находятся по разные стороны от нуля;
- 2)  $i = + \frac{\lambda + n}{2}$ , если оба конца пузырька лежат влево от нуля;
- 3)  $i = - \frac{\lambda + n}{2}$ , если оба конца пузырька лежат вправо от нуля.

Все эти формулы приводятся, впрочем, к одной: именно, если условиться отсчеты в левой от нуля половине трубы, производимые—безразлично—по левому или по правому концу пузырька, сопровождать знаком плюс, а отсчеты в правой от нуля половине трубы\* — знаком минус, то наклон оси уровня, ставящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента, равен:

$$i = \frac{\lambda + n}{2}; \quad I = \frac{\lambda + n}{2} \cdot \tau, \quad (182)$$

понимая под  $\tau$  цену деления уровня.

Если подпись деления на трубке уровня возрастает от одного ее конца к другому и  $m$  есть число, стоящее посередине трубы, то очевидно

$$I = \pm [2m - (\lambda + n)] \frac{\tau}{2}$$

\* Безразлично — по левому или правому концу пузырька.

и в этом случае мы легко приходим к таким формулам:

$$I = [2m - (\lambda + n)] \frac{\tau}{2} \dots (183), \text{ если нуль уровня у левого конца горизонтальной оси,}$$

$$I = [(\lambda + n) - 2m] \frac{\tau}{2} \dots (184), \text{ если нуль уровня—у правого конца горизонтальной оси.}$$

Обычно вертикальный круг теодолита вращается вместе с трубой, и подпись делений на круге возрастает по ходу часовой стрелки. В таких инструментах поправка в отсчет по вертикальному кругу за наклонность оси уровня при алидаде такого круга должна быть положительной, если правый конец уровня выше левого (предполагая, что наблюдатель обращен лицом к кругу). Следовательно, если середина трубы уровня на алидаде вертикального круга подписана нулем, то нужно:

1) условиться отсчеты в правой половине трубы, выполняемые — безразлично — по правому или по левому концу пузырька, сопровождать знаком плюс, а отсчеты в левой от нуля половине трубы, производимые — безразлично — по правому или по левому концу пузырька, — сопровождать знаком минус:

2) для определения наклонности оси уровня пользоваться при указанном условии формулой

$$I = (\lambda + n) \frac{\tau}{2}.$$

Если же подпись делений на трубке уровня при алидаде вертикального круга возрастает в одну сторону, то для определения наклонности оси такого уровня надлежит пользоваться формулами:

$$I = [(\lambda + n) - 2m] \frac{\tau}{2}, \text{ если нуль—у левого конца уровня;}$$

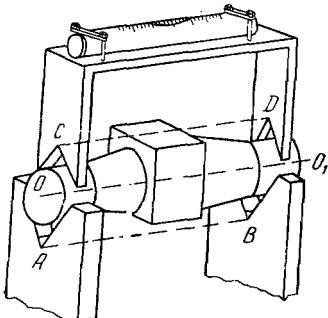
$$I = [2m - (\lambda + n)] \frac{\tau}{2}, \text{ если нуль—у правого конца уровня.}$$

Вообще, если вертикальный круг вращается с трубой, то направление от отрицательного к положительному концу уровня при вертикальном круге должно быть то же самое, что и направление подписи делений в верхней части вертикального круга.

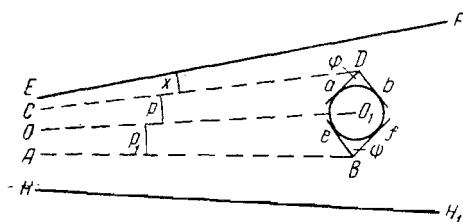
Обратимся теперь к задаче определения наклонности горизонтальной оси инструмента. Эта ось вкладывается своими цилиндрическими цапфами в гнезда подставок трубы, и под наклонностью ее к горизонту надлежит понимать угол  $J$  между горизонтальной линией  $HH_1$  (черт. 172) и прямой  $OO_1$ , соединяющей центры круговых сечений цапф. При определении угла  $J$  необходимо иметь в виду, что уровнем, ставящимся на напфи горизонтальной оси, определяется собственно наклонность цапфенной линии  $CD$  (черт. 171), под которой следует понимать ребро двухгранника со сторонами, касающимися построенного на цапфенных сечениях конуса, и именно по тем его образующим, на которых приходятся касания ножек уровня с цапфами. Назовем:

1) через  $AB$  воображаемую линию, которая находится в пересечении плоскостей, касающихся цапф снизу, и именно по тем их образующим, по которым происходит касание цапф с гнездами для них в подставках трубы;

- 2) через  $p$  — угол между  $CD$  и  $OO_1$ , обусловленный неравенством диаметров цапф;
- 3) через  $p_1$  — угол между  $OO_1$  и  $AB$ , обусловленный также неравенством диаметров цапф;
- 4) через  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно углы  $aDb$  и  $eBf$  (черт. 172) между плоскостями вырезов в гнездах подставок;



Черт. 171



Черт. 172

- 5) через  $x$  — угол между осью уровня  $EF$  и цапфенной линией  $CD$ , обусловленный неравенством ножек уровня; очевидно, при горизонтальном положении прямой  $CD$  угол  $x$  представит собой уклонение пузырька уровня от середины его трубки (или будет равен отсчету по середине пузырька);

- 6) через  $S$  — сумму  $p + p_1$ .

Предположим далее, что при неизменном положении линии  $AB$  мы получим одно за другим следующие четыре значения для наклонности оси уровня: первое  $i_1^R$  — при положении исправительных винтов уровня вправо и при положении вертикального круга вправо же ( $R$ ); второе  $i_2^R$  — по перестановке ножек уровня на цапфах, т. е. при положении исправительных винтов уровня влево, но при том же положении горизонтальной оси в гнездах, что и при получении  $i_1^R$  (вертикальный круг вправо); третье  $i_2^L$  и четвертое  $i_1^L$  — после перекладки горизонтальной оси в гнездах подставок, т. е. при положении вертикального круга влево, причем  $i_2^L$  получено при положении исправительных винтов уровня влево (т. е. при том же втором положении уровня, какое было при получении  $i_2^R$ , а  $i_1^L$  — определено по новой перестановке ножек уровня на цапфах (т. е. при первом положении уровня, когда его исправительные винты находятся вправо)). Обозначая через  $J_R$  и  $J_L$  наклонности линии  $OO_1$ , соответственно до перекладки (круг вправо) и после перекладки (круг влево) горизонтальной оси, напишем легко из черт. 172:

$$i_1^R = J_R + p + x; \quad i_2^R = J_R + p - x; \\ i_2^L = J_L - p - x; \quad i_1^L = J_L - p + x. \quad (185)$$

Отсюда:

$$x = \frac{i_1^R - i_2^R}{2}; \quad x = \frac{i_1^L - i_2^L}{2}. \quad (186)$$

Так как

$$J_L = J_R - 2p_1,$$

то:

$$S = \frac{i_2^R - i_2^L}{2} \quad S = \frac{i_1^R - i_1^L}{2}; \quad (187)$$

$$p = \frac{S \cdot \sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}; \quad p_1 = \frac{S \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}; \quad (188)$$

$$J_R = \frac{i_1^R + i_2^R}{2} - p; \quad J_L = \frac{i_2^L + i_1^L}{2} + p. \quad (189)$$

Уравнениями (185) и выводимыми из них уравнениями (186), (187) и (189) решается поставленный выше вопрос об определении наклонности  $J$  горизонтальной оси инструмента, и теперь необходимо остановиться на практических приемах использования этих уравнений. Сделаем сперва следующие замечания.

1) Величина  $x$  называется обычно поправкой за нульpunkt; очевидно, что если нуль уровня — на середине его трубки, то  $x$  есть место нуля этого уровня.

2) Первое и второе положения уровня  $[i_1$  и  $i_2]$  можно отмечать, как мы делали, указанием в журнале на положение исправительных винтов уровня — вправо или влево; но можно еще заключить в скобки цифры в одной половине трубки уровня, и тогда первому положению уровня будет соответствовать отсчет в скобках по левому концу пузырька, а второму положению — отсчет в скобках по правому концу пузырька, или наоборот (при этом предполагается, что концы пузырька всегда располагаются по разные стороны от нуля).

3) Отметку положения горизонтальной оси можно делать, указывая положение вертикального круга  $R$  или  $L$ .

Величины  $p$  и  $p_1$  весьма малы и, конечно, постоянны в данном инструменте; точное определение их требует неподвижности линии  $AB$  при перекладках горизонтальной оси. Поэтому целесообразно определять  $p$  и  $p_1$  не в поле, во время наблюдений теодолитом, а в геодезической лаборатории, т. е., поставив теодолит на каменный столб в помещении с постоянной температурой воздуха. Величину  $x$  надлежит определять, наоборот, во время полевых работ и даже по нескольку раз в течение одного вечера при наблюдениях азимута, так как значение этой величины изменяется вместе с изменениями, происходящими от разных причин в оправе уровня и, в особенности, в положении исправительных винтов; между тем определение  $x$  не затруднительно и в условиях полевой работы, если только уровень защищен от влияний резких перемен температуры воздуха.

Углы  $\varphi$  и  $\psi$  должны быть определены при построении инструмента или же на основании специального исследования. Имея значения этих углов, определение  $p$  и  $p_1$  всего лучше делать отдельно от определения  $x$ , применяя при этом уравнения (187) и (188) и измеряя наклонности  $i$  оси уровня при одном и том же положении уровня, но при разных положениях горизонтальной оси, и выводя из такого материала сперва величину  $S$ . В табл. 14 приводится пример такого определе-

ния  $S$ ,  $p$  и  $p_1$  четырьмя приемами; каждый прием заключался в определении наклонности оси уровня — сперва при положении вертикального круга  $R$ , затем, по перекладке оси, — при положении круга  $L$  и, наконец, после вторичной перекладки оси, — снова при положении круга  $R$ . Уровень ставился на цапфы всегда в одном и том же положении, именно, исправительные винты были всегда вправо. Цена деления уровня —  $4''$ ; углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно были равны  $90$  и  $84^\circ$ .

Таблица 14

Определение величины  $S$  в теодолите

| Положение оси | Отсчеты по уровню $\lambda$ | Отсчеты по уровню $n$ | Длина пузырька | Наклонности $i$ в полуделениях | $2S = iR - iL$ в полуделениях |
|---------------|-----------------------------|-----------------------|----------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $R$           | + 7,0                       | - 7,3                 | 14,3           | - 0,3                          | — 8,35                        |
|               | + 11,0                      | - 3,5                 | 14,5           | + 7,5                          |                               |
|               | + 6,6                       | - 8,0                 | 14,6           | - 1,4                          |                               |
| $R$           | + 5,8                       | - 8,8                 | 14,6           | - 3,0                          | — 7,65                        |
|               | + 9,7                       | - 4,9                 | 14,6           | + 4,8                          |                               |
|               | + 5,9                       | - 8,6                 | 14,5           | - 2,7                          |                               |
| $R$           | + 7,9                       | - 6,6                 | 14,5           | + 1,3                          | — 8,25                        |
|               | + 11,9                      | - 2,6                 | 14,5           | + 9,3                          |                               |
|               | + 7,7                       | - 6,9                 | 14,6           | + 0,8                          |                               |
| $R$           | + 6,0                       | - 8,5                 | 14,5           | - 2,5                          | — 8,15                        |
|               | + 9,9                       | - 4,5                 | 14,4           | + 5,4                          |                               |
|               | + 5,7                       | - 8,7                 | 14,4           | - 3,0                          |                               |

Величина  $S$  выражена в полуделениях уровня; окончательно  $S = -4,05$ . Так как  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1/2}{2}$ , а  $\sin \frac{\psi}{2} = 0,669$ , то

$$p = +S \cdot \frac{0,669}{1,376} = 0,486 S;$$

$$p = -1,968 \cdot 2'',3 = -4'',53.$$

Если назвать через  $(R)$  и  $(L)$  наклоны цапфенной линии  $CD$  соответственно при круге  $R$  и при круге  $L$ , то нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (R) &= J_R + p = i_1^R - x = i_2^R + x \\ (L) &= J_L - p = i_2^L + x = i_1^L - x \\ J_R &= (R) - p; \quad J_L = (L) + p \end{aligned} \quad \left. \right\}. \quad (12)$$

Следовательно, если при некотором визировании трубой теодолита была определена наклонность цапфенной линии  $(R)$ , то к ней нужно прибавить поправку  $+4'',53$ , чтобы получить соответствующую этому визированию наклонность горизонтальной оси  $OO_1$ .

В большинстве случаев в теодолитах  $\varphi = \psi = 90^\circ$ ; тогда формулы (188) становятся, конечно, излишними, а (187) может быть переписана так

$$4p = \frac{i_2^R - i_2^L}{2} + \frac{i_1^R - i_1^L}{2}. \quad (187)$$

Инердко в практике, принимая, что  $\varphi = \psi = 90^\circ$ , определяют совместно  $x$  и  $p$ , следуя указанному перед написанием уравнений (185) порядку определения одной за другой величин  $i_1^R, i_2^R, i_2^L, i_1^L$ ; обычно совместное определение  $x$  и  $p$  ведут несколькими частными приемами, считая один прием состоящим в определении  $i_1^R, i_2^R, i_2^L$  и  $i_1^L$ .

В табл. 15 приводится пример такого совместного определения  $x$  и  $p$  для универсала Керна, у которого  $\varphi = \psi = 90^\circ$ , а  $\tau = 6''$ .

Таблица 15

| Положение круга и уровня | Отсчеты уровня |        | Длина пузырька | В полуделениях |       |
|--------------------------|----------------|--------|----------------|----------------|-------|
|                          | $\lambda$      | $n$    |                | $i$            | $2x$  |
| $R n$                    | + 9,9          | - 10,1 | 20,0           | - 0,2          | - 3,5 |
| $R \lambda$              | + 11,6         | - 8,8  | 19,9           | + 3,3          |       |
| $L \lambda$              | + 11,1         | - 8,7  | 19,8           | + 2,4          | - 3,0 |
| $L n$                    | + 9,7          | - 10,3 | 20,0           | - 0,6          |       |
| $L n$                    | + 9,3          | - 10,7 | 20,0           | - 1,4          | - 3,4 |
| $L \lambda$              | + 10,9         | - 8,9  | 19,8           | + 2,0          |       |
| $R \lambda$              | + 11,1         | - 8,7  | 19,8           | + 2,4          | - 3,1 |
| $R n$                    | + 9,7          | - 10,4 | 20,1           | - 0,7          |       |

Буква  $n$  в первом столбце таблицы 15 указывает на положение исправительных винтов уровня вправо, а буква  $\lambda$  — на положение тех же винтов влево. Из приведенной табл. 15 получаем, выражая  $x$  и  $p$  в полуделениях уровня.

$$4p = + 0,65 \text{ из первого приема,}$$

$$4p = + 0,55 \text{ из второго приема;}$$

окончательно

$$p = + 0,15 \frac{\tau}{2} = 0''.45; \quad 2x = - 3,25.$$

Пусть теперь в журнале наблюдений, выполненных нашим универсалом Керна, имеется для двух визирований такая запись двух отсчетов по уровню:

$$n + 6,9 - 10,9 \dots \text{при круге } R,$$

$$\lambda - 10,5 - 7,3 \dots \text{при круге } L.$$

Предполагая, что во время этих наблюдений  $x$  имело то самое значение, которое было выведено при исследованиях инструмента Керна в приведенном выше примере, получаем следующие, соответствующие

напомним записям, значения наклонностей горизонтальной оси в полууделениях уровня:

для первого визирования:  $-4,0 + 1,63 - 0,15 = -2,52$ ;

для второго визирования:  $+3,2 - 1,63 + 0,15 = +1,72$ ,

причем в первом визировании наклон цапфеной линии был  $-2,37$ , а во втором  $+1,57$ .

Заметим, что, если при вычислении  $p$  мы вычитаем из наклонности оси уровня, определенной при круге  $R$ , наклонность оси уровня, определенную при круге  $L$ , то при выводе  $J_R$  приходится  $p$  вычитать из наклонности цапфеной линии, а при выводе  $J_L$  — прибавлять  $p$  к наклонности цапфеной линии. Определив тем или иным приемом  $p$ , мы должны, очевидно, при наблюдениях сперва получать наклонности ( $R$ ) и ( $L$ ) цапфеной линии, а от них уже с помощью  $p$  переходить к наклонности горизонтальной оси  $OO_1$ . Эти наклонности цапфеной линии можно при наблюдениях получать двояко:

1) при каждом отсчитывании горизонтального круга производить измерения наклонности  $i$  оси уровня дважды — при первом и втором положениях уровня, с перестановкой его ножек на цапфах; среднее из таких двух наклонностей оси уровня, очевидно, и будет равно искомой наклонности цапфеной линии; 2) перед и после наблюдений произвести определение поправки  $x$  за нульpunkt\*, а затем при каждом визировании определять наклонность цапфеной линии по одной из формул:

$$(R) = i_1^R - x = i_2^R + x,$$

$$(L) = i_2^L + x = i_1^L - x,$$

если только при выводе  $x$  из наклонности  $i_1$  вычитается  $i_2$ .

Один прием определения  $x$  состоит обычно из измерений наклонностей оси уровня четыре раза: первый раз — в первом положении уровня; второй — во втором, по перестановке уровня на цапфах оси; третий — во втором же положении уровня, но только после покачивания его на цапфах; четвертый — по вторичной перестановке уровня, т. е. вновь в первом его положении.

#### Первый пример

| Положения<br>уровня | Отсчеты   |      | Длина<br>пузырька | $i$    |
|---------------------|-----------|------|-------------------|--------|
|                     | $\lambda$ | $n$  |                   |        |
| 1                   | 10,3      | 30,5 | 20,2              | $-0,8$ |
| 2                   | 32,5      | 12,2 | 20,3              | $+4,7$ |
| 2                   | 32,6      | 12,2 | 20,4              | $+4,8$ |
| 1                   | 10,4      | 30,6 | 20,2              | $-1,0$ |

В дальнейшем приведены выписки из журналов наблюдений, дающие примеры определения величины  $x$ .

Здесь имеем дело с уровнем, у которого посередине трубы стоит цифра 20; очевидно, первым положением уровня считается то, при

\* При определении азимута следует применять и первый и второй из указанных приемов.

котором нуль его находится у левого конца горизонтальной оси, и поэтому:

$$i_1 = 2m - (a + n) = 40 - 40,8 = -0,8$$

(см. ур-ние 183). В среднем имеем

$$i_1 = -0,9; \quad i_2 = +4,75.$$

Следовательно,

$$x = \frac{i_1 - i_2}{2} = -2,83 \text{ полуделения.}$$

Понятно, мы получаем следующее, думается, наиболее простое правило введения «поправки» за нульpunkt: чтобы перейти к наклонности цапфенной линии, мы прибавляем абсолютное значение поправки  $x$  к наклонности оси уровня, определяемой при том положении уровня, для которого при определении  $x$  величина  $i$  ( $i_1$  или  $i_2$ ) оказалась меньшей; наоборот, абсолютное значение  $x$  вычитается из наклонности оси уровня, определяемой при том его положении, для которого при определении  $x$  величина  $i$  оказалась большей.

Но применяются и иные правила введения этой поправки. Так, если имеем уровень с пулём на конце его трубки и, следовательно, с подписью делений в одну сторону, то следует поправку за нульpunkt заменить во всех предыдущих рассуждениях и формулах местом нуля уровня. В самом деле, если в (183) и (184) величину  $m$  заменить через место нуля  $M$ , то,  $i_1$  и  $i_2$  общаются в искомые наклонности цапфенной линии. Так как место нуля  $M$  равно  $\frac{(a+n)_1 + (a+n)_2}{2}$ , то в нашем примере имеем

$$M = \frac{10,3 + 30,5 + 32,5 + 12,2}{2} = 42,75,$$

$$M = \frac{32,6 + 12,2 + 10,4 + 30,6}{2} = 42,90,$$

или в среднем  $M = 42,83$ . При записи в журнале:  $\frac{a}{10,9}, \frac{n}{31,3}$ , имеем наклонность цапфенной линии:  $(R) = 42,83 - (10,9 + 31,3) = +0,63$ .

По правилу, приведенному ранее, получаем

$$(R)^* = 40 - (10,9 + 31,3) + 2,83 = +0,63.$$

Если уровень имеет пуль на середине трубки, то нужно в журнале его положение так или иначе отмечать, например указанием: влево или вправо находятся исправительные винты уровня (*в. л., в. н.*), или отсчеты в одной половине его трубки заключают в скобки (сделав бумажную наклейку с этим значком на оправе уровня). Понятно, что отметка в журнале левого и правого концов пузырька остается обязательной.

\* Или (*L*).

## Второй пример

| $\lambda$ | $n$   | $i$   |
|-----------|-------|-------|
| 10,0      | (1,7) | + 8,3 |
| (6,5)     | 5,4   | + 1,1 |
| (6,4)     | 5,4   | + 1,0 |
| 10,1      | (1,8) | + 8,3 |

Как определяется поправка за нульpunkt в этом случае, видно из приводимого второго примера.

Примем за первое то положение уровня, когда половина трубы с цифрами в скобках располагается направо. Имеем в среднем:

$$i_1 = +8,3; \quad i_2 = +1,05;$$

поэтому

$$x = \frac{8,3 - 1,05}{2} = +3,62.$$

По первому из указанных выше правил, если запись в журнале будет

$$\frac{\lambda}{(9,5)} \quad \frac{n}{2,4},$$

то

$$(R) = (9,5) - 2,4 + 3,62 = +10,72.$$

Но, с другой стороны, имеем для рассматриваемого случая такие формулы:

$$(R) = i_1 - x = \lambda - (n) - x = \lambda - [(n) + x],$$

$$(R) = i_2 + x = (n) - \lambda + x = [(n) + x] - \lambda,$$

т. е. делаем заключение, что поправку  $x$ , выведенную, как  $\frac{i_1 - i_2}{2}$ , нужно алгебраически всегда прибавать к отсчету в скобках, если за первое положение уровня принято то, когда половина его трубы с цифрами в скобках располагается направо.

Надлежит еще отметить, что в практике передко совершенно опускают определение  $p$  и  $p_1$ , потому что из наблюдений, сделанных при двух положениях трубы, получается в среднем результат, свободный от обусловленных этим (или пренебрежением неравенством цапф) погрешностей.

---

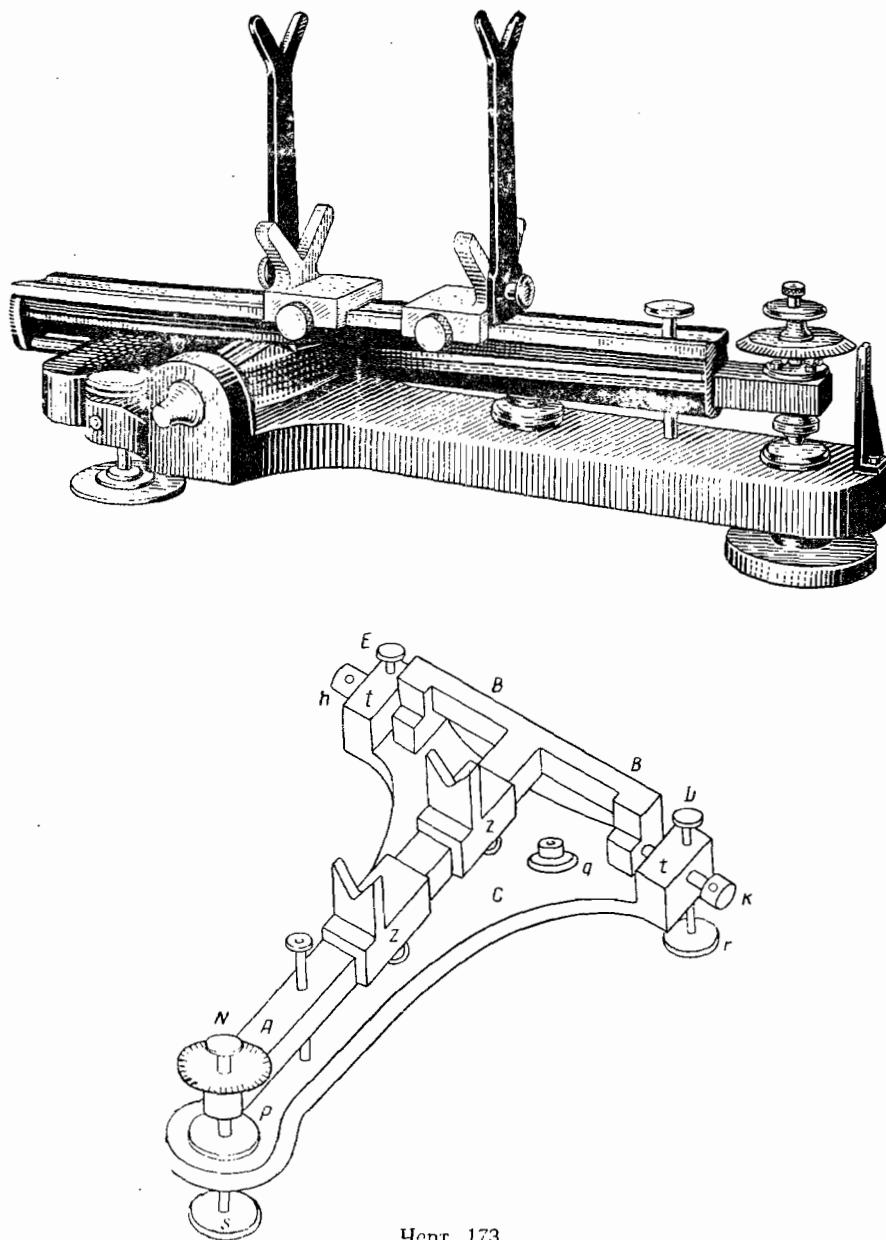
Определение цены деления уровня и исследование правильности кривизны его трубы выполняются посредством особого прибора, называемого экзаменатором или испытателем уровней (черт. 173).

Прибор этот состоит:

1) из длиной полосы  $A$  с прицелом к ней  $B$  в виде короткого поперечного бруска (полоса  $A$  и поперечина  $B$  изготавливаются из одного куска металла);

2) из массивного основания  $C$  с выступами  $t$ , через которые проходят горизонтальные стержни винтов  $h$  и  $k$ ; эти винты заканчиваются

остриями, входящими в выточенные в гранях поперечины *B* конические гнезда. Очевидно, что острия винтов *h* и *k* образуют ось, около которой может свободно вращаться (в вертикальной плоскости) полоса *A*;



Черт. 173

3) из точно нарезанного с весьма малым шагом винта *N*, имеющего матку в конце полосы *A* и опирающегося своим концом (в виде усеченного конуса с отлично отшлифованной нижней плоскостью) на стальную

пластинку  $p$ , наглухо привинченную к основанию  $C$  и имеющую отлично отшлифованную на плоскость верхнюю грань.

Через выступы  $i$  проходят еще вертикальные винты  $E$  и  $D$ , упирающиеся концами в подкладки  $r$ ; две точки опоры, доставляемые основанию  $C$  концами винтов  $E$  и  $D$ , дополняются третьей — в виде острия глухой ножки  $S$ . По полосе  $A$  могут передвигаться и закрепляться в любом положении двое салазок  $zz$ , снабженные наверху вилками, на которых при исследовании покоятся уровень. Винт  $N$  имеет шляпку с диаметром около 2,5 см, окружность которой разделена на 120 или на 180 частей; деления шляпки отсчитываются по указателю, укрепленному на полосе  $A$  (на черт. 173 он не показан). Обычно расстояние от оси винта  $N$  до оси испытателя  $hk$  берется при дашой величине шага винта  $N$  такое, чтобы одно деление шляпки этого винта соответствовало вращению линейки  $L$  на угол в одну секунду. На основании  $C$  имеется круглый уровень  $q$ ; кроме того, к испытателю прилагается малый цилиндрический уровень  $m$  для пакладывания его на верхние плоскости бруска  $B$  и полосы  $A$ .

При исследовании уровня испытатель должен стоять на массивном столбе, совершившем изолированном от пола. Порядок исследования уровня следующий: наложив на верхнюю грань бруса  $B$  уровень  $m$  и действуя винтами  $E$  и  $D$ , приводят одновременно на середину пузырек как этого, так и круглого уровня  $q$ ; затем, наложив уровень  $m$  на полосу  $A$  и действуя винтом  $N$ , приводят пузырек его на середину. После этого кладут на салазки  $z$  исследуемый уровень и ставят указатель винта  $N$  либо на нулевой отсчет, либо на отсчет, кратный десяти, вращая во всяком случае винт  $N$  менее, чем на полоборота; поставив же вновь уровень  $m$  на бруск  $B$  и действуя винтами  $E$  и  $D$ , устанавливают пузырек исследуемого уровня в конце его трубки, обращенный к винтам  $E$  и  $D$ , следя в то же время за тем, чтобы пузырек уровня  $m$  оставался на середине. Выждав несколько минут, делают отсчет по концам пузырька исследуемого уровня и по шляпке винта  $N$ ; затем, ввинчивая винт  $N$ , вращают шляпку его на 20, 30..., вообще на  $n$  делений, причем число  $n$  должно быть кратно десяти и соображено заранее так, что при повороте винта  $N$  на это число делений пузырек уровня проходит треть или четверть всего перемещения, которое он может иметь, двигаясь от одного конца трубки уровня к другому. Сделав после такого поворота винта  $N$  на  $n$  делений отсчеты по концам пузырька, вращают снова винт  $N$  (ввинчивая его) на то же число делений  $n$  и после этого поворота вновь делают отсчеты по концам пузырька и т. д. — до тех пор, пока пузырек не займет крайнего положения в конце трубки, обращенном к винту  $N$ . Доведя пузырек до такого крайнего положения, винтами  $E$  и  $D$  вновь перегоняют его в конец трубки, обращенный к брусу  $B$ , наблюдая при этом за тем, чтобы пузырек уровня  $m$  оставался на середине. После надлежащей установки продолжают указанный порядок исследования, т. е., ввинчивая винт  $N$  на  $n$  делений, после каждого такого ввинчивания делают отсчеты по концам пузырька, а приведя (после ряда перегонов) пузырек уровня в прилегающий к винту  $N$  конец трубки уровня, снова винтами  $E$  и  $D$  перегоняют его в первоначальное положение.

После ввинчивания (в результате всех перегонов уровня) винта  $N$  на некоторое целое число  $a$  оборотов, которое считают достаточным, заканчивают первый полуприем и переходят ко второму полуприему исследования, именно: перекладывают уровень на салазках  $z$ , вывин-

чивают винт  $N$  на  $a$  оборотов и, действуя винтами  $E$  и  $D$ , приводят пузырек исследуемого уровня в конец трубы, прилегающий к брускам  $B$ , следя одновременно за тем, чтобы пузырек уровня  $m$  стоял на середине. Когда этот переход ко второму полуприему будет закончен, далее исполняют все те же действия, что и в первом полуприеме, т. е. после каждого ввинчивания винта  $N$  на  $n$  делений отсчитывают уровень, а по приведении пузырька уровня в прилегающий к винту  $N$  конец его трубы действуют винтами  $E$  и  $D$  и т. д. до тех пор, пока винтом  $N$  не пройдут  $a$  целых оборотов.

Перекладкой уровня на салазках при переходе ко второму полу- приему достигается то, что в этом полуприеме пузырек уровня движется в обратном направлении по отношению к делениям на трубке уровня сравнительно с первым полуприемом; последнее же обстоятельство ведет к тому, что неправильности кривизны внутренней поверхности трубы уровня и неровности шлифовки ее будут во втором полуприеме влиять вообще иначе, чем в первом полуприеме.

П р и м е р. На испытателе Гейде исследовался уровень малого вертикального круга Репсольда; в табл. 16 приведены: в графах 1 — отсчеты по винту  $N$ ; в графах 2 — отсчеты по концам пузырька; в графах 3 — перемещения пузырька в полуделениях уровня.

Таблица 16

| 1-й полуприем |     |           | 2-й полуприем |     |           |      |
|---------------|-----|-----------|---------------|-----|-----------|------|
| 1             | 2   | 3         | 1             | 2   | 3         |      |
| ↓             | 0   | 59,1 34,7 | —             | 180 | 35,4 59,7 | 22,4 |
|               | 60  | 47,9 23,7 | 22,2          | 120 | 24,2 48,5 | 22,3 |
|               | 120 | 36,9 12,6 | 22,1          | 60  | 13,0 37,4 | 22,8 |
|               | 180 | 25,9 1,5  | 22,1          | 0   | 1,6 26,0  | —    |
| <hr/>         |     |           |               |     |           |      |
| ↑             | 0   | 58,5 34,3 | —             | 180 | 35,0 59,3 | 22,4 |
|               | 60  | 47,6 23,3 | 21,9          | 120 | 23,8 48,1 | 22,4 |
|               | 120 | 36,6 12,2 | 22,1          | 60  | 12,6 36,9 | 22,9 |
|               | 180 | 25,6 1,2  | 22,0          | 0   | 1,2 25,4  | —    |

Температура + 15° R

Порядок заполнения этой таблицы указан стрелками. Называя крайнюю часть трубы, примыкающую к нулю, первой частью, среднюю часть трубы — второй частью и остальную — третьей, имеем, что 60 секунд испытателя соответствуют следующему числу полуделений в разных частях трубы:

|                            | Первая часть   | Вторая часть | Третья часть |
|----------------------------|----------------|--------------|--------------|
| Первый полуприем . . . . . | { 22,1<br>22,0 | 22,1<br>22,1 | 22,2<br>21,9 |
| Второй полуприем . . . . . | { 22,9<br>22,8 | 22,4<br>22,3 | 22,4<br>22,4 |
| Среднее . . . . .          | 22,45          | 22,22        | 22,22        |

Во втором полуприеме скорость движения пузырька была большая, чем в первом полуприеме, и это различие следует приписать шероховатостям внутренней поверхности трубы уровня. Кривизна трубы

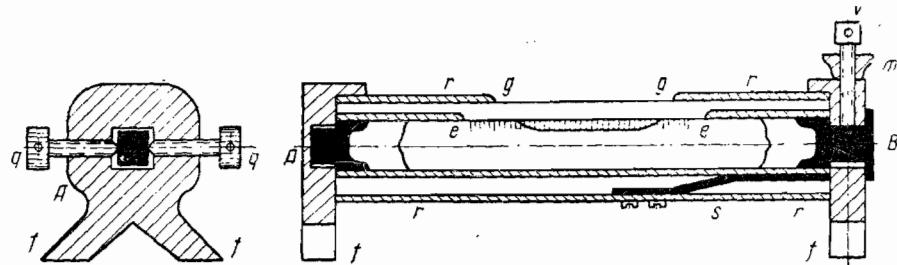
уровня может быть принята постоянной на всем ее протяжении; цена полуделения  $\frac{t}{2} = 2'',68$ .

Если образовать среднее из каждой пары чисел, стоящих в графах 3 приведенной выше табл. 16, в одной и той же строчке, то эти средние будут свободны от влияния причин, которые действуют пропорционально времени (например, постепенное возрастание температуры помещения), и потому по колебаниям таких средних выводов можно судить о достоинстве уровня. В нашем примере имеем

|       |       |
|-------|-------|
| 22,3  | 22,15 |
| 22,2  | 22,25 |
| 22,45 | 22,45 |

При употреблении уровня (в исследованиях и в наблюдениях) необходимо считаться со значительной чувствительностью этого прибора по отношению к теплоте. Прежде всего отметим значительное изменение длины пузырька вместе с переменой температуры окружающего воздуха. В уровне с ценой деления около  $5''$  длина пузырька сокращается на 0,4 деления при возрастании температуры на  $1^\circ$ . Вместе с убыванием длины пузырька, при возрастании температуры воздуха, заметно убывает чувствительность уровня — короткий пузырек мало подвижен; точные уровни снабжаются поэтому воздушными камерами. Длина пузырька при наблюдениях должна составлять около 0,4 длины всей трубы уровня. Быстрые и значительные перемены температуры воздуха вызывают изменения формы металлической оправы уровня, которые в свою очередь обусловливают натяжения в стеклянной его трубке, приводящие к изменениям в положении пузырька уровня (в то время, как в положении вертикальной или горизонтальной оси инструмента, пронивелированной уровнем, не происходит никаких изменений). Система закрепления трубы уровня в металлической оправе вообще рассчитана на температуры, близкие к комнатной; при слишком низких и при слишком высоких температурах в этом закреплении происходят расстройства, сказывающиеся при наблюдениях в беспричинных повидимому смещениях пузырька уровня. Одностороннее нагревание уровня вызывает сдвиг пузырька в сторону источника тепла; чем резче такое нагревание, тем быстрее и больше смещение пузырька. Медленное нагревание уровня солнцем вызывает хотя и малое, но постоянное «утягивание» (ход) пузырька в сторону солнца. Из изложенного следует, что если в геодезической работе требуются точные определения наклонностей оси уровня, то: а) при наблюдениях в поле необходимо защищать уровень зонтом; б) оправа уровня должна быть устроена так, чтобы трубка его была хорошо защищена от перемен температуры наружного воздуха и от односторонних нагреваний источниками света (солнцем, лампой). Это достигается в значительной степени тем, что патрон *AeeBh* (черт. 174), несущий трубку уровня, заключается в металлическую наружную трубку *rr* с верхней стеклянной частью *gg* (часто наружная трубка *rr* делается вся стеклянная); воздушный слой, заключенный между трубкой *rr* и патроном *AeeBh*, отлично защищает трубку уровня от влияния быстрых перемен температуры наружного воздуха и от влияния односторонних нагреваний уровня. Приводимая на черт. 174 оправа уровня, предложенная Эртельем, замечательна еще тем, что в ней, повидимому, достигается прочность закрепления трубы уровня без давления на нее металлической его оправы: конец *A* патрона, несущего трубку уровня,

соединяется с наружной его оправой лишь посредством остриев двух винтов  $qq$ ; на другой конец  $B$  того же патрона, входящий в широкую «выборку» в боковой стенке оправы, давит сверху винт  $V$  (снабженный контргайкой  $m$ ), которому противодействует пружина  $S$ .

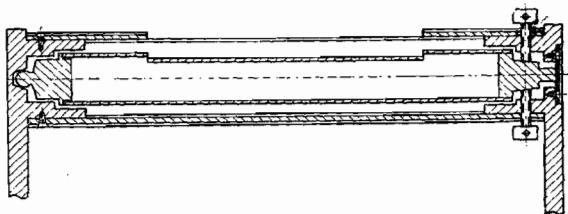


Черт. 174

На черт. 175 изображен уровень точных инструментов, изготовленных механиком Ваншафом.

Необходимо еще напомнить:

1) при отсчитываниях уровня может весьма значительно влиять параллакс вследствие того, что стенки трубки уровня имеют достаточную толщину; рекомендуется отсчитывание по концу пузырька производить, смотря на него не сверху, а сбоку — так, чтобы конец пузырька представлялся в профиль резко очерченным;



Черт. 175

2) вследствие прилипания жидкости к стенке трубки пузырек уровня не сразу и не всегда доходит до высшего (в геометрическом смысле) положения в трубке уровня; вследствие этого принимают за правило:

- выжидать несколько времени прежде, чем отсчитывать уровень;
- устанавливать пузырек уровня движением его только в определенном направлении; так, при точных нивелировках и при измерениях зенитных расстояний принимают за правило пузырек уровня устанавливать всегда вывинчиванием соответственного элевационного винта или винта при алидаде вертикального круга.

По исследованиям Рейнгерца установка пузырька уровня с ценой деления от 4 до  $10''$  на середину выполняется с средней ошибкой  $\pm 0,09 \sqrt{\tau}$ , а определение наклонности оси уровня по отсчетам на концах пузырька — с средней ошибкой  $\pm 0,20 \sqrt{\tau}$ .

Приведенная выше схема и порядок определения цены деления и исследования уровня достаточно отвечают: запросам введения поправок

за уровень в отсчеты по вертикальному кругу при геодезическом нивелировании; запросам к уровню при нивелировании горизонтальной оси инструмента, посредством которого измеряют в триангуляции горизонтальные углы и направления; запросам точного нивелирования. Но при определении азимутов из астрономических наблюдений, при определении астрономической широты и времени к уровню и к его работе, приходится предъявлять иные, значительно более повышенные требования; более повышенные требования к уровню приходится предъявлять и в высокоточном нивелировании. Соответственно этому исследование точного уровня и определение его цены деления выполняют по иной программе. Мы приведем для этих случаев программу, разработанную пулковским астрономом проф. А. С. Васильевым.

В тех точных измерениях, при которых к определению цены деления уровня и к выяснению качества его работы предъявляют высокие требования, перемещения пузырька уровня от его среднего положения бывают небольши, максимум 2—3 деления, и, конечно, именно к этим небольшим перемещениям следует приурочить исследование уровня, а вовсе не к тем большим амплитудам, которые указаны в приведенном выше примере исследования уровня. При этих малых перемещениях уровня заметно сказываются неправильности кривизны трубы уровня, задержки в движении пузырька из-за прилипания жидкости, наполняющей трубку уровня, к стеклу, задержки из-за шероховатостей в шлифовке внутренней поверхности этой трубы и влияние изменений внешней температуры, вызывающие задержки или ускорения в движении пузырька. Все эти причины при исполнении исследования уровня будут влиять систематически. Поэтому без учета этих влияний цена деления уровня может быть выведена неправильно, а оценка точности этого вывода будет заведомо неправильная. Кроме того, раздельное выявление: влияния неправильностей кривизны трубы; задержек перемещений пузырька, обусловленных суммарно и прилипанием жидкости и несовершенством шлифовки трубы, и, наконец, влиянием внешних — главным образом температурных условий, конечно, важно для прочного суждения о качестве уровня.

Введем термин «положение пузырька», которым обозначим расстояние его середины от штириха трубы, подписанныго нулем. Допустим, что мы начали исследование уровня при отсчете  $\beta_0$  на испытателе уровня и что этому отсчету  $\beta_0$  соответствовало положение пузырька, выражаемое в полуделениях уровня величиной  $x$ . Назовем единицу, деленную на цену полуделения уровня, через  $y$ , а время, соответствующее начальной установке при исследовании (отсчет на испытателе  $\beta_0$ ), — через  $t_0$ . Будем далее считать, что за сравнительно короткий промежуток времени исполнения одного приема исследования влияние внешней температуры (и вообще внешних условий) на положение пузырька пропорционально протекшему времени и выражается величиной  $z$  в полуделениях уровня в 1 минуту времени. Если при исследовании в момент  $t$  имеем отсчет на испытателе  $\beta$ , а положение пузырька (сумма отсчетов по его концам) было  $l$ , то имеем такое уравнение погрешностей:

$$x + (\beta - \beta_0) y + (t - t_0) z - l = \lambda, \quad (190)$$

где  $\lambda$  — погрешность определения  $l$ , обусловленная ошибками отсчетов по концам пузырька, неправильностями кривизны трубы и несовершенствами шлифовки трубы. Предполагается, что  $\beta$  выражено в секундах.

При исследовании даем пузырьку уровня — при переходе его из одного положения в следующее, смежное — и не большие перемещения, не на 10—12 делений, как в прежнем примере, а на 2—3—4 деления; конечно, при каждом перемещении винт  $N$  испытателя вращаем на одно и то же число целых секунд, так что:

$\beta_1 - \beta_0 = \beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_2 = \dots$  равно  $2''$ , или  $4''$ , или  $12''$ , — в зависимости от цены деления уровня.

Каждый раз, после установки испытателя на некоторый отсчет  $\beta_k$ , выжидают 2 минуты и после этого отчитывают концы пузырька, время по часам и температуру воздуха. Если в первом полуприеме идут ввинчиванием винта испытателя, то никаких перебоев в этом движении не допускается, т. е. нельзя перейти через отсчет  $\beta_k$  и снова подойти к нему вывинчиванием винта  $N$ .

В первом полуприеме, ввинчивая, например, винт  $N$ , проходим пузырьком всю рабочую часть трубы уровня. Во втором полуприеме, вывивчивая винт  $N$  и ставя диск испытателя точно на те же отсчеты  $\beta_k$ , какие были в первом полуприеме, проходим пузырьком, но при обратном направлении его движения, также всю рабочую часть трубы уровня. Результаты наблюдений представим табл. 17.

Таблица 17

| Первый полуприем   |       |                |                    | Второй полуприем       |                                    |                        |  |
|--------------------|-------|----------------|--------------------|------------------------|------------------------------------|------------------------|--|
| отсчеты испытателя | время | отсчеты уровня | положение пузырька | время                  | отсчеты уровня                     | положение пузырька     |  |
| $\beta_1$          | $t_1$ | $a_1 b_1$      | $l_1$              | $t_{2n+1}$             | $a'_1 b'_1$                        | $l_{2n+1}$             |  |
| $\beta_2$          | $t_2$ | $a_2 b_2$      | $l_2$              | $t_{2n}$               | $a'_2 b'_2$                        | $l_{2n}$               |  |
| $\beta_3$          | $t_3$ | $a_3 b_3$      | $l_3$              | $t_{2n-1}$             | $a'_3 b'_3$                        | $l_{2n-1}$             |  |
| ...                | ...   | ...            | ...                | ...                    | ...                                | ...                    |  |
| $\beta_n$          | $t_n$ | $a_n b_n$      | $l_n$              | $t_{n+2}$<br>$t_{n+1}$ | $a'_{n-1} b'_{n-1}$<br>$a'_n b'_n$ | $l_{n+2}$<br>$l_{n+1}$ |  |

При составлении уравнений погрешностей вида

$$x + (\beta - \beta_0) y + (t - t_0) z - l = \lambda$$

примем

$$t_0 = t_n; \quad \beta_0 = \beta_n.$$

Составив эти уравнения, переходим от них к трем нормальным уравнениям, из которых определяем  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и их веса и вычисляем сумму  $[\lambda]$ . Ошибка единицы веса получится равной:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda]}{(2n+1)-3}}.$$

В программу исследования непременно еще входит исполнение второго приема, непосредственно за первым, по той же схеме, по с уровнем, расположенным на испытателе. Этот второй прием обрабатывается отдельно. Нетрудно сообразить, что из этого второго приема величину  $z$  следует ожидать имеющей обратный знак по сравнению со значением  $z$ , полученным из первого приема. В хороших уровнях  $z$

не превосходит  $\pm 0,05$ — $0,06$  полуделения (конечно, здесь существенную роль играет защита уровня от внешних влияний).

Как сказано было выше, величины  $\lambda$  содержат в себе влияния не только ошибок отсчетов по концам пузырька, но и влияния неправильностей кривизны трубы уровня и задержек в движении пузырька вследствие несовершенств шлифовки оправы уровня. Так как при каждом отсчитываемом при исследовании положении пузырька мы можем вывести длину пузырька, то по колебаниям значений этой длины пузырька мы можем вывести и ошибку отсчета по концу пузырька и ошибку  $\mu_1$  величины  $l$  (т. е. положения середины пузырька в полуделениях уровня), поскольку эта ошибка  $\mu_1$  обусловлена только ошибками отсчетов по концам пузырька.

Составляя:

$$\mu_n = \sqrt{\mu^2 - \mu_1^2},$$

мы в виде величины  $\mu_n$ , конечно, косвенным путем, получаем среднее влияние (в полуделениях уровня) несовершенств трубы уровня и можем по размерам  $\mu_n$  судить о качестве уровня. Возьмем попарно уравнения погрешностей, составленные указанным выше образом для одних и тех же значений  $\beta$  в данном приеме исследования; из каждой пары таких уравнений образуем среднее. Мы получим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + \frac{l_n + l_{n+1}}{2} &= \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} = \delta_1 \\ x - y + \frac{l_{n-1} + l_{n+2}}{2} &= \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_{n+2}}{2} = \delta_2 \\ x - 2y + \frac{l_{n-2} + l_{n+3}}{2} &= \frac{\lambda_{n-2} + \lambda_{n+3}}{2} = \delta_3 \\ x - (n-1)y + \frac{l_1 + l_{2n+1}}{2} &= \frac{\lambda_1 + \lambda_{2n+1}}{2} = \delta_n. \end{aligned} \quad (191)$$

Решая эти уравнения по способу наименьших квадратов, мы вновь получим  $x$  и  $y$ , а также величину  $\mu'$  по такой формуле

$$\mu' = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-2}} V^{-2}.$$

Величины  $\delta$  искажены влиянием ошибок отсчетов по концам пузырька и влиянием неправильностей кривизны трубы уровня, т. е. величины  $\delta$  в существенной степени более имеют характер случайных величин, чем величины  $\lambda$  в прежней системе уравнений погрешностей; поэтому нам представляется нелипшим составление и решение уравнений (191); из них величина  $y$  получится более надежно, более правильно.

Кроме описанных обработок и сопоставлений, выполним еще следующую обработку, опять-таки относящуюся к какому-нибудь одному приему исследования. Обозначим через  $p$  влияние несовершенств шлифовки трубы уровня на положение пузырька; это влияние будет одного знака в первом полуприеме и противоположного знака во втором

полуприеме. Предполагая выполнение отсчетов уровня через равные промежутки времени, напишем уравнение погрешностей для первого полуприема в таком виде

$$x + (\beta_k - \beta_n) y + p + (t_k - t_n) z - l_k = \lambda_k,$$

а для второго полуприема при том же  $\beta_k$

$$x + (\beta_k - \beta_n) y - p - (t_k - t_n) z - l_{2n+1-k} = \lambda_{2n+1-k}$$

Возьмем разности таких уравнений, составляемых попарно для одного и того же значения  $\beta$  в двух полуприемах; мы получим

$$\left. \begin{aligned} 2p + l_{n+1} - l_n &= \delta_1' \\ 2p + 2\Delta t \cdot z + l_{n+2} - l_{n-1} &= \delta_2' \\ 2p + 4\Delta t \cdot z + l_{n+3} - l_{n-2} &= \delta_3' \\ \dots & \\ 2p + 2\Delta t (n-1) z + l_{2n+1} - l_1 &= \delta_n' \end{aligned} \right\}, \quad (192)$$

где  $\Delta t$  — интервал времени между двумя смежными положениями пузырька, который можно принять равным единице. Решая уравнение (192) по способу наименьших квадратов, получим  $p$  и  $z$  и их веса, а затем и их средние ошибки, причем ошибка единицы веса равна  $\sqrt{\frac{[\delta' \delta']}{n-2}}$ ; кроме того, выведем

$$\mu'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[\delta' \delta']}{n-2}}.$$

Величина  $p$ , конечно, весьма характеризует качество уровня. В хороших уровнях  $p$  должно быть менее 0,1 полуделения. Сопоставление  $z$ , выведенного из уравнений (192), с  $z$ , выведенным из уравнений (190), также является интересным. Наконец, сопоставление  $\mu_{\mu}$ ,  $\mu'$  и  $\mu''$  должно дать нам понятие о влиянии неправильностей кривизны трубы уровня. Величину  $\mu''$  мы должны считать почти свободной от этих влияний. Точный уровень следует исследовать при различных температурах, т. е. несколькими приемами, причем в каждом приеме обеспечивается очень малый ход температуры, но в разных приемах температура различна. Сделав выводы о цене деления  $\tau$  указанным методом из каждого приема, далее пишем уравнение:

$$\tau_k = \tau_0 + A(T_k - T_0) + B(L_k - L_0), \quad (193)$$

в которых:  $T_k$  — средняя температура приема с номером  $k$ ;  $L_k$  — длина пузырька в этом приеме;  $T_0$  — некоторая заданная температура, например,  $+15^\circ\text{C}$  или  $0^\circ$ ;  $L_0$  обычно принимают равным половине делений, нанесенных на трубке уровня;  $\tau_0$  — цена деления при  $T = T_0$  и  $L = L_0$ ;  $A$  и  $B$  — коэффициенты, подлежащие определению вместе с  $\tau_0$  по способу наименьших квадратов из системы уравнений (193). Уравнение (193) позволяет получить цену деления уровня, соответствующую данною температуре.

## § 46. Верниер

В инструментах, употребляемых для измерения углов на пунктах тригонометрической сети, горизонтальные круги отсчитываются в настое время преимущественно микроскоп-микрометрами. Но отсчитыван-

вертикальных кругов передко в этих инструментах выполняется посредством десятисекундных верньеров; точно так же встречаются теодолиты и с горизонтальными кругами, отсчитываемыми десятисекундными верньерами: такие теодолиты вполне пригодны для измерений в сетях III класса, а отчасти и в сетях II класса. Предполагая известным устройство верньера и пользование им, остановимся сперва на задаче определения действительной точности  $t$  верньера. Допустим, что при построении верньера была разделена на  $n+1$  частей дуга лимба, заключающая в себе  $n-\rho$  его делений, причем  $n$  — число целое, а  $\rho$  — малая дробь. Обозначая через  $\mu$  цену деления на лимбе, имеем для вычисления точности  $t$  верньера такое уравнение:

$$t = \mu - \frac{n-\rho}{n+1} \mu = \frac{\rho}{n+1} [n+1 - (n-\rho)] = \frac{\rho}{n+1} (1+\rho),$$

то-есть

$$t = t_0 + t_0 \rho. \quad (194)$$

В уравнении (194) через  $t_0$  обозначена задуманная механиком точность верньера. Для определения  $\rho$  совместим нулевой штрих верньера с некоторым штрихом лимба и заметим затем на левом конце верньера номер его штриха, совпадающего с некоторым штрихом лимба; назовем этот номер через  $n+1-k$ . При малом  $\rho$  номер совпадающего штриха лимба можно с высокой степенью приближения считать равным  $n-k$ \*. Очевидно, имеем теперь такую пропорцию

$$\frac{n-\rho}{n-k} = \frac{n+1}{n+1-k},$$

откуда

$$\rho = \frac{k}{n+1-k}. \quad (195)$$

Когда  $\rho$  надежно определено, то отсчет  $N$  по верньеру будет вычисляться так

$$N = r \cdot t = r \cdot t_0 + r \cdot t_0 \rho = N_0 \rho. \quad (196)$$

причем под  $r$  понимается номер совпадающего (на верньере) штриха, а под  $N_0$  — отсчет, который был бы записан, если бы точность верньера приравнять к точности, задуманной механиком. Поправку  $N_0 \rho$  всего лучше брать из таблицы, составленной по аргументу отсчета  $N_0$ .

Пример. В универсальном инструменте Керна нуль верньера последовательно совмещался с штрихами лимба  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, \dots, 315^\circ$ , и при каждом таком совмещении производился отсчет на левом конце верньера; результат этого исследования показан в табл. 18.

Если диаметр лимба около  $16-18\text{ см}$ , то расстояние между штрихом лимба и штрихом верньера, отстоящими друг от друга на точность  $t$  верньера, усматривается наблюдателем посредством простой лупы, увеличивающей в 6—8 раз, под углом вообще немного меньшим  $30''$ , при  $t=10''$ . Две точки, расстояние между которыми усматривается под таким малым углом зрения, будут казаться глазу почти слившимися, но

\*  $k$  может быть и дробным числом, так как хорошо построенный верньер позволяет оценивать несовпадения до четвертой доли точности верньера.

Таблица 18

| Лимб       | Отсчет по верньеру | <i>k</i> | <i>N</i> <sub>0</sub> | <i>N</i> <sub>0</sub> $\pm$ |
|------------|--------------------|----------|-----------------------|-----------------------------|
| 0°         | 9'50"              | + 1,0    | 1'                    | + 0",6                      |
| 45         | 9 55               | + 0,5    | 3                     | + 1,9                       |
| 90         | 10 00              | + 0      | 5                     | + 3,2                       |
| 135        | 9 50               | + 1,0    | 7                     | + 4,5                       |
| 180        | 9 55               | + 0,5    | 9                     | + 5,7                       |
| 225        | 9 55               | + 0,5    |                       |                             |
| 270        | 9 55               | + 0,5    |                       |                             |
| 315        | 9 50               | + 1,0    |                       |                             |
| $\Sigma k$ |                    | + 5,0    |                       |                             |
| $k$        |                    | + 0,63   |                       |                             |

при рассматривании двух длинных, параллельных друг другу и приходящихся один над другим штрихов, притом весьма тонко и тщательно нарезанных на светлом фоне, мы имеем несравненно более благоприятные условия, чем при рассматривании двух точек; если расстояние между штрихом лимба и верньера усматривается под углом в 30", то несовпадение таких двух штрихов для глаза несомненно. Таким образом, при диаметре лимба около 17 см, при тщательно нанесенных на верньере и на лимбе штрихах, при достаточно хорошем прилегании нижнего края и нижней грани верньера к плоскости лимба — несовпадение штриха верньера с штрихом лимба на десять секунд видно достаточно отчетливо, и при соблюдении указанных условий предельную ошибку отсчета по десятисекундному верньеру следует считать не превышающей пяти секунд. Средняя ошибка отсчета при тех же размерах лимба около  $\pm 2",5$ .

### § 47. Шкаловый микроскоп

Оправа *aa* ахроматического объектива микроскопа «со шкалой» ввинчивается (черт. 176) в трубку *bb*, которая может в небольших пределах иметь продольное движение внутри внешней трубы *cc* — насколько это допускают продольные вырезы, которые сделаны с двух сторон в трубке *cc* и в которых перемещаются винты *f*, закрепляющие трубку *bb*. К труbe *cc* привинчиваются сверху камера *kk*, несущая в себе двойные салазки *ss*, и четыре винта *vv*: нижние салазки перемещаются двумя из этих винтов, не показанными на чертеже, по направлению перпендикулярной к плоскости чертежа горизонтальной линии и ведут с собой верхние салазки (по ослаблении пары верхних винтов *vv*); верхние же два винта перемещают лишь верхние салазки, которые несут на себе стеклянную, тщательношлифованную пластинку *p* с нанесенной на ней весьма мелкой шкалой. Верхняя трубка *tt*, ввинчивающаяся в камеру *kk*, несет в сбс окуляр Рамсдепа. Трубка *cc* описанного микроскопа со шкалой помещается в кольцевых обоямах *OO*, составляющих одно целое с рычагами *RR*, которые являются отростками подставок трубы теодолита; в обоямах *OO* имеются разрезы, стягиваемые винтами; по ослаблении этих винтов микроскоп может свободно перемещаться в обоямах.

При наблюдениях микроскопом расстояние  $d$  его объектива от лимба менее  $2F$  и более  $F$ , понимая под  $F$  фокусное расстояние объектива. Увеличение  $V$  объектива микроскопа, как известно из оптики, равно

$$V = \frac{F}{d-F}. \quad (197)$$

Называя же через  $f$  фокусное расстояние окуляра и через  $\omega$  — расстояние ясного зрения, для увеличения  $W$  микроскопа можно написать уравнение:

$$W = \frac{F}{d-F} \cdot \frac{\omega}{f}. \quad (198)$$

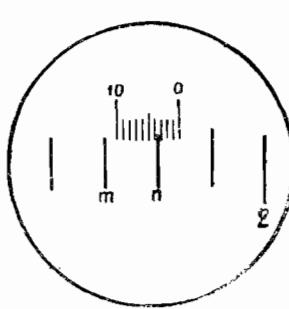
Пусть линейное расстояние  $mn$  (черт. 177) между двумя смежными штрихами на лимбе равно  $l$ , а линейная величина десяти делений шкалы, нанесенной на пластинке  $p$ , пусть равна  $s$ .

Если мы желаем получить изображение штрихов лимба в плоскости шкалы  $p$  и вместе с тем требуем, чтобы линейная величина изображения промежутка  $l$  между двумя смежными штрихами лимба была в точности равна десяти делениям шкалы, то тогда для определения  $d$  имеем уравнения:

$$\frac{s}{l} = \frac{F}{d-F}; \quad d - F = \frac{F \cdot l}{s}; \quad d = F + \frac{F \cdot l}{s}, \quad (199)$$

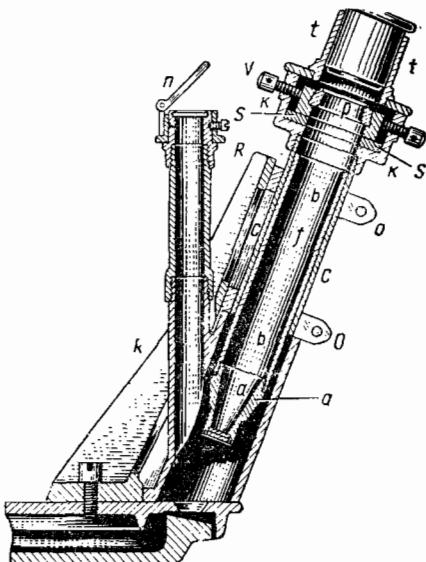
а для определения расстояния  $D$  пластиинки  $p$  от объектива имеем

$$D = \frac{d \cdot s}{l} = \frac{F \cdot d}{d-F}. \quad (200)$$



Черт. 177

Отсюда становится ясной сама идея микроскопа со шкалой. В самом деле, задаваясь расстоянием  $d$  объектива микроскопа от лимба, рассчитаем при помощи первого из уравнений (199) величину  $s$  десяти делений шкалы; отложим это расстояние  $s$  на пластиинке  $p$  и, разделив его на 10 частей, установим трубку  $bb$  так, чтобы расстояние объектива от шкалы сделалось равным  $D$ , определенному из уравнения (200); наконец, двигая весь микроскоп в обоймах  $OO$ , установим объектив его на том расстоянии  $d$  от лимба, которым задавались при расчетах  $s$  и  $d$ . Указанное гостроение шкалы вместе с надлежащей установкой микроскопа приводят, конечно, к возможности весьма просто измерять делениями шкалы любые части деления  $l$  лимба. Так как, вследствие достаточного увеличения  $W$  микроскопа, угол, под которым усматривается через окуляр микроскопа одно деление шкалы, достаточно велик, то при



Черт. 176

помощи шкалы микроскопа можно оценивать очень мелкие доли, например, сотые лимбового деления. Чем меньше разность  $d - F$ , тем более увеличение объектива микроскопа, тем на большее число частей можно разделить отрезок  $s$ , и тем более мелкие доли деления лимба будут оцениваться посредством шкалы микроскопа. Однако, вместе с возрастанием увеличения объектива чрезвычайно быстро убывает яркость изображения, и вместе с убыванием  $d - F$  быстро растут погрешности изображения; обычно в практике  $V$  — всегда не более четырех. Крайний правый штрих шкалы, удлиненный и подписанный нулем, является указателем или нуль-пунктом микроскопа со шкалой; подпись делений на шкале возрастает всегда справа налево. Как именно выполняются отсчеты посредством шкалы микроскопа, это ясно из черт. 177, на котором отсчет равен  $1^{\circ}43'4$  (деления на лимбе десятиминутные).

Надлежащая установка шкалового микроскопа выполняется следующим образом:

1) устанавливают окуляр так, чтобы штрихи шкалы представлялись резко очерченными;

2) перемещают микроскоп в обоймах  $OO$  до тех пор, пока деления лимба не сделаются ясно видимыми, и одновременно вращают микроскоп в обойме так, чтобы штрихи располагались параллельно штрихам лимба;

3) действуя верхней парой винтов  $v$ , достигают такого положения шкалы, при котором нижний ее край несколько заходит за верхние концы изображений лимбовых штрихов (см. черт. 177);

4) действуя нижней парой винтов  $v$ , достигают того, чтобы нульпункты обоих микроскопов теодолита отстояли друг от друга, по возможности, точно на  $180^\circ$ ;

5) перемещая весьма мало микроскоп в обоймах  $OO$ , добиваются полного исчезновения параллакса штрихов шкалы относительно штрихов лимба и, совместив движением наводящего винта алидады теодолита нульевой штрих шкалы с некоторым штрихом лимба, определяют отсчитыванием на левом краю шкалы, сколько делений ее соответствуют одному делению лимба. Если окажется, что одному делению лимба соответствует более десяти делений шкалы, то, освободив винт  $f$ , вдвигают несколько трубку  $bb$  в трубку  $cc$ , уменьшая расстояние  $D$ , а затем дают всему микроскопу движение в обоймах  $OO$  вниз на столько, чтобы штрихи лимба снова сделались ясно видимыми и исчез параллакс. Если одному делению лимба соответствует менее десяти делений шкалы, то нужно трубку  $bb$  выдвигать из трубки  $cc$  (увеличивая  $D$ ), а затем весь микроскоп передвигать в обоймах  $OO$  вверх.

Даже при тщательном выполнении установки, указанной только что в п. 5, десять или вообще  $n$  делений шкалы не оказываются точно соответствующими одному делению лимба. Допустим, что в результате измерений, исполненных на разных местах лимба, оказалось в среднем выводе, что одному делению лимба соответствует  $n - \varphi$  делений шкалы. Называя через  $\mu$  цену деления шкалы и через  $i$  — цену деления на лимбе, имеем

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{i}{n - \varphi} = \frac{i}{n \left[ 1 - \frac{\varphi}{n} \right]} = \frac{i}{n} \left[ 1 + \frac{\varphi}{n} \right], \\ \mu &= \frac{i}{n} + \frac{i}{n} \cdot \frac{\varphi}{n},\end{aligned}$$

причем, вследствие малости  $\frac{\rho}{n}$ , в предыдущей выкладке при вычислении  $\left[1 - \frac{\rho}{n}\right]^{-1}$  были отброшены члены порядка  $\left(\frac{\rho}{n}\right)^2$  и более высокого. Очевидно, что  $\frac{i}{n}$  есть цена деления шкалы, задуманная механиком; называя ее через  $\delta$ , имеем

$$\mu = \delta + \delta \cdot \frac{\rho}{n}.$$

Величина  $\rho$  называется *run* микроскопа. Очевидно, если по шкале был взят отсчет в  $k$  се делений, то угловой мере этот отсчет будет равен  $k\mu$  и вычисляться так

$$k\mu = k\delta + k\delta \cdot \frac{\rho}{n}.$$

Малую поправку  $k\delta \cdot \frac{\rho}{n}$  всего лучше брать из специальной таблицы, составленной по аргументу  $k\delta$ .

Пример. В теодолите Рейсса, принадлежащем МИИГАиК и снабженном микроскопами со шкалой,  $l=10'$ ,  $n=10$  и  $\delta=1'$ . Из исследований оказалось, что 10,2 деления шкалы соответствуют одному делению на лимбс. Следовательно,  $n-\rho=10,2$  или  $\rho=0,2$ . Если неисправленный отсчет равен  $301^{\circ}26',3$ , то исправленный отсчет будет:  $301^{\circ}26',3 - 6,3 \cdot \frac{0,2}{10}$ , или будет равен  $301^{\circ}26',17$ .

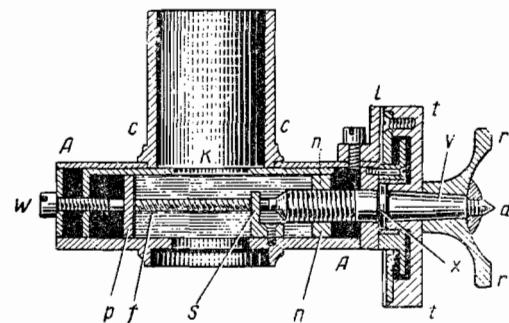
### § 48. Микроскоп-микрометр

В теодолитах, предназначаемых для измерения углов в триангуляциях I и II классов, горизонтальные лимбы отсчитываются посредством микроскоп-микрометров, позволяющих, при достаточных размерах лимба, производить отсчитывание со средней ошибкой, меньшей  $1''$ .

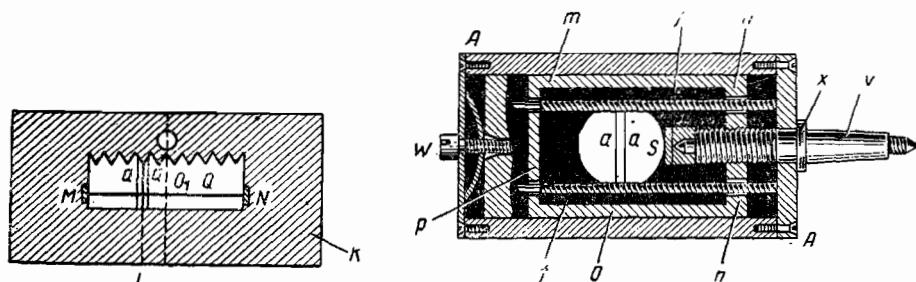
С алидадой теодолита микроскопы соединяются посредством рычагов *RR* (см. черт. 176), идущих от подставок трубы и имеющих кольцевые обоймы *OO*, в которые и входит основная трубка микроскопа (см. черт. 178 и 176). На трубку *cc* навинчивается сверху коробка микрометра, а снизу в нее входит трубочка *bb*, несущая объектив и илюминатор (черт. 178, 176 и 104).

Идея филиарного микрометра и его устройство уже были разобраны в § 32 в общих чертах; здесь надлежит остановиться более подробно на устройстве того микрометра, который употребляется в больших теодолитах в последнее время.

В двух боковых стенках прямоугольной коробки *ЛЛ* микрометра имеются пазы, в которых посредством тонко нарезанного винта *в* передвигается рама *tpor* с натянутой на нее парой весьма близких друг к другу



нитей  $aa$  (черт. 179). Винт  $v$  имеет матку в более толстой, чем все остальные, стенке  $pp$  рамы  $ttop$ ; конец этого винта упирается в боковую плоскость упора  $S$ , привинченного к нижней стенке коробки  $A$ . На выступающую из коробки микрометра часть стержня винта  $v$  насаживаются барабан  $t$ , рукоятка  $r$  и гайка  $d$ ; при завинчивании этой гайки рукоятка  $r$  прижимает барабан  $t$  микрометра к уширению  $x$  в стержне винта  $v$ , и в результате получается неизменное соединение барабана с винтом  $v$



Черт. 179

Через отверстия, сделанные в стенках  $n$  и  $p$ , проходят два стержня  $ff$ , правые концы которых прикреплены к стенке коробки  $A$ , каждый стержень  $f$  обвит пружиной, один конец которой упирается в стенку  $p$  рамы  $ttop$ , а другой — в стенку коробки  $A$ . При описанном устройстве винта  $v$ , очевидно, не может иметь поступательного движения, и при отсутствии погрешностей в нарезке этого винта, при отсутствии мертвого хода и при правильном устройстве контакта конца винта  $v$  с плоскостью упора  $S$  вращение винта  $v$  будет пропорционально поступательному движению нитей  $aa$ . Мертвый ход винта  $v$ , очевидно, в значительной мере парализуется действием пружин  $ff$ , благодаря чему нарезы винта  $v$  всегда прижаты к нарезкам матки\*. Сверху на раму  $ttop$  накладывается не вплотную, едва ее касаясь, двусторончатая пластинка  $K$ ; через створ ее, стоящий вертикально, проходит винт  $W$ ; в верхнем же ее створе (лежащем на рамке  $ttop$ ) имеется вырез  $Q$  с натянутой в нем нитью  $MN$  и с зубцами, соответствующими каждому одному обороту винта  $v$ ; средний зубец отмечен кружочком, высверленным в пластинке  $K$ . Вырез расположены симметрично относительно оси микроскопа; посредством винта  $W$  можно в небольших пределах перемещать пластинку  $K$  и этим изменять положение цульпункта микроскопа (см. § 32, пластинка  $K$  однозначно с гребенкой  $q$ ). При вращении винта  $v$  пластинка  $K$  остается неподвижной. Окружность барабана  $t$  подразделяется на 60 или на 120 частей; отсчет барабана выполняется по индексу  $i$ . Пусть  $C$  (черт. 180) есть центр лимба,  $O$  — центр объектива,  $O_1$  — нульпункт микрометра и  $O_2$  — проекция нульпункта на плоскость лимба (о цульпункте и его проекции на плоскость отсчитываемой шкалы см. в § 32). Пусть далее  $A\alpha$  и  $B\beta$  суть те смежные штрихи лимба, между которыми находится проекция нульпункта  $O_2$ , причем точки  $A$  и  $B$  пусть лежат в плоскости, перпендикулярной к радиусу  $O_2C$ . Назовем через  $a$  и  $b$  изображения точек  $A$  и  $B$ , находящиеся в плоскости микрометра и приходящиеся на

\* Однако, очевидно, что работа пружин  $ff$  правила при ввинчивании винта и несовершена при его вывинчивании.

нити  $MN$ . Отсчет лимба при помощи микроскоп-микрометра состоит из прочтения номера  $S$  младшего штриха  $Ax$  и из измерения угла  $O_2CA$ . Так как хорды  $O_2A$  и  $BA$  пропорциональны, с одной стороны, углам  $O_2CA$  и  $BCA$ , а с другой стороны, — отрезкам  $O_1a$  и  $ab$ , то, измерив микрометром эти последние отрезки, мы получаем возможность вычислить угол  $O_2CA$ , который назовем через  $x$ , из такой пропорции:

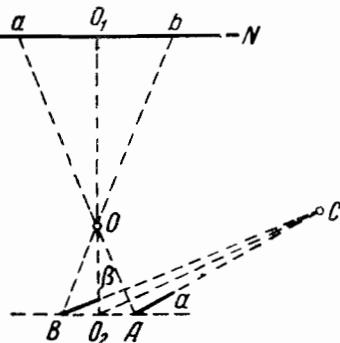
$$x = \frac{i}{n} a, \quad (201)$$

понимая под  $i$  цену деления лимба (угол  $BCA$ ), а под  $a$  и  $n$  — соответственно длины отрезков  $aO_1$  и  $ab$ , выраженные в делениях микрометра. Обычно при движении нитей микрометра от нульпункта к изображению  $a$  младшего штриха мимо индекса  $i$  проходят деления барабана  $t$  с постепенно возрастающими подицесиями. Следовательно,  $a$  равно отсчету, взятому с зубчатки выреза  $Q$  и с барабана  $i$  в момент паведения штилей микрометра на младший штрих  $Aa$ . Паведение нитей на некоторый штрих лимба  $L$  (см. левую половину чертежа 179) делается с весьма малой линейной ошибкой, потому что здесь приходится оценивать на расстоянии пантуичного зрения неравенство ширин двух узких светлых полосок, ограниченных каждой пятью  $a$  и ближайшим к ней краем изображения штриха  $L$ .

Средняя ошибка отсчета по лимбу, обусловленная ошибкой паведения нитей микрометра на штрихи лимба, обычно при радиусе лимба в десять см, оказывается около  $-0''5 - +0''6$ . Что касается ошибки в отсчете, обусловленной неправильностью работы винта  $v$ , то при надлежащем порядке пользования микрометром и при правильном его устройстве и сборке о них обычно не приходится говорить.

Механик устраивает микроскоп-микрометр, задаваясь всегда наперед тем числом  $n_0$  делений, на которое барабан должен будет вращаться при перегоне нитей со штриха  $A$  на смежный штрих  $B$ . Это число  $n_0$  соответствует всегда целому числу полуоборотов винта и выбирается по тем или иным соображениям, ведущим к удобству вывода направлений из отсчетов по микроскоп-микрометрам. Так как шаг винта  $v$  выбирается заранее, то выбором  $n_0$  наперед, очевидно, устанавливается размер отрезка  $ab$  (черт. 180). Другими словами, задаваясь наперед числом  $n_0$ , мы тем самым определяем увеличение  $V$  объектива микроскопа, а, следовательно, устанавливаем наперед расстояние  $d_0$  объектива микроскопа от лимба и расстояние  $D_0$  между объективом и микрометром. Называя через  $F$  фокусное расстояние объектива, через  $q$  — поступательное движение штилей микрометра при изменении отсчета по барабану на одно деление и через  $p$  — расстояние  $AB$  (черт. 180), имеем

$$V = \frac{n_0 q}{p} = \frac{F}{d_0 - F}; \quad \frac{1}{d_0} + \frac{1}{D_0} = \frac{1}{F}. \quad (202)$$



Черт. 180

Из этих уравнений по известным  $F$  и  $n_0q$  должны быть рассчитаны  $d_0$  и  $D_0$ , а затем должна быть выполнена механиком и надлежащая установка микроскопа. Такая установка, конечно, с течением времени нарушится. Если вместо  $D_0$  и  $d_0$  мы имеем в данный момент  $D$  и  $d$ , то и отрезок  $ab$  будет измеряться не  $n_0$ , а  $n$  делениями барабана, и различие  $n$  от  $n_0$  укажет на необходимость исправления установки микроскопа.

Выведем теперь правила для перехода от неправильной установки микроскопа, характеризуемой числом  $n$ , к правильной его установке, которой соответствует число  $n_0$ . Пусть

$$\Delta d = d - d_0; \quad \Delta D = D - D_0; \quad \Delta n = n - n_0.$$

Имеем

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}; \quad \frac{nq}{p} = \frac{D}{d}, \quad (203)$$

$$d = F + F \cdot \frac{p}{nq}; \quad D = F + F \cdot \frac{nq}{p}. \quad (204)$$

Пренебрегая  $\Delta d^2$ ,  $\Delta n^2$ , получаем после дифференцирования уравнения (204)

$$\Delta d = -F \frac{p}{qn_0^2} \Delta n = F \frac{p}{qn_0^2} (n_0 - n), \quad (205)$$

$$\Delta D = F \frac{q}{p} \Delta n = F \frac{q}{p} (n - n_0). \quad (206)$$

Из (203) напишем

$$\frac{q}{p} = \frac{D_0}{d_0 n}; \quad \frac{p}{qn_0} = \frac{d_0}{D_0}; \quad F = \frac{D_0 d_0}{d_0 + D_0}$$

и, делая на основании последних равенств замены в (205) и (206), найдем

$$\Delta d = \frac{d_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_0 - n}{n_0}; \quad \Delta D = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n - n_0}{n_0}.$$

Обозначим через  $M$  расстояние от лимба до микрометра, напишем еще:

$$M = D + d; \quad \Delta M = \Delta D + \Delta d; \quad \Delta M = \frac{n - n_0}{n_0} (D_0 - d_0). \quad (207)$$

Из формул (205), (206) и (207) следует что 1) если увеличение микроскопа слишком велико, то:

$$n > n_0; \quad d < d_0; \quad D > D_0; \quad M > M_0;$$

2) если увеличение микроскопа слишком мало, то:

$$n < n_0; \quad d > d_0; \quad D < D_0; \quad M < M_0.$$

Следовательно, если увеличение микроскопа слишком велико, то нужно вдвинуть на  $\frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n - n_0}{n_0}$  трубочку  $bb$ , несущую объектив, в трубку  $cc$  и после этого перемещать весь микроскоп в обоймах вниз, приближая его к лимбу на  $\frac{n - n_0}{n_0} (D_0 - d_0)$ . Если же увеличение микроскопа слиш-

ком мало, то нужно сперва выдвинуть трубку  $bb$  из трубки  $cc$  (увеличивая тем самым  $D$ ), а затем перемещать вверх весь микроскоп в обоймах. Перемещение  $\Delta D$  объектива относительно микрометра, очевидно, более перемещения  $\Delta M$  микроскопа в обоймах. Величины этих перемещений  $\Delta D$  и  $\Delta M$  рассчитываются в практике не по формулам (206) и (207), а следующим образом. Пусть при некоторой установке микроскопа мы получим для  $n$  значение  $n_1$ , меньшее  $n_0$ . Отметив на объективной трубочке  $b$  (черт. 181) посредством тонкой парезки ножом конец  $ab$  основной трубы  $cc$  микроскопа, выдвинем несколько трубочку  $b$  из трубы  $cc$  так, что ранее сделанный штрих займет теперь положение  $a_1b_1$ ; затем, двигая микроскоп вверх в обоймах, снова достигают того, что изображения штрихов лимба придутся в плоскости микрометра, и при этой второй установке микроскопа аккуратно определяют соответствующую ей величину  $n_2$ . Кроме того, тщательно измеряют расстояние  $ab$  от  $a_1b_1$ , которое назовем через  $S$ . Для первой установки микроскопа имеем

$$D_1 - D_0 = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_0} = A \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_0};$$

для второй установки микроскопа имеем:

$$D_2 - D_0 = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_0} = A \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_0}.$$

Отсюда

$$D_2 - D_1 = S = A \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_0},$$

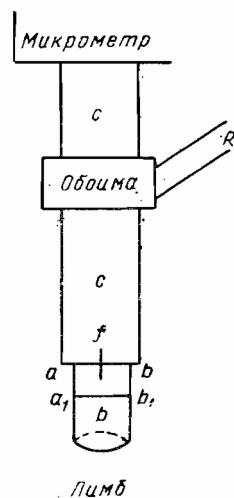
$$D_2 - D_0 = S \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_2 - n_1}. \quad (208)$$

Рассчитав по формуле (208) величину  $D_2 - D_0$ , нужно будет на эту величину, если она окажется положительной, выдвинуть объективную трубочку в трубке  $cc$  так, чтобы расстояние от штриха  $a_1b_1$  до  $ab$  сделалось равным  $S - S \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_1}$ . Если  $D_2 - D_0$  окажется отрицательным, то придется выдвигать объективную трубочку, переходя от расстояния  $S$  между  $a_1b_1$  и  $ab$  к расстоянию

$$S + S \cdot \frac{n_0 - n_2}{n_2 - n_1}.$$

После исполненной, согласно приведенным расчетам, установки объективной трубочки микроскопа внутри трубы  $cc$ , останется лишь передвинуть микроскоп в обоймах так, чтобы изображения штрихов лимба пришлись в плоскости микрометра.

Нужно оговориться, что приведенный способ установки микроскоп-микрометра не применяется опытными геодезистами—они предпочитают просто идти последовательными приближениями, помня лишь, что при  $n > n_0$  нужно вдвигать объективную трубочку, а при  $n < n_0$  нужно вы-



Черт. 181

двигать ее, и не делают ни расчетов пропорции  $S \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_2 - n_1}$ , ни отметок ножом на объективной трубочке  $bb$ ; с двух-трех приближений обычно установка заканчивается.

Как бы тщательно ни была проведена установка микроскопа, все-таки  $n$ ,  $D$  и  $d$  окажутся несколько отличающимися от  $n_0$ ,  $D_0$  и  $d_0$ . Но эти различия будут весьма малы, и поэтому за несовпадение  $n$  с  $n_0$  можно будет достаточно просто вводить поправки в отсчеты по микроскоп-микрометру.

#### § 49. Формулы отсчетов при помощи микроскоп-микрометров

Величина  $\frac{i}{n}$ , стоящая множителем в уравнении (201) § 48, есть угловая цена  $\mu$  одного деления микрометра. Если номер младшего штриха  $A$  есть  $S$ , а отсчет по микрометру при наведении нитей на младший штрих равен  $a$ , то отсчет  $L$  по лимбу вычисляется так

$$L = S + a\mu.$$

При получении  $L$  не довольствуются промером расстояния от нульпункта до младшего штриха  $A$ , но измеряют еще микрометром и расстояние от нульпункта до старшего штриха  $B$ . При вычислении  $L$  отсчетами микрометра, полученными при наведении его нитей на младший и на старший штрихи, можно воспользоваться различно, в зависимости от того, будем ли мы считать  $n$  постоянным для данного теодолита или нет. Это различие использования двух отсчетов по микрометру, из которых каждый достаточен для вывода искомого  $L$ , и вызывает различия формул, по которым может быть вычислено  $L$ . Другой причиной различия формул для вычисления  $L$  является различие в величине вращения винта микрометра при измерении им промежутка  $i$  на лимбе -- в одних микрометрах  $i$  измеряется вращением винта на один оборот, в других -- на целое число оборотов, в третьих -- на нечетное целое число полуоборотов.

1. Рассмотрим сперва тот случай, когда по мысли механика промежуток  $i$  должен был бы измеряться одним оборотом винта. Пусть на ободке барабана  $t$  нанесено  $p$  делений; очевидно, что в рассматриваемом случае  $n_0 = p$ . Действительное число  $n$  делений барабана, измеряющее промежуток  $i$ , будет, конечно, несколько отличаться от  $n_0$ . Разность  $r$ , равная  $n_0 - n$ , называется гирь микроскопа. Так как при перемещении нитей от нульпункта к младшему штриху мимо индекса микрометра проходят деления барабана с постепенно возрастающими подписями, то в рассматриваемом случае отсчет  $a$ , непосредственно взятый с барабана при наведении нитей на младший штрих, и выражит в делениях барабана расстояние  $aO_1$  (черт. 180) изображения этого штриха от нульпункта микроскопа. С другой стороны, при перемещении нитей от нульпункта к изображению старшего штриха мимо индекса будут проходить постепенно убывающие, начиная с  $n_0$ , деления барабана, и если в момент наведения нитей на старший штрих по барабану был сделан отсчет  $b$ , то  $p - b = n_0 - b$  выразит расстояние  $O_1b$  от нульпункта до изображения старшего штриха. Сумма  $a + (p - b)$  измеряет, следовательно, промежуток  $i$  на лимбе, т. е.

$$a + (p - b) = n = n_0 - r = p - r$$

или

$$r = b - a; \quad n = n_0 - r = p - r.$$

Из последних уравнений вытекает, что при правильной установке микроскопа  $b = a$  и что, если  $b < a$ ,  $r < 0$ , то  $n > n_0$ . Угловая цена деления барабана определится, очевидно, так

$$\mu = \frac{i}{p - r}.$$

Предположим теперь, что  $n$  постоянна; тогда и  $r$  будет постоянно. Допустим, что из особого исследования мы определили это постоянное  $r$ . Если каждый раз при определении отсчета  $L$  мы будем наводить нити микрометра и на младший и на старший штрихи лимба, то для  $L$  из такого материала получаются два независимых друг от друга определения. Именно, имеем по наведению на младший штрих

$$L_a = S + a \cdot \frac{i}{p - r};$$

по наведению на старший штрих

$$L_b = S + i - (p - b) \cdot \frac{i}{p - r}.$$

Окончательный отсчет образуют как арифметическую середину из  $L_a$  и  $L_b$ , т. е.

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{i}{p - r} - \frac{p - b}{2} \cdot \frac{i}{p - r},$$

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b - p}{2(p - r)} \cdot i = S + \frac{i}{2} + \frac{i}{2p} \cdot \frac{(a + b - p)}{\left[1 - \frac{r}{p}\right]}.$$

Вследствие малости  $\frac{r}{p}$  пренебрегаем  $\left(\frac{r}{p}\right)^2$  и пишем

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{i}{2p} [a + b - p] + \frac{ir}{2p^2} [a + b - p],$$

$$L = S + \frac{i}{p} \cdot \frac{a + b}{2} + \frac{r}{2p} \cdot \frac{i}{p} (a + b - p).$$

Величина  $\frac{i}{p}$  равна задуманной механиком цене  $\mu_0$  деления барабана, поэтому напишем

$$L = S + \frac{a + b}{2} \cdot \mu_0 + \frac{r}{2p} \cdot \mu_0 (a + b - p). \quad (\text{A})$$

Формула (A) есть окончательная при постоянном  $n$  и при измерении промежутка  $i$  лимба одним оборотом винта  $v$ .

Если предположить теперь, что при разных установках алидады теодолита  $n$  различно, то в этом случае наведение на старший штрих служит, очевидно, не для получения второго независимого вывода  $L$ , а для

определения  $n$ , соответствующего данной установке алидады и для вывода  $r$ , равного  $b - a$ . Имеем

$$L = S + a \cdot \frac{i}{p - r}; \quad r = b - a.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= S + a \cdot \frac{i}{p - (b - a)} = S + a \cdot \frac{i}{p} \left(1 - \frac{b - a}{n}\right)^{-1}, \\ L &= S + a\mu_0 + \frac{b - a}{p} \cdot a\mu_0. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

2. Переходя к случаю, когда винт микрометра делает  $m$  полных оборотов при переходе нитей с младшего штриха на старший, а на ободке барабана нанесено  $p$  делений, прежде всего заметим, что в этом случае  $a$  и  $b$  не будут непосредственно взятыми с барабана числами, а будет каждое вычисляться как сумма непосредственного отсчета по барабану с произведением  $p$  на некоторое число целых оборотов, отделяющих нульpunkt от младшего штриха. Помня, что при движении нитей к старшему штриху отсчет по барабану убывает, мы должны в данном случае отсчет в нульpunkt считать за нуль, если нити наводятся на младший штрих, и полагать его равным  $mp$ , если нити наводятся на старший штрих. Число  $n$  в данном случае будет вычисляться так

$$n = a + (mp - b) = n_0 - r = mp - r.$$

Отсюда

$$r = b - a.$$

Как и ранее, заключаем, что при правильной установке микроскопа  $b = a$ , и что при  $r < 0$  имеем  $n > n_0$ . Кроме того, так как  $r$  — малая величина, то  $b$  и  $a$  будут заключать в себе одинаковое число полных оборотов винта. Вычисляя теперь отсчет  $L_a$  при наведении нитей на младший штрих и  $L_b$  — при наведении на старший штрих, напишем

$$L_a = S + a \cdot \frac{i}{pm - r}; \quad L_b = S + i - (pm - b) \cdot \frac{i}{pm - r}.$$

Очевидно, что все ранее выведенные формулы можно сразу применить к рассматриваемому случаю, если в них заменить везде  $p$  через  $pm$ . Поэтому, полагая  $n$  и  $r$  постоянными, имеем

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{r}{2pm} \cdot \mu_0 (a + b - pm), \quad (\text{C})$$

$$\mu_0 = \frac{i}{pm}.$$

Считая же  $n$  и  $r$  переменными, напишем

$$L = S + a\mu_0 + \frac{b-a}{pm} \cdot a\mu_0. \quad (\text{D})$$

3. Если на ободке барабана нанесено  $p$  делений, а винт вращается на нечетное число полуоборотов при перемещении нитей микрометра с младшего на старший штрих, то  $n_0 = p \left(m - \frac{1}{2}\right)$ , понимая под  $m$  целое

число. В этом случае отсчеты  $a$  и  $b$ , конечно, будут не равны непосредственно прочтеным числам на барабане. Отсчет  $a$  образуется как сумма непосредственно прочтенного на барабане числа с произведением  $p$  на целое число оборотов, содержащихся в промежутке от нульпункта до младшего штриха. Что же касается отсчета  $b$  на старший штрих, то особенность данного случая заключается в том, что при движении нитей к старшему штриху мы не можем отсчет в нульпункте полагать равным  $n_0 = p \left( m - \frac{1}{2} \right)$ , а должны будем считать его равным или  $pm$  или  $p(m-1)$ , так как в момент совмещения индекса с нулем барабана имеем начало целых оборотов винта.

Если при наведении на младший штрих на барабане сделан отсчет  $a_1$ , меньший  $\frac{p}{2}$ , то тогда при наведении нитей на старший штрих по барабану будет прочтено число, большее  $\frac{p}{2}$  и отличающееся от первого на  $\frac{p}{2}$ ; этому случаю, как нетрудно сообразить, соответствует принятие в нульпункте при движении нитей к старшему штриху числа  $pm$ . В самом деле, называя расстояние от нульпункта до старшего штриха через  $x$ , а число целых оборотов в отсчете  $a$  — через  $q$  и полагая гип  $r$  равным нулю, имеем

$$pq + a_1 + x = p \left( m - \frac{1}{2} \right).$$

Отсчет  $b$  следует положить равным  $pq + a_1 + \frac{p}{2}$ ; вычитая его из неизвестного значения  $y$  того числа, которое надо считать в нульпункте при движении нитей к штриху, имеем

$$x = y - \left( pq + a_1 + \frac{p}{2} \right).$$

Отсюда

$$y = pm.$$

Если при наведении на младший штрих на барабане прочтено число  $a_1$ , большее  $\frac{p}{2}$ , то тогда при наведении нитей на старший будет прочтено  $a_1 - \frac{p}{2}$ ; для этого случая  $y = p(m-1)$ . Эти оба случая приводятся к одному, и поэтому рассмотрим вывод формулы для  $a_1 < \frac{p}{2}$ . Имеем

$$a + (pm - b) = n = n_0 - r = p \left( m - \frac{1}{2} \right) - r,$$

$$r = b - \frac{p}{2} - a.$$

Обозначая

$$b' = b - \frac{p}{2},$$

получим

$$r = b' - a; \quad n = p \left( m - \frac{1}{2} \right) - r.$$

Расстояние от нульпункта до старшего штриха равно

$$pm - b = p \left( m - \frac{1}{2} \right) - b'.$$

Считая  $n$  постоянным, а  $r$  — определенным из специального исследования, получаем следующие, независимые друг от друга выводы отсчета  $L$  по лимбу

$$L_a = S + a \cdot \frac{i}{p \left( m - \frac{1}{2} \right) - r},$$

$$L_b = S + i - \left[ p \left( m - \frac{1}{2} \right) - b' \right] \cdot \frac{i}{p \left( m - \frac{1}{2} \right) - r}.$$

Отсюда

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b' - p \left( m - \frac{1}{2} \right)}{p \left( m - \frac{1}{2} \right) - r} \cdot \frac{i}{2},$$

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b' - p \left( m - \frac{1}{2} \right)}{p \left( m - \frac{1}{2} \right)} \left[ 1 + \frac{r}{p \left( m - \frac{1}{2} \right)} \right] \frac{i}{2},$$

$$L = S + \frac{a + b'}{2} \mu_0 + \frac{r}{2p \left( m - \frac{1}{2} \right)} \cdot \mu_0 \left[ a + b' - p \left( m - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{E})$$

Считая же  $n$  переменным и заменяя  $r$  в формуле для  $L_a$  через  $b' - a$ , имеем

$$L = S + \frac{a \cdot i}{p \left( m - \frac{1}{2} \right) - (b' - a)} = S + a \mu_0 \left[ 1 + \frac{b' - a}{r \left( m - \frac{1}{2} \right)} \right],$$

$$L = S + a \mu_0 + \frac{b' - a}{p \left( m - \frac{1}{2} \right)} \cdot a \mu_0. \quad (\text{F})$$

Формулы (B), (D) и (F), очевидно, сводятся к одной, если принять в расчет, что  $p$  в первом случае,  $pm$  во втором и  $p \left( m - \frac{1}{2} \right)$  в третьем представляют собой одну и ту же величину  $n_0$ ; для всех случаев при переменном  $n$  имеем одну формулу:

$$L = S + a \mu_0 + \frac{b' - a}{n_0} \cdot a \mu_0, \quad (\text{G})$$

помимо лишь, что в третьем случае вместо  $b$  нужно ставить  $b \mp \frac{p}{2}$ . Если прибавить и вычесть в правой части последней формулы по  $\frac{b}{2} \mu_0$ , то она преобразуется так

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{a}{2} \mu_0 - \frac{b}{2} \mu_0 + \frac{b-a}{2 n_0} a \mu_0,$$

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{b-a}{2 n_0} \mu_0 (2a - n_0),$$

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{b-a}{2 n_0} \mu_0 [a + b - n_0 + (a - b)].$$

Пренебрегая же в последнем уравнении членом  $\frac{(b-a)(a-b)}{2 n_0} \mu_0$  как малой величиной второго порядка, напишем окончательно

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{b-a}{2 n_0} \mu_0 (a + b - n_0). \quad (\text{H})$$

Формула (H), как и (G), при переменном  $n$  является общей для всех случаев, причем в ней в третьем случае  $b$  надо заменять через  $b \mp \frac{p}{2}$ .

Формулы (A), (C) и (E) также, очевидно, приводятся к одной, если принять в расчет, что  $p$  — в первом случае,  $pm$  — во втором и  $p\left(m - \frac{1}{2}\right)$  — в третьем представляют собой одну и ту же величину  $n_0$ .

Для всех этих случаев при постоянном  $n$  имеем формулу

$$L = S + \frac{a+b}{2} \mu_0 + \frac{r}{2 n_0} \mu_0 (a + b - n_0), \quad (\text{K})$$

в которой в третьем случае  $b$  заменяется через  $b'$ . В формуле (H) разность  $b - a$  должна вычисляться, конечно, с теми  $a$  и  $b$ , которые входят во второй член этой формулы и которые были отсчитаны при данной установке алидады. В этом и заключается, собственно, отличие (H) от (K), в которой  $b - a$  заменяется через постоянное  $r$ , определяемое независимо от  $a$  и  $b$ , входящих в (K).

Казалось бы, что именно формулу (H) надлежит применять в геодезических инструментах. В самом деле, вследствие эксцентризитета алидады и ее колебаний, величина  $n$  в микроскопе теодолита несколько изменяется при разных установках алидады: эксцентризитет алидады обуславливает изменения в расстояниях от нульпункта микроскопа до центра лимба, а это ведет, вследствие радиального направления штрихов лимба, к изменениям величины отрезка  $AB$  (черт. 180); колебания же алидады приводят к изменениям расстояния от объектива микроскопа до лимба. Но эти причины, во-первых, совершенно не влияют на среднее из гип двух противоположных микроскопов, вследствие чего влияние их в значительной мере исключается в среднем выводе из отсчетов по двум микроскопам, за исключением случая, когда номера младших штрихов для двух микроскопов различаются не точно на  $180^\circ$ , а на  $180^\circ \pm i$ ; во-вторых, эти перемены гип, обусловливаемые выше-

упомянутыми причинами, в исправном и хорошо выверенном инструменте никогда не будут более  $0'',1$ .

Остается, впрочем, еще третья причина изменения гип — это значительные перемены температуры воздуха в течение выполнения геодезических работ даже на одном тригонометрическом пункте; температурные влияния могут несколько изменить первоначальную установку микроскопа и, кроме того, вызвать перемещение в работе микрометра и ходе его винта. Однако, судя по результатам действительных работ, эти перемены гип выражаются величинами  $0'',1$  —  $0'',3$ . В точных работах определение гип делают на каждом тригонометрическом пункте, вследствие чего, конечно, ошибка гип сводится для наблюдений на этом пункте к минимуму.

С другой стороны, точность наведения нитей микрометра на штрихи лимба в теодолитах не настолько высока, чтобы только из отсчетов  $a$  и  $b$ , полученных при данной установке алидады, можно было достаточно надежно определить значение гип, соответствующее именно этой установке; колебания  $r$  значительно меньше ошибки отдельного определения  $b - a$ . По этим соображениям в геодезической практике обычно пользуются формулой (К), определяя  $r$  из специального исследования, предшествующего и последующему работе на ряде пунктов тригонометрической сети. Иногда от формулы (К) переходят к формуле для вычисления направления, т. е. среднего из отсчетов по двум противоположным микроскопам. Называя через  $L_1, r_1, a_1, b_1$  величины, относящиеся к первому микроскопу, а через  $L_2, r_2, a_2, b_2$  — величины, относящиеся ко второму микроскопу, напишем:

$$L_1 = S + \frac{a_1 + b_1}{2} \mu_0 + \frac{r_1}{2 n_0} \mu_0 (a_1 + b_1 - n_0),$$

$$L_2 = S + \frac{a_2 + b_2}{2} \mu_0 + \frac{r_2}{2 n_0} \mu_0 (a_2 + b_2 - n_0).$$

Называя через  $M$  числовое значение направления и обозначая:

$$\frac{a_1 + b_1}{2} \mu_0 = z_1; \quad \frac{a_2 + b_2}{2} \mu_0 = z_2; \quad \frac{r_1 + r_2}{2} = r_m.$$

$$r_1 = r_m - \varepsilon; \quad r_2 = r_m + \varepsilon,$$

будем иметь:

$$M = S + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{r_m - \varepsilon}{4 n_0} (2 z_1 - \mu_0 n_0) + \frac{r_m + \varepsilon}{4 n_0} (2 z_2 - \mu_0 n_0),$$

$$M = S + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{r_m}{2 n_0} (z_1 + z_2) + \frac{\varepsilon}{2 n_0} (z_2 - z_1) - \frac{\mu_0 r_m}{2}. \quad (L)$$

Так как  $r_m$  — постоянно, то  $\frac{\mu_0 r_m}{2}$  будет исчезать при выводе из направлений углов; поэтому этот член можно опустить в правой части уравнения для  $M$ . окончательно напишем так:

$$M = S + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{r_m}{n_0} \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2 n_0} (z_2 - z_1), \quad (M)$$

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{2}.$$

Член  $\frac{\varepsilon}{2n_0} (\alpha_2 - \alpha_1)$  нужно удерживать лишь в случаях, когда номера  $S$  младших штрихов различаются для двух микроскоп-микрометров на  $180^\circ \pm i$ .

В современных инструментах для работ на первоклассной триангуляции в микроскоп-микрометрах устраивают две пары нитей: левая служит для наведений на младший штрих, правая — на старший. Винт микрометра делает  $2\frac{1}{2}$  оборота при измерении интервала на лимбе, а между двумя парами нитей берется промежуток, измеряемый двумя оборотами винта. Такое устройство, во-первых, значительно ускоряет работу по отсчитыванию, во-вторых, как и в том случае, когда  $n_0 = p (m - \frac{1}{2})$ , отсчет по барабану на старший штрих отличается от отсчета на младший штрих на число делений в полуобороте винта, вследствие чего в полусумме этих отсчетов исключается влияние эксцентрикитета барабана и влияние главных членов так называемой периодической ошибки винта микрометра.

Называем попрежнему: через  $p$  — число делений на ободке барабана; через  $pm$ :  $\delta$  — расстояние между двумя парами нитей, причем  $\delta$  — малая величина; через  $pm + \frac{p}{2} = p(m + \frac{1}{2})$  — задуманное механиком число делений барабана, измеряющее интервал  $i$  на лимбе; через  $r$  — тип микроскопа. Считая  $r$  постоянным, рассмотрим теперь два случая: первый, когда нульpunkt микроскопа отстоит от младшего штриха менее, чем на  $\frac{p}{2}$  делений, и второй, — когда расстояние нульpunkt от этого же штриха более  $\frac{p}{2}$ . В первом случае отсчет по барабану  $a$  и выразит собой, без отсчета по зубчатке, расстояние от нульpunktа  $c$  до младшего штриха. В момент стояния левой пары в нульpunktе  $c$  (черт. 182) правая пара не дойдет до старшего штриха на промежуток  $ab$ , меньший также полуоборота винта. Очевидно, при движении нитей к  $b$  в нульpunktе должно считать число  $p$ ; в самом деле, при  $r = 0$  и  $\delta = 0$  имеем:

$$a + pm + p - b = pm + \frac{p}{2}.$$

откуда:

$$b = a + \frac{p}{2}.$$

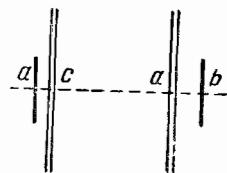
что и должно быть. Очевидно, теперь:

$$a + pm + \delta + p - b = pm + \frac{p}{2} - r = n_0 - r,$$

$$r = b - \frac{p}{2} - a - \delta;$$

Полагая:

$$b - \frac{p}{2} = b'; \quad \rho = b' - a,$$



Черт. 182

имеем:

$$\begin{aligned} r &= \rho - \delta; \\ \mu &= \frac{i}{pm + \frac{p}{2} - r} = \frac{i}{p\left(m + \frac{1}{2}\right) - \rho + \delta} = \frac{i}{n_0 - \rho + \delta}; \\ \mu &= \mu_0 \left[ 1 + \frac{\rho - \delta}{p\left(m + \frac{1}{2}\right)} \right] = \mu_0 \left[ 1 + \frac{\rho - \delta}{n_0} \right]. \end{aligned}$$

Отсчеты  $L_a$  и  $L_b$  при наведениях на младший и старший штрихи выражаются так:

$$L_a = S + a\mu = S + a\mu_0 + a\mu_0 \cdot \frac{\rho - \delta}{n_0}; \quad (\text{N})$$

$$L_b = S + i - (pm + \delta + p - b)\mu = S + i - (n_0 - b' + \delta)\mu_0 \left[ 1 + \frac{\rho - \delta}{n_0} \right];$$

$$L_b = S + b'\mu_0 - \delta \cdot \mu_0 + (b' - \delta - n_0) \cdot \frac{\rho - \delta}{n_0} \cdot \mu_0. \quad (\text{R})$$

Отсюда, образуя среднее из  $L_a$  и  $L_b$ , для окончательного значения отсчета  $L$  получаем:

$$L = S + \frac{a+b'}{2} \mu_0 + \frac{\rho - \delta}{2 n_0} \mu_0 (a + b' - n_0) - \frac{\delta}{2} \mu_0 - \frac{\rho - \delta}{2 n_0} \delta \mu_0. \quad (\text{T})$$

Так как  $\delta$  и  $\rho$  по предположению постоянны, то в (T) можно отбросить члены:

$$- \frac{\delta}{2} \mu_0 - \frac{\rho - \delta}{2 n_0} \delta \mu_0$$

и тогда приходим к формуле, совпадающей с формулой (H):

$$L = S + \frac{a+b'}{2} \mu_0 + \frac{\rho - \delta}{2 n_0} \mu_0 (a + b' - n_0), \quad (\text{U})$$

которой и следует, вследствие ее наибольшей простоты, пользоваться.

Если  $a > \frac{p}{2}$ , то тогда при положении левых нитей в нульпункте правые нити будут правее старшего штриха (черт. 183). В этом случае:

$$\begin{aligned} \bar{cb} &= pm + \delta - b; \\ a + pm + \delta - b &= p\left(m + \frac{1}{2}\right) - r = n_0 - r; \\ r &= b + \frac{p}{2} - a - \delta. \end{aligned}$$

Обозначая:

$$b + \frac{p}{2} = b'.$$

имеем:

$$\begin{aligned} r &= b' - a - \delta = \varphi - \delta; \\ \mu &= \mu_0 \left[ 1 + \frac{\varphi - \delta}{p \left( m + \frac{1}{2} \right)} \right] = \mu_0 \left[ 1 + \frac{\varphi - \delta}{n_0} \right]; \\ L_a &= S + a\mu = S + a\mu_0 + a\mu_0 \frac{\varphi - \delta}{n_0}; \quad (\text{N}') \\ L_b &= S + i - [pm + \delta - b]\mu = S + i - \left[ p \left( m + \frac{1}{2} \right) - b' + \delta \right] \mu_0; \\ L_b &= S + b'\mu_0 + [b' - \delta - n_0] \cdot \frac{\varphi - \delta}{n_0} \mu_0 - \delta \cdot \mu_0. \quad (\text{R}') \end{aligned}$$

Другими словами, приходим к тем же уравнениям, которые были исходными для вывода формулы (T) в первом случае. Очевидно,  $b'$  отличается от  $b$  на  $\frac{p}{2}$ , причем знак  $\pm$  или  $-$  нужно брать так, чтобы  $b'$  было близко к  $a$ . Величины  $\varphi$  и  $\delta$  должны быть выведены из специального исследования.

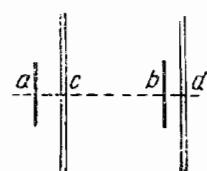
До выезда на полевые работы исполняют надлежащую установку микроскоп-микрометров, как указано в следующем параграфе, и, имея в результате малые  $r$ , выполняют определение  $\varphi$  и  $\delta$ ; определения  $\varphi$  и  $\delta$  проделывают также в период полевых работ — на первом и последнем тригонометрических пунктах, а также, по мере надобности, и на остальных пунктах, в зависимости от устойчивости инструмента и колебаний гип, обнаруживаемых при наблюдениях.

Определение  $\delta$  лучше выполнять отдельно от определения  $\varphi$ . Выбрав один из хороших (в смысле изящности панесения) штрихов лимба и установив левую пару нитей в нульпункте, движением алидады устанавливают ее на избранный штрих. После этого следуют поочередно три наведения левой и правой пар нитей на этот штрих. Далее следуют установки барабана микрометра на отсчеты 6, 12, 18, ..., 54 деления, т. е. через одну десятую оборота винта; при каждой установке движением алидады левая пара ставится на избранный штрих, а затем следуют по три наведения на него нитей левой и правой пар. Среднее из разностей — правая нить минус левая нить — представит собой вероятнейшее значение  $\delta$  в делениях барабана.

При определении  $\varphi = b' - a$  алидаде инструмента дается всего 24 установки: в прямом движении по ходу часовой стрелки на отсчеты  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \dots, 330^\circ$ ; в обратном движении против хода часовой стрелки — на отсчеты  $345^\circ, 315^\circ, 285^\circ, \dots, 15^\circ$ .

При каждой установке делаются наведения нитей: левой пары на младший штрих и правой пары — на старший штрих, последовательно три раза, пользуясь при этом только положительным движением винта микрометра. Отсчет по микрометру при переходе от одной установки алидады к другой изменяется на число делений барабана, соответствующее  $\frac{1}{12}$  интервала на лимбе. Среднее из полученных  $b' - a$  есть вероятнейшее значение  $\varphi$ , и, конечно, попутно мы получаем:

$$r = \varphi - \delta.$$



Черт. 183

В наших работах по триангуляции I класса формула (U) нередко применяется со следующими изменениями.

1) При постоянном гип величина  $\frac{\rho - \delta}{2n_0} \mu_0 n_0$  может быть отброшена в формуле (U), которая обращается в следующую:

$$L = S + \frac{a + b'}{2} \mu_0 + \frac{\rho - \delta}{2n_0} \mu_0 [a + b']. \quad (V)$$

2) Имея в виду, что на определение величины  $\rho$  сказываются весьма сильно условия освещения штихов лимба, а также учитывая влияние большого различия температурных условий при работе вечером и при работе ночью, полагают, что для каждого вечера, а также для каждой ночи имеет свое значение. Поэтому  $\rho$  выводят не из специального исследования, сделанного указанным выше порядком, а как среднее из всех разностей  $b' - a$ , выведенных по отсчетам  $b'$  и  $a$ , полученным при самих наблюдениях горизонтальных направлений в течение данного вечера или данной ночи.

Указанный способ вывода  $\rho$  представляется приспособленным, но только следует за данный вечер или за данную ночь на разных местах лимба расположенных примерно через 60 или  $45^\circ$  по его окружности, сделать еще четырехкратные определения разности  $b' - a$  (на каждом из шести или восьми мест), и величину  $\rho$  вывести как среднее из этих  $b' - a$  и из  $b' - a$ , полученных при наблюдениях горизонтальных направлений.

Кроме того, надлежит тогда для данного вечера или для данной ночи выполнить и определение  $\delta$ , хотя бы по половинной программе по сравнению с ранее приведенной для определения  $\delta$ .

### § 50. Исследования, установка и поверки микроскоп-микрометра

Прежде чем исследовать или устанавливать микроскоп-микрометр, необходимо отрегулировать вращение алидады около ее вертикальной оси. Подробности этого будут приведены ниже, теперь же укажем, что признаками правильной установки алидады горизонтального круга являются:

а) вращение ее плавное, без излишней легкости, но и без всякого трения;

б) при вращении алидады на полную окружность пузырек точного уровня, ставящегося на горизонтальную ось, должен оставаться на середине или уклоняться от нее не более как на  $3 - 4''$  (при этом предполагаются предварительная выверка уровня и установка — при помощи ее — вертикальной оси вращения алидады);

в) малые колебания разности отсчетов по двум противоположным микроскопам.

Объектив микроскопа механиком обычно закрепляется настолько солидно, что трудно допустить сдвиг объективной трубочки в микроскопе тем более, что все сотрясения инструмента непосредственно на эту трубочку не передаются. Поэтому передвигать объектив микроскопа следует при установке его в последнюю очередь, когда будет вполне выяснена необходимость в этом. При установке и поверках микроскоп-микрометр прежде всего руководствуются следующим.

1) Устанавливают окуляр таким образом, чтобы штири микрометра были видны с наибольшей отчетливостью.

2) Перемещая, если только это нужно, микроскоп в обоях, достигают ясной видимости штрихов лимба и параллельности нитей микрометра с этими штрихами.

Далее должны быть выполнены следующие требования.

3) В поле зрения микроскопа штрихи лимба должны казаться ни слишком длинными, ни слишком короткими.

4) Все штрихи на протяжении почти всего поля зрения микроскопа должны быть видны одинаково отчетливо.

5) По крайней мере два штриха *a* и *c* (черт. 184), расположенные симметрично по обе стороны от нульпункта и ближайшие к нему, должны казаться строго параллельными штрихом *b*, находящемуся в нульпункте; остальные штрихи должны казаться едва заметно сходящимися к нижнему краю поля зрения, но, конечно, эта сходимость должна быть совершенно симметричной относительно нульпункта.

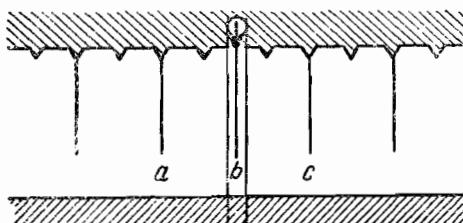
6) Нульпункты противоположных микроскопов должны отстоять друг от друга на  $180^\circ$  или на угол, отличающийся от  $180^\circ$  на величину, меньшую 20 секунд.

Если требование п. 6 оказывается грубо невыполненным, например, на величину более пяти минут, то можно подозревать, что один из микроскопов сбит; это будет указываться непараллельностью нитей этого микроскопа штрихам лимба и неясностью изображения штрихов в нем. При грубом отличии угла между нульпунктами микроскопов от  $180^\circ$ , установку микроскопов приходится делать, начиная с выполнения требования п. 6, причем приходится регулировать или прикрепление микроскопа к рычагу *RR* (черт. 181), или прикрепление этого рычага *RR* к подставке трубы, соблюдая, конечно, одновременно требования п. 2 и 3.

В некоторых инструментах при микроскопах имеются специальные винты для перемещения продольной оси микроскопа в плоскости, проходящей через нее и центр лимба; при нарушении требования и. 3 в таких инструментах приходится действовать этими винтами. Но всякие исправительные винты способствуют расстройству сделанных установок и поэтому в большинстве точных инструментов указанных винтов, регулирующих положение продольной оси микроскопа, не имеется. Поэтому, при заметном нарушении в одном из микроскопов требования п. 3 делают попытку устранить неправильную длину штрихов, работая или винтами, стягивающими кольца обоями микроскопа, или винтами, прикрепляющими микроскоп к рычагу *RR* (черт. 181), или винтами, прикрепляющими этот рычаг *RR* к подставке трубы. В исключительных случаях неправильная длина изображений штрихов может быть обусловлена неправильным положением объективной трубочки микроскопа, сбитой неопытными или неосторожными лицами.

Невыполнение условия п. 5 следует приписать, при выполнении всех остальных требований, неправильной оптике микроскопа.

Кроме того, следует по приеме инструмента от механика, когда он находится в полном порядке, отметить тонкой нарезкой ножом на внешней трубке микроскопа положение кольцевых обоям, а на объективной



Черт. 184

трубке — положение нижнего края внешней трубки; кроме того, следует нанести продольный штрих  $\text{ff}$  (черт. 181) так, чтобы он прошел по нижней части внешней трубы и по объективной трубке. Тогда, ставя впоследствии микроскоп и объективную трубочку по этим штрихам — нарезкам, будем очень близки к правильной установке микроскопа. Описание дальнейших установок и исследований микроскоп-микрометра приводится вслед за этим.

### 7) Исследуют правильность работы микрометра.

При некотором положении алидады делают многократные наведения нитей микрометра на штрихи  $b$ , приходящийся вблизи нульпункта, и на штрихи  $a$  и  $c$ , смежные с  $b$  и лежащие от него влево и вправо. При этом соблюдают такой порядок: непрерывно ввинчивая винт микрометра, наводят нити его на штрихи  $a$ ,  $b$  и  $c$  и получают отсчеты по барабану  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ; затем, непрерывно вывинчивая винт микрометра, наводят нити последовательно на штрихи  $c$ ,  $b$ ,  $a$  и получают отсчеты  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ; таких рядов, включающих каждые шесть наведений нитей, надо выполнить пять при данном положении алидады, причем следует при переходе от ряда к ряду очень немного изменять положение алидады в ту и другую сторону наводящим винтом алидады; пятый ряд даст, очевидно, отсчеты  $a_9$ ,  $b_9$ ,  $c_9$  при ввинчивании винта и  $a_{10}$ ,  $b_{10}$ ,  $c_{10}$  — при вывинчивании винта.

Такое же число рядов выполняют при двух иных положениях алидады, отстоящих от первого на  $120$  и  $240^\circ$ . Средние разности:

$$r_1 = \frac{(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + (a_7 - a_8) + (a_9 - a_{10})}{5},$$

$$r_2 = \frac{(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + (b_5 - b_6) + (b_7 - b_8) + (b_9 - b_{10})}{5},$$

$$r_3 = \frac{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + (c_5 - c_6) + (c_7 - c_8) + (c_9 - c_{10})}{5},$$

выведенные для трех положений алидады (число разностей  $r$  будет десять), не должны превышать каждая  $1 : 150$  доли оборота винта, а колебания этих разностей должны лежать в пределах  $1 : 75$  доли оборота винта.

Если из отсчетов, полученных только при ввинчивании винта, образовать разности:

$$b_1 - a_1 = \rho_1^I \quad c_1 - b_1 = \rho_2^I$$

$$b_3 - a_3 = \rho_1^{II} \quad c_3 - b_3 = \rho_2^{II}$$

$$b_5 - a_5 = \rho_1^{III} \quad c_5 - b_5 = \rho_2^{III}$$

$$b_7 - a_7 = \rho_1^{IV} \quad c_7 - b_7 = \rho_2^{IV}$$

$$b_9 - a_9 = \rho_1^V \quad c_9 - b_9 = \rho_2^V$$

то колебания величин  $\rho$  не должны выходить за пределы  $1 : 75$  доли оборота.

Если указанные допуски заметно не соблюдаются, то работа микрометра неисправна. Неправильность работы микрометра может происходить: от неправильной работы пружин  $\text{ff}$ ; от трения при движении рамки  $t\text{por}$  (черт. 179) в салазках; иногда от слишком плотного прилегания пластинки  $K$  к рамке  $t\text{por}$ . Вообще, в этом случае неправильность работы микрометра может обусловливаться лишь дефектом в сборке и при-

гонке частей микрометра, работа же самого винта обычно безуокоризненна в высокой степени.

8) Определяют предварительно тип микроскопа, для чего, конечно, вполне достаточно материала из предыдущего исследования — в виде величин  $\varrho$  и среднего вывода из них, которое мы обозначим через  $r_m$ .

Если  $r_m$  окажется превышающим половину деления барабана, то приступают к установке микроскопа, описанной в § 48. Так как  $r > 0$ , если  $n < n_0$ , то при  $r_m > 0$  нужно будет несколько выдвинуть объективную трубочку, а затем весь микроскоп передвигать в обоймах вверх; при  $r < 0$  нужно будет вдвинуть объективную трубочку в основную трубку микроскопа, а затем микроскоп передвигать в обоймах вниз. Установив после перемещения объективной трубочки микроскоп в обоймах, затем для этой установки определяют тип совершенно так же, как определяли  $r_m$ .

9) Сделав отсчеты по двум противоположным микроскопам, посредством винта  $W$  устанавливают нульпункты их, по возможности, строго на одном диаметре.

10) Поставив пити в нульпункте, опускают гайку  $d$  (черт. 178) и поворачивают барабан  $t$  (без вращения винта  $v$  и удерживая нити в нульпункте) так, чтобы пуль его принялся против индекса  $i$ ; закрепив гайку  $d$ , поверяют, будет ли отсчет по барабану равен нулю при наведении нитей на нульпункт микрометра.

11) Определение тип микроскопа. Наведение нитей микрометра на штрихи лимба необходимо всегда делать, ввинчивая винт  $s$  и сжимая, следовательно, пружины  $ff$ ; после наведения надлежит несколько перекладать и, убедившись, что нити остались на месте, — отечи-тывать барабан.

Вследствие эксцентричного положения барабана  $t$  относительно оси винта  $v$ , вследствие несовершенства контакта конца этого винта с плоскостью упора  $S$  и вследствие так называемых периодических ошибок винта  $v$ , результаты измерений микрометром сопровождаются периодическими ошибками, которые для двух положений нитей микрометра, отстоящих друг от друга на нечетное число полуоборотов винта, равны по величине, но противоположны по знаку. Этим имеется в виду, что такое устройство микрометра, при котором перемещению нитей с маладиго на старший штрих соответствует вращение винта микрометра на нечетное число полуоборотов. Величина  $\frac{a - b}{2} \mu_0$ , являю-  
щаяся главным членом в формулах (Н), (К) и (У), свободна от ошибок, обусловленных эксцентричностью барабана, периодическими ошибками винта и отчасти несовершенствами контакта этого винта с упором  $S$ .

Разности  $\varrho = b' - a$ , наоборот, включают в себя при  $n_0 = p\left(m - \frac{1}{2}\right)$  удвоенное влияние эксцентризитета барабана и периодических ошибок винта микрометра. Это обстоятельство надо учитывать при определении тип микроскопа и вычислении поправок за тип в формулах (И) и (У) предыдущего параграфа. Порядок определения  $\varrho = b' - a$ ,  $\hat{\varrho}$  и  $r = \varrho - \hat{\varrho}$  приведенный в предыдущем параграфе, вполне учитывает все эти влияния. Его и следует соблюдать при определении среднего тип микроскопа. Величина  $r = b' - a - \hat{\varrho} = \varrho - \hat{\varrho}$  должна быть не более 0,5 деления барабана.

12) Исследование периодических ошибок винта. Ошибки винта подразделяются на периодические и ходовые. Периоди-

ческие ошибки повторяются для каждого оборота винта; ходовые ошибки выражаются в неравенстве поступательных движений, соответствующих разным оборотам винта.

Назовем через  $t$  отсчет по барабану, выраженный в частях окружности; периодическая ошибка  $\Delta$  отсчета  $t$  вообще выразится рядом

$$\Delta = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots \quad (209)$$

Для определения коэффициентов этого ряда надлежит некоторое постоянное расстояние измерять на разных местах оборота винта. Допустим, что мы избрали некоторое расстояние  $D$ , выраженное в делениях барабана, и измеряли его, переставляя винт на  $\sigma = \frac{2\pi}{n}$ ; если  $D$  в частях окружности барабана винта равно  $f$ , то при измерении интервала  $D$  имеем, следовательно, такие значения  $f$ :

|                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| Первое измерение . . . . .  | $0$ и $f$                         |
| Второе . . . . .            | $\sigma$ и $\sigma + f$           |
| Третье . . . . .            | $2\sigma$ и $2\sigma + f$         |
| · · · · ·                   | · · · · ·                         |
| · · · · ·                   | · · · · ·                         |
| $n$ -ое измерение . . . . . | $(n-1)\sigma$ и $(n-1)\sigma + f$ |

Числа  $0, \sigma, 2\sigma, \dots, (n-1)\sigma$  соответствуют отсчетам по барабану при наведении на левый из двух штрихов, обозначающих интервал  $D$ , а числа  $f, \sigma+f, 2\sigma+f$  соответствуют отсчетам по барабану при установках нитей на правый штрих. Если для  $D$  мы получили соответственно значения  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , то, очевидно, что ошибки этих  $d_1, d_2, \dots, d_n$  будут соответственно такими:

$$\begin{aligned} \Delta_f - \Delta_0 &= D - d_1 \\ \Delta_{f+3} - \Delta_3 &= D - d_2 \\ \Delta_{f+2\sigma} - \Delta_{2\sigma} &= D - d_3 \\ &\vdots && \vdots \\ \Delta_{f+(n-1)\sigma} - \Delta_{(n-1)\sigma} &= D - d_n, \end{aligned} \quad (210)$$

Сумма левых частей уравнений (210) равна нулю и поэтому

$$D = \frac{\Sigma d}{n} = k. \quad (211)$$

Теперь от (210) переходим к таким уравнениям:

$$\begin{aligned}
 a_1 \cos f + a_2 \cos 2f + \dots + b_1 \sin f + b_2 \sin 2f - a_1 - a_2 - \dots &= k - d_1 \\
 a_1 \cos(f + \sigma) + a_2 \cos 2(f + \sigma) + \dots + b_1 \sin(f + \sigma) + b_2 \sin 2(f + \sigma) + \dots \\
 \dots - a_1 \cos \sigma - a_2 \cos 2\sigma - \dots - b_1 \sin \sigma - b_2 \sin 2\sigma - \dots &= k - d_2 \\
 \dots &\dots \\
 a_1 \cos[f + (n-1)\sigma] + a_2 \cos 2[f + (n-1)\sigma] + \dots + b_1 \sin[f + (n-1)\sigma] + \\
 + b_2 \sin 2[f + (n-1)\sigma] + \dots - a_1 \cos(n-1)\sigma - a_2 \cos 2(n-1)\sigma - \dots \\
 \dots - b_1 \sin(n-1)\sigma - b_2 \sin 2(n-1)\sigma - \dots &= k - d_n.
 \end{aligned}$$

Преобразовывая эти уравнения, найдем, что для измерения с номером  $p+1$  будем иметь такое уравнение:

$$\begin{aligned} & -2a_1 \sin \frac{f}{2} \sin \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) - 2a_2 \sin f \sin 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) - \\ & - 2a_3 \sin \frac{3}{2} f \sin 3 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) - \dots + 2b_1 \sin \frac{f}{2} \cos \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) + \\ & + 2b_2 \sin f \cos 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) + 2b_3 \sin \frac{3}{2} f \cos 3 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) + \\ & + \dots = k - d_{p+1}. \end{aligned} \quad (212)$$

Ограничиваюсь главными членами ряда (209), определим только коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ .

Переходя от уравнений (212) к нормальным уравнениям, будем иметь:

$$a_1 \sin^2 \frac{f}{2} \cdot \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{f}{2} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \sin \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right);$$

$$b_1 \sin^2 \frac{f}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{f}{2} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \cos \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right);$$

$$a_2 \sin^2 f \cdot \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \sin f \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \sin 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right);$$

$$b_2 \sin^2 f \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \sin f \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \cos 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right).$$

Или окончательно напишем

$$a_1 = -\frac{1}{n \sin \frac{f}{2}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \sin \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right);$$

$$b_1 = \frac{1}{n \sin \frac{f}{2}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \cos \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right); \quad (213)$$

$$a_2 = -\frac{1}{n \sin f} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \sin 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right);$$

$$b_2 = \frac{1}{n \sin f} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \cos 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right).$$

Очевидно, что для уменьшения действия погрешностей наблюдений надлежит величине  $f$  дать два значения:

первое, равное  $\pi = 180^\circ$  — полуобороту винта, — выгодно для определения  $a_1$  и  $b_1$ ;

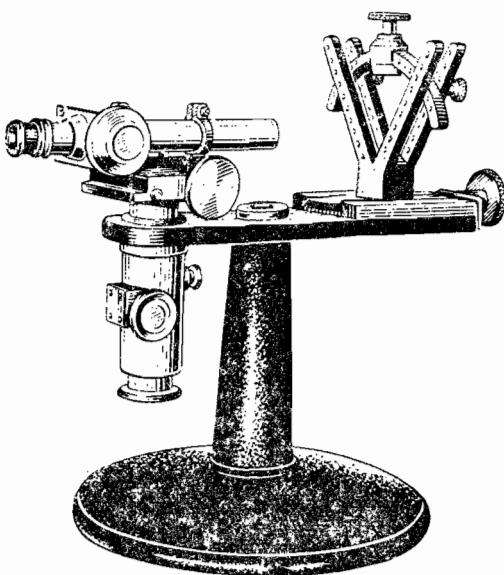
второе, равное  $\frac{3}{2} \pi$  или  $\frac{\pi}{2}$  ( $\frac{3}{4}$  оборота или  $\frac{1}{4}$  оборота), — выгодно для определения  $a_2$  и  $b_2$ .

Конечно, если взять  $f = \pi$ , то тогда делаем  $n$  измерений этого интервала только для определения  $a_1$  и  $b_1$ ; делая новый ряд из  $n$  измерений интервала  $f = \frac{3}{2} \pi$ , определим отдельно  $a_2$  и  $b_2$ , хотя из этого же материала можем вывести еще достаточно надежно и  $a_1$  и  $b_1$ .

При исследовании винтов пользуются специальным прибором Бамберга, изображенным на черт. 185. В этом приборе имеется особое гнездо, в котором надежно закрепляется коробка исследуемого микрометра, отвиленная предварительно от трубы своего микроскопа (окуляр микроскопа также вывинчивается из коробки микрометра). Главной частью прибора является микроскоп с микрометром, через который наблюдают

нити исследуемого микрометра. (Следовательно, плоскость исследуемого микрометра перпендикулярна к продольной оси микроскопа прибора и совпадает с фокальной плоскостью объектива этого микроскопа.) В микроскопе прибора, кроме подвижных нитей, имеются еще неподвижные нити, натянутые в плоскости микрометра.

Перед началом исследования подвижные нити устанавливают в должном, соответствующем избранному интервалу  $f$  расстоянии от неподвижных нитей микроскопа прибора. После этого разными частями исследуемого винта измеряют промежуток между неподвижными и подвижными нитями прибора, причем наведение нитей исследуемого микро-



Черт. 185

метра на нити микроскопа прибора делаются, конечно, с высокой точностью, так как эти наведения наблюдаются под полным увеличением микроскопа прибора; чтобы интервал, осуществленный между нитями микроскопа прибора, можно было измерять разными частями исследуемого винта, гнездо, в котором закреплен испытуемый микрометр, может перемещаться поступательно в особых салазках. Кроме указанной здесь, могут быть построены и иные схемы исследования периодических ошибок винта.

Что касается ходовых ошибок, то при их исследовании измеряют винтом микрометра интервалы, соответствующие некоторому целому числу оборотов винта.

Если, например, измеряемый интервал  $\Delta$  соответствует трем оборотам винта, то его измеряют по такому плану:

Отсчет  $u$  на левый конец интервала:

- 6 оборотов
- 5 "
- 4 оборота
- 3 "
- 2 "
- 1 оборот
- 0 оборотов
- + 1 оборот
- + 2 оборота
- + 3 "

Отсчет  $u_1$  на правый конец интервала:

- 3 оборота
- 2 "
- 1 оборот
- 0 оборотов
- + 1 оборот
- + 2 оборота
- + 3 "
- + 4 "
- + 5 оборотов
- + 6 "

Выражая отсчет  $u$  в числе оборотов от нульпункта, представим ходовую ошибку  $s$  этого отсчета в виде:

$$s = s_0 + s_1 u + s_2 u^2 + s_3 u^3.$$

Тогда для интервала  $\Delta$  имеем такое уравнение:

$$\Delta = (u_1 - u) + s_1 (u_1 - u) + s_2 (u_1^2 - u^2) + s_3 (u_1^3 - u^3).$$

После преобразований это уравнение перепишется так:

$$u_1 - u = x + y \left( \frac{u_1 + u}{2} \right) + z \left( \frac{u_1 + u}{2} \right)^2 \quad (214)$$

причем:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\Delta}{1 + s_1} - s_3 \frac{\Delta^3}{4} \\ y = -2s_2 \cdot \Delta \\ z = -3s_3 \cdot \Delta \end{array} \right\}. \quad (215)$$

Понятно, что вероятнейшее значение  $\Delta$  равно среднему из всех значений  $u_1 - u$ , полученных в данном ряде измерений принятого интервала. Вводя:

$$\begin{aligned} x &= \Delta + x_1, \\ x_1 &= -\frac{s_1 \cdot \Delta}{1 + s_1} - s_3 \cdot \frac{\Delta^3}{4}, \end{aligned}$$

перепишем (214) еще так:

$$(u_1 - u) - \Delta = x_1 + y \left( \frac{u_1 + u}{2} \right) + z \left( \frac{u_1 + u}{2} \right)^2 \quad (216)$$

Применяя (216) к каждому отдельному измерению принятого интервала, составляем далее нормальные уравнения, из которых и вычисляем  $x_1, y, z$ , а затем определяем  $s_3, s_2$  и  $s_1$ .

Нужно заметить, что поправка за член с коэффициентом  $s_1$  не подлежит введению, так как она вошла в определение цены деления барабана микрометра, и поэтому за ходорыс ошибки винта поправка отсчета  $u$  равна  $s_2 u^2 - s_3 u^3$ .

Нужно оговориться, что исследование периодических и ходовых ошибок винта, описанное в пункте 12 настоящего параграфа, приводится для сведения, так как выполнение его по отношению к микрометрам микроскопов геодезических инструментов вообще является излишним. При отсчитывании разделенных кругов помощью микроскоп-

микрометров приходится пользоваться малым числом оборотов винта (двумя оборотами в ту и другую сторону от нульпункта), и влияние ходовых ошибок будет поэтому всегда ничтожно. Главная часть периодических ошибок, как уже указано выше, погашается сама собой в члене  $\frac{a+b'}{2} \mu_0$ , если микрометр имеет две пары нитей или если при одной паре нитей  $n_0 = p \left( m - \frac{1}{2} \right)$ . Кроме того, в настоящее время винты микрометров изготавливаются весьма совершенно, и исследования обнаруживают ничтожность влияния членов с коэффициентами  $a_2$  и  $b_2$ . Если исследования, выполненные согласно пункту 7, дают удовлетворительные результаты, то этим и можно ограничиться в отношении исследования микрометра. Исследование ошибок винта микрометра может приобрести практическое значение для так называемых окулярных микрометров, о которых говорится в следующих параграфах, если почему-либо при исполнении геодезических наблюдений приходится пользоваться значительным числом оборотов винта такого окулярного микрометра. Впрочем, и такие случаи в геодезической практике являются крайне редкими.

Точность отсчета по микроскоп-микрометру, или средняя ошибка величины  $\frac{a+b'}{2} \mu_0$ , зависит, главным образом, от точности наведения нитей микрометра на штрихи лимба.

В инструментах, служащих для наблюдений в триангуляции I класса (двухсекундные большие теодолиты) среднюю ошибку величины  $\frac{a+b'}{2} \mu_0$  следует считать около  $\pm 0'',35$ ; в инструментах для основной триангуляции II класса (пятисекундные теодолиты) средняя ошибка той же величины — около  $\pm 0'',8$ .

Надлежит упомянуть в заключение параграфов о микроскоп-микрометрах, что в США при наблюдениях в триангуляции I класса при переходе с одного приема наблюдения направлений к следующему выполняется не только перестановка лимба по известному правилу, но и изменение отсчета по микрометрам микроскопов при наведении трубы на начальный предмет в приеме по следующему расчету: число приемов измерения направлений в США в триангуляции I класса равно 16; пусть  $\Delta = \frac{i}{4}$ , где  $i$  — число секунд в наименьшем делении лимба; в первом приеме при наведении на начальный предмет отсчет по микрометру будет  $\frac{\Delta}{2}$ ; во втором приеме  $\frac{\Delta}{2} + \Delta$ ; в третьем приеме  $\frac{\Delta}{2} + 2\Delta$ ; в четвертом приеме  $\frac{\Delta}{2} + 3\Delta$ ; в пятом  $\frac{\Delta}{2}$  и т. д. Нетрудно из формулы (U) § 49 видеть, что средний вывод из четырех приемов будет совершенно свободен от поправки вида:

$$\frac{\rho - \delta}{2 n_0} \mu_0 [a + b' - n_0]$$

для начального направления. Для остальных направлений, вследствие добавочных изменений отсчетов по микроскоп-микрометрам, вносимых эксцентризитетом алидады, этого не будет, но можно ожидать, что и для этих направлений среднее из  $\frac{\rho - \delta}{2 n_0} \mu_0 [a + b' - n_0]$  для четырех приемов будет менее  $\frac{\rho - \delta}{10} \mu_0$ . Другими словами, при указанном порядке

работы при  $\rho - \delta$ , меньшем 0,5, поправок за гип в отсчеты по горизонтальному кругу совсем вводить не нужно.

Представляется, что и нам следует проводить аналогичный порядок работы и этим вовсе упразднить вычисление поправок за гип и полевые исследования по определению  $\rho$  и  $\delta$ . Понятно, что при существующем у нас порядке наблюдений поправки вида  $\frac{\rho-\delta}{2n_0} \mu_0 |a+b'-n_0|$  или поправки вида  $\frac{\rho-\delta}{n_0} \mu_0 \cdot a$  выбирают или из соответственно составленных вспомогательных табличек или по целесообразно составленным графикам.

### § 51. Трубы угломерных инструментов

Мы остановимся здесь только на некоторых особенностях в устройстве зрительных труб инструментов, применяемых для измерения горизонтальных и вертикальных углов в триангуляции I и II классов. Расчеты оптики и исследования оптических частей даются в курсе «Теории оптических инструментов», и этой стороны дела мы касаться не будем.

При наблюдениях в триангуляции I класса применяют теодолиты или геодезические универсальные инструменты, у которых труба имеет размеры объектива и увеличение, приведенные в табл. 19.

Таблица 19

| Название инструмента                       | Диаметр объектива (в мм) | Фокусное расстояние объектива (в м.м.) | Увеличение трубы          | В какой стране применяется инструмент |
|--|--------------------------|--|---------------------------|---------------------------------------|
| Теодолит Гильде-брранда 27 см              | 65                       | 640                                    | 43, 59, 72<br>три окуляра | СССР<br>Германия                      |
| Геодезический универсал Гильдебранда 21 см | 48                       | 490                                    | 36, 45, 54<br>три окуляра | СССР                                  |
| Универсальный инструмент Бамберга 27,5 см  | 65                       | 520                                    | 35, 52, 65<br>три окуляра | Балтийские государства                |
| Теодолит Паркхерста 22 см                  | 45                       | 480                                    | 45                        | США                                   |
| „Стандартный“ теодолит 30,5 см             | 61                       | 740                                    | 30, 45, 60<br>три окуляра | США                                   |
| Азимутальный круг Шасселона 23 см          | 90                       | 330                                    | 25, 40, 60<br>три окуляра | Франция                               |

В первой графе табл. 19 числа 27,5; 21; 27,5; 22; 30,5 и 23 означают диаметр горизонтального круга. Обычно при наблюдениях в триангуляции I класса пользуются окулярами, дающими увеличение около 45 — большие увеличения бесполезны из-за атмосферных условий.

Как видно, в инструментах, применяемых на триангуляции I класса, мы имеем достаточно значительное разнообразие и несогласованность и в отношении размеров диаметра объектива трубы и в отношении длины трубы (от 33 до 74 см).

При переходе в настоящее время во всех государствах к сторонам треугольников триангуляции I класса длиной около 30 км (вместо часто встречающихся ранее сторон в 45—55 км), становится естественной тенденция последних лет к уменьшению и диаметра объектива трубы, и длины трубы. Нужно, конечно, иметь в виду, что в триангуляции I класса наблюдают не верхние болванки сигналов, а световые пучки, посылаемые на станцию гелиотропами или фонарями, установленными на наблюдавших с нее пунктах: диаметр объектива в 50 мм дает достаточную яркость изображения фонаря при расстоянии в 30—35 км в тех атмосферных условиях, которые обеспечивают возможность исполнения наблюдений. Конечно, чем длиннее труба, тем точнее выполняется ее наведение; но и при длине трубы около 50 см средняя ошибка этого наведения, вряд ли превышающая  $\pm 0''.4$  мала по сравнению с влиянием вибраций и колебаний изображения земного предмета. Поэтому можно считать, что «ходовыми» в триангуляции I класса могут быть инструменты о объективом трубы, имеющим диаметр около 55 мм и фокусное расстояние соответственно около 55 см. Но, конечно, для особенных случаев наблюдений на расстояние в 50—60—80 км следует иметь несколько экземпляров инструментов с более мощной оптикой.

В триангуляции II класса применяют довольно разнообразные инструменты: пятисекундные геодезические универсалы и теодолиты, десятисекундные теодолиты с микроскоп-микрометрами, десятисекундные инструменты с верньерами, теодолиты типа Вильда и Цейсса. В основных рядах II класса при длине сторон треугольников в 25 км и при наблюдениях верхних болванок сигналов, очевидно, требуется труба с достаточно мощной оптикой; соответственно этому здесь применяют трубы с объективом диаметром 41 мм и фокусным расстоянием 38 см (увеличение трубы 40—50) или трубы с объективом диаметром 38 мм и фокусным расстоянием 33 см\*. В заполняющих сетях II класса применяют инструменты с трубами:

а) диаметр объектива 38 мм, фокусное его расстояние 30 см, увеличение 38;

б) диаметр объектива 33 мм, фокусное его расстояние 27 см, увеличение 30. Последний тип трубы рассчитан на расстояния, вообще меньшие 15 км.

В больших геодезических универсальных инструментах мы имеем иногда не прямую, а ломаную трубу. Длинную прямую трубу (с фокусом объектива в 60—65 см) приходится при переводе ее через зенит предварительно вынимать вместе с горизонтальной осью из ее лагерей, что при значительном весе перекладываемых частей довольно хлопотливо, в особенности приочных наблюдениях. Иногда в больших инструментах имеется особый подъемный механизм, служащий для перекладки трубы в лагерях горизонтальной оси. Но после такой пере-

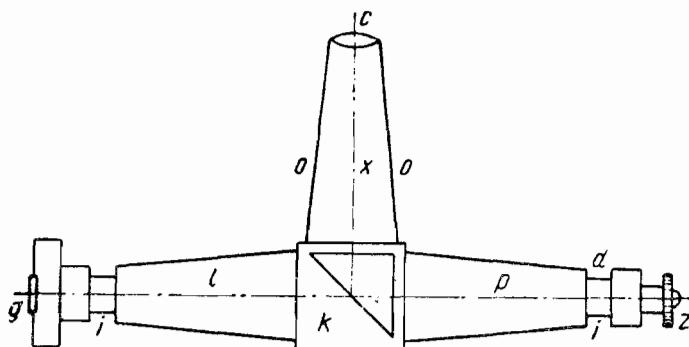
\* Эти размеры относятся к пятисекундному теодолиту.

кладки становится невозможным пользование вертикальным кругом инструмента. Эти обстоятельства и вызвали в геодезических инструментах, с одной стороны, применение прямой внекцентрической трубы, а с другой стороны, — ломаной трубы. Нужно отметить, что при некоторых размерах центральной прямой трубы (45—50 см) возможно было бы ее переводить через зенит при так называемом старом устройстве осей (см. следующий параграф), но применяемое в точных инструментах устройство осей по Ренсольду препятствует этому.

Ломаная труба в геодезических инструментах замедляет исполнение наблюдений, а существенная часть ломаной трубы — центральная призма, поворачивающая ход лучей на 90°, — ухудшает несколько качество изображений, а главное, вследствие перемены внешней температуры, претерпевает даже за небольшой промежуток времени ряд изменений, которые вносят добавочные погрешности в результаты точных наблюдений. С другой стороны, в триангуляции I класса можно отказаться от точных наблюдений вертикальных углов; в основной же триангуляции II класса можно применить и то старое устройство осей, при котором труба длиной в 40 см может переводиться через зенит.

Поэтому следует признать, что применение при геодезических наблюдениях инструментов с ломаной трубой нецелесообразно. Но мы все-таки дадим краткое описание устройства ломаной трубы, так как геодезисту приходится иметь дело с инструментами, спабженными такими трубами.

Наиболее простое устройство ломаной трубы изображено на чертежах 186 и 187. Конус *oso* несет объектив трубы, конусы же *l* и *p*



Черт. 186

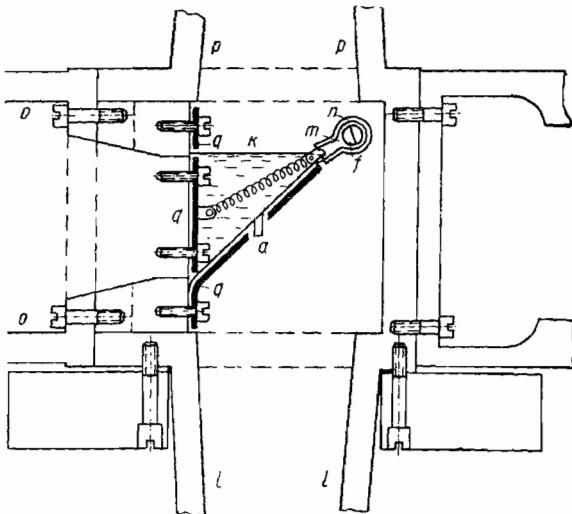
принадлежат горизонтальной оси инструмента, цапфы которой *ii* выполнены именно в этих конусах. Конусы *o*, *l* и *p* имеют на своих уширенных концах фланцы *rr*, *ss*, *tt*, образующие (по падежащему их соединении друг с другом) три грани куба *k*: первую — обращенную к объективу, вторую — обращенную к окуляру *z* и третью — к концу *q* горизонтальной оси; четвертая грань куба принадлежит толстой пластинке *e*, а пятая и шестая образуются отдельными квадратными пластинками, привинчиваемыми к стекле *e* и к фланцам *t* и *s*. Конус *p* заканчивается цилиндрической трубкой *d*, в которую входит окуляр *z* ломаной трубы. Внутри куба *k* помещается большая призма, изготовленная из очень хорошего стекла и имеющая тщательно отшлифованные кат-

ты и гипотенузу. Один из катетов упирается в стенку  $h$  конуса  $o$ , а другой -- в стенку  $f$ , прикрепленную к кубу  $k$  в этих стенах  $h$  и  $f$  имеются широкие отверстия. На гипотенузу призмы давят пружинные пластинки  $bb$  и прижимают призму к стенкам  $h$  и  $f$ . Возможность движения призмы по направлениям, параллельным ее ребрам, устраивается винтом  $a$ , который проходит через одну из перпендикулярных к этим ребрам стенок куба  $k$  и прижимает призму к ее гнезду в противоположной стенке того же куба.

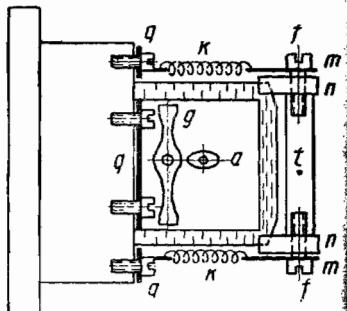
На чертежах 187а и 187б изображено расположение и укрепление призмы в ломаной трубе универсала фирмы Гильдебранда:  $oo$  -- объективная часть трубы;  $ll$  -- часть горизонтальной оси вращения трубы, где помещается осветительная лампочка;

$pp$  -- окулярная часть трубы. Стеклянная призма помещена внутри коробки, которая образуется следующим образом.

К объективной грани куба привернуты четыре пластиинки  $qq$ , которые охватывают призму и не дают ей смеяться. Чтобы не дать призме выпасть из образованного этими пластинками гнезда, одна из них



Черт. 187



Черт. 187б

продолжена и закрывает собой диагональную грань (гипотенузу) призмы. На этой пластинке  $q$  против центра диагональной грани призмы имеется овальный вырез, служащий для помещения в нем стеклянного цилиндрика  $a$ , который канадским бальзамом наклеен одной своей склоненной гранью на грань призмы, другая же наружная грань цилиндрика отшлифована точно плоско-параллельно с катетной гранью призмы. Назначением этого стеклишка является прямолинейная подача света в окулярную часть трубы.

Для плотного прижимания призмы имеется пружинная пластинка *g*, привернутая в центре шурупом к пластинке *q* (см. черт. 1876). Концы пластинки *g* свободны и имеют небольшие выступы, проходящие через отверстия в пластинке *q* и давящие на призму. С другой стороны на двух из пластинок *q* посередине имеются небольшие отростки, к которым прикрепляются концы пружинок *k*; другим своим концом пружинки *k* прикрепляются к пластинкам *m*, надетым на полую втулку *t*. Под пластинками *m* на втулку *t* надеты фарфоровые пластинки *n*, имеющие вырезы, которыми они и захватывают ребро призмы. Те и другие пластинки удерживаются на втулке *t* шурупами *f*, привернутыми с двух ее концов.

Пружинки *k* прижимают весь цилиндр *t* с помощью фарфоровых пластинок *n* к призме и не дают ей смещаться.

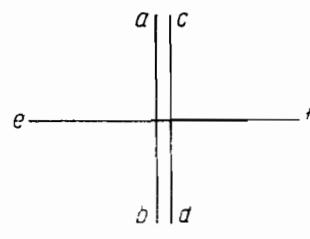
При необходимости вынуть призму из ее гнезда, надо несколько оттянуть цилиндр *t* (растянув пружинки *k*) и повернуть пластинку *q*, прикрывающую диагональную грань призмы.

Лучи света, по прохождении их через объектив ломаной трубы, отражаются от гипотенузы призмы и поступают в конус *p*. Визирная ось ломаной трубы совпадает с тем, проходящим через центр объектива лучом *ch*, который по отражении от гипотенузы призмы проходит через центр сетки питет; эта же визирная ось совпадает с прямой, соединяющей центр объектива с отражением центра сетки в зеркальной плоскости гипотенузы призмы. В ломаной трубе значение горизонтальных нитей сетки прямой трубы получают те нити, которые параллельны визирной оси трубы. Изображения точек, лежащих в одной вертикальной плоскости, располагаются в плоскости сетки ломаной трубы по прямой, перпендикулярной к визирной оси трубы, и, следовательно, роль вертикальных нитей в сетке ломаной трубы имеют нити, перпендикулярные к ее визирной оси.

Сетка нитей в трубах геодезических инструментов состоит очень часто из пары близких параллельных питет *ab* и *cd* и из пересекающей их под прямым углом пити *ef*, причем пити *ab* и *cd* играют роль вертикальных нитей; но передко встречается также устройство сетки из двух пар нитей, пересекающих друг друга под прямым углом.

Наведение биссектора пары питет на изображение визирного цилиндра сигнала или на блесток глиотропа или на фонарь сходно с наведением питет микрометра на штрихи лимба. При таком наведении оценка неравенства ширины промежутков, образовавшихся между краями изображения наблюдаемого объекта и питетами *ab* и *cd* (черт. 188), выполняется опытными наблюдателями при надлежащем выбранном расстоянии между питетами (не слишком широком, но тем более и не слишком узком), с высокой степенью точности — в смысле малости случайной ошибки установленного наблюдателем равенства расстояний наблюдаемого изображения от левой и правой питет. Обычно в больших инструментах угловое расстояние *ii* питет *ab* и *cd* бывает около  $35\text{--}40''$ .

Неравенство двух промежутков между краями изображения и питетами, составляющее  $\frac{1}{4}$  от меньшего из них, уже подмечается опытным наблюдателем, правда, всегда с некоторой постоянной личной ошибкой  $\Delta$ .



Черт. 188

Отсюда наибольшая ошибка наведения равна  $\frac{\pi}{18} \Delta$ . Но эта наибольшая ошибка вовсе не будет предельной в смысле способа наименьших квадратов.

Если условия наблюдений различных предметов, визируемых с данной станции в данном приеме, постоянны, то остается постоянной и величина  $\Delta$ ; это однообразие условий наблюдения различных предметов соблюдается в высокой степени в триангуляции I класса, именно благодаря наблюдениям световых сигналов. Другими словами, при опытном наблюдателе в триангуляции I класса мы можем вовсе не считаться с ошибкой  $\Delta$ , так как она исчезнет в окончательном выводе углов по направлениям. Величина  $\frac{\pi}{18}$  составляет около  $2''$ , и случайная ошибка наведения будет для опытного наблюдателя всегда при указанных благоприятных условиях заметно менее  $2''$ . Среднюю ошибку наведения приходится оценивать величиной, меньшей  $\pm 0'',6$ . Так как угловое расстояние  $i$  между нитями представляет собой угол при центре объектива, под которым усматривается линейное расстояние между ними, то чем более фокусное расстояние объектива, тем меньше  $i$  и тем менее ошибка визирования. Уменьшение  $i$  за счет уменьшения линейного расстояния между нитями может идти лишь до тех пор, пока обнаружение неравенства промежутков между изображением и левой и правой нитью, составляющими  $i$ , не более  $1:4$  от меньшего промежутка, выполняется без всякого напряжения. Опыт показывает, что не следует  $i$  иметь менее  $35''$  при увеличении трубы  $45-50$  и при фокусном расстоянии объектива в  $50-60$  см. При угле  $i$  в  $35-40''$  опытный наблюдатель выполняет установку предмета на середину между нитями с высокой степенью однообразия, и при наблюдении световых сигналов случайная часть ошибки визирования в его работе не превышает даже  $1''$ , так что средняя ошибка визирования сводится к  $0,3-0'',4$ . (Это не относится к тем случаям, когда свет фонаря едва виден — тогда можно иметь добавочную ошибку в  $2-3''$ ).

Совсем иные условия мы имеем при работах в триангуляции II и низших классов, где наблюдают верхние болванки сигналов и пирамид. Различие фона, на который проектируются разные сигналы с данной станции, различие степени освещенности наблюдаемых сигналов, почти полное исчезновение видимости некоторых предметов, как только предмет вводится в промежуток между нитями, — все это обусловливает значительные колебания в личной ошибке  $\Delta$ , которые могут даже повторяться однообразно для одних и тех же предметов в различных приемах; тогда создается из-за сходимости результатов по отдельным приемам ложное впечатление о малых ошибках визирования, в то время, когда они достаточно велики и далеко превышают те ошибки, которые соответствуют разрешающей силе трубы. Отсюда, конечно, вытекает, что оценка ошибки визирования в ряде случаев в триангуляции II класса будет очень затруднена; по существу, в равнинных районах только при расстояниях, меньших  $15$  км, имеем достаточную видимость верхних болванок и ослабленное влияние различия фона и освещенности, и при этих последних условиях среднюю ошибку визирования в десятисекундном теодолите будем иметь около  $\pm 2'',0$ .

В больших теодолитах визирование посредством биссектора пар нитей настолько точно, что установка трубы при помощи наводящег

винта алидады выполняется с большим трудом и значительной затратой времени: глаз наблюдателя ощущает такие неправильности установки биссектора вертикальных нитей, которые слишком мелки, чтобы их можно было легко исправлять посредством действия руки на винт, приводящий в движение громоздкую верхнюю часть инструмента. С другой стороны, при самом спокойном состоянии атмосферы все-таки изображения сигналов колеблются с амплитудой в  $2''$ . Эта два обстоятельства — трудность установки трубы посредством наводящего винта алидады и колебания изображений побуждают устраивать в трубе теодолита окулярный микрометр, чиия которого передвигаются в плоскости сетки нитей (в фокальной плоскости объектива). Устройство окулярного микрометра совершенно в общем такое же, как и описанное выше устройство микрометра в микроскопе. Окулярные микрометры можно хорошо рассмотреть на рисунках инструментов, приведенных в § 53: к окулярной трубке, вставляемой в объективное колено трубы, прикрепляется коробка с микрометром совершенно такого же устройства, как и микрометр в микроскопах для отсчитывания разделенных кругов, но только самая коробка берется больших размеров и большие размеры даются барабану микрометра, а главный винт имеет большую длину. Окуляр трубы инструмента ввинчивается в переднюю стенку коробки окулярного микрометра, обращенную к наблюдателю. Окружность барабана микрометрического винта окулярного микрометра обычно делится на сто частей, а полные обороты винта отсчитываются по зубцам расположенной в плоскости диафрагмы зубчатки. Нити окулярного микрометра, вследствие более мелкой нарезки главного винта микрометра по сравнению с нарезкой наводящего винта алидады, наводятся на изображения сигналов с полным удобством. Если при измерениях углов навести трубу на сигнал так, чтобы нульpunkt окулярного микрометра расположился вблизи изображения этого сигнала, а затем по закреплении алидады сделать несколько, например, три наведения нитей окулярного микрометра на визирный цилиндр сигнала с отсчетом каждый раз по барабану окулярного микрометра, — то вся эта работа займет немногим более времени, чем точное наведение неподвижных нитей при сильно увеличивающей трубе. Между тем средний отсчет  $S$  из сделанных при этом по барабану микрометра отсчетов будет содержать только часть ошибки, обусловленной и погрешностями наведения нитей микрометра, и колебаниями изображения. Само собой разумеется, что при указанном пользовании окулярным микрометром приходится среднес из отсчетов по микроскоп микрометрам на горизонтальном лимбе, которое мы назовем через  $N$  и которое соответствует бывшей при визировании на сигнал установке алидады, исправить некоторой поправкой  $\Delta$ , чтобы перейти от  $N$  к поправлению  $M$  на наш сигнал.

Назовем через  $\mu$  угол, под которым из центра объектива усматривается поступательное перемещение нитей при вращении барабана окулярного микрометра на одно деление ( $\mu$  — цена деления микрометра); через  $S_0$  — число целых оборотов, считаемых в нульpunktе окулярного микрометра (обычно  $S_0 = 10$ ).

Очевидно

$$\Delta = \pm (S - S_0) \mu,$$

$$M = N \pm (S - S_0) \mu.$$

Следует сказать, что постоянные нити трубы при окулярном микрометре становятся излишними: прямую, соединяющую центр объектива

прямой трубы с нульпунктом окулярного микрометра, мы можем принять за визирирую ось трубы, положение которой совершенно строго определено в теле трубы. Надлежит, конечно, так установить зубчатку микрометра и барабан его, чтобы эта прямая, соединяющая нульпункт с центром объектива совпадала с оптической осью объектива или была перпендикулярна к горизонтальной оси инструмента.

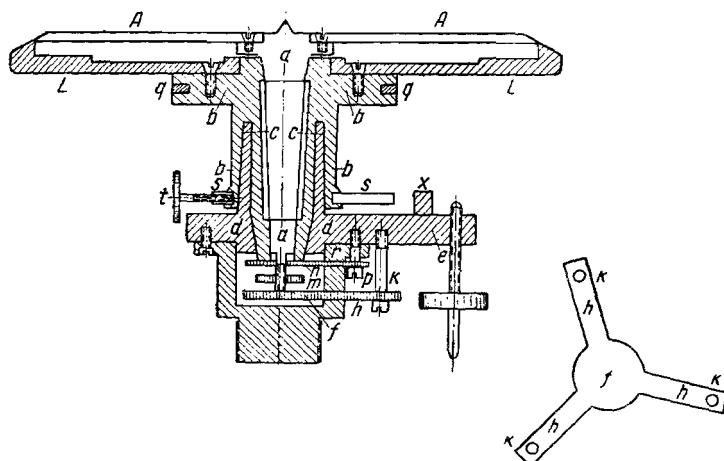
Замена биссектора неподвижных вертикальных нитей биссектором нитей окулярного микрометра применяется в широком размере при наблюдениях в триангуляции I класса СССР.

Исследование оптики трубы вообще требует методов и аппаратуры, изучаемых в теории оптических инструментов. Но геодезист может получить достаточно прочное суждение об отсутствии крупных недостатков в оптике трубы, производя исследование трубы по звездам согласно программе, приведенной в «Инструкции по триангуляции I класса» (издание 1933 г. и 1938 г.); к этой инструкции мы и отсылаем читателей.

### § 52. Устройство осей

В теодолитах средних размеров (лимб с диаметром 16—18 см) оси устраиваются или по системе Рейхенбаха (черт. 189) или по системе Борда (черт. 192).

На черт. 189: *A* — алидада, *L* — лимб; *a* — ось алидады, кончающаяся винтом; *m* — гайка этого винта, предупреждающая разъединение



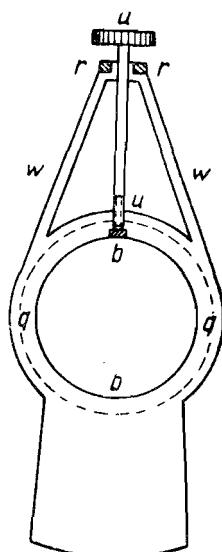
Черт. 189

алидады и лимба; *b* — ось лимба; *c* — полая цапфа в виде стакана, составляющая одно целое с основанием *d* подставки инструмента; *e* — один из трех рычагов, через которые проходят подъемные винты; *f* — стальная пластинка с тремя ответвляющимися от нее и составляющими друг с другом угол  $120^\circ$  пружинными полосками *h*; *k* — винт, проходящий через конец одной из таких пластинок *h*; *n* — вторая стальная пластинка, также с тремя ответвляющимися от нее пружинными полосками *r* (в середине пластинки *n* имеется отверстие, а полоски *r* образуют друг с другом угол в  $120^\circ$ ); *p* — винт, проходящий через пластинку *r* (см. черт.

189 и 194);  $q$ —кольцо с хомутом  $w$ , через который проходит зажимной винт  $u$  алидады (см. черт. 190);  $s$ —кольцо, через которое пропускается зажимной винт  $t$  лимба (см. черт. 189, 191 и 194).

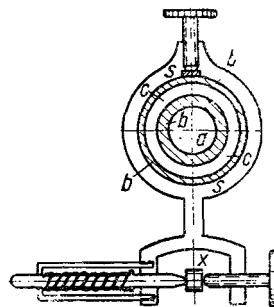
Как видно, в системе Рейхенбаха лимбовая ось  $b$  имеет две втулки; первой втулкой эта ось насыживается на цапфу  $c$ , а во вторую втулку входит ось алидады  $a$ . Соприкосновение оси  $a$  с лимбовой втулкой происходит не по всей ее длине, а только в верхней и нижней ее частях. Действуя винтами  $p$ , можно изменять величину давления лимбовой оси на цапфу  $c$ ; точно так же, действуя винтами  $k$ , можно изменять положение оси  $a$  в ее втулке и этим устраивать, при слишком осевшей вниз алидаде, сцепление между поверхностями оси и втулки, а при слишком поднятой алидаде—колебания оси во втулке и зазор между краями алидады и лимба.

В системе осей Борда, изображенной на черт. 192, полый цилиндр  $c$  (вернее, усеченный конус), составляющий одно целое с основанием  $d$

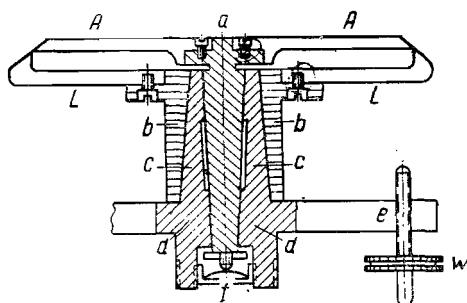


Пунктиром показана  
внешняя окружность оси  $b$

Черт. 190



Черт. 191

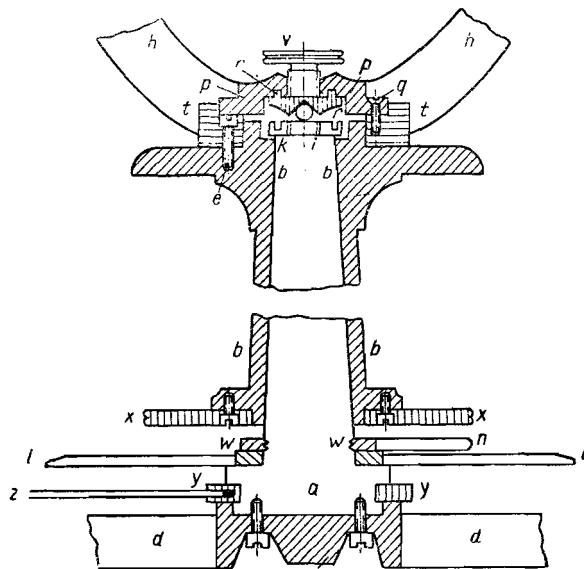


Черт. 192

подставки теодолита, несет в себе коническую ось алидады  $a$ ; осевая же полая цапфа  $b$  лимба охватывает спаружи этот конус  $c$  так, что внутренняя ее поверхность касается внешней поверхности конуса  $c$ . Ось алидады  $a$  упирается в пружину  $f$ , а цапфа  $b$  в отшлифованную в плоскость верхнюю грань основания  $d$ . Обделка по конусу внешней поверхности цапфы имеет целью сделать невозможным изменения в положении лимба по высоте.

В больших теодолитах (диаметр лимба более 21 см) давление на лимбовую ось верхней части, т. е. трубы и ее подставки, вертикального

круга и его противовеса, а также двух составляющих горизонтальную ось конусов значительно возрастает. С другой стороны, существенным являются в точных инструментах требования, чтобы не только при своем вращении алидада и алидадная ось не влияла на положение лимба и лимбовой оси, но и чтобы при закреплении алидады и при работе ее паводящим винтом никаких давлений на лимб инструмента не оказывалось; устройство осей должно обеспечивать полную изолированность лимба и алидады друг от друга. Эта цель вполне достигается в репсольдовой системе осей, изображенной на черт. 193 и описываемой ниже. С массивным основанием  $d$  инструмента, несущим подъемные



Черт. 193

винты, соединяется солидными винтами массивная же коническая цапфа  $a$  из стали. На уступе этой цапфы лежит лимб  $l$  теодолита, выше же лимба находится гайка  $w$  с тренажом, составляющими друг с другом углы в  $120^\circ$ , ответвлениями  $n$ . Гайка  $w$  ходит по нарезке, сделанной выше лимба на цапфе  $a$ , и прижимает при ее завинчивании лимб к уступу, на котором он поконится. Сверху на цапфу  $a$  надевается бокса  $b$  алидады; к этой боксе четырьмя солидными винтами  $e$  привинчивается массивная пластина  $t$ , от которой отвечаются сверху составляющие с ней одно целое подставки трубы  $hh$ . В пластине  $t$ , в ее средней части, имеется отверстие, закрываемое покрышкой  $r$ . Эта покрышка соединяется винтами  $q$  с пластиной  $t$ ; в середине ее имеется матка для винта  $v$ , снабженного широкой щелицей. Винт  $v$  кончается тщательно отшлифованной плоскостью, которая касается также тщательно отшлифованной в плоскости верхней грани свободной (т. е. не соединенной винтами ни с какими частями) пластинки  $rr$ . Цапфа  $a$  завершается сверху полусферой, с которой соприкасаются две плоские грани, имеющиеся в нижней части пластинки  $rr$ . Ниже полусферы цапфа  $a$  имеет винтовую нарезку  $i$ , на которую навинчивается гайка  $k$ ; эта гайка препятствует разъединению боксы  $b$  и цапфы  $a$ . Буквой  $y$  обозначены на чертеже кольца и идущий

от него хомут, через который проходит стержень  $z$  зажимного винта алидады. Имея тонкий и ровный слой масла между соприкасающимися частями поверхностей цапфы  $a$  и бюксы  $b$ , можно после ряда попыток установить винт  $v$  так, что вращение алидады будет совершаться легко и притом без колебаний, около постоянной оси. Достигнута или нет такая установка — это обнаруживает уровень, ставящийся на горизонтальную ось\*. Устройство зажимного винта алидады не показано на черт. 193; но это устройство таково, что при закреплении алидады винт давит на массивную нижнюю часть цапфы  $a$ , совершая при этом лимба.

Теодолиты с системой осей Рейхенбаха или Борда называются повторительными, потому что они позволяют применять способ повторения при измерении углов (чего нельзя сделать при репсольдовской системе осей). Особенности в устройстве сеей имеются в новом американском теодолите Паркхерста и в теодолитах Вильда; на них мы остановимся при самом описании этих инструментов.

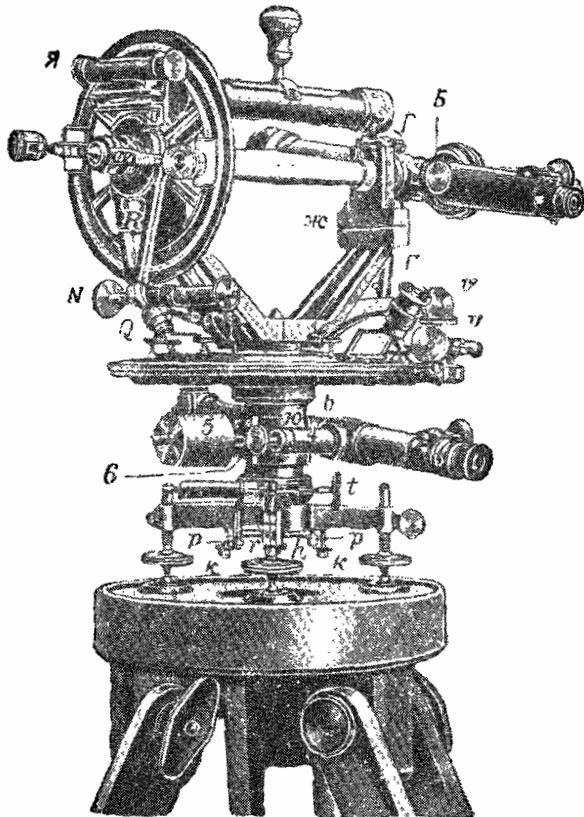
### § 53. Описание инструментов, служащих для измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний в триангуляции

На черт. 194 изображен десятисекундный повторительный теодолит Керна, имевший значительное применение на триангуляциях III и отчасти II классов в России до 1917 г. В настоящее время этот тип инструмента заменяется теодолитами типа Вильда и Цейсса, а в триангуляции II класса — сце и десятисекундным теодолитом новой конструкции. Но этот десятисекундный теодолит Керна настолько хорошо отработан и настолько является типичным, что ознакомление с ним полезно, тем более, что инструменты такого типа еще не вышли из употребления.

Горизонтальный круг инструмента имеет диаметр 18 см и отсчитывается двумя десятисекундными верньерами, рассматриваемыми при помощи простых луп. Вертикальный круг имеет диаметр 15 см и отсчитывается десятисекундными верньерами. Если инструмент в полном порядке, то отсчет горизонтального круга по одному верньеру имеет погрешность, не превышающую 5"; на вертикальном круге правильно взять десять секунд — затруднительно, и здесь предельная ошибка отсчета должна быть принята равной 10". Труба имеет отверстие объектива в 33 мм при фокусном расстоянии в 27 см; увеличение трубы 30. На расстоянии в 15 км такая труба «берет» с трудом, если только сигнал не просматривается на небо. Труба внецентренная, расположенная на одном конце горизонтальной оси; на другом конце этой оси располагается вертикальный круг, вращающийся вместе с трубой; вертикальный круг совершенно уравновешивает трубу. Алидада вертикального круга соединена двумя винтами, которые на черт. 194 закрыты держащими лупы рычажками с хомутом  $R$ ; этот хомут свободно падет кольцом на конец горизонтальной оси и вверху лежит на себе уровень, а внизу оканчивается приливом  $Q$ , зажатым между винтом  $N$  и противодействующей ему пружиной. Винт  $N$  служит для приведения уровня  $Я$  в горизонтальное положение при отсчитывании верньеров вертикального круга. Вертикальный круг привинчен наглухо к горизонтальной оси и, следовательно, при измерениях зенитных расстояний не может переставляться.

\* Поступательные в горизонтальной плоскости перемещения бюксы  $b$  обнаруживаются по переменам элементов эксцентрикитета алидады.

На тот конец горизонтальной оси, на котором укреплена труба, надет хомут  $\Gamma\Gamma$ , через охватывающее горизонтальную ось кольцо которого проходит зажимной винт  $B$  трубы; хомут оканчивается внизу языком или приливом  $\Gamma$ , конец которого зажимается между винтом  $v$  и противодействующей ему пружиной (не видна на чертеже); винт  $v$  есть наводящий винт трубы.

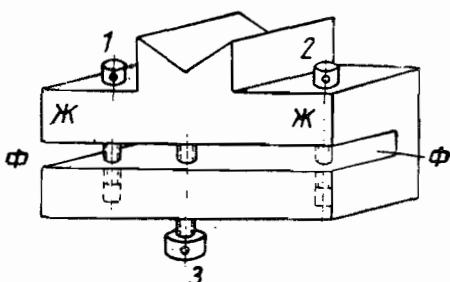


Черт. 194

На черт. 194 изображен инструмент, у которого зажимной винт алидады устроен не так, как это показано на черт. 190: здесь зажимной винт  $v$  алидады соединяется две половинки клещей, из которых верхняя ходит по круговому пазу, выбранному в алидаде, а нижняя—по круговому пазу, выбранному в лимбе с его нижней стороны (это устройство, недопустимое в точных угломерных инструментах, теперь в инструментах Керна заменено устройством, см. черт. 190).

На горизонтальную ось ставится уровень с ценой деления  $10-12''$ ; уровень вертикального круга имеет цену деления  $10''$ . Подставка, ближайшая к трубе, имеет в верхней части устройство, изображенное на черт. 195: в стойке  $\mathcal{JJ}$ , на половину ее толщины, сделан выпил  $\Phi\Phi$ , который может вследствие упругости металла стягиваться винтами  $1$  и  $2$  и расширяться винтом  $3$ ; винт  $3$  концом упирается в верхнюю плоскость выпила; матки для винтов  $1$  и  $2$  сделаны в нижней половине стойки  $\mathcal{JJ}$ .

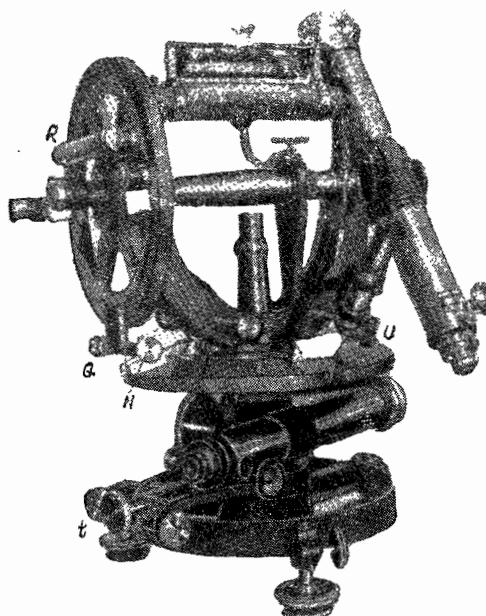
(т. е. начинаются от нижней плоскости выпила  $\Phi\Phi$ ). Труба должна всегда находиться на подставке с винтами 1, 2, и 3. Оси рассматриваемого инструмента и зажимной винт лимба устроены так, как изображено на черт. 189 и 191. Осевую цапфу  $b$  лимба с внешней стороны охватывает широкое кольцо  $Ю$  с втулкой 4; в эту втулку вкладывается конус, составляющий отросток поверительной трубы и являющийся горизонтальной осью этой трубы. Зажимной винт, проходящий через утолщение в кольце  $Ю$ , упирается своим концом в осевую цапфу  $b$  лимба и по закреплении этого винта получается достаточно прочное соединение поверительной трубы с лимбом; она может после этого вращаться лишь в вертикальной плоскости, если отпустить винт  $b$ , который входит в матку, сделанную в конце вышеупомянутой конической оси поверительной трубы, вкладывающейся во втулку  $Ю$  (винт  $b$  тянет при ввинчивании его коническую ось внутрь конической втулки  $Ю$ ). Вертикальные нити поверительной трубы могут легко передвигаться посредством двух винтов с довольно широкими головками, пропущенных через стенки окулярной трубы и упирающихся концами в рамку сети нитей; этими же винтами сетка, по наведении нитей на предмет, может бытьочно закреплена.



Черт. 195

В вертикальной плоскости, если отпустить винт  $b$ , который входит в матку, сделанную в конце вышеупомянутой конической оси поверительной трубы, вкладывающейся во втулку  $Ю$  (винт  $b$  тянет при ввинчивании его коническую ось внутрь конической втулки  $Ю$ ). Вертикальные нити поверительной трубы могут легко передвигаться посредством двух винтов с довольно широкими головками, пропущенных через стенки окулярной трубы и упирающихся концами в рамку сети нитей; этими же винтами сетка, по наведению нитей на предмет, может бытьочно закреплена.

В триангуляциях II класса в СССР применяют с успехом десятисекундные универсалы, изготавляемые в последнее время нашими заводами. Такой инструмент изображен на черт. 196. Диаметры горизонтального и вертикального кругов равны 17—18 см; вертикальный круг отсчитывается

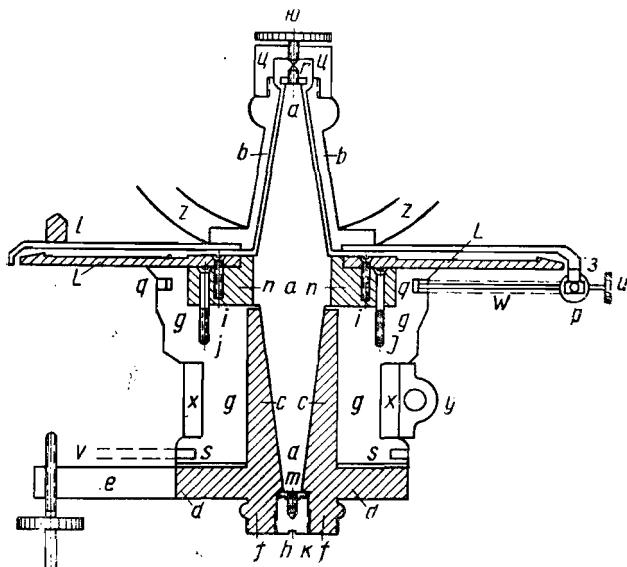


Черт. 196

десятиsekundными верньерами, рассматриваемыми через простые лупы, с ошибкой, не превышающей 5", благодаря достаточной величине диаметра круга и изяществу штрихов. Горизонтальный круг отсчитывается также десятисекундными верньерами, но при рассматривании их «микроскоп-тупами», т. е. микроскопами с увеличением около 12. Так как штрихи лимба и верньера в этих инструментах достаточно тонки и изящны, то такие микроскоп-лупы позволяют оценивать половину точности верньера и брать отсчет до 5", с предельной ошибкой около 3". Соединение трубы (внекентренной) с горизонтальной осью и устройство зажимного и паводящего винтов трубы аналогичны таковым

же в вышеописанном универсале Керна. Алидада вертикального круга (черт. 196) одновременно является покрышкой для вертикального круга; к ней в нижней части привинчена вилка  $Q$ , через которую пропущен винт  $N$  для установки уровня  $Я$  при вертикальном круге и противодействующая ему пружина. Вилка  $Q$  охватывает выступ  $l$ , привинченный к покрышке лимба (черт. 197), и в боковые грани этого выступа упирается винт  $N$  и противодействующая ему пружина.

Труба (главная) имеет диаметр объектива 38 мм и два окуляра с увеличением 32 и 38. Устройство осей и нижней части в этих десятискрупдных универсалах существенно иное, чем в универсале Керна.



Черт. 197

Стальная ось  $a$  (черт. 197) верхним своим конусом является осью али-  
дады, а нижним конусом — осью лимба; этот нижний конус оси  $a$  вкла-  
дывается в полую медную цапфу  $c$ , идущую кверху от основания ин-  
струмента  $d$ . От основания  $d$  идут три рычага  $e$ , несущие подъемные  
винты; на нижний выступ  $ff$  основания  $d$  навинчивается стаповой  
винт инструмента. Внутри выступа  $ff$  имеется винтовая нарезка, по  
которой ходит винт  $h$ . Этот винт  $h$  упирается в винт  $k$ , которым  
заканчивается внизу ось  $a$ ; регулируя винт  $h$ , достигаем правильного  
вращения лимба около вертикальной оси; шайбочка  $m$ , павинченная  
на  $k$ , препятствует произвольному разъединению лимба и основа-  
ния  $d$ .

В средней части на ось  $a$  надета бронзовая часть  $pp$ ; к ней четырьмя винтами  $i$  привинчен лимб  $L$  и к ней же четырьмя винтами  $i$  прикрепляется массивная медная часть  $gg$ , соединяющаяся таким образом с лимбом и частью  $pp$  в одно целое. На медную часть  $gg$  надеты три кольца: первое кольцо  $ss$  с хомутом  $v$  — для зажимного винта  $t$  лимба (черт. 196); второе кольцо  $qq$  с хомутом  $W$ , через которое проходит зажимной винт  $u$  алиады; устройство колец  $qq$ ,  $ss$ , хомутов  $W$  и  $v$  и винтов  $u$  и  $t$  совершенно такое же, какое изображено на черт. 190; третье кольцо  $xx$  несет повсирательную трубу. Кольцо

хх имеет щеки *y*, которые стягиваются зажимным винтом поверительной трубы. Наводящий винт *P* алидады и противодействующая ему пружина упираются в пластинку *z*, привинченную к покрышке лимба.

Алидада надевается боксой *b* на верхний конус оси *a*. От нижней утолщенной части боксы *b* идут подставки трубы *zz*. Ось *a* вверху заканчивается винтом *r*; на верхнюю часть боксы *b* навинчивается полый цилиндр *u*, через который пропущен винт *ю*. Винт *ю* с широкой шляпкой упирается в плоскость, которой заканчивается винт *r*. Очевидно, регулируя винт *ю*, достигаем правильности вращения алидады около вертикальной оси; на ободке цилиндра *u* имеются деления, а на ободке шляпки винта *ю* — индекс.

Несомненно, что в описанном инструменте устройство осей представляет нечто среднее между системой Рейхенбаха и Репсольда. Инструмент остается повторительным, но в то же время вращение алидады и закрепление ее не сказываются на положении лимба.

Описанные только-что десятисекундные универсальные инструменты (черт. 196) имеют достаточно большой вес и представляются излишне громоздкими для заполняющих сетей II класса. Кроме того, в этих инструментах и в рассмотренном ранее инструменте Керна — труба внецентренная, что также, по существу, нежелательно. Поэтому следовало бы:

1) конструкцию Керна заменить теодолитом с прямой центральной трубой такой же мощности, как указанная для ранее описанного инструмента Керна, и с такими же размерами горизонтального и вертикального кругов, какие были указаны для этого инструмента ранее;

2) конструкцию инструмента, изображенного на черт. 196, возможно облегчить без понижения, однако, точности даваемых инструментом результатов.

Мы могли бы привести рисунки изготавляемых заграницными фирмами теодолитов с центральной прямой трубой, имеющих те же размеры кругов и трубы и дающие ту же точность результатов, что и описанный выше десятисекундный теодолит Керна с внецентренной трубой. Но эти инструменты не имеют поверительной трубы; другими словами, готовых конструкций для замены описанного теодолита Керна мы не имсем.

По существу, до сих пор мы не имеем конструкций инструментов с кругами, отсчитываемыми 10-секундными верньерами, вполне отвечающих условиям наших работ в заполняющих сетях II класса, в которых стороны треугольников нередко достигают 16—17 км и в которых сообщение между пунктами достаточно затруднено. Возможно, что выходом из положения явится переход на инструменты типа Вильда и Цейсса.

В основных рядах II класса требуется достигать результатов заметно более высокой точности, чем в заполняющих сетях II класса. С другой стороны, размеры сторон треугольников здесь около 25 км, тогда как в заполняющих сетях следует стремиться иметь стороны треугольников, не превышающие 14—15 км. В основных сетях II класса одним из подходящих инструментов является изображенный на черт. 198 универсальный пятисекундный инструмент, изготовленный ранее по нашим заказам фирмой Гильдебранд, а теперь, с некоторыми целесообразными изменениями в конструкции, изготавливаемый нашими заводами. Горизонтальный и вертикальный круги этого инструмента имеют

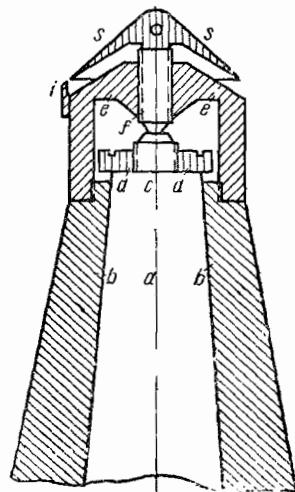
диаметр 17 см и отсчитываются пятисекундными микроскоп-микрометрами. Горизонтальный и вертикальный круги подразделены через десять минут: винт микрометра делает при измерении десятиминутного промежутка два оборота; при 60 делениях на ободке барабана микрометра  $n_0 = 120$  и  $\mu_0 = 5''$ , средняя ошибка отсчета по микроскоп-микрометру не превышает  $\pm 1'',0$ . Горизонтальный круг покоятся на уступе центральной стальной цапфы *a* (см. черт. 193 или черт. 200); гайки *w*, которая прижимает лимб к уступу, однако, не имеется, так как лимб настолько хорошо притерт к этому уступу, что неподвижность его за время одного приема вполне обеспечена; перестановку же лимба между приемами делают, взявшись руками за пуговки, ввинченные в лимб с его нижней стороны. Алидада своей бюксой *b* (черт. 193) надевается на ту

Черт. 198

же центральную цапфу *a*, и, следовательно, в этих пятисекундных универсалах имеется репсольдова система осей.

Соединение бюксы *b* алидады с верхней частью центральной цапфы *a* показано на черт. 198а; цапфа *a* завершается винтом *c*, оканчивающимся вверху тщательно шлифованной плоскостью; в эту плоскость упирается винт *f*, имеющий грибообразную пяльку *s* и оканчивающийся внизу тщательно шлифованной плоскостью; винт *s* проходит через часть *ee*, павиличающуюся на бюксе *b*. На пяльке *s* нанесены подразделения, а в верхней части бюксы *b* (т. е. на *ee*) имеется индекс *i*; шайбочка *d* препятствует произвольному разъединению бюксы *b* и оси *a*. Зажимной винт *e* алидады устроен так, как это показано ниже при описании большого 27-см теодолита (черт. 200): особенностью устройства является то, что зажимной винт при работе давит только на массивное основание инструмента, от которого выведена кверху ось *a*, а отнюдь не на лимб инструмента.

Главная труба инструмента—центральная, ломаная—имеет объектив с диаметром около 38 мм при фокусном расстоянии около 33 см; три окуляра дают увеличения 29, 33 и 44; труба имеет окулярный микрометр с ценой деления около 1'',3. Польцу *k*, соединяющему рычаги дрейфуса, ходит особого устройств



Черт. 198а

каретка, несущая поверительную трубу; устройство этой каретки (с несущественными изменениями) подробно описано ниже и указано на черт. 202б; *E* (на черт. 198) — зажимной винт поверительной трубы. Поверительная труба имеет объектив с диаметром 33 *мм* при фокусном расстоянии 32 *см*; увеличение 29; труба снабжена окулярным микрометром. Как видно, поверительная труба соединяется не с лимбом инструмента, а с подставкой (дрейфусом) инструмента; но азимутальные сдвиги лимба, поскольку они не обусловлены сдвигами подставки, являются совсем мало вероятными и в практике не наблюдаются.

При инструменте имеются два уровня — перекладной, ставящийся на цапфы горизонтальной оси, с ценой деления около 5"; уровень при раме с микроскопами вертикального круга, служащий для введения поправок в отсчеты вертикального круга, с ценой деления около 3". Инструмент снабжен электрическим освещением, что совершенно соответствует его назначению, так как в основных рядах II класса нередко приходится применять ночные наблюдения.

Описанный инструмент и в основных частях, и в деталях имеет точно такое же устройство, как рассматриваемый далее двухсекундный универсал, применяемый в триангуляции I класса (см. черт. 201), — только все размеры соответственно меньше.

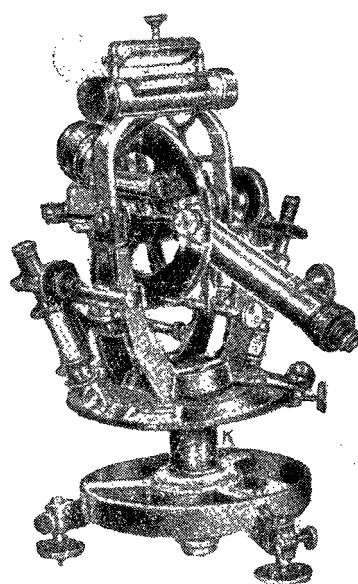
Для основных рядов триангуляции II класса надлежало бы в описанный инструмент внести следующие изменения:

1) заменить ломаную трубу прямой и увеличить немного диаметр объектива и фокусное расстояние;

2) уменьшить диаметр вертикального круга до 13,5 *см*.

Эти изменения, однако, являются полумерами — вся конструкция очень сложна; ломаная труба замедляет работу; далее, регулирование положения алидадной блоксы и вращения алидады посредством грибка *s*, как нам известно, нередко вызывает в наших работах значительные затруднения на каждом пункте наблюдений. Последнее может быть отнесено как за счет условий перевозки инструментов во время полевых работ, так и за счет, может быть, недостаточной массивности соответственных частей инструмента, потому что в больших 27-см теодолитах, перевозимых с места на место в тех же условиях, жалоб «на работу грибка» не приходилось слышать.

По моему предложению с 1928 г. в работах бывшего Главного геодезического управления на основных рядах II класса начали применять инструменты Гильдебранда, имеющие название «Baiaart Schweizer Landes topographie». Такой инструмент изображен на черт. 199. Горизонтальный его круг имеет диаметр 18 *см*; круг разделен через 10' и отсчитывается с помощью двух микроскоп-микрометров с ценой деления барабана 2". Вертикальный круг диаметра 16 *см* отсчитывается посредством десятисекундных верньеров. Труба прямая, центральная; диаметр объектива



Черт. 199

трубы 36 *мм*, фокусное его расстояние 32,5 *см*; увеличение трубы 35. Эта оптика может быть усиlena с доведением отверстия объектива до 40 *мм* и фокусного его расстояния до 34—35 *см*, при увеличении трубы около 40. Труба переводится через надир объективом. Коническая ось алидады вращается во втулке центральной колонны *K*; на уступе этой же колонны покоятся горизонтальный круг, не закрепляемый никакими винтами. По существу, система устройства осей в этом инструменте должна быть отнесена к типу осей Борда.

Понятно, что и эта конструкция не вполне отвечает нашим требованиям — в описанном инструменте отсутствуют поверительная труба и окулярный микрометр при главной трубе. Но кольку, несущему рычаги с подъемными винтами, по надлежащему увеличению его массивности и жесткости, можно легко приделать поверительную трубу, снабжение же главной трубы окулярным микрометром является легко выполнимой деталью.

Поэтому, думается, надо идти по пути приспособления этой конструкции „Bauart Schweizer Landestopographie“ к нашим условиям, чтобы получить инструменты, отвечающие всем заданиям наблюдений в основных рядах триангуляции II класса. Преимущества репсольдовской системы осей особенно ценны при наблюдениях в триангуляции I класса; применение системы осей Борда, при искусном изготовлении инструмента, есть, думается, то самое, на что мы можем пойти в инструментах для основных рядов II класса, при одновременном достижении существенных удобств в работе.

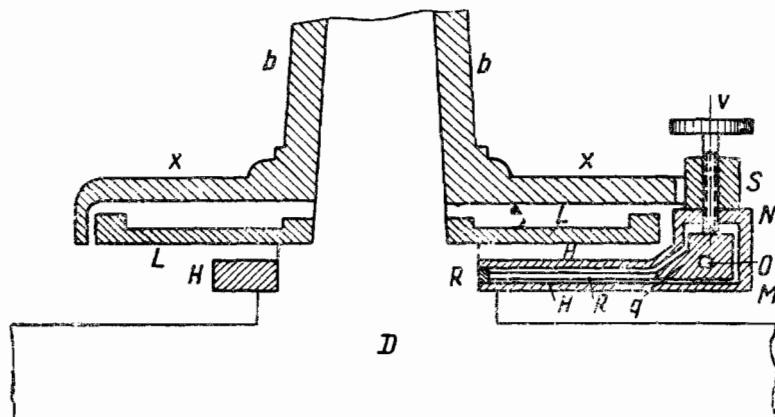
Для работ на наших триангуляциях I класса служат инструменты Гильдебранда и инструменты, изготавляемые теперь заводом «Аэрогеоприбор», — большие теодолиты и геодезические универсалы. Такой геодезический универсал изображен на чертеже 201. Вертикальный и горизонтальный круги имеют диаметры или 21 или 27 *см*. В инструментах с диаметром горизонтального круга в 21 *см* круги подразделяются через пять минут и отчитываются микроскоп-микрометрами, снаженными двумя парами нитей; расстояние между парами нитей равно двум оборотам винта микрометра, а пятиминутный интервал лимба измеряется  $2\frac{1}{2}$  оборотами винта; на ободке барабана микрометра имеется 60 делений; таким образом,  $n_0 = 150$  и  $\mu_0 = 2''$ . Круги с диаметром 27 *см* подразделяются через четыре минуты; два оборота винта микрометра измеряют этот четырехминутный интервал на лимбе; на ободке барабана имеется 60 делений, но две пары нитей микрометра ставятся в расстоянии  $1\frac{1}{2}$  оборота винта друг от друга; таким образом, здесь  $n_0 = 120$  и  $\mu_0 = 2''$ . Средняя ошибка отсчета по микрометру составляет около  $\pm 0''.4$ . Труба инструментов с 27-см кругами имеет объектив с диаметром 63 *мм* (при фокусном расстоянии 54 *см*) и три окуляра, дающие увеличение 40, 50 и 65. Поверительная труба имеет объектив с диаметром 33 *мм* при увеличении 28 $\times$ . Обе трубы имеют окулярные микрометры; цена деления микрометра главной трубы — около 1'', цена деления микрометра поверительной трубы — 1'',5. В инструментах с диаметром кругов 21 *см* главная труба имеет объектив с диаметром 48 *мм*, фокусным расстоянием около 43 *см*; три окуляра дают увеличения 36, 45, 54; поверительная труба имеет объектив с диаметром 33 *мм* и увеличение 28; обе трубы имеют окулярные микрометры с ценой деления около 1'' для главной трубы и около 1'',5 — для поверительной трубы. Главная труба ломаная.

Вертикальный круг прижимается к кубу трубы, в котором помещена призма, посредством гайки, ходящей по нарезке горизонтальной оси; спустив эту гайку, переставляют вертикальный круг руками на должное число градусов при переходе от одного приема измерения зенитных расстояний к другому.

Микроскопы вертикального круга укреплены на раме, надетой свободно на горизонтальную ось трубы; на этой же раме укреплен уровень *u* (черт. 201) с ценой деления около  $2''$ ,5. От рамы, несущей микроскопы, идет вниз отросток, в который с двух сторон упираются винт *h* и противодействующая ему пружина *n*, пропущенные через подставки трубы; работая винтом *h*, приводим на середину пузырек уровня *u* (или в положение, близкое к среднему) перед отсчитыванием вертикального круга.

Встречается нередко и другое устройство алидады вертикального круга, когда микроскопы соединяются жестко с подставками трубы и когда, следовательно, микроскопы вертикального круга не имеют микрометрического движения в вертикальной плоскости. В таком случае в инструментах Гильдебранда на верхней, горизонтальной, грани коромысла, держащего микроскопы, укрепляются агатовые, тщательно шлифованные в плоскость пластинки; на эти пластинки ставятся ножки уровня, кончающиеся тщательно шлифованными шариками; уровень на агатовых пластинках придерживается застежками (откидными) с пружинками.

Цена деления уровня, ставящегося на горизонтальную ось, около  $2''$ ,5 (в инструментах 21-см и 27,5-см). Горизонтальная ось подпирается двумя ложными лагерами (черт. 202а).

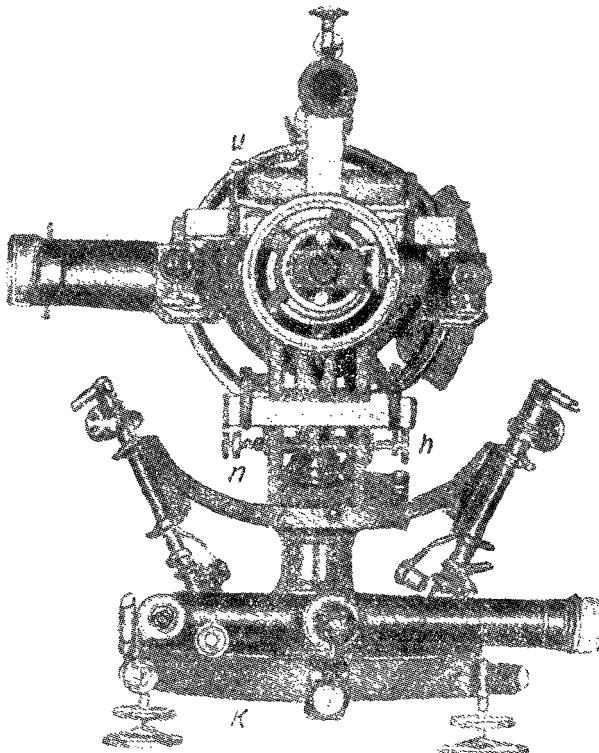


Черт. 200

Горизонтальный круг — закрытый, покоятся на уступе центральной панцы *a* (черт. 200), на которой ничем не закрепляется, но настолько хорошо притерт к этому уступу, что неподвижность горизонтального круга за время исполнения приема вполне гарантирована; перестановка лимба между приемами делают руками, взявшись за пуговки, ввинченные в лимб с нижней стороны.

Устройство осей в этих инструментах то же самое, что и изображенное на черт. 193, по для регулирования вращения алидады служит устрой-

ство более простое, показанное на черт. 198а. Зажимной и наводящий винты алидады работают следующим образом. К покрышке  $x$  горизонтального круга, соединенной винтами с боксой  $b$  алидады (черт. 200), привинчена вилка, охватывающая кубический выступ  $S$  нижнего хомута  $NNN$ ; через эту вилку пропущены упирающиеся своими концами в выступ  $S$  наводящий винт алидады и противодействующая ему пружина. Через выступ  $S$  проходит закрепительный винт  $\tau$  алидады. Нижний хомут  $NNN$  в том конце, через который проходит винт  $\tau$ , имеет утолщение  $TNM$  в виде коробки, полой внутри,—здесь помещается кубик, закругленный с одной грани и имеющий внизу выступ  $q$ . Этот кубик может в известных пределах вращаться около оси  $O$ , укрепленной эксцентрично в стенках коробки  $TNM$ , выступ же  $q$  упирается в стержень  $RR$ . При завинчивании винта  $\tau$  выступ  $q$  кубика пойдет по направлению к центру инструмента и прижмет стержень  $RR$  к основанию  $D$  дрейфуса инструмента, вследствие чего получится закрепление хомута  $NNN$  и алидады инструмента. Работа зажимного и наводящего винтов не оказывает никакого действия на лимб инструмента

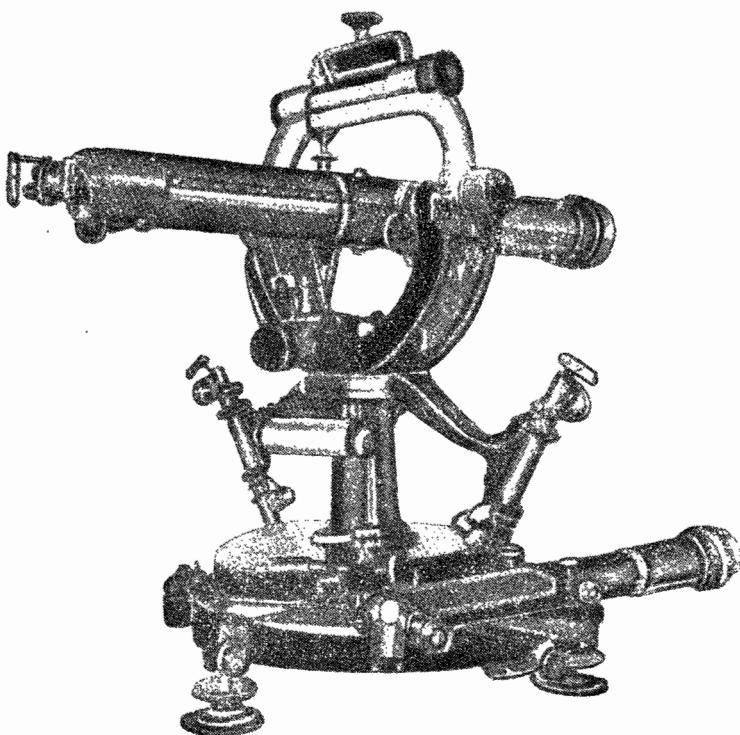


Черт. 201

Советские инструменты существенно отличаются от применяемых за границей тем, что они всегда снабжаются поверительной трубой. Описем устройство поверительной трубы.

Ниже лимба центральную цапфу (или, вернее, основание дрейфуса) охватывает кольцо, от которого идет пластина  $pp$ ; эта пластина окан-

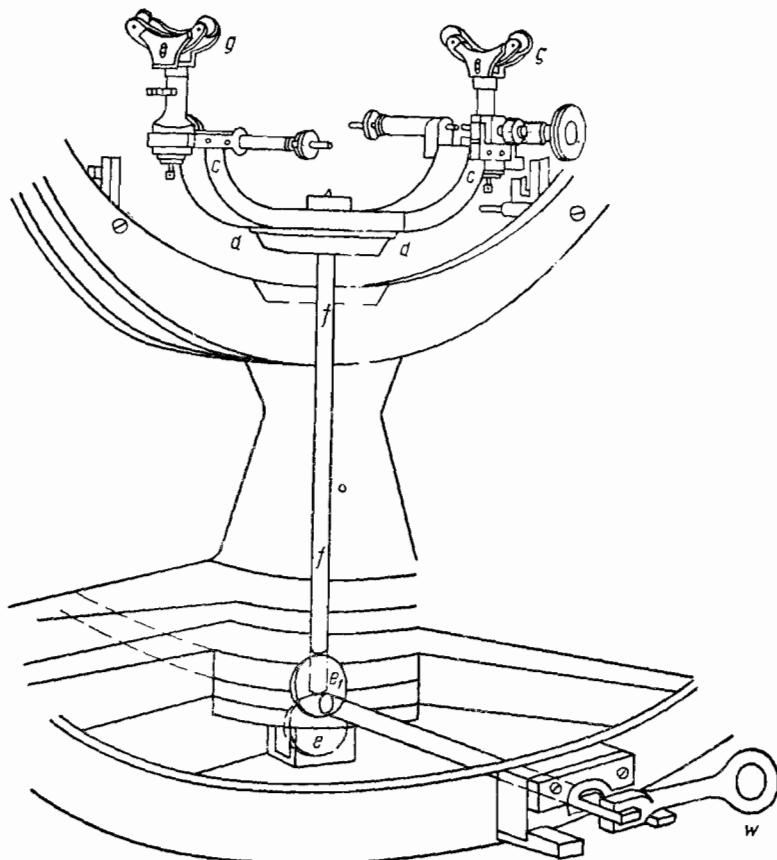
чивается кареткой *rrr*, охватывающей кольцо *kk* (черт. 201 и 202 б) треножника инструмента; выше каретки от утолщенной пластины *pp* выведены две подставки *ss* с лагерами *ll*; в эти лагеры вкладывается горизонтальная ось *h* поверительной трубы. Винт *l*, широкая шляпка которого имеет прилив *y*, служащий рукояткой при завинчивании или отпуске винта *t*, проходит через стенку каретки *rrr* и упирается в углубление в кубике *q*, лежащем свободно в гнезде; врачающая рукоятку *y*, прижимают кубик *q* к приливу кольца *kk* и тем закрепляют поверительную



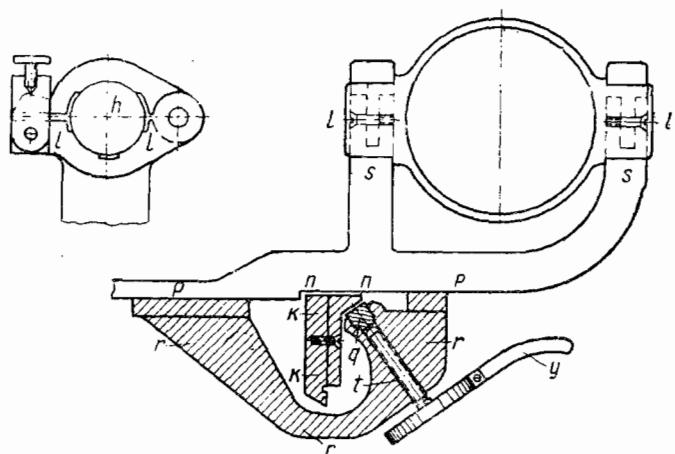
Черт. 202

трубу по азимуту; для закрепления ее по высоте служат застежки, на-  
кильзывающиеся сверху на лагеры *ll*; плоскостью *nn* каретка лежит на  
верхней грани кольца *kk*.

На черт. 202 изображен большой теодолит Гильдебранда для наблюдений в триангуляции I класса. Горизонтальный круг (закрытый) имеет диаметр 27,5 см, разделен через 4 минуты, отсчитывается микроскоп-микрометрами с ценой деления барабана 2"; микрометры имеют две пары нитей на расстоянии  $1\frac{1}{2}$  оборота винта друг от друга. Труба прямая, центральная, с объективом диаметром 65 мм, при фокусном расстоянии 64 см; три окуляра дают увеличения 43, 59 и 72; горизонтальная ось трубы подпирается двумя ложными лагерами. Поверительная труба имеет объектив диаметром 36 мм, увеличение 30. Главная и по-



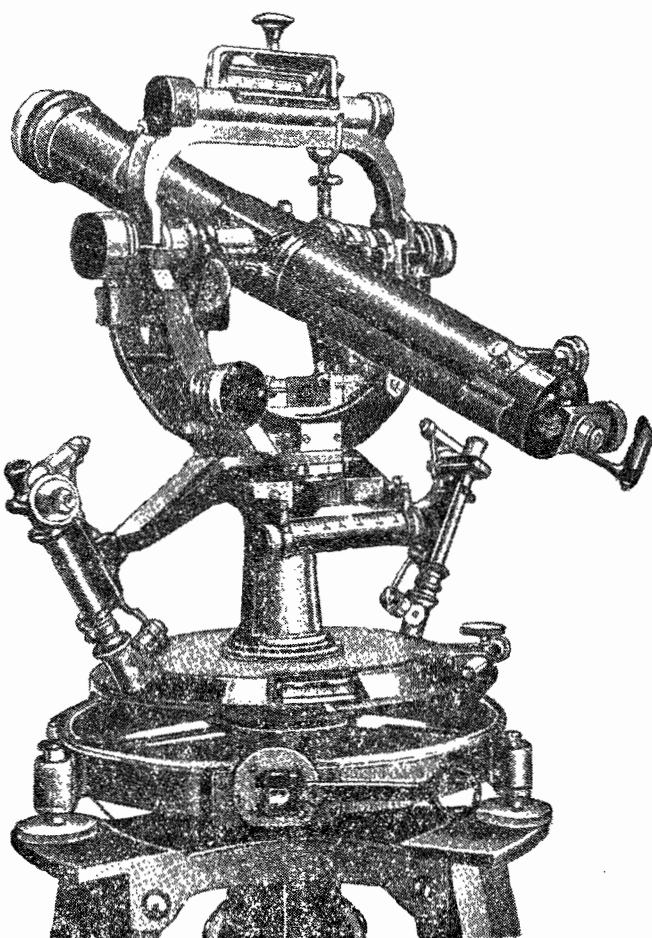
Черт. 202а



Черт. 202б

верительные трубы имеют окулярные микрометры с ценой деления около  $1''$ . Соединение поверительной трубы с кольцом  $k$  треножника и соединение лимба с вертикальной осью те же самые, как и в описанном выше 2-секундном универсале Гильдебранда (черт. 202б). Устройство захватного винта алидады такое же, как в геодезическом универсальном инструменте, изображенном на черт. 201.

Соединение алидадной боксы с вертикальной осью инструмента несколько иное, чем указано на чертежах 193, 198а; изменение обусловлено наличием в инструменте особого механизма для перекладывания горизонтальной оси вместе с трубой в лагерях. Такая перекладка выполняется поворачиванием влево рычага  $\tau$  (черт. 202 и 202а), причем эксцентрик  $e$  переходит в положение  $e_1$  и поднимает кверху стержень  $ff$ ,



Черт. 203

который своим нижним закругленным концом касается всегда высшей точки эксцентрика  $e$ . Стержень  $ff$  пропущен сквозь центральную запфу  $a$  и заканчивается паверху площадкой  $dd$ , к которой привинчено наглухо коромысло  $cc$ , несущее ложные лагеры  $gg$ . При перекладывании трубы

верхняя часть инструмента, следовательно, вращается около стержня *ff*, будучи подвешена только ложными лагерами *gg*.

Описанный большой теодолит Гильдебранда (черт. 202) действительно является инструментом, наилучше отвечающим запросам точнейших измерений горизонтальных направлений в триангуляциях I класса. Такие же теодолиты в последние годы применяют и в новой первоклассной триангуляции в Германии, но только без поверительной трубы (черт. 203). Необходимо отметить, что в самое последнее время (1937 г.) наши заводы освоили изготовление больших двухсекундных универсальных инструментов типа, изображенного на черт. 201, и больших теодолитов типа, изображенного на черт. 202, но с некоторыми изменениями в конструкции, приводящими к уменьшению габарита инструмента. На черт. 204 изображен советский теодолит для триангуляции I класса: он снабжен сектором для измерения зенитных расстояний, отсчитываемых шкаловыми микроскопами до 6"; микроскопы горизонтального круга — ломанные. Инструмент более удобен для экспедиционных работ, чем теодолит Гильдебранда (черт. 202).

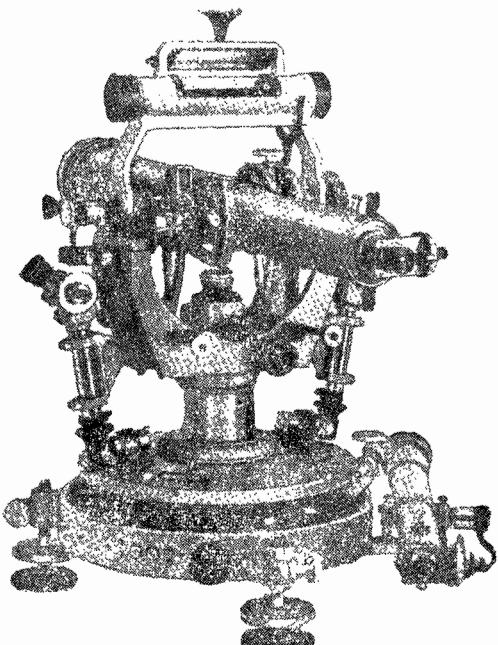
Большие инструменты, изображенные на черт. 198, 201, 202 и 204, снабжены искусно приспособленным электрическим освещением.

Необходимо теперь сказать несколько слов по поводу регулирования вращения алиады в инструментах с репсольевой системой осей.

Внутренняя поверхность алиадной боксы *b* (черт. 193) должна вполне соответствовать

поверхности центральной цапфы *a*, но между двумя этими поверхностями должен быть тонкий слой масла, имеющий везде одну и ту же толщину, только тогда бокса будет плотно прилегать к цапфе и только тогда вращение алиады будет совершаться одновременно плавно, свободно и без колебаний.

Если правильность вращения алиады нарушена, то поступают так: шляпку *ss* (черт. 198а) отводят на полоборота движением против хода часовой стрелки и оставляют инструмент в таком положении в покое на два часа. После этого вращают шляпку *ss* по ходу часовой стрелки до тех пор, пока рука не почувствует, что винт наталкивается на препятствие (т. е. что он уперся в конец цапфы *a*), и когда получается одновременно легкое вращение алиады. Такую установку шляпки *ss* повторяют несколько раз, замечая каждый раз отчет на грибообразной шляпке по индексу *i* (черт. 198а). Если эти отчеты будут согласны между собой, то можно быть уверенным, что при установке винта



Черт. 204

*ss* на такой отсчет вращение алидады будет правильным. Если же эти отсчеты будут получаться несогласными или, вопреки ожиданиям, при согласии этих отсчетов все-таки не получилось вращения алидады без колебаний, то, вывинтив пружину, противодействующую наводящему винту алидады, придерживают инструмент за дрейфус и, охватив пальцами боксы алидады, несколько раз поднимают и опускают эту боксу, давая ей движение вдоль цапфы *a* и одновременно вращая алидаду. После этого снова повторяют указанную установку грибообразной шляпки. Если и теперь результат не будет достигнут, то приходится, развинтив соответственные части, снять всю алидадную часть с цапфы *a*, устранить старое масло, тщательно протереть и цапфу и боксы алидады, слегка смазать новым маслом цапфу *a* и, надев на нее алидадную боксу до завинчивания гайки *k* (черт. 193), впустить еще масло между осью *a* и боксой алидады; после этого завинтить гайку *k*, поставить на места и свинтить все части, относящиеся к регулирующему аппарату, установить шляпку *ss* так, чтобы получилось легкое вращение алидады, и через час повторить всю установку сначала, т. е. отпустить шляпку *ss* на полоборота против хода часовой стрелки, дать стоять инструменту два часа и искать затем нормальное положение шляпки *ss*.

При работе на холоде, вследствие сгущения масла, сделанная перед работой установка может оказаться непригодной; тогда не следует трогать винт *ss*, а вывинтить пружину, противодействующую наводящему винту алидады, и проделать, как указано выше, поднимание и опускание алидадной боксы по цапфе *a*, после чего получится вращение и легкое и правильное (если только винт *ss* был ранее установлен правильно).

В завершение параграфа нужно остановиться на определении целей окулярных микрометров и на вопросе о пользовании поверительной трубой.

На барабанах окулярных микрометров счет делений возрастает, если винт микрометра ввинчивается, т. е. нить идет к барабану. Следовательно, возрастание счета оборотов идет в сторону барабана микрометра.

При круге *L* барабан микрометра главной трубы — у правой руки наблюдателя, и поэтому счет оборотов в поле зрения должен идти от левой руки к правой. В ломаной трубе левое изображение соответствует левому же предмету. Если в нульпункте микрометра считаем 10 оборотов ( $10'$ ), а нити при паведении их на предмет стояли правее нульпункта на отсчете  $M > 10'$ , то, очевидно, отсчет по горизонтальному лимбу сделан меньше истинного и, следовательно, поправка за микрометр главной трубы будет вычисляться по формуле:

$$-\frac{(M - 10') \mu_1}{\sin z} \dots \text{для круга } R,$$

$$+ \frac{(M - 10') \mu_1}{\sin z} \dots \text{для круга } L,$$

где  $z$  — зенитное расстояние наблюдаемого предмета (см. § 59). Для прямой трубы правило знаков будет обратное.

Поверительную трубу вкладывают в каретку всегда так, чтобы микрометр был вправо от оси трубы; поэтому, чтобы привести изображение, стоящее на отсчете *m*, большем  $10'$ , к нульпункту микроскопа поверительной трубы, нужно вращать поверительную трубу вместе с лим-

бом против хода часовой стрелки, а тогда к нульпункту микрометра горизонтального круга подойдет при новом визировании трубой (главной) на прежний предмет отсчет, больший того, чем был при стоянии поверительной трубы на отсчете  $m$ . Поэтому поправка за микрометр поверительной трубы вычисляется так:

$$+ \frac{(m - 10^r)}{\sin z} \cdot \mu_2.$$

Окулярный микрометр главной трубы в инструментах Гильдебранда может быть повернут на  $90^\circ$  и, очевидно, им можно воспользоваться при измерениях и зенитных расстояний. Поправка в отсчет вертикального круга вычисляется по одной формуле для обоих положений трубы  $R$  и  $L$ , а именно:

$$+ (M - 10^r) \cdot \mu_1.$$

Для определения цены деления микрометра главной трубы ставят нити на отсчеты по микрометру  $7^r.00, 8^r.00, 9^r.00, 10^r.00, 11^r.00, 12^r.00$  и  $13^r.00$ ; при каждом таком положении нитей наводят трубу наводящим винтом алидады на один и тот же удаленный, хорошо видимый предмет с отсчетами каждый раз по обоим микроскопам горизонтального круга; после чего следует обратный ход, т. е. установка нитей на отсчеты по микрометру  $13^r.00, 12^r.00, 11^r.00, 10^r.00, 9^r.00, 8^r.00$  и  $7^r.00$  и наведение трубы при этих положениях нитей на предмет наводящим винтом алидады с отсчитыванием каждый раз обоих микроскопов горизонтального круга. Таких приемов рекомендуется сделать шесть.

Так как в выражение поправки за окулярный микрометр входит делителем  $\sin z$ , то, очевидно, при выводе цены деления  $\mu_1$  нужно, разделив разность отсчетов по горизонтальному кругу на соответственное число делений микрометра, помножить результат на  $\sin z$ .

Для определения цены деления окулярного микрометра поверительной трубы избирают либо две удаленные хорошо видимые точки, лежащие на одной высоте и составляющие друг с другом угол в  $25'$ , либо выставляют две марки, дающие такой же угол. Горизонтальный угол между избранными точками измеряют инструментом шестью приемами с перестановкой лимба между приемами на  $30^\circ$ ; затем угол между марками, лежащими вообще в наклонной плоскости, измеряется микрометром поверительной трубы, при пяти ее положениях, при которых отсчеты на левый в поле зрения предмет будут последовательно равны:  $3^r, 4^r, 5^r, 6^r, 7^r$ ; при каждой установке поверительной трубы нити ее наводятся на левый и правый предметы по четыре раза. Цена деления  $\mu_2$  окулярного микрометра равна горизонтальному углу между марками, умноженному на синус зенитного расстояния марок и деленному на число делений микрометра в интервале между марками.

Если поставить два универсала на каменных столбах в расстоянии друг от друга 6–8 м и направить поверительную трубу исследуемого универсала и главную трубу другого универсала так, чтобы ось одни служила продолжением оси другой, то при установке сеток этих труб в главных фокусах объективов в трубе одного универсала будет видно изображение сетки другого универсала с сохранением при этом угловых расстояний. Следовательно, ставя нити микрометра поверительной трубы исследуемого универсала в разные положения (на разные отсчеты по микрометру) и делая при каждой установке нитей поверительной трубы наведения на них стоящих всегда в нульпункте нитей главной

трубы другого универсала с отсчетами каждый раз обоих микроскопов его горизонтального круга,—мы и выведем отсюда цену деления микрометра поверительной трубы. В этом опыте следует возможно уменьшить разность высот горизонтальной оси вспомогательного универсала и горизонтальной оси поверительной трубы.

Что касается вопроса о пользовании поверительной трубой, то на нем приходится остановиться ввиду того, что только в нашей практике имеет место применение (и притом широкое) поверительной трубы; практика же всех остальных государств не признает применения поверительной трубы. Очевидно, что при пользовании поверительной трубой наведение слагается из наведений двух труб, и ошибка наведения поверительной трубы всецело входит в результат наблюдения направления так же, как ошибка наведения главной трубы. Поэтому прежде всего очевидно, что точность наведений поверительной трубы должна быть значительно выше точности наведений главной трубы. (Это становится особенно ясно, когда по микрометру поверительной трубы для каждого направления определяют и вводят поправки.)

Чтобы осуществить только что высказанное требование, надлежит поверительную трубу наводить на специально изготовленную марку, установленную вполне неподвижно в сравнительно небольшом (около 1 км) расстоянии от инструмента, чтобы не считаться с действием боковой рефракции. Для дневных наблюдений пользуются окрашенной в белый цвет деревяшкой или металлической пластиной с черной вертикальной полоской посередине; длина полоски должна быть около 0,5—0,8 м; ширина ее должна быть рассчитана в зависимости от расстояния марки до места наблюдения и от углового расстояния между парой нитей поверительной трубы. При нормальном расстоянии этих нитей друг от друга в 40" следует иметь ширину вертикальной полоски такую, чтобы она усматривалась под углом около 15". Дляочных наблюдений в той же марке делается узкий вертикальный прорез, который освещается поставленной сзади лампой.

Наведения нитей поверительной трубы на устроенную таким образом марку действительно будут выполняться с точностью, заметно большей точности визирования главной трубы. С другой стороны, колебания изображения марки, вследствие близости ее к станции, будут очень малы и вообще заметно меньшие колебаний изображений удаленных тригонометрических сигналов, наблюдавшихся в главную трубу.

Так как наведения поверительной трубы производятся на близкую марку, то именно поэтому и дают ей размеры, заметно меньшие по сравнению с главной трубой, имея в то же время высокую точность наведения ее нитей на черту марки. Но понятно, что наводить поверительную трубу на удаленный сигнал совершенно недопустимо. С другой стороны, уже из сказанного ясно, что, во-первых, с поверительной трубой должен работать искусный наблюдатель, а, во-вторых, пользование сю предполагает вполне спокойные изображения марки.

Скрепление поверительной трубы с основанием инструмента не абсолютно жестко, и, вероятно, влияние одних перемен температуры уже вызывает некоторые малые перемены в положении поверительной трубы, не соответствующие переменам в положении горизонтального лимба.

В триангуляциях I класса наблюдения исполняются с платформами высоких сигналов, где устойчивость основания инструмента нарушается тремя причинами:

- 1) кручением болванки и ног пирамиды, служащей подставкой инструмента, и кручением основных столбов сигнала, на которых эта пирамида укреплена;
- 2) ветром, колеблющим и раскачивающим сигнал;
- 3) передвижениями наблюдателей по полу при производстве отсчетов и наведений.

Влияние первой причины при наблюдениях без поверительной трубы может считаться значительно исключенным, если в каждый прием наблюдений включать только два предмета, т. е. перейти к наблюдениям углов, доведя время, затрачиваемое на прием, до минимума и располагая наблюдения левого и правого предмета симметрично относительно времени. Но если в прием включается наблюдение даже четырех предметов, то все-таки, при быстром исполнении работы и при наблюдениях во втором полу приеме предметов в обратном порядке ( $A, B, C, D$  — в первом полу приеме и  $D, C, B, A$  — во втором полу приеме), средние выводы направлений из приема оказываются в высокой степени свободными от искажений, вносимых кручением сигнала, так как это кручение за промежуток времени, приходящийся на один прием, можно принимать совершающимся пропорционально времени.

Третья причина относится только к нашим сложным сигналам; при хорошо построенных сигналах и при опытных наблюдателях эта причина влияет мало заметно на результаты наблюдений; при перемещении наблюдателя по полу вся система, держащая инструмент, лишь сдваивает пружину и вновь приходит в первоначальное положение в тот момент, когда делается наведение трубы. Таким образом, только вторая причина — ветер, вызывающий упругие деформации в сигнале, — заставляет ставить вопрос о пользовании поверительной трубой. Понятно, что такие деформации при ветре происходят и во внутренней башне, служащей в заграничных работах подставкой для инструмента, выведенной с земли и совершенно изолированной от внешней башни, несущей площадку для наблюдателя.

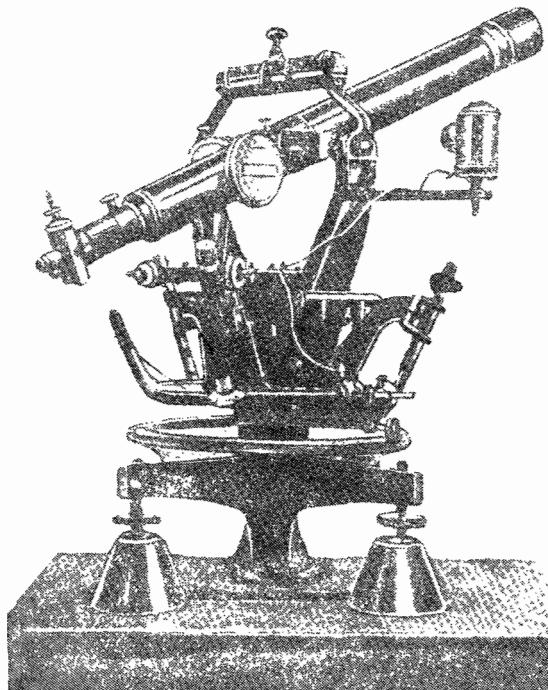
Другими словами, можно поставить вопрос так: если бы жесткость постройки нашего сложного сигнала, являющегося одновременно и внешней и внутренней башней, была бы равна жесткости внутренней пирамиды в сигналах США или в сигналах, применяемых в Германии, то не отпали ли бы основания к применению у нас поверительной трубы?

Думается, что приходится дать на этот вопрос ответ положительный, потому что нельзя пренебрегать большим опытом геодезических работ за границей. Но без изменения конструкции наших сигналов и без изменений в самой их постройке надлежало повысить их жесткости, при котором можно было бы расстаться с применением поверительной трубы, невозможно. Даже при ветре несколько слабее среднего мы вынуждены одновременно с наведением главной трубы наводить нити поверительной трубы на марку и определять по окулярному микрометру этой трубы азимутальную поправку. Марку следует въставлять в направлении действия ветра.

Понятно, что точность наблюдений при применении поверительной трубы меньше точности наблюдений, выполненных в тех условия когда нет нужды в пользовании поверительной трубой.

## § 54. Описание теодолита Паркхерста и некоторых других инструментов, применяемых за границей

В СПЛ с 1900 г. по 1923 г. для наблюдений в триангуляции I класса применялся «стандартный 12-дюймовый» теодолит, изображенный на черт. 205. Горизонтальный круг этого инструмента имеет диаметр 12 дюймов, или 30,5 см; он разделен через  $5'$  и отсчитывается тремя микроскоп-микрометрами, расположеными через  $120^\circ$ . Труба инструмента имеет объектив с отверстием 61 мм; фокусное расстояние объектива 74 см.



Черт. 205

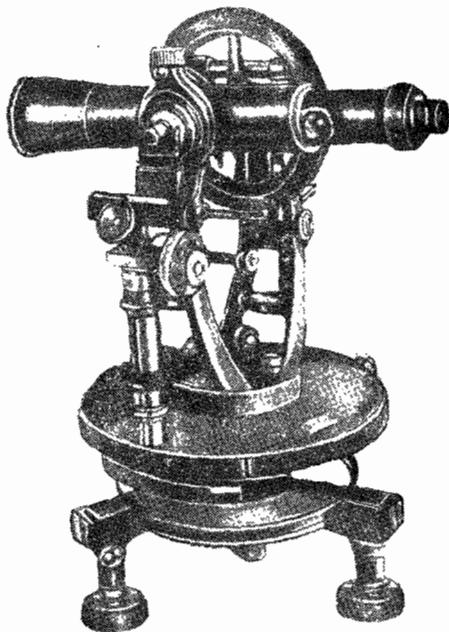
труба имеет 3 окуляра с увеличением 30, 45 и 60 и снабжена окулярным микрометром. Вертикального круга в этом теодолите совсем не имеется. Высота подставок трубы и расположение трубы относительно горизонтальной оси соображены так, что в широтах США этим большим теодолитом можно наблюдать Полярную Звезду. Включение Полярной Звезды в число предметов, наблюдаемых с данного пункта, применяется в СПЛ довольно часто в триангуляции I класса и приводит к определению астрономических азимутов на очень большом числе пунктов I класса, причем это делается попутно с измерением горизонтальных углов. Существенно отметить, что все имеющиеся части в алидаде описываемого теодолита, например, подставки трубы изготовлены из алюминия, дрейфус же инструмента сделан из чугуна. Этим достигается перемещение центра тяжести инструмента ближе к его основанию, что увеличивает устойчивость инструмента. Закрепительного винта лимба не имеется, но скрепление хорошо притертых частей обеспечивает неподвижность лимба. Очевидно, конструкция этого инструмента и его мощность близки к та-

ковым же большого 27-см теодолита, введенного для наблюдений на триангуляции I класса СССР с 1927 г. (см. черт. 202). Хорошие качества 12-дюймового теодолита подтвердились вполне на большом числе звеньев триангуляции I класса, исполненных этими инструментами в США. Но, несомненно, несколько излишия их громоздкость.

С 1924 г. появляется 9-дюймовый теодолит Паркхерста, вытесняющий сейчас в США только что описанный «стандартный» теодолит. Конечно, диаметр в 22 см является наименьшим из могущих быть допущенными в триангуляции I класса. Теодолит Паркхерста изображен на черт. 206 и 207. Прямая центральная его труба с внутренней фокусированной имеет объектив с отверстием 45 мм, длина трубы 48 см, увеличение 45. Труба несет вертикальный круг диаметром в 15 см, который отсчитывается десятисекундными верньерами; окулярного микрометра трубы не имеет.

Горизонтальный круг отсчитывается двумя микроскоп-микрометрами, одно деление барабана равно одной секунде. Особенностью устройства микрометра является то, что барабан сделан из белого стекла и освещается изнутри; эта особенность его весьма полезна приочных наблюдениях. Как видно из черт. 207, система вертикальных осей имеет в теодолите Паркхерста устройство, близкое к системе осей по Борда (черт. 192).

Чугунная втулка *c* (черт. 207) соседница чрезвычайно солидно с трегером инструмента; в эту втулку вкладывается стальная ось *a* алиады; сравнительно короткая лимбовая блюска *b* охватывает спаружи втулку *c*, причем поверхности соприкасания лимбовой блюски *b* и втулки *c* очень незначительны. Эту лимбовую блюску *b* можно назвать лимбовой осью, хотя она внутри полая. Добавочная наружная втулка *d*, имеющая собственно вид широкого кольца, привинчена наглухо к втулке *c*; на ее отчасти опираются лимбовая блюска, причем поверхности соприкасания блюски *b* и втулки *d* отличию пришлифованы, вследствие

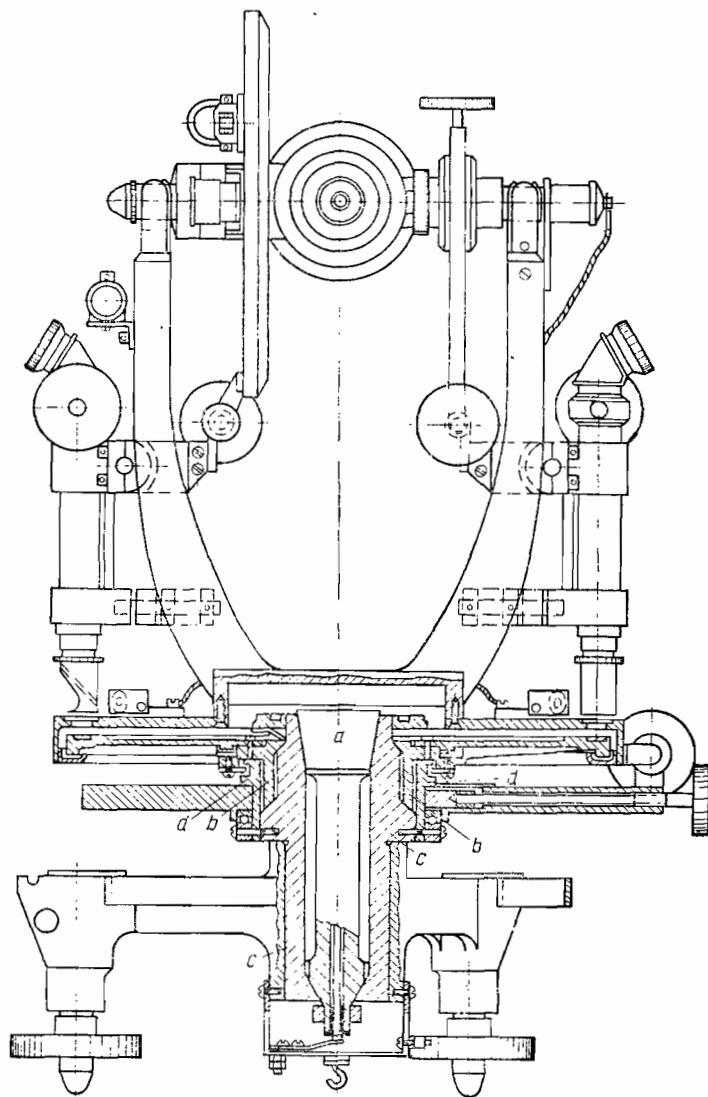


Черт. 206

чего становится излишним особый винт для закрепления лимба, и неподвижность лимба вполне обеспечена сцеплением между соответственными поверхностями втулки *d* и блюски *b*. По круговому пазу в нижней части втулки *c* ходят на стальных шариках кольцо с зажимом для алиады. Трущиеся части поверхности алиады состоят из двух конусов -- верхнего с углом в  $15^\circ$  и нижнего -- с углом в  $60^\circ$  (см. черт. 207).

Поверхности обоих конусов имеют общую вершину вблизи винта, которым оканчивается ось *a*. Введение именно таких двух конусов в конструкцию оси *a* и втулки *c* имеет следствием то, что однажды сделан-

ная их пригонка остается постоянной, несмотря на изменение температуры инструмента. Охлаждение инструмента вызывает лишь небольшое поднятие оси *a* во втулке *c*, чем будет достигаться восстановление совершенно свободного вращения алиады даже при выполнении полевых

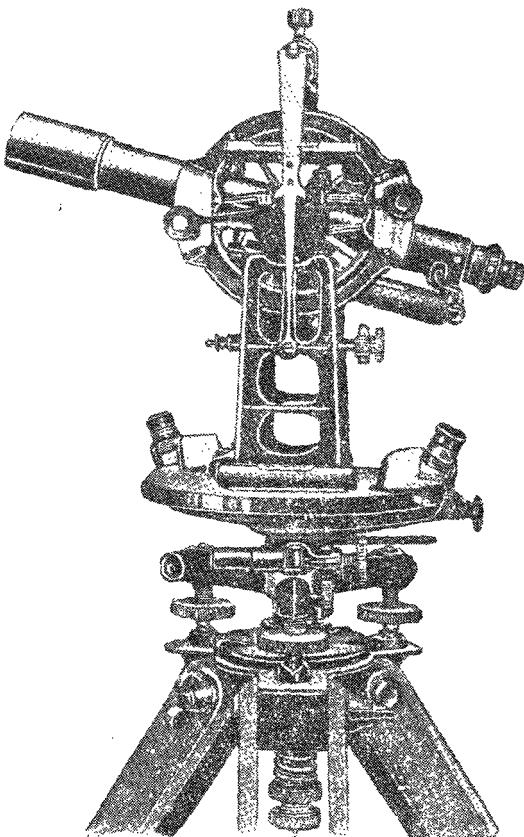


Черт. 207

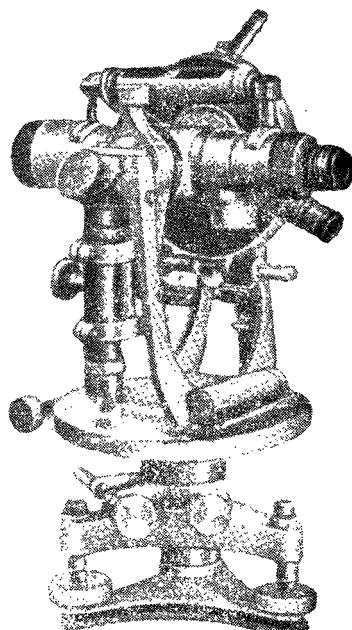
работ при достаточно низких температурах. Понятно, углы конусов рассчитываются в зависимости от разности температурных коэффициентов расширения оси и втулки. Нужно отметить, что идея двух конусов осуществлялась и ранее в некоторых инструментах европейских механиков.

Инструмент Паркхерста признан геодезистами США не уступающим по точности результатов стандартному 12-дюймовому теодолиту, но гораздо более удобным в работе.

Все последние работы по триангуляции I класса США выполнены теодолитом Паркхерста. Однако, думается, нет оснований предполагать, что при действии зажимного винта алидады давление вовсе не передается на боксус *b* лимба, хотя самое вращение алидады на лимб и не сказывается. При наблюдениях в триангуляции I класса инструментальная погрешность в направлении в  $\pm 0'',5$  должна уже считаться непренибргаемой. Выяснить добавочные погрешности порядка  $\pm 0'',5$  путем сравнения рядов наблюдений, выполненных теодолитом Паркхерста, с рядами наблюдений, выполненными более мощным инструментом, конечно, не удастся. Поэтому утверждения, что теодолит Паркхерста по точности результатов эквивалентен совершенно 12-дюймовому теодолиту, не



Черт. 208



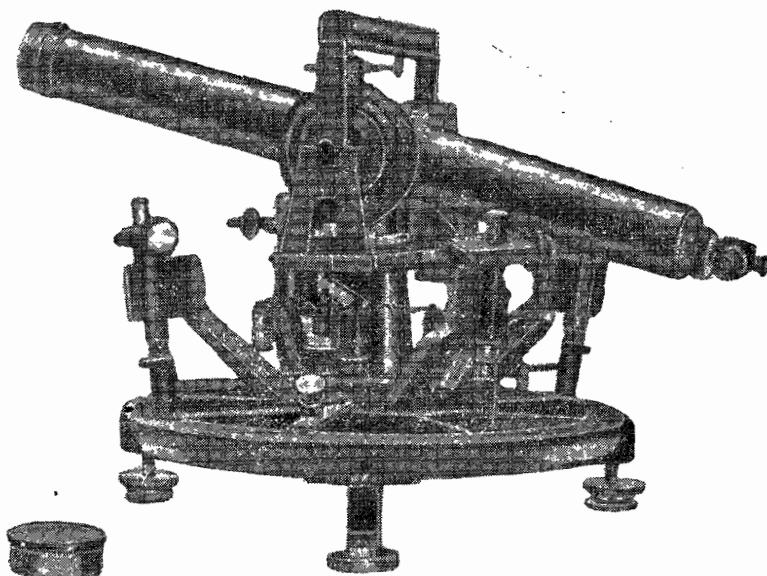
Черт. 209

имеют прочных оснований. Можно лишь говорить, что результаты, даваемые этим инструментом, приемлемы, но эта приемлемость всегда заключается в довольно широких пределах, и, ориентируясь на низши предел такой приемлемости, мы заведомо идем на сужение будущи возможностей использования результатов больших триангуляций I кла

са. Одновременно, конечно, будут достигаться ускорение и удешевление работы, т. е. экономия данного дня. В Америке, где почти всюду возможно удобное сообщение на автомобилях, стремление облегчить вес инструмента на 3—4 кг, конечно, не является еще основанием к замене испытанного хорошего инструмента новым. Соображение, что в больших инструментах сильнее оказывается неравномерное распределение температуры, чем в меньших инструментах, может быть и заслуживает внимания.

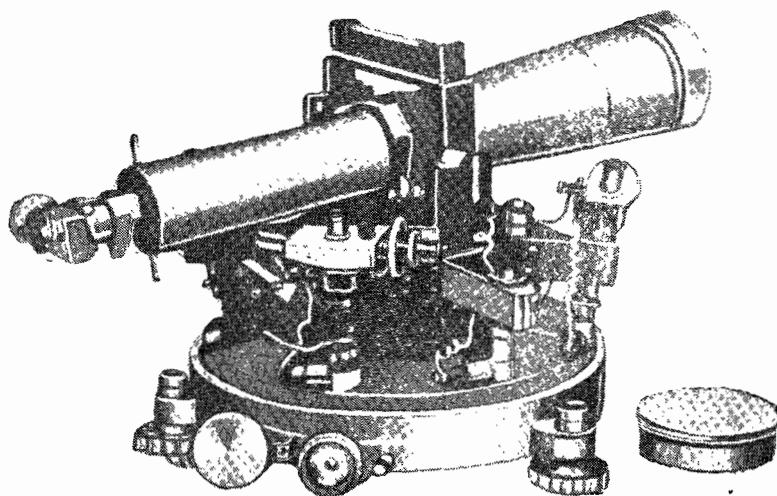
Мы приведем еще рисунки американских теодолитов для триангуляции II класса; на черт. 208 дан 7-дюймовый теодолит фирмы Бергер на четырех подъемных винтах, сильно отражающий на себе конструкции американских тахсометров; на черт. 209 дан 4,5-дюймовый теодолит с микроскоп-верньерами.

Обратимся теперь к Франции. С конца прошлого столетия (с 1875 г.) наблюдения в триангуляции I класса выполнялись во Франции «азимутальным кругом» Бруннера, изображенным на черт. 210. Диаметр горизонтального круга инструмента равен 23 см; этот круг отсчитывается



Черт. 210

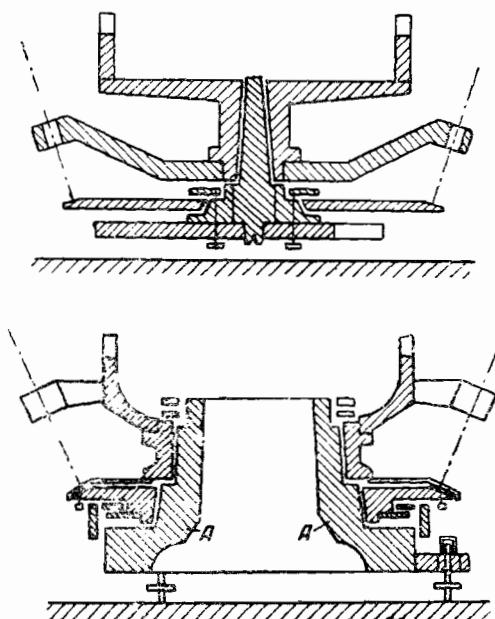
четырьмя микроскопами; вертикальный круг совсем отсутствует. Сравнительно малая высота подставок трубы способствует, конечно, большей устойчивости инструмента. Труба — прямая и центральная; отверстие объектива 90 мм и фокусное расстояние 33 см; труба имеет окулярный микрометр. Устройство вертикальных осей в инструменте Бруннера отвечает системе осей по Репольту. В 1931 г. конструкция Бруннера получила существенные изменения в отношении вращения алидады вокруг вертикальной оси, и инструмент получает название азимутального круга Шасселона (по имени конструктора). Общий вид инструмента Шасселона дан на черт. 211, а схематический разрез осей — на черт. 212.



Черт. 211

Как видно, высота горизонтальной оси над лимбом в инструменте Шаселтона взята еще заметно меньшей, чем

в круге Бруннера; четыре микроскоп-микрометра сохраняются. Массивная ось А, полая внутри и составляющая одно целое с основанием инструмента, несет на своем нижнем, внешнем, уступе лимб инструмента. Центральная часть этой оси, слегка коническая, охватывается боксой алидады; бокса алидады заканчивается покрышкой особого устройства, соприкасающейся посредством шарикоподшипников с верхней кольцевой и плоской поверхностью центральной оси А. Особое приспособление позволяет слегка приподнимать алидаду. Имеючи, имея алидаду в таком приподнятом положении, направляют трубу на предмет и выполнив наведение, опускают алидадную часть, причем внутренняя поверхность алидадной части тогда плотно и точно охватит слегка коническую наружную поверхность централь-



Черт. 212

ной части оси А. Таким образом, если при приподнятой алидаде вращение ее происходит около какой-то фиктивной и, вероятно, переменной оси, то при опущенной алидаде ось ее боксы совпадает точно с постоянной

ной осью внешней, слегка конической поверхности центральной оси  $A$ ; во всяком случае, наблюдения обнаруживают в инструменте полное отсутствие перемены элементов эксцентрикитета алидады. Опущенная алидада остается неподвижной благодаря трению между соприкасающимися поверхностями блоксы и оси  $A$ . После опускания алидады следует наведение штилей окулярного микрометра на предмет и отсчеты круга по микроскоп-микрометрам. Очевидно, зажимной винт алидады и наводящий ее винт при таком устройстве инструмента являются совершенно ненужными, и действительно, эти винты, равно как и зажимной винт лимба, в инструменте Шасселона совершенно отсутствуют.

Отсчитывание горизонтального круга по четырем микроскоп-микрометрам представляет значительную добавочную работу по сравнению с обычным отсчитыванием круга только по двум микроскоп-микрометрам. Точность среднего из отсчетов по двум противоположным микроскоп-микрометрам между тем настолько высока, что нет никакой нужды в повышении этой точности путем введения отсчетов еще по двум добавочным микроскоп-микрометрам. Однако, рассуждая à priori, исключение влияния неравномерного расширения горизонтального круга, обусловленного односторонними его нагреваниями или достаточно быстрыми изменениями температуры воздуха, конечно, происходит при пользовании четырьмя микроскопами в значительно большей степени, чем при двух микроскопах.

Надлежащее собранного материала по этому вопросу мы не имеем и не можем сказать, действительно ли необходимо настолько считаться с неравномерными расширениями лимба, чтобы последовать примеру французов и ввести в инструментах для триангуляции I класса отсчитывание круга помостью четырех микроскопов. Скорее большой опыт работ убеждает в излишности четырех микроскопов; пакошец, перестановка лимба на  $90^\circ$  между полу приемами будет приводить при непрерывных по времени приемах (до 18 минут) почти к такому же эффекту, как и пользование четырьмя микроскопами.

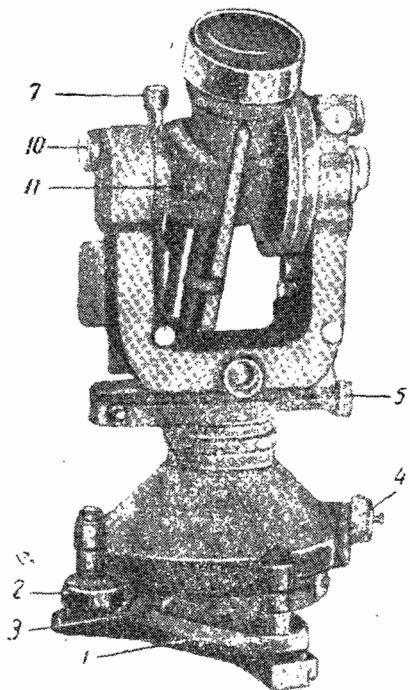
Следует теперь отметить ярко проведенное в инструменте Шасселона стремление обслуживать только одну задачу — измерение углов в триангуляции I класса. Сама по себе эта задача настолько ответственна и деликатна, что подход французских геодезистов к конструированию инструмента, отвечающего только этой задаче, надо приветствовать; следствием такого подхода являются устранение вертикального круга и малый размер подставок трубы — последнее обстоятельство представляется вовсе немаловажным.

Что касается приспособлений для приподнятия и опускания алидады, то, конечно, благодаря им вращение алидады совершается действительно без всякого воздействия на вертикальную ось инструмента, а, следовательно, и на горизонтальный круг его; понятно, важным является и отсутствие работы зажимного винта алидады. С другой стороны, установку центра и оси алидады при ее опускании производят, пользуясь большим диаметром полой оси  $A$  и центральной частью конуса этой оси, что, конечно, обуславливает очень малые колебания в положении вертикальной оси алидады при наведениях трубы на разные предметы. Между тем, в инструментах с системой осей по Репольду центр алидады и ось алидады устанавливают, пользуясь малым диаметром верхней части центральной цапфы и самой верхней частью конуса этой цапфы, что ведет за собой и поступательные смесиения алидадной блоксы (перемены эксцентрикитета), и перемены наклонности оси али-

далы. Поэтому конструкцию Шасселона, может быть, следует считать шагом вперед в отношении более точной работы инструмента. Но не нужно забывать, что в больших теодолитах последней конструкции, применяемых в СССР и в Германии, совершенство вращения алидады может быть осуществлено правильной регулировкой инструмента в высокой степени; с другой стороны, возможно, что опускания алидады в инструменте Шасселона сопровождаются гнутиями ее, хотя и малыми, но, конечно, различными для различных наблюдаемых предметов и заметно снижающими эффект конструкции.

### § 55. Теодолит Вильда

**1. Общее описание инструмента.** За последнее десятилетие в геодезических работах получили широкое применение теодолиты Цейсса и Вильда, имеющие существенные особенности в устройстве по сравнению с описанными выше инструментами. На черт. 213 и 214 изображен общий вид прецизионного теодолита Вильда и именно модель, выпускавшаяся до 1936 г. Большинство теодолитов Вильда, приобретенных СССР, имеет конструкцию, приведенную на черт. 213 и 214.

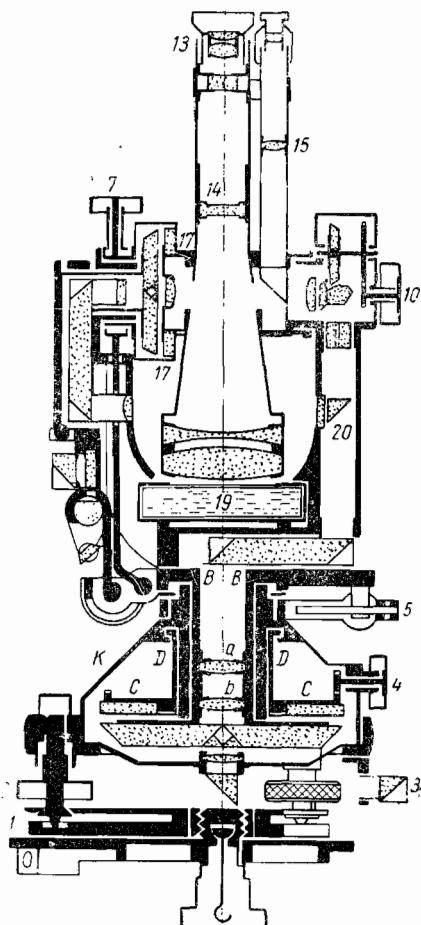


соединенная с трегером, служащая для освещения горизонтального круга; 4 — винт для перестановок горизонтального круга; 5 — зажимной винт алидады; 6 — наводящий (азимутный) винт алидады; 7 — зажимной винт трубы; 8 — наводящий винт трубы; 9 — винт для установки уровня при вертикальном круге инструмента; 10 — винт для передвижения плоско-параллельных пластинок при отсчитывании кругов, или винт оптического микрометра, или барабан секунд; 11 — призма, освещющая вертикальный круг; 12 — измененный переключатель изображения кругов; 15 — отсчетный микроскоп; 14 — кольцевая кремальера трубы; 13 — диоптрическое кольцо окуляра; 17 — вертикальный круг; 18 — уровень при вертикальном круге. Черт. 215 дает разрез теодолита Вильда; на нем теми же цифрами, что и на черт. 213 и 214, обозначены некоторые из перечисленных выше частей инструмента.

Вертикальная ось *BV* алидады изготавливается из закаленной стали и имеет цилиндрическую форму; она полая внутри и заключает в себе объектив отсчетного микроскопа в виде линз *a* и *b*, из которых каждая в свою очередь слагается из двух линз: *a* состоит из двояко выпуклой и вогнуто-выпуклой линз, *b* — из плоско-выпуклой и вогнуто-выпуклой линз. Эти сложные линзы *a* и *b* заключены в особые стальные цилиндры, плотно входящие один в другой. Горизонтальный круг *CC* имеет диаметр 140 мм; он изготавливается из кронового стекла толщиной 6 мм; верхняя поверхность стекла круга, на которую наносятся штрихи и цифры, амальгамируется.

Круг разделен через 4'; его штрихи, не покрытые амальгамой, видны в отсчетном микроскопе в виде черных линий на светлом фоне, даваемом амальгамой.

Как видно из черт. 215, лимбовая ось *DD* охватывает втулку трехгера; винт *4*, служащий для перестановки круга, имеет особый предохранительный колпачок, закрывающий головку этого винта; когда перестановка лимба закончена, этот колпачок должен быть закрыт. На черт. 215 имеются следующие обозначения: *19* — уровень при алидадной части; *20* — призма для переключения изображений кругов; *17* — вертикальный круг. Вертикальный круг, также стеклянный, имеет диаметр 95 *мм*. Труба инструмента с внутренней фокусировкой имеет объектив со свободным отверстием 60 *мм*, длина трубы 260 *мм*; три окуляра для трубы



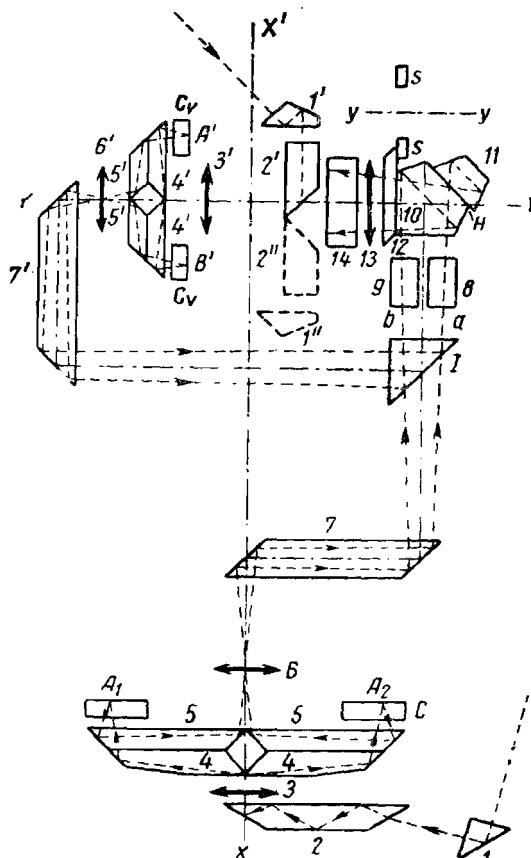
Черт. 215

дают увеличения 24, 30 и 40. Увеличение отсчетного микроскопа 37. Цена деления уровня при алидаде 7"; цена деления уровня при вертикальном круге — 6''. Всё всего инструмента 10,3 кг. Целый ряд призм и иных оптических частей, заключенных в корпусе инструмента, составляют особенность устройства теодолита Вильда; эти оптические системы

изображены на особом черт. 216, и к описанию их мы и переходим (нумерация оптических частей на чертеже 216 не совпадает с нумерацией на предыдущих чертежах).

**2. Схема оптических частей отсчетного механизма в теодолите Вильда.** Площадь черт. 216 проходит через вертикальную ось инструмента и ось вращения трубы.

Пусть  $A_1$  и  $A_2$  (черт. 216) — диаметрально противоположные части круга  $CC'$ , наблюдаемые в отсчетном микроскопе; освещение этих частей лимба происходит таким образом: призма 3) направляет пучок лучей на призму 2, находящуюся под треугольником; отсюда лучи попадают в собирающую плоско-выпуклую линзу 3, концентрирующую их и направляющую на грани склеенных призм 4-4'. В призмах 4-4' пучок делится на два пучка, которые падают после двойного отражения соответственно на части круга  $A_1$  и  $A_2$  и их освещают.

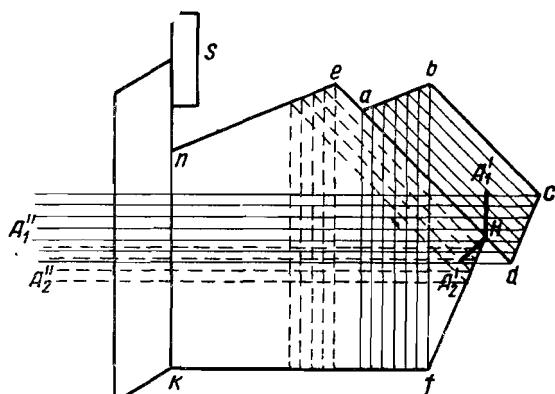


Черт. 216

Отразившись от амальгамированных частей лимба, лучи попадают на грани призм 5-5 и направляются, после двойного отражения в этих призмах, на линзу 6, являющуюся объективом отсчетного микроскопа. При этом центральные пучки отражаются в призме 5-5 таким образом, что по выходе из нее получают необходимое направление вдоль вертикальной оси теодолита, под некоторым углом к ней. Собирательная линза 6 состоит из двух частей, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, каждая из которых представляет собой две линзы: двояко выпуклую и вогнуто-выпуклую в верхней части, плоско-выпуклую и вогнуто-выпуклую в нижней части. Эти линзы заключены в особые стальные цилиндры, плотно входящие друг в друга (линзы  $a$  и  $b$  черт. 215). В последующем своем ходе лучи дважды поворачиваются ромбоэдрической призмой 7 и в точках  $a$  и  $b$  падают на плоско-параллельные пластины 8 и 9, входящие в состав «оптического микрометра».

На пластинку 8 падают лучи от части  $A_1$ , а на пластинку 9 — от противоположной ей части  $A_2$  горизонтального круга. Далее луч от  $A_1$  попадает в призму 11, а луч, идущий от  $A_2$ , — в пентагональную призму 10. Призмы 10 и 11 носят название «отделяющих». Отразившись от амальгамированных боковых граней призм 10 и 11, лучи проходят через плоско-параллельную пластинку 12 и, не испытав здесь преломления или отражения, поступают на собирающую плоско-выпуклую линзу 13, входящую в систему окуляра отсчетного микроскопа. После преломления в линзе 13 лучи отражаются призмой 14, меняя направление на  $90^\circ$ , после чего идут в плоскости, содержащей продольную ось трубы отсчетного микроскопа и ось вращения трубы  $YY'$ , направляясь в фокальную плоскость отсчетного микроскопа, где и получается окончательное изображение штрихов лимба (расстояние от этого изображения до  $YY'$  будет равно фокусному расстоянию линзы 13). Окуляр отсчетного микроскопа составляют линза 13 и собственно окулярная линза, через которую рассматривают изображение, доставленное линзой 13. Изображение штрихов лимба, даваемое объективом микроскопа 6, получается после ряда отражений лучей в призмах 10 и 11; схематически на черт. 217 изображение штриха  $A_1$  представлено линией  $HA'_1$ , а изображение штриха  $A_2$  — линией  $HA'_2$ . Эти изображения штрихов противоположных частей круга  $CC$  будут представляться при рассматривании их в отсчетный микроскоп в виде двух шкал, расположенных одна над другой и разделенных тонкой чертой, которая является изображением ребра  $H$  пентагональной призмы 10, только получаемым при посредстве линзы 13. Плоско-параллельная пластинка 12 имеет неподвижный штрих  $i$ , служащий индексом при отсчитывании по микроскопу. Стеклянны́й диск  $ss$ , в виде кольца, соприкасается с пластинкой 12; на этом диске напечатаны деления, отсчитываемые по индексу  $i$ . Диск  $ss$  вращается около оси  $yy$ , причем вращение этой оси связано с движением плоско-параллельных пластинок 8 и 9. Пластинка 12 отражает лучи как от индекса  $i$ , так и от штрихов диска  $ss$ , между которыми он пришелся; при этом назначение пластинки 12 заключается в том, чтобы лучи от индекса  $i$  и от штрихов диска  $ss$  прошли до вступления их в линзу 13 тот же оптический путь, что и лучи от изображения штрихов лимба в призмах 10 и 11. Этим достигается то, что в отсчетном микроскопе, отфокусированном на ребро  $H$  пентагональной призмы, индекс  $i$  и штрихи диска  $ss$  изображаются в той же фокальной плоскости окуляра отсчетного микроскопа, что и штрихи лимба  $A_1$ ,  $A_2$ .

**3. Отделяющие призмы.** Призму 11 (черт. 216), обозначенную буквами  $abcd$  на черт. 217, можно рассматривать как часть пентагональной призмы, отрезанную от нее по плоскости  $eH$  и сдвинутую затем по грани  $eH$ , так что  $ea = Hd$ . Границы  $ne$ ,  $ab$ ,  $cd$  и  $Hf$  призм 11 и 10

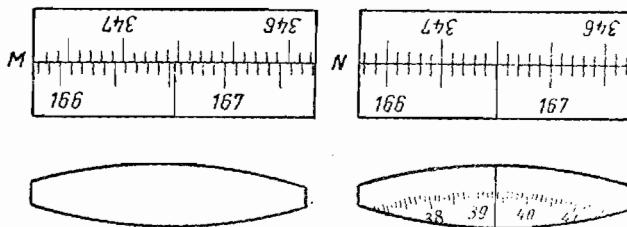


Черт. 217

амальгамированы. Лучи от части лимба  $A_1$  отражаются от грани  $ab$ , затем идут параллельно грани  $bc$  и отражаются вторично от грани  $cd$ ; лучи от противоположной части лимба  $A_2$  отражаются от грани  $ep$ , идут далее параллельно грани  $eH$  и отражаются вторично от грани  $Hf$ .

Таким образом, после двойного отражения соответственно в призме 10 и в призме 11, лучи от противоположных мест лимба пойдут в виде пучков  $A''_1$  и  $A''_2$ ; при этом в пучке  $A''_1$  лучей, идущих ниже ребра  $H$  и направляющихся в сторону пластинки 12, не будет, так как такие лучи будут исключены амальгамой грани  $Hf$ ; в пучке же  $A''_2$  не будет лучей, идущих выше ребра  $H$ , так как такие лучи будут исключаться при встрече с гранью  $ab$ .

Применив условие равенства оптических путей, мы получим, что  $A_1$  изобразится в плоскости  $HA'_1$ , параллельной грани  $kn$ , а  $A_2$  — в вертикальной плоскости  $HA'_2$ , перпендикулярной к грани  $ad$ . Так как лимбовые полоски, на которых нанесены штрихи лимба, не имеют строго определенных краев, то линия раздела изображений штрихов, полученных в плоскости  $HA'_1$  и в плоскости  $HA'_2$ , будет неопределенной. Но если мы отфокусируем отсчетный микроскоп на ребро  $H$ , то его изображение представится тонкой чертой  $MN$ , которая разделит изображения противоположных штрихов, и в микроскоп мы увидим штрихи лимба так, как показано на черт. 218. Без разделяющих призм этот эффект, совершенно необходимый, не был бы достигнут.

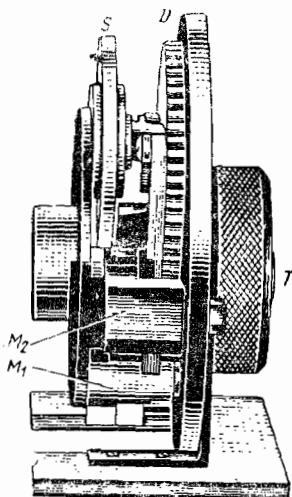


Черт. 218

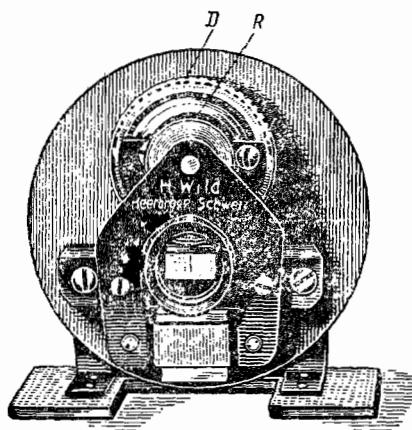
**4. Вертикальный круг.** Освещение этого круга  $C_n C_v$  (черт. 216) происходит через оптическую систему призм и линз 1', 2', 3', 4', аналогичную системе для освещения горизонтального круга. Лучи, исходящие от противоположных точек  $A'$  и  $B'$  вертикального круга, идут по симметричным направлениям в системе призм 5'—5, 6' и 7' (6'—линза). Далее лучи падают на призму переключателя I и в дальнейшем имеют тот же ход, что и лучи горизонтального круга; по отражении от призмы 14 они попадают в фокальную плоскость отсчетного микроскопа. Призма I позволяет по желанию закрывать лучи, идущие от горизонтального или вертикального круга, позволяя использовать для отсчетов один и тот же оптический микрометр.

**5. Оптический микрометр.** Конструкция оптического микрометра видна из черт. 219, 220, 221. Винт  $T$  (винт 10 на черт. 215) врачающий стеклянную шкалу секунд  $ss$  или барабан секунд; он несет на свое окошко малую шестеренку, которая приводит в движение еще шестерню  $I$ . В диске этой шестерни имеется желобок  $R$  спиральной формы.  $M_1$ ,  $M_2$  — оправы плоско-параллельных пластинок, из которых каждая вращается около своей оси. Верхние концы рычагов  $Q$  (черт. 221), вход-

щие своими шариками в жёлоб  $R$ , перемещаются при вращении винта  $T$  по жёлобу  $R$ ; движение рычагов передается осям плоско-параллельных пластинок, которые вращаются при этом в разные стороны. Форма спирали для жёлоба  $R$  должна быть строго рассчитана.

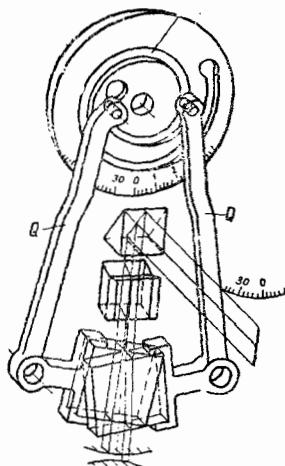


Черт. 219

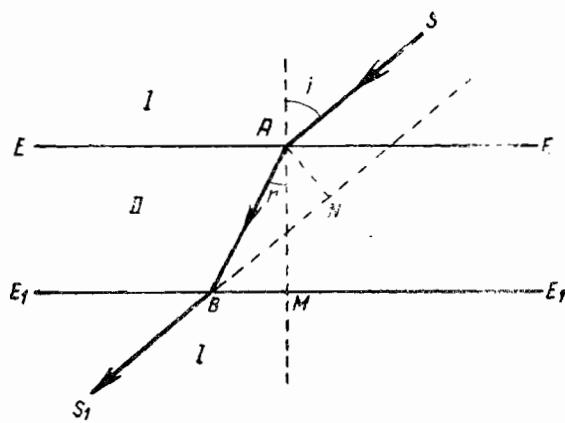


Черт. 220

Перейдем теперь к рассмотрению действия плоско-параллельных пластинок. Пусть луч  $S$  (черт. 222) идет из среды  $I$  через среду  $II$ , ограниченную параллельными плоскостями  $EE$  и  $E_1E_1$ , и вновь входит в



Черт. 221



Черт. 222

среду  $I$ . Легко видеть, что  $S_1 \parallel S$ . Продолжив луч  $S_1$ , замечаем, что он сместился на величину  $AN$ . Размер этого смещения зависит от угла падения  $i$ , толщины  $AM$  пластиинки и относительного коэффициента

преломления  $n_{2 \cdot 1}$  среды  $II$  по отношению к среде  $I$ . Приняв длину  $AB := l$ , из  $\triangle AVM$  и  $\triangle ABN$  находим:

$$l = \frac{AM}{\cos r}; \quad AN = l \sin(i - r);$$

$$AN = \frac{AM \cdot \sin(i - r)}{\cos r} = AM \left( \sin i - \frac{\cos i \cdot \sin r}{\cos r} \right).$$

Так как:

$$\begin{aligned} \sin r &= n_{2 \cdot 1} \sin i, \\ \cos r &= \sqrt{1 - n_{2 \cdot 1}^2 \sin^2 i}, \end{aligned}$$

то получаем далее:

$$AN = AM \cdot \sin i \left( 1 - \frac{n_{2 \cdot 1} \cos i}{\sqrt{1 - n_{2 \cdot 1}^2 \sin^2 i}} \right)$$

При углах  $i$ , близких к  $0^\circ$ , можно принять:  $\sin i = i$ ;  $\cos i = 1$  и пренебречь членом с  $\sin^2 i$ . Поэтому имеем:

$$AN = (1 - n_{2 \cdot 1}) AM \cdot i.$$

Следовательно, при  $i$ , близких к нулю, линейное смещение, даваемое пластиинкой, прямо пропорционально величине угла поворота этой пластиинки относительно луча  $S$ . Назовем теперь: через  $l$ —толщину плоско-параллельной пластиинки 8 или 9 (черт. 216), через  $\varphi_a$  — угол падения луча на пластиинку, через  $n$  — ее показатель преломления и через  $d$ —смещение луча, соответствующее повороту пластиинки на угол  $\varphi_a$ . Тогда из предыдущего имеем:

$$d = \frac{l(n-1)}{n} \varphi_a. \quad (217)$$

Допустим, что индекс  $i$  написан правильно; тогда при совпадении с ним нуля барабана секунд  $ss$  он должен совпадать с изображением штриха  $A_0$  лимба, лежащего на радиусе  $OA$ , перпендикулярном к плоско-параллельной пластиинке  $M$  (черт. 223). Будем считать, что в этот момент «нормального» положения  $M$  пластиинки фиктивный индекс  $I$  алии дады совпадет с штрихом  $A_0$ . Повернем теперь трубу по азимуту на угол  $\alpha$ , причем на черт. 223 отметим не поворот алии дады, а, наоборот, — изменение положения лимба относительно алии дады: пусть теперь штрих  $A_b$  займет относительно линии  $OI$  положение  $A$ , причем расстояние  $AA_0 = AA_b = b$ . Для того чтобы снова совместить изображение штриха  $A$  с индексом  $i$ , нужно будет повернуть пластиинку в положение  $M_1$  на угол  $\varphi_a$ .

На основании формулы (217) напишем:

$$b = \frac{l(n-1)}{n} \cdot \varphi_a.$$

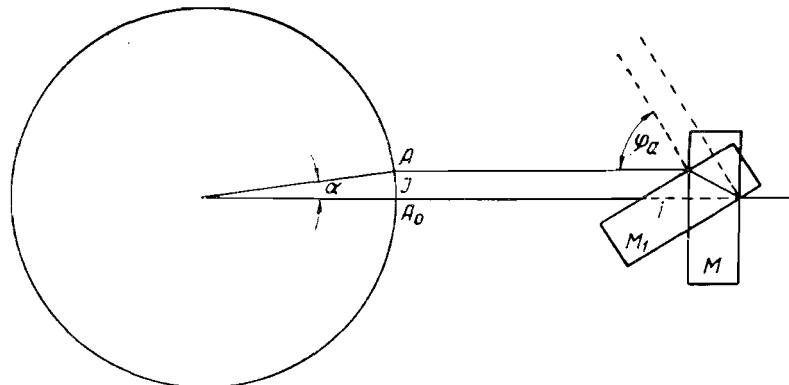
Чертеж 223 не соответствует действительности, так как на нем вовсе не учитывается действие оптических систем, лежащих между лимбом и плоско-параллельными пластиинками. В действительности, если расстояние от лимба до объектива  $b$  микроскопа равно  $l_1$ , а расстояние от этого объектива до действительного даваемого им изображения есть  $l_2$ , то отрезок  $b$  превращается в  $b \cdot \frac{l_2}{l_1}$  при вступлении лучей в плоск

параллельную пластинку, и на эту величину поворотом  $\varphi_a$  пластиинки нужно будет сместить изображение. Следовательно, на основании (217) имеем:

$$b \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{l(n-1)}{n} \cdot \varphi_a.$$

Если радиус лимба равен  $R$ , то  $b=R\alpha$  и отсюда:

$$\alpha = \frac{l}{R} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \varphi_a.$$



Черт. 223

Допустим, что когда барабан секунд  $ss$  перемещается относительно индекса  $i$  на одно деление, плоско-параллельная пластиинка перемещается на угол  $\varphi_0''$ ; при повороте шкалы  $ss$  на  $k$  делений пластиинка перемещается на угол  $k \cdot \varphi_0''$ ; величина  $\varphi_0''$  постоянна для определенной конструкции и определенного инструмента. Мы имеем:

$$\alpha = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot k \varphi_0'',$$

причем в этом уравнении в правой его части все величины постоянны, кроме  $k$ ; поэтому это уравнение можно еще переписать так:

$$\alpha = Q \cdot k; \quad Q = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \varphi_0''.$$

При известном  $Q$  и взятом по индексу  $i$  числу  $k$  делений барабана секунд мы и получаем отсчет  $\alpha$  части наименьшего деления лимба. Обычно задаются величинами  $R$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  и  $n$ , а толщину пластиинки  $l$  и угол  $\varphi_0''$  подбирают так, чтобы получить значение  $Q$ , удобное для практики. В прецизионном теодолите Вильда  $Q = 0''.2$ .

**6. Отсчитывание горизонтального круга.** На черт. 224 дано изображение расположения штрихов двух диаметрально противоположных мест лимба, наблюдаемое в отсчетный микроскоп при наведении трубы на некоторый предмет; при этом пусть барабан секунд имеет отсчет нуль по индексу  $i$ , т. е. плоско-параллельные пластиинки находятся в «нормальном», неотклоненном положении. Пусть соответствующие штри-

хи нижней и верхней частей лимба суть  $A$  и  $B$ ; подписи делений на этих частях возрастают в направлениях, указанных на черт. 224 стрелками. По существу, согласно изложенной выше теории оптического микрометра, мы должны были бы, вращая одну плоско-параллельную пластинку, совместить изображение штриха  $A$  с индексом  $i$  и отсчитать на барабане секунд расстояние  $a$ ; затем, вращая вторую плоско-параллельную пла-

стинку, совместить с индексом  $i$  штрих  $B$  и отсчитать на барабане секунд расстояние  $b$ . Тогда отсчет лимба был бы равен номеру штриха  $A$  плюс  $\frac{a+b}{2}$ .

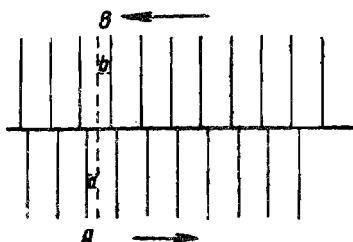
В действительности, винт  $T$  (черт. 219) дает посредством описанной выше конструкции оптического микрометра одновременное вращение обеим плоско-параллельным пластинкам в разные стороны и на равные углы поворота, и вращение винта  $T$  продолжается до тех пор, пока изображения штрихов  $B$  и  $A$  не совме-

стятся. Очевидно, при этом каждый из штрихов  $B$  и  $A$  пройдет путь  $\frac{a+b}{2}$ ,

и в момент их совпадения мы получим на барабане секунд  $ss$  по индексу  $i$  отсчет  $\frac{a+b}{2}$ , т. е. именно тот, который и требовалось получить. Очевидно также, что этот отсчет будет свободен от влияния эксцентриситета алиады. Несомненно, что в этом способе получения сразу  $\frac{a+b}{2}$  заключается остроумнейшая идея, принадлежащая имению Вильду.

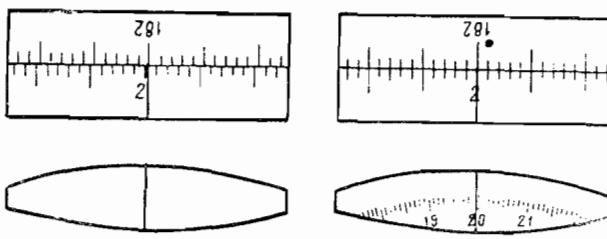
Как уже указывалось, горизонтальный круг в прецизионном теодолите Вильда разделен через  $4'$ ; барабан секунд  $ss$  имеет 600 делений, но один оборот барабана соответствует двум минутам, и, следовательно, цена одного деления микрометра равна  $0'',2$ . Так как это деление изображается при рассматривании его через окуляр микроскопа (т. е. на расстоянии наибольшего зрения) отрезком в  $1\text{ mm}$ , то можно отсчитывать по барабану и сотые доли секунды. Десятки делений подписаны на барабане секунд соответственно  $0, 1, 2, \dots, 60$ . Освещение изображений круга должно быть яркое и равномерное, что достигается вращением соответственных призм; в течение измерения угла установка освещающей призмы не должна меняться. Совмещение соответствующих штрихов лимба выполняют, вращая головку винта  $T$  всегда по ходу часовой стрелки. По достижении совмещения штрихов лимба по индексу  $i$  делают отсчет градусов и минут по нижней шкале и затем делают отсчет по шкале секунд, умножая весь отсчет по этой шкале на два, или же делают одно за другим два совмещения штрихов лимба и, взяв каждый раз отсчет по шкале секунд, берут затем сумму этих отсчетов. Чертежи 225а, 225б и 225в иллюстрируют выполнение отсчетов. Пары минут выбираем до совмещения штрихов, соображая, прошел ли индекс половину деления в четыре минуты или нет.

Отсчеты по вертикальному кругу делаются в инструментах Вильда описываемой модели аналогично отсчетам по горизонтальному кругу, причем призменный переключатель изображений должен быть предварительно повернут до отказа против хода часовой стрелки (или выдвинут)

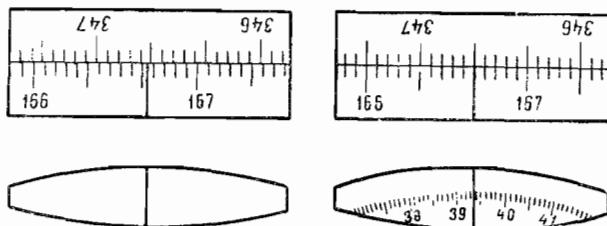


Черт. 224

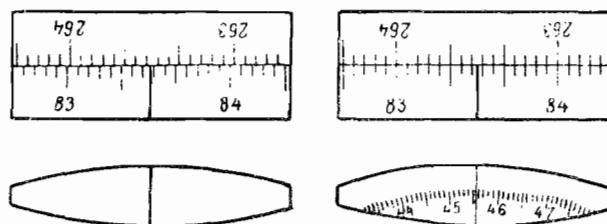
На вертикальном круге интервал в  $2^\circ$  разделен на 15 частей, следовательно, угловая цена наименьшего интервала равна  $8'$ . Так как диаметр вертикального круга почти в два раза менее диаметра горизонтального круга, то небольшим добавочным уменьшением в оптической передаче



Черт. 225а. Отсчет круга . . .  $2^\circ 0'$   
 1. Отсчет барабана . . . 19,94  
 2. " " . . . 19,94 39",84  
 Результат . . .  $2^\circ 0'39",84$



Черт. 225б. Отсчет круга . . .  $166^\circ 40'$   
 1. Отсчет барабана . . . 39,34  
 2. " " . . . 39,38 78",72  
 Результат . . .  $166^\circ 41'18",73$



Черт. 225в. Отсчет круга . . .  $83^\circ 30'$   
 1. Отсчет барабана . . . 45,56  
 2. " " . . . 45,50 91",06  
 Результат . . .  $83^\circ 31'31",06$

достигают того, что изображение в фокальной плоскости отсчетного микроскопа интервала между штрихами вертикального круга имеет те же размеры, что и для круга горизонтального. На этом основании пользуются тем же барабаном секунд и для отсчетов вертикального круга. Но за единицу на вертикальном круге принят не градус, а два гра-

дуса, и, следовательно, вместо градусной подписи  $0^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ\dots$  имеем подпись  $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ\dots$ , дающую половину угла. Очевидно, если мы удвоим отсчет по барабану секунд, то получим опять-таки только половину следуемого при угловом интервале в  $8'$  отсчета.

Таким образом, полный отсчет, т. е. номер младшего штриха плюс результаты отсчета, взятого с барабана секунд, дает собственно половину отсчета в градусной мере. Следовательно, если мы измеряем вертикальный угол между двумя точками, лежащими на одной отвесной линии, то разность отсчетов по вертикальному кругу, полученных при наведении трубы на эти две точки, даст половину искомого угла. Горизонтальная визура на вертикальном круге имеет на обоих концах подписи  $90^\circ$  и  $90^\circ$ ; подпись делений на вертикальном круге нанесена по секторам, так что диаметрально противоположные штрихи имеют одинаковую подпись. Назовем, как всегда, место нуля на вертикальном круге

через  $MO$ . Если отсчеты при круге-право и круге-лево на некоторую точку назовем через  $R$  и  $L$ , то имеем для теодолита Вильда такие формулы для вывода угла наклона  $\alpha$ :

$$\alpha = MO - 2R,$$

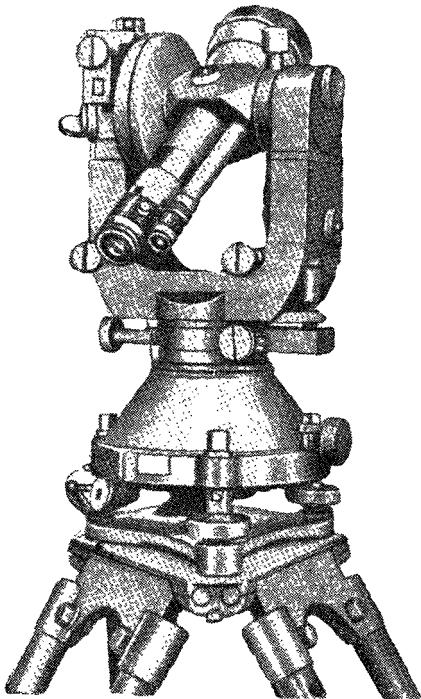
$$\alpha = 2L - MO,$$

$$\alpha = L - R,$$

т. е. разность непосредственно взятых отсчетов при круге-лево и при круге-право дает величину угла наклона  $\alpha$  (а не полуразность, как в обычных инструментах). Для зенитных расстояний имеем формулу:

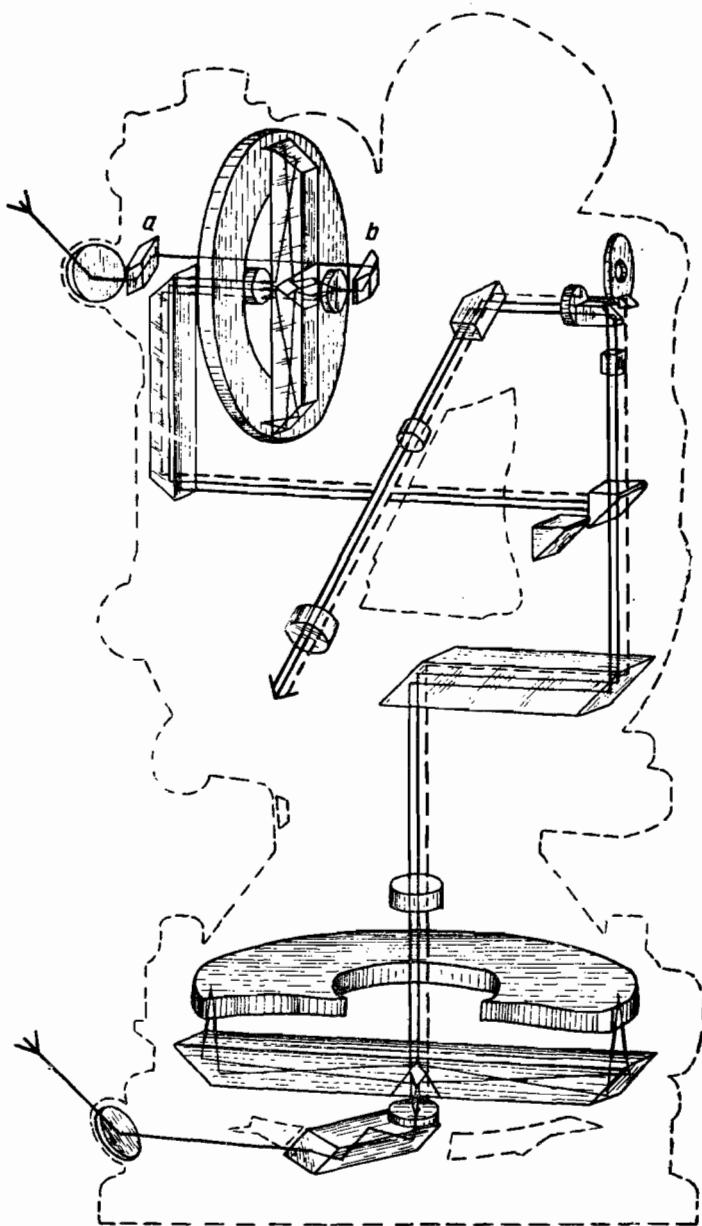
$$z = 90^\circ + R - L.$$

**7. Новые модели точных теодолитов Вильда.** Общий вид новой модели изображен на черт. 226. По сравнению с моделью, показанной на черт. 213 и 214, отмечаем такие изменения: призма  $3$  для освещения горизонтального круга заменена зеркалом; призма  $II$  (черт. 213) или призмы  $I'$  и  $I''$  (черт. 216), служащие для освещения вертикального круга, убраны (с обеих сторон трубы) и заменены вращающимися осветительным зеркалом, укрепленным на подставке трубы (левой на черт. 226); это зеркало подает свет через горизонтальную ось трубы. Соответственно изменению направления подачи света произведены изменения в части оптической схемы, передающей отраженные изображения штрихов вертикального круга к отсчетному микроскопу: призмы  $4'$  и  $5'$  (черт. 216) поменяются не с наружной, а с внутренней стороны вертикального круга (черт. 227), призма  $2'$  (черт. 216) заменяется двумя призмами  $a$  и  $b$  (черт. 227). Внутри трубы имеется зеркальце, вращающееся посредством кнопки, укрепленной на грани (на черт. 226 — верхней) центрального куба трубы; это зеркальце, получающее свет от зер-



Черт. 226

ся осветительным зеркалом, укрепленным на подставке трубы (левой на черт. 226); это зеркало подает свет через горизонтальную ось трубы. Соответственно изменению направления подачи света произведены изменения в части оптической схемы, передающей отраженные изображения штрихов вертикального круга к отсчетному микроскопу: призмы  $4'$  и  $5'$  (черт. 216) поменяются не с наружной, а с внутренней стороны вертикального круга (черт. 227), призма  $2'$  (черт. 216) заменяется двумя призмами  $a$  и  $b$  (черт. 227). Внутри трубы имеется зеркальце, вращающееся посредством кнопки, укрепленной на грани (на черт. 226 — верхней) центрального куба трубы; это зеркальце, получающее свет от зер-

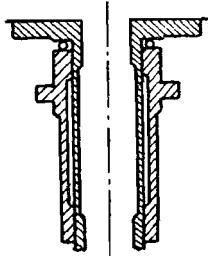


Черт. 227

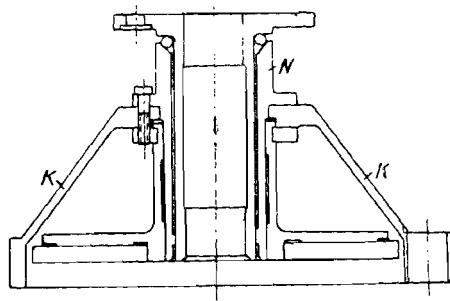
кала, освещдающего вертикальный круг, служит для освещения нитей трубы. Часть оптической схемы, заключенная между плоско-параллельными пластинками 8 и 9 и призмой 14 (черт. 216), также, как видно из черт. 227, несколько изменена.

Некоторое изменение в новых моделях получило также устройство осей теодолита. Как видно из черт. 228 и 229, в теодолитах Вильда вертикальная ось алидады цилиндрическая, а не коническая, как во

всех других современных точных угломерных инструментах. Черт. 228 показывает прежнее устройство осей, а черт. 229 — модернизированное. В последнем устройстве направляющая для оси алидады в виде узкого выступа в боксе  $N$ , соединяющейся с конусом  $K$  трегера, находится очень близко к нижнему концу оси алидады; в прежнем устройстве имелось две направляющих — в верхней и в нижней частях оси алидады и притом более широких. Несомненно, новое устройство осей в



Черт. 228



Черт. 229

большой степени гарантирует от трений и заеданий в оськах при вращении алидады; при этом по заявлению Вильда неизменность центрирования оси алидады сохраняется так же хорошо, как и при прежнем устройстве осей.

Опыт работ с теодолитами Вильда в Индии, в Канаде и в СССР (работы проф. Данилова) привели к заключению, что при прежнем устройстве осей этого инструмента измеряемые им углы получают систематические искажения порядка  $0''\cdot4$  — именно наблюденные углы получаются приуменьшенными. С другой стороны, нередки были случаи, когда после двух-трех месяцев работы в теодолитах Вильда обнаруживалось тугое вращение алидады. Эти факты и побудили внести указанные изменения в устройство осей, но в какой степени этим достигнуты положительные результаты — остается пока невыясненным. Во всяком случае, при точных измерениях углов теодолитами конструкции Вильда необходимо принять за правило вращать алидаду только по ходу часовой стрелки; подробные указания об этом даны в главе «Об измерении углов в триангуляции».

Прецизионные теодолиты Вильда ( $T\text{-}3$ ) имеют существенные преимущества в малом их весе, в быстроте и удобстве работы с ними. Но представляется, что будет необоснованным говорить о возможности замены ими обычных больших теодолитов в триангуляции I класса (за исключением трудных, малообжитых районов).

При измерении углов в триангуляции I класса важно иметь длиннофокусную трубу, обеспечивая этим, вместе с хорошими качествами объектива, наибольшую отчетливость и правильность изображений и повышая точность визирования трубой; важно продуктивно использовать те сравнительно короткие промежутки времени, когда внешние условия достаточно благоприятны для точного визирования трубы. Поэтому доведение в прецизионных теодолитах Вильда общего фокусного расстояния трубы до 28—30 см (т.е. в два раза более короткого, чем в больших триангуляционных теодолитах) идет вразрез с требо-

ваниями точной триангуляции; преимущество внутренней фокусировки -- сохранение в большой степени постоянства в положении визирной оси при переменах фокусировки -- не имеет значения в триангуляции, где работают с постоянной и неизменной фокусировкой трубы; с другой стороны, добавочная рассеивающая линза приводит в увеличению погрешностей объектива и, конечно, дает, кроме того, добавочные погрешности при изменениях температуры трубы.

Далее приходится обратить внимание на систематические ошибки в результатах измерений теодолитом Вильда, обусловленные системой устройства вертикальных осей. Эти систематические ошибки требуют выполнения наблюдений этими инструментами по особой программе и с соблюдением особых правил, которые приведены в главе «Об измерениях углов в триангуляции», но соблюдение которых все же, конечно, приводит к исключению ошибок в результатах наблюдений лишь до известной степени.

Все эти соображения заставляют воздерживаться от применения прецизионных теодолитов Вильда в триангуляции I класса. Но уже отмеченные преимущества инструментов этого типа (малый вес, быстрота и удобство работы) обеспечивают широкое применение их в заполняющей триангуляции II класса (при расстояниях не более 14—15 км) и в триангуляции I класса в районах трудно доступных; однако, в последнем случае использование их возможно при условии применения световой сигнализации и хорошо продуманных программ и правил наблюдений, проводимых очень опытными в работе с этими инструментами лицами.

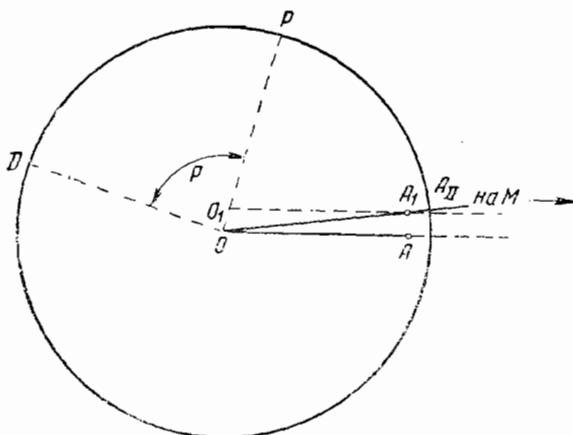
## Глава VIII

### ОБ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЯХ

#### § 56. Эксцентризитет алидады

Пусть  $O$  (черт. 230) есть центр лимба, а  $O_1$  — пересечение плоскости лимба с осью вращения алидады или так называемый центр вращения алидады.

Расстояние  $OO_1$ , обозначаемое буквой  $e$ , представляет собой так называемый эксцентризитет алидады. Величина  $e$  и отсчет  $P$  на лимбе



Черт. 230

соответствующий тому его радиусу, который проходит через  $O_1$ , называются элементами эксцентризитета. Эксцентризитет алидады обусловливает: а) сдвиг нуля верньера или нульпункта микроскопа относительно штрихов лимба; б) ошибку при определении расстояния нулевого штриха верньера или нульпункта микроскопа от ближайшего к нему младшего штриха лимба. Допустим для простоты рассуждений, что зирная плоскость трубы теодолита проходит через радиус алидады, содержащий  $O_1$  с ее индексом (нульпунктом микроскопа или нулем верньера). Пусть при наведении трубы на предмет  $M$  индекс алида совпадал с точкой  $A_1$ . Если бы не было эксцентризитета, то при наведении трубы на  $M$  индекс алидады оказался бы лежащим на радиусе  $OA$ , параллельном прямой  $O_1A_1$ . В самом деле, вследствие ничтожно- $e$  по сравнению с расстоянием до  $M$ , угол в  $M$ , соответствующий  $OO_1$ ,

дет исчисляться тысячными долями секунды, и, следовательно, если после наведения трубы на  $M$  вообразить поступательное движение алидады так, чтобы  $O_1$  переместилось в  $O$ , то труба в результате такого перемещения алидады останется фактически наведенной на  $M$ . Точка  $A$  есть, очевидно, правильное положение индекса, а угол  $A_1OA$  измеряет собой погрешность, обусловленную сдвигом индекса из положения  $A$  в неправильное положение  $A_1$ . Пусть нуль лимба совпадает с  $D$ ; назовем через  $L$  величину угла  $DOA$  и через  $L_1$  — величину угла  $DOA_1$ , причем под  $\Delta$  понимается пересечение окружности лимба с радиусом  $OA_1$ . Называя угол  $A_1OA$  через  $x$ , имеем:

$$L = L_1 + x;$$

$$\frac{\sin x}{\sin(L_1 - P)} = \frac{e}{O_1 A_1}; \quad \frac{\sin x}{\sin(L_1 - P)} = \frac{e}{r + \Delta},$$

причем через  $r$  обозначен радиус лимба, а через  $\Delta$  — весьма малое отличие радиуса алидады от радиуса лимба. Так как  $\Delta$  есть величина малая и одного порядка с  $e$ , то, пренебрегая малыми величинами второго порядка, напишем:

$$\frac{x''}{\rho'' \cdot \sin(L_1 - P)} = \frac{e}{r}; \quad x'' = \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin(L_1 - P).$$

Таким образом, если бы определение расстояния индекса  $A_1$  от ближайшего к нему штриха лимба или определение  $L_1$  делалось безошибочно, то тогда истинный отсчет  $L$ , т. е. не искаженный действием эксцентризитета, получился по формуле:

$$L = L_1 + \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin(L_1 - P). \quad (218)$$

Предположим теперь, что в теодолите имеется  $n$  приборов для отсчитывания, расположенных по окружности лимба через равные промежутки. Если отсчет по первому верньеру или микроскопу есть  $L_1$ , то индекс верньера или микроскопа с номером  $k+1$  окажется, вследствие эксцентризитета алидады, смещенным от своего истинного положения и именно так, что этому смещению будет соответствовать при центре лимба угол  $z$ :

$$z = \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin\left(L_1 + k \cdot \frac{2\pi}{n} - P\right).$$

Другими словами, если считаться только с той частью влияния эксцентризитета, которая выражается смещениями индексов от их истинных положений, то направление  $N$ , т. е. среднее из отсчетов по  $n$  верньерам, будет искажено ошибкой  $\Delta$ , равной:

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z = \frac{e \cdot \rho''}{r} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(L_1 + k \cdot \frac{2\pi}{n} - P\right).$$

Но  $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(L_1 + k \cdot \frac{2\pi}{n} - P\right)$  равно нулю, и поэтому мы приходим

к заключению, что при отсчитывании лимба по верньерам или микроскопам, расположенным симметрично, через равные промежутки по

всей его окружности, влияние эксцентризитета на определение направления равно нулю, если иметь в виду лишь обусловленное эксцентризитетом смещение нулевых штрихов или нульпунктов микроскопов и если пренебречь малыми величинами порядка  $\left(\frac{e}{r}\right)^2$ . Это заключение о нулевом влиянии эксцентризитета на направление, очевидно, остается в силе и при изменяющихся во время вращения алидады величинах  $e$  и  $R$ . Изменения в положении центра  $O_1$  алидады достигают нередко в инструментах с репсольдовой системой осей величин одного порядка с  $e$ .

Перейдем теперь к вопросу о влиянии эксцентризитета на определение положения нулевого штриха верньера или нульпункта микроскопа относительно ближайшего младшего штриха лимба. Эксцентризитет алидады обусловливает, во-первых, изменение расстояния от центра лимба до края верньера, что ведет за собой различия в значениях точности верньера при разных положениях алидады. Назовем через  $i$  цену деления на лимбе и через  $r$  — радиус лимба; если для построения верньера было взято  $n$  делений лимба, то очевидно, что длина  $S$  дуги верньера равна  $\frac{n \cdot i \cdot r}{\sigma''}$ .

Если при некотором положении алидады край верньера удален от центра лимба на расстояние  $d$ , то точность верньера, соответствующая этому положению алидады, будет равна:

$$t = i - \frac{n \cdot i \cdot r}{(n+1)d} = i - \frac{n \cdot i \cdot r}{(n+i)(r+\Delta r)}.$$

Расстояние  $d$  будет изменяться, очевидно, от  $r-e$  до  $r-e$ ; другими словами, наибольшее отступление действительного значения  $t$  от задуманного механиком  $t_0$  будет вычисляться так:

$$t - t_0 = \frac{n \cdot i \cdot r}{(n+1)r^2} \cdot \Delta r = \frac{n \cdot i}{n+1} \cdot \frac{e}{r}, \quad (219)$$

а изменения  $t$  будут заключаться в пределах от нуля до  $\frac{2eni}{(n+1)r}$ . Называя  $\frac{e \cdot \rho''}{r}$  угловым эксцентризитетом и обозначая его через  $\epsilon$ , напишем:

$$t - t_0 \leq \epsilon'' \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{i''}{\rho''} = \epsilon'' \cdot n \cdot \frac{t_0''}{\rho''}. \quad (220)$$

При десятисекундном верньере  $n=59$  и, следовательно, при  $\epsilon=60''$  будем иметь  $t - t_0 \leq 0'',18$ . Другими словами, в десятисекундных теодолитах уже при  $\epsilon=60''$  ошибка в отсчете по верньеру, обусловленная влиянием эксцентризитета, может достигнуть значения:

$$n(t - t_0) = 59 \cdot 0'',18 = 10'',6.$$

С такой ошибкой, притом систематического характера, конечно, помириться нельзя. Однако, достаточно очевидно, что одновременные изменения расстояния  $d$  для двух противоположных верньеров равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому надлежит заключить, что погрешности в отсчетах по верньерам, обусловленные изменениями расстояния края верньера от центра лимба при эксцентричном движении алидады, уничтожаются до известной степени в среднем из

отсчетов по двум противоположным верньерам. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Почти всегда в инструментах с верньерами нули противоположных верньеров отстоят друг от друга точно на  $180^\circ$  ( $\pm 10''$ ). Поэтому различие в показаниях верньеров не превышает  $2\varepsilon$ . Следовательно, если на одном верньере совпадающий штрих имеет номер  $k$ , то на другом верньере совпадающий штрих может иметь номер  $k \pm \frac{2\varepsilon}{t_0}$ . Другими словами, если погрешность из-за эксцентризита по первому верньеру выразилась согласно формуле (220) величиной:

$$+ \frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot n t_0 \cdot k,$$

то погрешность из-за той же причины по второму верньеру выразится так:

$$- \frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot n t_0 \left( k \pm \frac{2\varepsilon}{t_0} \right).$$

Поэтому в случае, когда младшие штрихи лимба, за которыми сейчас же следуют нули верньеров, отличаются равно на  $180^\circ$ , имеем такую погрешность  $\Delta$  в направлении  $N$ :

$$\Delta < \pm n \cdot \frac{(\varepsilon'')^2}{\rho''}. \quad (221)$$

Но в том случае, когда нуль одного верньера отстоит от ближайшего к нему младшего штриха  $S$  лимба почти на величину деления  $i$  лимба, по второму верньеру отсчет может произойти уже за штрихом  $180^\circ + S + i$  лимба. Следовательно, если погрешность одного верньера будет:

$$+ \frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot n t_0 k,$$

то погрешность второго будет:

$$- \frac{\varepsilon''}{\rho''} n t_0 \left[ k + \frac{2\varepsilon''}{t_0} - (n+1) \right],$$

а погрешность в направлении  $N$  выразится так:

$$\Delta = - \frac{(\varepsilon'')^2}{\rho''} n + \frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot \frac{n(n+1) \cdot t_0}{2}. \quad (222)$$

В случае, предусматриваемом формулой (221), даже при  $\varepsilon = 60''$ ,  $\Delta$  не превзойдет одной секунды, но в случае, представляемом формулой (222), уже при  $t_0 = 10''$ ,  $n = 59$  и  $\varepsilon = 30''$ .

$$\Delta = 2'', 3.$$

Так как средняя погрешность в  $N$ , обусловленная собственно ошибками отсчетов по верньерам, не превышает  $\pm 2'', 5$ , то очевидно, что в десятисекундных инструментах всегда должно быть:

$$\varepsilon < 20''.$$

Вследствие эксцентризита алиады штрихи верньера являются направлениеми нерадиально; однако, чтобы эта нерадиальность могла

быть замечена наблюдателем, нужно иметь столь крупное значение  $\epsilon$ , которое в исправных инструментах не встречается.

В инструментах с микроскоп-микрометрами эксцентрикитет алидады, кроме смещения нульпункта, вызывает еще изменения гип микроскопа и непараллельность нитей микрометра с штрихами лимба. Однако, нужно иметь очень крупное значение  $\epsilon$ , которое встречается лишь в неисправных инструментах, чтобы наблюдатель мог заметить обусловленное эксцентрикитетом нарушение параллельности нитей микрометра с штрихами лимба. Затем очевидно, что одновременные изменения гип двух противоположных микроскопов как обусловленные изменениями расстояний микроскопов от центра лимба равны по величине, но противоположны по знаку. Наибольшее изменение  $\Delta r$  в гип микроскопа будет равно  $n_0 \cdot \frac{\epsilon''}{\rho''}$ . Поэтому ошибка в отсчете по микроскопу будет равна  $\frac{\epsilon''}{\rho''} \cdot \frac{(a + b - n_0)}{2} \mu_0$ . Даже при  $\epsilon = 60''$  имеем для большого теодолита, в котором  $n_0 = 150$  и  $\mu_0 = 2''$ , наибольшую ошибку отсчета, равную всего  $0'',05$ . Другими словами, о влиянии эксцентрикитета на понижение точности определения микрометром расстояния нульпункта от штрихов лимба говорить не приходится.

Но, конечно, значительность  $\epsilon$  в инструменте с микроскоп-микрометрами указывает или на повреждение, или на неправильную регулировку положения алидады, а, следовательно, и на неправильность ее вращения, что непременно покажет точность работы инструмента.

До сих пор мы вовсе не касались причин, вызывающих эксцентрикитет алидады и его изменения. Всегда следует считать, что центр делений лимба не совпадает с осью его вращения в инструменте — это обусловливается тем, что на делительной машине лимб центрируется вообще иначе, чем при посадке его в процессе сборки теодолита. При выводе всех предыдущих формул и при получении заключений из них это обстоятельство не имеет никакого значения. Но, очевидно, при перестановках лимба, например, между приемами при измерении горизонтальных направлений, это несовпадение центра делений лимба с осью его вращения будет приводить к изменению эксцентрикитета алидады. Колебания оси алидады в инструментах с устройством осей по Рейхенбаху или неправильности вращения алидадной боксы около центральной цапфы  $a$  (см. черт. 198а) при устройстве осей по Репсольду также вызывают изменения эксцентрикитета. Эти неправильности вращения алидады, вызывающие неправильные, совершающиеся нередко скачками, изменения эксцентрикитета алидады, могут сопровождаться иногда гнущиями алидады. Поэтому их следует вообще так или иначе отделять от изменений эксцентрикитета, обусловленных несовпадением центра делений лимба с центром его вращения. Такое отделение невозможно сделать в условиях полевых геодезических работ, но его следует выполнять при приемке инструментов от заводов и при лабораторных исследованиях инструмента, предшествующих полевой работе с ним.

Заметим попутно, что при эллиптичности центральной цапфы  $a$  (черт. 198а) повороты лимба будут сопровождаться смещениями центра делений, т. е. изменениями эксцентрикитета алидады, и, кроме того, при этом могут иногда происходить деформации лимба, сопровождающиеся смещением его штрихов. При наибольшей радиальной деформации всего в  $1 \mu$  эти смещения штрихов лимба при диаметре его в 27,5 см могут

приводить к однообразным искажениям измеряемого во всех приемах угла до  $\pm 0''$ .

Таким образом, в точных инструментах приходится исследовать эксцентризитет в отношении причин его образования, т. е. приходится исследовать: несовпадение центра делений лимба  $O$  с центром его вращения  $C$  и несовпадение центра вращения  $O_1$  алидады с точками  $O$  и  $C$  (черт. 231), а также исследовать изменения в положении точки  $O_1$  и связанные с ними последствия, т. е. исследовать правильность вращения алидады и отсутствие при этом деформаций в алидадной части инструмента. Мы ограничимся рассмотрением этого вопроса только по отношению к инструментам с реисольдовой системой осей. Пусть на черт. 231:  $O$  — центр делений лимба;  $O_1$  — центр вращения алидады;  $C$  — центр вращения лимба;  $D$  — нулевой штрих лимба;  $A_1$  и  $B_1$  — нульпункты микроскопов при наведении трубы на некоторый предмет;  $A$  и  $B$  — положение нульпунктов микроскопов, которое они заняли бы при наведении трубы на тот же предмет, но при совпадении  $O_1$  с  $O$ . Обозначим: через  $180^\circ + \delta$  — угол  $\angle OAB$ , считаемый от  $OA$  по ходу часовой стрелки; через  $M_I$  и  $M_{II}$  — отсчеты соответственно при точках  $A_1$  и  $B_1$ ; через  $M$  и  $M + 180^\circ + \delta$  — отсчеты, которые имели бы при точках  $A$  и  $B$ ; через  $P$  — отсчет при  $P$ , лежащем на продолжении прямой  $OO_1$ . На основании уравнения (218) напишем:

$$M = M_I + \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin(M_I - P),$$

$$M + 180^\circ + \delta = M_{II} + \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin(M_{II} - P) = M_{II} - \frac{e \rho''}{r} \sin(P - M_I),$$

пренебрегая при этом величинами порядка  $\frac{e^2}{r^2}$ . Далее:

$$M = M_I + \frac{e \cdot \rho''}{r} \cos P \sin M_I - \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin P \cos M_I,$$

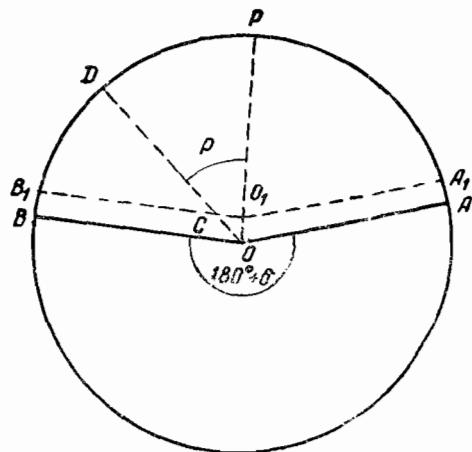
$$M + 180^\circ + \delta = M_{II} - \frac{e \cdot \rho''}{r} \cos P \sin M_I + \frac{e \cdot \rho''}{r} \sin P \cos M_I,$$

$$180^\circ + \delta = M_{II} - M_I - \frac{2e\rho''}{r} \cos P \sin M_I + \frac{2e\rho''}{r} \sin P \cos M_I. \quad (223)$$

Обозначим далее:

$$M_{II} - M_I - 180^\circ = V,$$

$$\frac{2e}{r} \cdot \rho'' \cos P = x; \quad \frac{2e}{r} \cdot \rho'' \sin P = y. \quad (224)$$



Черт. 231

Тогда уравнение (223) перепишется так:

$$x \sin M_1 - y \cos M_1 + \delta = V. \quad (225)$$

Предположим, что вращение алилады можно считать происходящим около постоянной точки  $O_1$ . При некотором неизменном положении лимба будем устанавливать алиладу на отсчеты по первому микроскопу  $0^\circ, \varphi^\circ, 2\varphi^\circ, \dots, (n-1)\varphi^\circ$ , причем  $\varphi^\circ = \frac{360^\circ}{n}$ , а  $n$  — некоторое целое число; при каждой такой установке делаем отсчеты  $M_1$  и  $M_1$  и получаем соответственное  $V$ . Следовательно, мы будем иметь  $n$  уравнений (225), которые при определении из них неизвестных  $x, y, \delta$ , конечно, следует рассматривать как уравнения погрешностей. Соответствующие им нормальные уравнения напишутся так:

$$\begin{aligned} x \Sigma \sin^2 M_1 - y \Sigma \sin M_1 \cos M_1 + \delta \Sigma \sin M_1 &= \Sigma V \sin M_1; \\ -x \Sigma \sin M_1 \cos M_1 + y \Sigma \cos^2 M_1 - \delta \Sigma \cos M_1 &= -\Sigma V \cos M_1; \\ x \Sigma \sin M_1 - y \Sigma \cos M_1 + n\delta &= \Sigma V. \end{aligned}$$

Но так как  $M_1$  изменяется через равные интервалы  $\varphi^\circ$  в пределах окружности, то:

$$\Sigma \sin M_1 = \Sigma \cos M_1 = \Sigma \sin M_1 \cdot \cos M_1 = 0;$$

$$\Sigma \sin^2 M_1 = \Sigma \cos^2 M_1 = \frac{n}{2}$$

Другими словами:

$$\delta = \frac{\Sigma V}{n};$$

$$y = -\frac{\Sigma V \cos M_1}{\frac{n}{2}}; \quad (226)$$

$$x = \frac{\Sigma V \cdot \sin M_1}{\frac{n}{2}}; \quad \operatorname{tg} P = \frac{y}{x}; \quad e = \frac{r}{2\rho''} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Обычно при описанном «определении элементов эксцентризитета  $P$  и  $e$ » интервал  $\varphi^\circ$  берут равным  $30^\circ$  и, следовательно, делают 12 установок алилады. Само по себе это определение  $P$  и  $e$ , по существу, еще ничего не дает. Но, получив  $x, y$  и  $\delta$ , вычисляют с ними для всех  $M_1$  левую часть уравнения (225) и получают  $V_{\text{выч}}$ , т. е. вычисленное значение левой части тех же уравнений. По несогласиям:

$$V - V_{\text{выч}}$$

получают возможность судить о неправильностях во вращении алилады около вертикальной ее оси. При наличии значительных  $V - V_{\text{выч}}$ , при изменениях скачками этих величин, выполняют заново регулировку вращения алилады, причем при неуспехе этих новых регулировок стараются обнаружить (разбирая инструмент) повреждения в боксе и в винте грибообразной шляпкой.

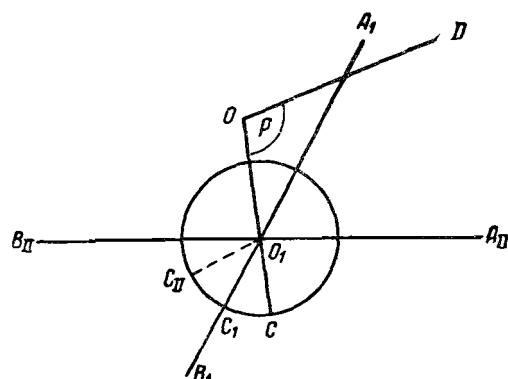
Нужно отметить, что тонкий слой масла, имеющийся между поверхностями боксы алилады и центральной цапфы  $a$ , участвуя во вращении алилады, движется, однако, с меньшей угловой скоростью, чем ал-

дада: можно считать, что средняя часть этого слоя движется с угловой скоростью, вдвое меньшей скорости вращения алидады. Это вызывает нарушение постоянства толщины слоя масла и сдвиги  $O_1$ —центра вращения алидады. Конечно, полную закономерность в этих переменах положения оси вращения алидады мы будем иметь только при вполне установленном вращении этой последней, т. е. при непрерывном вращении с некоторой постоянной угловой скоростью. Ни при наблюдениях в поле, ни при исследованиях эксцентризита алидады в лаборатории мы не имеем таких условий: за поворотом алидады на угол  $\varphi^2$  следует остановка движения для выполнения отсчетов  $M_{II}$  и  $M_I$ . Но тем не менее попытки объяснить колебания:

$$V = V_{\text{вых}}$$

перемещениями оси вращения алидады, вызываемыми изменениями давления слоя масла, иногда приводят к успеху, и мы поэтому также остановимся на этом явлении, рассматривая его в самой простой форме.

Пусть на черт. 232:  $O$  — центр делений лимба;  $O_1$  — постоянный центр вращения алидады;  $D$  — нуль лимба;  $OO_1 = e$ ;  $\angle DOO_1 = P$ ; точка  $C$  лежит на продолжении линии  $OO_1$  в расстоянии от  $O_1$ , равном  $O_1C = e_1$ . Через некоторый промежуток времени от начала вращения алидады давление масляного слоя вызывает перемещение оси ее вращения из положения  $O_1$  в положение  $C_1$ ; при дальнейшем вращении алидады пусть будем иметь уже установленное движение, причем проекция оси враще-



Черт. 232

ния алидады пусть будет перемещаться по окружности с центром в  $O_1$  и с радиусом  $O_1C = O_1C_1 = e_1$ . Назовем через  $P_1$  отсчет по первому микроскопу, когда линия микроскопов  $A_1B_1$  совпадает с радиусом  $O_1C_1$ . Когда линия микроскопов займет положение  $A_2B_2$  после поворота алидады на угол  $B_2O_1B_1$ , пусть отсчет по первому микроскопу будет  $M_1$ ; в этот момент проекция оси вращения алидады займет положение  $C_2$ . Приближенно, с ошибкой на величины порядка  $e_1$ , мы имеем:

$$\begin{aligned} \angle B_2O_1B_1 &= M_1 - P_1; \\ \angle C_2O_1C_1 &= \frac{M_1 - P_1}{2} = \angle C_2O_1B_1. \end{aligned}$$

Теперь с ошибкой лишь на величины порядка  $\frac{e^2}{r^2}$ ,  $\frac{e_1^2}{r^2}$  напишем:

$$180^\circ + \delta = M_{II} - M_1 - \frac{2e_1\rho''}{r} \sin(M_1 - P) - \frac{2e_1\rho''}{r} \sin \frac{M_1 - P_1}{2}$$

или, после преобразований и с обозначениями:

$$M_{II} - M_1 - 180^\circ = V,$$

$$\frac{2e \cdot \rho''}{r} \cos P = x; \quad \frac{2e \cdot \rho''}{r} \sin P = y,$$

$$\frac{2e_1 \cdot \rho''}{r} \cos \frac{P_1}{2} = x_1; \quad \frac{2e_1 \cdot \rho''}{r} \sin \frac{P_1}{2} = y_1$$

напишем:

$$x \sin M_1 - y \cos M_1 + x_1 \sin \frac{M_1}{2} - y_1 \cos \frac{M_1}{2} + \delta = V. \quad (227)$$

Теперь представим себе, что мы даем алидаде  $n$  установок, вращая ее от установки к установке на угол  $\varphi^\circ = \frac{720^\circ}{n}$  и делая при каждой установке отсчет по обоим микроскоп-микрометрам. Мы получим  $n$  уравнений (227), из которых неизвестные  $x, y, x_1, y_1, \delta$  определим по способу наименьших квадратов из таких нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{2} x &= \sum V \cdot \sin M_1 \\ -\frac{n}{2} y &= \sum V \cdot \cos M_1 \\ \frac{n}{2} x_1 &= \sum V \cdot \sin \frac{M_1}{2} \\ \frac{n}{2} y_1 &= -\sum V \cdot \cos \frac{M_1}{2} \\ n\delta &= \sum V \end{aligned} \right\}; \quad (228)$$

отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} P &= -\frac{\sum V \cdot \cos M_1}{\sum V \cdot \sin M_1}; \quad \operatorname{tg} \frac{P_1}{2} = -\frac{\sum V \cdot \cos \frac{M_1}{2}}{\sum V \cdot \sin \frac{M_1}{2}} \\ e &= \frac{r}{\rho''} \cdot \frac{\sum V \cdot \sin M_1}{n \cos P} = -\frac{r}{\rho''} \cdot \frac{\sum V \cdot \cos M_1}{n \sin P} \\ e_1 &= \frac{r}{\rho''} \cdot \frac{\sum V \cdot \sin \frac{M_1}{2}}{n \cos \frac{P_1}{2}} = -\frac{r}{\rho''} \cdot \frac{\sum V \cdot \cos \frac{M_1}{2}}{n \sin \frac{P_1}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (229)$$

Представляется, что следует действительно при исследовании эксцентрикитета проходить перестановками алидады не одну, а две полные окружности и применять уравнение (227) и формулы (228) и (229). При этом угол  $\varphi^\circ$  следует брать равным  $48^\circ$  и иметь 15 установок алидады.

Понятно опять-таки, что получение величин  $P_1, P$  и  $e$  само по себе не представляет интереса. Но выяснение величины  $e_1$  связано с выяснен-

нием обстоятельств движения алидады, и поэтому получение этой величины имеет уже соответственное значение. Получив  $P$ ,  $P_1$ ,  $e$  и  $e_1$ , мы подставляем их затем, конечно, в левую часть уравнения (227) и после этого сравниваем  $V$  вычисленные с  $V$  наблюдеными, стоящими в правой части этих уравнений; при этом следует отдельно выделять влияние членов  $x_1 \cdot \sin \frac{M_1}{2} - y_1 \cdot \cos \frac{M_1}{2}$ , чтобы видеть, работает ли их введение на уменьшение величин

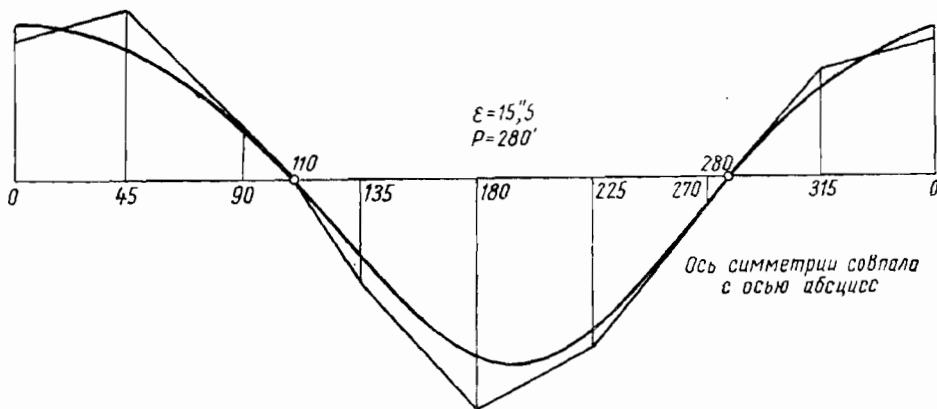
$$V_{\text{выч}} - V_{\text{наб.}}$$

Заметим еще, что если мы назовем через  $M_{11}$  и  $M_1$ ,  $M'_{11}$  и  $M'_1$  отсчеты по микроскоп-микрометрам, сделанные при двух противоположных установках алидады, то, предполагая в каждой паре таких установок центр вращения алидады одним и тем же, из уравнения (223) напишем:

$$\tilde{\delta} = \frac{(M_{11} - M_1 - 180^\circ) + (M'_{11} - M'_1 - 180^\circ)}{2}.$$

Постоянство значений  $\tilde{\delta}$ , получаемых из разных пар противоположных установок, до известной степени говорит о правильности вращения алидады.

При исследовании эксцентризитета в инструментах невысокой точности, предназначенных для триангуляции II класса, поступают так: получив  $\tilde{\delta} = \frac{\Sigma V}{n}$ , далее выводят  $\frac{V}{2} - \frac{\tilde{\delta}}{2}$  и эти величины откладывают как ординаты на графике (черт. 233), на котором по оси абсцисс отложены в градусах величины  $M_1$  [или величины  $0^\circ, \varphi^\circ, 2\varphi^\circ, 3\varphi^\circ, \dots, (n-1)\varphi^\circ$ ].



Черт. 233

Кривая, соединяющая последовательно построенные на графике точки, должна быть близка к синусоиде. Проведя на графике линию, параллельную оси абсцисс, относительно которой кривая располагается возможно более симметрично, берем с графика: а) наибольшую положительную и наибольшую отрицательную относительно оси симметрии ординаты; среднее из абсолютных их значений дает значение  $\epsilon''$  (угловой эксцентризитет); б) градусные отсчеты по оси абсцисс для двух точек, в

которых кривая графика пересекается осью симметрии; по этим отсчетам соображаем значение  $P$ . Теперь, рассчитав величины

$$\varepsilon'' \cdot \sin(M - P)$$

для всех точек графика, строим по этим величинам ординаты с откладыванием их, однако, не от оси абсцисс, а от оси симметрии; по построенным точкам вычерчиваем синусоиду и, оценивая теперь отступления ранее построенных точек от соответствующих точек синусоиды, получаем ясное представление о неправильных колебаниях эксцентрикита.

В табл. 20 приведены результаты исследования эксцентрикита в 5-секундном теодолите. Соответствующий график построен на черт. 233, на котором ось симметрии совпадла с осью абсцисс.

Остановимся теперь на той части эксцентрикита, которая обусловлена эксцентричным положением центра вращения лимба  $C$  (черт. 234).

На черт. 234—центр делений лимба в  $O$  и центр вращения алидады в  $O_1$ .

Написав прежнее уравнение (223):

$$180^\circ + \delta = M_{II} - M_I - 2 \frac{e \cdot \varphi''}{r} \sin(M_I - P),$$

мы, с другой стороны, очевидно, будем иметь:

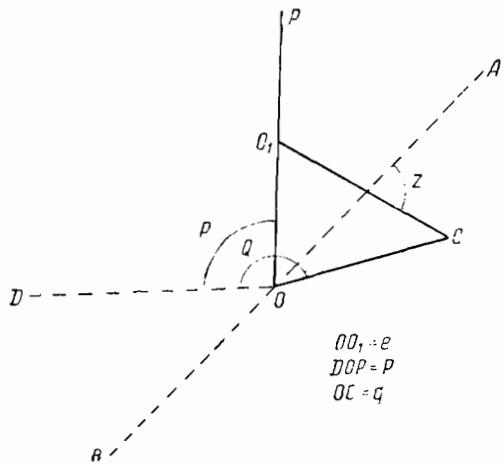
$$\frac{2e \cdot \varphi''}{r} \sin(M_I - P) = \frac{2q \cdot \varphi''}{r} \sin(M_I - Q) + \frac{2\overline{O_1C}}{r} \cdot \varphi'' \cdot \sin z,$$

причем:  $\overline{OO_1} = e$ ;  $\overline{OC} = q$ ;  $\angle DOP = Q$ , а угол между направлением с  $O_1$  на  $C$  и линией микроскопов  $BA$  назван через  $z$  (черт. 234);  $D$ —пулевой штихм лимба;  $\angle DOP = P$ .

Таким образом:

$$M_{II} - M_I = \frac{2q \cdot \varphi''}{r} \sin(M_I - Q) + \frac{2\overline{O_1C}}{r} \cdot \varphi'' \sin z + 180^\circ + \delta. \quad (230)$$

Закрепив алидаду, будем переставлять лимб на угол  $\omega = \frac{2\pi}{m}$  и при каждой новой установке лимба будем брать отсчеты  $M_{II}$  и  $M_I$ ; в результате  $m$  установок лимба мы повернем его на целую окружность и получим  $m$  уравнений погрешностей вида (230), в которых  $Q$ ,  $z$ ,  $q$ ,  $\delta$ ,  $\overline{O_1C}$ —постоянные, подлежащие определению.



Черт. 234

Таблица 20

| $M_1$                | $\frac{V}{2}$ | $\frac{V}{2} - \frac{\delta}{2}$ |
|----------------------|---------------|----------------------------------|
| 0°                   | + 6",3        | + 13",9                          |
| 45                   | + 8",7        | + 16",3                          |
| 90                   | - 2",7        | + 4",9                           |
| 135                  | - 15",7       | - 8",1                           |
| 180                  | - 27",0       | - 19",4                          |
| 225                  | - 22",7       | - 15",1                          |
| 270                  | - 9",7        | - 2",1                           |
| 315                  | + 2",1        | + 9",7                           |
| $\Sigma$             | - 60",7       | + 0",1                           |
| $\frac{\delta}{2} =$ | - 7",6        | -                                |

Обозначив  $M_{II} - M_I = 180^\circ$  через  $V$ , перепишем это уравнение (230) в таком виде:

$$V = x_2 \sin M_I - y_2 \cos M_I + k, \quad (231)$$

причем принято:

$$x_2 = \frac{2q \cdot \rho''}{r} \cos Q; \quad y_2 = \frac{2q \cdot \rho''}{r} \sin Q; \quad \delta + \frac{2 \cdot \bar{O}_1 C}{r} \cdot \rho'' \sin z = k.$$

Нормальные уравнения, соответствующие уравнениям (231), будут таковы:

$$\begin{aligned} x_2 \Sigma \sin^2 M_I - y_2 \Sigma \sin M_I \cos M_I + k \Sigma \sin M_I &= \Sigma V \cdot \sin M_I, \\ -x_2 \Sigma \sin M_I \cos M_I + y_2 \Sigma \cos^2 M_I - k \Sigma \cos M_I &= -\Sigma V \cdot \cos M_I; \\ +x_2 \Sigma \sin M_I - y_2 \Sigma \cos M_I + m \cdot k &= \Sigma V. \end{aligned}$$

Но известно, что:

$$\Sigma \sin M_I = \Sigma \cos M_I = \Sigma \sin M_I \cdot \cos M_I = 0.$$

$$\Sigma \sin^2 M_I = \Sigma \cos^2 M_I = \frac{m}{2}.$$

Поэтому имеем:

$$k = \frac{\Sigma V}{m}; \quad y_2 = -\frac{\Sigma V \cdot \cos M_I}{\frac{m}{2}};$$

$$x_2 = \frac{\Sigma V \sin M_I}{\frac{m}{2}}; \quad \operatorname{tg} Q = \frac{y_2}{x_2}; \quad q = \frac{r}{2\rho''} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \quad (232)$$

Именно при приемке инструмента от завода, а также при первом его исследовании в лаборатории центрального геодезического учреждения перед пуском на полевые работы следует при исследовании эксцентрикитета начинать с определения  $q$  и  $Q$ , т. е. с определения эксцентрикитета лимба. Хотя этот эксцентрикитет, при величине его до  $20''$  в инструментах с  $10''$  верньерами и до  $40''$  в инструментах с микроскоп-мик-

рометрами, вообще безвреден, но в полевых работах его влияние будет складываться с влиянием иссопадения точек  $O_1$  и  $C$  и с влиянием неправильностей во вращении алидады около точки  $O_1$ ; при этом может получаться неверное представление о годности или негодности инструмента для получения им точных результатов. Полагаем, что если  $q$  оказывается большим  $4\mu$ , то следует исправить в хорошей мастерской посадку лимба.

Следует так или иначе отметить то положение алидады, при котором произведено определение  $q$  и  $Q$ , например, взять линию  $AB$  на один из отмеченных каким-нибудь знаком подъемных винтов инструмента.

Допустим, что мы поставили линию микроскопов  $AB$  по направлению на такой особо отмеченный винт инструмента и после этого движением одного лимба подвели его нулевой штрих под первый микроскоп; далее, закрепив алидаду, проделали вышеупомянутую программу определения элементов эксцентризитета лимба и вывели в результате величины  $q$ ,  $Q$  и  $k$ ; затем, поставив лимб в исходное положение (нулевой штрих под первым микроскопом при направлении линии микроскопов на отмеченный подъемный винт), проделаем программу определений величин  $e_1P_0$  и  $\delta$ , соответствующую начальным уравнениям (223) и нормальным уравнениям (226). В инструментах с устройством осей по Репольду точки  $O_1$  и  $C$  собственно должны бы совпадать, так как  $C$  лежит на вертикальной оси центральной цапфы  $a$ . Другими словами, по существу здесь то, что мы обычно называем эксцентризитетом алидады, нередко обусловлено эксцентризитетом лимба, т. е. неверностью его посадки на делительной машине, неприцентрированностью его на делительной машине во время его подразделения.

Имея величину  $P_0$  (для исходного положения лимба) и имея  $Q$ ,  $e$  и  $q$ , из треугольника  $O_1OC$  (черт. 234) по двум его сторонам и углу  $O_1OC = Q - P_0$ , выводим  $O_1C$  (т. е. собственно эксцентризитет алидады, но не в геометрическом, а в механическом смысле, в смысле условий изготовления инструмента) и угол  $OO_1C$ , и так как в исходном положении  $OA$  совпадает с  $OD$ , то для этого положения:

$$z_0 = P_0 - \angle OOA - 180^\circ.$$

При разных положениях алидады, если она переставлялась в нашем исследовании на  $\psi^\circ$  при определении  $e$ ,  $P_0$  и  $\delta$ , влияние на отсчет  $M_1$  собственно эксцентризитета алидады, понимаемого в указанном выше смысле, будет равно:

$$\frac{\overline{O_1C}}{r} \cdot \rho'' \cdot \sin(z_0 - M_1).$$

Если при пользовании инструментом приближенный отсчет по первому микроскопу при направлении линии микроскопов на особо отмеченный подъемный винт будет  $\psi^\circ$ , то очевидно, что для этого положения лимба  $P$  будет равно прежнему  $P_0$  минус  $\psi^\circ$ , и влияние собственно эксцентризитета алидады нужно будет вычислять по формуле:

$$\frac{\overline{O_1C}}{r} \cdot \rho'' \cdot \sin(z_0 - \psi^\circ - M_1),$$

причем  $\overline{O_1C}$  и  $z_0$  определены из исследования, проделанного при установке нулевого диаметра на особо отмеченный подъемный винт.

Получение заметной величины, например, порядка  $10\text{ }\mu$ , для  $O_1C$  указывает или на ненадлежащую пригнанность алидадной бюксы к центральной цапфе  $a$ , или на наличие повреждений на внутренней (трущейся) поверхности этой бюксы, или на неверность установки винта с грибообразной шляпкой, или, наконец, на смятость поверхности конечной плоскости этого винта. Во всяком случае, заметная величина  $O_1C$  должна сопровождаться (хотя и не всегда) заметными неправильностями во вращении алидады, вредными при точных наблюдениях, и поэтому на эту сторону дела при приемке инструмента нужно обратить особое внимание.

Вычислив для разных установок алидады, сделанных при исследованиях для определения  $P_0$ ,  $e$  и  $\delta$ , значения члена:

$$M_{II} - M_I = 180^\circ - \delta - \frac{2q \cdot \rho''}{r} \sin(M_I - Q) = \Delta,$$

сравниваем его с

$$\frac{2O_1C}{r} \rho'' \cdot \sin(z_0 - M_I)$$

(или с  $\frac{2O_1C}{r} \cdot \rho'' \sin(z_0 - \psi^\circ - M_I)$ ). Разности:

$$\Delta - \frac{2O_1C}{r} \cdot \rho'' \sin(z_0 - M_I)$$

должны быть вообще менее  $12''$  для инструментов с диаметром лимба  $27,5\text{ см}$  и менее  $18''$  для инструментов с диаметром лимба  $21\text{ см}$ . Эти допуски нужно осуществить прежде, чем выпускать инструмент на полевые работы. Несоблюдение их может приводить к гнутиям алидады при одностороннем прижимании блюксы к центральной цапфе  $a$  (за исключением указанных ниже случаев). Мы должны упомянуть, что неправильности вращения алидады в инструментах с репсольдовой системой осей могут происходить и от неуравновешенности алидадной части инструмента, так что при исследовании эксцентризитета приходится обращать внимание и на эту сторону дела. Понятно, что эта неуравновешенность будет вызывать сдвиги пузырька уровня на горизонтальной оси при вращении алидады; однако, и перекосы блюксы также будут вызывать сдвиги пузырька этого уровня.

В полевых наблюдениях приходится опасаться эксцентризитета собственно алидады постольку, поскольку он может, сопровождаясь всегда неправильностями вращения алидады, вызывать ее гнутия. Но так как во время полевой работы мы не можем выделять из разностей  $M_{II} - M_I$  влияния эксцентризитета лимба, то приходится требовать, чтобы этот эксцентризитет лимба, сам по себе безвредный, был доведен при изготовлении инструмента до минимума и, кроме того, приходится еще требовать:

1) чтобы в течение полуприема наблюдения направлений, при достаточно свободном вращении алидады, пузырек уровня на горизонтальной оси смещался от среднего положения не более как на  $8''$ ; иначе возможны перекосы блюксы, вызывающие гнутия алидады.

2) чтобы абсолютные значения разностей  $M_{II} - M_I - 180^\circ$  не превышали как общее правило  $12''$  для инструментов с диаметром лимба  $27,5\text{ см}$  и  $18''$  -- для инструментов с диаметром лимба  $21\text{ см}$ .

Конечно, в требовании п. 2 мы идем с запасом, но иначе в общем случае можем рисковать, что результаты наблюдений будутискажаться гнущиями алидады, вызываемыми деформациями бюксы при одностороннем на нее давлении, возникающем при неправильном вращении алидады. Нужно, однако, отметить, что встречаются первоклассные инструменты, в которых неправильности вращения бюксы сопровождаются только поступательными горизонтальными ее перемещениями, при которых никакого смещения пузырька уровня на горизонтальной оси не наблюдается; при этом и никаких доформаций в бюксе не происходит, вследствие достаточности заполненного маслом зазора между ее внутренней поверхностью и поверхностью цапфы  $a$ . Понятно, что браковать такие инструменты не приходится, хотя для них указанные допуски в отношении значений  $M_1 - M_1 = 180^\circ$  или значений величин

$$\Delta = \frac{2\bar{O}_1\bar{C}}{r} z'' \cdot \sin(z_0 - M_1)$$

будут совсем не выдержаны. Конечно, обстоятельное исследование таких инструментов обнаружит безвредность заметных в них перемен эксцентризита алидады, но эти исследования также должны быть проведены до выпуска инструмента на полевые работы и в аттестате инструмента нужно указать на эти его особенности.

### § 57. Об ошибках делений кругов геодезических инструментов

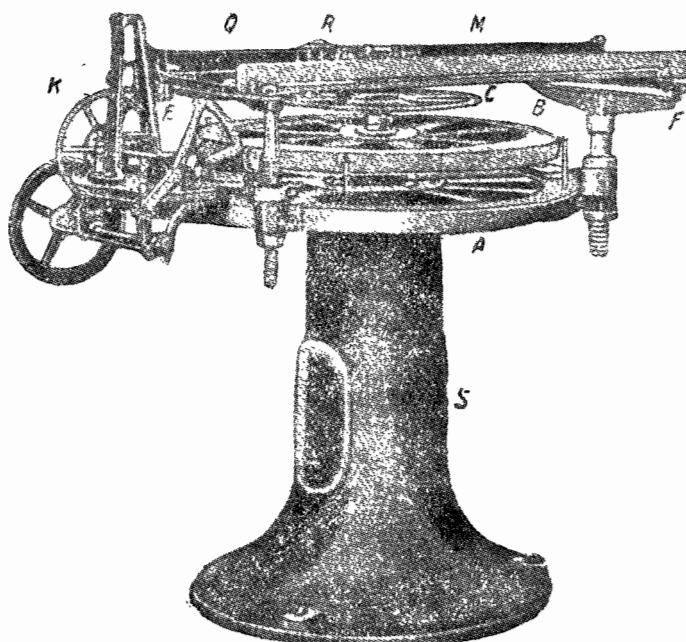
До недавнего времени подразделение кругов точных инструментов на градусные и более мелкие части ( $5'$ ,  $4'$  и даже  $2'$ ) выполнялось ручным способом посредством делительной машины, главной частью которой являлся так называемый образцовый круг, тщательно изготовленный и тщательно исследованный. В делительной машине изготавляемый круг укреплялся так, что его центр совмещался с центром образцового круга, а его плоскость располагалась параллельно плоскости образцового круга. Само деление представляло собой копирование штрихов образцового круга на изготавливаемом круге посредством резца: вращением образцового круга вместе с неподвижно соединенным с ним изготавляемым кругом около общей вертикальной оси вводился очередной штрих образцового круга в биссектор нитей микроскопа, неподвижно соединенного с основанием делительной машины, после чего сейчас же резцом наносился соответствующий штрих на изготавливаемом круге.

Образцовый круг получался после долгих проб, повторений и исследований; высокое качество его делений, понятно, обеспечивало высокое качество изготавляемых с него копий, и обладание таким кругом высокого достоинства составляло гордость фирмы. Описанный метод перенесения каждого штриха с образцового круга на подразделяемый сопровождался огромным расходом времени и требовал для своего выполнения искуснейших специалистов, артистов своего дела, которые должны были требуемые установки образцового круга выполнять с ошибками только в  $0,3 - 0,5''$ , и должны были уметь проводить в процессе деления необходимое контролирование результатов, а самую работу располагать так, чтобы возможно ослаблять накопление ошибок в положении наносимых штрихов.

В настоящее время делительные машины, при помощи которых деление выполнялось описанным «ручным» способом, заменились автоматическими или полуавтоматическими машинами, причем прочное

внедрение новых машин можно относить к 1913—1915 гг. На черт. 235 изображена такая автоматическая машина фирмы Гейдс в Дрездене.

Массивная станина *S* несет втулку, с которой совершенно жестко соединено круговое массивное основание *A* машины. Во втулку входит коническая стальная ось, на которой укреплен круг *B*; на продолжении той же оси к верху располагается второй круг *C*. На круге *C* помещается и закрепляется подразделяемый круг. Круг *B* на своей верхней поверхности имеет две врезанные в него серебряные пластинки: на одной из них нанесены штрихи через 20', которыми можно пользоваться как



Черт. 235

контрольными в процессе деления; на второй нанесены штрихи, используемые при изготовлении верньеров. На своем внешнем крае этот круг несет зубчатку, причем по всей окружности располагается или 1080 зубцов или иногда 1440. Изготовление этих зубцов выполняется с высокой степенью тщательности, и, конечно, они по существу эквивалентны подразделениям прежних образцовых кругов, но только выполнены не через 5', 4' или даже 2', а через 20' или 15'. С кругом *B* связан бесконечный винт *Y* — вогнутый или глобоидальный, 17 витков которого захватывают 16 зубцов круга *B*. От валика *K* движение через посредство сектора *E* и зубчатого колеса передается на другой валик *L*, на который пасажен упомянутый глобоидальный винт. Валик *K* получает движение через посредство ряда передач от мотора.

Посредством особого груза нарезка винта *Y* прижата к зубцам круга *B* (с силой около 150 г). За один оборот валика *K* сектор *E* входит в зацепление один или два раза, поворачивает каждый раз червяк *Y* на заданное число оборотов и затем выходит из зацепления. После

этого или, как говорят, после выполнения подачи, валик  $K$ , продолжая вращаться, приводит в движение механизм для нанесения делений; как только сектор  $E$  выходит из зацепления, движение валика  $K$  начинает работать на ряд сложных передач, соединяющих кинематически этот валик  $K$  с резцом прибора  $R$ . Резец сперва опускается, затем движется радиально и прочерчивает штрих на изготовленном лимбе, затем поднимается и, наконец, уводится в исходное положение; в этот момент сектор  $E$  вновь входит в зацепление, и машина начинает работать на подачу круга  $B$ , и т. д.

Механизм для нанесения делений располагается на раме  $M$ , покоящейся на подпорах  $Q$  и  $F$ ; винты этих подпор позволяют дать раме надлежащее положение по высоте.

По раме  $M$  может передвигаться особый мостик, несущий резец  $R$  и механизм, дающий резцу четыре движения: вниз, вперед, вверх и назад; мы не будем описывать этот механизм.

В машинах Гейде мы имеем весьма точно отделанную зубчатку круга  $B$ ; сцепление винта  $Y$  с зубчаткой выполняется также с высокой степенью точности благодаря большому (16) числу зубцов, участвующему в этом сцеплении. Если обеспечить постоянство температуры помещения и отсутствие внешних толчков, то автоматическая машина дает прекрасные результаты при нанесении делений. В 1 минуту времени машина наносит 8 штрихов, и, следовательно, подразделение круга через 4' потребует около 12 часов. Средняя ошибка в положении штриха круга 5- или 2-секундного теодолита при пользовании машиной Гейде во всяком случае менее  $\pm 1''$ .

Причинами ошибок в положении штрихов на лимбс, независимо от метода их нанесения, являются следующие:

- 1) несовпадение центров вращения разделяемого круга и круга образцового или круга, несущего зубчатку;
- 2) неполная параллельность кругов разделяемого и образцового;
- 3) ошибки делений образцового круга или ошибки зубцов круга  $B$  в автоматических машинах;
- 4) несовершенство юстировки и регулировки самой делительной машины (колебание вертикальной оси машины во втулке, натяжения и гнутья при поворотах, и т. п.);
- 5) продолжающийся и после нанесения делений процесс упругого последействия внутримолекулярного натяжения в лимбе, возникающий во время изготовления лимба;
- 6) ход температуры за время нанесения делений;
- 7) неправильности работы резца.

Часть этих причин, несомненно, обусловливает ошибки в положении штрихов лимба, имеющие явно периодический характер; эти ошибки, называемые обычно систематическими, следуют по всей окружности лимба некоторому закону, правда, всегда достаточно сложному.

Обычно принимают, что систематическая ошибка  $\Delta(u)$  штриха с номером  $u$ , отстоящего от нуля на угол  $u$ , может быть представлена периодической функцией такого вида:

$$\Delta(u) = c_0 + c_1 \sin(u + b_1) + c_2 \sin 2(u + b_2) + \dots + \left. \right\} + c_s \sin s(u + b_s), \quad (233)$$

в которой  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_s, b_1, b_2, \dots, b_s$  — некоторые постоянные для данного лимба количества. Полная ошибка  $\Delta_u$  в положении штриха  $u$  будет несколько отличаться от  $\Delta(u)$  и представится так:

$$\Delta_u = \Delta(u) + \delta, \quad (234)$$

где  $\delta$  — случайная часть ошибки штриха  $u$ , обусловленная, например, такими случайными причинами, как колебание резца при проведении им штриха. Величина  $m = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n}}$  есть средняя ошибка штриха, если  $n$  взято достаточно большое.

Представим себе теперь, что круг теодолита отсчитывается посредством  $p$  микроскопов, расположенных в одинаковом расстоянии друг от друга  $\sigma = \frac{360^\circ}{p}$ , и выведем формулу обусловленной систематическими ошибками штрихов погрешности в направлении, т. е. в среднем из отсчетов по всем  $p$  микроскопам. Называя эту погрешность в направлении через  $\Delta M$ , напишем:

$$\Delta M = \frac{\Delta(u) + \Delta(u + \sigma) + \dots + \Delta(u + [p-1]\sigma)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{k=p-1} \Delta(u + k\sigma), \quad (235)$$

если по первому микроскопу отсчет равен  $u$ . Но:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=p-1} \Delta(u + k\sigma) &= pc_0 + c_1 \cdot \sum_{k=0}^{k=p-1} \sin(u + k\sigma + b_1) + \\ &+ c_2 \cdot \sum_{k=0}^{k=p-1} \sin 2(u + k\sigma + b_2) + \dots \end{aligned}$$

Далее:

$$\begin{aligned} c_i \sum \sin i(u + k\sigma + b_i) &= c_i \sin i(u + b_i) \sum \cos ki\sigma + \\ &+ c_i \cos i(u + b_i) \sum \sin ki\sigma. \end{aligned}$$

Так как  $\sum_{k=0}^{k=p-1} \sin ki\sigma$  всегда равно нулю, а  $\sum_{k=0}^{k=p-1} \cos ki\sigma$  равно либо нулю, либо равно  $p$ , если  $i$  кратно  $p$ , то уравнение (235) переписывается так:

$$\Delta M = c_0 + c_p \sin p(u + b_p) + c_{2p} \sin 2p(u + b_{2p}) + \dots \quad (236)$$

Если наблюдения направлений выполняются  $m$  приемами с перестановкой лимба от одного приема к следующему на угол  $q = \frac{360^\circ}{pm}$ , то в состав окончательного направления на предмет  $M$ , выведенного из  $m$  приемов, войдут систематические ошибки таких штрихов:

|              |                       |
|--------------|-----------------------|
| $u$          | $u + \sigma$          |
| $u + q$      | $u + \sigma + q$      |
| $u + 2q$     | $u + \sigma + 2q$     |
| $\dots$      | $\dots$               |
| $u + (m-1)q$ | $u + \sigma + (m-1)q$ |

$$\begin{array}{ll}
 u + 2\sigma & u + (p-1)\sigma \\
 u + 2\sigma + q & u + (p-1)\sigma + q \\
 u + 2\sigma + 2q & u + (p-1)\sigma + 2q \\
 \vdots & \vdots \\
 u + 2\sigma + (m-1)q & u + (p-1)\sigma + (m-1)q
 \end{array}$$

Другими словами, в состав ошибки  $\delta N$  окончательного направления, выведенного из  $m$  приемов, войдут систематические ошибки штрихов, отстоящих друг от друга на угол  $q$ , т. е. тех же самых, которые вошли бы в ошибку направления, наблюденного в одном приеме, но при отсчитывании круга  $pm$  микроскопами. Следовательно, на основании (236) напишем:

$$\delta N = c_0 + c_{pm} \sin pm(u + b_{pm}) + c_{2pm} \sin 2pm(u + b_{2pm}) + \dots \quad (237)$$

Так, при двух микроскопах и двенадцати приемах:

$$\delta N = c_0 + c_{24} \sin 24(u + b_{24}) + c_{48} \sin 48(u + b_{48}) + \dots$$

В настоящее время искусство деления кругов достигло высокой степени совершенства. В тщательно разделенных кругах больших теодолитов систематическая ошибка  $\Delta(u)$  в положении штриха не превышает двух секунд, случайная же часть ошибки в положении штриха имеет среднее квадратическое значение  $m$ , меньшее  $\pm 0'',5$ .

На основании ур-ния (237) мы могли бы прийти к такому заключению: при достаточном числе приемов, в которых наблюдается направление на некоторый предмет, ошибка окончательного результата для этого направления, обусловленная систематическими ошибками делений лимба, будет весьма малой, если только лимб тщательно изготовлен, и коэффициенты  $c$  для него убывают вместе с возрастанием указателей при них.

Исследования кругов геодезических инструментов показывают, однако, что ряд (233) нельзя признать сходящимся даже в инструментах, выпущенных первоклассными механиками. Так, для влияния ошибок делений на направление, наблюденное в одном приеме, имеем для ряда инструментов такие формулы:

для одного из исследованных Шрейбером теодолитов

$$\begin{aligned}
 \delta N = & +0'',18 \cos 2u + 0'',16 \sin 2u - 0'',12 \cos 4u + \\
 & + 0'',14 \sin 4u - 0'',11 \cos 6u - 0'',17 \sin 6u + 0'',11 \cos 8u + 0'',23 \sin 8u.
 \end{aligned}$$

Для одного из теодолитов Прусской Landesaufnahme

$$\begin{aligned}
 \delta N = & +0'',135 \cos 2u + 0'',042 \sin 2u - 0'',002 \cos 4u + 0'',070 \sin 4u + \\
 & + 0'',077 \cos 6u - 0'',259 \sin 6u - 0'',047 \cos 8u + 0'',017 \sin 8u.
 \end{aligned}$$

Для инструмента Трауттона, результаты исследования которого приведены в труде Цингера «Астрономия»:

$$c_2 = -1'',74; \quad c_4 = +0'',80; \quad c_6 = +0'',08; \quad c_8 = +0'',23; \quad c_{10} = +0'',12.$$

Для большого геодезического теодолита № 69266 фирмы Гильдебранда, принадлежащего Московскому институту инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (МИИГАИК):

$$\begin{aligned}
 \delta N = & +0'',39 \sin 2u - 0'',02 \sin 4u + 0'',06 \sin 6u + 0'',02 \sin 8u + \\
 & + 0'',02 \sin 10u - 0'',06 \cos 2u - 0'',02 \cos 4u - 0'',17 \cos 6u + \\
 & + 0'',09 \cos 8u - 0'',21 \cos 10u.
 \end{aligned}$$

В этом превосходном по точности делений инструменте случайная ошибка штриха равна  $\pm 0'',25$ .

Для универсального инструмента Гильдебранда, принадлежащего Потсдамскому геодезическому институту:

$$\delta N = -0'',070 \cos 2u - 0'',182 \cos 4u - 0'',098 \cos 6u - 0'',202 \cos 8u - \\ - 0'',009 \cos 10u + 0'',059 \cos 12u - 0'',291 \cos 14u - 0'',002 \cos 16u + \\ + 0'',057 \cos 18u + 0'',087 \cos 20u - 0'',111 \cos 22u + 0'',231 \cos 24u + \\ + 0'',085 \sin 2u - 0'',068 \sin 4u - 0'',191 \sin 6u + 0'',073 \sin 8u - \\ - 0'',027 \sin 10u - 0'',221 \sin 12u - 0'',023 \sin 14u - 0'',163 \sin 16u - \\ - 0'',145 \sin 18u + 0'',032 \sin 20u - 0'',059 \sin 22u - 0'',104 \sin 24u.$$

Приведенные результаты показывают, что и в хороших геодезических кругах собственно убывания коэффициентов с мы или совсем не наблюдаем или это убывание заканчивается уже в членах, идущих за слагаемыми с  $\sin bu$  и с  $\cos bu$ . Другими словами, для хороших современных геодезических кругов характерной является малость всех коэффициентов периодического ряда, начиная уже с самых первых, и почти одинаковая значимость всех коэффициентов ряда, за исключением (и то не всегда) коэффициентов при самых первых членах периодического ряда. Несомненно, для признания круга хорошим нужно требовать или быстрого убывания коэффициентов ряда (233) или только-что указанного характера периодических ошибок, обнаруживаемого для многих геодезических кругов, но в том и другом случае — непременно при условии малости средней случайной ошибки штриха. Очевидно, при таком характере ошибок делений члены:

$$c_{48} \cdot \sin 48(u + b_{48}) + c_{72} \sin 72(u + b_{72}) + \dots$$

могут дать влияние даже большее, чем член  $c_{24} \sin 24(u + b_{24})$ , хотя, конечно, эти влияния и будут малы. Именно из-за такого характера ошибок делений на геодезических кругах средний вывод наблюденного в двенадцати приемах направления, как показывают результаты тщательно обработанных триангуляций, оказывается искаженным влиянием ошибок делений все-таки на  $\pm 0'',25$ .

## § 58. Исследование ошибок делений кругов

Деления на кругах теодолитов, предназначенных для измерений в триангуляции I и II классов, должны быть исследованы. Однако, нужно оговориться, что определение систематической ошибки штриха, или определение поправки  $\Delta(u)$  отсчета, требует непременного введения при исследовании делений поправок за эксцентриситет алидады, предполагая при этом, что элементы эксцентриситета сохраняют постоянные значения при разных положениях алидады. Так как такого постоянства элементов эксцентриситета на самом деле в геодезических инструментах не имеется, то надлежит вообще в теодолитах отказаться от задачи определения систематической ошибки  $\Delta(u)$  штриха и ограничиться определением влияния систематической ошибки делений на направление, выводимое по двум противоположным микроскопам, или, другими словами, заменить определение  $\Delta(u)$  определением ошибки  $x(u)$  диаметра, равной  $\frac{\Delta(u) + \Delta(u+180^\circ)}{2}$ . Так как результаты геодезических измерений

выражаются именно в виде направлений, то очевидно, что определение  $x$  ( $u$ ) для достаточного числа диаметров, вместе с исследованием случайных ошибок делений, вполне приводит к выяснению влияния ошибок делений лимба на результат угловых измерений. Очевидно:

$$x(u) = c_0 + c_2 \sin 2(u + b_2) + c_4 \sin 4(u + b_4) + c_6 \sin 6(u + b_6) + \dots \quad (238)$$

В основе всякого способа исследования ошибок делений лимба лежит откладывание (измерение), с возможно высокой степенью точности, на разных частях лимба некоторого постоянного угла, проходя такими откладываниями последовательно или полуокружность или целую окружность.

При отсутствии соответствующих приборов и приспособлений можно для этого воспользоваться двумя марками  $A$  и  $B$ , установленными таким образом, чтобы угол между ними при центре теодолита, с округлением до минуты, был равен или  $\frac{180^\circ}{s}$  или  $\frac{360^\circ}{p}$ , где  $s$  и  $p$  — целые числа.

Но при необходимости иметь при исследовании круга результаты высокой точности, присоединяют к паре противоположных микроскопов  $A$  и  $B$  инструмента еще добавочную пару микроскопов  $C$  и  $D$  таким образом, чтобы эти микроскопы расположились по диаметру, составляющему с линией микроскопов  $A$  и  $B$  угол  $\frac{180^\circ}{s}$  или  $\frac{36^\circ}{p}$  этот угол между двумя парами микроскопов, конечно, можно измерять на разных местах лимба с высокой точностью. Как увидим далее, для определения поправок  $x$  ( $u$ ) некоторого достаточного числа диаметров исследуемого круга надлежит производить измерение на разных частях лимба (постепенно проходя полуокружность или целую окружность) не одного, а нескольких углов. Следовательно, нужно иметь несколько марок с соответственно подобранными между ними углами или нужно иметь приспособление, позволяющее добавочную пару микроскопов  $C$  и  $D$  прикреплять к алидаде так, чтобы линия этих микроскопов могла образовывать с линией основных микроскопов  $A$  и  $B$  инструмента различные по величине углы, укладывающиеся целое число раз в полуокружности или в окружности. Такое приспособление осуществляется, однако, с затруднениями и то лишь в больших инструментах.

Задача решается вполне лишь при помощи особого прибора, построенного пулковским механиком Ваншафом специально для исследования делений кругов, а также при помощи особого прибора, построенного фирмой Гейде. Прибор Ваншафа изображен на черт. 236: две пары микроскопов прибора могут без всяких затруднений устанавливаться под произвольным углом друг к другу, лишь бы только он был более  $10^\circ$ ; если же оси микроскопов одной пары ставить несколько наклонно, то этот угол может быть еще заметно уменьшен.

На черт. 237 изображен общий вид прибора Гейде, принадлежащего Институту инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Прибор состоит из массивного круглого стола из чугуна диаметром в 75 см, имеющего массивную же чугунную подставку. В эту подставку входит жестко соединенная со столом втулка, в которую, в свою очередь, входит вертикальная коническая ось прибора. На конической оси наложен образцовый круг, разделенный на градусы и грады; плоскость образцового круга находится несколько выше плоскости стола. Выше образцового круга на ту же ось насыживается исследуемый круг, причем в приборе имеются приспособления и добавочные устройства для нивелирования

и центрирования исследуемого круга. Поверхность стола имеет пять концентрических желобов, в которых можно основательно закреплять стойки, несущие микроскоп-микрометры. Прибор снабжен десятью микроскопом-микрометрами, и следовательно, можно одновременно пользоваться пятью парами микроскопов, образующих пять разных углов.

Если предполагать поправки диаметров образцового круга известными, то прибор Гейде можно использовать для определения ошибок делений путем простого сравнения делений исследуемого и образцового кругов, и этот прием может быть с успехом применен при приемке инструментов, предназначенных для измерений в триангуляции I класса, а также для исследования кругов теодолитов, предназначенных для измерений в триангуляции II и низших классов.

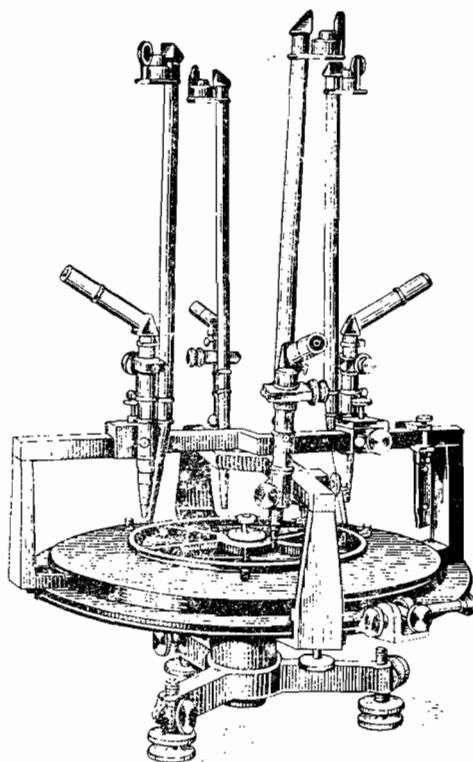
Представим себе, что нам надлежит определить поправки  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{s-1}$  некоторой серии диаметров лимба, расположенных друг от друга через угол  $\sigma^\circ = \frac{180}{s}$ ; пусть в эту серию входит и пулевой диаметр, поправку которого назовем через  $x_0$ . Установим две пары микроскопов под углом друг к другу, возможно близким к  $\sigma^\circ$ ; неизвестное значение этого угла назовем через  $C$ . Обозначим далее: среднее из отсчетов по первой паре микроскопов, стоящей на диаметре с более старшим номером, через  $n$ ; среднее из отсчетов по второй паре микроскопов, стоящей на диаметре с более младшим номером, через  $m$ ; разность  $n - m$  — через  $\Delta$ .

Установив вращением лимба первую пару микроскопов по диаметру  $0^\circ$ , сделаем отсчитывание четырех микроскопов, причем пусть получим:

$$\Delta_0 = n_1 - m_0.$$

После этого будем последовательно устанавливать первую пару микроскопов на диаметры  $\sigma^\circ, 2\sigma^\circ, \dots, (s-1)\cdot\sigma^\circ$  и при каждой такой установке тщательно отсчитывать четыре микроскопа. Очевидно мы получим такие уравнения погрешностей:

$$\begin{aligned} n_1 + x_1 - m_0 - x_0 &= C + \delta_1 \\ n_2 + x_2 - m_1 - x_1 &= C + \delta_2 \\ n_3 + x_3 - m_2 - x_2 &= C + \delta_3 \\ \vdots &\quad \vdots \\ n_s + x_s - m_{s-1} - x_{s-1} &= C + \delta_s. \end{aligned}$$

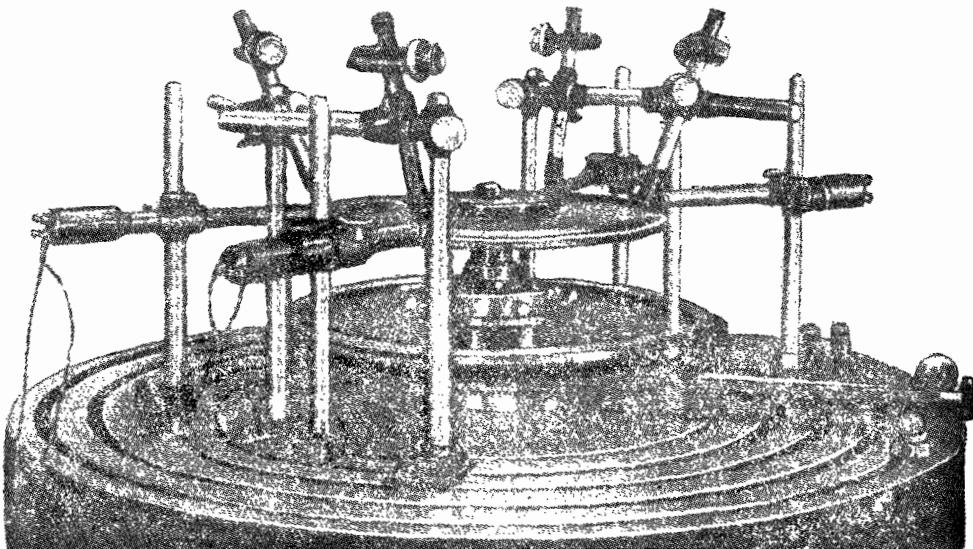


Черт. 236

Здесь под  $\delta_1, \delta_2, \delta_3\dots$  подразумеваются, конечно, случайные погрешности угла  $C$  между микроскопами.

Написанные уравнения можно переписать так:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_0 + \Delta_0 = C + \delta_1 \\ x_2 - x_1 + \Delta_1 = C + \delta_2 \\ x_3 - x_2 + \Delta_2 = C + \delta_3 \\ \dots \dots \dots \\ x_{s-1} - x_{s-2} + \Delta_{s-2} = C + \delta_{s-1} \\ x_s - x_{s-1} + \Delta_{s-1} = C + \delta_s \end{array} \right\} \quad (239)$$



Черт. 237

. Из них прежде всего находим:

$$C = \frac{\sum \Delta}{s}.$$

Исключив  $C$ , мы приедем к  $s-1$  уравнениям с  $s$  неизвестными поправками  $s$  диаметров. Так, конечно, и должно было получиться: откладывая угол  $C$ , мы измеряли каждый раз разность поправок двух диаметров, его образующих, а потому и получили материал, из которого можно вывести разности поправок диаметров, а не сами поправки диаметров.

Согласно сделанным ранее выводам относительно влияния ошибок делений на средний вывод из отсчетов по  $p$  микроскопам мы, применяя формулу (236), в которой положим  $u=0^\circ$  и  $p=2s$ , напишем:

$$\frac{1}{s} \sum_1^s x = c_0 + c_{2s} \cdot \sin(2s \cdot b_{2s}) + c_{4s} \sin(4s \cdot b_{4s}) + \dots$$

При достаточном  $s$  коэффициенты  $c_{2s}$  и  $c_{4s}$  должны быть ничтожны. Поэтому среднее из поправок  $s$  диаметров можно считать равным постоянному первому члену  $c_0$  уравнения (238). Но, несомненно, это постоянное  $c_0$  из уравнений, получающихся при исследовании делений, мы получить не можем: поскольку в основе всякого способа исследования делений лежит собственно обнаружение колебаний в величине постоянного угла, обусловленных ошибками делений, поскольку постоянная часть этих ошибок автоматически исключается в разности поправок двух диаметров, образующих этот угол. Однако, с другой стороны, мы имеем право все поправки диаметров уменьшать или увеличивать на постоянную величину, так как из-за этого всякий отсчет по лимбу будет лишь изменен на ту же постоянную величину.

Поэтому мы с полным основанием можем принять:

$$\sum_1^s x = 0. \quad (240)$$

Присоединяя уравнение (240) к (239), мы затем выведем все  $s$  поправок  $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$ ; каждое из этих значений  $x$  будет, конечно, уменьшено на  $c_0$ .

Вследствие полной симметрии уравнений (239) относительно каждого неизвестного  $x$ , все эти неизвестные получатся по указанному способу с одинаковыми весами; но несомненно, что веса величин  $x_2 - x_1$ ,  $x_3 - x_1$ ,  $x_{10} - x_6$  будут существенно различными. Другими словами, поправки углов (а не направлений или диаметров) определяются с существенно различными весами.

После определения поправок  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$  мы можем, если это нужно, вычислить коэффициенты ряда:

$$x(n) = a_0 + a_2 \cos 2n + a_4 \cos 4n + a_6 \cos 6n + \dots + \\ + b_2 \sin 2n + b_4 \sin 4n + b_6 \sin 6n + \dots \quad \}, \quad (238')$$

представляющего систематическую часть ошибки диаметра  $u$ . Очевидно, будем иметь для этого такие уравнения:

Этим уравнениям соответствуют такие нормальные уравнения для определения  $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, b_2, b_4, b_6, b_8 \dots$ :

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = \frac{\sum x}{s}, \\ \frac{s}{2} \cdot a_2 = \sum_0^{s-1} x_k \cos 2k\sigma; \quad \frac{s}{2} \cdot b_2 = \sum_0^{s-1} x_k \sin 2k\sigma \\ \frac{s}{2} \cdot a_4 = \sum_0^{s-1} x_k \cos 4k\sigma; \quad \frac{s}{2} \cdot b_4 = \sum_0^{s-1} x_k \sin 4k\sigma \\ \frac{s}{2} \cdot a_6 = \sum_0^{s-1} x_k \cos 6k\sigma; \quad \frac{s}{2} \cdot b_6 = \sum_0^{s-1} x_k \sin 6k\sigma \\ \frac{s}{2} \cdot a_8 = \sum_0^{s-1} x_k \cos 8k\sigma; \quad \frac{s}{2} \cdot b_8 = \sum_0^{s-1} x_k \sin 8k\sigma \end{array} \right\}. \quad (242)$$

Программа исследования делений круга может преследовать разные цели и может быть различной по степени ее полноты. Разница прежде всего может быть в числе исследуемых диаметров: иногда ограничиваются исследованием через  $10^\circ$ , в большинстве же случаев исследуют круг через  $5$  или  $4^\circ$ , а иногда в стационарных астрономических инструментах определяют поправки, начиная от  $0^\circ$ , через  $2^\circ$ .

Чем больше число диаметров, для которых надежно определены поправки  $x$ , тем более детально будет изучен круг, тем более надежно и до членов с более старшими индексами будут определены коэффициенты периодического ряда (238') и тем надежнее и детальнее будет установлен общий для всего круга закон распределения и изменения ошибок делений. Вычислив при помощи этого ряда поправку  $x$  ( $u$ ) диаметра  $u$  и образовав уклонения фактически полученной поправки  $x_u$  от вычисленной  $x(u)$ , мы при большом числе исследованных диаметров по таким уклонениям надежно изучим характер и величину случайных ошибок делений лимба. Возможно, что по этим уклонениям

$$x_u - x(u)$$

удастся подметить короткие периоды в смене ошибок делений, не представляющиеся общим рядом (238'). Зная надежно коэффициенты ряда (238') и отступления действительных ошибок от предвычисляемых при помощи этого ряда, мы затем получаем прочные основания для заключений: каким методом вести наблюдения при посредстве исследуемого круга и какое число рядов наблюдений будет приводить нас к среднему из них выводу, свободному от влияния ошибок делений круга.

Конечно, поправки всех диаметров необходимо определить с одинаковым весом. Но если имеют в виду пользоваться этими поправками для введения их в результаты наблюдения углов, то тогда, очевидно, нужно программу исследования круга осложнить еще требованием, чтобы вес разности поправок любой пары диаметров был постоянным.

Конечно, вышеприведенный способ определения поправок диаметров этому последнему требованию не удовлетворяет. С другой стороны, если взять  $\sigma = -5^\circ$  и  $s = 36$ , то откладывание 36 раз угла  $\varphi$  непременно будет сопровождаться изменениями угла  $C$  между микроскопами в те-

чение этого откладывания. Поэтому, в особенности в стационарных астрономических инструментах, ранее применяли следующий способ исследования ошибок большого числа диаметров: взяв угол  $\sigma = 20^\circ$  или даже  $30^\circ$ , сперва изложенным выше способом определяли поправки диаметров с подписью, кратной  $20$  или  $30^\circ$ . Определив поправки таких диаметров «первого порядка», затем брали угол между микроскопами в  $5$  или  $10^\circ$ , такой угол откладывали между каждыми двумя смежными диаметрами «первого порядка», и таким образом по способу «вставки» получали диаметры  $5$ -градусные или  $10$ -градусные, т. е. определяли поправки диаметров «второго», «третьего» и т. д. порядков. В этом способе существенным недостатком является, конечно, то, что поправки диаметров «второго порядка» определяются в зависимости от ошибок определения поправок диаметров «первого порядка», а поправки диаметров «третьего порядка» будут искажены ошибками определения поправок диаметров и «первого» и «второго порядков».

Совершенно строгий в теоретическом отношении способ исследования делений, отвечающий всем требованиям, которые можно включить в программу такого исследования, был разработан Шрейбером в 1886 г. Этот способ Шрейбера в своем основании имеет измерение по лимбу углов между исследуемыми диаметрами лимба, взятыми во всех их комбинациях (парно), и до известной степени аналогичен излагаемому в § 69 способу же Шрейбера измерения углов на тригонометрическом пункте I класса.

Если мы желаем определить поправки диаметров, имеющих подпись  $0^\circ, 4^\circ, 8^\circ, 12^\circ, 16^\circ \dots$ , то, по Шрейбера, мы должны будем на машине Ваншафа или Гейде давать углу между двумя парами микроскопов последовательно значения:

|                       |                          |                          |                          |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\sigma_1 = 4^\circ$  | $\sigma_7 = 28^\circ$    | $\sigma_{13} = 52^\circ$ | $\sigma_{19} = 76^\circ$ |
| $\sigma_2 = 8^\circ$  | $\sigma_8 = 32^\circ$    | $\sigma_{14} = 56^\circ$ | $\sigma_{20} = 80^\circ$ |
| $\sigma_3 = 12^\circ$ | $\sigma_9 = 36^\circ$    | .....                    | $\sigma_{21} = 84^\circ$ |
| $\sigma_4 = 16^\circ$ | .....                    | .....                    | $\sigma_{22} = 88^\circ$ |
| $\sigma_5 = 20^\circ$ | .....                    | .....                    |                          |
| $\sigma_6 = 24^\circ$ | $\sigma_{12} = 48^\circ$ | $\sigma_{18} = 72^\circ$ |                          |

Во-первых, каждым таким углом мы должны будем проходить или полуокружность, или окружность, или некоторое число целых полуокружностей, чтобы получать в каждом ряде последовательных откладываний полное замыкание; во-вторых, начало откладываний каждого угла необходимо смещать столько раз, сколько единиц содержится в частном от деления взятого угла  $\sigma$  на  $4^\circ$ . Таким образом, при  $\sigma = 12^\circ$  будем иметь такие ряды откладываний этого угла:

1.  $0^\circ - 12^\circ - 24^\circ - 36^\circ - 48^\circ - 60^\circ - 72^\circ - 84^\circ - 96^\circ - 108^\circ - 120^\circ - 132^\circ - 144^\circ - 156^\circ - 168^\circ - 180^\circ$
2.  $4^\circ - 16^\circ - 28^\circ - 40^\circ - 52^\circ - 64^\circ - 76^\circ - 88^\circ - 100^\circ - 112^\circ - 124^\circ - 136^\circ - 148^\circ - 160^\circ - 172^\circ - 184^\circ$
3.  $8^\circ - 20^\circ - 32^\circ - 44^\circ - 56^\circ - 68^\circ - 80^\circ - 92^\circ - 104^\circ - 116^\circ - 128^\circ - 140^\circ - 152^\circ - 164^\circ - 176^\circ - 188^\circ$

Непосредственная связь каждого исследуемого диаметра со всеми остальными или, что все равно, измерение углов между диаметрами, берущимися парно, во всех их комбинациях, приводит в результате к одновесности не только величин  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_s$ , но и разностей  $x_k - x_i$  при любом значении  $k$  и  $i$ . Доказательство этого мы найдем в главе «Об измерении углов». Способ Шрейбера исследования деле-

ний очень тяжел в исполнении, требуя значительного времени, он не получил вследствие этого применения. Поэтому и мы не будем приводить более полного изложения этого способа, а остановимся на ином способе, а именно на способе Брунса, разработанном этим ученым в 1892 г. Этот способ, при незначительной затрате труда и времени, позволяет надежно определить поправки значительного числа диаметров лимба, причем колебания весов разностей поправок  $x_k - x_i$  будут происходить в таких пределах, что практически это будет иметь малое значение. Затем мы рассмотрим еще способ Гейвельника.

### § 59. Способ Брунса исследования ошибок диаметров кругов

Пусть имеем  $p$  диаметров, распределенных равномерно по окружности; если в числе этих диаметров имеется один, поданный  $x^o$ , то серию таких диаметров назовем розеттой  $R(p, x^o)$ . Если нам нужно исследовать поправки диаметров через  $5^o$ , начиная от нулевого, то, очевидно, этим диаметрам будет соответствовать розетта  $R(36, 0^o)$  или, что все равно,  $R(36, 5^o)$ ,  $R(36, 10^o)$ ... Чтобы определить поправки диаметров розетты  $R(s, x)$ , в которой  $s$  — большое число, мы подыскиваем сперва два рода розетт:  $R(p, x)$  и  $R(q, x)$  с таким расчетом, чтобы соответствующее числу диаметров  $p$ , и  $q$ , соответствующее числу диаметров  $q$ , содержали в себе целое число раз угол  $\sigma$ , соответствующий числу диаметров  $s$ ; при этом  $p$  и  $q$  не должны быть кратными друг другу и должны давать углы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , меньшие  $90^o$  и большие  $20^o$  (иначе ряды наблюдений становятся невыгодно длинными по времени); кроме того,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны укладываться целое число раз в полуокружности или в окружности.

Поэтому если исследуют диаметры через  $4^o$  ( $s = 45$ ), то  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  могут быть взяты из ряда:

$$20^o, 30^o, 40^o, 45^o, 60^o.$$

Если же исследуют диаметры через  $5^o$  ( $s = 36$ ), то  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  могут быть взяты из ряда:

$$20^o, 24^o, 36^o, 40^o, 60^o, 72^o.$$

Окончательный выбор  $p$  и  $q$  и соответствующих им  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  делается из ряда подходящих чисел под условием, чтобы при одинаковом количестве работы получить для поправок диаметров наименьший вес. Это будет место при наибольшем значении количества:

$$Z = 2 \cdot \frac{p+q-2}{p+q} \left\{ 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \omega \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q^2} \right) \right\}$$

в котором  $\omega$  — общий наибольший делитель чисел  $p$  и  $q$ . Соблюдая указанные правила, найдем, что:

1) при  $s = 45$  и  $\sigma = 4^o$

$$p = 5 \quad \sigma_1 = 36^o$$

$$q = 9 \quad \sigma_2 = 20^o$$

2) при  $s = 36$  и  $\sigma = 5^o$

$$p = 4 \quad \sigma_1 = 45^o$$

$$q = 9 \quad \sigma_2 = 20^o$$

После выбора  $p$  и  $q$  работа ведется следующим образом.

1) Установив две пары микроскопов под углом  $\sigma_1$ , откладывают его по лимбу, начиная сперва с  $0^\circ$  и проходя полуокружность или окружность, затем откладывают этот угол  $\sigma_1$ , начиная с отсчетов  $\sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots, (k-1)\sigma$  и проходя каждый раз или полуокружность или окружность (т. е. возвращаясь в каждом ряде к начальному диаметру). Если  $k = \frac{p!}{\sigma_1!}$ , то, следовательно, всего будет сделано  $k$  рядов, причем левый микроскоп, если смотреть из центра лимба, будет устанавливаться на штрихи:

$$\begin{array}{llll} 0^\circ & \sigma_1 & 2\sigma_1 & \dots & (p-1)\sigma_1 \\ \sigma & \sigma + \sigma_1 & \sigma + 2\sigma_1 & \dots & \sigma + (f-1)\sigma_1 \\ 2\sigma & 2\sigma + \sigma_1 & 2\sigma + 2\sigma_1 & \dots & 2\sigma + (p-1)\sigma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)\sigma & (k-1)\sigma + \sigma_1 & (k-1)\sigma + 2\sigma_1 & \dots & (k-1)\sigma + (p-1)\sigma_1 \end{array}$$

Другими словами, с углом  $\sigma_1$  проходят по штрихам  $k$  розетт:

$$R(p, 0^\circ), R(p\sigma), R(p, 2\sigma) \dots R(p, [k-1]\sigma).$$

2) Установив микроскопы под углом  $\alpha=2\sigma_1$ , откладывают его по лимбу, проходя каждый раз или полуокружность, или окружность и начиная с отсчетов:  $0^\circ, \sigma, 2\sigma, \dots, (k-1)\sigma; \sigma_1, \sigma_1 + \sigma, \sigma_1 + 2\sigma, \dots, \sigma_1 + (k-1)\sigma$ . Следовательно, здесь будет сделано  $2k$  рядов, и левый микроскоп будет стоять на штрихах:

$$\begin{array}{llll} 0^\circ & 2\sigma_1 & 4\sigma_1 & 6\sigma_1 \\ \sigma & \sigma + 2\sigma_1 & \sigma + 4\sigma_1 & \sigma + 6\sigma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (k-1)\sigma & (k-1)\sigma + 2\sigma_1 & (k-1)\sigma + 4\sigma_1 & (k-1)\sigma + 6\sigma_1 \\ \sigma_1 & 3\sigma_1 & 5\sigma_1 & 7\sigma_1 \\ \sigma + \sigma_1 & \sigma + 3\sigma_1 & \sigma + 5\sigma_1 & \sigma + 7\sigma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (k-1)\sigma + \sigma_1 & (k-1)\sigma + 3\sigma_1 & (k-1)\sigma + 5\sigma_1 & (k-1)\sigma + 7\sigma_1 \end{array}$$

3) Установив микроскопы под углом  $\beta=3\sigma_1$ , откладывают его, проходя каждый раз полуокружность или окружность, последовательно начиная с отсчетов:  $0^\circ, \sigma_1, 2\sigma_1; \sigma, \sigma_1 + \sigma, \sigma + 2\sigma_1; 2\sigma, \sigma_1 + 2\sigma, 2\sigma + 2\sigma; \dots, (k-1)\sigma, \sigma_1 + (k-1)\sigma, 2\sigma_1 + (k-1)\sigma$ . Всего здесь будет сделано  $3k$  рядов.

Аналогично поступают с углами между микроскопами, равными  $\gamma=4\sigma_1; \delta=5\sigma_1, \dots$ , причем заканчивают на том наименьшем угле  $\varepsilon$ , для которого  $\varepsilon + \sigma_1 > 90^\circ$ . Нужно сказать, что когда  $2\sigma_1$  не укладывается в  $180^\circ$ , то с углом  $\alpha$  будет сделано только  $k$  рядов; точно так же и с углами  $\beta$  и  $\gamma$ , если они не укладываются в  $180^\circ$ , будет сделано только  $k$  рядов, не повторяющих друг друга, проходя целую окружность или две окружности.

Совершенно таким же образом используются угол  $\sigma_2$  и розетта  $R(q, x)$ .

Каждый из указанных рядов, исполняемый с углами  $\sigma_1, 2\sigma_1, 3\sigma_1, \dots, \sigma_2, 2\sigma_2, 3\sigma_2, \dots$ , доставляет систему уравнений (239); каждый из этих рядов проделывается дважды: сперва откладывая угол между микро-

скопами по ходу часовой стрелки, а затем — откладывая тот же угол против хода часовой стрелки. Это делается, конечно, для того, чтобы в среднем из таких двух тождественных рядов исключить влияние перемен углов  $C$  между микроскопами.

Согласно сказанному при  $s = 45$  и  $\alpha = 4^\circ$  будем иметь такие ряды наблюдений и установки левого микроскопа на такие штрихи:

| $\sigma_1 = 36^\circ$ |     |     |      |           |      |  |  |
|-----------------------|-----|-----|------|-----------|------|--|--|
| 0°                    | 36° | 72° | 108° | . . . . . | 144° |  |  |
| 4                     | 40  | 76  | 112  | . . . . . | 148  |  |  |
| 8                     | 44  | 80  | 116  | . . . . . | 152  |  |  |
| 12                    | 48  | 84  | 120  | . . . . . | 156  |  |  |
| 16                    | 52  | 88  | 124  | . . . . . | 160  |  |  |
| 20                    | 56  | 92  | 128  | . . . . . | 164  |  |  |
| 24                    | 60  | 96  | 132  | . . . . . | 168  |  |  |
| 28                    | 64  | 100 | 136  | . . . . . | 172  |  |  |
| 32                    | 68  | 104 | 140  | . . . . . | 176  |  |  |

| $\alpha = 72^\circ$ |     |      |      |           |      |  |  |
|---------------------|-----|------|------|-----------|------|--|--|
| 0°                  | 72° | 144° | 216° | . . . . . | 288° |  |  |
| 4                   | 76  | 148  | 220  | . . . . . | 292  |  |  |
| 8                   | 80  | 152  | 224  | . . . . . | 296  |  |  |
| 12                  | 84  | 156  | 228  | . . . . . | 300  |  |  |
| 16                  | 88  | 160  | 232  | . . . . . | 304  |  |  |
| 20                  | 92  | 164  | 236  | . . . . . | 308  |  |  |
| 24                  | 96  | 168  | 240  | . . . . . | 312  |  |  |
| 28                  | 100 | 172  | 244  | . . . . . | 316  |  |  |
| 32                  | 104 | 176  | 248  | . . . . . | 320  |  |  |

Установки и отсчеты для угла  $\beta = 108^\circ$  уже будут тождественны с таковыми же для угла  $72^\circ$ . С углом  $\sigma_2 = 20^\circ$  при  $q = 9$  придется выполнить ряды:

| $\sigma_2 = 20^\circ$ |     |     |     |     |      |      |      |      |  |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|--|
| 0°                    | 20° | 40° | 60° | 80° | 100° | 120° | 140° | 160° |  |
| 4                     | 24  | 44  | 64  | 84  | 104  | 124  | 144  | 164  |  |
| 8                     | 28  | 48  | 68  | 88  | 108  | 128  | 148  | 168  |  |
| 12                    | 32  | 52  | 72  | 92  | 112  | 132  | 152  | 172  |  |
| 16                    | 36  | 56  | 76  | 96  | 116  | 136  | 156  | 176  |  |

| $\alpha = 40^\circ$ |     |     |      |      |      |      |      |      |  |
|---------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|--|
| 0°                  | 40° | 80° | 120° | 160° | 200° | 240° | 280° | 320° |  |
| 4                   | 44  | 84  | 124  | 164  | 204  | 244  | 284  | 324  |  |
| 8                   | 48  | 88  | 128  | 168  | 208  | 248  | 288  | 328  |  |
| 12                  | 52  | 92  | 132  | 172  | 212  | 252  | 292  | 332  |  |
| 16                  | 56  | 96  | 136  | 176  | 216  | 256  | 296  | 336  |  |

| $\beta = 60^\circ$ |     |      |  |
|--------------------|-----|------|--|
| 0°                 | 60° | 120° |  |
| 20                 | 80  | 140  |  |
| 40                 | 100 | 160  |  |
| 4                  | 64  | 124  |  |
| 24                 | 84  | 144  |  |
| 44                 | 104 | 164  |  |
| 8                  | 68  | 128  |  |
| 28                 | 88  | 148  |  |
| 48                 | 108 | 168  |  |
| 12                 | 72  | 132  |  |
| 32                 | 92  | 152  |  |
| 52                 | 112 | 172  |  |
| 16                 | 76  | 136  |  |
| 36                 | 96  | 156  |  |
| 56                 | 116 | 176  |  |

$$\gamma = 80^\circ$$

|    |     |      |      |      |     |      |      |      |  |
|----|-----|------|------|------|-----|------|------|------|--|
| 0° | 80° | 160° | 240° | 320° | 40° | 120° | 200° | 280° | 5 рядов, но с про-<br>хождением в каж-<br>дом 720° |
| 4  | 84  | 164  | 244  | 324  | 44  | 124  | 204  | 284  |  |
| 8  | 88  | 168  | 248  | 328  | 48  | 128  | 208  | 288  |  |
| 12 | 92  | 172  | 252  | 332  | 52  | 132  | 212  | 292  |  |
| 16 | 96  | 176  | 256  | 336  | 56  | 136  | 216  | 296  |  |

Всего придется, при исследовании диаметров через  $4^\circ$ , исполнить 270 установок с отсчитыванием каждый раз 4 микроскопов. Всего будет получено 270 уравнений погрешностей при 45 неизвестных поправках диаметров и при 48 неизвестных углах  $C$ , соответствующих 48 двойным рядам наблюдений. По исключении углов  $C$  указанным выше образом, получим 222 уравнения для определения 45 неизвестных. Прибавляя условие равенства нулю суммы поправок 45 диаметров, получим 44 неизвестных при 222 уравнениях.

После составления всех этих уравнений, являющихся, конечно, уравнениями погрешностей, переходим по обычным правилам к соответствующим им нормальным уравнениям — числом 45 в данном случае. Сумма всех нормальных уравнений необходимо будет тождественно равна нулю; это указывает, что наша система нормальных уравнений перазрешима, и причина этого заключается именно в том, что из наблюдений мы получали все время разности поправок диаметров; у нас отсутствуют измерения для самих поправок, причем эти измерения и нельзя осуществить, так как для этого мы поправку каждого диаметра должны были бы отнести к пулевой поправке какого-то или неизвестного или произвольно взятого диаметра. Добавляя условие  $\sum x_i = 0$ , мы выходим из неопределенности, но возникает вопрос, — как использовать это условие при самом числовом решении нормальных уравнений? Здесь нельзя применять гауссову схему, так как она приведет к неопределенному значению последнего неизвестного. Поэтому здесь обычно ведут решение нормальных уравнений методом последовательных приближений, после каждого приближения сверяясь с условием  $\sum x_i = 0$ . Надлежит, впрочем, отметить, что, например, для случая:

$$s = 45^\circ; \quad \sigma = 4^\circ; \quad \sigma_1 = 36^\circ; \quad \sigma_2 = 20^\circ$$

возможно путем использования условия  $\sum x_i = 0$  вместе с надлежащим при этом комбинированием нормальных уравнений получить общую формулу для поправки  $x$  в функции свободных членов нормальных уравнений, по которой, следовательно, и нужно будет величины  $x$  вычислять непосредственно и окончательно. Для рассматриваемого случая такая формула пишется следующим образом:

$$x_{4i} = \frac{1}{14} \left[ F_{4i} + \frac{1}{9} (F_{4i} + F_{4i+36} + \dots + F_{4i+144}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} (F_{4i} + F_{4i+20} + \dots + F_{4i+160}) \right]_{i=0,1,2,\dots,44}.$$

причем  $F_k$  есть свободный член того нормального уравнения, в котором квадратический коэффициент стоит при поправке диаметра с подписью  $k$  градусов. Возможно, конечно, получить общие формулы для  $x_i$  и для других случаев исследования кругов, т. е. для других значений  $s$ . Веса разностей поправок двух произвольных диаметров, т. е. веса выражений  $x_k - x_i$ , оказываются колеблющимися в способе Брунса в пределах

всего  $11\%$ , и, конечно, практически мы можем считать все эти веса одинаковыми. Вес  $x_k - x_i$ , достаточно близко выражается половиной веса величины  $x_k$ .

По изложенному способу Брунса поправки диаметров, даже при значительном  $s$ , получаются очень надежно, например, с средней ошибкой, заметно меньшей  $\pm 0''$ .

Нередко в практике этот способ еще упрощают: именно, выбрав целеобразно числа  $p$  и  $q$  или числа  $p$ ,  $q$  и  $r$  и соответствующие им углы  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , совсем не пользуются углами  $2\sigma_1$ ,  $3\sigma_1, \dots$ ,  $2\sigma_2$ ,  $3\sigma_2$ , а ограничиваются прохождением розетт:

$$R(p, 0^\circ), R(p, \sigma), R(p, 2\sigma) \dots \dots \dots R(p, (k-1)\sigma)$$

$$R(q, 0^\circ), R(q, \sigma), R(q, 2\sigma) \dots \dots \dots R(q, (k_1-1)\sigma)$$

$$R(r, 0^\circ), R(r, \sigma), R(r, 2\sigma) \dots \dots \dots R(r, (k_2-1)\sigma)$$

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma}; \quad k_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma}; \quad k_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma}.$$

Так, например, при исследовании диаметров через  $5^\circ$ , при  $s = 36^\circ$  и  $\sigma = 5^\circ$ , берут:

$$\sigma_1 = 30^\circ; \quad \sigma_2 = 40^\circ; \quad \sigma_3 = 45^\circ$$

и проделывают такие ряды наблюдений:

| $0^\circ - 30^\circ$ | $30^\circ - 60^\circ$ | $60^\circ - 90^\circ$  | $90^\circ - 120^\circ$  | $120^\circ - 150^\circ$ | $150^\circ - 180^\circ$ |
|----------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 5 — 35               | 35 — 65               | 65 — 95                | 95 — 125                | 125 — 155               | 155 — 185               |
| 10 — 40              | 40 — 70               | 70 — 100               | 100 — 130               | 130 — 160               | 160 — 190               |
| 15 — 45              | 45 — 75               | 75 — 105               | 105 — 135               | 135 — 165               | 165 — 195               |
| 20 — 50              | 50 — 80               | 80 — 110               | 110 — 140               | 140 — 170               | 170 — 200               |
| 25 — 55              | 55 — 85               | 85 — 115               | 115 — 145               | 145 — 175               | 175 — 205               |
| $0^\circ - 40^\circ$ | $40^\circ - 80^\circ$ | $80^\circ - 120^\circ$ | $120^\circ - 160^\circ$ | $160^\circ - 200^\circ$ | $200^\circ - 240^\circ$ |
| 5 — 15               | 45 — 85               | 85 — 125               | 125 — 165               | 165 — 205               | 205 — 245               |
| 10 — 50              | 50 — 90               | 90 — 130               | 130 — 170               | 170 — 210               | 210 — 250               |
| 15 — 55              | 55 — 95               | 95 — 135               | 135 — 175               | 175 — 215               | 215 — 255               |
| 20 — 60              | 60 — 100              | 100 — 140              | 140 — 180               | 180 — 220               | 220 — 260               |
| 25 — 65              | 65 — 105              | 105 — 145              | 145 — 185               | 185 — 225               | 225 — 265               |
| 30 — 70              | 70 — 110              | 110 — 150              | 150 — 190               | 190 — 230               | 230 — 270               |
| 35 — 75              | 75 — 115              | 115 — 155              | 155 — 195               | 195 — 235               | 235 — 275               |
| $0^\circ - 45^\circ$ | $45^\circ - 90^\circ$ | $90^\circ - 135^\circ$ | $135^\circ - 180^\circ$ |                         |                         |
| 5 — 50               | 50 — 95               | 95 — 140               | 140 — 185               |                         |                         |
| 10 — 55              | 55 — 100              | 100 — 145              | 145 — 190               |                         |                         |
| 15 — 60              | 60 — 105              | 105 — 150              | 150 — 195               |                         |                         |
| 20 — 65              | 65 — 110              | 110 — 155              | 155 — 200               |                         |                         |
| 25 — 70              | 70 — 115              | 115 — 160              | 160 — 205               |                         |                         |
| 30 — 75              | 75 — 120              | 120 — 165              | 165 — 210               |                         |                         |
| 35 — 80              | 80 — 125              | 125 — 170              | 170 — 215               |                         |                         |
| 40 — 85              | 85 — 130              | 130 — 175              | 175 — 220               |                         |                         |

Всего в данном примере будет получено 144 уравнения между 36 неизвестными поправками и 23 углами  $C$ ; при этом каждый диаметр связывается с любым другим 4 раза. Именно таким образом исследовал А. Wolfer в 1903 г. меридианный круг Женевской обсерватории. 36 нормальных уравнений были решены после применения 9 приближений.

После определения поправок  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{s-1}$  приступают к вычислению коэффициентов ряда (238):

$$x(u) = a_0 + a_2 \cos 2u + a_4 \cos 4u + a_6 \cos 6u + \dots + \\ + b_2 \sin 2u + b_4 \sin 4u + b_6 \sin 6u + \dots$$

Из уравнений (242) § 58 без труда получаем коэффициенты периодического ряда (238). Рассчитав теперь, при помощи этих коэффициентов:

$$x(0^\circ), \quad x(\sigma), \quad x(2\sigma) \dots \quad x((s-1)\sigma)$$

и образовав уклонения:

$$v_0 = x_0 - x(0^\circ); \quad v_1 = x_1 - x(\sigma); \quad v_2 = x_2 - x(2\sigma) \dots,$$

найдем далее, что:

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{s - \text{число коэф. ряда (238)}}}$$

представит среднюю ошибку поправки  $x$  любого диаметра круга. Эта средняя ошибка  $\mu_1$  будет состоять из случайной ошибки  $\mu$  положения диаметра и из случайной части  $\mu_2$ , выражающей влияние ошибок наблюдений при определении величин  $x$  на приборе Ваншафа или Гейде. Для вывода величины  $\mu_2$  мы должны воспользоваться уравнениями (239) § 58 и получить из них величины  $\delta$ , а затем вычислить  $\mu_2$  следующим образом:

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{2(N - s - n)}},$$

причем  $N$  — число всех полученных уравнений (239),  $s$  — число исследуемых диаметров и  $n$  — число углов  $C$ . Средняя случайная ошибка  $\mu$  при этом получится следующим образом:

$$\mu = \sqrt{2} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}.$$

При описанном исследовании делений работу надлежит вести в помещении с постоянной температурой; установки алигаты на разные штрихи лимба делают так, чтобы при наведении нитей микрометра данного микроскопа получался один и тот же отсчет по барабану.

Иногда производят отдельное исследование случайных ошибок делений. Для этого выбирают более или менее значительное число промежутков на лимбе, распределенных группами равномерно по всей его окружности. Так, выбирают промежутки:

$$\begin{array}{lll} 0^{\circ}0' - 0^{\circ}5'; & 0^{\circ}5' - 0^{\circ}10'; & 0^{\circ}10' - 0^{\circ}15'; \\ 8^{\circ}0' - 8^{\circ}5'; & 8^{\circ}5' - 8^{\circ}10'; & 8^{\circ}10' - 8^{\circ}15'; \\ 16^{\circ}0' - 16^{\circ}5'; & 16^{\circ}5' - 17^{\circ}10'; & 16^{\circ}10' - 16^{\circ}15'; \\ \dots & \dots & \dots \\ 352^{\circ}0' - 352^{\circ}5'; & 352^{\circ}5' - 352^{\circ}10'; & 352^{\circ}10' - 352^{\circ}15' \end{array}$$

Каждый такой промежуток измеряют микрометром микроскопа несколько раз, например, 4 раза, пользуясь при измерении всех промежутков одной и той же частью микрометра и барабана (имея, следовательно, при наведении нитей микрометра на младший штрих всегда один и тот же оборот винта микрометра и один и тот же отсчет по барабану). Если измеренные промежутки лимба окажутся равными:

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \dots, \quad d_n$$

делениям барабана микрометра, то, вычислив:

$$d_m = \frac{\Sigma d}{n}; \quad v_1 = d_1 - d_m; \quad v_2 = d_2 - d_m;$$

$$v_n = d_n - d_m$$

и обозначив среднюю ошибку наведения нитей микрометра на штирих лимба через  $\epsilon$ , напишем:

$$2m^2 = \frac{\Sigma v^2}{n-1} - \frac{2\epsilon^2}{4},$$

понимая под  $m$  случайную ошибку штириха.

### § 60. Способ Гейвельинка исследования ошибок диаметров кругов

Этот способ основан на измерении угла (или двух углов) между двумя коллиматорами или двумя тщательно изготовленными мирами. Особенностью способа является прежде всего то, что в отношении ошибок делений круг исследуется в том его обычном положении и состоянии, которое он имеет в самом инструменте при измерении углов, между тем как при применении машины Ваншафа или Гейде круг должен быть отделен от инструмента и укреплен на особой платформе при давлениях и натяжениях совсем иных, чем то имеет место при рабочем использовании исследуемого инструмента.

Далее, измерение угла между коллиматорами сопровождается, кроме ошибок отсчетов по кругу, еще и ошибками визирований, порядок которых только при особо благоприятных условиях тот же, что и ошибок отсчитываний круга. Эта вторая особенность способа Гейвельинка делает мало надежным, при применении его, вывод поправок отдельных диаметров; от этого вывода в этом способе поэтому и отказываются, задаваясь лишь получением выражения для поправки  $x$  ( $u$ ) в виде периодического ряда и значений средней «полной» и средней случайной ошибки диаметра, — т. е. задаваясь получением величин, достаточно характеризующих качество круга, без детального выяснения распределения ошибок его диаметров. Так как коллиматоры (или миры) располагаются близко от исследуемого инструмента (8—15—20 м), то, конечно, сдвиги и коллиматоров и инструмента могут вносить совершение недопустимые искажения в результаты исследования делений круга. Поэтому до 1925 г., когда Гейвельинк опубликовал свой способ и получающие по нему результаты, вообще избегали применять способы исследования делений, основанные на измерении углов между коллиматорами. Однако, та особенность способа Гейвельинка, что в нем ряды наблюдений занимают каждый короткий промежуток времени, обусловила возможность его применения без опасения за вредное влияние сдвигов коллиматоров и инструмента.

Пусть угол при центре инструмента между двумя коллиматорами равен  $\beta + \alpha$ , причем  $\alpha$  — малая величина, всегда меньшая наименьшего деления на исследуемом лимбе. При откладывании этого угла на лимб между диаметрами  $u$  и  $u + \beta$  мы, допустим, получили для него значение  $\beta + p$ . Очевидно, мы будем иметь:

$$-x_{u+\beta} + x_u + p = \alpha + \epsilon_u, \quad (a)$$

причем под  $x$  понимается ошибка соответствующего диаметра, а  $\varepsilon_u$  — ошибка измерения угла между коллиматорами. Полную ошибку  $x_u$  диаметра  $u$  представим как сумму систематической ошибки  $(x)_u$  и случайной ошибки  $\delta_u$ , т. е.

$$(x)_u + \delta_u = x_u.$$

Далее пишем:

$$(x)_u = a_0 + a \sin(2u + A) + b \sin(4u + B) + c \sin(6u + C) + \dots \quad (b)$$

Введем еще обозначение:

$$\xi_u = \delta_{u+\beta} - \delta_u + \varepsilon_u.$$

где  $\beta$  — округленное значение угла между коллиматорами.  
Конечно:

$$\begin{aligned} \xi_u = p - \alpha + a \sin(2u + A) - a \sin(2u + 2\beta + A) + \\ + b \sin(4u + B) - b \sin(4u + 4\beta + B) + \\ + c \sin(6u + C) - c \sin(6u + 6\beta + C) + \dots \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} 2a \sin \beta \cos(\beta + A) &= a_1 \\ -2a \sin \beta \sin(\beta + A) &= a_2 \\ 2b \sin 2\beta \cos(2\beta + B) &= b_1 \\ -2b \sin 2\beta \sin(2\beta + B) &= b_2 \\ +2c \sin 3\beta \cos(3\beta + C) &= c_1 \\ -2c \sin 3\beta \sin(3\beta + C) &= c_2 \end{aligned} \right\}. \quad (c)$$

Тогда предыдущее выражение для  $\xi_u$  перепишется так:

$$\begin{aligned} \xi_u = p - \alpha - a_1 \cos 2u - a_2 \sin 2u - b_1 \cos 4u - \\ - b_2 \sin 4u - c_1 \cos 6u - c_2 \sin 6u - \dots \end{aligned} \quad (d)$$

Для определения коэффициентов  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \dots$  угол  $\beta^\circ + \alpha$  измеряем  $n$  раз на разных местах круга, равномерно переставляя круг па интервал, укладывающийся целое число раз в полуокружности, и проходя  $n$  перестановками полную окружность. Составив для каждого из этих измерений угла  $\beta^\circ + x$  уравнение (d), затем от таких уравнений переходим к нормальным уравнениям. По условиям изменения величины  $u$  при  $n$  измерениях угла между коллиматорами мы будем иметь:

$$[\sin 2u] = [\sin 4u] = [\cos 2u] = [\cos 4u] = \dots = 0$$

$$[\sin 2u \cos 2u] = [\sin 4u \cos 2u] = [\cos 2u \cos 4u] = \dots = 0$$

$$[\sin^2 2u] = [\sin^2 4u] = \dots = [\cos^2 2u] = [\cos^2 4u] = \frac{n}{2}$$

Поэтому, решая указанные нормальные уравнения, легко получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n} [p] \\ a_1 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \cos 2 u] \\ a_2 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \sin 2 u] \\ b_1 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \cos 4 u] \\ b_2 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \sin 4 u] \\ c_1 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \cos 6 u] \\ c_2 &= \frac{2}{n} [(p - \alpha) \sin 6 u] \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Сопоставление (c) и (e) приводит к таким формулам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta + A) &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 2 u]}{[(p - \alpha) \cos 2 u]} \\ \operatorname{tg}(2\beta + B) &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 4 u]}{[(p - \alpha) \cos 4 u]} \\ \operatorname{tg}(3\beta + C) &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 6 u]}{[(p - \alpha) \cos 6 u]} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 2 u]}{n \sin \beta \sin (\beta + A)} = \frac{[(p - \alpha) \cos 2 u]}{n \sin \beta \cos (\beta + A)} \\ b &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 4 u]}{n \sin 2\beta \cdot \sin (2\beta + B)} = \frac{[(p - \alpha) \cos 4 u]}{n \sin 2\beta \cdot \cos (2\beta + B)} \\ c &= - \frac{[(p - \alpha) \sin 6 u]}{n \sin 3\beta \sin (3\beta + C)} = \frac{[(p - \alpha) \cos 6 u]}{n \sin 3\beta \cos (3\beta + C)} \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Формулы (f) и (h) позволяют нам написать выражение (b) для систематической ошибки  $(x)_u$  диаметра  $u$ , но уменьшенное на  $a_0$ .

В действительности,  $n$  измерений угла  $\beta + \alpha$  производят не в одном ряду сразу, а разбивают эти  $n$  измерений на  $r$  рядов, по  $k$  откладываний угла  $\beta + \alpha$  в каждом ряде. В этом случае  $\alpha$  будет выводиться из каждого ряда в отдельности по формуле:

$$\alpha = \frac{1}{k} [p]. \quad (g)$$

Все же остальные формулы (e), а также формулы (f) и (h) остаются без изменения, но, конечно, в них величина  $\alpha$  для  $\psi$ , соответствующего некоторому ряду, берется та, которая для этого именно ряда получилась по формуле (g); следовательно, в формулы (c), (f) и (h) войдет не одно, а  $r$  значений  $\alpha$ . Обычно угол  $\beta$  берется равным  $45^\circ$ . Конечно, при таком угле  $\beta$  получение четвертого (следующего за  $c$ ) коэффициента в уравнении (b) невозможно. Для получения этого (и следующих) коэффициента, если это нужно, подбирают другое значение угла  $\beta$ ; например, берут  $\beta=30^\circ$ .

С углом  $\beta=45^\circ$  и при  $n=36$  наблюдения располагают в четырех рядах, причем угол  $\beta$  измеряют при следующих установках круга, определяемых отсчетом при наведении трубы теодолита на левый коллиматор:

|        |           |            |            |            |            |             |             |             |             |
|--------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| I ряд: | $0^\circ$ | $20^\circ$ | $40^\circ$ | $60^\circ$ | $80^\circ$ | $100^\circ$ | $120^\circ$ | $140^\circ$ | $160^\circ$ |
| II     | 5         | 25         | 45         | 65         | 85         | 105         | 125         | 145         | 165         |
| III    | "         | 10         | 30         | 50         | 70         | 90          | 110         | 130         | 150         |
| IV     | "         | 15         | 35         | 55         | 75         | 95          | 115         | 135         | 155         |

(Следовательно, в способе Гейвельинка нет последующего откладывания избранного угла непременно от диаметра, на котором закончилось предыдущее откладывание, как это имеет место в способе Брунса).

Конечно, при  $n=36$  мы можем применить и шесть рядов более коротких, чем ранее написанные, имея такую программу:

|        |           |            |            |            |             |             |
|--------|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| I ряд: | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $150^\circ$ |
| II     | 5         | 35         | 65         | 95         | 125         | 155         |
| III    | "         | 10         | 40         | 70         | 100         | 130         |
| IV     | "         | 15         | 45         | 75         | 105         | 135         |
| V      | "         | 20         | 50         | 80         | 110         | 140         |
| VI     | "         | 25         | 55         | 85         | 115         | 145         |

Выполнение наблюдений таких коротких рядов требует 10—15 минут времени, почему и можно быть уверенным в постоянстве угла  $\alpha$  в период наблюдения ряда. Каждое отдельное измерение угла  $\beta+\alpha$  состоит из визирований и отсчетов на левый коллиматор, затем на правый, снова на правый и, наконец, на левый. Каждый ряд выполняется непременно в прямом и обратном порядке, причем в прямом ходе лимб вращается при его перестановках против хода часовой стрелки, а в обратном ходе по ходу часовой стрелки. Следовательно, каждое значение  $p$  получается как среднее из четырех измерений угла  $\beta+\alpha$ .

Обозначим через  $\tau$  среднюю «полную» ошибку диаметра. Среднее квадратическое значение величины  $p-\alpha$  назовем через  $M$ .

Если сделано  $r$  рядов и при этом получено  $n$  значений  $p-\alpha$ , то:

$$M^2 = \frac{[(p-\alpha)]^2}{n-r}.$$

Величина  $M$  слагается из ошибки измерения угла  $\beta+\alpha$  и из ошибок двух диаметров. Поэтому:

$$M^2 = m^2 + 2\tau,$$

понимая под  $m$  среднюю ошибку измерения угла. Величина  $m$  соображается по разностям  $v$  результатов прямого и обратного измерений угла, а именно:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{4 \cdot 2n}.$$

Отсюда:

$$\tau^2 = \frac{1}{2} M^2 - \frac{1}{2} m^2 = \frac{[(p-\alpha)^2]}{2(n-r)} - \frac{[v^2]}{16n}. \quad (i)$$

Для средней случайности ошибки  $\tau_s$  диаметра делаем такой вывод: возведем в квадрат уравнения (d) и сложим их; мы получим:

$$\begin{aligned} [\xi^2] &= [(p-\alpha)]^2 - \frac{2}{n} [(p-\alpha) \cos 2u]^2 - \frac{2}{n} [(p-\alpha) \sin 2u]^2 - \\ &- \frac{2}{n} [(p-\alpha) \sin 4u]^2 - \frac{2}{n} [(p-\alpha) \cos 4u]^2 - \\ &- \frac{2}{n} [(p-\alpha) \cos 6u]^2 - \frac{2}{n} [(p-\alpha) \sin 6u] - \dots \end{aligned}$$

Отсюда среднее квадратическое значение  $\xi$ , которое мы назовем через  $M_\xi$  получим так:

$$M_\xi^2 = \frac{[\xi\xi]}{n-r-s},$$

понимая под  $s$  число коэффициентов  $a, b, c, \dots$ , используемых при выводе  $\xi$  по формуле (d).

Конечно:

$$\begin{aligned} M_\xi^2 &= \frac{[\xi\xi]}{n-r-s} = m^2 + 2\tau_s^2; \\ \tau_s^2 &= \frac{1}{2} M_\xi^2 - \frac{1}{2} m^2 = \frac{[\xi\xi]}{2(n-r-s)} - \frac{[vv]}{16n}. \end{aligned} \quad (j)$$

Беря только  $a_1$  и  $a_2$  при выводе  $\xi$ , получим  $\tau_1$ ;

беря  $a_1, a_2, b_1, b_2$  при выводе  $\xi$ , получим  $\tau_2$ ;

беря  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ , получим  $\tau_3$ .

Способ Гейвелинка дает результаты очень быстро и в этом его существенное преимущество. Но он дает лишь общую характеристику круга; однако, во многих случаях — при приемке инструментов на заводах, при срочности отъезда на полевые работы и т. п. — применение его является целесообразным, чтобы получить в указанных условиях известное общее представление о качествах круга инструмента, даваемое коэффициентами ряда (b) и величинами  $\tau$  и  $\tau_s$ .

Мы должны иметь в виду, что в способе Гейвелинка в получаемых из наблюдений изменениях величины постоянного угла, обусловленных ошибками отсчетов, ошибками визирований и ошибками делений круга, мы косвенным путем выделяем изменения, обусловленные третьей причиной, и, конечно, для успеха этого выделения нужно или иметь влияния ошибок отсчетов и визирований на измеряемый постоянный угол заметно меньшими, чем искажение того же угла ошибками делений, или ограничиться выводом некоторых средних показателей, полагая, что в таких выводах влияние ошибок отсчетов и визирований в высокой степени скомпенсируется. Понятно, что речь может идти именно о получении только таких средних показателей, и довольно затруднительно оценить, насколько на отдельных участках круга действи-

тельные ошибки его делений превышают значения их, вытекающие из значений этих средних показателей.

За последнее время сделаны предложения, осуществление которых совершенствует способ Гейвельинка. Мы прежде всего остановимся на предложении Мюлиха, заключающемся в следующем. Плоское тщательно отполированное зеркало при помощи шарнира скрепляется с оправой, которая надевается на объектив трубки исследуемого инструмента; зеркало закрывает только половину поля зрения трубы и может быть установлено под любым углом к визирной оси. При исследовании круга спачала визируют на единственную выставленную миру, а затем — на отраженное от зеркала в трубу изображение миры, которое появляется после поворота трубы вместе с неподвижно скрепленным с ней зеркалом на некоторый угол. Так как этот угол, конечно, заранее задается, то предварительно нужно несколькими попытками найти то положение зеркала (дать ему соответственный наклон к визирной оси трубы), при котором при повороте алидады на этот угол отраженное изображение миры будет находиться между вертикальными пятнами трубы. Понятно, что здесь можно пользоваться только мирой, но не коллиматором. Расстояния от миры и ее отраженного изображения до объектива будут несколько различны, и поэтому, чтобы не менять фокусировки трубы, надлежит расстояние от инструмента до миры иметь не менее 12—15 м. Очевидно, при пользовании приспособлением Мюлиха перемены в положении инструмента и миры, происходящие в промежутках между измерениями угла, не имеют никакого значения. За неподвижность же инструмента и миры в течение нескольких минут измерения угла, конечно, можно быть вполне уверенным. Таким образом, дело сводится к постоянству положения зеркала относительно трубы инструмента за время выполнения одного ряда наблюдений при применении способа Гейвельинка. Но соединение зеркала с трубой может быть выполнено с высокой степенью неизменности.

Другое предложение было сделано в 1935 г. Хаусером и осуществлено венской фирмой Штарке и Камерер в виде следующего вспомогательного прибора. Представим себе массивную медную чашу, в которую может поместиться исследуемый теодолит; на верхних краях чаши имеются три различных по величине выреза.

При исследовании круга теодолит устанавливается внутри чаши, которая привинчивается к трем ножкам теодолита; наводящий винт алидады и противодействующая ему пружина вывинчиваются и устраиваются, а язычок хомута алидады, зажимаемый обычно между этим наводящим винтом алидады и пружинкой, пропускается в один из вырезов чаши. К краям каждого из вырезов привинчены стальные болтики с плоскими концевыми поверхностями, располагающимися на высоте язычка алидады; между концами этих болтиков (принадлежащих одному и тому же вырезу) остается для движения язычка алидады сектор с центральным углом около  $30^\circ$ ,  $36^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно. Понятно, что при движении язычка алидады от контакта с левым болтиком до контакта с правым болтиком того же выреза отбивается постоянный угол, который измеряется посредством отсчетов микроскоп-микрометров исследуемого теодолита; переставляя лимб инструмента, мы будем этот постоянный угол измерять на разных местах исследуемого круга. Влияние перемещений центра алидады при этом аннулируется в средних отсчетах по двумя противоположным микроскоп-

микрометрам. Этот простой прибор заслуживает, конечно, полного внимания. Представляется, что если в язычок алидады с той и с другой стороны ввинчивать болтики с соответственно устроеными конечными поверхностями (взять слегка сферические), а болтики чаши переделать на пружинные контакты с фольгебелем, то однообразие контактов алидады с болтиками чаши будет осуществляться с высокой степенью точности.

Понятно, что и приспособление Мюлиха и прибор Хауера позволяют не только усовершенствовать способ Гейвелинка (в частности, прибор Хауера совершенно освобождает нас от визирований трубой), но они позволяют применить и способ Брунса. Вероятно внедрение в геодезическую практику этих приспособлений (приборов) приведет именно к применению метода Брунса, хотя бы и в упрощенном виде, взамен метода Гейвелинка. При этом положительная сторона метода Гейвелинка — исследование круга в рабочем состоянии инструмента — сохраняется; точность откладываний постоянного угла значительно повышается, а само постоянство этого угла сохраняется в такой же степени, как на машине Ваншафа или Гейде; наконец, при пользовании прибором Хауера наблюдения идут настолько быстро, что можно смело идти на то увеличение программы, которое требуется способом Брунса по сравнению с способом Гейвелинка, взятым в чистом виде.

Пример на применение способа Гейвелинка. Исследовался горизонтальный круг двухсекундного геодезического универсального инструмента Гильдебранда № 12972, принадлежащего Московскому институту инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Диаметр круга 21 см, наименьшее деление круга 5'. Принятый при исследовании постоянный угол  $\beta^{\circ}$  равен  $45^{\circ}$ . Были исследованы диаметры через  $9^{\circ}$ , т. е. в данном случае  $n=20$ . Всего исполнено 4 ряда наблюдений, каждый ряд состоял из двух серий — прямой и обратный ход; в каждом ряде происходило пять откладываний угла  $\beta$  от диаметров, указанных в графе 3 таблицы 21.

Таблица 21

| №№ установок |          | Начальный отчет $w$ | I серия       |        | II серия |        | $p$                  | $p - \alpha$ |
|--------------|----------|---------------------|---------------|--------|----------|--------|----------------------|--------------|
| I серия      | II серия |                     | $p_1$         | $v_1$  | $p_2$    | $v_2$  |                      |              |
| I ряд        |          |                     |               |        |          |        |                      |              |
| 1            | 10       | 0°                  | 1",435        | +0",57 | 1",505   | +1",63 | 1",470               | -1",883      |
| 2            | 9        | 36                  | 5 ,895        | +0 ,07 | 4 ,770   | -1 ,14 | 5 ,332               | +1 ,979      |
| 3            | 8        | 72                  | 4 ,620        | -0 ,72 | 5 ,280   | +1 ,74 | 4 ,950               | +1 ,597      |
| 4            | 7        | 108                 | 3 ,230        | +0 ,04 | 4 ,430   | -0 ,24 | 3 ,830               | +0 ,477      |
| 5            | 6        | 144                 | 1 ,430        | +0 ,20 | 0 ,940   | +1 ,26 | 1 ,185               | -2 ,168      |
|              |          |                     | 16",610       |        | 16",925  |        | 16",767              |              |
|              |          |                     | [ $v_1^2$ ] = | 0,8898 |          |        | $\alpha_1 =$         | 3 ,353       |
|              |          |                     | [ $v_2^2$ ] = | 8,6293 |          |        | [ $(p-\alpha)^2$ ] = | 14 ,9402     |

Продолжение табл 21

| №№ установок |          | Начальный отсчет $u^\circ$ | I серия       |        | II серия |        | $p$                                | $p - \alpha$ |
|--------------|----------|----------------------------|---------------|--------|----------|--------|------------------------------------|--------------|
| I серия      | II серия |                            | $p_1$         | $v_1$  | $p_2$    | $v_2$  |                                    |              |
| II ряд       |          |                            |               |        |          |        |                                    |              |
| 1            | 10       | 9°                         | 4",490        | +0",72 | 3",775   | -0",25 | 4",132                             | +0",589      |
| 2            | 9        | 45                         | 5 ,170        | +0 ,34 | 4 ,675   | +0 ,67 | 4 ,992                             | +1 ,379      |
| 3            | 8        | 81                         | 4 ,235        | +0 ,23 | 5 ,265   | -0 ,29 | 4 ,750                             | +1 ,207      |
| 4            | 7        | 117                        | 3 ,175        | -0 ,73 | 3 ,005   | +0 ,91 | 3 ,090                             | -0 ,453      |
| 5            | 6        | 153                        | 0 ,755        | -0 ,49 | 0 ,885   | +0 ,09 | 0 ,820                             | -2 ,723      |
|              |          |                            | 17",825       |        | 17",605  |        | 17",714                            |              |
|              |          |                            | [ $v_1^2$ ] = | 1,4599 |          |        | $\alpha_2 =$                       | 3 ,543       |
|              |          |                            | [ $v_2^2$ ] = | 1,4317 |          |        | [( $p - \alpha$ ) <sup>2</sup> ] = | 11 ,3344     |
| III ряд      |          |                            |               |        |          |        |                                    |              |
| 1            | 10       | 18°                        | 4",115        | -1",99 | 4",380   | -1",38 | 4",248                             | +0",806      |
| 2            | 9        | 54                         | 4 ,260        | -0 ,12 | 5 ,480   | +0 ,84 | 4 ,845                             | +1 ,403      |
| 3            | 8        | 90                         | 3 ,680        | +0 ,32 | 4 ,115   | +0 ,57 | 3 ,898                             | +0 ,456      |
| 4            | 7        | 126                        | 2 ,475        | -0 ,51 | 3 ,775   | -0 ,35 | 3 ,125                             | -0 ,317      |
| 5            | 6        | 162                        | 0 ,865        | -0 ,41 | 1 ,320   | -0 ,46 | 1 ,092                             | -2 ,350      |
|              |          |                            | 15",395       |        | 19",020  |        | 17",208                            |              |
|              |          |                            | [ $v_1^2$ ] = | 4,5051 |          |        | $\alpha_3 =$                       | 3 ,442       |
|              |          |                            | [ $v_2^2$ ] = | 3,2690 |          |        | [( $p - \alpha$ ) <sup>2</sup> ] = | 8 ,4489      |
| IV ряд       |          |                            |               |        |          |        |                                    |              |
| 1            | 10       | 27°                        | 4",290        | +0",36 | 5",340   | +0",46 | 4",815                             | +1",629      |
| 2            | 9        | 63                         | 4 ,960        | +0 ,90 | 4 ,175   | +0 ,03 | 4 ,568                             | +1 ,382      |
| 3            | 8        | 99                         | 2 ,800        | +0 ,70 | 3 ,185   | +0 ,43 | 2 ,922                             | -0 ,194      |
| 4            | 7        | 135                        | 2 ,515        | +0 ,01 | 3 ,755   | +0 ,53 | 3 ,135                             | -0 ,051      |
| 5            | 6        | 171                        | 0 ,310        | +0 ,20 | 0 ,535   | +0 ,05 | 0 ,422                             | -2 ,764      |
|              |          |                            | 14",875       |        | 16",990  |        | 15",932                            |              |
|              |          |                            | [ $v_1^2$ ] = | 1,4696 |          |        | $\alpha_4 =$                       | 3 ,186       |
|              |          |                            | [ $v_2^2$ ] = | 0,6808 |          |        | [( $p - \alpha$ ) <sup>2</sup> ] = | 12 ,2435     |

В таблице 22 приведены вычисления, относящиеся только к первому ряду наблюдений. Проделав в этой таблице вычисления и по всем остальным рядам наблюдений, получим в результате:

$$[(p - \alpha) \sin 2 u] = + 15,998 \quad [(p - \alpha) \cos 2 u] = - 9,880$$

$$[(p - \alpha) \sin 4 u] = + 6,905 \quad [(p - \alpha) \cos 4 u] = - 4,206$$

$$[(p - \alpha) \sin 6 u] = + 4,944 \quad [(p - \alpha) \cos 6 u] = - 0,140$$

Таблица 22

| $u^\circ$ | $(p - \alpha)$ |           | $(p - \alpha)$ |           | $(p - \alpha)$ |           |
|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|           | $\sin 2u$      | $\cos 2u$ | $\sin 4u$      | $\cos 4u$ | $\sin 6u$      | $\cos 6u$ |
| 0°        | 0,000          | -1,883    | 0,000          | -1,883    | 0,000          | -1,883    |
| 36        | +1,882         | +0,612    | +1,164         | -1,601    | -1,164         | -1,601    |
| 72        | +0,939         | -1,292    | -1,519         | +0,494    | +1,519         | +0,494    |
| 108       | -0,280         | -0,386    | +0,454         | +0,147    | -0,454         | +0,147    |
| 144       | +2,062         | -0,670    | +1,275         | +1,754    | -1,275         | +1,754    |
| 9°        | и та к да ле с |           |                |           |                |           |
| 45        |                |           |                |           |                |           |
| 81        |                |           |                |           |                |           |

Отсюда найдем по формулам (f) и (h):

$$A = 193^\circ,3 \quad a = +1'',329$$

$$B = 148^\circ,6 \quad b = +0'',404$$

$$C = 133^\circ,4 \quad c = +0'',350$$

Нужно отметить, что средние ошибки величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  всегда довольно крупны: до  $20^\circ$  в  $A$  и  $B$  и до  $60^\circ$  в  $C$ ; средние ошибки величин  $a$ ,  $b$  и  $c$  достигают  $\pm 0,02$ — $0'',03$ . В табл. 23 приведено вычисление систематических ошибок по формуле (б) для диаметров первого ряда, а в табл. 24 дан список  $(x)_u$  для всех диаметров.

Таблица 23

| $u^\circ$ | $a \sin(2u + 193^\circ,3)$ | $b \sin(4u + 148^\circ,6)$ | $c \sin(6u + 133^\circ,6)$ | $x_u$    |
|-----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------|
|           | $a = +1'',329$             | $b = +0'',404$             | $c = +0'',350$             |          |
| 0°        | -0,306                     | +0,210                     | +0,254                     | +0'',158 |
| 36        | -1,325                     | -0,373                     | -0,064                     | -1,762   |
| 72        | -0,513                     | +0,393                     | -0,150                     | -0,270   |
| 108       | +1,007                     | -0,263                     | +0,307                     | +1,051   |
| 144       | +1,135                     | +0,033                     | -0,347                     | +0,821   |

Далее имеем:

$$[vv] = 22,3352 \quad m^2 = 0,1396$$

$$[(p - \alpha)^2] = 46,9670 \quad M^2 = 2,9354$$

$$[\xi\xi] = 2,6298 \quad M_\xi^2 = 0,2023$$

$$\tau = \pm 1'',18 \quad \tau_3 = \pm 0'',18$$

$$(x)_u = +1",329 \sin(2u + 193^\circ,3) + 0",404 \sin(4u + 148^\circ,6) + \\ + 0",350 \sin(6u + 133^\circ,6)$$

с отбрасыванием в  $(x)_u$  члена  $a_0$ .

Таблица 24

## Систематические ошибки диаметров

| $u^\circ$ | $(x_u)$   | $u^\circ$ | $x_u$     |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0°        | + 0",158  | 90°       | -+ 0",262 |
| 9         | -+ 0",769 | 99        | + 0",703  |
| 18        | -+ 1",577 | 108       | + 1",051  |
| 27        | -+ 1",936 | 117       | + 1",150  |
| 36        | -+ 1",762 | 126       | + 1",016  |
| 45        | -+ 1",263 | 135       | + 0",843  |
| 54        | -+ 0",755 | 144       | + 0",821  |
| 63        | -+ 0",436 | 153       | + 0",962  |
| 72        | -+ 0",270 | 162       | + 1",056  |
| 81        | -+ 0",080 | 171       | + 0",826  |

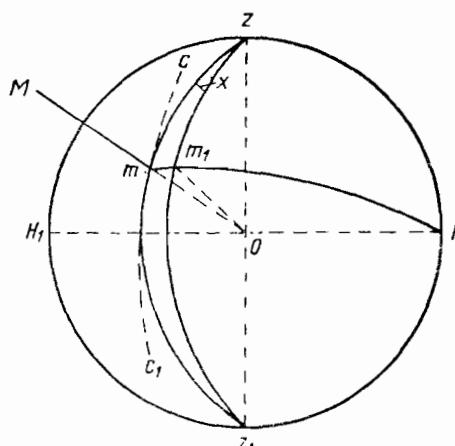
## § 61. О коллимационной ошибке трубы

Для получения правильных результатов при измерении горизонтальных направлений необходимо, чтобы во время измерений плоскость лимба была горизонтальна, а визирная ось трубы перемещалась в вертикальной плоскости при вращении трубы около горизонтальной оси инструмента. Будем называть в дальнейшем плоскостью большого круга инструмента плоскость, проходящую через пересечение визирной оси трубы и горизонтальной оси инструмента и перпендикулярную к горизонтальной оси. Визирная ось должна, конечно, лежать в плоскости большого круга; если это требование выполняется и если, кроме того, горизонтальная ось теодолита перемещается в горизонтальной плоскости при вращении алидады, а лимб его установлен горизонтально, то измерение горизонтальных направлений и углов сводится к совмещению плоскости большого круга с вертикалями предметов и соответствующим отсчетом по лимбу, разности которых будут равны некоторым углам между предметами. В действительности, ни установка теодолита на станции, ни его выверка не могут быть выполнены идеально точно, и поэтому во время наблюдений мы имеем: малый наклон плоскости лимба к горизонту, малое уклонение оси алидады от вертикальной линии, неперпендикулярность горизонтальной оси к оси вращения алидады и, наконец, несовпадение визирной оси с плоскостью большого круга.

Переходя к выяснению влияния на результат измерений горизонтальных направлений несовпадения визирной оси трубы с плоскостью большого круга или неперпендикулярности визирной оси к горизонтальной, будем при этом считать, что все остальные из перечисленных выше неправильностей в выверке и установке теодолита не существу-

ют. Так можно поступить потому, что величина уклонения визирной оси от плоскости большого круга не зависит ни от наклона лимба к горизонту, ни от искривлений в выверке и установке вертикальной и горизонтальной осей, а также потому, что каждая из указанных погрешностей должна быть малой.

Пусть визирная ось трубы составляет с плоскостью большого круга малый угол  $c$ , называемый коллимационной ошибкой трубы. Тогда угол визирной оси с горизонтальной осью будет или  $90^\circ - c$  или  $90^\circ + c$ , и при вращении около горизонтальной оси визирная ось будет описывать



Чapt. 238

поверхность конуса. Назовем через  $O$  точку пересечения плоскости большого круга с горизонтальной осью  $H_1H$  (черт. 238) и вообразим вспомогательную сферу с центром в  $O$ . Пусть  $H_1$  и  $H$  — точки пересечения сферы с горизонтальной осью;  $z$  и  $z_1$  — точки пересечения сферы с отвесной линией в  $O$ , а  $m$  — пересечение ее визирной осью  $OM$ , направленной на предмет  $M$ . Очевидно, если существует коллимационная ошибка  $c$ , то в момент визирования на  $M$  плоскость большого круга совпадает с вертикалом  $zmz_1$ , для которого  $H$  является полюсом и с плоскостью которого радиус  $Om$  составляет угол  $c$ , так что дуга  $mH$  будет равна или  $90^\circ - c$  или  $90^\circ + c$ . Следовательно, что если

Очевидно также, что если большой

круг совпадает с вертикалом  $zm_1z_1$ , то точка  $m$  будет находиться на малом круге  $sm_1s_1$ , параллельном кругу  $zm_1z_1$  и отстоящем от него на угловое расстояние  $c$ ; этот круг  $sm_1s_1$  называется коллимационным кругом, потому что по нему перемещается проекция на сферу визирной оси трубы при вращении ее около горизонтальной оси. Если  $m_1$  лежит на сфере в пересечении плоскости  $mOH$  с вертикалом большого круга, то дуга  $mm_1$  равна  $c$ .

Назовем через  $N_{\mu}$  отсчет по лимбу при существовании коллимационной ошибки; истинный же отсчет, который мы имели бы при том же положении горизонтального лимба, но при визировании на  $M$  трубой, не имеющей коллимационной ошибки, назовем через  $N$ . Для перехода от  $N_{\mu}$  к  $N$  нужно вообразить, что плоскость  $zt_1z_1$  совмещается с плоскостью вертикала предмета  $M$  посредством вращения алидады на угол  $x$ , потому что, если бы не было коллимационной ошибки, то при отсчете  $N$  визирная ось располагалась бы в плоскости  $zt_1z_1$ . Следовательно:  $N = N_{\mu} + x$ . Угол  $x$  (между плоскостями  $zt_1z_1$  и  $zt_2z_1$ ) определяется из прямоугольного сферического треугольника  $tt_1t_2z_1$ , из которого, называя через  $\varepsilon$  зенитное расстояние  $Mo_z$ , напишем:

$$\sin c = \sin x \cdot \sin z : \quad \sin x = \frac{\sin c}{\sin z} ;$$

Так как  $c$  малая величина, то можно еще написать так:

$$x = \frac{c}{\sin z}; \quad N = N_n + \frac{c}{\sin z}.$$

Черт. 238 сделан в предположении, что визирная ось образует с левым концом горизонтальной оси угол  $90^\circ + c$  (тупой); в этом случае  $N$  более  $N_n$  на  $\frac{c}{\sin z}$ . Если трубу перевести через зенит и сделать новое визирение на  $M$ , то визирная ось образует теперь с левым концом горизонтальной оси острый угол  $90^\circ - c$  и для перехода от  $N_n$  к  $N$  придется вращать алидаду против хода часовой стрелки, и, следовательно,  $N$  будет менее  $N_n$  на  $x$ . Называя направления, наблюденные при правом и левом круге, через  $R$  и  $L$ , будем иметь:

$$N = R - \frac{c}{\sin z}; \quad N \pm 180^\circ = L + \frac{c}{\sin z}; \quad (243)$$

или:

$$N = R + \frac{c}{\sin z}; \quad N \pm 180^\circ = L - \frac{c}{\sin z}. \quad (244)$$

Обычно, рассматривая  $c$  как величину алгебраическую, применяют формулы (244).

Из формул (243) и (244) следует, что если коллимационная ошибка оставалась постоянной за время двух наблюдений при правом и левом круге, то истинное значение  $N$  направления равно полусумме  $\frac{R+L}{2}$ . Этим, конечно, указывается известное правило исключения из результатов наблюдений влияния коллимационной ошибки трубы.

Допустим, что измеряется угол между двумя предметами  $A$  и  $B$ , имеющими зенитные расстояния  $z_a$  и  $z_b$ . Называя через  $N_a$  и  $N_b$  истинные значения направлений на  $A$  и на  $B$ , а через  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $R_b$ ,  $L_b$  — результаты наблюдений этих направлений при двух положениях трубы, будем иметь:

$$\begin{aligned} N_a &= R_a + \frac{c}{\sin z_a}; \quad N_a = L_a - \frac{c}{\sin z_a}; \\ N_b &= R_b + \frac{c}{\sin z_b}; \quad N_b = L_b - \frac{c}{\sin z_b}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} N_a + N_b &= R_a + R_b + c \left\{ \frac{1}{\sin z_a} + \frac{1}{\sin z_b} \right\}; \\ N_a - N_b &= L_a - L_b - c \left\{ \frac{1}{\sin z_a} - \frac{1}{\sin z_b} \right\}. \end{aligned} \quad (245)$$

Из формул (245) вытекают следующие заключения:

1) влияние коллимационной ошибки на измеряемый угол исключается вполне в среднем из двух результатов, полученных для этого угла из наблюдений при двух положениях трубы ( $R$  и  $L$ );

2) обусловленная коллимационной ошибкой погрешность угла, измеренного одним полуприемом (т. е. только при  $R$  или только при  $L$ ), равна нулю при равенстве зенитных расстояний наблюдаемых предметов;

3) в триангуляциях при  $z_a$  и  $z_b$ , почти равных между собой и весьма близких к  $90^\circ$ , ошибка в измеренном полуприемом угле (без

перевода трубы через зенит), обусловленная коллимационной ошибкой, весьма мала и всегда пренебрегаема по сравнению с ошибками угла, обусловленными иными причинами. При  $z_a = 89^\circ$ , при  $z_b = 90^\circ$  и при  $c$ , равном  $3'$ ,  $c \left( \frac{1}{\sin z_a} - \frac{1}{\sin z_b} \right)$  равна всего  $\frac{1}{42}$  секунды.

На основании последнего заключения измерение углов в триангуляциях при двух положениях трубы не является необходимым для исключения влияния коллимационной ошибки, которое чрезвычайно мало; если, тем не менее, на пунктах тригонометрической сети направления измеряются всегда при двух положениях трубы, то это делается, во-первых, чтобы собрать материал для суждения о постоянстве коллимационной ошибки, а во-вторых, чтобы иметь ряд наблюдений, в котором исчерпаны все возможные комбинации относительного расположения частей инструмента.

Вследствие крайней близости  $\sin z_a$  и  $\sin z_b$  к единице при наблюдениях в тригонометрической сети, формулу (245) можно упростить для этого случая и написать в таком виде:

$$\begin{aligned} N_a &= R_a + c; & N_b &= R_b + c; \\ N_a &= L_a - c; & N_b &= L_b - c; \\ c &= \frac{L_a - R_a}{2} = \frac{L_b - R_b}{2}. \end{aligned} \quad (246)$$

Другими словами, если в данном приеме теодолитом наблюдалась предметы  $A, B, C, \dots, K$ , то разности  $L - R$ , выведенные для всех этих предметов, должны быть постоянными, и, следовательно, по колебаниям их можно судить о погрешностях измерения. Пусть на данной станции наблюдали  $n$  предметов, причем измерение углов велось  $m$  приемами. Результаты этих измерений представим такой таблицей:

| Первый прием | Второй прием  | Третий прием | $m$ -ый прием |
|--------------|---------------|--------------|---------------|
| $R'_A L'_A$  | $R''_A L''_A$ | ...          | $R^m_A L^m_A$ |
| $R'_B L'_B$  | $R''_B L''_B$ | ...          | $R^m_B L^m_B$ |
| ...          | ...           | ...          | ...           |
| $R'_K L'_K$  | $R''_K L''_K$ | ...          | $R^m_K L^m_K$ |

Так как наблюдения в  $m$  приемах занимают вообще значительный промежуток времени, то нельзя, конечно, предполагать постоянства коллимации за все время этих наблюдений, но надо требовать, чтобы в течение каждого приема коллимационная ошибка оставалась постоянной. Ввиду этого следует каждому приему приписать свое значение  $c$ . Назовем вероятное значение коллимационной ошибки в первом приеме через  $c'$ , во втором — через  $c''$  и т. д. Составим такую таблицу:

|                                |                                   |     |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|-----|-----------------------------------|
| $c'_a = \frac{L'_A - R'_A}{2}$ | $c''_a = \frac{L''_A - R''_A}{2}$ | ... | $c^m_a = \frac{L^m_A - R^m_A}{2}$ |
| $c'_b = \frac{L'_B - R'_B}{2}$ | $c''_b = \frac{L''_B - R''_B}{2}$ | ... | $c^m_b = \frac{L^m_B - R^m_B}{2}$ |
| ...                            | ...                               | ... | ...                               |
| $c'_k = \frac{L'_k - R'_k}{2}$ | $c''_k = \frac{L''_k - R''_k}{2}$ | ... | $c^m_k = \frac{L^m_k - R^m_k}{2}$ |

Вычислив же:

$$c' = \frac{c_a' + c_b' + \dots + c_n'}{n};$$

$$c'' = \frac{c_a'' + c_b'' + \dots + c_n''}{n};$$

.....

$$c^m = \frac{c_a^m + c_b^m + \dots + c_n^m}{n},$$

образуем уклонения:

$$\begin{array}{l|l|l} v_a' = c_a' - c' & v_a'' = c_a'' - c'' & \dots \dots \\ v_b' = c_b' - c' & v_b'' = c_b'' - c'' & \dots \dots \\ \dots \dots & \dots \dots & \dots \dots \\ v_k' = c_k' - c' & v_k'' = c_k'' - c'' & \dots \dots \end{array}$$

число которых равно  $nm$ . Средняя ошибка  $m_c$  определения коллимации вычисляется, конечно, так:

$$m_c = \sqrt{\frac{\sum v^2}{mn - m}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{m(n-1)}}. \quad (247)$$

Но, с другой стороны,  $c = \frac{L-R}{2}$  и  $N = \frac{R+L}{2}$ , т. е. средняя ошибка направления, выведенного из одного приема, равна  $m_c$ .

Отсчеты  $R$  и  $L$  в одном приеме на один и тот же предмет приходятся на одном и том же месте лимба. Следовательно, колебания величин  $c$  или  $2c$  не зависят от ошибок делений горизонтального круга инструмента. Но эти же колебания величин  $2c$  в данном приеме целиком отражают в себе ошибки отсчетов, ошибки визирований, азимутальные сдвиги горизонтальной оси при перемещениях трубы по высоте или под действием работы наводящего винта трубы; азимутальные сдвиги горизонтальной оси, вызываемые гнущиями всей алидадной части инструмента, также целиком входят в величину  $2c$ . Азимутальные сдвиги всего инструмента, происходящие, примерно, пропорционально времени (например, вследствие кручения внутренней пирамиды), будут обуславливать заметный ход величин  $2c$ , если наблюдения предметов в первом и втором полуприемах исполняются, как это и делается, в прямом и обратном порядке. Таким образом, колебания  $2c$  являются отличной характеристикой состояния инструмента и устойчивости инструмента за время выполнения приема. Поэтому следует величины  $2c$  выводить во время самого выполнения данного приема. Внесенный скачок в  $2c$ , если одновременно было отмечено заметное, (на три-четыре деления) смещение пузырька уровня при наблюдении данного направления при  $R$  или при  $L$ , указывает нередко на произошедшее при этом гнущие алидадной части инструмента вследствие расстройства регулировки вращения алидады около вертикальной оси инструмента. Скачок в  $2c$ , повторяющийся более или менее однообразно в разных приемах при наблюдении некоторого предмета, показывает на азимутальные сдвиги горизонтальной оси трубы при наблюдении этого предмета, требующего заметно иной высотной установки трубы, чем все остальные предметы.

Температурные влияния также сказываются на колебаниях величин  $2c$ . Вообще говоря, эти влияния вызывают изменения в коллимационной ошибке трубы, совершающиеся скачками, хотя и при более или менее однообразном нарастании этих изменений в одну сторону в течение одного приема или даже нескольких приемов. Другими словами, можно представить, что за малый промежуток времени  $\Delta t_1$ , коллимация с остается постоянной и изменяется в конце этого промежутка скачком на  $+\Delta c_1$ ; в следующем промежутке времени  $\Delta t_2$ , также достаточно малом, коллимация сохраняет значение  $c + \Delta c_1$ , но при переходе к следующему промежутку изменяется скачком на  $+\Delta c_2$ , причем  $\Delta c_1$  и  $\Delta c_2$  имеют один знак. Изменения коллимационной ошибки, обусловленные изменениями температуры воздуха и односторонними нагреваниями инструмента, значительно больше в инструментах с ломаной трубой, чем в инструментах с прямой трубой. Конечно, малое скачкообразное изменение  $\Delta c$  может прийтись и на промежуток времени, затрачиваемый на выполнение одного полуприема, и, конечно, это поведет кискажению вывода угла из такого полуприема как раз на величину  $\Delta c$ . Но в инструментах с прямой трубой мы можем быть уверены в ничтожности такого  $\Delta c$ , между тем этой уверенности может не быть при работе с инструментом с ломаной трубой: материалы наблюдений показывают, что за вечерний период наблюдений, длительностью от 6 часов вечера до 1 часа ночи, при значительном, хотя и постепенном падении температуры, коллимация изменяется в первоклассном теодолите на  $2''$ , тогда как при тех же условиях в геодезическом универсале с ломаной трубой изменения  $c$  иногда достигают  $6 - 7''$ .

Величина  $m_c$ , выведенная вышеуказанным образом, является очень характерной для работы инструмента и его устойчивости; при устойчивом инструменте и при отсутствии азимутальных сдвигов горизонтальной оси при движении трубы по высоте, величина  $m_c$  будет вообще менее средней ошибки  $m$  наблюденного в одном приеме направления, выведенной иными путями (см. § 81); при обратных условиях будем иметь  $m_c$ , заметно большее  $m$ . При отсутствии кручения подставки для инструмента (внутренней пирамиды) в триангуляции I класса колебания  $2c$  в отдельном приеме не должны выходить из предела  $\pm 5 - 6''$ ; если поверительная труба не употреблялась при наблюдениях, то вследствие кручения внутренней пирамиды колебания величины  $2c$  в одном приеме, продолжительностью не более 12 минут времени, могут дойти и до  $8 - 10''$ .

До сих пор говорилось о трубе центральной. Если же труба находится на одном из концов горизонтальной оси, то коллимационную ошибку нельзя вычислять по формуле:

$$c = \frac{L - R}{2}.$$

Пусть при наведении внецентренной трубы на предмет  $M$ , имеющий достаточно близкое к  $90^\circ$  зенитное расстояние, сделан отсчет  $R_1$ , причем труба располагалась влево от вертикального круга  $PQ$  (черт. 239). При центральной трубе и при том же отсчете  $R_1$  труба была бы направлена по направлению  $OM_1$ , параллельному  $O_1M$ . Следовательно, отсчет  $R$ , соответствующий визированию центральной трубой на  $M$ , по направлению  $OM_1$  будет менее  $R_1$  на угол  $MO_1M_1$ , равный углу  $O_1MO$ .

Называя через  $r$  расстояние  $OO_1$  и через  $D$  — расстояние  $OM$ , будем иметь вследствие малости  $r$  по сравнению с  $D$  и малости угла  $O_1MO$ :

$$R = R_1 - \frac{r \cdot \rho''}{D}. \quad (248)$$

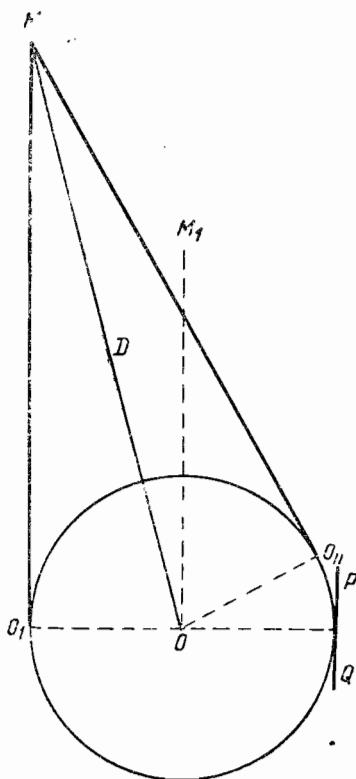
После перевода трубы через зенит, когда при визировании на  $M$  труба совпадет с прямой  $O_1M$ , будем, очевидно, иметь уравнение:

$$L = L_1 + \frac{r \cdot \rho''}{D}, \quad (249)$$

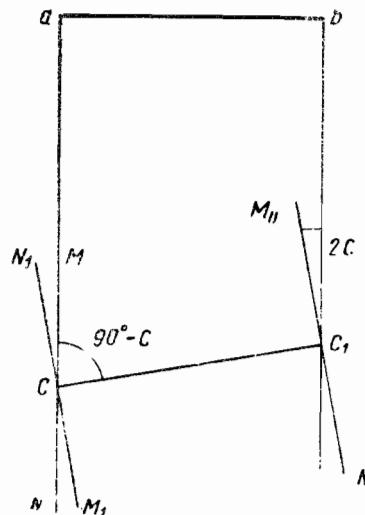
понимая под  $L$  отсчет при левом круге, который получили бы при визирении на  $M$  центральной трубой. Зная  $r$  и  $D$ , приходится, следовательно, в случае винцентренной трубы вычислять коллимационную ошибку по такой формуле:

$$c = \frac{L_1 - R_1 \pm 180^\circ}{2} + \frac{r \cdot \rho''}{D}. \quad (250)$$

В случае внецентренной трубы применяют также следующий прием определения коллимационной ошибки. На черной доске наносят два белых кружочка так, чтобы расстояние  $ab$  (черт. 240) между их центрами было точно равно  $2r$ . Укрепив такую марку на стене, устанавливают в расстоянии 40—60 м от нее



Черт. 239



Черт. 240

инструмент так, чтобы перпендикуляр из центра инструмента на плоскость марки проходил вблизи средней точки между  $a$  и  $b$ . После этого направляют визирную ось трубы  $NM$  при правом круге ( $R$ ) на левый кружок  $a$  и делают отсчет  $R$  по горизонтальному кругу; затем переводят трубу через зенит и наводят ее при круге-лево на правый кружочек  $b$ ;

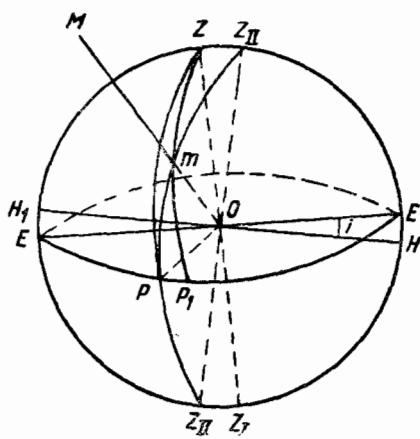
наконец, делают отсчет по горизонтальному лимбу  $L$ . Если горизонтальная ось при визировании на  $a$  совпадала с прямой  $cc_1$ , причем угол  $c_1cM$  был равен  $90^\circ - c$ , то после перевода трубы через зенит визирная ось пойдет по прямой  $M_1N_1$ , образующей угол  $2c$  с тем направлением  $NM$  визирной оси, которое было при наведении трубы на  $a$  (причем угол  $N_1cc_1$  будет равен  $90^\circ + c$ ); поэтому, если после перевода трубы через зенит повернуть алидаду на  $180^\circ$ , то визирная ось будет направлена по линии  $N_aM_a$ , параллельной  $M_1N_1$  и образующей с направлением  $ca$  угол в  $2c$ . Отсюда нетрудно, конечно, заключить, что  $L$  будет равно  $R \pm 180^\circ - 2c$  или:

$$c = \frac{L - R \pm 180^\circ}{2}.$$

## § 62. Влияние неправильной установки горизонтальной оси (оси вращения трубы)

Наклонное положение оси вращения трубы может происходить или от неправильной установки оси алидады или от неравенства подставок трубы. В настоящем параграфе будем иметь в виду наклонность горизонтальной оси, обусловленную только неравенством подставок трубы (включая сюда и неравенство цапф оси), предполагая, что никаких других инструментальных погрешностей не имеется, т. е. лимб горизонтален, ось алидады вертикальна и коллимационная ошибка равна нулю.

Пусть  $O$  есть пересечение (черт. 241) визирной и горизонтальной осей и вместе с тем центр вспомогательной сферы. Назовем через  $H$  и  $H_1$  пересечения этой сферы с горизонтальной осью, через  $Z$  и  $Z_1$  — пересечения сферы отвесной линией в  $O$ . Допустим далее, что  $H_1H$  наклон-



Черт. 241

дения трубы может происходить или от градусов или от неравенства подставок. Будем иметь в виду наклонность только неравенством подставок трубы (осях), предполагая, что никаких стечий не имеется, т. е. лимб горизонтальной коллимационной ошибки равен нулю. (ст. 241) визирной и горизонтальной сферы. Назовем через  $H$  и  $Z$  горизонтальной осью, через  $Z_1$  — перпендикуляр  $O$ . Допустим далее, что  $H_1H$  наклонена к горизонту на угол  $i$ ; вследствие этого плоскость большого круга инструмента не будет вертикальна и представится наклонной плоскостью  $Z_1PO$ , перпендикулярной к  $HH_1$ ; с плоскостью  $Z_1PO$  прямая  $OZ$ , очевидно, образует угол  $\iota$ . Пусть труба теодолита направлена на  $M$ ; при этом визирная ее ось будет, конечно, находиться в пересечении вертикала  $ZOM$  предмета с плоскостью большого круга инструмента; пусть далее  $OP$  — пересечение плоскости  $EOE$  горизонта с плоскостью большого круга  $Z_1OP$ . Нетрудно видеть, что  $OP$  перпендикулярен к плоскости  $ZOH$ . Так как мы условились определить то влияние на отсчет по горизонтальному

лимбу, которое вызывается наклонностью  $i$  горизонтальной оси, обусловленной только неравенством подставок трубы, то, очевидно, к правильному положению ее мы придем, если повернем алидаду около линии  $OP$  на угол  $i$ , причем в результате этого поворота ось вращения трубы совпадет с горизонтальной прямой  $EE'$ , имеющей тот же азимут, как и  $HH_1$  (т. е., следовательно, при указанном повороте алидадной системы около линии  $OP$  прежняя ориентировка алидады не изменяется).

После этого поворота большой круг инструмента из положения  $Z''OP$  перейдет в положение  $ZOP$ , и визирная ось трубы выйдет из плоскости  $ZmO$  вертикала наблюдаемого предмета  $M$  и будет, конечно, находиться в плоскости вертикала  $ZPO$ . Чтобы снова направить трубу на предмет  $M$ , придется дать алидаде вращение около вертикальной линии на угол  $x$  между плоскостями  $ZOP$  и  $ZmO$ , измеряющийся сферическим углом при  $Z$  в тр-ке  $PZm$ . Если через  $N_n$  называем отсчет, сделанный при наклонном положении оси вращения трубы, а через  $N$  — истинный отсчет, то для черт. 241, на котором правый конец оси  $III_1$  выше левого, имеем:

$$N = N_n - x.$$

Из тр-ка  $ZZ'm$ , в котором сторона  $Zm$  равна зенитному расстоянию  $Z$  точки  $M$ , а углы при  $Z$  и  $Z''$  соответственно равны  $90^\circ - x$  и  $90^\circ$ , напишем, зная, что  $ZZ'' = i$ :

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} z},$$

а по малости  $i$  будет иметь:

$$x = \frac{i}{\operatorname{tg} z}. \quad (252)$$

Если левый конец горизонтальной оси выше правого, то:

$$N = N_n + x = N_n + \frac{i}{\operatorname{tg} z}. \quad (252')$$

Обычно употребляют всегда только формулу (252), считая величину  $i$  отрицательной для случая, когда правый конец оси  $III_1$  выше левого.

Как именно определяется  $i$  посредством уровня, ставящегося на горизонтальную ось, об этом подробно указано в § 45; необходимо лишь прибавить, что, вычисляя всегда  $N$ , как  $N_n + x$ , следует  $i$  считать положительной, если левый конец горизонтальной оси выше правого. Наклонность  $i$ , обусловленная только неравенством подставок трубы и неравенством цапф горизонтальной оси, остается постоянной при вращении алидады около вертикальной оси. С другой стороны, очевидно, что после перевода трубы через зенит изменяется знак наклонности  $i$ , и, следовательно, если наблюденные значения направлений при круге-право и при круге-лево назвать  $R$  и  $L$ , а истинное значение направления через  $N$ , то:

$$N = R + \frac{i}{\operatorname{tg} z}; \quad N \pm 180^\circ = L - \frac{i}{\operatorname{tg} z},$$

или

$$N = R - \frac{i}{\operatorname{tg} z}; \quad N \pm 180^\circ = L + \frac{i}{\operatorname{tg} z};$$

$$N = \frac{R + L \pm 180^\circ}{2}.$$

Таким образом, если бы наклонность горизонтальной оси теодолита была обусловлена только неравенством подставок трубы и неравенс-

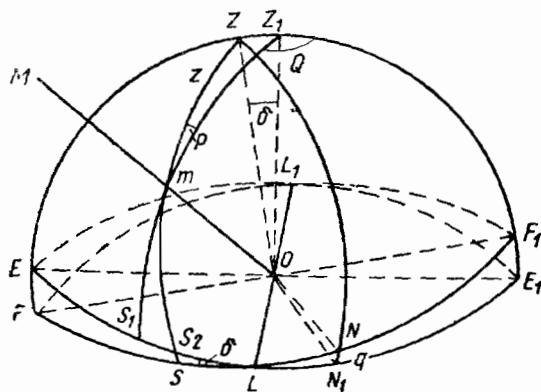
вом цапф, то в среднем из наблюдений, исполненных при двух положениях трубы  $R$  и  $L$ , мы получали бы направление, совершенно свободное от влияния наклонности горизонтальной оси.

### § 63. Влияние неправильной установки вертикальной оси (оси вращения алидады)

При рассмотрении этого вопроса будем считать, что плоскость лимба и ось вращения трубы перпендикулярны к оси алидады.

Пусть  $O$  — центр лимба, а  $OZ_1$  — ось алидады (черт. 242), наклоненная под углом  $\delta$  к вертикальной линии  $OZ$ ; допустим, что круг  $ELE_1$  есть пересечение вспомогательной сферы, имеющей центр в  $O$ , с плоскостью лимба инструмента, наклоненной к плоскости горизонта также на угол  $\delta$ . Пусть  $LL_1$  — горизонтальный диаметр нашего наклонно стоящего лимба, а круг  $FLF_1$  — пусть находится в плоскости горизонта точки  $O$ .

При перпендикулярности горизонтальной оси инструмента к оси  $OZ_1$  плоскость большого круга инструмента всегда будет проходить через  $OZ_1$ . Очевидно, величина направления, отсчитанного на лимбе  $ELE_1$  при наведении трубы на некоторый предмет, только в совершенной пренебрегаемой степени зависит от высоты горизон-



Черт. 242

тальной оси над лимбом, и мы можем принять, что эта высота равна нулю, т. е. что визирная ось трубы проходит через  $O$ . Поэтому и будем считать  $O$  за пересечение визирной и горизонтальной осей.

Пусть при наблюдении предмета  $M$  был сделан отсчет  $S_1$  на лимбе  $ELE_1$ . Истинным отсчетом  $S$  будем называть такой, который получился бы при визировании на  $M$ , если бы ось алидады совпадала с  $OZ$ , причем, при переходе от  $S_1$  к  $S$  или от неправильного положения оси алидады к правильному, лимб вместе с алидадой должен вращаться на угол  $\delta$ , около прямой  $LL_1$ , перпендикулярной к плоскости  $Z_1OZ_1$ , в которой лежит уклонение оси алидады от ее правильного положения. Если по направлению прямой  $LL_1$  находились, при наклонном положении оси алидады, штрихи лимба  $L$  и  $L \pm 180^\circ$ , то эти же штрихи останутся на прямой  $LL_1$  и после указанного перехода к правильному положению оси алидады. Если при наклонном положении оси алидады плоскость большого круга при визировании на  $M$  совпадала с плоскостью  $Z_1OmS_1$ , пересекающей лимб по радиусу  $OS_1$ , то при правильном положении оси алидады при визировании на  $M$  плоскость большого круга совпадет с плоскостью  $ZOmS$ , пересекающей горизонтальный лимб по радиусу  $OS$ . Будем считать, что радиусам  $OS_1$  и  $OS$  соответствуют на лимбах именно отсчеты  $S_1$  и  $S$  (т. е. предположим, что индекс алидады лежит в плоскости большого круга инструмента). Очевидно, вопрос о вычислении  $S$  сводится к определению разности дуг  $S_1L$  и  $SL$ . Напишем:

$$S - S_1 = SL - S_1L = SL - S_2L - S_1S_2,$$

понимая под  $S_2$  точку пересечения плоскости  $ZOm$  с плоскостью наклонного лимба. Из прямоугольного сферического тр-ка  $S_2LS$ , называя в нем стороны  $SL$  и  $S_2L$  соответственно через  $x$  и  $y$ , имеем:

$$\cos \delta = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y,$$

$$2 \sin^2 \delta = 1 - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\sin(y-x)}{\sin y \cdot \cos x}.$$

Отсюда:

$$\sin(y-x) = 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin y \cdot \cos x.$$

Вследствие малости  $\delta$  и  $y-x$  можно написать так:

$$y-x = \frac{\delta^2}{2z''} \sin 2y. \quad (253)$$

Для определения же  $S_1S_2$  рассмотрим сперва треугольник  $mZZ_1$ , в котором угол при  $m$  назовем через  $P$ , а угол при  $Z_1$  — через  $180^\circ - Q$ ; из этого тр-ка имеем:

$$\sin P = \frac{\sin \delta}{\sin z} \cdot \sin Q,$$

понимая под  $z$  зенитное расстояние  $Zm$  предмета  $M$ . Далее из тр-ка  $mS_1S_2$ , прямоугольного при  $S_1$ , называя в нем сторону  $mS_2$  через  $90^\circ - z - \Delta$ , получим:

$$\sin P = \frac{\sin \overline{S_1S_2}}{\cos(z + \Delta)}.$$

Следовательно:

$$\sin \overline{S_1S_2} = \frac{\cos(z + \Delta)}{\sin z} \sin \delta \cdot \sin Q. \quad (254)$$

Очевидно,  $mS = 90^\circ - z$ ; следовательно,  $\Delta$  равно дуге  $SS_2$ . Из тр-ка  $S_2SL$ , однако, видно, что  $\Delta$  одного порядка с  $\delta$ , и поэтому, если в уравнении (254) удерживать лишь малые величины одного порядка с  $\delta$ , то:

$$S_1S_2 = \frac{\delta \sin Q}{\operatorname{tg} z}. \quad (255)$$

Из формулы (253) видно, что при  $\delta = 60''$

$$y-x < \frac{1}{200} \text{ секунды.}$$

Очевидно, если бы ось алидады была вполне правильно установлена, а плоскость лимба была бы наклонена к горизонту на угол  $\delta$ , то отсчет при визировании на  $M$  соответствовал бы радиусу  $OS_2$ ; другими словами, погрешность отсчета при правильно стоящей оси алидады, но при наклонном лимбе, была бы равна  $y-x$ . Таким образом,  $y-x$  является влиянием собственно наклонности лимба, и, как видно, это влияние всегда пренебрегаемо, потому что всегда можно установить лимб под углом к горизонту, меньшим  $1'$ .

На основании изложенного:

$$S - S_1 = \frac{\delta \sin Q}{\operatorname{tg} z}.$$

Так как плоскость  $EZZ_1F_1$  перпендикулярна к  $LL_1$ , то понятно, что:  $Q = S_1 - L + 90^\circ$ . Поэтому окончательно:

$$S - S_1 = \frac{\delta \cos(S_1 - L)}{\operatorname{tg} z}. \quad (256)$$

Здесь надо отметить, что при наклонной оси алидады ось вращения трубы будет при разных положениях алидады различно наклонена к горизонту. При отсчете  $S_1$  ось вращения трубы будет параллельна радиусу  $ON_1$  лимба, перпендикулярному к радиусу  $OS_1$ . Проведя вертикаль  $ZON_1$ , отметим в  $N$  его пересечение с горизонтальным лимбом  $FOF_1$  и для наклонности  $q$  оси вращения трубы, измеряемой углом  $N_1ON$ , найдем из треугольника  $NLN_1$ , прямоугольного при  $N$ :

$$\sin q = \sin \delta \cdot \sin [L - (S_1 - 90^\circ)],$$

т. е.:

$$q = \delta \cos(S_1 - L).$$

Таким образом, формула (256) перепишется так:

$$S - S_1 = \frac{\delta \cos(S_1 - L)}{\operatorname{tg} z} = \frac{q}{\operatorname{tg} z}. \quad (257)$$

Следовательно, при наклонно расположенной оси алидады погрешность в отсчете по горизонтальному лимбу выражается совершению так же, как и в случае наклона одной только горизонтальной оси на угол  $q$ . Но, в противоположность предыдущему параграфу, величина  $q$ , во-первых, не остается постоянной при разных азимутах трубы, а изменяется по закону синуса; во-вторых, для визирований на один и тот же предмет при двух положениях трубы величина  $q$  остается одной и той же, т. е. знак ее не изменяется с переводом трубы через зенит.

**З а ключение.** Пусть при наведении трубы на предмет  $A$  с зенитным расстоянием  $z_a$  наклонность горизонтальной оси при круге-право оказалась равной  $J_a$ ; эта величина  $J_a$  слагается из наклонности  $i$ , обусловленной неравенством подставок трубы и неравенством цапф горизонтальной оси, и из наклонности  $q_a$ , обусловленной наклоном оси алидады. Пусть при наведении трубы также при круге-право на предмет  $B$  с зенитным расстоянием  $z_b$  наклонность горизонтальной оси оказалась равной  $J_b$ , причем  $J_b$  состоялось из  $i$  и из наклонности  $q_b$ , обусловленной наклоном оси алидады. Называя через  $R_a$  и  $R_b$  измеренные направления, через  $N_a$  и  $N_b$  — истинные направления, напишем:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= R_a + \frac{J_a}{\operatorname{tg} z_a} = R_a + \frac{i}{\operatorname{tg} z_a} + \frac{q_a}{\operatorname{tg} z_a} \\ N_b &= R_b + \frac{J_b}{\operatorname{tg} z_b} = R_b + \frac{i}{\operatorname{tg} z_b} + \frac{q_b}{\operatorname{tg} z_b} \end{aligned} \right\}. \quad (258)$$

После перевода трубы через зенит, при новых визирований на  $A$  и  $B$  при круге-лево, мы будем иметь такие наклонности  $J'_a$  и  $J'_b$  горизонтальной оси:

$$J'_a = q'_a - i; \quad J'_b = q'_b - i.$$

Если бы вращение алидады совершалось около постоянной оси и инструмент был бы абсолютно устойчив, то тогда  $q'_a$  равнялось бы  $q_a$  и  $q'_b$  равнялось  $q_b$ . Но, во-первых, возможны колебания оси алидады в ее втулке; во-вторых, ось алидады может не совпадать с осью втулки, в-третьих, подставка теодолита может изменить свое положение за время визирований на  $A$  и на  $B$  при двух положениях трубы. Поэтому правильно считать, что  $q'_a$  не равно  $q_a$  и  $q'_b$  не равно  $q_b$ . Итак, напишем:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= L_a + \frac{J'_a}{\operatorname{tg} z_a} = L_a - \frac{i}{\operatorname{tg} z_a} + \frac{q'_a}{\operatorname{tg} z_a} \\ N_b &= L_b + \frac{J'_b}{\operatorname{tg} z_b} = L_b - \frac{i}{\operatorname{tg} z_b} + \frac{q'_b}{\operatorname{tg} z_b} \end{aligned} \right\} \quad (259)$$

Из (258) и (259) имеем:

$$N_a = \frac{R_a + L_a}{2} + \frac{q'_a + q_a}{2 \operatorname{tg} z_a}; \quad (260)$$

$$N_a - N_b = R_a - R_b + i \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg} z_a} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_b} \right\} + \frac{q_a}{\operatorname{tg} z_a} - \frac{q_b}{\operatorname{tg} z_b}; \quad (261)$$

$$N_a - N_b = \frac{R_a + L_a}{2} - \frac{R_b + L_b}{2} + \frac{q'_a + q_a}{2 \operatorname{tg} z_a} - \frac{q'_b + q_b}{2 \operatorname{tg} z_b}. \quad (262)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) Наблюдая каждое направление или угол при двух положениях трубы, мы получаем в среднем выводе из таких наблюдений результат, свободный лишь от влияния той части наклона горизонтальной оси, которая обусловлена неравенством подставок трубы и неравенством диаметров цапф горизонтальной оси.

2) Так как исключающееся в среднем выводе из наблюдений при  $R$  и  $L$  влияние обусловленной неправильным положением оси алидады наклонности горизонтальной оси быстро возрастает с возрастанием высоты наблюдаемых предметов над горизонтом, то при наблюдениях сигналов с зенитными расстояниями, значительно отличающимися от  $90^\circ$ , а, в особенности, при наблюдениях по определению азимута, наклонности  $J_a$ ,  $J_b$ ,  $J'_a$ ,  $J'_b$  должны быть точно определяемы непременно посредством уровня, ставящегося на горизонтальную ось при каждом визировании трубой, и направления надо вычислять по формуле  $N = R + \frac{J_R}{\operatorname{tg} z}$  или  $N = L + \frac{J_L}{\operatorname{tg} z}$  без выделения слагаемых с  $q$  — как вследствие беспечности такого выделения, так и вследствие его трудности.

3) При наблюдениях на пунктах тригонометрической сети  $z$  близко к  $90^\circ$ , и поэтому  $\operatorname{tg} z$  для всех наблюдаемых сигналов имеет большое числовое значение. Другими словами, в триангуляции поправка  $\frac{J}{\operatorname{tg} z}$  всегда имеет весьма малое числовое значение. Поэтому принимают за пра-

вило — выверкой инструмента и тщательной его установкой на станции (посредством ставящегося на горизонтальную ось уровня) при полной устойчивости основания инструмента — достичь того, чтобы иметь при всех визирований достаточно малые наклоны вертикальной оси, такие, чтобы поправкой  $\frac{J}{\operatorname{tg} z}$  можно было бы просто пренебрегать. При обычных условиях, когда  $90^\circ 30' > z > 89^\circ 30'$ , практически это выражается так:  $J$  должно быть всегда менее  $5''$  при наблюдениях в триангуляциях I класса, и  $8 - 10''$  — в триангуляции II класса.

## Глава IX

### ИЗМЕРЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ УГЛОВ

#### § 64. Выгоднейшее время наблюдений горизонтальных направлений

Представим себе, что труба теодолита остается направленной в течение всего летнего беззоблачного дня на значительно удаленный земной предмет, и проследим те изменения, которые совершаются за день в виде и в положении изображения этого предмета.

Тотчас после восхода солнца изображение предмета представляется неясным, расплывчатым и значительно колеблющимся; в следующие за тем полтора-два часа изображение непрерывно и довольно быстро повышается в трубе, приобретая все более и более отчетливый и спокойный вид; затем наступает, весьма, впрочем, короткий — не более получаса, период утренних спокойных изображений, в течение которого изображение вполне отчетливо, почти неподвижно по азимуту и весьма удобно для точного паведения на него нитей трубы. По миновании этого периода изображение, продолжая повышаться в трубе (в действительности, так как труба астрономическая, наблюдаемое положение предмета попижкается), начинает колебаться вновь по азимуту и по высоте; чем ближе к полуночи, тем более замедляется ход изображения по высоте и тем более увеличиваются колебания по азимуту. За час до полуночи колебания по азимуту становятся столь значительными, что визирование вертикальными нитями делается невозможным. Такие значительные колебания по азимуту, вместе с тусклым и расплывчатым видом изображения предмета, продолжаются до 2 часов пополудни; затем колебания начинают стихать, изображение делается все более спокойным и отчетливым, и между 3 и 4 часами, но часто ближе к 4 часам пополудни, начинается период вечерних спокойных изображений, оканчивающийся за час (или несколько менее) до захода солнца; в течение этого периода изображение совершенно отчетливо (если воздух чист и прозрачен), весьма спокойно и, не меняя азимута, медленно опускается в поле зрения трубы. За час до захода солнца появляются небольшие колебания изображения, которые сопровождаются уменьшением резкости изображения. Перед самым закатом солнца изображение еще раз становится спокойным.

В пасмурную погоду общий характер изменений в течение дня в положении и в виде изображения остается тот же самый, но передвижения по высоте и колебания по азимуту бывают значительно меньшими, особенно в дни полной облачности. Описанные перемены в положении и в виде изображения вполне объясняются тем, что световой луч от отдаленного сигнала проходит через нижние, прилегающие к почве слои

атмосферы, которые под действием нагревания солнцем или, вернее, под действием нагревания тепловыми лучами, отраженными почвой, непрерывно перемещаются в первой половине дня, по мере все большего нагревания почвы лучами солнца. Около 3 часов пополудни, когда нагрев почвы достигает максимума, приземный слой воздуха приходит в равновесие; далее, по мере остывания почвы, нижние слои воздуха охлаждаются, по это, разумеется, не нарушает равновесия атмосферы; почва продолжает охлаждаться через лучесискание, и потому приземный слой воздуха сохраняет некоторое довольно устойчивое равновесие.

Наивыгоднейшим для измерения горизонтальных направлений является, таким образом, вечернее время, начиная с 3–4 часов пополудни и кончая примерно за час до захода солнца. Ночью колебания изображений по азимуту почти всегда плавкны, а потому почной период, начиная спустя час после захода солнца и кончая за час до восхода, является также очень выгодным для измерения горизонтальных направлений.

Необходимо отметить, что на качество изображений, кроме времени дня, имеют огромное влияние местные условия. Собственно все до сих пор сказанное относится к равнинной или слегка всхолмленной местности, не покрытой большими лесными массивами. В гористых районах, где луч идет высоко над почвой, почти в течение всего дня изображения геодезических знаков представляются весьма удовлетворительными. Точно так же в местностях с крупным рельефом условия наблюдения удаленных сигналов гораздо более благоприятны, чем в местности равнинной. В степных же местностях – на Северном Кавказе, в степях Казахстана и, в особенности, в Прикаспийской низменности, нередко в летнее время можно производить наблюдения только в течение 2 или даже 1 часа за весь день. В болотистых низменностях иногда могут пропасть бесплодно целые недели в ожидании удовлетворительных изображений.

В встреную погоду изображения обычно бывают достаточно хорошими, но, конечно, работе при ветре может воспрепятствовать недостаточная устойчивость сигналов; во всяком случае на высоких сигналах с хорошей жесткостью можно работать только при слабом ветре. Перед грозой и сейчас же после дождя наблюдаются значительные колебания изображений.

Высота визирного луча над почвой или над лесом имеет существенное значение; в триангуляциях I класса надлежит иметь для всех точек визирного луча высоту над почвой или лесом не менее 6–8 м.

Слабая видимость наблюдаемых точек и колебания изображений приводят к тому, что в триангуляциях I класса и в основных рядах II класса ошибка паведения трубы становится главной в ряду других ошибок наблюдений. На первоклассных пунктах совершение воздерживаются от работы при отсутствии спокойных и отчетливых изображений.

Кроме случайных ошибок наблюдений, обусловливаемых точностью теодолита и условиями видимости, на результаты измерения углов в первоклассных триангуляциях существенное влияние оказывают еще систематические ошибки, вызываемые действием так называемой боковой рефракции. Дело в том, что траектория визирного луча представляла бы собой геометрическую прямую только в том случае, если бы этот луч проходил через оптически совершенную

однородную среду. В действительности этого никогда нет: рельеф местности, разная освещенность поверхности земли, разнообразие растительности, ее покрывающей, различие теплоемкости сухих и влажных участков почвы, водных поверхностей и пр., обусловливают в приземном слое атмосферы, через который проходит визирный луч, чрезвычайно разнообразные смены температуры и плотности воздуха на протяжении этого луча. Поэтому световая волна, стремясь пройти оптически кратчайшим путем между наблюдаемым объектом и инструментом, дает траекторию в виде неправильной кривой. Так как визирование исполняется по направлению касательной к последнему элементу траектории светового луча, то наблюдаемое направление оказывается искаженным так называемой дифференциальной рефракцией; особенно велика вертикальная составляющая этой рефракции, вызывающая, как известно, весьма значительные погрешности в результатах геодезического (или тригонометрического) нивелирования и являющаяся одним из главных источников погрешности в нивелировании геометрическим. Горизонтальная составляющая, известная под именем боковой рефракции, полностью входит в наблюдаемое направление при измерении горизонтального угла и, как это теперь установлено, лимитирует точность измерения углов в первоклассной триангуляции.

Спокойные и четкие изображения, как мы видели выше, наблюдаются в периоды равновесия в приземном слое атмосферы; паведение биссектора сетки нитей на наблюдавшую точку исполняется в этих условиях с максимальной точностью. Однако, в периоды равновесия атмосферы имеет место некоторое боковое искривление визирного луча, длительно сохраняющееся и вносящее систематическое искажение в ряды наблюдений, исполненных в течение одной или даже нескольких смежных почек (или дней) с одинаковыми метеорологическими условиями. Этим и объясняется то явление, что иногда несколько приемов измерения одного угла, исполненные в данный вечер или в следующую ночь, отлично согласуясь между собой, отскакивают на  $2-3''$ , а иногда и более, от результатов группы приемов, взятых в другое время. Ночью, когда наблюдается охлаждение нижних слоев воздуха, условия для равновесия приземного слоя воздуха более благоприятны, чем днем, и поэтому можно ожидать, что неблагоприятное влияние боковой рефракции на направление почью будет вообще больше, чем днем. Действительно, исследования, поставленные ЦНИИГАИК в 1931 г., показали, что в подмосковных условиях среднесистематическое влияние боковой рефракции на направление составляет днем  $\pm 0'',46$  и ночью  $\pm 0'',63$  (см. проф. Б. В. Данилов, «Отчет по исследованию методов высокоточных угловых наблюдений», М., 1936 г.). По независимым данным, полученным проф. Ф. Н. Красовским из обработки материалов по взаимно обратным астрономическим азимутам на пунктах Лапласа, та же ошибка дляочных наблюдений колеблется от  $\pm 0'',50$  до  $\pm 0'',75$ , что в среднем дает те же  $\pm 0'',62$ .

Указанный факт нашел полное подтверждение в исследованиях англичан, поставленных в Индии в 1933—1934 гг. (см. Geodetic Report, 1934. Survey of India), т. е. для совершенно других широт и других физико-географических условий. В равной мере и в немецкой практике наблюдения на большие расстояния в триангуляции I класса исполняют-

ся только днем. Нужно полагать поэтому, что практика США -- вести наблюдения в триангуляции I класса исключительно почти ночью едва ли достаточно обоснована.

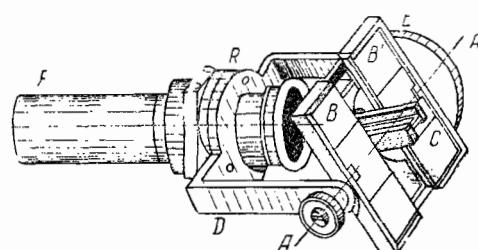
Не следует думать, однако, что в силу изложенного обстоятельства наблюдения в триангуляции I класса следует вести преимущественно днем. Упомянутые исследования англичан показали, что систематические искажения в направлениях, вызываемые действием боковой рефракции, имеют тенденцию иметь в дневное и ночное время противоположные знаки. Действительно, пусть с правой стороны наблюдаемого направления лежит заболоченная низина; днем над нею образуется конус более холодного и, следовательно, более плотного воздуха, и наблюдавшее направление днем будет склоняться влево; ночью над заболоченной низиной образуется конус более теплого и, следовательно, менее плотного воздуха, благодаря чему то же направление ночью отклонится вправо. В среднем из обеих групп дневных иочных наблюдений может иметь место некоторая компенсация ошибок за боковую рефракцию. В силу изложенных соображений на пунктах триангуляции I класса следует распределить примерно поровну на дневное и очное время. По той же причине, чтобы получить хорошие результаты, наблюдения на данном пункте несколько растягивают во времени: в практике Германии -- минимум на 3 суток; в практике англичан -- минимум на 2 ночи и 1 день или наоборот -- на 2 дня и одну ночь. В США считают возможным и достаточным наблюдать пункт I класса в несколько часов, даже за 2-3 часа. Как мы видим, практика США не считается с выдвинутыми выше положениями.

Исследования ЦНИИГАиК 1931 г. показали, что случайные ошибки наблюдений в триангуляции I класса, вызванные условиями видимости, ходом температуры воздуха и пр. внешними причинами, меньше систематических, обусловленных действием боковой рефракции, и в свою очередь большие инструментальных ошибок наблюдений, связанных с мощностью и качеством теодолитов, применяющихся в настоящее время для измерения углов в триангуляциях I класса. Обстоятельство это говорит о том, что внешние условия и, в особенности, боковая рефракция в неблагоприятных условиях являются источником главных погрешностей при угловых наблюдениях на пунктах I класса. Поэтому опытность наблюдателя в оценке внешних влияний имеет существенное значение. Иногда оказывается выгодным, например, вести наблюдения не при совершении спокойных и четких изображений, а при слегка колеблющихся, так как в этом случае имеется место перемешивание слоев воздуха и соответственное ослабление боковой рефракции. При неблагоприятных условиях наблюдались на практике случаи рефракционных влияний до  $5''$  и более. Очевидно, при рекогносцировке следует считаться с условиями видимости и влиянием рефракции и избегать направлений, низко идущих над заболоченными долинами, над значительными односторонне расположеными водными поверхностями, и пр. Если по условиям работы наблюдатель не имеет возможности распределить все наблюдения примерно поровну на дневное и очное время, и по крайней мере на период двух суток, то при наблюдениях направлений заведомо неблагоприятных и при длинах сторон свыше 40 км следует соблюдать требование распределения наблюдений на дневное и очное время.

## § 65. Наблюдения световых сигналов и устройство гелиотропов и фонарей

На расстояниях, превосходящих 20 км, даже большие сигналы бывают хорошо видимыми лишь в течение коротких промежутков времени; особенно трудно наблюдать удаленные сигналы, проектирующиеся на землю или на лес: видимость таких сигналов нередко даже в течение исполнения одного приема наблюдений существенно изменяется, переходя от достаточной в начале приема к совсем плохой в середине его. Помимо плохой видимости, наблюдения визирных целей в виде визирных цилиндров, кубов и пр. приводят к ошибкам за фазы, ибо с перемещением Солнца перемещается и линия раздела света и тени на наблюдаемом предмете, вследствие чего наблюдатель будет намечать вертикальную ось симметрии наблюдаемой цели по разному в разные моменты наблюдений. Ошибка за фазыносит систематический характер и может достигать полусекунды на направление и больше. Наконец, при наблюдении предметных целей паведение трубы будет зависеть от общей симметрии тех знаков или сигналов, на которых укреплены цели, от изменяемости, часто значительной, вида этих знаков в связи с перемещами в их освещении, а также от вида того фона, на который проектируется наблюдаемый предмет. Все эти причины заставляют в современных первоклассных сетях наблюдать исключительно искусственные световые сигналы — отраженный от плоских зеркал солнечный свет (в солнечные дни), или искусственные источники света — ацетиленовые и электрические фонари, драммондов свет и пр. (ночью и днем); источник света помещается в фокусе сферических или параболических зеркал или линз достаточного диаметра и посыпается в направлении пункта наблюдений в виде слабо расходящегося пучка почти параллельных лучей. В обоих случаях при хороших условиях видимости световой сигнал отлично виден на десятки километров и представляется в трубе в виде яркой звезды 1-й величины, чрезвычайно удобной для точных паведений. Световые сигналы позволяют легко разыскивать весьма удаленные пункты наблюдений даже в трудных условиях видимости, исключают ошибки в опознавании наблюдаемых пунктов, а главное, в полной мере обеспечивают соблюдение существеннейшего требования для получения результатов высокой точности при измерениях горизонтальных углов, а именно, создают возможно большее однообразие условий паведения при наблюдении левого и правого предметов, направления на которые образуют измеряемый угол.

Прибор, служащий для наблюдения отраженного солнечного света на триангуляционных пунктах, называется гелиотропом. Гелиотроп был впервые предложен и применен на Гашоверской триангуляции в первой половине прошлого века знаменитым Гауссом. Гелиотроп Гаусса состоит из двух взаимно перпендикулярных зеркал (чертеж 243)  $BB'$  и  $C$ , вставленных в общую оправу; эта оправа имеет ось, проходящую через отверстия в вилке  $D$  и несущую на одном конце шайбу  $E$ ;



Черт. 243

вилка  $D$  составляет одно целое с кольцом  $R$ , которое надевается на объективный конец зрительной трубы  $F$ .

В описанном гелиотропе Гаусса должны быть соблюдены следующие требования: 1) ось  $AA$  общей оправы зеркал должна быть перпендикулярна к оси трубы  $F$ ; 2) обе половины большого зеркала  $BB'$  должны иметь параллельные плоскости; 3) плоскости зеркал должны быть параллельны оси  $AA$  вращения их оправы; 4) плоскости зеркал  $BB'$  и  $C$  должны быть взаимно перпендикулярны.

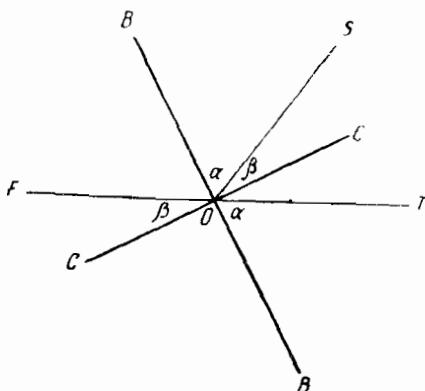
Пусть на черт. 244:  $BB'$  — большое зеркало гелиотропа, отражающее солнечный луч  $SO$  по направлению  $OT$ ;  $CC$  — малое зеркало гелиотропа, отражающее луч  $SO$  по направлению  $OF$ . Вследствие того, что угол  $BOC$  равен  $90^\circ$ , имеем  $\alpha = 90^\circ - \beta$ ; угол  $SOF = 180^\circ - 2\beta$ ; угол  $SOT = 2\beta$ . Другими словами, сумма углов  $SOT$  и  $SOF$  равна  $180^\circ$ , т. е. направления  $OT$  и  $OF$  принадлежат одной прямой. Отсюда следует, что если в пункте  $N$  (тригонометрическом сигнале) который плохо виден из  $M$ , установить гелиотроп и, направив трубу его на  $M$ , вращением зеркал добиться того, чтобы центр отраженного от малого зеркала  $CC$  солнечного луча пришелся бы на оси трубы, то в этот момент солнечные лучи будут отражаться от большого зеркала  $BB'$  как раз по направлению  $NM$  на пункт  $M$ , и потому это последнее зеркало

будет видно из  $M$  в виде ярко светящейся точки. Вследствие суточного движения Солнца направление отраженных от зеркала  $BB'$  лучей будет непрерывно изменяться, и поэтому гелиотропист должен время от времени изменять положение зеркал. При пользовании гелиотропом сперва направляют трубу на  $M$ , затем, вращая кольцо  $R$  вместе с вилкой  $D$ , добиваются того, чтобы тень от шайбы  $E$  представилась в виде линии: в этот момент Солнце будет находиться в плоскости шайбы  $E$ , т. е. ось общей оправы зеркал будет перпендикулярна к плоскости  $SOF$ , содержащей ось  $OF$  (черт. 244) трубы гелиотропа и проходящей через солнце  $S$ , и, следовательно, плоскости зеркал будут в этот момент перпендикулярны к плоскости  $SOF$ ; после указанной установки кольца  $R$  и вместе с ним оси вращения зеркал, вращают около этой оси зеркала до тех пор, пока не совместят изображение солнца с серединой поля зрения трубы гелиотропа.

Черт. 244

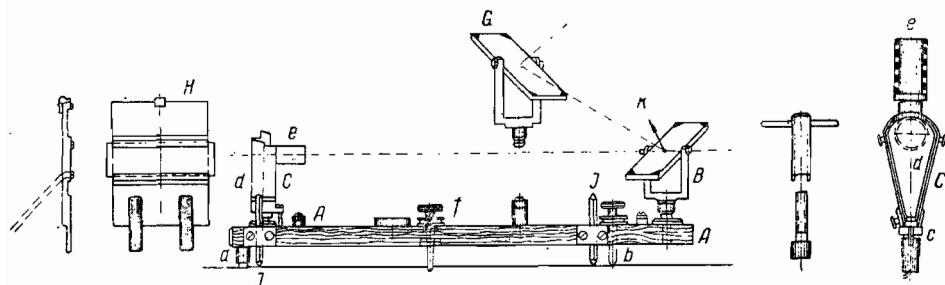
длящей через солнце  $S$ , и, следовательно, плоскости зеркал будут в этот момент перпендикулярны к плоскости  $SOF$ ; после указанной установки кольца  $R$  и вместе с ним оси вращения зеркал, вращают около этой оси зеркала до тех пор, пока не совместят изображение солнца с серединой поля зрения трубы гелиотропа.

В СССР используются гелиотропами, имеющими такое устройство (черт. 245): к дубовой доске  $AA$  прикреплен небольшой целик  $C$  с сеткой питет  $d$  и полой трубочкой  $e$ , в дне которой имеется небольшое круглое отверстие; трубочка эта может откликаться вверх. На другом конце доски имеется зеркало  $B$  с небольшим отверстием  $k$  в его середине. Зеркало может поворачиваться около двух взаимно перпендикулярных осей; в середине доски  $AA$  помещается зажимной винт — шуруп  $f$ , которым прибор пришивается в центре столика сигнала. Стержни  $JJ$  служат для предварительного направления гелиотропа на пункт наблюдений. Эта первоначальная установка поверяется затем визированием через отверстие  $k$  и сетку питет целика  $C$ , причем трубочка  $e$  открыты



Черт. 244

вается. По установке гелиотропа трубочка *e* ставится в нормальное положение, зеркало поворачивается и ставится так, чтобы «зайчик» от солнца освещал дно трубочки и чтобы черное пятнышко от отверстия *k* заняло бы в трубочке центральное положение (центр пятна примерно совпадал бы с отверстием в дне трубочки *e*). Гелиотрописту приходится время от времени посматривать внугрь трубочки *i*, как только это темное пятно (от отверстия *k*) уйдет в край дна трубочки, поправлять положение зеркала. Винт *b* служит для установки гелиотропа по высоте. В передней части прибора имеются пазы для рамы *H*, в которую могут



Черт. 245

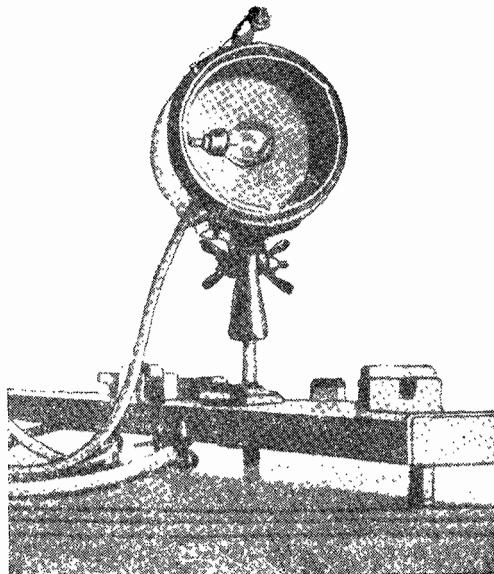
вставляться диафрагмы для регулирования силы света гелиотропа, а также цветные стекла для сигнализации. Правда, на больших расстояниях трудно различать световые сигналы разных цветов, а потому для сигнализации пользуются обычным белым светом, применяя условные знаки, или ведут переговоры по азбуке Морзе. Если солнце находится позади, то пользуются добавочным зеркалом *G*, которое укрепляют на перилах сигнала.

Правильное положение гелиотропа на столике сигнала фиксируется обводом на доске столика оснований стержней *JJ*. Свет гелиотропа может быть виден на расстоянии до 100 км и больше.

Ночью наблюдения в первоклассных триангуляциях ведутся на фонари. Первоначально у нас употреблялись ацетиленовые фонари (в некоторых странах они употребляются до сих пор), но они оказались мало практическими, так как требуют большого ухода за собой, особенно в ветреную погоду (часто копят, требуют чистки стекол и пр.). По этой причине у нас перешли к электрическим фонарям. На черт. 246 изображен употребляющийся в настоящее время на работах ГУГК МВД электрический фонарь «Люкас»; в фокусе металлического зеркала, питаемом в 10 см, помещена 4-вольтовая электрическая лампочка, питающаяся элементами; отражаясь от зеркала, лучи света проходят через переднее плоско-параллельное зеркало фонаря и выходят из него в виде пучка почти параллельных лучей, слегка расходящихся (под углом от  $\frac{1}{2}$  до 1 градуса), который и направляется на пункт наблюдений. Фонарь устанавливается на доске гелиотропа вместо зеркала *B* (черт. 245) так, чтобы трубочка *e* переднего целика *C* находилась на продольной оси пучка лучей фонаря; очевидно, фокус зеркала должен находиться па прямой, соединяющей отверстие *k* в зеркале *B* с отверстием в трубочке *e*. Для выполнения этих условий в нескольких метрах впереди от гелиотропа выставляют экран и так устанавливают фонарь, чтобы тень, отбрасы-

ваемая трубочкой *e*, приходилась в центре освещенного на экране круга; если это условие будет выполнено для двух разных положений экрана, например, при установке его в 5 и в 10 м от гелиотрона, то фонарь, очевидно, установлен правильно.

Видимость света фонаря, даже очень сильного, в высокой степени зависит от состояния атмосферы. При благоприятных условиях свет описанного выше фонаря можно наблюдать на расстоянии до 35—40 км. При больших расстояниях ставят 6-вольтовую лампу.

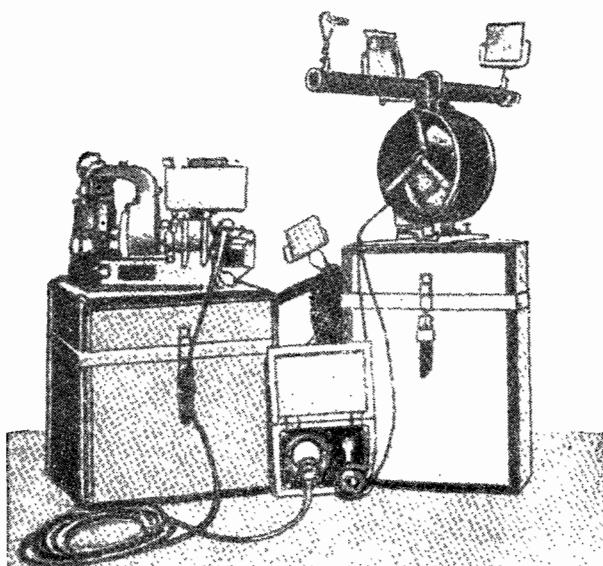


Черт. 246

В Германии до самого последнего времени пользовались днем гелиогонами описанного выше устройства, а ночью и в облачные дни — электрическими фонарями Цейсса. В этих фонарях 6-вольтовая электрическая лампочка, питаемая сухими элементами, помещается в фокусе параболического зеркала, имеющего диаметр в 250 мм. Свет фонаря Цейсса днем в облачную погоду виден на расстоянии до 30 км, ночью — еще дальше. Для больших расстояний применялся друммондов свет: электрическая лампочка заменялась меловой пластинкой, раскалявшейся в пламени кислорода или ацетилена; такой свет днем был виден на расстоянии до 50 км и ночью до 100 км. В настоящее время в Германии при наблюдениях в триангуляции I класса пользуются комбинированным прибором Пинча, изображенным на черт. 247. В фокусе параболического зеркала, диаметром в 200 мм, помещена 12-вольтовая (50 ватт) электрическая лампочка, питаемая небольшой динамомашиной, вращаемой мотором Бенца; с оправой фонаря связана небольшая труба, служащая для установки фонаря в нужном направлении; на теле трубы установлен в свою очередь гелиогон обычного устройства; очевидно, визирная ось трубы и оси гелиогонов должны быть параллельны друг другу. Фонарь Пинча оказался даже сильнее фонаря Цейсса с друммондовым

светом и позволяет в переменную погоду легко заменять свет гелиотропа светом фонаря и наоборот.

В США, Канаде, Швеции употребляют (но не всегда) световые сигнальные фонари-автоматы, в которых специальный часовой механизм включает и выключает свет в нужные часы, т. е. в часы наблюдений. В шведском фонаре, сконструированном в 1938 г., 2,5-вольтовая лампочка помещается в фокусе 110-мм параболического зеркала; питается она аккумуляторами, работающими без перезарядки 5 недель, при 5--6 часах работы в день (2 часа перед заходом солнца и 3-4 часа -- после захода его); общий вес прибора с аккумуляторами 27 кг. Свет такого фонаря виден на 30-40 км днем и свыше 50 км ночью. Для ориентировки фонаря с его телом связана визирная труба, имеющая 4-кратное увеличение.

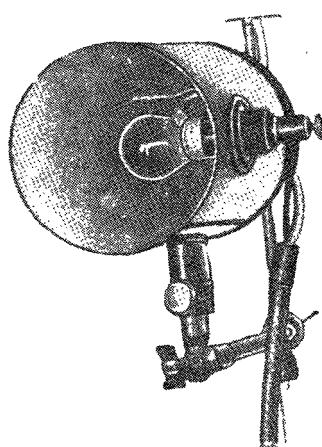


Черт. 247

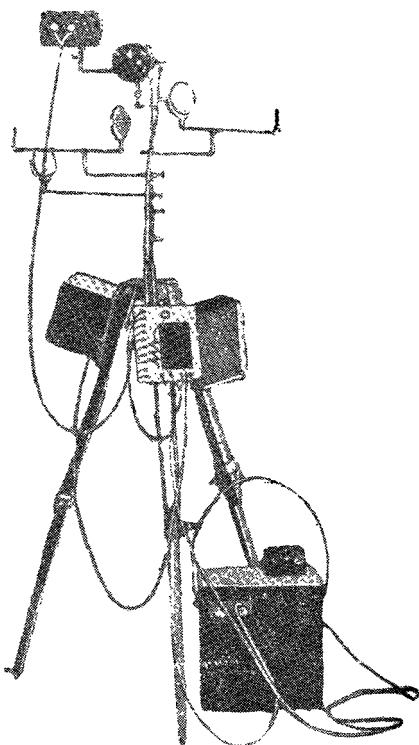
Интересную особенность представляет световой сигнальный прибор, впервые примененный датчанами на своих работах в Гренландии в 1936 г. Это электрический фонарь (черт. 248), с диаметром параболического зеркала всего 70 м.м и 6-вольтовой лампой, питаемой аккумуляторами; он имеет ту особенность, что в целях увеличения продолжительности работы аккумулятора свет, помошь часовому механизма, подается прерывисто: 4 секунды свет и 8 секунд перерыв; благодаря этому аккумуляторы дают 12 часов непрерывной работы. Несколько фонарей и гелиотропов могут одновременно устанавливаться на общей штанге, укрепленной на легком штативе, как показано на черт. 249. Общий вес 2 фонарей, 2 гелиотропов, штатива, аккумулятора и остальной аппаратуры — 19,4 кг; переносится все это одним человеком в заплечном мешке. При испытаниях в Дании свет фонаря был хорошо виден в полдень солнечного дня на расстоянии 40 км; в Гренландии брались расстояния до 100 км. Новые фонари стали применяться и в

самой Дании, так как прерывистый свет исключает возможность перепутать наблюдавшееся направление<sup>1</sup>.

Свет гелиотропа днем как правило имеет лучшую видимость, чем свет фонаря ночью. Только в редких случаях свет фонаря ночью представляется в виде яркой звезды; в большинстве случаев это тусклое пятно; если оно представляется сильно расширенным и имеющим размытые, неправильные очертания, то наблюдения становятся невозможными. Интересно отметить, что в наших средних широтах наблюдения после часа ночи редко удаются из-за предутренних туманов; наоборот, на юге почные наблюдения возможны только после часа ночи, так как в первой половине ночи изображения слишком колеблются. Не только колебания изображений, но и слабая видимость световых сигналов препятствуют иногда наблюдениям, так как последние становятся слишком неуверенными. При очень слабом свете полезно ослабить освещение сетки нитей, чтобы наблюдавший светосигнал стал виден сильнее. Во всяком случае вопрос, когда можно вести наблюдения и когда их следует прекратить, очень сложен и требует от наблюдателя большой опыта.



Черт. 248



Черт. 249

Следует иметь в виду, что наблюдения световых сигналов требуют значительных дополнительных расходов. В очень трудных горных районах, где гелиотропист на ряде пунктов не может быть снабжен водой и топливом, иногда и на триангуляциях первого класса отказываются от наблюдения световых сигналов. В этих случаях наблюдают предметные цели, но обязательно плоские, в виде, например, двух плоских перекресящихся щитов, укрепленных взаимно перпендикулярно, симметрично относительно отвесной линии в наблюдавшей

<sup>1</sup> Некоторые опыты по наблюдениям прерывистого света были выполнены в СССР еще в 1931 г.

точке. Подобные случаи имели место в работах англичан в Индии. При таком устройстве предметных целей ошибки за фазы малы.

При пользовании световыми сигналами должна быть тщательно продумана схема последовательного перемещения гелиотропистов и наблюдателей и хорошо налажена связь между ними также помостью световой сигнализации.

В тех редких случаях, когда приходится наблюдать на расстояния очень значительные (например, при переброске триангуляции через Гибралтарский пролив на 250 км), световые сигналы посылают особо сильными лампами специального устройства типа прожекторов.

### § 66. Методика высокоточных угловых измерений

На примере измерения только одного угла рассмотрим сначала основные принципы современных угловых измерений точными угломерными приборами. Пусть при некоторой точке *C* нужно измерить угол между направлениями на предметы *A* и *B*, считая его от левой руки к правой. Будем иметь также в виду, что в современных первоклассных триангуляциях применяются только неповторительные теодолиты, основания к чему будут приведены в § 67. После того, как теодолит отьюстирован и процентрирован над точкой *C*, т. е. установлен так, что центр лимба находится на одной отвесной прямой с точкой *C* и приведен в горизонтальное положение, поступают так: 1) при данном положении лимба визируют на левый предмет *A* и отсчитывают все имеющиеся при горизонтальном круге верньеры или микроскопы; 2) освободив зажимной винт алидады, врашают алидаду по ходу часовой стрелки (лимб остается при этом неподвижным), визируют на правый предмет *B* и отсчитывают все верньеры или микроскопы; 3) переводят трубу через зенит; 4) при неподвижном лимбе визируют последовательно на предметы *B* и *A*, врашая алидаду против хода часовой стрелки и отсчитывая после каждого наведения трубы все верньеры или микроскопы (следует иметь в виду, что отсчеты по верньерам или микроскопам нужно делать во всех случаях в один и том же порядке, например, микроскоп *A*, микроскоп *B*).

Действия, указанные в пунктах 1 и 2, составляют первый полу прием, в пунктах 3 и 4 — второй полу прием; оба полу приема образуют вместе один прием измерения угла. Как мы видим, в данном способе измерения угла полу приемы одного и того же приема различаются между собой тем, что предметы наблюдаются в обратном порядке, и алидада вращается при этом (ее грубое движение) в противоположных направлениях. В целях большей компенсации случайных ошибок и для ослабления влияния периодических ошибок делений круга на окончательный результат угол измеряется всегда несколькими приемами (например, в первоклассных сетях 10, 12 или 16 приемами), причем при переходе от приема к приему лимб представляется на угол

$$\sigma = \frac{360^\circ}{n \cdot m}, \quad (263)$$

где *n* — число верньеров или микроскопов, *m* — число приемов.

Обычно в первом приеме отсчет на начальный предмет (в данном случае на *A*) делают близким к  $0^\circ$ , тогда отсчет на *A* во втором приеме

будет около  $\sigma^\circ$ , в третьем — около  $2\sigma^\circ$  и т. д. Чтобы в неповторительном теодолите установить в данном приеме лимб в надлежащее положение, необходимо: провизировать на начальный предмет  $A$  и, закрепив алидаду и освободив лимб, вращением последнего установить лимб в положение, при котором отсчет по первому микроскопу будет иметь требуемую величину, после чего лимб закрепляется в этом положении.

Описанный выше порядок действий в приеме, распространяемый и на наблюдения нескольких (более двух) направлений в приеме, основывается на следующих соображениях.

1. Перевод трубы через зенит между полуприемами имеет своим назначением: во-первых, получить в среднем из двух полуприемов выводы, свободные от влияния коллимационной ошибки трубы и от влияния вицентренности трубы (нужно, впрочем, иметь в виду уже сказанное в § 61, что в условиях триангуляции I класса влияние коллимационной ошибки на угол, измеряемый полуприемом, выражается вообще тысячными долями секунды); во-вторых, иметь в результате исполнения приема ряд наблюдений, в котором проведена симметрия в расположении частей инструмента относительно каждого взятого направления, в целях компенсации в той или другой степени влияния упругих напряжений и деформаций, возникающих в инструменте благодаря неполной симметрии его частей и различия их расположения относительно солнца, ветра и пр.; в третьих, собрать материал для суждения о постоянстве коллимационной ошибки и, следовательно, о точности наблюдений. Назовем через  $R_m$  и  $L_m$  значения направлений на предмет  $M$ , полученные из полуприемов при круге право и при круге лево соответственно; будем считать зенитное расстояние предмета  $M$  равным  $90^\circ$ . Очевидно, разности

$$L_m - R_m = 2c,$$

равные двойной коллимационной ошибке, будут иметь некоторый «ход», обусловленный изменениями температуры инструмента на протяжении приема и упругими последействиями, появляющимися в связи с упругими напряжениями, возникающими в частях теодолита в процессе работы им. Однако, колебания  $2c$  в приеме не должны выходить из известных пределов, обусловленных точностью и качеством инструмента. Так, в двухсекунднике, употребляющемся у нас на триангуляциях I класса, колебания  $2c$  в приеме не должны выходить из пределов  $6''$ , в пятисекунднике, применяемом в сетях II класса, и в большом теодолите Вильда — из пределов  $8''$ , в десятисекунднике — из пределов  $15''$ , в малом теодолите Вильда — из пределов  $12''$ .

2. Обратный порядок последовательности наблюдаемых предметов во втором полуприеме по сравнению с порядком последовательности в первом полуприеме имеет целью расположить наведения на каждый из наблюдаемых предметов симметрично во времени относительно среднего момента приема. Очевидно, если в прием входит больше двух направлений, то указанное условие можно выполнить только вращением алидады во втором полуприеме в направлении, обратном тому, которое она имела в первом полуприеме. Такая симметрия во времени приводит почти к полному постоянству для всех величин  $\frac{R+L}{2}$ , выведенных из некоторого приема, тех погрешностей, которые в

$\frac{R+L}{2}$  обусловливаются причинами, действующими примерно пропорционально времени. К таким причинам можно отнести: 1) изменения в относительном расположении частей инструмента, происходящие с течением времени вследствие переноса температуры воздуха («ход» визирной оси главной и поверительной труб, «ход» микроскопов и пр.); впрочем только часть этих изменений может быть представлена линейной функцией времени, так как вообще они совершаются не непрерывно; 2) кручение сигнала, обусловленное ходом температуры воздуха и непосредственным нагреванием частей сигнала лучами солнца, приводящее к непрерывному азимутальному вращению горизонтального круга инструмента (как известно, днем с повышением температуры болванка внутриней пирамиды, несущая столик для инструмента, вращается в одном направлении; спустя час-два после момента наступления максимума дневной температуры и ночью болванка начинает вращаться в обратном направлении; наибольшая скорость кручения достигает 1—2° в минуту). Очевидно, указанные погрешности можно принимать изменяющимися пропорционально времени, да и то лишь в некоторой их части и только в течение небольшого промежутка времени. Влияние их в приеме будет значительно ослабленным по сравнению с каждым из полуприемов только при условии малой продолжительности приема и симметричного расположения в нем наблюдений во времени.

Прием, в котором один из полуприемов слишком затянулся, например, из-за ожидания появления светового сигнала, не может дать хороших результатов и должен быть отброшен.

Помимо рассмотренных источников погрешностей нужно считаться с явлением так называемого увлечения лимба алидадой при вращении последней. Увлечение это происходит в том же направлении, в каком вращается алидада, и вызывается разными причинами: или в силу непосредственного соприкосновения трущихся поверхностей оси алидады и втулки лимбовой оси, как это имеет место в теодолитах с системой осей по Рейхенбаху, или вращение алидады может приводить к азимутальному сдвигу подставки, несущей теодолит (трегера с подъемными винтами), а эта последняя перемещает уже с собой лимб, как это имеет место в теодолитах с системами осей Борда, Репольда и цилиндрических. Азимутальные сдвиги подставки теодолита, связанные с вращением алидады, происходят, во-первых, в силу гнутья подставки (трегера) при вращении алидады, во-вторых, вследствие всегда имеющего место некоторого весьма малого люфта подъемных винтов подставки в их матках. При анализе влияния обеих причин на азимутальные сдвиги лимба следует различать два случая.

*Первый случай.* При визировании на первый предмет в каждом полуприеме алидада вращается грубым движением в направлении, обратном последующему движению алидады в полуприеме.

Пусть в первом полуприеме при визировании на левый предмет *A* алидада вращалась грубым движением справа налево, и немедленно вслед за визированием на этот предмет были сделаны отсчеты по лимбу. В силу гнутья подставки теодолита при вращении алидады справа налево, лимб получит некоторое азимутальное перенесение влево, но с того момента, как грубое движение алидады остановлено, верхняя часть инструмента вместе с подставкой и лимбом, в силу упругого последействия подставки теодолита, начнет перемещаться в обратном направлении — слева направо; поэтому за небольшой промежуток вре-

мени между моментом визирования на предмет  $A$  и средним моментом отсчетов по обоим микроскопам или верньерам визирная ось трубы теодолита отойдет от предмета  $A$  слегка вправо, и потому средний отсчет  $a$  на предмет  $A$  будет несколько преувеличен. Далее поворачиваем алидаду вправо и визируем на правый предмет  $B$ ; в силу гнущия подставки лимб слегка отойдет вправо, что приведет к некоторому преуменьшению отсчета  $b$  на предмет  $B$ . Как только грубое движение алидады остановлено, она в силу упругого последействия подставки теодолита начнет попятное движение, а потому в промежуток времени между моментом визирования на предмет  $B$  и средним моментом отсчетов по микроскопам или верньерам визирная ось трубы отойдет от предмета  $B$  влево, а сделанный отсчет  $b$  окажется еще преуменьшился на некоторую дополнительную величину. Так как измеряемый угол равен разности отсчетов  $b - a$ , в которой уменьшаемое  $b$  слегка преуменьшено, а вычитаемое  $a$  — преувеличено, то величина угла в полу приеме в силу первой причины — гнущия подставки теодолита — будет слегка преуменьшена.

Вторая причина — увлечение лимба алидадой, благодаря некоторому люфту в подъемных винтах подставки, — также приведет к сдвигу лимба вправо при визировании на предмет  $B$  и к преуменьшению отсчета  $b$ , т. е. обе причины приводят к преуменьшению величины угла из первого полу приема.

Аналогичным путем можно легко показать, что движением алидады во втором полу приеме в обратном направлении ошибки за увлечение лимба, вопреки встречающемуся мнению, ни в какой мере не компенсируются: во второй полу приеме она войдет с тем же знаком, и среднее из обоих полу приемов будет несколько преуменьшено. Действительно, располагая во втором полу приеме все действия в обратном порядке и сообщая грубым движениям алидады обратные направления, мы добиваемся того, что рассмотренные выше ошибки в первом и втором направлениях во втором полу приеме изменяют знаки на обратные, но зато первым направлением во втором полу приеме становится предмет  $B$ , а вторым — предмет  $A$ , а так как угол в полу приеме нопрежнему равен отсчету  $b$  на предмет  $B$  минус отсчет  $a$  на предмет  $A$ , то разность отсчетов  $b - a$  опять оказывается преуменьшеною на некоторую величину, и компенсации ошибки за увлечение лимба алидадой в приеме мы не имеем.

Рассмотренные выше ошибки за увлечение лимба алидадой, вообще говоря, невелики и не превышают обычно немногих десятых долей секунды, но в некоторых инструментах имеют довольно заметную величину: так, в  $10''$  теодолитах с системой осей Рейхенбаха и в больших теодолитах Вильда со старой системой цилиндрической оси ошибка за увлечение лимба при описанном способе измерения угла может достигать величины  $1''$  и даже несколько более. Но в исправных теодолитах с системой осей Ренольда указанная ошибка экспериментально никем еще не обнаружена и является, повидимому, пренебрегаемо малой величиной (второго порядка), если вести измерение углов со всеми необходимыми предосторожностями.

*Второй случай.* При визировании на оба предмета, образующие угол, алидада вращается грубым движением в каждом полу приеме только в одном направлении.

Из предыдущего изложения видно, что влияние ошибки увлечения лимба на отсчет зависит от направления грубого движения алидады

ири визировании на предмет, соответствующий отсчету. Очевидно, эта ошибка получит некоторую компенсацию в полуприеме при измерении угла лишь при условии, что визирование на оба предмета в каждом полуприеме исполняется грубым движением алидады только в одном каком-либо направлении, т. е. при соблюдении принципа полного однообразия при наведении на каждый предмет. При этом условии, очевидно, увлечение лимба, связанное с люфтом подъемных винтов, в величину измеряемого угла совсем не войдет, а увлечение лимба, зависящее от гнутья подставки теодолита, войдет в каждый полуприем в виде разности соответственных ошибок в направлениях, образующих угол. Эта разность может быть как положительной, так и отрицательной.

Следовательно, во втором случае ошибка за увлечение лимба алидадой перестает влиять систематически на величину измеряемого угла и в среднем из полуприемов и присмов хорошо компенсируется.

Остановимся подробнее на сдвиге лимба, вызываемом гнутьем подставки теодолита. Легко видеть, что главная часть сдвига лимба падает на первый момент вращения алидады, когда нужно преодолеть сцепление трущихся поверхностей оси или блоксы алидады и соответственной втулки или цапфы подставки; когда это сцепление преодолено, алидада вращается сравнительно легко и вызывает небольшой уже дополнительный сдвиг лимба, являющийся некоторой функцией угла поворота алидады. Таким образом, величина азимутального сдвига лимба зависит от силы трения алидады при ее вращении и от величины угла, на который алидада была повернута грубым движением перед наведением на данный предмет. Сила трения алидады в разных азимутах ее вращения не есть величина постоянная; это еще более осложняет картину рассматриваемого явления. С другой стороны, величина указанного ранее сдвига алидады, имеющего место по окончании наведения на предмет, — сдвига, являющегося результатом упругого последействия и вызывающего дополнительную ошибку в направлении, — зависит от величины упругого последействия, т. е. от предшествующего грубого движения алидады, и от величины промежутка времени между моментом визирования на предмет и средним моментом отсчетов по микроскопам или верньерам.

В силу указанных причин ошибки за увлечение лимба в направлениях, образующих угол, даже при полном однообразии всех действий при визировании на левый и правый предметы, не будут одинаковы и в разности направлений не исключаются. Очевидно, ошибки за увлечение лимба получат в приеме более полную компенсацию в том случае, если во втором полуприеме измерять не данный угол  $\alpha$ , а его дополнение  $\beta$  до  $360^\circ$ , вращая алидаду в том же направлении, что и в первом полуприеме (например, слева направо), и визируя сначала на правый предмет  $B$ , а потом на левый  $A$ ; величина угла  $\alpha$  из второго полуприема будет искажена в этом случае примерно на ту же величину, но с противоположным знаком, и в среднем из обоих полуприемов получится лучшая компенсация. Этот способ измерения отдельных углов и нужно рекомендовать при работе теодолитами с затрудненным вращением алидады. В современных теодолитах с системой осей Репсольда ошибки за увлечение лимба алидадой, как указывалось выше, совершенно ничтожны, и потому угол можно измерять обычным образом, вращая алидаду в полуприемах в противоположных направлениях, но только необходимо, для большего однообразия условий наведения на левый и правый предметы, начиная полуприем, отвести сначала алидаду на

40°—50° в направлении, обратном последующему движению алидады в данном полуприеме, а потом уже, достаточно (хотя и очень немного) выждав, начинать полуприем.

В силу изложенных соображений измерение угла теодолитом с затрудненным вращением алидады, например, большим теодолитом Вильда или теодолитом с системой осей Рейхенбаха или Борда, должно исполняться с соблюдением следующих правил, которые мы назовем *правилами № 1*.

1. Провизировав на левый предмет *A* (приближенно), устанавливают (и закрепляют) лимб в положение, при котором отсчет по первому верньеру или микроскопу близок к 0°.

2. Дав несколько свободных оборотов алидаде по ходу часовой стрелки, визируют на левый предмет *A* и делают отсчеты по верньерам или микроскопам.

3. Далее, вращая алидаду вправо (по ходу часовой стрелки), визируют на правый предмет *B* и делают отсчеты по верньерам или микроскопам. На этом первый полуприем заканчивается. Если при визировании трубы была грубым движением переведена через правый предмет, то алидаду следует повернуть на 360° (по ходу часовой стрелки) и вновь повторить наведение на тот же предмет.

4. Переводят трубу через зенит.

5. Вращая алидаду только вправо, наводят трубу на правый предмет *B* и делают отсчеты; далее поворачивают алидаду опять по ходу часовой стрелки, визируют на левый предмет *A* и вновь делают отсчеты по верньерам или микроскопам. На этом заканчивается второй полуприем первого приема.

Переходя к следующему приему, переставляют лимб на 9 градусов так, чтобы отсчет по первому верньеру или микроскопу был равен примерно 9°, затем вращением алидады на полный оборот вправо наводят трубу на левый предмет *A*, делают отсчеты, вращают алидаду вправо, наводят трубу на правый предмет *B*, делают отсчеты и т. д.

Особенность описанного метода измерения угла, как мы видим, в том, что алидада всегда вращается только в одном направлении — в данном случае по ходу часовой стрелки; обратных движений алидады ни при каких условиях не допускается. Легко видеть, что компенсация всех источников погрешностей здесь достигается в такой же мере, как и в описанном в начале этого параграфа обычном способе, но, кроме того, достаточно полно исключается и систематическая ошибка за увлечение лимба.

Необходимо теперь остановиться еще на том, как именно выполняются окончательные наведения трубы.

Приочных наблюдениях слабо видимых световых сигналов, а также при дневных наблюдениях визирных цилиндров геодезических знаков в основных рядах II класса (в исключительных случаях и в триангуляции I класса) замечается такое явление: слабое изображение фонаря или визирного цилиндра, достаточно, однако, видимое, пока оно находится в боковых частях поля зрения, становится почти исчезающим, как только наблюдатель введет его в середину между вертикальными пятыми, держа одновременно изображение на горизонтальной нити (или ставя его одновременно на середину между двумя близкими горизонтальными пятыми, если таковые имеются). Это явление происходит от того, что резкое изображение пяты по сравнению со слабым изображением предмета поглощает полностью внимание глаза. Приочных

наблюдениях удается иногда регулированием освещения сетки нитей добиться надлежащей видимости предмета. Если это не удается, или наблюдения ведутся днем, то поступают так: по наведении трубы грубым движением алилады па предмет, устанавливают наводящим винтом трубы горизонтальную пить или биссектор горизонтальных нитей немного выше или немного ниже светового сигнала или верхушки визирной цели сигнала с тем, чтобы во втором полуприеме предмет устанавливать совершенно так же и по ту же сторону горизонтальной пити или биссектора горизонтальных нитей. При окончательном наведении, т. е. при наведении биссектора вертикальных нитей на наблюдаемый объект, движение наводящего винта алилады заканчивают непременно в винчивании его.

Наводящий винт, прежде чем сообщить алиладе поступательное движение, должен преодолеть ее инерцию и инерцию вращающихся вместе с ней: трубы, подставок горизонтальной оси, вертикального круга и пр.; другими словами, действие наводящего винта непременно сопровождается некоторым, хотя и весьма незначительным, гнутием алилады. Гнутие частей инструмента обязательно сопровождается упругими последействиями, приводящими к ошибкам в направлениях. Лучший способ ослабить их влияние, это стремиться к полному однобразию во всех операциях по наведению трубы па предмет.

В теодолитах старого устройства, в которых диаметр алиладного круга был от 15 до 18 дюймов, а соединение алилады с лимбом выполнялось посредством клемм, гнутие алилады при вращении наводящего ее винта влияло очень ощутительно па отсчеты по верньерам. Так, в опытах В. Я. Струве это влияние гнутия алилады на отсчет по верньеру достигало иногда 8''. Для исключения этого влияния гнутия алилады В. Я. Струве делал два непосредственно следующие друг за другом наведения трубы на каждый предмет: после грубого наведения и закрепления зажимного винта алилады делалось первое наведение, ввинчивая наводящий винт, после чего следовало отсчитывание лимба; затем ввинчиванием наводящего винта вертикальные пити склонялись с предмета, и непосредственно вслед за этим делалось вторичное наведение нитей. ввинчивая наводящий винт, и вторичное отсчитывание лимба.

В современных инструментах с устройством осей по системе Рейхенбаха или Борда, вследствие совершенного изготовления этих инструментов, гнутие алиладного круга при вращении наводящего винта алилады очень мало; влияние его невозможно обнаружить, как это делал Струве, из непосредственно следующих друг за другом наведений трубы на один и тот же предмет, исполняемых ввинчиванием и вывинчиванием наводящего винта алилады, и самое гнутие происходит по сложному закону, при котором вряд ли можно надеяться па исключение его влияния применением вышеуказанного приема Струве двойных наведений. Так как, с другой стороны, наведение трубы, сделанное вывинчиванием наводящего винта алилады, почти всегда расстраивается за время последующего отсчитывания лимба (потому что при вывинчивании винта алилада движется под действием пружины, противодействующей наводящему винту при его ввинчивании и преодолевающей инерцию алилады немгновенно), то и принимают за правило все наведения трубы, как уже было указано, заканчивать только ввинчиванием винта, полагая, что однообразие выполнения

окончательных наведений трубы на разные предметы обеспечивает в известной степени постоянство погрешности, обусловленной в каждом из направлений на эти предметы гибкостью алидады. Должно еще отметить, что при наблюдениях на пунктах триангуляции I и II классов теперь употребляют почти исключительно теодолиты с Репсольдовской системой осей; вращение алидады в них столь совершенно, что в этих теодолитах вряд ли вообще можно говорить о гибкости алидадной части инструмента при действии наводящим винтом алидады; однако, нужно иметь в виду, что в больших инструментах боковое гибкое алидады и трубы всегда сопутствует вращению алидады, являясь его следствием; это обнаруживается передко тем, что спустя некоторое время после наведения трубы она смещается в ту сторону, в которую происходило движение алидады. Поэтому и в теодолитах с системой осей Репсольда вышеуказанные правила об окончательном движении наводящего винта при наведении на предмет ограничением его должно так же строго соблюдаться, как и в других случаях.

Полное однобразие при наведениях трубы на каждый из наблюдавших предметов является одним из основных принципов методики точных угловых наблюдений. Поэтому при измерении углов точными теодолитами нужно соблюдать следующие правила, которые мы назовем правилами № 2.

1. После установки лимба в надлежащее положение, в начале нового приема, нужно достаточно отвести алидаду (например, на  $40-50^\circ$ ) в стерену, противоположную последующему движению алидады в первом приеме, и, выждав некоторое время, после этого уже исполнять наведение на начальный (левый) предмет в первом полуприеме (так как в первом полуприеме алидада обычно вращается по ходу часовой стрелки, то отвести ее нужно влево — против хода часовой стрелки).

2. Самое наведение на предмет производится так: врачают алидаду грубым движением (только вправо в первом полуприеме и только влево во втором полуприеме) до тех пор, пока наблюдаемый предмет не появится в поле зрения трубы, и останавливают ее в таком положении, при котором для окончательного введения предмета в вертикальный биссектор сетки питет достаточно только небольшого ввинчивания наводящего винта алидады; после этого закрепляют алидаду и вводят предмет в вертикальный биссектор ввинчиванием наводящего винта алидады. Очевидно, грубое движение алидады должно быть прекращено тогда, когда видимое положение объекта наблюдений будет слегка влево от биссектора питет в обоих полуприемах.

3. Так как при описанном способе работы наводящий винт будет все время ввинчиваться, то через каждые один-два приема нужно этот винт вывинчивать и приводить в положение, при котором матка винта располагается примерно в середине парезанной его части, — это обеспечит наилучшую работу наводящего винта.

4. Начиная второй полуприем, нужно перевести трубу через зенит и выполнять наведение на правый предмет (начальный во втором полуприеме) вращением алидады в том направлении, в котором она будет вращаться во втором полуприеме (обычно влево).

5. Введение наблюдаемого объекта в биссектор должно исполняться ввинчиванием наводящего винта сразу, без повторных — отвода алидады вывинчиванием наводящего винта назад и нового наведения ввинчиванием его, что неизбежно нарушает однообразие влияния упру-

тих последствий на направление и приводит к менее точным результатам; у опытного наблюдателя соблюдение этого требования не вызывает затруднений.

6. Если труба грубым движением алилады переведена через наблюдавший объект, то не следует искать его попутным движением алилады, а нужно или начать соответственный полуприем сначала или повернуть алиладу на полный оборот вращением ее в том же направлении, в котором она перемещается в данном полуприеме, и установить вновь в нужном положении согласно указаниям п. 2.

7. Чтобы ускорить измерение и избежать случаев перевода трубы через наблюдавший объект, при наблюдениях на пунктах триангуляции I и II классов, где как правило наблюдаются отдаленные и плохо видимые объекты, установка трубы грубым движением алилады делается по отсчету на лимбе, заранее рассчитываемому журналистом. Для этого все предметы, подлежащие наблюдениям, перед началом измерений разыскиваются и фиксируются отсчетом по лимбу с точностью до минуты.

8. Не следует сильно закреплять зажимных винтов, так как это вызывает вредные упругие напряжения и гнутия в частях инструмента, ведущие к значительным упругим последствиям (не говоря уже о быстрой «сработке» нарезок винтов и маток); зажимной винт должен быть закреплен так, чтобы наблюдатель чувствовал, что винт схватил, но последующее открепление винта производилось бы без всяких усилий.

Дальнейшие указания и подробности по методике угловых наблюдений на пунктах опорной сети будут даны в последующих параграфах. Нужно помнить, что получить от данного инструмента всю точность, которую он может дать, сможет только опытный и вдумчивый наблюдатель, хорошо изучивший свой инструмент и тщательно применяющийся к его особенностям и умело использующий окружающие условия наблюдений — особенности сигнала, условия видимости и пр. Все тонкости методики работы не могут быть указаны даже в самой подробной инструкции. Чтобы «выбрать» в направлении полсекунды современным точным теодолитом, употребляющимся на первоклассных спорных сетях, нужно быть мастером своего дела. Лучшая школа для этого — опыт, наблюдательность, вдумчивое и критическое отношение к делу.

## § 67. Измерение углов способом повторения

При измерении этим способом угла между некоторыми предметами *A* и *B* поступают так:

1) при закреплении лимбе направляют трубу на левый предмет *A* и отсчитывают верньеры или микроскопы, получая, допустим, в среднем из этих отсчетов величину  $S_0$ ;

2) вращая при закрепленном лимбе алиладу по ходу часовой стрелки, наводят трубу на правый предмет *B*;

3) оставляя алиладу соединенной с лимбом в том положении, как это было при наведении на *B*, отпускают зажимной винт лимба, врашают лимб вместе с алиладой против хода часовой стрелки и наводят трубу движением лимба вторично на *A*;

4) оставляя лимб закрепленным в том положении, в каком он был при вторичном наведении трубы на *A*, врашают алиладу по ходу часовой стрелки и наводят трубу вторично на *B*;

5) имея алидаду соединенной с лимбом в том положении, какое было при вторичном визировании на  $B$ , вращением лимба против хода часовой стрелки направляют трубу в третий раз на  $A$ ;

6) при закрепленном лимбе вращением алидады по ходу часовой стрелки наводят трубу в третий раз на  $B$  и т. д., повторяя описанные действия  $n$  раз; после наведения трубы вращением алидады в  $n$ -ый раз на предмет  $B$  отсчитывают верньеры или микроскопы, получая, допустим, в среднем выводе из этих отсчетов величину  $S_n$ .

Очевидно, в рассматриваемом способе выполняется последовательно, начиная от диаметра  $S_0$ , откладывание измеряемого угла  $\alpha$  на лимбе столько раз, сколько было сделано повторений, т. е. сколько было сделано поворотов алидады при закрепленном лимбе, разделенных между собой поворотами лимба вместе с алидадой. При  $n$  повторениях будем иметь

$$\alpha = \frac{S_n - S_0}{n}. \quad (264)$$

Исполнив  $n$  повторений при одном положении трубы (например, при  $R$ ), что составляет первый полуприем, переводят ее через зенит и при положении  $L$  измеряют угол  $B\bar{O}A$ , дополняющий данный угол  $AOB$  до  $360^\circ$  (способ Гаусса), испытывая такое же число  $n$  повторений, как и в первом случае (при положении  $R$ ), причем во втором полуприеме правый предмет  $B$  является начальным, а левый  $L$  — конечным; при закрепленном лимбе алидада вращается все время по ходу часовой стрелки, от направления на  $B$  до направления на  $A$ ; алидада вместе с лимбом вращается все время против хода часовой стрелки, от направления на  $L$  до направления на  $B$ , т. е. в описанном способе Гаусса во втором полуприеме дополнение  $B\bar{O}A$  к данному углу  $AOB$  измеряется совершенно так же, как измеряется в первом полуприеме угол  $A\bar{O}B$ , только направление  $B$  стало начальным, а направление  $L$  — конечным.

Следует заметить, что в нашей практике имеет распространение другой способ измерения, в котором во втором полуприеме измеряется тот же угол  $AOB$ , что и в первом полуприеме, но направление на  $B$  принимается за начальное, направление на  $L$  — за конечное; алидада при закрепленном лимбе вращается против хода часовой стрелки, от  $B$  к  $A$ ; алидада вместе с лимбом вращается по ходу часовой стрелки, от  $A$  к  $B$ . Однако, как это будет показано ниже, способ этот не верен и не может быть рекомендован для применения.

Из (264) сразу видно, что влияние на определение  $\alpha$  погрешностей в  $S_0$  и  $S_n$ , обусловленных ошибками делений лимба и ошибками отсчетов по верньерам, может быть сделано как угодно мало, если угол измерять способом повторения, надлежит лишь брать достаточно большое число  $n$  повторений.

Назовем через  $m_v$  ошибку гизирования трубы, через  $m_0$  — ошибку в направлении, обусловленную ошибками отсчетов по всем верньерам. Очевидно, квадрат влияния ошибок отсчетов по верньерам на вывод угла  $\alpha$  равен  $\frac{2m_0^2}{n^2}$ ; с другой стороны, для получения  $S_n - S_0$  приходится выполнять  $2n$  визирований, и, следовательно, квадрат обусловленной ошибками визирований погрешности в  $\alpha$  равен  $\frac{2nm_v^2}{n^2}$ . Таким образом,

ошибка в  $a$ , обусловленная ошибками отсчетов и ошибками визирований, выразится при способе повторения так:

$$m_a^2 = \frac{2m_0^2}{n^2} + \frac{2nm_v^2}{n^2} = \frac{2}{n^2} (m_0^2 + nm_v^2). \quad (265)$$

Если угол  $\sigma$  измеряется  $n$  полуприемами описанным в § 66 способом, то ошибка  $m_\sigma$ , обусловленная также только ошибками отсчетов и ошибками визирований, будет равна:

$$m_\sigma^2 = \frac{2m_0^2}{n} + \frac{2m_v^2}{n} = \frac{2}{n} (m_0^2 + m_v^2). \quad (266)$$

Из сопоставления формул (265) и (266) следует, что если принять в расчет только ошибки отсчетов и визирований, то способ повторения будет, по сравнению со способом измерения отдельными приемами, тем более выгоден, чем более в данном инструменте ошибка отсчета по сравнению с ошибкой визирования.

Из изложенного до сих пор становится понятным, почему в конце XVII и в первой трети XIX столетий при измерениях углов на пунктах тригонометрической сети применяли исключительно способ повторения: ошибки делений на лимбах инструментов того времени были достаточно так малы, как в настоящее время, а с другой стороны, для отсчитывания кругов служили верньеры, а не микроскопы, и ошибка отсчета  $m_0$  была значительна по сравнению с ошибкой визирования  $m_v$ . В настоящее время способ повторения применяется только в опорных сетях низших классов, в тех случаях, когда под руками имеются мало точные теодолиты, например,  $10''$  или даже  $30''$ , а требуется измерить углы с большей точностью. При этом большие 3–4 повторений брать не следует, так как опыт показал, что дальнейшее увеличение числа повторений не приводит к повышению точности измерения угла. Лимб переставляется обычно не между приемами, а между полуприемами; следовательно, угол  $\sigma$  нерестановки лимба между полуприемами рассчитывается по формуле

$$\sigma = \frac{360^\circ}{2mn}, \quad (267)$$

где  $m$  — число приемов,  $n$  — число верньеров.

Чтобы установить в данном приеме лимб в нужное положение, поступают так: ставят вращением алидады первый верньер на нужный отсчет, закрепляют алидаду, освобождают зажимной винт лимба, вращением алидады вместе с лимбом визируют на начальный предмет  $A$  и закрепляют лимб; после этого открепляют зажимной винт алидады и начинают прием точным визированием на предмет  $A$ .

По причинам, указанным выше, в настоящее время в первоклассных сетях употребляются исключительно неповторительные теодолиты, обычно с системой осей Репсольда, и, таким образом, способ повторения совсем не применяется.

В основе способа повторений лежат, очевидно, два предположения: первое, — что при вращении алидады около ее оси в положении закрепленного лимба не происходит никаких изменений; второе, — что при вращении лимба вместе с алидадой относительное расположение этих частей инструмента остается неизменным. В действительности дело

обстоит так: 1) при вращении алидады при закрепленном лимбе в повторительных теодолитах (с системами осей Рейхенбаха или Борда) всегда происходит некоторое увлечение лимба алидадой, процесс которого достаточно был выяснен в § 66; 2) соединение алидады с лимбом не есть абсолютно твердое; при вращении алидады вместе с лимбом, благодаря инерции алидады, соединение лимба с алидадой несколько нарушается, и алидада в своем движении несколько отстает от вращения лимба, поворачиваясь на меньший угол: отсюда возникает так называемая ошибка способа повторения.

По исследованиям германских геодезистов отставание алидады от лимба при совместном вращении их в состоянии взаимного закрепления выражается несколькими секундами — в среднем 1—2", но не более 5". Из § 66 следует, что влияние как ошибки за увлечение лимба, так и ошибки способа повторения не изменяет своего знака с изменением направления движения, а потому компенсация этих влияний получается (каждого порознь) только при измерении угла способом Гаусса. Действительно, пусть в первом полуприеме  $R$  мы измеряем угол  $AOB$ , и начальный отсчет на предмет  $A$  будет  $S_0^R$ , а конечный на предмет  $B$ , сделанный после  $n$  повторений, будет  $S_n^R$ .

При каждом вращении алидады при закрепленном лимбе по ходу часовой стрелки от  $A$  к  $B$  лимб будет несколько смещаться в ту же сторону, а потому конечный отсчет  $S_n^R$  будет преумножен на некоторую величину  $\varepsilon_1^R$ , т. е. отсчет  $S_n^R$  должен быть исправлен поправкой за увлечение лимба  $+\varepsilon_1^R$ . С другой стороны, при каждом вращении лимба вместе с алидадой против хода часовой стрелки, от  $B$  к  $A$ , алидада будет слегка отставать от движения лимба, что приведет к некоторому увеличению отсчета  $S_n^R$  на величину  $\varepsilon_2^R$  — ошибки за способ повторения. Поэтому правильный конечный отсчет на  $B$ , после  $n$  повторений, будет равен  $S_n^R + \varepsilon_1^R - \varepsilon_2^R$ , а величина угла  $\alpha$  из первого полуприема  $R$  будет равна

$$\alpha = \frac{(S_n^R + \varepsilon_1^R - \varepsilon_2^R) - S_0^R}{n} = \alpha_R + \frac{1}{n} (\varepsilon_1^R - \varepsilon_2^R),$$

где

$$\alpha_R = \frac{S_n^R - S_0^R}{n}.$$

Во втором полуприеме  $L$  мы измеряем угол  $BOA$ , принимая за начальное направление на  $B$  и производя вращение алидады при закреплении лимба и вращение лимба вместе с алидадой в тех же направлениях, что и в первом полуприеме. Называя начальный отсчет на  $B$  через  $S_0^L$  и конечный отсчет на  $A$  после  $n$  повторений через  $S_n^L$ , называя также ошибки в отсчете  $S_n^L$  за увлечение лимба и за способ повторения соответственно через  $\varepsilon_1^L$  и  $\varepsilon_2^L$ , будем иметь, что исправленный отсчет на  $A$  равен  $S_n^L + \varepsilon_1^L - \varepsilon_2^L$ , а величина  $\alpha$  угла  $AOB$  из второго полуприема равна

$$\alpha = \frac{S_0^L - (S_n^L + \varepsilon_1^L - \varepsilon_2^L)}{n} = \alpha_L - \frac{1}{n} (\varepsilon_1^L - \varepsilon_2^L),$$

где

$$\alpha_L = \frac{S_0^L - S_n^L}{n}.$$

Следовательно, величина угла  $\alpha$  из приема равна

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_R + \alpha_L) + \frac{1}{2n} \left[ (\varepsilon_1^R - \varepsilon_1^L) - (\varepsilon_2^R - \varepsilon_2^L) \right]. \quad (268)$$

Анализ формулы (268) приводит к следующим выводам: 1) в способе Гаусса каждая из рассматриваемых систематических ошибок в той или другой степени компенсируется; 2) так как постоянные части ошибок  $\varepsilon_1^R$  и  $\varepsilon_1^L$  за увлечение лимба вообще близки между собой, а переменные их части, являющиеся функциями углов  $AOB$  и дополняющих их до  $360^\circ$  углов  $BOA$ , малы по сравнению с постоянными частями, то разность  $\varepsilon_1^R - \varepsilon_1^L$  также мала, т. е. ошибки за увлечение лимба получают хорошую компенсацию; 3) то же самое можно сказать и про ошибки  $\varepsilon_2^R - \varepsilon_2^L$  способа повторения; 4) не следует забывать, что от увеличения числа  $n$  повторений влияние систематических ошибок нисколько не уменьшается, так как  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в (268) являются суммами  $n$  раз повторенных систематических ошибок в  $n$  повторениях.

Как видно из изложенного, влияние систематических ошибок за увлечение лимба и за способ повторения — в способе повторения по Гауссу — существенно ослабляется.

В инструментах, употребляемых в настоящее время для измерения углов на пунктах I и II классов, ошибки делений кругов весьма малы, и влияние их исключается почти совершенно в среднем выводе из измерений, исполненных на симметрично расположенных по всей окружности частях лимба; с другой стороны, в этих же инструментах, вследствие употребления микроскоп-микрометров, ошибка отсчета  $m_0$  менее ошибки наведения трубы  $m_0$ . Отсюда вытекает, что преимущества способа повторения совершенно исчезают при употреблении тех инструментов, которыми в настоящее время измеряются углы на пунктах I и II классов; если же принять еще в расчет не вполне исключающееся при любом числе повторений влияние дополнительной ошибки — ошибки способа повторения, то приходится прийти к заключению, что в триангуляции I класса способ повторения не следует применять совсем. При наблюдениях в сетях III-IV классов, где часто пользуются теодолитами с кругами, отсчитываемыми при помощи десятисекундных и тридцатисекундных вертышей, применение способа повторения вполне уместно, но с соблюдением правила Гаусса.

## § 68. Способы направлений и круговых приемов

Обычно на пункте триангуляции нужно наблюдать более двух направлений на смежные пункты, углы между которыми требуется измерить. Задачу эту в триангуляции I класса приходится ставить так, чтобы результат измерения и уравнивания углов на станции представился в виде одного ряда направлений, имеющих все один и тот же вес. Тогда углы, образованные комбинацией любой пары направлений, также получают один и тот же вес, равный половине веса направлений. Такой ряд направлений имеет то существенное достоинство, что может быть при уравнивании сети рассматриваем, как ряд непосредственно наблюденных направлений, к которым и отыскивают вскрайнейшие поправки; благодаря этому уравнивание направлений на станциях отделяется от уравнивания сети в целом, чем

решение последней задачи, сохраняя полную свою строгость, чрезвычайно упрощается (см. § 74 и 79).

Наиболее простым способом наблюдений, разрешающим поставленную задачу, является способ направлений, состоящий в том, что при закрепленном лимбе труба последовательно наводится на все предметы движением, например, по ходу часовой стрелки, и каждый раз делаются отсчеты по всем верньерам или микроскопам (первый полуприем); после этого труба переводится через зенит, наводится на те же предметы в обратном порядке, т. е. от последнего к первому, причем алидада вращается уже против хода часовой стрелки, и, конечно, при паведении трубы на каждый предмет вновь делаются отсчеты по всем верньерам или микроскопам. Если каждый полуприем заканчивается повторным наведением трубы на начальный предмет и вторичным отсчетом при этом по лимбу (вращая при этом алидаду в том же направлении, в каком она вращалась в данном полуприеме), т. е. производится так называемое замыкание горизонта, то такой частный случай способа направлений носит название способа круговых приемов. Остановимся подробнее именно на способе круговых приемов, который со временем Струве применялся почти исключительно в русских триангуляциях I класса до 1908 г. и применяется и применяется у нас в настоящее время в триангуляциях II и низших классов.

Пусть наблюдаемые с данной тригонометрической станции предметы, считая их от левой руки к правой, суть  $A, B, C, D, E$ . После надлежащего центрирования теодолита приводят в вертикальное положение ось вращения алидады и поступают далее так: 1) если теодолит имеет устройство осей по системе Репсольда, то направляют трубу на предмет  $A$  и, освободив лимб, вращают его до тех пор, пока нулевой штрих не совпадет с нульпунктом первого микроскопа, после чего лимб закрепляют; если же теодолит повторительный, т. е. имеет оси системы Рейхенбаха или Борда, то, установив нуль первого верньера или микроскопа на отсчет, близкий к  $0^{\circ}0'$ , закрепляют алидаду и движением лимба направляют трубу приблизительно на предмет  $A$ , после чего закрепляют лимб; 2) при закрепленном и неподвижном лимбе наводят трубу на предмет  $A$  (сперва отведя ее на  $40-50^{\circ}$  влево и затем вращая по ходу часовой стрелки) и отсчитывают все имеющиеся при горизонтальном круге верньеры или микроскопы (обычно два); 3) при неподвижном лимбе наводят трубу последовательно на все остальные предметы  $B, C, D, E$  и снова на начальный предмет  $A$ , вращая при этом алидаду непременно грубым движением только по ходу часовой стрелки и отсчитывая после каждого паведения все имеющиеся верньеры или микроскопы; 4) переводят трубу через зенит; 5) последовательно, при неподвижном лимбе, наводят трубу на предметы  $A, E, D, C, B$  и снова на начальный предмет  $A$ , вращая при этом алидаду грубым движением непременно только против хода часовой стрелки и отсчитывая после каждого паведения трубы все верньеры.

Действия, указанные в пунктах 1, 2 и 3, составляют первый полуприем, в котором предметы наблюдаются в последовательности  $A, B, C, D, E, A$ ; действия, указанные в пунктах 4 и 5, составляют второй полуприем, в котором предметы наблюдаются в обратном порядке, т. е. в последовательности  $A, E, D, C, B, A$ . Первый и второй полуприемы составляют вместе один прием. Таких

приемов в наших работах исполняют: 12 — при наблюдениях в сети I класса направлений на точки I же класса; 6 или 9 при наблюдениях в сети II класса точек II класса и при наблюдениях с точек I класса пунктов II класса; точки III класса наблюдаются с точек I и II классов 3 или 4 приемами; точно так же в триангуляциях III класса направления наблюдают 3 или 4 приемами. В иностранных государствах углы на пунктах триангуляции I класса измеряются: в США — 16 приемами, в Германии — 24 приемами и не меньше чем 10 приемами в Индии. При переходе от приема к приему делается перестановка лимба на угол  $\sigma$ , определяемый формулой (263), т. е. углы в разных приемах измеряются на различных симметрично расположенных местах лимба. Понятно, что такая перестановка лимба между приемами имеет целью исключить влияние систематических ошибок делений лимба на окончательный вывод направлений из *m* приемов; кроме того, в разных приемах при этом используются разные штрихи лимба, что ослабляет также и влияние случайных ошибок штрихов лимба.

Для способа круговых приемов, очевидно, характерным является, во-первых, наблюдение в приеме при одном положении лимба целого ряда направлений, число которых более двух, и, во-вторых, замыкание горизонта в конце каждого полуприема. Описанный выше порядок исполнения наблюдений в одном приеме вполне понятен из объяснений, приведенных в § 66. Наведение в конце каждого полуприема вновь на начальный предмет делается, чтобы убедиться в исподвижности лимба в течение полуприема, если при наблюдениях не пользуются наверительной трубой. При употреблении десятисекундных (с верньерами) теодолитов отличие друг от друга двух отсчетов на начальный предмет, полученных в начале и в конце полуприема, не должно превышать десяти секунд; при употреблении инструментов с микроскопом-микрометрами это отличие направлений на начальный предмет, взятых в начале и в конце полуприема, обычно не превосходит, при вполне устойчивом лимбе,  $3\text{--}4''$ . Ясно, что в способе круговых приемов нужно полностью соблюдать все правила, указанные в § 66 под названием правил № 2 для измерения отдельного угла точным теодолитом. При наблюдениях теодолитом с затрудненным вращением алидады нужно: 1) в каждом полуприеме обязательно замыкать горизонт; 2) вращать алидаду в каждом полуприеме только в одном направлении; 3) при переходе ко второму полуприему следует сначала дать алидаде несколько свободных оборотов в направлении ее последующего движения, а потом уже начинать второй полуприем; 4) чтобы уменьшить число таких свободных поворотов алидады и тем самым ускорить работу, следует первый полуприем каждого нового приема выполнять вращением алидады в том же направлении, в котором она поворачивалась во втором полуприеме предшествующего приема: например, если первый прием заканчивался вращением алидады против хода часовой стрелки, то второй прием следует начинать вращением алидады также против хода часовой стрелки, — тогда холостое вращение алидады будет иметь место только между полуприемами одного и того же приема; 5) соблюдаются правила наведения на предмет, указанные в § 66. При работе теодолитом с системой осей Репсольда необходимо перед наведением на начальный предмет в полуприеме отвести алидаду от требуемого положения на  $40\text{--}50^\circ$  в сторону, противоположную направлению последующего движения алидады в полуприеме, а потом уже выполнять наведение на начальный предмет, —

этим будет обеспечено полное однобразие паведений на каждый из наблюдаемых предметов.

Прежде чем приступить к наблюдениям, необходимо: 1) достичь полной устойчивости подставки инструмента и защитить его от непосредственного согревания лучами солнца; 2) разыскать все подлежащие наблюдению с данной станции сигналы и предметы; 3) составить программу наблюдений.

Не следует жалеть времени и средств для достижения полной устойчивости инструмента. На пунктах I класса при наблюдениях с земли инструмент ставится как правило на прочном каменном или бетонном столбе; если пункт расположен не на остроколечной вершине, то высота столба должна быть около 6–8 м. Если в исключительном случае приходится на пункте I класса вести наблюдения с земли на штативе, то необходимо под ножки штатива инструмента предварительно врыть отрезки бревен около 60 см длиной и диаметром около 12 см. На этих бревнах и укрепляются концы ножек штатива, причем желательно, чтобы эти концы имели вид или плоскости или ресбра, но не острия. Дерн кругом ножек должен быть снят, а для ходьбы наблюдателей должны быть настланы доски, причем не прямо на землю, а на небольшие подкладки. На точках II и III классов, при хорошем грунте, можно допускать взамен установки на бревнах врить ножек штатива в землю на глубину около 30 см, при обязательном снятии дерна и при настиле досок для наблюдателя.

При наблюдениях на колокольнях с каменного пола следует после подлежащей установки ножек штатива в специально устроенных углублениях соединить их концы с камнями пола посредством алебастра. Если на колокольце пол деревянный, а каменный подоконник слишком узок для установки инструмента, то надлежит построить особый помост для инструмента из бревен, которые концами были бы вделаны в стены колокольни, причем придется построить совершенно изолированный от первого помоста легкий второй помост для наблюдателя.

При наблюдениях с двойных пирамид и, в особенности, с сигналов, необходимо заблаговременно убедиться в надлежащей прочности скрепления столика с внутренней болванкой и самой этой болванки с ногами внутренней пирамиды.

Для успеха исполнения наблюдений на большие расстояния необходимо иметь с собой комплект гелиотропов и фонарей. Для подъема инструментов на сигналы надлежит иметь два блока и два каната: один — длиной в 80—100 м и другой — в 40—50 м; второй канат служит для оттягивания ящика с инструментом и предохранения его при подъемах и спусках от ударов о бревна сигнала; необходимо также иметь запас гвоздей, тоноры, сверла, пилу и лопату, а также брезенты.

Вместо того чтобы защищать инструмент от солнца зонтом, держать который на сигнале очень неудобно, надлежит пользоваться особы устроеными палатками (так называемые «верховые» палатки), которые прикрепляют к основным столбам сигнала и устанавливают над платформой для наблюдателя. Заблаговременно, до наблюдений полы палатки должны быть приподняты, чтобы вокруг инструмента была свободная вентиляция воздуха. Палатка защищает инструмент также и от ветра, так как под воздействием ветра средней силы в инструменте возникают вредные боковые гнущия, приводящие к систематическим ошибкам в направлениях, доходящим иногда до 2—3''. При отсутствии палатки теодолит защищается от солнца или ветра брезентом. Палатка

служит также для затенения фонаря при дневных наблюдениях в пасмурные дни.

До выезда на место работ триангулятор должен собрать исчерпывающие сведения о том, на какой фон будут проектироваться сигналы (на небо, на землю или на лес), какие меры приняты строителем для улучшения видимости сигналов (окраска, насадка на болванку добавочных цилиндров и т. п.), какие вообще условия видимости и остальные условия в районе работ (климат, дороги, транспорт и пр.); знание этих условий позволит правильно наметить наилучшее время и порядок наблюдений на пунктах.

Разыскание подлежащих наблюдениям сигналов производится при помощи чертежа сети и таблицы направлений, составленных при рекогносировке и постройке знаков, и при помощи карты местности, на которой строителями знаков отмечены вершины сети; при этом разысканий надлежит хорошо запомнить те места горизонта, на которые проектируются наблюдаемые сигналы, и измерить до минуты углы между этими предметами. В тех случаях, когда разыскать сигнал очень трудно, с него приходится посыпать на станцию свет гелиографа.

Составление программы наблюдений имеет целью дать расписание предметов, наблюдаемых в подлежащей последовательности в разных приемах, вместе с указанием отсчетов, на которые должна ставиться алидада при наблюдениях разных предметов в разных приемах. Очень часто с данного пункта бывает нужно взять направления на тригонометрические пункты разных классов. Если при составлении сети I класса является нужным наблюдать, кроме пунктов I класса, еще пункты II класса и постоянные местные предметы, причем последние либо войдут в сеть III класса, либо будут определены в качестве уединенных точек, то на данном пункте I класса следует наблюдать сперва соответственным числом приемов только точки I класса, а затем — в отдельной группе приемов — только точки II и III классов и одну точку I класса (при привязке основных рядов II класса к сети I класса в группе направлений на пункты II класса обязательно наблюдаются два пункта I класса). При наблюдениях на пунктах II и III классов можно допускать наблюдение с данной станции в одной серии приемов предметов разных классов. Очевидно, если предметы разных классов наблюдаются вместе, в одной серии приемов, то предметы низших классов должны быть пропускаемы в некоторых из этих приемов, делая, однако, пропуски в определенной системе. Так, если вместе с пунктами II класса, для которых  $m = 6$ , наблюдают еще пункты III класса, для которых  $m = 3$ , то эти пункты III класса должны быть наблюдаемы или только в приемах с нечетными номерами (1, 3, 5) или только в приемах с четными номерами (2, 4, 6). За начальный предмет следует брать знак с постоянной хорошей видимостью. Правильно составленная программа устраняет, во-первых, возможность пропусков в наблюдениях и возможность нарушений порядка последовательности наблюдений, а во-вторых, обеспечивает удобство выполнения требования относительно вращения алидады грубым движением лишь в определенном направлении.

В триангуляции I класса и в основных рядах триангуляции II класса на каждом пункте результат наблюдений основных предметов должен выражаться одним рядом равноточных направлений, потому что только тогда угол между двумя любыми направлениями, наблюдавшимися в качестве основных с данного пункта, будет иметь постоянный вес. Указанное требование должно на пунктах I класса

осуществляться возможно строго; отступления от него можно допускать собственно только в триангуляции II класса. Но чтобы выполнить это требование, необходимо на данном пункте от наблюдать все основные направления в одной группе полных приемов, т. е. наблюдая в каждом из подлежащих выполнению приемов все пункты I класса, которые должно взять с данного пункта I класса (или все пункты II класса, подлежащие наблюдению с пункта основного ряда II класса). Приходится поэтому прежде всего требовать, чтобы при постройке геодезических сигналов на пунктах I класса и в основных рядах II класса обеспечивалась бы возможность взять все основные направления при одном положении инструмента на столике сигнала, т. е. сигнал должен быть так ориентирован, чтобы ноги его не мешали визировать по всем основным направлениям. Далее, при наблюдениях на пунктах I класса следует стремиться в каждом приеме наблюдать все пункты I класса. Так как число их обычно 4—5, то исполнение наблюдений в одной группе полных приемов не представило бы затруднений при одновременной достаточной видимости всех пунктов I класса.

Хотя в современных работах на триангуляции I класса наблюдают почти исключительно световые сигналы: гелиотропы — днем, фонари — в пасмурные дни и почью, но обычно по тем направлениям, где луч проходит близ почвы или идет над заболоченными лесными массивами, свет гелиотропа можно наблюдать не каждый солнечный вечер, да и то в течение какого-нибудь получаса, так как по таким направлениям свет гелиотропа представляется в трубу неправильным, расплывчатым или слишком широким диском. Ночью над лесом или заболоченной низиной свет фонаря может быть поглощен туманом; наблюдения фонарей могут быть невозможны из-за ветра, при котором свет фонаря иногда кажется в трубу кидающимся из стороны в сторону. Наконец, недочеты в организации подачи световых сигналов нередко бывают причиной того, что свет с того или другого пункта не подается на станцию.

Если наблюдают предметные цели, то приходится иметь в виду, что удаленные на 25—40 км геодезические сигналы видны достаточно отчетливо далеко не всегда даже в вечернее время благоприятных изображений. Нередко за данный вечер имеется видимость не на все пункты I класса; иногда видимость сигналов, проектирующихся на землю или на лес, открывается на самое непродолжительное время, часто видимость таких сигналов сильно изменяется и из достаточной в начале приема становится исчезающей в середине его. Видимость сигналов (предметных целей) сильно зависит от освещенности их солнцем: так, утром в солнечный день сигналы, расположенные на западе и освещенные солнцем, видны хорошо, а сигналы, расположенные на востоке, видны плохо.

Все указанные причины могут вызвать крайние затруднения в применении в сетях I класса способа круговых приемов или способа направлений в чистом его виде, и привести к необходимости пребывания наблюдателя на одном пункте в течение недели и более. Если условия работы вынудили наблюдать неполными приемами или разбить предметы на две группы, то на пунктах I класса нужно, руководясь изложенными в последующих главах правилами, провести такую программу наблюдений, при которой результат обработки собранного материала представлялся в виде серии углов  $X, Y, Z, V \dots$ , отсчитываемых от некоторого начального (нулевого) направления, веса которых возможно мало отличались бы друг от друга и от весов углов

$Y - X, Z - X, V - X, Z - Y, V - Y, V - Z$ . Например, если при наблюдении предметов  $A, B, C, D$  удалось наблюдать в каждом из восьми приемов все эти предметы, а в четырех приемах наблюдали только три предмета  $A, C$  и  $D$ , то надлежит исполнить: четыре приема, наблюдая угол между  $A$  и  $B$ ; четыре приема, наблюдая угол между  $B$  и  $C$  и четыре приема, наблюдая угол между  $B$  и  $D$ . Если назовем через  $X$  угол между  $A$  и  $B$ , через  $Y$  — угол между  $A$  и  $C$ , через  $Z$  — угол между  $A$  и  $D$ , то, принимая за единицу веса наблюдение направления в одном приеме, будем иметь такие веса окончательно выведенных углов:

$$P_X = 7,6; \quad P_Y = 7; \quad P_Z = 7; \quad P_{Y-X} = P_{Z-X} = 7,6; \quad P_{Z-Y} = 7.$$

Все эти трудности проведения наблюдений в одной группе полных приемов привели во многих странах к отказу от применения в триангуляциях I класса способа направлений, или круговых приемов, и к замене его другими способами, описанными в следующем параграфе. В частности у нас, где условия для наблюдений в сетях I класса особенно трудны, с 1908 г. стал применяться способ Шрейбера.

В триангуляциях II и низших классов способ круговых приемов остается господствующим. Здесь пропущенные наблюдения того или иного предмета в тех или иных приемах восполняют, наблюдая дополнительно направление на пропущенный сигнал вместе с одним или двумя смежными направлениями, образующими с пропущенным направлением необходимые для построения треугольников сети углы, или же разбивают предметы на группы и наблюдают предметы каждой группы тем или иным числом полных приемов. Разбивка направлений на группы вызывается обычно двумя причинами: 1) условиями видимости, почему, например, предметы, расположенные на западе, относят в одну группу, расположенные на востоке — в другую; 2) большим числом подлежащих наблюдению с данного пункта направлений; наблюдение всех направлений в одной группе сильно увеличило бы продолжительность приема и тем значительно понизило бы точность угловых измерений. Во всех случаях, когда выясняется неизбежность на пунктах II класса выполнять наблюдения неполными приемами и вести наблюдения в нескольких группах полных приемов, рекомендуется заранее (или по ходу дела) составлять программу наблюдений, основываясь на приведенных в § 78 (глава XI) правилах, вытекающих из расчета весов уравненных на станции углов.

В СССР для наблюдений в триангуляциях употребляют почти всегда теодолиты, снабженные поверительной трубой. Поверительная труба прочю и неизменно соединяется с лимбом на все время исполнения одного приема и наводится перед началом приема на хорошо видимый местный предмет, без фаз, находящийся в расстоянии от 1 до 3 км или на искусственную марку, устанавливаемую на расстоянии около 1 км. При каждом наведении главной трубы убеждаются одновременно в том, что поверительная труба остается направленной на избранный местный предмет или на марку. Если в течение приема при наведении главной трубы на некоторый сигнал  $N$  обнаруживается сдвиг поверительной трубы, то в теодолитах повторительных с устройством осей по системе Рейхенбаха или Борда, где поверительная труба связана непосредственно с лимбом и вращается вместе с последним, вновь наводят, действуя микрометренным винтом лимба, поверительную трубу на избранный для нее предмет, одновременно

исправляя, конечно, наведение главной трубы на сигнал  $N$ ; в теодолитах же неповторительных, с системой осей Репсольда, в которых поверительная труба прикрепляется к кольцу трегера инструмента, измеряют этот сдвиг поверительной трубы, пользуясь имеющимся при ней окулярным микрометром, и впоследствии вводят поправки за такие сдвиги в отсчеты, сделанные по лимбу, по правилам, указанным в § 51 и ниже в настоящем параграфе.

Наблюдения в поверительную трубу и наведения ее нитей на марку должны быть выполнены, как указывалось выше, одновременно с наведением главной трубы; поэтому при употреблении поверительной трубы следует наблюдения вести двумя наблюдателями: один из них наводит главную трубу, другой одновременно наводит нити окулярного микрометра поверительной трубы на марку, или же второй наблюдатель смотрит в поверительную трубу и, если обнаруживает ее сдвиг в момент, когда первый наблюдатель навел главную трубу, то микрометрным винтом лимба снова наводит поверительную трубу на марку и следит, остается ли это наведение не нарушенным при новой установке первым наблюдателем главной трубы.

В современных первоклассных триангуляциях в СССР применяют описанные в главе VII геодезические универсалы и теодолиты, в которых окулярный микрометр имеется и при главной и при поверительной трубе. При пользовании этими инструментами соблюдают следующий порядок действий при наблюдении какого-нибудь направления: устанавливают алидаду на заранее определенный до одной минуты отсчет по лимбу и ставят окулярный микрометр главной трубы на отсчет  $10^{+6}$  10 делений, считая в нульпункте этого микрометра 10 оборотов; затем, действуя наводящим винтом алидады, вводят предмет в середину между вертикальными нитями окулярного микрометра; после этого делают три раза под ряд наведения нитей окулярного микрометра главной трубы с отсчетами каждый раз барабана этого микрометра; одновременно помощник наблюдателя наводит три раза под ряд нити микрометра поверительной трубы на надлежащую устроенную и прочию укрепленную марку, — с отсчитыванием, конечно, каждый раз барабана микрометра поверительной трубы; наконец, сейчас же после трех наведений нитей микрометров главной и поверительной трубы, следует отсчитывание лимба по обоим микроскоп-микрометрам алидады. Поверительная труба заранее, до начала приема, устанавливается так, чтобы при наведениях на марку нити ее микрометра удалялись бы от нульпункта не более чем на 30 делений барабана.

Как известно, окулярный микрометр главной трубы служит для увеличения точности результатов наблюдений при слабой видимости или колебаниях изображений наблюдавших объектов: действительно, при одном и том же отсчете по лимбу, соответствующем установке трубы, можно повысить точность визирования трубой, сделав несколько наведений биссектора вертикальных нитей на предмет и взяв из них среднее. Исследования показывают, что в современных точных инструментах при визировании на резко очерченное и спокойное изображение предмета точность визирования одна и та же, будем ли мы пользоваться окулярным микрометром главной трубы или нет. Поэтому на практике при совершении спокойных и четких изображениях наблюдавших сигналов, при хорошей жесткости сигнала, на котором ведутся наблюдения, и при отсутствии ветра очень часто окулярным микрометром главной трубы не пользуются: в этом случае биссектор окулярного

микрометра ставят в нульpunktе его (например, точно на отсчет 10 обс-ротов) и работают при неподвижном биссекторе; очевидно, одновременно с наведением главной трубы ввинчиванием наводящего винта алиады помощник наблюдателя исполняет только однократное наведение биссектора поверительной трубы на соответствующую марку и делает отсчет по барабану окуляриного микрометра поверительной трубы.

При наблюдениях на пунктах в каждом приеме записывают: время начала и конца приема, условия погоды (ясно, пасмурно, ветер и пр.), качество изображений (спокойные, колебания слабые, средние, сильные), видимость (хорошая, средняя, плохая, очень плохая), все особые замечания (на полях журнала), характеризующие условия измерений приеме (задержки в работе, исчезновение светового сигнала, толчок и пр.); в триангуляциях I класса, кроме того, через каждые полчаса отмечают температуру, направление и скорость ветра (по анемометру), — все эти сведения могут быть полезны при окончательной сводке наблюдений на пункте, поскольку характеризуют большую или меньшую надежность отдельных приемов.

При обработке отдельного приема у нас принято из двух значений  $\frac{R+L}{2}$ , получаемых для начального направления вследствие замыкания каждого полуприема, брать среднее арифметическое и вычитанием его из остальных направлений получать направления в приеме, приведенные к нулю. Легко видеть, что при таком способе обработки наблюдений направление на начальный предмет будет иметь вес вдвое больший, чем веса остальных направлений, а потому средняя ошибка углов, образованных начальным направлением с каждым из остальных, будет примерно на 15% меньше, чем средняя ошибка углов, образованных любой парой направлений, не включающих начальное направление. Очевидно, принятый у нас способ обработки наблюдений выгоден только в триангуляциях младших классов, где начальное направление, обычно являющееся связующим для разных групп наблюдаемых предметов на станции, должно быть значительно более точным, чтобы иметь возможность уравнивание направлений на станции свести к простой сводке в одну таблицу направлений, приведенных к нулю в каждой из наблюдавшихся групп.

В триангуляциях высших классов такой способ обработки наблюдений, исполненных по способу круговых приемов, неудобен в том отношении, что даже для наблюдений, исполненных в одной группе полных приемов, приводит к неравноточности измеренных углов на станции. (Неудобство это отпадает, если за начальное брать направление на предмет, не входящий в группу наблюдаемых тригонометрических пунктов, или направление на специальную марку.)

Интересно посмотреть, как обрабатывают наблюдения, исполненные способом круговых приемов, в некоторых других странах. В США, например, замыкание горизонта делается только в целях контроля неизменности положения лимба, и вторичные отсчеты при наведении на начальный предмет в полуприеме в обработку не вводятся, — они просто отбрасываются. Во Франции ошибка замыкания горизонта, равная отсчету при вторичном наведении на начальный предмет без отсчета при первоначальном наведении, рассматривается как систематическая ошибка, пропорциональная времени, и распределяется поровну между углами, входящими в горизонт: так, если наблюдается

всего  $n$  направлений, включая и начальное, и ошибку замыкания горизонта обозначим через  $\Delta$ , то второе направление получит поправку  $-\frac{1}{n} \Delta$ ; третье —  $\frac{2}{n} \Delta$ ; четвертое —  $\Delta$  и т. д.;  $n$ -ое направление получит поправку  $-\frac{n-1}{n} \Delta$ .

В Германии и в Англии горизонт совсем не замыкается.

Если применяется поверительная труба, то замыкание горизонта в исстуризмах вообще излишне, так как без нужды удлиняют прием, а между тем поверительная труба и без того хорошо контролирует неизменность положения лимба.

Сделаем еще несколько замечаний относительно измерения углов. При работе теодолитами Вильда или Цейсса лимб необходимо освещать электричеством даже днем, так как в противном случае отсчеты по лимбу могут быть искажены систематическими ошибками до нескольких секунд; в разной мере, для освобождения результатов от эксцентризита барабана микрометра и периодических ошибок винта микрометра, барабан оптического микрометра нужно переставлять между приемами на  $\frac{1}{m}$  часть полного его оборота (здесь  $m$  — число приемов), т. е. так, чтобы отсчеты по барабану микрометра на начальное направление в разных приемах распределялись симметрично по шляпке барабана. Это же рекомендуется делать и в обычных теодолитах с микроскоп-микрометрами, о чем уже сказано в § 50.

В тех случаях, когда лимб имеет значительные случайные и периодические ошибки делений, полезно лимб переставлять симметрично не только между приемами, но и между полуприемами; тогда угол, на который лимб должен каждый раз переставляться, вместо формулы (263) будет определяться формулой

$$\sigma = \frac{180^\circ}{n \cdot m}.$$

Вопросы уравнивания направлений и углов на станциях (общий и частные случаи) разобраны в §§ 76—79 (глава XI).

Вопросы оценки точности результатов измерения углов или направлений способом круговых приемов разобраны в § 61 (по колебаниям коллимации) и в § 79 (по уклонениям результатов в приемах). Средняя ошибка направлений  $t_c$ , выводимая по колебаниям коллимации, при полной устойчивости лимба в течение приема и при условии сохранения в инструменте постоянства относительного расположения частей его, существующих оставаться в течение приема связанными неизменно, должна оказываться вообще меньшей, чем средняя ошибка направления  $t$ , выводимая по колебаниям результатов в приемах (§ 79), так как величина  $t$  включает в себя влияние ошибок делений лимба, тогда как величина  $t_c$  этого влияния совершенно не учитывает. Сопоставление  $t_c$  и  $t$  может приводить к интересным выводам относительно условий измерения направлений.

### § 69. Измерение отдельных углов по способу Шрейбера

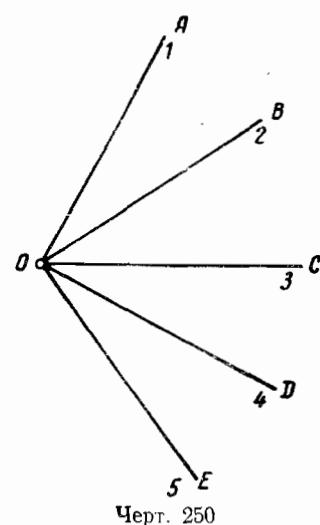
В предыдущем параграфе были указаны основные причины, препятствующие применению способа направлений или круговых приемов в триангуляциях I класса, особенно в трудных условиях видимости. Необходимость выжидать благоприятное время для измерений, когда

все наблюдаемые сигналы видны одновременно и достаточно хорошо, чтобы можно было наблюдать их в одной группе попарных приемов, в ряде случаев приводит к затягиванию наблюдений на пункте на очень продолжительные сроки. Невозможность таких выжиданий и связанные с ними значительная потеря времени приводят неизбежно к разрывке направлений на группы. Но тогда в результате работы на станции не могут быть получены углы одного веса, а это невозможно приводит в дальнейшем к отступлениям от строгого уравнивания сети. Именно, строгое вычисление сети в этом случае непланомерного собирания материала на станциях требует уравнивания сети по сложному способу Бесселя, что, однако, практически невыполнимо в сколько-нибудь значительных сетях. Отсюда видно, что применение способа круговых приемов передко ведет к необходимости, во-первых, выполнять добавочную работу по уравниванию направлений на станции и, во-вторых, отказываться от вполне строгого уравнивания сети, отделяя без основания нахождение поправок углов на станциях от нахождения поправок углов в сети (см. главу об уравнительных вычислениях в триангуляции).

Указанные причины заставляют передко в триангуляциях I класса обращаться к другим способам измерения углов, в которых в каждом отдельном приеме наблюдаются направления только на два предмета.

Нам надлежит остановиться на том порядке работы на станции при измерении отдельных углов, который был впервые применен еще в первой половине прошлого столетия Гауссом и который называется «измерением углов во всех комбинациях». Пусть (черт. 250) с данной станции  $O$  должны быть наблюдаемы сигналы  $A, B, C, D \dots$ , число которых пусть равно  $n$ . Припишем предметам  $A, B, C, D \dots$  соответственно номера  $1, 2, 3 \dots n$  и будем обозначать измеренную величину угла при  $O$  между предметами с номерами  $k$  и  $s$  символом  $(k, s)$ , считая угол от направления на  $K$  по ходу часовой стрелки. Допустим, что мы измерили на станции  $O$  углы

$$\left. \begin{array}{c} (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) \dots (1, n) \\ (2,3), (2,4), (2,5) \dots (2, n) \\ (3,4), (3,5) \dots (3, n) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (n-1, n) \end{array} \right\}, \quad (269)$$



Черт. 250

т. е. допустим, что мы измерили все углы, которые могут быть образованы на станции  $O$  при всевозможных комбинированных направлениях на предметы  $1, 2, 3, \dots n$  попарно: очевидно, что число таких углов будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , тогда как число необходимых для определения углов на станции равно  $n - 1$ . Порядок работы на станции, при котором каждый из  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов, представленных в (269), наблюдается от-

дельно и независимо от всех остальных углов определенным числом приемов, постоянным для всех этих углов, и носит название измерения отдельных углов во всех комбинациях; обычно полагают, что измерение всех углов, приведенных в (269), одним и тем же числом приемов приводит к равенству весов всех этих углов. Хотя углы  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,4), \dots (n-1, n)$  являются каждой разностью двух непосредственно наблюденных направлений, по погрешности  $v_{1,2}$ ,  $v_{1,3}$ ,  $v_{1,4}, \dots v_{n-1, n}$  этих углов, очевидно, независимы друг от друга, и поэтому при уравнивании на станции  $O$  можно рассматривать величины  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,4), \dots (n-1, n)$ , как непосредственно наблюденные.

Уравнивание на станции в случае измерения отдельных углов во всех комбинациях рассмотрим для  $n=5$  и введем в качестве неизвестных в это уравнивание углы  $\angle AOB$ ,  $\angle AOC$ ,  $\angle AOD$ ,  $\angle AOE$  (черт. 250), которые обозначим соответственно через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $V$ . Имеем, конечно, такие уравнения погрешностей (число которых равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ )

$$\begin{array}{l|l} X - (1,2) = v_{1,2} & Y - X - (2,3) = v_{2,3} \\ Y - (1,3) = v_{1,3} & Z - X - (2,4) = v_{2,4} \\ Z - (1,4) = v_{1,4} & V - X - (2,5) = v_{2,5} \\ \hline V - (1,5) = v_{1,5} & \\ \hline Z - Y - (3,4) = v_{3,4} & V - Z - (4,5) = v_{4,5} \\ V - Y - (3,5) = v_{3,5} & \end{array}$$

Нормальные уравнения напишутся так

$$\begin{aligned} 4X - Y - Z - V - (1,2) + (2,3) + (2,4) + (2,5) &= 0 \\ 4Y - X - Z - V - (1,3) - (2,3) + (3,4) + (3,5) &= 0 \\ 4Z - X - Y - V - (1,4) - (2,4) - (3,4) + (4,5) &= 0 \\ 4V - X - Y - Z - (1,5) - (2,5) - (3,5) - (4,5) &= 0 \end{aligned}$$

Вводя обозначение:  $\Sigma = X + Y + Z + V$ , эти нормальные уравнения перепишем так

$$\left. \begin{aligned} 5X - \Sigma - (1,2) + (2,3) + (2,4) + (2,5) &= 0 \\ 5Y - \Sigma - (1,3) - (2,3) + (3,4) + (3,5) &= 0 \\ 5Z - \Sigma - (1,4) - (2,4) - (3,4) + (4,5) &= 0 \\ 5V - \Sigma - (1,5) - (2,5) - (3,5) - (4,5) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (270)$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\Sigma = (1,2) + (1,3) + (1,4) + (1,5),$$

а подставляя это значение  $\Sigma$  в нормальные уравнения (270), получим

$$\begin{aligned} X &= \frac{2(1,2) + [(1,3) - (2,3)] + [(1,4) - (2,4)] + [(1,5) - (2,5)]}{5} \\ Y &= \frac{2(1,3) + [(1,4) - (3,4)] + [(1,5) - (3,5)] + [(1,2) + (2,3)]}{5} \\ Z &= \frac{2(1,4) + [(1,5) - (4,5)] + [(1,2) + (2,4)] + [(1,3) + (3,4)]}{5} \\ V &= \frac{2(1,5) + [(1,2) + (2,5)] + [(1,3) + (3,5)] + [(1,4) + (4,5)]}{5} \end{aligned}$$

В последних формулах совершенно ясно обнаруживается то общее правило, по которому должны быть вычисляемы углы  $X, Y, Z \dots$  в случае какого угодно числа  $n$  наблюдаемых на станции  $O$  предметов. В самом деле, называя вероятные значения углов, отсчитываемых от направления на первый предмет  $A$  по ходу часовой стрелки, через:

$$[1,2], [1,3], [1,4], [1,n].$$

напишем путем обобщения вышеполученных формул для  $X, Y, Z, V$ :

$$\left. \begin{aligned} n[1,2] &= 2(1,2) + [(1,3) - (2,3)] + [(1,4) \dots (2,4)] + \dots + \\ &\quad + [(1,n) - (2,n)] \\ n[1,3] &= 2(1,3) + [(1,4) - (3,4)] + [(1,5) - (3,5)] + \dots + \\ &\quad + [(1,n) - (3,n)] + [(1,2) + (2,3)] \\ n[1,4] &= 2(1,4) + [(1,5) - (4,5)] + [(1,6) - (4,6)] + \dots + \\ &\quad + [(1,n) - (4,n)] + [(1,2) + (2,4)] + [(1,3) + (3,4)] \\ &\quad \dots \dots \dots \\ n[1,k] &= 2(1,k) + [(1,k+1) - (k,k+1)] + [(1,k+2) - \\ &\quad - (k,k+2)] + \dots + [(1,n) - (k,n)] + [(1,2) + (2,k)] + \\ &\quad + [(1,3) + (3,k)] + \dots + [(1,k-1) + (k-1,k)] \end{aligned} \right\}. \quad (271)$$

Следовательно, при выводе уравненного угла  $[1,k]$  надо взять средину ио весам: 1) из непосредственно наблюденного значения этого угла  $(1,k)$ , приписывая ему вес два; 2) из тех значений этого же угла, из которых каждое получается как сумма или разность двух непосредственно измеренных углов из числа наблюденных на станции и показанных в (269), приписывая каждому такому производному значению угла  $(1,k)$ , вес, равный единице. Если каждый из углов, указанных в табличке (269), измерялся  $m$  приемами, то, приписывая вес, равный единице, результату измерения угла одним приемом очевидно, будем иметь вес любого угла из стоящих в левых частях формул (271), равным  $\frac{m+n}{2}$ . Таким образом, оказывается, что вес уравненных значений углов, получаемых на станции в результате измерения отдельных углов во всех комбинациях, зависит от числа  $n$  предметов, наблюдаемых на станции. Вводя для симметрии углы  $(1,1), (2,2), (3,3), \dots (n,n)$ , мы можем представить формулы (271) еще в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} [1,2] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \dots + (1,n)}{n} - \\ &\quad - \frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \dots + (2,n)}{n} \\ [1,3] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \dots + (1,n)}{n} - \\ &\quad - \frac{(3,1) + (3,2) + (3,3) + (3,4) + \dots + (3,n)}{n} \\ &\quad \dots \dots \dots \\ [1,k] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + \dots + (1,k-1) + (1,k) + \dots + (1,n)}{n} - \\ &\quad - \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,k-1) + (k,k) + \dots + (k,n)}{n} \end{aligned} \right\}, \quad (272)$$

причем понимается, что

$$(2,1) = -(1,2); \quad (k,2) = -(2,k) \dots$$

Формулы (272) позволяют написать, во-первых, общую формулу для угла  $[i,k]$ , именно

$$\begin{aligned} [i,k] &= \frac{(i,1) + (i,2) + (i,3) + \dots + (i,i) + (i,i+1) + \dots + (i,n)}{n} \\ &\quad - \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,k) + (k,k+1) + \dots + (k,n)}{n}, \end{aligned} \quad (273)$$

которая ясно показывает, что вес любого угла  $[i,k]$  будет также равен  $\frac{m \cdot n}{2}$ : во-вторых, если обозначить

$$\begin{aligned} \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + \dots + (1,n)}{n} &= I \\ \frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + \dots + (2,n)}{n} &= II \\ \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,n)}{n} &= K, \end{aligned}$$

то из формул (272) и (273) будет следовать, что

$$\begin{aligned} [1,2] &= II - I \\ [1,3] &= III - I \\ [2,3] &= III - II \end{aligned}$$

$$[i,k] = K - J.$$

Только в том случае, когда результат наблюдений на пункте представляется в виде одного ряда направлений, любой угол будет получаться как разность только двух наблюденных направлений; только в этом случае вес  $P_{ik}$  угла между направлениями  $i$  и  $k$  будет вычисляться по формуле

$$\frac{1}{P_{ik}} = \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P_k},$$

в которой  $P_i$  и  $P_k$  — веса уравненных направлений, образующих этот угол. При равенстве весов всех направлений, образующих один ряд на пункте, вес произвольного угла  $[i,k]$  будет постоянным, что и нужно иметь в триангуляции I класса. Очевидно, величины I, II, III ... K, ... N можно принять за тот ряд направлений, который получается в результате работ на станции при измерении углов во всех комбинациях (полное доказательство этого дано в § 78). Другими словами, измерение отдельных углов во всех комбинациях приводит к тому же результату, как если бы мы наблюдали предметы 1, 2, 3, ..., n способом круговых приемов в одной группе полных приемов. Если в ряде чисел I, II, III, ... N мы уменьшим каждое на величину I, то очевидно, что результат работы на станции при измерении отдельных углов во всех

комбинациях представится в виде одного ряда равноточных направлений, имеющих такие числовые значения:

$$0^{\circ} 0' 0'', 00, [1,2], [1,3], \dots [1,k], \dots [1,n].$$

Веса этих направлений будут равны  $m \cdot n$ . Любой угол  $[i, k]$ , получаемый как разность двух соответственных уравненных направлений, имеет вес  $\frac{m \cdot n}{2}$ .

Имея эти важные выводы по отношению к результату обработки измерения углов во всех комбинациях, перейдем теперь к способу Шрейбера. Способ Шрейбера есть, собственно, частный вид измерения отдельных углов во всех комбинациях. Выве было уже отмечено, что вес каждого окончательно выведенного на станции угла равен  $\frac{m \cdot n}{2}$ , т. е. оказывается, что вес вероятнейших значений углов, получаемых на станции в результате измерения отдельных углов во всех комбинациях, зависит от числа  $n$  предметов, наблюдаемых на станции. Для того, чтобы при применении на всех пунктах сети этого способа измерения углов веса окончательных углов, выведенных на разных станциях, были бы равны между собой, необходимо, очевидно, потребовать, как это и сделал Шрейбер, чтобы произведения  $m \cdot n$  для всех пунктов сети оставались постоянными. Следуя Шрейберу, надлежит для первоклассной сети, в которой собственно и есть резон применять его способ измерения углов, принять  $m \cdot n = 24$ . Другими словами, применяя способ Шрейбера, надлежит руководствоваться табл. 25.

При уравнивании на станции углов, измеренных во всех комбинациях, предполагалось, что погрешности углов

$$(1,2), \dots (1,k), \dots (i,k), \dots (i,n)$$

независимы между собой; на этом предположении независимости друг от друга величин  $v_{1,2}, v_{1,3}, \dots v_{1,k}, \dots, v_{i,k}, \dots, v_{i,n}$  и основано все уравнивание с целью определения значений уравненных углов

$$[1,2], [1,3], \dots [i,k].$$

Если принять в расчет, что при наблюдениях в благоприятных усло-

виях и при применении современных больших теодолитов часть средней ошибки в направлении, наблюденном в одном приеме, обусловленная ошибками визирования и отсчетов по микроскоп-микрометрам, является величиной почти одного порядка с остальной частью той же средней ошибки в направлении, обусловленной влиянием ошибок делений лимба, то величины  $v_{1,2}, v_{1,3}, \dots v_{1,k}, \dots, v_{i,n}$  можно считать действительно независимыми друг от друга только при условии, что штрихи лимба, которые отчитываются при измерении угла  $(i, k)$ , не совпадают со штрихами лимба, отчитываемыми при измерении всякого другого угла из числа стоящих в (269). Отсюда именно и вытекает второе требование, поставленное Шрейбера в его способе измерения, чтобы «всякое

Таблица 25

| Число $n$<br>предметов на<br>станции | Число приемов<br>измерения<br>каждого угла | Вес направлений<br>(уравненных) |
|--------------------------------------|--|---------------------------------|
| 2                                    | 12   | 24                              |
| 3                                    | 8  | 24                              |
| 4                                    | 6  | 24                              |
| 5                                    | 5  | 25                              |
| 6                                    | 4  | 24                              |
| 7                                    | 4  | 28                              |
| 8                                    | 3  | 24                              |

направление наблюдалось при одном и том же положении лимба только, по возможности, один раз».

Удовлетворить этому требованию можно, конечно, только при надлежаще обдуманной системе перестановок лимба. При некотором положении лимба из числа  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов, указанных в (269), можно определить или  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  не примыкающих друг к другу углов, при вычислении которых не возникает использования одного и того же отсчета лимба для вывода нескольких углов, т. е. при выводе которых каждый штрих лимба, из числа отсчитанных при измерении этих  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  углов, войдет в вычисление лишь одного такого угла; при этом число углов, равное  $\frac{n}{2}$ , соответствует четному  $n$ , а число углов  $\frac{n-1}{2}$  — нечетному  $n$ . Разбивая углы (269) на группы так, чтобы в каждую группу входило или  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  не примыкающих друг к другу углов, и чтобы разные группы не имели бы общих углов, мы, очевидно, из числа всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов можем образовать таких групп:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1, \text{ при } n \text{ четном,} \\ \frac{n(n-1)}{2} : \frac{n-1}{2} = n, \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{array} \right\} \quad (274)$$

и

Следовательно, если бы углы каждой группы измерялись одним приемом, то число перестановок лимба при измерении всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов было бы равно числу групп, указываемому формулами (274). Но каждый угол должен быть измерен  $m$  приемами, с перестановкой лимба между приемами на угол  $\sigma$ , равный при двух микроскопах для отсчитывания горизонтального круга  $\frac{360^\circ}{2m}$ . Следовательно, всех перестановок лимба необходимо будет сделать:  $m(n-1)$  при  $n$  четном и  $m \cdot n$  — при  $n$  нечетном. Понятно отсюда, что при переходе от измерения одной группы не примыкающих друг к другу углов к другой перестановка лимба должна совершаться на угол  $\delta$ , равный:

$$\left. \begin{array}{l} \delta = \frac{\sigma}{n-1} \text{ при } n \text{ четном} \\ \delta = \frac{\sigma}{n} \text{ при } n \text{ нечетном} \end{array} \right\} \quad (275)$$

Результаты всех указанных соображений представляются, следуя Шрейберу, табл. 26, 27 и 28, дающими отсчеты лимба по ориентировочному направлению, если принято, как это обычно делают в триангуляции I класса, что  $m = 24$ .

Таблица 26

 $n = 3; m = 8$ 

| Углы | П р и е м ы |       |      |       |      |        |       |        |
|------|-------------|-------|------|-------|------|--------|-------|--------|
|      | I           | II    | III  | IV    | V    | VI     | VII   | VIII   |
| 1,2  | 0°          | 22°,5 | 45°  | 67°,5 | 90°  | 112°,5 | 135°  | 157°,5 |
| 1,3  | 7,5         | 30    | 52,5 | 75    | 97,5 | 120    | 142,5 | 165    |
| 2,3  | 15          | 37,5  | 60   | 82,5  | 105  | 127,5  | 150   | 172,5  |

Таблица 27

 $n = 4; m = 6$ 

| Углы | П р и е м ы |     |     |     |      |      |
|------|-------------|-----|-----|-----|------|------|
|      | I           | II  | III | IV  | V    | VI   |
| 1,2  | 0°          | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° |
| 1,3  | 10          | 40  | 70  | 100 | 130  | 160  |
| 1,4  | 20          | 50  | 80  | 110 | 140  | 170  |
| 2,3  | 20          | 50  | 80  | 110 | 140  | 170  |
| 2,4  | 10          | 40  | 70  | 100 | 130  | 160  |
| 3,4  | 0           | 30  | 60  | 90  | 120  | 150  |

Таблица 28

 $n = 5; m = 5$ 

| У г л ы | П р и е м ы |      |       |       |       |
|---------|-------------|------|-------|-------|-------|
|         | I           | II   | III   | IV    | V     |
| 1,2     | 0°          | 36°  | 72°   | 108°  | 144°  |
| 1,3     | 7,2         | 43,2 | 79,2  | 115,2 | 151,2 |
| 1,4     | 14,4        | 50,4 | 86,4  | 122,4 | 158,4 |
| 1,5     | 21,6        | 57,6 | 93,6  | 129,6 | 165,6 |
| 2,3     | 14,4        | 50,4 | 86,4  | 122,4 | 158,4 |
| 2,4     | 21,6        | 57,6 | 93,6  | 129,6 | 165,6 |
| 2,5     | 28,8        | 64,8 | 100,8 | 136,8 | 172,8 |
| 3,4     | 28,8        | 64,8 | 100,8 | 136,8 | 172,8 |
| 3,5     | 0           | 36   | 72    | 108   | 144   |
| 4,5     | 7,2         | 43,2 | 79,2  | 115,2 | 151,2 |

Отсчеты, указываемые приведенными таблицами, дают «положение» лимба относительно произвольно выбранного постоянного направления. Другими словами, числа этих таблиц вовсе не указывают отсчетов на левый предмет из тех двух, которые образуют соответствующий угол. Если за постоянное направление принять направление по меридиану на север, то числа таблиц будут указывать те отсчеты, которые должно иметь в соответствующих приемах и при измерении соответствующих углов, если трубу точно направить на север. Обычно в прак-

тике за постоянное направление, служащее для надлежащей ориентировки лимба, принимают направление на начальный предмет (первый). Тогда для углов: 1,2; 1,3; 1,4; ... 1,  $n$  числа таблиц будут прямо давать отсчеты на левый предмет «1». Но при измерении угла ( $i, k$ ), очевидно, отсчет на левый предмет  $i$  будет равен соответствующему числу таблицы, увеличенному на величину угла ( $i, k$ ). Если, например, имеем четыре направления, причем приближенно углы между ними равны.  $(1,2) = 55^{\circ}40'$ ;  $(1,3) = 100^{\circ}20'$ ;  $(1,4) = 152^{\circ}10'$ , то будем иметь табл. 29 отсчетов на левый предмет из числа двух, образующих соответственный угол.

Таблица 29

 $n = 4; m = 6$ 

| Углы | Приемы |         |         |         |         |         |
|------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
|      | I      | II      | III     | IV      | V       | VI      |
| 1,2  | 0°     | 30°     | 60°     | 90°     | 120°    | 150°    |
| 1,3  | 10     | 40      | 70      | 100     | 130     | 160     |
| 1,4  | 20     | 50      | 80      | 110     | 140     | 170     |
| 2,3  | 75 40' | 105 40' | 135 40' | 165 40' | 195 40' | 225 40' |
| 2,4  | 65 40  | 95 40   | 125 40  | 155 40  | 185 40  | 215 40  |
| 3,4  | 100 20 | 130 20  | 160 20  | 190 20  | 220 20  | 250 20  |

Чтобы перейти от чисел табл. 26, 27 и 28 к числам рабочей таблицы, очевидно, нужно знать приближенно (до 10') углы, отсчитываемые от направления на первый предмет.

Теперь поясним получение таблиц 27 и 28. При  $n = 4$  при одном положении лимба можно взять для вывода независимых друг от друга углов такие направления:

при первом положении лимба ... 1, 2, 3 и 4, с выводом затем углов 1, 2 и 3, 4; при втором положении лимба ... 1, 3, 2 и 4, с выводом затем углов 1, 3 и 2, 4; при третьем положении лимба ... 1, 4, 2 и 3, с выводом затем углов 1, 4 и 2, 3.

Другими словами, угол 3, 4 наблюдается при той же ориентировке лимба, как и угол 1, 2; угол 2, 4 наблюдается при той ориентировке лимба, которая была при наблюдении угла 1, 3; и, наконец, углы 2, 3 и 1, 4 наблюдаются при одной и той же ориентировке лимба.

Очевидно, все положения лимба при измерении  $m$  приемами  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов будут вполне определены, если указать те отсчеты, которые должны быть на первый предмет в каждом первом приеме при измерении этих  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов; эти отсчеты будут принадлежать ряду чисел:

$$0^\circ, \delta^\circ, 2\delta^\circ, \dots, (n-1)\delta^\circ.$$

Если мы назовем положения лимба, при которых начальные отсчеты в первом приеме, измерения угла, т. е. отсчеты на первый предмет, равны  $0^\circ, \delta^\circ, 2\delta^\circ, \dots$ , соответственно через I, II, III, IV..., то правило перестановок лимба в способе Шрейбера может быть для  $n$  счетного еще представлено таблицей 30.

Таблица 3)

*n* нечетное

|              | 2 | 3   | 4   | 5   | <i>n</i> — 1 | <i>n</i>     |
|--------------|---|-----|-----|-----|--------------|--------------|
| 1            | I | II  | III | IV  | <i>N</i> — 2 | <i>N</i> — 1 |
| 2            |   | III | IV  | V   | <i>N</i> — 1 | <i>N</i>     |
| 3            |   |     | V   | V   | <i>N</i>     | I            |
| 4            |   |     |     | VII | I            | II           |
| 5            |   |     |     |     | .            | .            |
| <i>n</i> — 1 |   |     |     |     | .            | .            |

Под *N* понимается *n*-ое положение лимба [ $N = (n - 1) \delta$ ]; под *N* — *(n* — 1)-ое положение лимба [ $N - 1 = (n - 2) \delta$ ].

В таблице 30 счет положений лимба идет непрерывно по строкам и столбцам. При нахождении из этой таблички начального отсчета в первом приеме измерения угла (*i*, *k*) нужно лишь отыскать цифру, стоящую в пересечении строки *i* со столбцом *k*. Так, при *n* = 7 для угла (2,5) имеем из таблицы положение V, и так как  $\delta$  в данном случае равно  $6^\circ 4$ , то в первом приеме измерения угла (2,5) при визировании на предмет 2 должно иметь отсчет  $25^\circ 7$  плюс угол (1,2); с другой стороны, так как при *n* = 4,  $\delta = 45^\circ$ , то в четвертом приеме измерения угла (2,5) отсчет на 2-й предмет будет равен  $25^\circ 7 + 3 \times 45^\circ$  плюс угол (1,2).

Для *n* четного (см. М. Г. Михайлов, «Измерение углов по способу Шрейбера»; журнал «Планировка и строительство городов», 1934 г.) таблица 30 перестраивается в ее последнем правом столбце, озаглавленном цифрой *n*; именно, начиная со второй строчки этого столбца, в нем проставляют те положения лимба, которые отсутствуют в соответствующих строчках (соблюдая в таблице непрерывность счета по столбцам), при чётных углах 2,2, 3,3, 4,4, 5,5, 6,6... Порядок этот представлен для *n* четного табл. 31.

Согласно табл. 30 и 31, имеем для *n* = 9 и *n* = 10 распределения «положений» лимба, представляемые таблицами 32 и 33.

Способ Шрейбера имеет следующие преимущества перед способом круговых приемов или направлений.

1. При измерении углов по способу Шрейбера программа наблюдений на станции всегда может быть выполнена, потому что ничто не мешает углы (1,2), ..., (*i*, *k*), ..., (*i*, *n*) измерять в любой последовательности, используя время, когда хорошо виден сигнал *M*, плохо видимый в остальную часть рабочего дня, именно на измерение углов, в которые этот сигнал входит. Исполнение же наблюдений согласно таблицам 26—28, 32, 33 приводит к полной простоте обработки мате-

Таблица 31

 $n$  — четное

|       | 2 | 3   | 4   | 5   | 6   | $n-1$ | $n$   |
|-------|---|-----|-----|-----|-----|-------|-------|
| 1     | I | II  | III | IV  | V   | $N-2$ | $N-1$ |
| 2     |   | III | IV  | V   | VI  | $N-1$ | II    |
| 3     |   |     | V   | VI  | VII | I     | IV    |
| 4     |   |     |     | VII | I   | II    | VI    |
| 5     |   |     |     |     | •   | •     | •     |
| 6     |   |     |     |     |     | •     | •     |
| $n-1$ |   |     |     |     |     |       | •     |

Таблица 32

 $n=9$ 

|   | 2              | 3                | 4                | 5                | 6                 | 7                 | 8                 | 9                 |
|---|----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | I<br>$0^\circ$ | II<br>$\delta$   | III<br>$2\delta$ | IV<br>$3\delta$  | V<br>$4\delta$    | VI<br>$5\delta$   | VII<br>$6\delta$  | VIII<br>$7\delta$ |
| 2 |                | III<br>$2\delta$ | IV<br>$3\delta$  | V<br>$4\delta$   | VI<br>$5\delta$   | VII<br>$6\delta$  | VIII<br>$7\delta$ | IX<br>$8\delta$   |
| 3 |                |                  | V<br>$4\delta$   | VI<br>$5\delta$  | VII<br>$6\delta$  | VIII<br>$7\delta$ | IX<br>$8\delta$   | I<br>$0^\circ$    |
| 4 |                |                  |                  | VII<br>$6\delta$ | VIII<br>$7\delta$ | IX<br>$8\delta$   | I<br>$0$          | II<br>$\delta$    |
| 5 |                |                  |                  |                  | IX<br>$8\delta$   | I<br>$0$          | II<br>$\delta$    | III<br>$2\delta$  |
| 6 |                |                  |                  |                  |                   | II<br>$\delta$    | III<br>$2\delta$  | IV<br>$3\delta$   |
| 7 |                |                  |                  |                  |                   |                   | IV<br>$3\delta$   | V<br>$4\delta$    |
| 8 |                |                  |                  |                  |                   |                   |                   | V<br>$5\delta$    |

риала на станции и к возможности рассматривать результат этой обработки как один ряд непосредственно наблюденных направлений.

Таблица 33

 $n = 10$ 

|   | 2       | 3        | 4         | 5         | 6          | 7          | 8          | 9          | 10         |
|---|---------|----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | I<br>0° | II<br>δ  | III<br>2δ | IV<br>3δ  | V<br>4δ    | VI<br>5δ   | VII<br>6δ  | VIII<br>7δ | IX<br>8δ   |
| 2 |         | II<br>2δ | IV<br>3δ  | V<br>4δ   | VI<br>5δ   | VII<br>6δ  | VIII<br>7δ | IX<br>8δ   | II<br>δ    |
| 3 |         |          | V<br>4δ   | VI<br>5δ  | VII<br>6δ  | VIII<br>7δ | IX<br>8δ   | I<br>0°    | IV<br>3δ   |
| 4 |         |          |           | VII<br>6δ | VIII<br>7δ | IX<br>8δ   | I<br>0°    | II<br>δ    | VI<br>5δ   |
| 5 |         |          |           |           | IX<br>8δ   | I<br>0°    | II<br>δ    | III<br>2δ  | VIII<br>7δ |
| 6 |         |          |           |           |            | II<br>δ    | III<br>2δ  | IV<br>3δ   | I<br>0°    |
| 7 |         |          |           |           |            |            | IV<br>3δ   | V<br>4δ    | III<br>2δ  |
| 8 |         |          |           |           |            |            |            | VI<br>5δ   | V<br>4δ    |
| 9 |         |          |           |           |            |            |            |            | VII<br>6δ  |

Последнее обстоятельство, во-первых, позволяет, не нарушая строгости задачи уравнивания сети, сделать уравнивание на станциях — весьма при том простое — отдельно от уравнивания сети, и, во-вторых, приводит уравнивание сети практически к легко выполнимой задаче уравнивания по способу условных наблюдений (с нахождением поправок направлений).

2. Благодаря указанной чрезвычайной гибкости при выполнении программы наблюдений, способ Шрейбера имел особо серьезные преимущества в случаях плохой и переменной видимости сигналов, что особенно важно для наших северных залесенных и заболоченных районов, где частые туманы заставляют при применении способа круговых приемов иногда выжидать видимости некоторых направлений целыми неделями; способ Шрейбера в этих условиях позволяет отнаблюдать станции гораздо скорее и, следовательно, с меньшими издержками, чем способ круговых приемов.

3. При измерении отдельных углов результат в значительной степени менее зависит от прочности установки инструмента (и, следовательно, от жесткости сигнала) и от происходящих с течением времени малых перемен в постоянных инструмента, чем при применении

способа круговых приемов, благодаря чему при равных условиях способ Шрейбера должен дать более точный результат, чем способ круговых приемов.

4. Как видно из предыдущего изложения, вероятнейшее значение угла между любой парой направлений на станции является, при измерении углов по способу Шрейбера, функцией не только непосредственно измеренного значения данного угла, но и большинства других углов, измеренных на станции. Так как углы, образованные во всех комбинациях на станции, в разных приемах измеряются, согласно второму предложению Шрейбера, на разных местах лимба, то при выводе значений каждого из углов, образованных любой парой направлений, используется гораздо больше разных диаметров лимба, чем в способе круговых приемов: например, при измерении углов с весом 12 в способе круговых приемов используются 24 разных диаметра, а в способе Шрейбера при  $n = 4$ , используются 60 разных диаметров, при  $n = 5$ , — 70 диаметров. Благодаря этому, в способе Шрейбера влияние случайных ошибок штрихов лимба на окончательные значения измеряемых углов ослабляется в значительно большей мере, чем в способе круговых приемов. Так как в геодезических теодолитах нередко при малых периодических ошибках случайные ошибки делений лимба довольно заметны, то указание преимущество способа Шрейбера немаловажно.

5. По той же причине (использование при выводе значения каждого угла между парой любых направлений не только этих направлений, но и всех остальных, наблюдаемых на данной станции) при измерении углов по способу Шрейбера влияние боковой рефракции на получаемые в конечном счете направления на станции ослабляется в гораздо большей степени, чем в способе круговых приемов. Обстоятельство это заставляет отдавать определенное предпочтение способу Шрейбера перед другими способами измерения углов в районах, где можно ожидать особенно значительного влияния боковой рефракции; к таким районам можно отнести весь север и северо-восток СССР с их обширными залесенными и заболоченными пространствами. Чтобы влияние боковой рефракции еще более ослабить, следует в данный вечер наблюдать измерять двумя-тремя приемами возможно большие углы между разными направлениями хорошей видимости, а не стремиться измерить сперва один угол полным числом приемов и только после этого переходить к измерению следующего угла; при таком равномерном распределении программы наблюдений на несколько вечеров с их, естественно, разными метеорологическими условиями, еще в большей степени уменьшится опасность одностороннего рефракционного искажения какого-либо одного из наблюдаемых направлений; очевидно, и нормальная программа самого способа Шрейбера «работает» в том же направлении.

6. Наконец, в способе Шрейбера в максимальной степени обеспечено получение однородного полевого материала, поскольку каждый из углов во всех комбинациях направлений может наблюдаваться независимо от других в условиях только благоприятной видимости образующих его направлений.

К недостаткам способа Шрейбера можно отнести следующие.

1. С увеличением числа направлений на станции падает число приемов, которым непосредственно измеряется каждый угол на станции, иначе говоря, при большом числе направлений на станции центр тяжести в определении уравненных значений измеряемых углов

падает на косвенные измерения. Это обстоятельство сказывается, в частности, неблагоприятно в том, что в способе Шрейбера, при том же весе наблюдений, систематические ошибки делений круга ослабляются в меньшей степени, чем в способе круговых приемов; правда, при получении весовых значений измеряемых углов происходит некоторая добавочная компенсация систематических ошибок делений круга, но не в такой степени, чтобы уравнять в этом отношении оба метода измерения углов. Поэтому, при значительных периодических ошибках делений горизонтального круга инструмента или при числе направлений на станции свыше пяти, можно рекомендовать при измерении углов лимб переставлять симметрично не только между приемами, но и между полуприсмами.

2. При числе направлений, большем пяти, быстро возрастает число измеряемых на станции углов, а вместе с тем заметно возрастает и время и количество работы, падающие на такую станцию.

Следует, правда, заметить, что оба указанных недостатка способа Шрейбера начинают заметно сказываться только при  $n > 5$ , что в триангуляции I класса встречается очень редко.

Так как число всех наблюденных углов равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , а число необходимых на станции углов равно  $n-1$ , то число избыточных на станции наблюдений равно

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Поэтому средняя ошибка любого из наблюденных в  $m$  приемах угла равна

$$\sqrt{\frac{2\sum v^2}{(n-1)(n-2)}}.$$

Следовательно, средняя ошибка  $\mu$  наблюденного в  $m$  приемах направления равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-1)(n-2)}},$$

средняя же ошибка  $M$  окончательно выведенного на станции направления будет равна

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2\sum v^2}{n(n-1)(n-2)}}, \quad (276)$$

потому, что, если принять вес угла, наблюденного в одном приеме, за единицу, то вес окончательно выведенного угла равен  $\frac{m \cdot n}{2}$ .

Под  $v$  понимается разность наблюденного и уравненного (на станции) значения угла.

В настоящее время в триангуляции I класса в СССР пользуются исключительно способом Шрейбера; в основных рядах триангуляции II класса — обычно способом круговых приемов, но в условиях плохой и переменной видимости также способом Шрейбера; в остальных триангуляциях II и низших классов — спо-

собом круговых приемов и иногда — при малой точности прибора — способом повторения.

Один прием измерения угла способом Шрейбера у нас состоит: из наведения на левый предмет, наведения на правый предмет (вращая при этом алидаду по ходу часовой стрелки), перевода трубы через зенит, наведения на правый предмет и наведения на левый предмет, вращая при этом ее вторым полуприеме алидаду против хода часовой стрелки. При каждом наведении на предмет отсчитывают три раза окулярный микрометр главной трубы и одновременно же три раза — окулярный микрометр поверительной трубы; после этого немедленно производят отсчеты по микроскоп-микрометрам горизонтального круга. Работы на пункте при 4—5 направлениях продолжаются, в зависимости от погоды и условий видимости, от 1—3 дней до недели и иногда более.

В нашей практике наблюдений по способу Шрейбера на пунктах триангуляции I класса допускаются следующие особенности: 1) разрешается на сигналах хорошей жесткости и при тихой погоде работать без поверительной трубы, если пробные измерения 3—4 приемами какого-либо угла с поверительной трубой при этих условиях дают колебания поправок за поверительную трубу в течении приема не более 1"; 2) при тех же условиях и при вполне спокойных изображениях разрешается работать без окулярного микрометра главной трубы или только при одном наведении биссектора окулярного микрометра главной трубы на наблюдаемые предметы; 3) допускается не делать перевода трубы через зенит внутри одного приема, а исполнять одну половину наблюдений данного угла за вечер при одном положении трубы, другую же половину приемов (за тот же вечер) — при другом положении трубы.

### **§ 70. Измерение углов в особо неблагоприятных случаях — способ привязки отдельных направлений к направлению на марку**

В некоторых местностях с особо неблагоприятными условиями видимости наблюдаемые сигналы бывают видимы только разновременно и при том каждый сигнал — в течении коротких промежутков времени, разделяющихся друг от друга днями и даже неделями. В таких случаях прибегают к установке в расстоянии 1—2 км от места наблюдений надлежаще устроенной вспомогательной марки, и затем наблюдают отдельные углы между маркой и видимым в данное время сигналом. При этой программе наблюдений мы в результате также будем всегда иметь на станции таблицу направлений одного веса, наблюдаемых как бы в одной группе полных приемов по способу направлений или круговых приемов, причем обработка наблюдений на станции чрезвычайно проста, — она сводится к выводу простых арифметических средних из измеренных значений каждого угла между направлением на марку и на каждое из направлений на наблюдаемые пункты. Чтобы получить в этом способе привязки отдельных направлений к направлению на вспомогательную марку все углы между парой направлений в любом их сочетании с определенным весом (например, 12), необходимо углы между маркой и наблюдаемыми предметами измерять с двойным весом (в данном случае 24 приемами). Марку нужно выставлять так, чтобы хорошая видимость ее была всегда обеспечена на расстоянии, не меньшем 1 км, и так устраивать ее, чтобы наблюдения на марку исполнялись

с более высокой точностью, чем наблюдения на тригонометрические знаки.

Легко видеть, что рассматриваемый способ измерения углов имеет почти все достоинства способов Шрейбера и круговых приемов, но еще более гибок в отношении условий видимости, чем способ Шрейбера. Особенности его следующие: 1) если пользоваться такой программой перестановок лимба, при которой положения лимба в разных углах и в разных приемах не будут повторяться, т. е. каждый прием во всех углах будет браться на новом месте лимба, то случаиные ошибки делений круга будут ослабляться так же хорошо, как в способе Шрейбера, а систематические — значительно лучше, чем в способе круговых приемов; 2) в отношении ослабления влияния боковой рефракции он находится не в лучших условиях, чем способ круговых приемов; необходимо поэтому разбивать серию наблюдений каждого из углов, по возможности, на несколько вечеров; 3) существенным недостатком способа является то обстоятельство, что все углы между направлениями на пункте сети получаются только косвенным путем; 4) наконец, весь способ базируется на предположении полной стабильности направления на вспомогательную марку; однако, изменения в положениях инструмента и вспомогательной марки и рефракционные искажения в направлении на эту марку могут в корне нарушить это положение и послужить источником значительных добавочных систематических ошибок в угловых наблюдениях на станции.

В силу изложенных соображений описанный способ измерения углов в наших условиях работ может быть допущен лишь в крайних случаях и при непременном соблюдении следующих добавочных условий: а) наблюдения ведутся с прочного каменного или железобетонного основания (невысокого столба или пилона); б) устройство и установка вспомогательной марки в достаточном удалении должны обеспечивать полную ее неподвижность в течение всего времени наблюдений на станции; в) направление на вспомогательную марку должно быть вполне благополучно в отношении действия боковой рефракции. Удовлетвориться в соблюдении последнего условия, однако, особо трудно, и это является слабой стороной способа, ограничивая в большей степени его применение.

Интересно отметить, что во Франции наблюдения на триангуляции I класса до 1900 г. велись способом круговых приемов, с 1900 г. по 1922 г. — исключительно способом Шрейбера и в настоящее время (после 1922 г.) ведутся способом привязки отдельных направлений к направлению на вспомогательную марку; при этом вспомогательная марка берется в расстоянии от 4 до 6 км. Углы между направлением на вспомогательную марку и направлением на каждый из наблюдаемых предметов измеряются шестнадцатью приемами, причем считается, что вес окончательно выведенных углов между направлениями на тригонометрические пункты будет равен десяти.

Из предыдущего изложения видно, что практика измерения углов на пунктах триангуляции I класса в разных странах достаточно разнообразна. Применение в ней тех или других методов наблюдений зависит в существенной степени от местных условий, в которых протекает работа. Если обеспечена постоянная и удовлетворительная видимость всех наблюдаемых предметов, можно с успехом применять способ направлений или круговых приемов; в условиях переменной видимости

предпочтителен способ Шрейбера. Вообще не может быть единого решения задачи, и для данных условий нужно выбирать наилучшее решение ее.

В процессе измерения углов в сети наблюдатель должен убеждаться в том, что получаемые им результаты вполне удовлетворительны. Материалом для суждения о качестве наблюдений, помимо колебаний приемов между собой, служат для триангуляции I класса следующие данные: 1) угловые погрешности треугольников, образующих звено триангуляции, не должны выходить из пределов  $3''$ , причем среднее из абсолютных значений угловых погрешностей треугольников в таком звене протяжением около 200—250 км не должно быть больше  $1''$ ; 2) свободные члены полюсных условных уравнений (см. ниже) не должны обуславливать поправок в направления в соответственных фигурах больше  $\pm 1''$ ; 3) средняя ошибка угла, вычисленная по угловым погрешностям треугольников звена (но так называемой формуле Ферреро):

$$m = \sqrt{\frac{\sum w^2}{3n}} \quad (277)$$

не должна в триангуляции I класса превышать  $\pm 1'',2$  или для направления  $\pm 0'',8$  (средняя ошибка угла в наших триангуляциях I класса при вычислении ее по формуле Ферреро обычно получается около  $0'',7 - 0'',8$ ).

В (277)  $w$  — угловые погрешности треугольников, а  $n$  — число использованных треугольников.

## Глава X

# ПРИВЕДЕНИЕ УГЛОВ К ЦЕНТРАМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЧЕК

### § 71. Разные виды приведений и их элементы

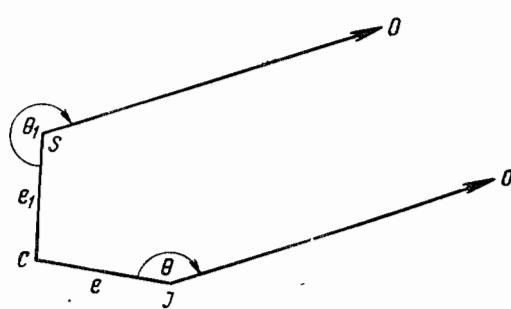
Центр тригонометрического пункта в момент его закладки совпадает с проекцией вершины тригонометрического знака; однако, с течением времени, вследствие оседания пирамиды или сигнала, вершина знака изменяет вообще свое первоначальное положение, бывшее в момент закладки центра. Поэтому при измерениях углов в триангуляции, наблюдая с данного пункта вершины сигналов на смежных пунктах, мы образуем углы между направлениями, которые вообще не проходят через центры этих смежных пунктов, и, очевидно, при известных размерах смежностей вершин знаков измеренные значения углов подлежат исправлениям. Исправлениям такого же рода подлежат измеренные значения углов и в том случае, если при наблюдении какого-нибудь сигнала визировалась не вершина его визирного цилиндра, а штанга прибитого к нему флага или зеркало гелиотрона (как это часто бывает в сети I класса), и т. п. Поправки, вводимые в измеренные значения углов за несовпадение проекций вершин знаков или вообще наблюдавшихся точек с центрами знаков, носят название *редукций*, или приведений с вершины к центру.

По разным обстоятельствам приходится иногда становиться с инструментом при измерениях углов не над центром знака; такими обстоятельствами могут быть: эксцентричное положение болванки внутренней пирамиды при наблюдениях с двойной пирамиды; загораживание ногами пирамиды некоторых наблюдаемых сигналов; необходимость при использовании колоколов и башен, как знаков триангуляций, вести на них измерения с окон, и т. д. Углы, измеренные со станции, на которой проекция центра инструмента не совпадала с центром знака, подлежат исправлениям; поправки углов в этом случае носят название *центрировок* или приведений с центра инструмента к центру сигнала. Так как каждый горизонтальный угол есть разность двух горизонтальных направлений, то обычно центрировками и редукциями исправляются направления, образующие угол. Для возможности определения величин приведений должно знать на каждом тригонометрическом пункте относительное расположение: вершины знака *S*, центра знака *C*, центра инструмента *J*, служившего для измерения углов, и всех наблюдавшихся смежных тригонометрических пунктов; при этом положение *S*, *C* и *J* относительно друг друга должно быть определено весьма

тиательно, и треугольник  $SCJ$  должен быть, по возможности, правильно ориентирован относительно пучка направлений, наблюденных с данного на смежные пункты; положение же этих последних пунктов относительно друг друга и относительно точек  $S, C, J$  может быть известно приближенно и даже грубо (черт. 251).

Величины, определяющие относительное положение  $S, C, J$  и дающие ориентировку треугольника  $CSJ$ , называются элементами приведений. Элементами центрировки называются: расстояние  $JC = e$  (черт. 251) и угол  $CJO = \Theta$ , отсчитываемый при  $J$  по ходу часовой стрелки от направления на центр  $C$  до направления на удаленный предмет  $O$ , принимавшийся за начальный при измерении углов в  $J$ .

Элементами редукций будут: расстояние  $SC = e_1$  и угол  $CSO = \Theta_1$ , отсчитываемый при  $S$  по ходу часовой стрелки от направления  $SC$  на центр  $C$  до направления на предмет  $O$ , принимавшийся за начальный при измерении углов в  $J$ . Вследствие ничтожности  $e$  и  $e_1$  по сравнению с расстоянием до сигналов  $O$ , направления  $JO$  и  $SO$  можно считать при выводе  $\Theta$  и  $\Theta_1$  между собой параллельными. Углы  $\Theta$  и  $\Theta_1$  можно отсчитывать и не до направле-



Черт. 251

ния на сигнал; служивший начальным при измерениях углов в  $J$ : эти углы можно отсчитывать до направления на любой сигнал, входящий в серию наблюдений с  $J$ , стмечая лишь всегда, до направления, на какой именно предмет отсчитываются  $\Theta$  и  $\Theta_1$ .

Следует принять за правило на каждой станции при измерении горизонтальных углов тщательно определять величины  $e$  и  $e_1$  и только на основании такого определения решать вопрос о той малости  $e$  и  $e_1$ , при которой приведения можно считать равными нулю; это в особенности относится к базисным сетям.

Необходимо иметь в виду, что введение в измеренные углы центрировок и редукций не должно понижать первоначальной точности этих углов. Другими словами, так как ошибки измеренных значений углов в сети I класса выражаются вообще десятыми долями секунды, то ошибки в определении величин приведений для углов в такой сети не должны превышать десятой секунды; так как при  $e$  и  $e_1$ , равных 2 см, приведения дают  $0''.2 - 0''.3$ , то, следовательно, в сетях I класса ошибки определения  $e$  и  $e_1$  не должны превышать 3 м. В сетях низших разрядов определение  $e$  и  $e_1$  должно произходить почти так же тщательно; вследствие малых размеров стороны сети влияние ошибок в определении  $e$  и  $e_1$  здесь возрастает по сравнению с сетью I класса в более значительной степени, чем убывает по сравнению с сетью I класса точность измерения углов. Поэтому следует требовать даже в заполняющих сетях II класса и в сетях III класса определения  $e$  и  $e_1$  с ошибкой, не превышающей 4—5 м.

В базисных сетях ошибка в  $e$  или в  $e_1$  не должна превышать 2 м. Требуемая точность определения  $\Theta$  (или  $\Theta_1$ ) зависит от величины  $e$  (или  $e_1$ ) и в малой степени от класса триангуляции.

При  $e$  или  $e_1$ , равных 0,2 м, ошибка в  $\Theta$  или в  $\Theta_1$  должна быть менее:

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| для сети I класса . . . | 40' |
| — „ — II — „ — . . .    | 1°  |
| — „ — III — „ — . . .   | 2°. |

При других значениях  $e$  или  $e_1$  эти числа умножаются на  $\frac{2}{e}$  (или на  $\frac{2}{e_1}$ ), где  $e$  или  $e_1$  выражены в дециметрах. Необходимо отметить, что указанные допуски в определении  $\Theta$  или  $\Theta_1$  соответствуют допустимым предельным ошибкам в определении положения точки  $C$  (черт. 251) относительно линии  $JC$  или линии  $SC$ , но самое определение положения точки  $C$  должно выполняться с полной тщательностью, соответственно выбранными методами и инструментами, и, конечно, из этих допусков вовсе не вытекает, что если, например, положение точек  $S$ ,  $C$  и  $J$  получено графически на чертеже (см. ниже графический способ определения элементов приведений), то угол  $\Theta$  можно по этому чертежу взять с ошибкой до 2°, когда имеются все возможности взять его транспортиром с ошибкой до 10'.

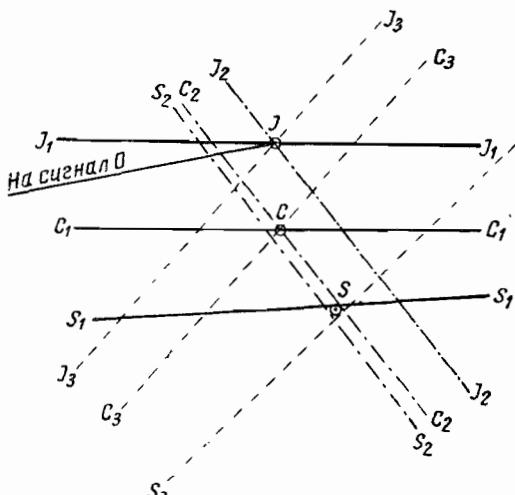
## § 72. Способы определения элементов приведений

1. При малых значениях  $e$  (меньших 0,6 м), — а это всегда бывает при наблюдениях с двойных пирамид и сигналов, — элементы приведений всего проще и удобнее определять графическим способом. Применение этого способа заключается в следующем. Над центром знака устанавливается горизонтально особый центрировочный столик с пабитым на него листом картона. Наблюдатель, отходя от центра на расстояние, несколько большее высоты сигнала, выбирает место, с которого видны центр знака и центр главного инструмента, уже установленного для измерения углов; на таком месте ставится малый теодолит, отлично выверенный ране. После тщательного приведения вертикальной оси малого теодолита в отвесное положение, наблюдатель и его помощник отмечают на картоне столика следы трех вертикальных плоскостей, проходящих через центр теодолита и через вершину знака, центр главного инструмента и центр знака. При этом помощник наблюдателя отмечает первоначально каждую плоскость двумя точками — карандашом, ставя его острие по указаниям наблюдателя. Обычно каждая из трех указанных плоскостей проектируется (с одной установки малого теодолита) дважды — при двух положениях трубы теодолита; помощник наблюдателя отмечает след плоскости, получающийся при втором положении трубы, также точками, рядом с полученными при первом положении трубы; окончательно след каждой плоскости отмечается прямой, прочерченной по линейке и делящей пополам расстояния между рядом стоящими точками, полученными для этой плоскости при первом и втором положениях трубы теодолита.

Такое же проектирование вершины знака  $S$ , центра  $J$  главного инструмента и центра  $C$  знака выполняют еще с двух иных мест стояния малого теодолита. Очевидно, для определения проекций точек  $S$ ,  $C$  и  $J$  (на плоскости столика) достаточно иметь две станции малого теодолита, с каждой из которых будут отмечены следы вертикальных плоскостей, содержащих точки  $S$ ,  $C$  и  $J$  (черт. 252), причем угол при центре знака между направлениями на эти две станции должен быть близок к 90°.

Но для контроля определение проекций точек  $S$ ,  $C$  и  $J$  делается всегда с трех станий малого теодолита, причем направления из  $C$  на эти станицы образуют углы около  $120^\circ$ . На чертеже 252 следы на столике, полученные с первой, второй и третьей станицами малого теодолита, обозначены соответственно индексами  $J_1, C_1, S_1, J_2, C_2, S_2, J_3, C_3, S_3$ . Вследствие погрешностей проектирования, прямые  $S_1S_4, S_2S_2, S_3S_3$  не пересекаются в одной точке, а дают небольшой треугольник погрешностей; то же самое приходится сказать относительно прямых  $JJ$  и  $CC$ . Вследствие малого расстояния центра знака по высоте от плоскости столика и полной определенности обозначения центра\* в натуре, треугольник погрешностей, образованный прямыми  $C_1C_1, C_2C_2, C_3C_3$ , получается обычно со сторонами, меньшими миллиметра; точно так же, вследствие полной определенности отметки в натуре центра главного инструмента, стороны треугольника погрешностей, образованного прямыми  $J$ , обычно не превышают 4 мм. Окончательные положения проекций точек  $J$  и  $S$  принимаются совпадающими с серединами соответственных треугольников погрешностей (если стороны треугольников не превышают указанных пределов). После наметки этих окончательных положений точек  $J$  и  $S$ , они соединяются с проекцией  $C$  прямыми, и затем из проекции  $J$  прочерчивается направление на сигнал  $O$ , входящий в серию сигналов, наблюдавшихся с данного тригонометрического пункта. (При прочерчивании такого направления можно воспользоваться линеекой)

\*



Черт. 252

с диоптрами). Самое определение  $e$  и  $e_1$  делается посредством измерения циркулем (по масштабу) расстояний  $JC$  и  $SC$ , полученных на столике; для определения же  $\Theta$  и  $\Theta_1$  пользуются транспортиром, измеряя им углы между направлениями  $JO$  и  $JC$ ,  $SO$  и  $SC$ , построенными на столике. Вследствие малости  $e_1$ , определение элементов редукций производят почти исключительно указанным графическим способом.

Для контроля, кроме направления на сигнал  $O$ , из  $J$  прочерчивают еще направление на какой-нибудь другой сигнал из числа наблюдавшихся на данном пункте. На центрировочном столике следует прочерчивать еще помошью ориентир-буссоли направление магнитного меридиана. Если с центрировочного столика не видно ни одного тригонометрического знака, то со столика двойной пирамиды или сигнала при посредстве главного инструмента выставляют вехи в створе тригонометрических знаков.

Почти всегда центр  $C$  — из-за его углубленности в землю — не виден с тех постановок малого теодолита, с которых проектируют  $S$  и  $J$ . Поэтому перенесение  $C$  на столик делают с особых трех постановок

теодолита, ставя его всегда в 5—6 м от центра сигнала, или же устанавливают над центром  $C$  оптический центрир (см. черт. 151).

Указанный же графический прием применяют и для выноса центра знака  $C$  на столик внутренней пирамиды простого или сложного сигнала или на столик двойной пирамиды. Это делают перед началом наблюдений на пункте, чтобы поставить инструмент «в центре» (если только проекция  $C$  придется вблизи середины столика сигнала или двойной пирамиды). Так как в триангуляции I класса наблюдают всегда световые сигналы, то, очевидно, проектировать вершину сигнала  $S$  здесь не нужно—роль точки  $S$  играет здесь зажимной винт  $f$  гелиотрона, обычно ввинчиваемый в центр столика для инструмента.

Для установки инструмента точно над точкой, представляющей проекцию центра знака на столик сложного сигнала или двойной пирамиды, пользуются особым центрирным штифтом с пружиной, который имеется при каждом точном инструменте и который навинчивается спереди на втулку вертикальной оси инструмента.

При установке гелиотрона или ставят его так, чтобы зажимной винт — шуруп  $f$  (черт. 245) — пришелся бы в вынесенной на столик для инструмента проекции центра знака, или этот винт  $f$  гелиотрона ввинчивают в середину столика.

При определении элементов редукции гелиотрона проектируют на центрировочный столик головку винта  $f$ , при определении элементов редукции фонаря, если он ставился отдельно от гелиотрона, надлежит проектировать на центрировочный столик центр передней линзы фонаря и обозначать на центрировочном столике то направление, по которому посыпался свет фонаря.

2. Если расстояние  $e$  более 0,6—0,7 м, а проекции точек  $J$  и  $C$  могут быть получены на одной горизонтальной плоскости, то элементы центрирования можно определить непосредственным их измерением: после получения проекций  $J$  и  $C$  в одной плоскости расстояние  $e$  между этими проекциями измеряется стальной рулеткой, а для определения  $\Theta$  устанавливают тщательно над проекцией  $J$  малый теодолит и измеряют им углы между направлением на точку  $C$  (или на ее проекцию) и направлениями на два сигнала, из числа наблюдавшихся на данном тригонометрическом пункте при измерении углов с точки  $J$ . Непосредственное измерение  $e$  и  $\Theta$  применяется часто на колокольнях и иногда при наблюдениях с земли на простой пирамиде.

На колокольне вершина знака — середина яблока под крестом — является в то же время и его центром. Поэтому при определении элементов  $e$  и  $\Theta$  непосредственным измерением здесь прежде всего приходится определить проекцию  $S$  (или все равно  $C$ ) на полу того яруса, на одном из окон которого помещается для наблюдений углов главный инструмент. Это определение проекции вершины колокольни делается в общем так же, как и получение проекции  $S$  на центрировочном столике при графическом определении  $e$  и  $\Theta$ . Но вследствие значительной высоты яруса над землей, здесь приходится станции малого теодолита брать довольно далеко от колокольни (чтобы видеть два противоположных пролета окон), уходя иногда от нее на 80—100 м; кроме того, здесь редко удается осуществить симметричное расположение трех станций малого теодолита; наконец, с различных мест середина яблока под крестом намечается различно вследствие больших его размеров и вследствие изменений его вида при разных освещениях. Все это приводит к тому, что положение проекции вершины колокольни определяется

иногда с ошибкой даже в 2 см. Следы проектирующих плоскостей обозначают на колокольне забиваемыми в подоконники гвоздиками, которые затем попарно соединяются шнуром. Для определения проекции  $J$  пользуются отвесом, прикрепляемым к становому винту главного инструмента.

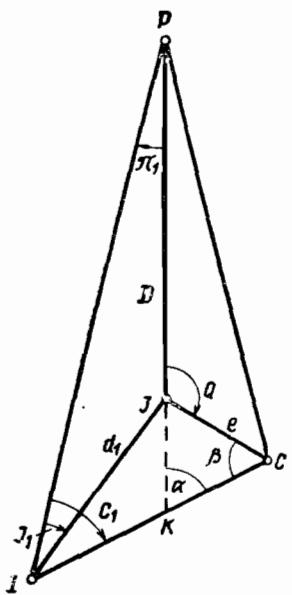
При проектировании середины яблока под крестом колокольни или шпили башни на пол соответствующего яруса, можно облегчить задачу применением двух малых теодолитов. Имено, наблюдатель при первом теодолите, работающий внизу на земле, по установке инструмента на некоторой станции и по наведении его трубы на вершину знака, устанавливает в этой визирной плоскости трубы своего теодолита центр второго теодолита на подоконнике окна, против которого он выставился (и ближайшего к нему). Наблюдатель при втором теодолите после этого направляет его трубу на трубу (или центр) первого теодолита и, переведя трубу через зенит, дает указания для забивки гвоздика, отмечающего проектирующую плоскость на подоконнике противоположного окна; место установки второго теодолита также отмечается гвоздиком. Этот прием, который начали практиковать в б. Межевом институте с 1918 г., значительно ускоряет и облегчает работу на высоких башнях и колокольнях.

При определении  $e$  и  $\Theta$  непосредственными измерениями, в случае наблюдений с земли на простой пирамиде, приходится лишь тщательно по отвесу назначить проекцию  $J$  на деревянном колу, забитом в землю под главным инструментом. Непосредственное измерение  $\Theta$  можно, очевидно, произвести и в том случае, когда  $J$  и  $C$  не могут быть перенесены в одну плоскость, но из  $J$  можно наблюдать  $C$ ; если при этом разность высот  $C$  и  $J$  не велика (менее 4 м), то  $e$  можно вычислить по наклонному расстоянию, измеренному от середины горизонтальной оси инструмента до  $C$ , и по измеренному вертикальному углу. Такой способ определения  $e$  и  $\Theta$  может быть применен на тригонометрическом знаке в виде конуса из камней, или в виде невысокого тура из камней и земли, и т. п.: в таких знаках вершина  $S$  совпадает с центром.

3. Если проекции  $J$  и  $C$  не могут быть получены в одной плоскости,

а горизонтальные расстояния от  $J$  до разных точек прилегающей к тригонометрическому пункту местности могут быть легко измерены, то можно применить следующий аналитический прием определения  $e$  и  $\Theta$ .

Пусть на черт. 253  $P$  — один из тригонометрических сигналов;  $I$  — место постановки малого теодолита, которым измерены углы:  $PJ I = J_1$  и  $PI C = C_1$ , отсчитываемые по ходу часовой стрелки от направления на  $P$  до соответственных направлений на  $J$  и  $C$ . Назовем далее: через  $\pi_1$  угол  $JPI$ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от направления  $PJ$  до направления из  $P$  на место постановки малого теодолита; через  $d_1$  измеренное непосредственно расстояние  $JI$ ; расстояние  $JC$  — через  $e$  и угол  $PJC$  — через  $Q$ . Расстояние  $d_1$  берется от 10 до 20 м; и вследствие малости его по сравнению с расстоянием  $JP$



Черт. 253

угол  $\pi_1$  всегда мал (несколько минут). Зная приближенно  $JP = D$ , мы можем достаточно точно определить угол  $\pi_1$  по формуле, получаемой из треугольника  $JJP$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \pi_1 = \frac{d_1}{D} \sin J_1 \\ \pi_1' = \frac{d_1}{D \sin 1'} \sin J_1 \end{array} \right\}. \quad (278)$$

Продолжая  $PJ$  до пересечения с  $IC$  в точке  $K$  и называя в треугольнике  $JKC$  угол при  $K$  через  $\alpha$ , а угол при  $C$  через  $\beta$ , имеем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi_1 + C_1, \\ \alpha &= Q - \beta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\beta = Q - (\pi_1 + C_1).$$

Из треугольника  $JIC$  пишем

$$\frac{e}{d_1} = \frac{\sin (C_1 - J_1)}{\sin [Q - (\pi_1 + C_1)]} = \frac{\sin (J_1 - C_1)}{\sin (\pi_1 + C_1 - Q)},$$

$$e \sin (\pi_1 + C_1 - Q) = d_1 \sin (J_1 - C_1).$$

Обозначая

$$\pi_1 + C_1 = R_1 \quad (279)$$

$$d_1 \sin (J_1 - C_1) = r_1, \quad (280)$$

имеем

$$e \sin R_1 \cos Q - e \cos R_1 \sin Q = r_1. \quad (281)$$

Уравнение (281) доставит каждая станция малого теодолита, на которой определены углы  $J$ ,  $C$  и расстояние  $d$ ; имея две такие станции, надлежаще выбранные, получим два уравнения для определения двух искомых  $e$  и  $Q$ .

Предполагая, что действительно имеем две станции малого теодолита, которые назовем через I и II, сделаем решение доставленных ими уравнений (281) по способу профессора Витрама.

Пусть имеем

$$\left. \begin{array}{l} \text{для станции I: } \left\{ \begin{array}{l} J_1, C_1, d_1; \pi_1 = \frac{d_1 \sin J_1}{D \sin 1'}; \\ R_1 = C_1 + \pi_1; r_1 = d_1 \sin (J_1 - C_1); \end{array} \right. \\ \text{для станции II: } \left\{ \begin{array}{l} J_2, C_2, d_2; \pi_2 = \frac{d_2 \sin J_2}{D \sin 1''}; \\ R_2 = C_2 + \pi_2; r_2 = d_2 \sin (J_2 - C_2). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Обозначим

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \sigma; \frac{R_1 + R_2}{2} = \Sigma; \frac{r_1 - r_2}{2} = \delta; \frac{R_1 - R_2}{2} = \Delta. \quad (282)$$

Возьмем далес полусумму и полуразность уравнений (281), написанных для станций I и II:

$$\begin{aligned} e \sin R_1 \cos Q - e \cos R_1 \sin Q &= r_1 \\ e \sin R_2 \cos Q - e \cos R_2 \sin Q &= r_2. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} e \cos \Delta \sin (\Sigma - Q) &= \sigma \\ e \sin \Delta \cos (\Sigma - Q) &= \delta \end{aligned} \quad (283)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}(\Sigma - Q) = \frac{\sigma}{\delta} \operatorname{tg} \Delta; \quad (284)$$

$$Q = \Sigma - (\Sigma - Q); \quad \Theta = 360^\circ - Q; \quad (285)$$

$$e = \frac{\sigma}{\cos \Delta \sin (\Sigma - Q)} = \frac{\delta}{\sin \Delta \cos (\Sigma - Q)}. \quad (286)$$

Вычисление всех этих формул ведется четырехзначными логарифмами.

Обыкновенно при применении изложенного приема делают три станции малого теодолита, причем направления при  $J$  на эти станции образуют углы в  $120^\circ$ . Комбинируя сперва станцию I со станцией II, а затем станцию II со станцией III (или станцию I со станцией III), получают два вывода  $e$  и  $\Theta$ , из которых, при малых их разногласиях, берут среднее.

Рассмотренный прием при аккуратном измерении углов  $J$  и  $C$  и расстояний  $d$  и при удачном выборе станций I, II и III приводит к наиболее надежным определениям  $e$  и  $\Theta$ . Его следует и даже должно применять, если тригонометрическим знаком служит высокий, хорошо укрепленный столб, или высокий конус из камней, или тур из камней и земли и т. п.; во всех таких знаках вершина, обозначенная точно тем или иным способом, представляет собой и центр знака. Хотя в случае конуса или тура можно и должно измерять  $\Theta$  непосредственно, а  $e$  определять по измеренным наклонному расстоянию и вертикальному углу, но нередко определенное таким путем  $e$  не будет надлежащее точно, и, кроме того, вследствие небольших значений  $e$  при знаках в виде конуса или тура, необходимо  $e$  и  $\Theta$  определять двумя независимыми и различными способами.

Рассмотренный аналитический прием нередко употребляется, как контролирующий непосредственное измерение или графическое определение величин  $e$  и  $\Theta$ . Если применять этот прием при наблюдениях на двойной пирамиде или на сигнале, то тогда, очевидно, придется измерять расстояния от станций малого теодолита до  $C$ , но не до  $J$ . Поэтому, для применения к случаю наблюдений на двойной пирамиде или на сигнале всех выведенных ранее формул придется в них все величины, относящиеся к  $J$ , считать относящимися к  $C$  и наоборот. В результате такого обращения точки  $J$  в  $C$  мы получим следующие формулы и черт. 254 к ним

$$JC = d_1; \quad \pi_1 = \angle CPI = \frac{d_1 \sin C_1}{D \sin 1'}; \quad \pi_2 = \frac{d_2 \sin C_2}{D \sin 1'},$$

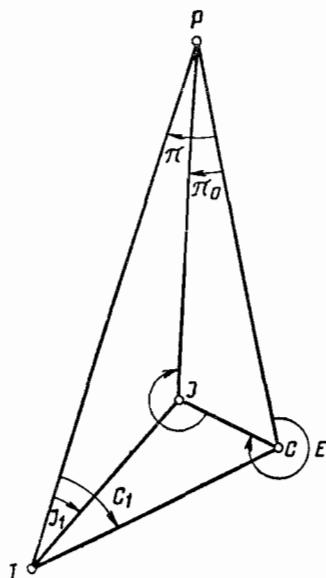
$$d_1 \sin(C_1 - J_1) = r_1; \quad d_2 \sin(C_2 - J_2) = r_2;$$

$$J_1 + \pi_1 = R_1; \quad J_2 + \pi_2 = R_2;$$

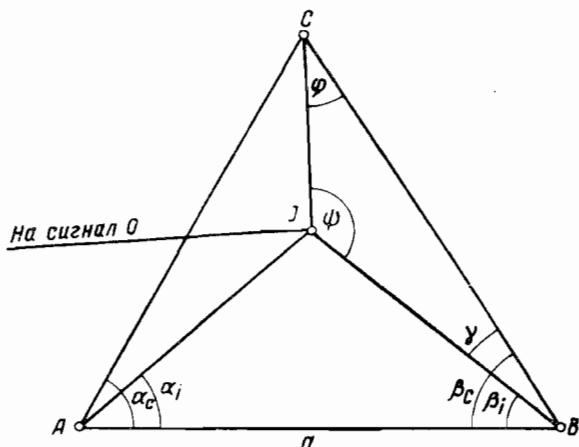
$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \sigma; \quad \frac{R_1 + R_2}{2} = \Sigma; \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = \delta; \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \Delta; \quad \operatorname{tg}(\Sigma - E) = \frac{\sigma}{\delta} \operatorname{tg} \Delta;$$

$$e = \frac{\sigma}{\cos \Delta \sin(\Sigma - E)} = \frac{\delta}{\sin \Delta \cos(\Sigma - E)}.$$

Угол  $E$ , вычисляемый по этим формулам, равен углу при  $C$ , отсчитываемому от направления на  $P$  по ходу часовой стрелки до направления на  $J$ , — в такой угол обращается  $Q$ , если точка  $J$  заменяется точкой  $C$ ; очевидно, что  $\Theta = 180^\circ - E + \pi_0$ .



Черт. 254



Черт. 255

4. Если точки  $J$  и  $C$  не могут быть спроектированы на одну горизонтальную плоскость, и с точек местности, прилегающей к тригонометрическому пункту, нельзя измерить расстояний ни до  $J$ , ни до  $C$ , приходится поступать так.

Выбрав на местности точки  $A$  и  $B$  (черт. 255), с каждой из которых видны  $J$  и  $C$ , измеряют базис  $AB$  и углы  $BAC = \alpha_c$ ;  $BAJ = \alpha_i$ ;  $ABJ = \beta_i$ ,  $ABC = \beta_c$ ; затем в точке  $J$  измеряют углы между направлением на сигнал  $O$  и направлениями на точки  $B$  и  $A$ ; по этим данным можно вычислить  $e$  и  $\Theta$ . Обозначая всегда в треугольнике  $CJB$  угол при  $C$  через  $\varphi$ , а угол при  $J$  — через  $\psi$ , имеем такие формулы

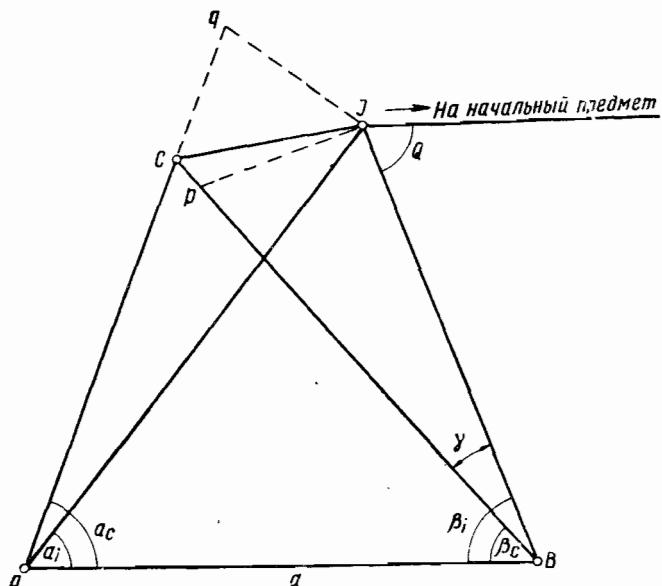
$$m_c = \frac{\sin \alpha_c}{\sin(\alpha_c + \beta_c)}; \quad m_i = \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\alpha_i + \beta_i)}; \quad \gamma = \angle CBJ = \beta_c - \beta_i; \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{m_c}{m_i};$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{ctg}(45^\circ + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi);$$

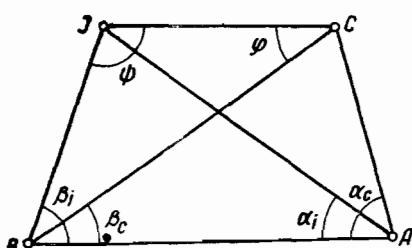
$$e = \frac{m_i}{\sin \varphi} a \sin \gamma = \frac{m_c}{\sin \psi} a \sin \gamma.$$

В этих формулах:  $m_c$ ,  $m_i$  и  $\mu$  — вспомогательные величины, угол — всегда положителен, т. е. он вычисляется или как  $\beta_c - \beta_i$  или  $\beta_i - \beta_c$ ; вывод формул состоит из определения  $BC$  и  $BJ$  и из нахождения в треугольнике  $CJB$  полуразности углов  $\psi$  и  $\varphi$ . По углу  $\psi$ , по углу  $J$  между направлениями на сигнал  $O$  и на точку  $B$  и по составленному от руки чертежу расположения точек  $A$ ,  $B$ ,  $J$ ,  $C$ ,  $O$  легко софзить угол  $\Theta$ .

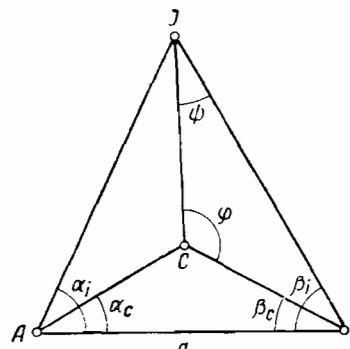
Черт. 256, 257, 258 относятся еще к трем возможным случаям расположения  $AB$  относительно  $CJ$ .



Черт. 256



Черт. 257



Черт. 258

Рассмотренный прием определения  $e$  и  $\Theta$  применяется при наблюдениях на колокольнях и башнях, если вершину колокольни или башни нельзя спроектировать на пол яруса, на котором находится главный инструмент.

В настоящее время в СССР в этом четвертом случае определения  $e$  и  $\Theta$  применяют другой прием вычисления. Примем на черт. 256 точку  $A$  за начало координат, а прямую  $AB$  — за ось греков.

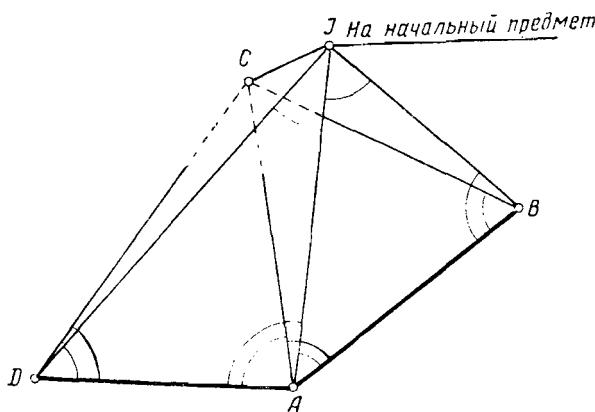
Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{a}{\sin(\alpha_c + \beta_c)} \sin \alpha_c \sin \beta_c = \left[ \operatorname{ctg} \alpha_c + \operatorname{ctg} \beta_c \right] \\ y_c &= \frac{a}{\sin(\alpha_c + \beta_c)} \cos \alpha_c \sin \beta_c = [x_c \operatorname{ctg} \alpha_c] \\ x_i &= \frac{a}{\sin(\alpha_i + \beta_i)} \sin \alpha_i \sin \beta_i = \left[ \operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i \right] \\ y_i &= \frac{a}{\sin(\alpha_i + \beta_i)} \cos \alpha_i \sin \beta_i = [x_i \operatorname{ctg} \alpha_i] \\ e &= \sqrt{(y_c - y_i)^2 + (x_c - x_i)^2} \\ \operatorname{tg}(JC) &= \frac{y_c - y_i}{x_c - x_i}; \quad (JB) = 90^\circ + \beta_i, \end{aligned} \right\}. \quad (287)$$

Азимут  $A_0$  на начальный предмет

$$\begin{aligned} A_0 &= 90^\circ + \beta_i - \zeta, \\ \Theta &= A_0 - (JC). \end{aligned}$$

Части формул (287), заключенные в квадратные скобки, вычисляются в качестве контрольных, пользуясь таблицами натуральных величин тригонометрических функций и арифмометром.



Черт. 259

Всегда, когда применяют прием определения элементов приведений, относящийся к рассматриваемому четвертому случаю, берут не один базис  $AB$ , а два базиса, как изображено на черт. 259; на этом чертеже измеренные углы при  $D$ ,  $A$ ,  $B$  и  $J$  обозначены лугами; углы  $AJB$  и  $DJA$

измеряют, конечно, для контроля. Приняв точку  $A$  за начало координат а направление с  $A$  на  $B$  за ось игреков (черт. 259), вычисляют координаты точек  $D$ ,  $J$  и  $C$  по формулам (287), причем для точек  $J$  и  $C$ , конечно, будут выведены координаты дважды: из треугольников, опирающихся на базис  $AB$ , и из треугольников, опирающихся на базис  $DA$ . Из двух выводов координат точек  $J$  и  $C$  образуют средние выводы, затем по этим средним координатам вычисляют расстояние  $JC = e$  и азимут  $(JC)$  направления с  $J$  на  $C$ .

В триангуляции II класса можно упростить вычисления по определению  $e$  и  $\Theta$ , применяя такой прием (черт. 256).

Вычисляем

$$Jp = \frac{a \sin \alpha_i}{\sin (\alpha_i + \beta_i)} \operatorname{tg} (\beta_i - \beta_c),$$

$$Jq = \frac{a \sin \alpha_c}{\sin (\alpha_c + \beta_c)} \operatorname{tg} (\alpha_c - \alpha_i),$$

где  $Jp$  и  $Jq$  — перпендикуляры, восставленные в  $J$  к прямым  $JB$  и  $JA$  до пересечения соответственно с прямыми  $BC$  и  $AC$ ; строим на чертеже транспортиром при  $J$  направления на начальный предмет и на пункт  $A$  и  $B$ ; в крупном масштабе строим  $Jp$  и  $Jq$ ; через  $p$  проводим прямую под углом к  $Jp$ , равным  $90^\circ - (\beta_i - \beta_c)$ , а через  $q$  проводим прямую под углом к  $Jq$ , равным  $90^\circ - (\alpha_c - \alpha_i)$ . В пересечении этих прямых получим точку  $C$ ; измеряем по чертежу расстояние  $JC = e$  и транспортиром угол  $\Theta$ . Масштаб чертежа берем в зависимости от размера  $e$ : например все величины откладываем в натуральных размерах, если  $e < 0,1 \text{ м}$  если же  $e$  около  $1 \text{ м}$ , то берем масштаб  $1:5$ .

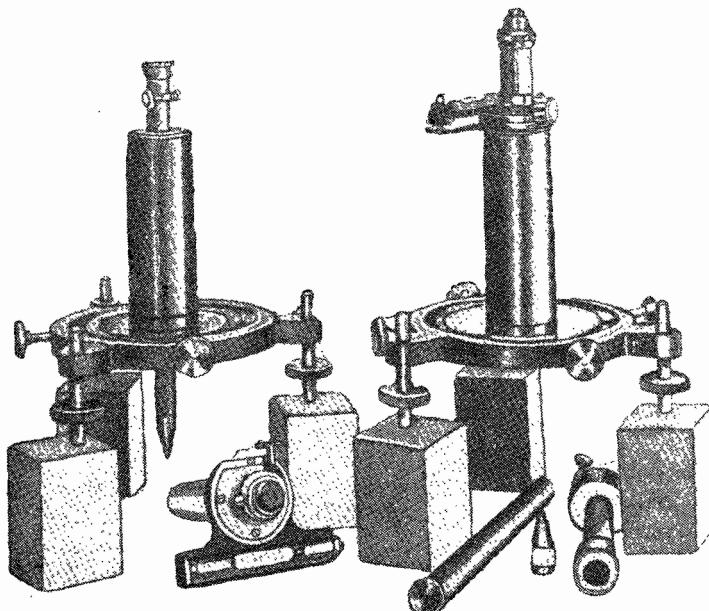
5. Бывают такие сложные случаи определения  $e$  и  $\Theta$ , что ни один из указанных приемов не может быть применен; в этих случаях приходится составлять малую вспомогательную триангуляцию связывающую некоторый базис с точками  $C$  и  $J$ . Эти случаи возникают иногда в больших городах.

Нужно в геодезических работах стремиться к тому, чтобы в большинстве случаев приведения просто могли быть припрятываться равными нулю. При постройке сигнала должно обеспечиваться такую его устойчивость, чтобы при дальнейшем пользовании им проекция центра, заложенного в момент постройки на одной отвесной линии с средней точкой столика для инструмента, приходилась бы не более как в  $2 \text{ см}$  от середины столика. Тогда, вынеся центр с полной тщательностью (с ошибкой не более  $2-3 \text{ мм}$ ) на столик для инструмента, над полученной точкой устанавливают центр инструмента при наблюдениях горизонтальных направлений и в эту же точку ввинчивают винт гелиотропа при подаче световых сигналов с данного сигнала. Этим самым и будет достигнуто в большинстве случаев равенство  $e$  и  $e_1$  нулю — для моментов наблюдений. К сожалению, в нашем геодезическом производстве такая постановка дела не проведена еще в достаточной мере, и поэтому вопросу определения элементов приведений приходится уделять внимание большее, чем следовало бы.

Отметим, что в американских сигналах отсутствие болванки во внутренней пирамиде (см. § 23) позволяет проектировать центр на площадку для инструмента помощью особого вертикального коллиматора, изображенного на черт. 260 и 261. Это выполняется быстрее

точнее, чем практикуемый у нас вынос центра на столик для инструмента с трех постановок вспомогательного теодолита. В большинстве случаев американские геодезисты работают, имея приведение, равное нулю, что заслуживает подражания.

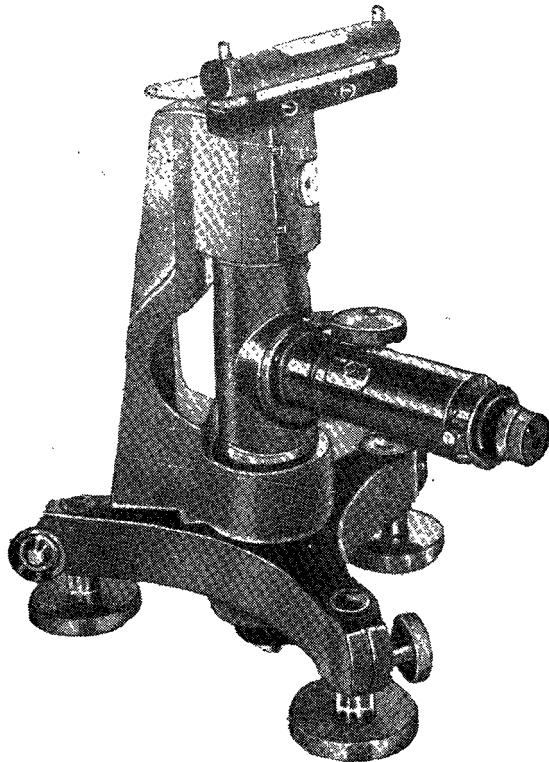
В городских триангуляциях нередко бывает выгодно использовать башни и колокольни; вершины этих сооружений отмечены, однако, в натуре или громадными по размерам яблоками под крестом или покривившимися шпилями, с разными фигурами на них, и т. п. В этих



Черт. 260

случаях, чтобы иметь надлежащее точное обозначение вершин треугольников, надлежит на башне или на колокольне заложить на окнах «эксцентричные» точки; над этими точками устанавливается инструмент при наблюдении с данной башни соответственных направлений городской триангуляции, и на этих точках устанавливаются лампочки или фонари, или особые марки, при наблюдении направлений на них с других пунктов городской триангуляции. Таким образом, треугольники триангуляции образуются без введения в число их вершин — вершин башен или колоколен, — заменой этих последних заложенными на них эксцентрическими точками. Если на данной башне пришлось вести наблюдения с нескольких эксцентрических точек, а это бывает нередко, то одна из них выбирается за главную и к ней приводятся все наблюдения, или же закладывается точка, близкая к центру яруса, к которой тогда и приводят все наблюдения. Так как связь эксцентрических точек на данной башне выполняется, конечно, с полной точностью, то никаких добавочных ошибок при определении значительных по величине приведений при отнесении наблюдений на главную эксцентрическую точку или на точку, заложенную в центре яруса, мы не вводим. После обработки триангуляции будут получены координаты также и эксцентрических точек,

а после тщательного переноса их на землю будут получены опорные пункты, удобные для использования в городской полигонометрической сети. Вершина башни или колокольни проектируется также на под соответствующего яруса и связывается с эксцентрическими точками, но



Черт. 261

выведенные впоследствии ее координаты служат только для топографических целей. Геодезическая связь как в процессе построения триангуляции, так и в процессе использования триангуляции для обоснования полигонометрической сети осуществляется посредством эксцентрических точек, минуя достаточно неопределенные по их обозначению в натуре вершины башен или колоколен.

### § 73. Предварительное вычисление триангуляции; вычисление центрировок и редукций

Для числового определения центрировок  $c$  и редукций  $r$  необходимо знать длины сторон треугольников триангуляции, правда, достаточно приближенно: чем менее величины приведений, тем более приближенно можно для этой цели знать длины сторон треугольников; обычно можно допустить ошибку в 2–3 единицы в четвертом знаке логарифма стороны. Приближенный вывод длин сторон треугольников для определения величин приведений носит название предварительного вычисления триангуляции. Обычно при этом предварительном вычислении триангу-

ляции образуют треугольники с углами, непосредственно наблюденными и исправленными еще величинами приведений; округляя эти углы до  $0', 1'$ , исправляют их на одну треть невязки в каждом треугольнике и затем вычисляют логарифмы сторон треугольников по четырехзначным логарифмам. В редких случаях, когда на некоторых пунктах приведения значительны, выбирают сперва нужные расстояния грубо с имеющимися картами, с этими расстояниями вычисляют в первом приближении приведения на соответствующих пунктах (где они значительны) и, исправив наблюденные на этих пунктах углы такими приближенными приведениями, образуют треугольники, как выше было указано, для предварительного вычисления сторон.

В триангуляции I и II классов обычно одновременно с выводом сторон из предварительного вычисления триангуляции вычисляют еще сферические избытки  $\epsilon$  треугольников по формуле

$$\epsilon = \frac{ab \sin C}{2R^2} \rho'' = fab \sin C.$$

Здесь  $R$  — средний радиус кривизны эллипсоида под средней широтой треугольника;  $\lg f$  выбирается из специальной таблички; вычисление  $\epsilon$  достаточно вести даже трехзначными логарифмами.

Для вычисления так называемых поправок за кривизну или для редуцирования направлений с эллипсоида на плоскость, в принятой теперь в СССР проекции Гаусса-Крюгера, нужно знать приближенные (до  $0,1$  км) значения прямоугольных координат пунктов триангуляции. Конечно, эти приближенные координаты могут быть вычислены, а в большинстве случаев и действительно вычисляются, с помощью тех же логарифмов длин сторон треугольников, которые получены из описанного предварительного вычисления триангуляции для определения центрировок, редукций и сферических избыточков. Но в самое последнее время стали предпочитать при обработке триангуляции II класса определение приближенных координат для вывода поправок за кривизну производить, минуя вывод длин сторон треугольников, по следующим формулам

$$\left. \begin{aligned} x_3 - x_1 &= \frac{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \alpha - (y_2 - y_1)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{A_1}{k} \\ y_3 - y_1 &= -\frac{(y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \alpha + (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = -\frac{B_1}{k} \\ \operatorname{tg}(1.3) &= -\frac{B_1}{A_1}; d_{1,3} = \frac{x_3 - x_1}{\cos(1.3)} = \frac{y_3 - y_1}{\sin(1.3)} \end{aligned} \right\}, \quad (288)$$

В (288)  $x_3$  и  $y_3$  — координаты третьей, определяемой вершины треугольника,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы соответственно при первой  $(x_1, y_1)$  и второй  $(x_2, y_2)$  вершинах. Конечно, вычисление ведут всегда, идя от обеих из двух известных точек к третьей определяемой, т. е. вычисляют еще формулы

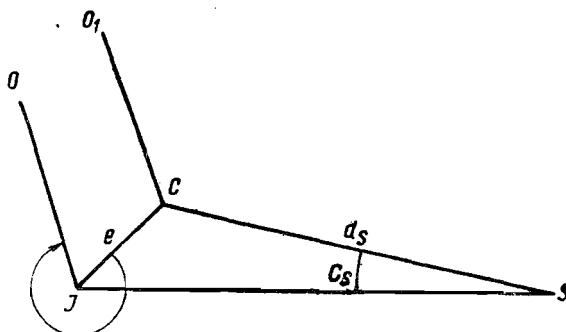
$$\begin{aligned} x_3 - x_2 &= -\frac{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \beta + (y_2 - y_1)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{A_2}{k}, \\ y_3 - y_2 &= -\frac{(y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \beta + (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = -\frac{B_2}{k}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(2.3) = -\frac{B_2}{A_2}; \quad d_{2 \cdot 3} = \frac{x_3 - x_2}{\cos(2.3)} = \frac{y_3 - y_2}{\sin(2.3)}.$$

Нумерация вершин идет по ходу часовой стрелки.

При пользовании таблицами натуральных величин тригонометрических функций и арифмометром, конечно, вывод координат (приближенных) по только что приведенному порядку приводит гораздо скорее к результату, чем при том порядке, когда сперва выводят длины сторон треугольников, а затем по ним вычисляют приращения координат и координаты, предварительно исполнив еще вывод на плоскости по углам, не приведенным к центрам, дирекционных углов сторон треугольников. Попутно при вычислениях по (288) получаются и длины сторон  $d_{1 \cdot 3}$  и  $d_{2 \cdot 3}$ , нужные для вычисления центрировок и сферических избытоков.

Обратимся теперь к самому вычислению центрировок и редукций. Попимая под направлением на предмет  $S$  среднее из отсчетов по верньерам на горизонтальном лимбе при паведении трубы теодолита на этот предмет, будем называть числовое значение направления на  $S$  через  $M^S$ . Если центр инструмента (черт. 262) помещался в точке  $J$ , а



Черт. 262

среднее из отсчетов по верньерам было равно нулю, когда труба теодолита была направлена по  $JO$ , то  $M^S = \angle OJS$ , отсчитываемому от  $JO$  по ходу часовой стрелки. Будем называть направлением на  $S$ , приведенным к центру сигнала  $C$ , то, которое было бы получено при наблюдениях, если бы центр инструмента совпадал с  $C$ , а лимб был бы ориентирован точно так же, как и при наблюдениях из  $J$ . Очевидно, что такое приведенное направление будет измеряться углом  $O_1CS$ , причем  $CO_1$  параллельно  $JO$ , так как при одинаковой ориентировке лимба в  $C$  и в  $J$  равенство нулю среднего из отсчетов по верньерам при наблюдениях в  $C$  будем иметь, когда труба инструмента расположена по направлению  $CO_1$ , параллельному  $JO$ . Величина приведения, т. е. та поправка, которую надо придать к  $M^S$ , чтобы получить приведенное к центру  $C$  направление на  $S$ , будет равна углу  $CSJ$  и для случая, представленного черт. 262, будет положительна. Называя угол  $CSJ$  через  $c_s$ ,  $CS$  через  $d_s$ , угол  $CJO$ , отсчитываемый от направления  $JC$  по ходу часовой стрелки, через  $\Theta$ , имеем из треугольника  $CJS$

$$\frac{\sin c_s}{\sin(M^S + \Theta)} = \frac{e}{d_s}$$

или, вследствие малости угла  $c_s$

$$c_s'' = \frac{e \rho''}{d_s} \sin(M^s + \Theta). \quad (289)$$

Выведенная формула для  $c_s$  является общей, т. е. не изменяющейся своего вида при любых значениях  $M^s$  и  $\Theta$ ; поправка или центрировка  $c_s$ , рассчитанная по этой формуле, всегда алгебраически придается к направлению, наблюденному (из  $J$ ), чтобы получить приведенное направление. Направление  $JO$  называется нулевым направлением. Понятно, что изменения этого нулевого направления, мы будем изменять  $M$  и  $\Theta$  на одну и ту же величину, но с разными знаками, вследствие чего  $c$  будет оставаться постоянной. Если, наблюдая из  $J$  сигналы  $A, B, C, D \dots$ , мы получили для направлений на них значения  $M^A, M^B, M^C, M^D$ , то разности:

$$M^A - M^A, M^B - M^A, M^C - M^A, M^D - M^A \dots$$

назовем соответственно через  $M^A_A, M^B_A, M^C_A, M^D_A$ ; эти разности суть направления, которые мы получили бы, если бы при наблюдениях нулевое направление  $JO$  совпадало с направлением на сигнал  $A$ . Обычно результат наблюдений на станции  $J$  выражают именно в виде чисел  $O, M^B_A, M^C_A, M^D_A \dots$ , т. е. в виде направлений, отнесенных к нулевому направлению на начальной предмет  $A$ . Поэтому и под  $\Theta$  понимают угол, отсчитываемый от направления на центр до направления на тот сигнал, для которого направление принимается равным нулю при выводе направлений на все остальные наблюденные из  $J$  сигналы. На основании сказанного следует формулу (289) переписать так

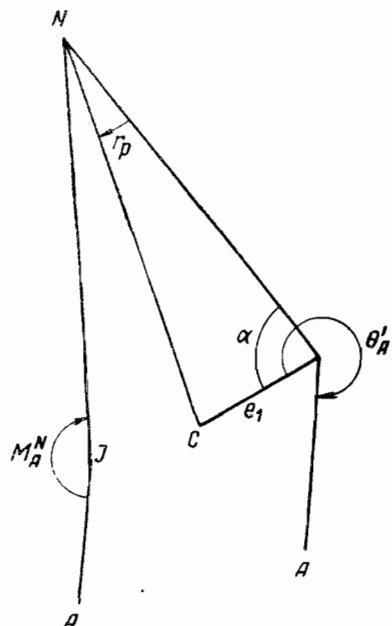
$$c_s'' = \frac{e \rho''}{d_s} \sin(M^s_A + \Theta_A), \quad (290)$$

т. е. указать значком  $A$ , что  $M^s$  и  $\Theta$  отсчитываются от направления с  $J$  на сигнал  $A$  и от направления на  $C$  до направления на  $A$ .

Если на данном пункте  $P$  проекция  $S$  вершины знака (черт. 263) не совпадает с  $C$ , то направление, наблюденное с другого тригонометрического пункта  $N$  на  $P$ , подлежит исправлению или редукции на угол  $r_p$ . Назовем через  $d_p$  расстояние  $NC$  и через  $\alpha$  угол  $NSC$ , имеем

$$r_p'' = \frac{e_1 \rho''}{d_p} \sin \alpha.$$

Если при измерении углов на пункте  $P$  центр инструмента находился в  $J$  и направление на сигнал  $A$  принималось за нулевое, то угол



Черт. 263

$\angle JN$ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от  $JA$ , будет известен и равен  $M_A^N$ . Приняв угол  $ASN$  равным  $M_A^N$ , мы имеем

$$r_p'' = \frac{e_1 \rho''}{d_p} \sin(M_A^N + \Theta'_A). \quad (291)$$

Причем под  $\Theta'_A$  понимается угол, отсчитываемый от направления на центр сигнала до направления на сигнал  $A$  по ходу часовой стрелки. Допущение равенства угла  $ASN$  и  $M_A^N$ , вследствие малого значения  $r_p''$ , не ведет к ощутительной погрешности в правой части формулы (291). Редукция  $r_p''$ , вычисляемая по формуле (291), должна всегда алгебраически прибавляться для приведения направления, наблюденного на вершину знака, к направлению на центр знака.

В триангуляции I класса выполняют вычисление центрировок и редукций по формулам (289) и (291), применяя логарифмы или арифмометр, а при  $e$  или  $e_1$ , меньших 0,1 м, — специальную логарифмическую линейку.

Формулы (289) и (291) напишем еще в таком виде

$$c'' = -\frac{-20,6265}{d_{km}} \sin(M + \Theta) e_{dm}; \quad (292)$$

$$r'' = -\frac{-20,6265}{d_{km}} \sin(M + \Theta') e_{1dm}. \quad (293)$$

Или, обозначая

$$-20,6265 \sin(M + \Theta) = (a), \quad (294)$$

получаем

$$c'' = -\frac{(a)}{d_{km}} e_{dm}; \quad (295)$$

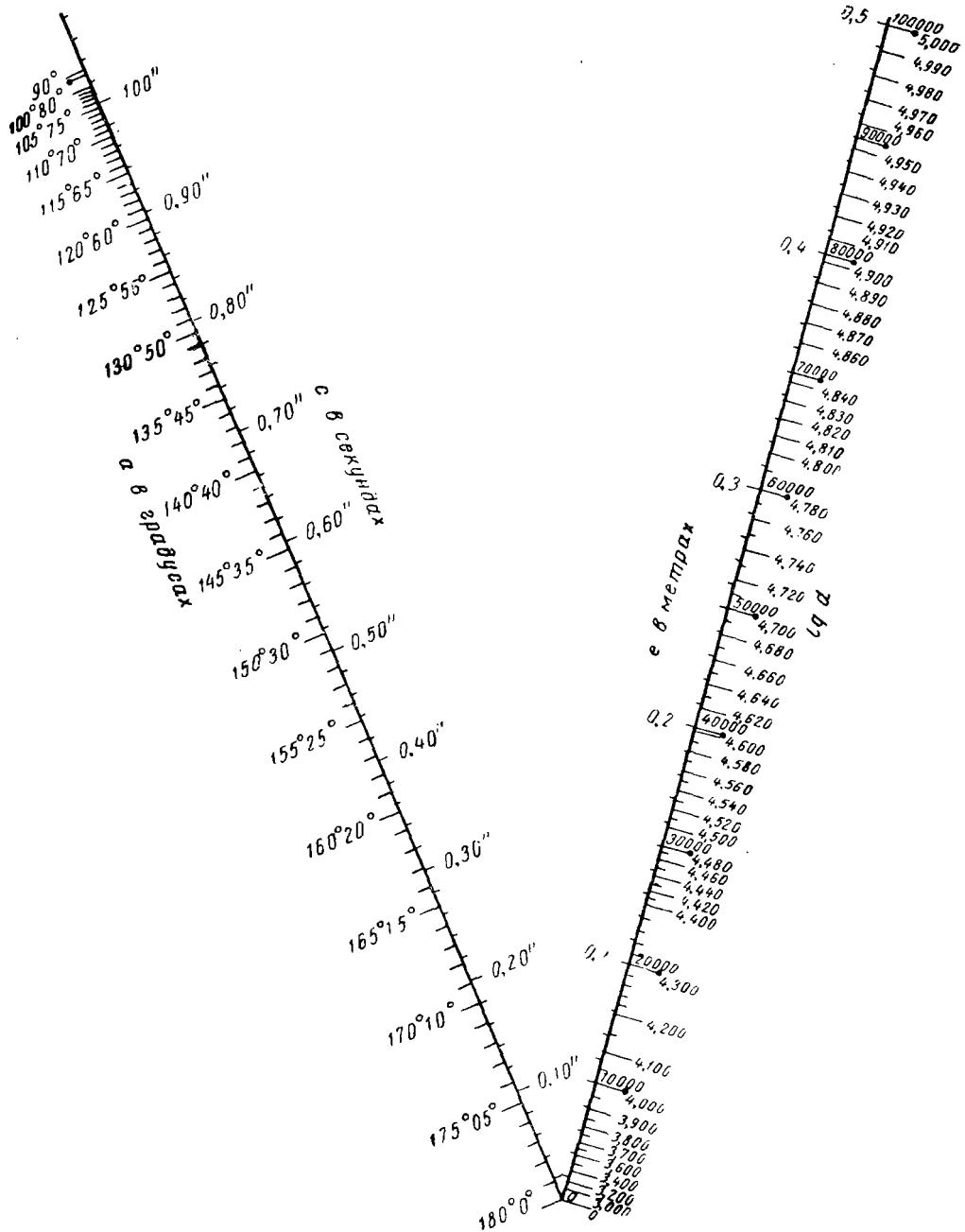
$$r'' = -\frac{(a)}{d_{km}} e_{1dm}. \quad (296)$$

В последних формулах  $d$  выражено в километрах,  $e$  и  $e_1$  — в дециметрах; величины  $a$  извлекаются из таблиц доцента А. С. Филоненко по аргументу  $M + \Theta$  или  $M + \Theta'$ . Формулами (295) и (296) следует пользоваться, применяя арифмометр при  $e > 0,4$  м и логарифмическую линейку при  $e \leq 0,4$  м в триангуляции II и III класса. Округления величин  $a$ , которые даются в таблицах только с двумя десятичными знаками, скажутся даже при  $e$  и  $e_1$  около 2 м и при  $d = 8$  км не более как на 0",02 в  $c$  или  $r$ , что не существенно в триангуляции II класса, а при  $d = 3$  км и при  $e = 2$  м ошибка в  $c$  из-за ошибочности  $a$  не превзойдет 0",05, что допустимо в триангуляции III класса.

Для вычисления  $c$  и  $r$  применяют также разные номограммы. Мы приводим на черт. 264 американскую номограмму. Для получения  $c''$  соединяют прямой линией пометки шкал: « $\lg d$ » и « $\alpha$ » ( $\alpha = M + \Theta$ ).

Далее проводят прямую, параллельную этой первой прямой, через пометку шкалы « $e$ »; эта вторая прямая дает на шкале « $c$ » искомое значение центрировки (или редукции).

При определении приведений необходимо тщательно контролировать как самое определение элементов приведений, так и вычисление



Черт. 264

величин приведений. Поэтому надлежит элементы приведений на каждой станции определять двумя различными способами.

Контроль вычислений хорошо достигается следующим образом. Приняв направление на начальный предмет  $A$  за меридиан, на листе

бумаги (черт. 265) при намеченной произвольно на этом меридиане точке  $J$  строят транспортиром направления на предметы  $B$ ,  $D$  и т. д., а по углу  $\Theta$ —направление на центр сигнала  $C$ .

Отложив в крупном масштабе величину  $e$  на линии  $JC$  (например, в масштабе 1:25, если  $e$  около 2 м, или в масштабе 1:5, если  $e$  менее 0,4 м) получают точку  $C$ , из которой опускают и затем измеряют перпендикуляры  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$ ,  $\Delta_D$ ... на все наблюденные из  $J$  направления.

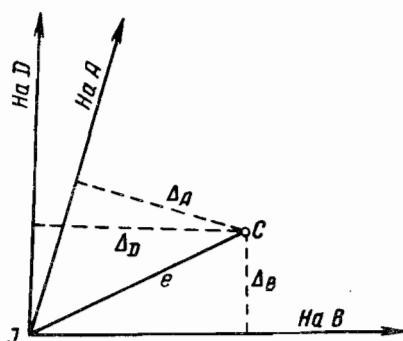
Очевидно

$$c_A'' = -\frac{\Delta_A \cdot \rho''}{d_A}; \quad c_B'' = +\frac{\Delta_B \cdot \rho''}{d_B}; \dots \quad (297)$$

В этих формулах расстояния  $d_A$ ,  $d_B$ , ... определяют или по чертежу сети, или получают их из предварительного вычисления триангуляции.

Знак плюс приписывают, если  $C$  лежит влево от направления, знак минус,— если  $C$  лежит вправо от направления, считаемого, конечно, по прямой от  $J$  на соответствующий геодезический пункт.

Так как в огромном большинстве случаев  $e$  и  $\Theta$  известны во время самих наблюдений, то только что указанный прием вычисления приведений следует рекомендовать выполнять во время полевых работ, параллельно с измерением углов. Вычисленные этим способом центрировки дадут возможность еще во время полевых работ



Черт. 265

судить об угловых невязках в треугольниках триангуляции; окончательные вычисления центрировок должны привести к значениям их, отличающимся не более чем на  $0'',1$  от вычисленных указанным графическим путем.

## Глава XI

# ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО УРАВНИТЕЛЬНЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕТИ; УРАВНИВАНИЕ СТАНЦИЙ

### § 74. Общие соображения

Координаты первых двух точек  $A$  и  $B$  триангуляции не требуют для своего определения угловых измерений в сети: если триангуляция рассматривается расположенной на эллипсоиде, то для определения точки  $A$  служат выведенные из астрономических наблюдений ее широта и долгота, а для определения точки  $B$  — астрономические координаты точки  $A$ , длина основной стороны  $AB$  и астрономический azimuth направления  $AB$ ; если же триангуляция считается расположенной на плоскости, то плоские координаты  $A$  или принимаются произвольными, или для них берут значения, выведенные из вычисления ранее составленной триангуляции в прямоугольных координатах Гаусса-Крюгера, а координаты точки  $B$  определяют по принятым координатам  $A$ , по длине стороны  $AB$  и по azimuthу направления  $AB$ , выведенному из астрономических наблюдений или взятыму из ранее составленной триангуляции. Таким образом, если триангуляция состоит из  $n$  точек, считая и конечные пункты основной ее стороны  $AB$ , то при помощи измерений углов в сети приходится определять положение  $n - 2$  точек относительно точек  $A$  и  $B$  и относительно друг друга. Очевидно, что положение каждой из этих  $n - 2$  точек определяется двумя углами, и, следовательно, для построения триангуляции с  $n$  точками необходимо измерить в ней  $2n - 4$  угла. Но обычно число измеренных углов превышает  $2n - 4$ ; мы всегда имеем в сети избыточно измеренные углы, сверх необходимого числа  $2n - 4$ .

Во-первых, эти избыточные углы служат для обнаружения промахов, возможных в большой работе как при наблюдениях, так и при вычислениях. (При вычислениях сети промахи возможны при расчете приведений, при выписке значений углов из журналов наблюдений и т. п.; при наблюдениях можно ошибиться при определении элементов приведений, а также при наблюдениях удаленных и плохо видимых сигналов случается принимать вместо требуемого другой тригонометрический сигнал, усматриваемый почти в том же направлении.)

Во-вторых, избыточные углы находятся с необходимыми для построения сети углами в определенных, вообще легко устанавливаемых геометрических соотношениях; выражая эти соотношения в виде так называемых *условных* уравнений, мы получаем возможность еще до вычисления триангуляции судить о качестве собранного материала при наблюдениях: величины угловых невязок в треугольниках, в которых измерены все три угла, размеры фигуры погрешности, полу-

чаемой при определении некоторой последующей точки более, чем с двух точек предыдущих и т. п. — указывают нам ясно, достигнута ли была при измерениях углов точность, требуемая целями составления сети.

Наконец, следует отметить, что избыточно наблюденные углы дают материал для обработки сети по способу наименьших квадратов, при которой достигается повышение точности определения координат тригонометрических точек и получается возможность надежно оценить ошибки в вычисленных из триангуляции координатах, азимутах, расстояниях и углах. Эта же оценка точности результатов, полученных из триангуляции, в свою очередь позволяет сделать выводы относительно действия разных причин погрешностей и тем способствует установлению правильных приемов исполнения тригонометрических работ и развитию знаний в области точных измерений.

Отобрав из общего числа углов, измеренных в сети из  $n$  точек, некоторый ряд углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-4}$ , обеспечивающих построение сети, назовем все остальные, избыточно измеренные углы, через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k$ . Очевидно, что значение каждого из избыточных углов может быть определено при помощи углов  $\alpha$ . Обозначая через  $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \dots, \varphi'_k$  значения углов  $\varphi$ , вычисленных по углам  $\alpha$ , можем написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4}) \\ \varphi'_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4}) \\ &\dots \\ \varphi'_k &= f_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4}) \end{aligned} \right\}. \quad (q')$$

Уравнения (q') выводятся из геометрических условий, существующих между углами  $\varphi$  и  $\alpha$ . Вследствие ошибок измерений величины  $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \dots$  не окажутся равными наблюденным величинам  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ . С другой стороны, мы никогда не имеем оснований к выделению из общего числа измеренных углов таких углов  $\alpha$ , числом  $2n - 4$ , при использовании которых для построения сети следовало бы вовсе отбросить все остальные избыточно измеренные углы  $\varphi$ . Если число измеренных углов равно  $2n - 4 + k$ , то мы можем образовать не один, а много рядов по  $2n - 4$ угла в каждом ряде, причем каждый такой ряд приведет к определению всех вершин сети; используя разные ряды углов для построения сети мы, очевидно, будем получать разные ее численные решения, причем оснований для предпочтения одного решения другому иметь не будем. Множественность решений обусловливается, конечно, избыточно измеренными углами, и так как мы не можем отбросить при вычислении сети ни одного угла, то, очевидно, для устранения этой множественности необходимо или требовать, чтобы уравнения (q') удовлетворялись бы при замене в левых их частях  $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \dots$  соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ , или, так как такое требование неосуществимо, перейти к исправлению измеренных углов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  соответственно такими поправками:  $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \dots, \Delta\alpha_{2n-4}, \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \dots, \Delta\varphi_k$ , чтобы одновременно удовлетворялись бы все уравнения следующего вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \Delta\varphi_1 &= f_1(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4} + \Delta\alpha_{2n-4}) \\ \varphi_2 + \Delta\varphi_2 &= f_2(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4} + \Delta\alpha_{2n-4}) \\ &\dots \\ \varphi_k + \Delta\varphi_k &= f_k(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_{2n-4} + \Delta\alpha_{2n-4}) \end{aligned} \right\}. \quad (q)$$

Понятно, что каждый избыточно измеренный угол приводит к одному уравнению вида  $(q)$ , независимому от всех остальных уравнений  $(q)$ . Другими словами, число уравнений  $(q)$  равно числу избыточно измеренных в сети углов. Уравнения  $(q)$  называются **условными**: они вытекают из геометрических условий в сети треугольников и должны строго удовлетворяться с теми значениями углов, которые принимаются при так называемом окончательном вычислении сети, т. е. определении (окончательном) длин сторон треугольников, их азимутов и координат точек сети. Назовем через  $N$  число всех измеренных углов, тогда в свободной сети, т. е. оснований на одной выходной стороне, число  $k$  независимых между собой условных уравнений в сети должно вычисляться по формуле

$$k = N - 2n + 4. \quad (298)$$

Так как

$$N > N - 2n + 4 \quad (299)$$

(иначе сеть будет состоять только из двух точек), то число искомых поправок углов, с которыми должны удовлетворяться условные уравнения  $(q)$ , всегда более числа этих уравнений. Другими словами, удовлетворить всем условным уравнениям мы можем бесчисленным множеством систем поправок измеренных углов.

Задача определения поправок измеренных углов сделается определенной, если, кроме условий, выражаемых уравнениями  $(q)$ , мы свяжем эти поправки еще некоторыми добавочными условиями. Обычно стремятся получить не только единственное, но и вероятнейшее решение сети; другими словами, при уравнительных вычислениях сети находят окончательные значения углов в ней так, чтобы с ними удовлетворились строго условные уравнения и чтобы при этом сумма  $W$  квадратов поправок непосредственно измеренных на станциях сети величин имела относительный минимум. Это последнее требование делает задачу решения уравнений сети вполне определенной, причем решение получится не только единственное, но и вероятнейшее. Говоря о сумме  $W$  квадратов поправок непосредственно измеренных на станциях сети величин, нужно иметь в виду, что почти всегда углы, входящие в условные уравнения, не являются такими непосредственно измеренными величинами. В действительности, если не считать только редких случаев применения так наз. способа повторения, на станциях сети измеряются направления, и каждый угол, вычисляемый в дальнейшем как разность двух направлений, является поэтому функцией непосредственно измеренных величин. Отсюда вытекает заключение, что в сумму  $W$  должны быть введены в качестве слагаемых квадраты ошибок наблюденных непосредственно направлений; но тогда, либо в условных уравнениях сети надлежит заменить углы направлениями и отыскивать из них поправки не углов, а направлений, либо к условным уравнениям присоединить уравнения погрешностей, выражающие углы или их поправки через наблюденные направления и их ошибки. Выбор того или иного пути не произведен, а зависит всецело от того порядка, который имел место при наблюдениях на станциях, при собирании углового материала. Первый путь, приводящий к простой задаче уравнивания **условных наблюдений**<sup>1</sup>, может быть

<sup>1</sup> Именно к нахождению из одних условных уравнений поправок направлений.

применен лишь тогда, когда на каждом пункте сети результат наблюдений выражается одним рядом направлений, которые можно рассматривать за непосредственно измеренные величины, или когда на каждом пункте сети наблюдения дали независимо измеренные углы, не связанные притом никакими условиями на станции. Второй путь должен применяться при строгом уравнивании сети во всех остальных случаях, когда на каждом пункте сети результаты наблюдений не могут быть сведены в одно целое в виде одного ряда направлений; при применении этого второго пути имеем условные уравнения, с входящими в них, в качестве неизвестных, поправками углов, и уравнения погрешностей, выражающие поправки углов через ошибки непосредственно наблюдаемых величин — направлений, и устанавливающие связь между условными уравнениями и функцией  $W$ ; здесь мы сталкиваемся с случаем обработки посредственных наблюдений с условными уравнениями.

Чтобы лучше уяснить высказанное, приведем здесь типические случаи сортирования материала на станциях тригонометрической сети.

*Первый случай.* Как известно, прием измерения направлений состоит из двух полуприемов: в первый полуприем входят наведения трубы и отсчеты по лимбу на предметы  $A, B, C, D, A$ , при движении алидады по ходу часовой стрелки; во второй полуприем, исполняемый после перевода трубы через зенит, входят наведения трубы на предметы  $A, D, C, B, A$ , при движении алидады против хода часовой стрелки; оба полуприема исполняются при одном положении лимба инструмента; при переходе от приема к приему положение лимба изменяется. Пусть с данного тригонометрического пункта должно было наблюдать сигналы  $A, B, C, D, E$ . Допустим, что мы наблюдали направления на эти сигналы  $p$  приемами, причем в каждом приеме визировали на все сигналы, без пропусков какого-нибудь из них в каком-либо приеме. Указанный порядок наблюдений называется наблюдениями полными приемами. Если назвать значения направлений через  $A, B, C, D, E$ , то результат наблюдений  $p$  полными приемами представится в следующем выводе

$$\begin{aligned} A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 &\dots \text{ из I приема} \\ A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 &\dots \text{ из II приема} \\ A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 &\dots \text{ из III приема} \\ A_p, B_p, C_p, D_p, E_p &\dots \text{ из приема } p. \end{aligned}$$

Результаты работы на тригонометрическом пункте выражаются, очевидно, в рассматриваемом случае одним рядом направлений  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m$ , получающихся по формулам

$$A_m = \frac{1}{p} \sum_1^p A; B_m = \frac{1}{p} \sum_1^p B; C_m = \frac{1}{p} \sum_1^p C \dots \quad (300)$$

причем величины  $A_m, B_m, C_m \dots$  надлежит рассматривать как непосредственно измеренные.

*Второй случай.* Если предметы  $A, B, C, D, E, F, H$  нельзя было наблюдать все одновременно в одном приеме и они были разбиты на группы: первую, состоящую из предметов  $A, B, C$ ; вторую — из предметов  $A, D, E$ ; третью — из предметов  $A, F, H$ , — причем каждая группа

направлений наблюдалась своей группой приемов, содержавших каждый наблюдения всех предметов группы; во всех группах общее направление было одно и то же и единственное, и в каждую группу входило более двух предметов, то результат всех этих наблюдений представляется, собственно, в виде углов, отсчитываемых от общего всем группам направления. Если в первой группе были получены в среднем направления  $A_1, B_1, C_1$ ; во второй —  $A_2, D_2, E_2$ ; в третьей —  $A_3, F_3, H_3$ , то значения этих углов, получаемых в результате работы на станции, будут такие

$$\begin{aligned} \text{угла между } A \text{ и } B &\dots \dots \dots B_1 - A_1 = \beta \\ " \quad " \quad A \text{ и } C &\dots \dots \dots C_1 - A_1 = \gamma \\ " \quad " \quad A \text{ и } D &\dots \dots \dots D_2 - A_2 = \delta \\ " \quad " \quad A \text{ и } E &\dots \dots \dots E_2 - A_2 = \epsilon \\ " \quad " \quad A \text{ и } F &\dots \dots \dots F_3 - A_3 = \lambda \\ " \quad " \quad A \text{ и } H &\dots \dots \dots H_3 - A_3 = \mu. \end{aligned}$$

Отличие второго случая от первого заключается, между прочим, в том, что вес  $P_Z$  угла между  $C$  и  $D$  в первом случае будем вычислять по формуле

$$\frac{1}{P_Z} = \frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_D} \quad (301)$$

( $P_C$  и  $P_D$  — веса направлений  $C$  и  $D$ ), а во втором случае по формуле

$$\frac{1}{P_Z} = \frac{1}{P_{D_2}} + \frac{1}{P_{A_2}} + \frac{1}{P_{C_1}} + \frac{1}{P_{A_1}}. \quad (302)$$

*Третий случай.* Пусть направления на предметы  $A, B, C, D, E, F$  с пункта  $O$  наблюдались неполными приемами и в совершенном произвольном порядке, например, пусть получены такие результаты

$$\left. \begin{array}{l} \text{из первого приема} \dots \dots A_1, B_1, C_1, D_1 \dots \dots \\ " \text{второго} \quad " \quad \dots \dots A_2, B_2, - D_2 \dots \dots \\ " \text{третьего} \quad " \quad \dots \dots -, B_3, C_3, -, E_3, F_3 \dots \dots \\ " \text{четвертого} \quad " \quad \dots \dots A_4, -, C_4, D_4, -, F_4 \dots \dots \end{array} \right\}, \quad (s)$$

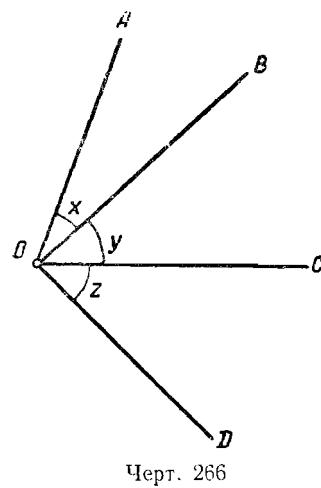
и т. д.

или пусть образовались группы приемов, причем в каждый прием данной группы входили одни и те же предметы, но в разных группах приемов наблюдались различные предметы и общее направление в группе первой и второй было иное, чем в группах первой и третьей и т. д.; или пусть в разных группах имелось не одно, а несколько общих направлений. В рассматриваемом случае вообще результаты наблюдений на тригонометрическом пункте не могут быть сведены в одно целое в виде одного ряда направлений  $A_m, B_m, C_m, D_m, \dots H_m$ , которые можно было бы рассматривать за непосредственно наблюденные величины.

Пример. Предметы  $A, B, C, D$  были наблюдаемы в двух группах приемов: в первой группе шестью приемами наблюдались  $A, B, C, D$ ; во второй группе — шестью же приемами наблюдались  $A$  и  $C$ . Результаты этих наблюдений оказались такие:

из 1 группы:  $A_1 = 0^\circ 0'0'', 0$ ;  $B_1 = 20^\circ 4'12'', 0$ ;  $C_1 = 40^\circ 4'30'', 0$ ;  $D_1 = 80^\circ 6'58'', 0$ ; из 2 группы:  $A_2 = 0^\circ 0'0'', 0$ ;  $C_2 = 40^\circ 4'32'', 2$ .

**Четвертый случай.** На данном тригонометрическом пункте  $O$  наблюдались отдельные углы, независимо друг от друга. Иначе говоря, в каждом приеме наблюдалась только два предмета, причем



Черт. 266

Обозначая угол  $AOB$  через  $x$ , угол  $BOC$  через  $y$  и угол  $COD$  через  $z$  и допуская, что из наблюдений на пункте  $O$  были получены следующие, независимые друг от друга, значения

|                |     |            |
|----------------|-----|------------|
| для угла $AOB$ | ... | $\alpha$   |
| " " $AOC$      | ... | $\beta$    |
| " " $BOC$      | ... | $\epsilon$ |
| " " $COD$      | ... | $\lambda$  |
| " " $BOD$      | ... | $\mu$      |

имеем такие уравнения погрешностей

$$\left. \begin{array}{l} 1) x - \alpha = v_\alpha \\ 2) x + y - \beta = v_\beta \\ 3) y - \epsilon = v_\epsilon \\ 4) z - \lambda = v_\lambda \\ 5) z + y - \mu = v_\mu \end{array} \right\}, \quad (t)$$

из которых можем получить значения углов  $x, y, z$  на станции, если не обращать внимания на условия в сети.

**Пятый случай.** Пусть на тригонометрическом пункте  $O$  наблюдались отдельные углы и при этом были измерены независимо друг от друга все углы, получающиеся при комбинировании по два всех подлежащих наблюдению с  $O$  сигналов  $A, B, C, D, E$ . Пусть были измерены углы:  $AOB, AOC, AOD, AOE, BOC, BOD, BOE, COD, COE, DOE$ , число которых будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , если число направлений  $A, B, C, \dots$  равно  $n$ . В этом случае, как мы уже видели в главе IX, результат работы на пункте  $O$  может быть представлен рядом направлений  $A_m, B_m,$

$C_m, D_m, E_m$ , которые при уравнивании сети можно рассматривать как непосредственно наблюденные величины.

Обратимся теперь снова к задаче строгого уравнивания сети. Прежде всего должно отметить, что в условные уравнения вводятся всегда (за исключением одного случая) с каждой станции лишь углы, необходимые определяющие пучок прямых, идущих со станции на все наблюдавшиеся с нее сигналы; например, в случае черт. 266, в условные уравнения будут введены лишь углы  $x, y$  и  $z$ . Все же остальные углы, наблюденные на станции, хотя и ведут каждый, как избыточно наблюденный, к одному условию, но очевидно, что в каждое такое условие войдут лишь углы с одной станции; так, если на черт. 266 обозначим вероятное значение избыточного угла  $AOC$  через  $u$ , то соответствующее ему условие напишется так:

$$x + y = u. \quad (x)$$

Такие условия, которые выражаются уравнениями между введенными в уравнения сети углами данной станции и избыточными углами той же станции, называются условиями станций. В огромном большинстве случаев такие условия или условные уравнения станций можно очень просто заменить уравнениями погрешностей: так, уравнение (x) заменится вторым уравнением в группе уравнений (t), причем неизвестный угол  $u$  заменяется поправкой  $v_3$ . Если результат работы на тригонометрическом пункте  $O$  представляется в виде одного ряда окончательных направлений  $A, B, C, D$ , то никаких условий станций или соответствующих им уравнений погрешностей не возникает, потому что здесь никаких независимо измеренных углов (избыточных на станции, а не в сети) образовать из чисел  $A, B, C, D$  нельзя. В самом деле, назвав попрежнему необходимые на станции  $O$  углы  $AOB, BOD, COD$  через  $x, y, z$ , а через  $u$  угол  $AOC$ , в этом случае имеем:

$$\begin{aligned} x - (B - A) &= v_B - v_A \\ y - (C - B) &= v_C - v_B \\ u - (C - A) &= v_C - v_A, \end{aligned} \quad (303)$$

но, складывая два первых уравнения, получаем:

$$x + y - (C - A) = v_C - v_A, \quad (304)$$

следовательно,  $x + y$  тождественно равно  $u$  при любых значениях наблюденных величин  $A, B, C$  и их поправок. Таким образом, если на каждом пункте сети результаты наблюдений выражаются в виде одного ряда направлений  $A, B, C, D$ , то, обозначив через  $x_k, y_k, z_k, u_k, \dots$  углы, образованные на пункте  $K$  каждыми двумя смежными направлениями<sup>1</sup>, через  $x_0, y_0, \dots$  — такие же углы на пункте  $O$ , через  $x_b, y_b, \dots$  — такие же углы на пункте  $B$  и составив между этими углами условные уравнения сети:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_0, y_b, z_k) &= 0 \\ f_2(z_0, y_b, u_k) &= 0 \\ \dots &= 0 \\ f_k(x_0, y_a, z_b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

<sup>1</sup> Эти углы и будут необходимы на станции: если со станции наблюдено  $n$  сигналов, то таких углов будет  $n - 1$ .

мы к этим уравнениям должны присоединить только условие минимума функции  $W$  (см. выше), представляющейся в данном случае в виде:

$$W = \Sigma (v_A^2 + v_B^2 + \dots + v_C^2 + \dots) \quad (u)$$

причем суммирование в правой части распространяется на все пункты сети, а под  $v_A, v_B, v_C$  понимаются поправки или ошибки направлений  $A, B, C, D, \dots$ . В условные уравнения (р) можно и должно ввести вместе отыскиваемых вероятных значений углов  $x_0, y_b, z_k \dots$  найденные из наблюдений их значения  $x_0^\circ, y_b^\circ, z_k^\circ$  и поправки  $v_{x_0}, v_{y_b}, v_{z_k}$  этих наблюденных значений. Поэтому, полагая:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0^\circ + v_{x_0}, \\ y_b &= y_b^\circ + v_{y_b}, \\ z_k &= z_k^\circ + v_{z_k}, \end{aligned} \quad (305)$$

уравнения (р) перепишем еще так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} v_{x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial y_b} v_{y_b} + \frac{\partial f_1}{\partial z_k} v_{z_k} + \dots + f_1(x_0^\circ, y_b^\circ, z_k^\circ) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_0} v_{z_0} + \frac{\partial f_2}{\partial y_b} v_{y_b} + \frac{\partial f_2}{\partial u_k} v_{u_k} + \dots + f_2(z_0^\circ, y_b^\circ, u_k^\circ) &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_0} v_{x_0} + \frac{\partial f_k}{\partial y_a} v_{y_a} + \frac{\partial f_k}{\partial z_b} v_{z_b} + \dots + f_k(x_0^\circ, y_a^\circ, z_b^\circ) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

Решение уравнений (v) вместе с уравнениями, вытекающими из условия минимума функции  $W$ , может быть сделано лишь по замене в них поправок углов  $v_x, v_y, \dots$  поправками соответствующих направлений. Мы имеем, конечно:

$$x_0 = x_0^\circ + v_{x_0} = B_0 - A_0 + v_{B_0} - v_{A_0},$$

$$v_{x_0} = v_{B_0} - v_{A_0},$$

$$v_{y_k} = v_{C_k} - v_{B_k}.$$

Делая действительно в уравнениях (v) замену поправок углов разностями поправок соответственных направлений, мы в результате получим систему условных уравнений между независимыми друг от друга поправками направлений; решение этих уравнений при условии минимума правой части уравнения (u) есть известная задача определения неизвестных по способу наименьших квадратов из условных наблюдений.

Следовательно, в случаях первом и пятом задача уравнивания сети сводится к составлению условных уравнений сети между поправками наблюденных направлений и к решению этих уравнений по приему обработки условных наблюдений: здесь должно вести уравнивание направлений.

Обратимся теперь к тем случаям, когда результаты наблюдений на тригонометрическом пункте не могут быть сведены в одно целое в виде одного ряда направлений. Рассмотрим теперь третий случай: введем — как это всегда делают в таких случаях, — в условные уравнения

ния сети углы, отсчитываемые на каждом пункте от направления на один и тот же сигнал (обычно на сигнал, бывший начальным в большинстве исполненных на данном пункте приемов). Следовательно с пункта  $O$  в условные уравнения будут введены:  $\angle AOB = x_0$ ;  $\angle AOC = y_0$ ;  $\angle AOD = z_0$ ;  $\angle AOE = u_0$ ;  $\angle AOF = t_0$ . Обозначая через  $x^{\circ}_0, y^{\circ}_0, z^{\circ}_0, x^{\circ}_k, y^{\circ}_k, \dots$  приближенные значения таких углов, определяющих собой пучки из всех наблюдавшихся соответственно на пунктах  $O, K, \dots$  прямых, и вводя такие приближенные значения в условные уравнения сети, мы придем, конечно, к уравнениям (v). Связывая теперь поправки  $v_{x_0}, v_{y_k}, v_{z_b}, \dots$  с ошибками непосредственно наблюденных величин, мы в рассматриваемом третьем случае получаем, например, из таблицы (s) для пункта  $O$  такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= (B_1 - A_1) - x_0^\circ + v_{B_1} - v_{A_1} \\ v_{y_0} &= (C_1 - A_1) - y_0^\circ + v_{C_1} - v_{A_1} \\ v_{z_0} &= (D_1 - A_1) - z_0^\circ + v_{D_1} - v_{A_1} \\ v_{x_0} &= (B_2 - A_2) - x_0^\circ + v_{B_2} - v_{A_2} \\ v_{z_0} &= (D_2 - A_2) - z_0^\circ + v_{D_2} - v_{A_2} \\ v_{y_0} - v_{x_0} &= (C_3 - B_3) - (y_0^\circ - x_0^\circ) + v_{C_3} - v_{B_3} \\ v_{u_0} - v_{x_0} &= (E_3 - B_3) - (u_0^\circ - x_0^\circ) + v_{E_3} - v_{B_3} \\ &\dots \end{aligned} \right\}. \quad (\tau)$$

Другими словами, в рассматриваемом третьем случае поправка одного и того же угла, введенного в уравнения (v), выражается много-кратно через поправки непосредственно измеренных направлений, и не всегда при помощи уравнений ( $\tau$ ) можно все эти выражения поправки одного и того же угла свести к одному выражению для подстановки в уравнения (v).

В рассматриваемом третьем случае решение задачи получается, применяя так называемый способ Бесселя: оставляя по Бесселю в уравнениях (v) поправки углов  $v_x, v_y, v_z$  и включая в уравнениях ( $\tau$ ) в число величин, определяемых непосредственными наблюдениями, кроме поправок  $v_x, v_y, v_z$  еще ошибки начальных направлений в каждом приеме, т. е. величины  $v_{A_1}, v_{A_2}, v_{A_3}, v_{A_4}, \dots$ , мы приведем задачу определения  $v_x, v_y, v_z$  к задаче обработки, по способу наименьших квадратов, посредственных наблюдений [уравнения ( $\tau$ )] с условными уравнениями; уравнения (v) и ( $\tau$ ) в способе Бесселя решаются (как это и должно быть) вместе, причем условие минимума функции  $W$  дает возможность исключить величины  $v_{B_1}, v_{C_1}$ , т. е. ошибки наблюденных направлений. Сложность рассмотренной задачи очевидна.

В четвертом случае при строгом решении сети, очевидно, необходимо к условным уравнениям ее присоединить условия станций, и тогда будем иметь уравнивание условных наблюдений с определением поправок углов. Но можно в этом четвертом случае условия станций представить в виде уравнений погрешностей [2-е и 5-е уравнения в группе ( $\tau$ )], и тогда, очевидно, мы будем иметь уравнения ( $\tau$ ) с определяемыми из них посредственными наблюдениями углами  $x, y, z$  и условные уравнения (v) между теми же величинами; другими словами, в четвертом случае задача уравнивания сети может быть сведена к обработке по способу наименьших квадратов посредственных наблюдений с условными уравнениями. Таким образом, оказывается, что в первом и пятом

случаях приходится уравнивать направления, а во всех остальных случаях — углы.

На пунктах триангуляции I класса и в основных рядах II класса обычно имеем такую постановку наблюдений, что результат работы на этом пункте представляется одним рядом направлений. То же самое обычно имеем и в базисных сетях.

В редких случаях, в сложных базисных сетях, это иногда не соблюдается, и тогда, при уравнивании такой базисной сети, следует применить способ Бесселя, так как упрощения здесь недопустимы; сохранение полной точности результатов, обеспечивающее строгостью обработки собранных материалов, здесь обязательно.

В заполняющих сетях II класса могут (может быть и не так редко) встречаться случаи, когда наблюдения исполнены на данном пункте в порядке, показанном в третьем случае, т. е. не в одной, а в нескольких группах полных или неполных приемов. Однако, понятно, что здесь о применении способа Бесселя не может быть и речи. Здесь вполне допустимы упрощения в строгой постановке задачи уравнивания сети. Обычно поступают так: уравнения (г) решают отдельно от условных уравнений сети, т. е. производят уравнивание на станциях отдельно от уравновешивания сети. Найденные из такого уравнивания на станциях значения углов, и именно углов между смежными направлениями, рассматриваются далее, как непосредственно и независимо друг от друга наблюденные и вводятся в условные уравнения сети с теми весами их, которые определялись из уравнивания на станциях. Из условных уравнений сети находят затем поправки таких первоначально уравненных на станциях углов под условием минимума  $\Sigma p v^2$ . (где  $p$  — вес угла, а  $v$  — его поправка), не считаясь уже с уравнениями типа (г).

Иногда, пользуясь теми или иными приближенными методами обработки материала на станции, сводят материал в виде нескольких групп полных или неполных приемов на данном пункте (случай третий) к результату в виде одного ряда направлений на этом пункте. Затем такие направления рассматриваются, как непосредственно наблюденные, и в качестве таковых с соответственными их весами вводятся в условные уравнения сети. Далее следует решение этих условных уравнений с нахождением поправок таких направлений под условием минимума  $\Sigma p v^2$ , где  $p$  — вес направления, выведенного из уравнивания станции, а  $v$  — поправка этого направления. Конечно, неправильность таковых приемов очевидна, но практически в заполняющих сетях II класса она приводит лишь к малым, вполне допустимым добавочнымискажениям.

Точно так же поступают в четвертом случае: прежде решения условных уравнений и отдельно от этого решения производят уравнивание углов на станциях, и в последующем такие углы между смежными направлениями рассматривают, как непосредственно наблюденные.

Необходимо здесь же отметить, что иногда, также ради упрощения вычислений, имея на каждом пункте результат наблюдений в виде одного ряда направлений, по этим направлениям вычисляют углы  $x, y, z, \dots$  и в условных уравнениях сети не делают замены поправок этих углов поправками направлений, а, оставляя эти уравнения в виде (v), решают их под условием минимума суммы квадратов поправок углов  $v_{x_0}, v_{y_0}, v_{y_b}, \dots$ ; следует иметь в виду, что число-

высокие значения уравненных углов при таком уравнивании сети по углам, когда наблюдены были направления, получаются иные, чем значения их, выводимые как разности уравненных направлений при обработке той же сети по направлениям, т. е. под условием минимума суммы квадратов поправок направлений. Наконец, нужно отметить, что строгое решение условных уравнений является легко разрешимой задачей лишь в сравнительно простых по конструкции сетях. В сетях с большим числом пересекающихся друг друга диагоналей, особенно соединяющих вершины не смежных треугольников, а также в сетях, образующих замкнутые полигоны (сети с «локами»), задача решения условных уравнений (отдельно от уравнений на станциях) является громоздкой, и приходится или заменять условные уравнения уравнениями погрешностей, связывающими поправки координат пунктов с поправками направлений, или заменять ряды треугольников геодезическими линиями, каждая из которых представляет диагональ соответственного ряда, или разбивать сеть на части. Обо всем этом будет сказано далее; сейчас же важно отметить, что главной задачей уравнивания сети является нахождение таких поправок наблюдаемых углов или направлений, с которыми строго удовлетворялись бы все условные уравнения. Задача нахождения одновременно и вероятнейших значений этих поправок может быть поставлена на второе место в сетях II и низших классов, и допускает поэтому те или иные упрощения в ее решении.

### § 75. Вес функции уравненных элементов при посредственных наблюдениях

Пусть имеем нормальные уравнения для определения неизвестных  $x, y, z, \dots$  в таком виде:

$$\left. \begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \dots + [pal] = 0 \\ [pab]x + [pbb]y + [pbk]z + \dots + [pbl] = 0 \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z + \dots + [pcl] = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}. \quad (306)$$

Допустим, что из этих нормальных уравнений мы определили неизвестные, представив их в виде линейных функций от непосредственно измеренных величин  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , а именно:

$$\left. \begin{array}{l} -x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \dots + \alpha_n l_n \\ -y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \dots + \beta_n l_n \\ -z = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \dots + \gamma_n l_n \\ \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}. \quad (307)$$

Если имеем функцию

$$F = \varphi(X, Y, Z, \dots),$$

то, предполагая возможность приведения ее к линейному виду посредством введения приближенных значений  $X_0, Y_0, Z_0, \dots$  неизвестных, представим эту функцию в таком виде:

$$F = \varphi(X_0, Y_0, Z_0, \dots) + f_1 x + f_2 y + f_3 z + \dots, \quad (308)$$

понимая уже под  $x, y, z, \dots$  в (308) поправки величин  $X_0, Y_0, Z_0, \dots$ . Подставляя (307) в (308), напишем:

$$F = \varphi(X_0, Y_0, Z_0, \dots) + (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1 + \dots)l_1 + (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2 + \dots)l_2 + (f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3 + \dots)l_3 + \dots + (f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n + \dots)l_n.$$

Отсюда вес  $P_f$  нашей функции вычисляется так:

$$\frac{1}{P_f} = \frac{(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1 + \dots)^2}{p_1} + \frac{(f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2 + \dots)^2}{p_2} + \dots + \frac{(f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n + \dots)^2}{p_n}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} = & f_1 f_1 \left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right] + 2f_1 f_2 \left[ \frac{\alpha\beta}{p} \right] + 2f_1 f_3 \left[ \frac{\alpha\gamma}{p} \right] + \dots \\ & + f_2 f_2 \left[ \frac{\beta\beta}{p} \right] + 2f_2 f_3 \left[ \frac{\beta\gamma}{p} \right] + 2f_2 f_4 \left[ \frac{\beta\varepsilon}{p} \right] + \dots \\ & + f_3 f_3 \left[ \frac{\gamma\gamma}{p} \right] + 2f_3 f_4 \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{p} \right] + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Но в § 14 в формулах (65) и (66) было показано, что величины

$$\begin{aligned} Q_{1 \cdot 1} &= \left[ \frac{\alpha\alpha}{p} \right]; Q_{1 \cdot 2} = \left[ \frac{\alpha\beta}{p} \right]; Q_{1 \cdot 3} = \left[ \frac{\alpha\gamma}{p} \right] \dots \\ Q_{2 \cdot 2} &= \left[ \frac{\beta\beta}{p} \right]; Q_{2 \cdot 3} = \left[ \frac{\beta\gamma}{p} \right] \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

суть так называемые весовые коэффициенты.

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_f} = & f_1 f_1 Q_{1 \cdot 1} + 2f_1 f_2 Q_{1 \cdot 2} + 2f_1 f_3 Q_{1 \cdot 3} + 2f_1 f_4 Q_{1 \cdot 4} + \dots \\ & + f_2 f_2 Q_{2 \cdot 2} + 2f_2 f_3 Q_{2 \cdot 3} + 2f_2 f_4 Q_{2 \cdot 4} + \dots \\ & + f_3 f_3 Q_{3 \cdot 3} + 2f_3 f_4 Q_{3 \cdot 4} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

Как определяются весовые коэффициенты, было уже указано в § 14. Именно, если в системе нормальных уравнений (306) мы заменим  $[pal]$  через  $-1$ , а все остальные свободные члены  $[pb], [pc], \dots$  положим равными нулю, то, считая, что  $x$  заменен через  $Q_{1 \cdot 1}$ ,  $y$  — через  $Q_{1 \cdot 2}$ ,  $z$  — через  $Q_{1 \cdot 3}$ ,  $v$  — через  $Q_{1 \cdot 4}$ , и т. д., мы получим из решения такой системы уравнений все  $Q_{1 \cdot k}$ , у которых первый нижний указатель есть единица. Если далее в той же системе уравнений (306), например, в уравнении четвертом по порядку, заменим свободный член через  $-1$ ,

а во всех остальных уравнениях свободные члены заменим нулями, то получим такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [paa]Q_{4 \cdot 1} + [pab]Q_{4 \cdot 2} + [pac]Q_{4 \cdot 3} + [pad]Q_{4 \cdot 4} + [pae]Q_{4 \cdot 5} + \dots &= 0 \\ [pab]Q_{4 \cdot 1} + [pbb]Q_{4 \cdot 2} + [pbc]Q_{4 \cdot 3} + [pbd]Q_{4 \cdot 4} + [pbe]Q_{4 \cdot 5} + \dots &= 0 \\ [pac]Q_{4 \cdot 1} + [fbc]Q_{4 \cdot 2} + [fcc]Q_{4 \cdot 3} + [pcd]Q_{4 \cdot 4} + \dots + [pcm]Q_{4 \cdot m} &= 0 \\ [pad]Q_{4 \cdot 1} + [pbd]Q_{4 \cdot 2} + [pcd]Q_{4 \cdot 3} + [pdd]Q_{4 \cdot 4} + \dots + [pdm]Q_{4 \cdot m} &= 1 \\ [pae]Q_{4 \cdot 1} + [pbe]Q_{4 \cdot 2} + [pce]Q_{4 \cdot 3} + [pde]Q_{4 \cdot 4} + \dots + [fem]Q_{4 \cdot m} &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \right\}. \quad (310)$$

При этом  $Q_{4 \cdot 1} = Q_{1 \cdot 4}$  и вообще  $Q_{s \cdot t} = Q_{t \cdot s}$ . Из системы уравнений (310) определяем все  $Q$ , у которых первый нижний указатель есть четыре. Если нам нужно вычислить вес  $P_f$  только одной функции  $F$ , а весовые коэффициенты не были для других надобностей вычислены, то следует применить иной путь определения  $P_f$ .

Напишем такое равенство

$$\frac{1}{P_f} = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + \dots = [kf]. \quad (311)$$

Сравнение (311) и (309) дает

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= Q_{1 \cdot 1} f_1 + Q_{1 \cdot 2} f_2 + Q_{1 \cdot 3} f_3 + \dots \\ k_2 &= Q_{1 \cdot 2} f_1 + Q_{2 \cdot 2} f_2 + Q_{2 \cdot 3} f_3 + \dots \\ k_3 &= Q_{1 \cdot 3} f_1 + Q_{2 \cdot 3} f_2 + Q_{3 \cdot 3} f_3 + \dots \\ \dots & \end{aligned} \right\}. \quad (312)$$

Помножая уравнения (312): первое на  $[paa]$ , второе на  $[pab]$ , третье — на  $[pac]$ , ..., и складывая, получим на основании уравнений (1)<sub>1</sub>, (2)<sub>1</sub>, (3)<sub>1</sub>, § 14-го

$$[paa]k_1 + [pab]k_2 + [pac]k_3 + \dots = f_1.$$

Точно так же, умножая уравнения (312): первое — на  $[pab]$ , второе — на  $[pbb]$ , третье — на  $[pbc]$ , ..., и складывая затем, получим

$$[pab]k_1 + [pbb]k_2 + [pbc]k_3 + \dots = f_2.$$

Одним словом, мы приходим к такой системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} [paa]k_1 + [pab]k_2 + [pac]k_3 + \dots &= f_1 \\ [pab]k_1 + [pbb]k_2 + [pbc]k_3 + \dots &= f_2 \\ [pac]k_1 + [pbc]k_2 + [fcc]k_3 + \dots &= f_3 \\ [pad]k_1 + [pbd]k_2 + [pcd]k_3 + \dots &= f_4 \\ \dots & \end{aligned} \right\}. \quad (313)$$

Подставляя (313) в (309), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= [paa]k_1^2 + 2[pab]k_1k_2 + 2[pac]k_1k_3 + 2[pad]k_1k_4 + \dots \\ &\quad + [pbb]k_2^2 + 2[pbc]k_2k_3 + 2[pbd]k_2k_4 + \dots \\ &\quad + [fcc]k_3^2 + 2[pcd]k_3k_4 + \dots \\ \dots & \end{aligned} \right\}. \quad (314)$$

Если имеем уравнения погрешностей в таком виде

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1v + \dots + l_1 = \delta_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2v + \dots + l_2 = \delta_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_nv + \dots + l_n = \delta_n \end{array} \right\}, \quad (315)$$

то, как известно,

$$[p/\delta] = [I/\delta\delta],$$

т. е.

$$[p\delta\delta] = [pal]x + [pb]y + [pcl]z + \dots + [pll]. \quad (316)$$

Но, с другой стороны, путем возвведения в квадрат уравнений (315) и складывания их после этого, получим

$$\left. \begin{array}{l} [p\delta\delta] = [paa]x^2 + 2[pab]xy + 2[pac]xz + \dots + 2[pal]x + \\ + [pbb]y^2 + 2[pbc]yz + \dots + 2[pbl]y + \\ + [pcc]z^2 + \dots + 2[pcl]z + \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [pll] \end{array} \right\}. \quad (317)$$

Умножая (316) на два и вычитая затем из него (317), мы будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} [p\delta\delta] = [pll] - \{ [paa]x^2 + 2[pab]xy + 2[pac]xz + 2[pad]xv + \dots \\ + [pbb]y^2 + 2[pbc]yz + 2[pbd]yv + \dots \\ + [pcc]z^2 + 2[pcd]zv + \dots \} \end{array} \right\}, \quad (318)$$

причем в (318) уже не входят члены с  $[pal]$ ,  $[pb]$ , ...

Далее, известно из способа наименьших квадратов, что

$$[p\delta\delta] = [pll \cdot m],$$

если  $m$  — число всех нормальных уравнений.

Другими словами

$$[p\delta\delta] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pb] \cdot 1}{[pbb \cdot 1]} - \frac{[pcl] \cdot 2}{[pcc \cdot 2]} - \dots \quad (319)$$

Сравнение (318) с (319) дает

$$\left. \begin{array}{l} [paa]x^2 + 2[pab]xy + 2[pac]xz + 2[pad]xv + \dots + \\ + [pbb]y^2 + 2[pbc]yz + 2[pbd]yv + \dots + \\ + [pcc]z^2 + 2[pcd]zv + \dots + \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ = \frac{[pal]^2}{[paa]} + \frac{[pb] \cdot 1}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[pcl] \cdot 2}{[pcc \cdot 2]} + \frac{[pd] \cdot 3}{[pdd \cdot 3]} + \dots \end{array} \right\}. \quad (320)$$

Формулу (320) применим к преобразованию выражения (314). Именно, сравнивая (313) с (306), мы заключаем, что если заменить в (306) соответственно  $x$  через  $k_1$ ,  $y$  — через  $k_2$ ,  $z$  — через  $k_3$ ,  $[pal]$  —

через  $-f_1$ ;  $[pb1]$  — через  $-f_2$ ,  $[pcl]$  — через  $-f_3$  и т. д., то  $\frac{1}{P_f}$  выразится правой частью уравнения (320), если над величинами  $f$  проделывать те самые вычислительные действия, которые выполняются при решении нормальных уравнений (306) в гауссовой схеме в таблице с членами:  $[pal]$ ,  $[pb1]$ ,  $[pcl]$ , ...

Другими словами, нужно вычислить

$$\frac{f_1^2}{[paa]}, \text{ соответствующее } \frac{[pal]^2}{[paa]}$$

$$f_2 \cdot 1 = f_2 - \frac{[pab]}{[paa]} f_1, \text{ соответствующее } [pb1 \cdot 1]$$

$$f_3 \cdot 2 = f_3 - \frac{[pac]}{[paa]} f_1 - \frac{[f_2 \cdot 1][pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}, \text{ соответствующее } [pcl \cdot 2]$$

и т. д.

После такого вычисления в добавочном столбце к гауссовой схеме получаем:

$$\frac{1}{P_f} = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} + \dots \quad (321)$$

Пример определения весов уравненных элементов при посредственных наблюдениях. На пункте наблюдали углы между четырьмя направлениями в таком порядке и с такими результатами:

|                                 |                        |           |
|---------------------------------|------------------------|-----------|
| между направлениями 1 и 3 . . . | $61^\circ 33' 12'',8$  | с весом 1 |
| " " 1 и 2 . . .                 | $50^\circ 42' 18'',8$  | " 2       |
| " " 1 и 4 . . .                 | $243^\circ 29' 41'',1$ | " 2       |
| " " 2 и 3 . . .                 | $10^\circ 50' 52'',0$  | " 3       |
| " " 3 и 4 . . .                 | $181^\circ 56' 29'',0$ | " 2       |

За неизвестные примем углы, отсчитываемые от первого направления по ходу часовой стрелки

$$(1,2) = 50^\circ 42' 18'',8 + x$$

$$(1,3) = 61^\circ 33' 12'',8 + y$$

$$(1,4) = 243^\circ 29' 41'',1 + z$$

Уравнения погрешностей напишутся так

$$x + 0'',0 = \delta_1 \dots \text{ с весом 2}$$

$$y + 0'',0 = \delta_2 \dots \text{ с весом 1}$$

$$z + 0'',0 = \delta_3 \dots \text{ с весом 2}$$

$$y - x - 2''.0 = \delta_4 \dots \text{ с весом 3}$$

$$z - y + 0'',7 = \delta_5 \dots \text{ с весом 2}$$

Нормальные уравнения будут такие

$$5x - 3y - . + 6,0 = 0;$$

$$6y - 2z - 7,4 = 0;$$

$$4z + 1,4 = 0.$$

Решение этих уравнений с одновременным нахождением величин  $Q$  приводится в табл. 34.

Таблица 34

| $S$         |        |        |        |        |        |        |                           |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------------------|
| 5           | -3     | 0      | +6,0   | +8,0   | -1,0   | 0      | 0 $Q_{1 \cdot 3} = 0,094$ |
|             | -0,6   | -      | +1,20  | +1,6   | -0,20  | 0      | 0 $Q_{2 \cdot 3} = 0,156$ |
| $x = -0,62$ | 6      | -2     | -7,4   | -6,4   | 0,0    | -1,0   | 0                         |
|             | -1,8   | -      | +3,60  | +4,8   | -0,60  | 0      | 0 $Q_{3 \cdot 3} = 0,328$ |
|             | 4,2    | -2     | -3,80  | -1,6   | -0,60  | -1,0   | 0 $Q_{1 \cdot 2} = 0,187$ |
| $y = +0,96$ |        | -0,476 | -0,905 | -0,381 | -0,143 | -0,238 | 0 $Q_{1 \cdot 1} = 0,312$ |
|             | +4     | +1,4   | +3,4   | 0,0    | 0      | -1,0   | $Q_{2 \cdot 2} = 0,312$   |
|             | -      | -      | -      | -      | -      | -      | -                         |
|             | -0,952 | -1,81  | -0,762 | -0,286 | -0,476 | 0      | -                         |
| $z = +0,13$ |        | +3,048 | -0,41  | +2,638 | -0,286 | -0,476 | -1,0 -                    |

В этой схеме последние три графы отведены для вычислений, связанных с определением  $Q$ . Самое получение величин  $Q$  не помещено в схеме, но, конечно, понятно, что

$$Q_{1 \cdot 3} = \frac{0,286}{3,048}; \quad Q_{2 \cdot 3} = \frac{0,476}{3,048}; \quad Q_{3 \cdot 3} = \frac{1,00}{3,048};$$

$$Q_{1 \cdot 2} = \frac{0,60 + 2 \cdot Q_{1 \cdot 3}}{4,2};$$

$$Q_{1 \cdot 1} = \frac{+1,00 + 0 \cdot Q_{1 \cdot 3} + 3 \cdot Q_{1 \cdot 2}}{5} \text{ и т. д.}$$

Веса уравненных углов будут, следовательно, такие

$$(1,2) \dots \frac{1}{0,312} = 3,21$$

$$(1,3) \dots \frac{1}{0,312} = 3,21$$

$$(1,4) \dots \frac{1}{0,328} = 3,05.$$

Вес уравненного угла (2,3) вычисляется так

$$\frac{1}{P_{2 \cdot 3}} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 2} + Q_{2 \cdot 2} = 0,250; \quad P_{2 \cdot 3} = 4,0.$$

Вес уравненного угла (2,4) вычисляется так

$$\frac{1}{P_{2 \cdot 4}} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3} = 0,452; P_{2 \cdot 4} = 2,21.$$

Вес угла (3,4) будет

$$\frac{1}{P_{3,4}} = Q_{2,2} - 2Q_{2,3} + Q_{3,3} = 0,328; P_{3,4} = 3,05.$$

#### § 76. Уравнивание станции при произвольном порядке наблюдений

Допустим, что мы наблюдали направления на предметы  $A, B, C, E, L, \dots, N$ . Пусть в приеме с номером  $k$  были получены для этих направлений соответственно значения:

$$a_k, b_k, c_k, e_k, l_k, \dots n_k,$$

с весами:

$$x_k, \beta_k, \gamma_k, \varepsilon_k, \lambda_k, \dots v_k.$$

Назовем вероятнейшие значения углов между направлениями на предметы  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $A$  и  $E$ ,  $A$  и  $L, \dots, A$  и  $N$  соответственно через  $X, Y, Z, \dots W \dots$  и пусть

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \lambda_k + \dots + \nu_k \\ \Sigma_k &= \alpha_k a_k + \beta_k b_k + \gamma_k c_k + \varepsilon_k e_k + \dots + \nu_k n_k\end{aligned}$$

Погрешности наблюдаемых величин  $a_k, b_k, c_k, \dots, n_k$  назовем соответственно через:

$$\partial_a^k, \partial_b^k, \partial_c^k, \dots, \partial_n^k.$$

Допустим, что при идеально точной установке алидады в приеме  $k$  на отсчет, равный нулю, визирная плоскость трубы теодолита составила с вертикалом предмета  $A$  угол  $\omega_k$ ; очевидно, что при идеально точном отсчитывании лимба и при идеально точном визировании на  $A$  имели бы  $a_k = \omega_k$ . На основании этого и с указанными обозначениями из приема с номером  $k$  напишем такие уравнения погрешностей

Из уравнений (322) легко написать такие нормальные уравнения

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 w_1 + \beta_1 X + \gamma_1 Y + \varepsilon_1 Z + \dots - \Sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 w_2 + \beta_2 X + \gamma_2 Y + \varepsilon_2 Z + \dots - \Sigma_2 = 0 \\ \vdots \\ \sigma_k w_k + \beta_k X + \gamma_k Y + \varepsilon_k Z + \dots - \Sigma_k = 0 \end{array} \right\}. \quad (323)$$

$$\left. \begin{array}{l} [\beta] X = [\beta b] - \beta_1 \omega_1 - \beta_2 \omega_2 - \beta_3 \omega_3 - \dots \\ [\gamma] Y = [\gamma c] - \gamma_1 \omega_1 - \gamma_2 \omega_2 - \gamma_3 \omega_3 - \dots \\ [\varepsilon] Z = [\varepsilon e] - \varepsilon_1 \omega_1 - \varepsilon_2 \omega_2 - \varepsilon_3 \omega_3 - \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [v] W = [vn] - v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2 - v_3 \omega_3 - \dots \end{array} \right\}. \quad (324)$$

Исключение величин  $\omega$  из системы уравнений (323) и (324) приводит к таким уравнениям

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right\} X - \left[ \frac{\beta \gamma}{\sigma} \right] Y - \left[ \frac{\beta \varepsilon}{\sigma} \right] Z - \dots - \left[ \frac{\beta v}{\sigma} \right] W = [\beta b] - \left[ \frac{\beta \Sigma}{\sigma} \right] \\ - \left[ \frac{\gamma \beta}{\sigma} \right] X + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} Y - \left[ \frac{\gamma \varepsilon}{\sigma} \right] Z - \dots - \left[ \frac{\gamma v}{\sigma} \right] W = [\gamma c] - \left[ \frac{\gamma \Sigma}{\sigma} \right] \\ - \left[ \frac{\varepsilon \beta}{\sigma} \right] X - \left[ \frac{\varepsilon \gamma}{\sigma} \right] Y + \left\{ [\varepsilon] - \left[ \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right] \right\} Z - \dots - \left[ \frac{\varepsilon v}{\sigma} \right] W = [\varepsilon e] - \left[ \frac{\varepsilon \Sigma}{\sigma} \right] \end{array} \right\}. \quad (325)$$

Уравнениями (325) вопрос о строгом уравнивании на станции вполне решается; так как значения весов  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  совершенно произвольны, то уравнения (325) могут быть применены при любом порядке измерения углов на данном пункте.

Будем называть группой приемов несколько приемов, в каждом из которых наблюдались одни и те же предметы и все с одним и тем же весом, меняющимся лишь при переходе от одного приема к другому. Если в группу входило  $r$  приемов, то мы можем взять арифметическую средину по весам для каждого направления, входящего в группу из  $r$  его значений. Такие средние выводы направлений из группы будем рассматривать, как непосредственно наблюденные значения направлений в одном приеме, но с весом, равным сумме весов приемов группы, и именно эти средние выводы из группы вводим в образование уравнений (322) и (325). Если при наблюдениях на данном пункте не оказалось ни одного направления, которое вошло бы во все приемы, то тем не менее, до составления уравнений (322) можно результаты наблюдений всех приемов отнести к одному общему пулевому направлению, пользуясь для этого приближенными значениями углов и приписывая пулевой вес начальному направлению в тех приемах, где оно не наблюдалось; основанием этому служит то, что ряд направлений:  $B, C, D, \dots, K$ , полученных в некотором приеме, мы можем заменить рядом:  $B + q, C + q, D + q, \dots, K + q$ , причем  $q$  — произвольное постоянное, которое мы можем выбрать так, чтобы любое из чисел  $B + q, C + q, \dots$  оказалось бы равным приближенному значению углов между пулевым направлением, не наблюдавшимся в данном приеме, и направлением на соответствующий предмет  $B, C, \dots, K$  в этом приеме.

Прежде чем перейти к примерам на применение уравнений (325), рассмотрим вопрос о нахождении средней ошибки единицы веса. Обозначив через  $R$  число всех наблюденных во всех приемах направлений,  $m$  — число всех приемов,  $n$  — число наблюдавшихся тригонометрических точек и обращаясь к начальным уравнениям (322), по общему правилу напишем, что средняя ошибка единицы веса равна

$$\mu = \sqrt{\frac{[\rho \delta^2]}{R - (m + n - 1)}}, \quad (326)$$

потому что в эти начальные уравнения, кроме искомых  $n - 1$  углов, еще входит  $m$  неизвестных  $\omega$ . Применение (326) осложняется тем, что для получения  $\delta$  необходимо определить все  $\omega$ . Однако, можно указать простое правило для вычислений  $\omega$  и  $\delta$ . Очевидно, на основании (323):

$$\begin{aligned} \sigma_k \omega_k &= \Sigma_k - \beta_k X - \gamma_k Y - \varepsilon_k Z - \dots = \\ &= \alpha_k (a_k - 0) + \beta_k (b_k - X) + \gamma_k (c_k - Y) + \varepsilon_k (e_k - Z) + \dots \\ \omega_k &= \frac{\alpha_k (a_k - 0) + \beta_k (b_k - X) + \gamma_k (c_k - Y) + \varepsilon_k (e_k - Z) + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots + \nu_k}, \end{aligned} \quad (327)$$

т. е.  $\omega_k$  есть среднее по весам из уклонений значений углов, полученных в приеме с номером  $k$ , от их вероятнейших значений. При этом вводим угол, равный нулю, от направления на  $A$  до направления на  $A$ .

Следовательно:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_a^k = \omega_k - a_k \\ \delta_b^k = \omega_k - (b_k - X) \\ \delta_c^k = \omega_k - (c_k - Y) \\ \dots \dots \dots \dots \\ \delta_n^k = \omega_k - (n_k - W) \end{array} \right\}. \quad (328)$$

Величины  $b_k - X, c_k - Y, e_k - Z, \dots$  следует назвать первичными уклонениями наблюденных в приеме  $k$  углов; величины же  $\delta$ , стоящие в уравнениях (328), по смыслу формул суть вторичные уклонения этих же углов. Формулами (327) и (328) вопрос о вычислении  $\mu$  решается для практической цели вполне ясно и просто. Но, конечно, есть и другой способ определения  $\mu$ .

Действительно, обозначив свободные члены уравнений (322) через  $g$  и считая, что система нормальных уравнений образована из системы уравнений (323), служащих для исключения  $\omega$ , и из системы уравнений (325), имеем

$$[p \delta \delta] = [gg \cdot r],$$

предполагая решение обеих систем уравнений в общей схеме и полагая общее число этих уравнений равным  $r$ .

**П р и м е ч а н и е.** Если при наблюдениях на данном пункте не оказалось ни одного направления, которое вошло бы во все приемы, то все-таки все предыдущие выводы и формулы для вычисления коэффициентов в нормальных уравнениях (325) остаются в силе: надлежит лишь при образовании уравнений (322) допустить, что начальное направление в некоторых приемах наблюдалось с весом, равным нулю.

**П р и м ер ура внивания станций.** При работах по градусному измерению на Шпицбергене, на пункте Whales Point результаты измерения горизонтальных направлений оказались следующими, приведенными в табл. 35.

Приняв такие приближенные значения углов

$$\begin{aligned} X_0 &= 43^\circ 26' 43''.0; \\ Y_0 &= 77 39 13 ,0; \\ Z_0 &= 128 40 33 .0; \\ L_0 &= 164 19 15 ,0, \end{aligned}$$

Таблица 35

| №  | Миря     | Hedgehog = X |   |             |   | Whales Head = Y |             |     |   | Agardh = Z   |   |   |              | Cap Lee = L |   |   |   |
|----|----------|--------------|---|-------------|---|-----------------|-------------|-----|---|--------------|---|---|--------------|-------------|---|---|---|
|    |          | a            | α | v           | b | β               | v           | c   | γ | v            | e | ε | v            | t           | λ | v |   |
| 1  | 0°0'0",0 | 2            | - | 43°26'46",1 | 1 | -               | 77°39'13",0 | 1   | - | 128°40'33",3 | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 2  | 0 ,0     | 2            | - | 43 ,5       | 1 | -               | 12 ,0       | 1   | - | 31 ,7        | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 3  | 0 ,0     | 2            | - | 44 ,0       | 1 | -               | 13 ,0       | 1   | - | -            | - | - | -            | -           | - | - | - |
| 4  | 0 ,0     | 2            | - | 39 ,0       | 1 | -               | 10 ,3       | 1   | - | -            | - | - | -            | -           | - | - | - |
| 5  | 0 ,0     | 2            | - | 42 ,4       | 1 | -               | 12 ,9       | 1   | - | -            | - | - | -            | -           | - | - | - |
| 6  | 0 ,0     | 2            | - | 45 ,8       | 1 | -               | -           | -   | - | 35 ,0        | 1 | - | 164°19'16",6 | 1           | - | - | - |
| 7  | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | 15 ,6       | 1   | - | -            | - | - | 15 ,6        | 1           | - | - | - |
| 8  | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 33 ,7        | 1 | - | 15 ,0        | 1           | - | - | - |
| 9  | 0 ,0     | 1            | - | 41 ,3       | 2 | -               | -           | -   | - | -            | - | - | -            | -           | - | - | - |
| 10 | 0 ,0     | 1            | - | -           | - | -               | 12 ,1       | 0,5 | - | 31 ,9        | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 11 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 34 ,8        | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 12 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | 15 ,4        | 1           | - | - | - |
| 13 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | 14 ,9        | 1           | - | - | - |
| 14 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | 13 ,9        | 1           | - | - | - |
| 15 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | 14 ,8        | 1           | - | - | - |
| 16 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | 15 ,5        | 1           | - | - | - |
| 17 | 0 ,0     | 2            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | -            | - | - | -            | -           | - | - | - |
| 18 | -        | -            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 51° 1'18",5  | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 19 | -        | -            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 17 ,7        | 2 | - | -            | -           | - | - | - |
| 20 | -        | -            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 22 ,3        | 1 | - | -            | -           | - | - | - |
| 21 | -        | -            | - | -           | - | -               | -           | -   | - | 0° 0' 0",0   | 2 | - | 35°38'40",2  | 1           | - | - | - |

перейдем от табл. 35 к табл. 36.

$$b'_k = b_k - X_0; \quad c'_k = c_k - Y_0; \quad e'_k = e_k - Z_0; \quad l'_k = l_k - L_0.$$

Теперь ведем подсчеты коэффициентов уравнений (325)

$$[\beta] = 8 \quad [\gamma] = 9 \quad [\varepsilon] = 12 \quad [\lambda] = 9$$

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 = 5 & \sigma_6 = 4 & \sigma_9 = 3 & \sigma_{18} = 3 \\ \sigma_2 = 5 & \sigma_8 = 5 & \sigma_{10} = 1,5 & \sigma_{14} = 3 \\ \sigma_3 = 4 & \sigma_7 = 4 & \sigma_{11} = 3 & \sigma_{15} = 3 \\ \sigma_4 = 4 & \sigma_8 = 4 & \sigma_{12} = 3 & \sigma_{16} = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma_{17} = 3 \\ \sigma_{18} = 2 \\ \sigma_{19} = 2,5 \\ \sigma_{20} = 2 \\ \sigma_{21} = 3 \end{array}$$

$$\left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = 2,68; \quad \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = 2,67; \quad \left[ \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right] = 5,45; \quad \left[ \frac{\lambda^2}{\sigma} \right] = 2,68;$$

$$\left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = 1,15; \quad \left[ \frac{\beta\varepsilon}{\sigma} \right] = 0,60; \quad \left[ \frac{\beta\lambda}{\sigma} \right] = 0,20;$$

$$\left[ \frac{\gamma\varepsilon}{\sigma} \right] = 1,80; \quad \left[ \frac{\gamma\lambda}{\sigma} \right] = 0,25;$$

$$\left[ \frac{\varepsilon\lambda}{\sigma} \right] = 1,12$$

$$[\beta b'] = -0,6; \quad [\gamma c'] = -1,65; \quad [\varepsilon e'] = -1,4; \quad [\lambda l'] = -0,1$$

$$\begin{array}{llll} \Sigma_1 = +3,4 & \Sigma_6 = +6,4 & \Sigma_{11} = -1,1 & \Sigma_{16} = -0,2 \\ \Sigma_2 = -1,8 & \Sigma_7 = +3,2 & \Sigma_{12} = +1,8 & \Sigma_{17} = +0,5 \\ \Sigma_3 = +1,0 & \Sigma_8 = +0,7 & \Sigma_{13} = +0,4 & \Sigma_{18} = -1,5 \\ \Sigma_4 = -6,7 & \Sigma_9 = -3,4 & \Sigma_{14} = -0,1 & \Sigma_{19} = -4,6 \\ \Sigma_5 = -0,7 & \Sigma_{10} = -0,45 & \Sigma_{15} = -1,1 & \Sigma_{20} = +2,3 \\ & & & \Sigma_{21} = -1,8 \end{array}$$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = -2,267; \quad \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = -1,15; \quad \left[ \frac{\varepsilon\Sigma}{\sigma} \right] = -2,472; \quad \left[ \frac{\lambda\Sigma}{\sigma} \right] = +1,488.$$

Отсюда нормальные уравнения напишутся так

$$\begin{aligned} &+5,32 \ x - 1,15 \ y - 0,60 \ z - 0,20 \ l = +1,667, \\ &-1,15 \ x + 6,33 \ y - 1,80 \ z - 0,25 \ l = -0,500, \\ &-0,60 \ x - 1,80 \ y + 6,55 \ z - 1,12 \ l = +1,072, \\ &-0,20 \ x - 0,25 \ y - 1,12 \ z + 6,30 \ l = -1,588. \end{aligned}$$

Необходимо, кроме того, дать числа для определения  $[gg \cdot r]$ .

Так как уравнения (325) являются результатом исключения всех  $\omega$ , число которых есть  $m$ , то, очевидно, нужно предварительно образовать  $[gg \cdot m]$ , к которому и присоединить получаемые при решении уравнений (325) по схеме Гаусса числа, вычисляемые каждое как квадрат свободного члена, деленный на квадратический коэффициент соответственного преобразованного уравнения. На основании уравнений (323) легко видеть:

$$[gg \cdot m] = [pg^2] - \frac{\Sigma_1^2}{\sigma_1} - \frac{\Sigma_2^2}{\sigma_2} - \dots - \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_m}. \quad (329)$$

Таблица 36

| Мнапа | Hedgehog = X |          |     |       | Whales Head = Y |        |      |          | Agardh = Z |       |       |        | Cap Ice = L |           |       |   |   |
|-------|--------------|----------|-----|-------|-----------------|--------|------|----------|------------|-------|-------|--------|-------------|-----------|-------|---|---|
|       | $\alpha$     | $\alpha$ | $v$ | $b'$  | $\beta$         | $v$    | $c'$ | $\gamma$ | $v$        | $e'$  | $a$   | $v$    | $t'$        | $\lambda$ | $v$   |   |   |
| 1     | 0",0         | 2        | -   | +3",1 | 1               | +2",80 | 0",0 | 1        | -0",02     | +0",3 | 1     | +0",13 | -           | -         | -     | - |   |
| 2     | 0,0          | 2        | -   | +0,5  | 1               | +0,20  | -1,0 | 1        | -1,02      | -1,3  | 1     | -1,47  | -           | -         | -     | - |   |
| 3     | 0,0          | 2        | -   | +1,0  | 1               | +0,70  | 0,0  | 1        | -0,02      | -     | -     | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 4     | 0,0          | 2        | -   | -4,0  | 1               | -4,30  | -2,7 | 1        | -2,72      | -     | -     | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 5     | 0,0          | 2        | -   | -0,6  | 1               | -0,90  | -0,1 | 1        | -0,12      | -     | -     | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 6     | 0,0          | 2        | -   | +2,8  | 1               | +2,50  | -    | -        | +2,0       | 1     | +1,83 | +1",6  | 1           | +1",73    | -     | - |   |
| 7     | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | +2,6   | 1    | +2,58    | -          | -     | -     | +0,6   | 1           | +0,73     | -     | - |   |
| 8     | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | +0,7       | 1     | +0,53 | 0,0    | 1           | +0,13     | -     | - |   |
| 9     | 0,0          | 1        | -   | -1,7  | 2               | -2,00  | -    | -        | -          | -     | -     | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 10    | 0,0          | 1        | -   | -     | -               | -      | -0,9 | 0,5      | -0,92      | -     | -     | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 11    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -1,1  | 1     | -1,27  | -           | -         | -     | - |   |
| 12    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | +1,8       | 1     | +1,63 | -      | -           | -         | -     | - |   |
| 13    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -     | -     | +0,4   | 1           | -0,53     | -     | - |   |
| 14    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -     | -     | -0,1   | 1           | +0,03     | -     | - |   |
| 15    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -     | -     | -1,1   | 1           | -0,97     | -     | - |   |
| 16    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -     | -     | -0,2   | 1           | -0,07     | -     | - |   |
| 17    | 0,0          | 2        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -     | -     | +0,5   | 1           | +0,63     | -     | - |   |
| 18    | -            | -        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -1,5  | 1     | -1,66  | -           | -         | -     | - |   |
| 19    | -            | -        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | -2,3  | 2     | -2,46  | -           | -         | -     | - |   |
| 20    | -            | -        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | +2,3  | 1     | +2,14  | -           | -         | -     | - |   |
| 21    | -            | -        | -   | -     | -               | -      | -    | -        | -          | 0,0   | 2     | -      | -1,8        | 1         | -1,50 | - | - |

Поэтому для нашего примера:

$$[pg^2] = 92,975; \quad \left[ \frac{\Sigma^2}{\sigma} \right] = 44,722;$$

$$[gg \cdot m] = 48,203$$

$g$  — свободный член уравнений (322).

Приведем теперь в табл. 37 решение уравнений (325).

Таблица 37

|               |         |               |              |                    |
|---------------|---------|---------------|--------------|--------------------|
| +5,32         | -1,15   | -0,60         | -0,20        | -1,667             |
| +0,3134       | +6,330  | -1,80         | -0,25        | + 0,500            |
| -0,0486       | -0,2486 | -0,1297       | -0,4323      | - 0,3603           |
| +0,0195       | +6,0814 | -1,9297       | -0,6823      | + 0,1397           |
| +0,0037       | -0,0230 | -6,550        | -1,120       | - 1,072            |
| $x = +0,288$  | -0,0145 | -0,0677       | -0,2256      | - 0,1880           |
|               | +0,0548 | -0,6123       | -0,2165      | - 0,0443           |
|               |         | +5,870        | -1,5621      | - 1,2157           |
| $y = +0,0173$ |         |               | +6,300       | + 1,588            |
|               |         | +0,2071       | -0,7519      | - 0,6267           |
|               |         | -0,0344       | -0,0766      | + 0,0157           |
|               |         | $z = +0,1727$ | -0,4157      | - 0,3236           |
|               |         |               | +5,0558      | + 0,6534           |
|               |         |               | $l = -0,129$ | +48,203            |
|               |         |               |              | - 0,5224           |
|               |         |               |              | - 0,0032           |
|               |         |               |              | - 0,2518           |
|               |         |               |              | - 0,0844           |
|               |         |               |              | [gg · r] = 47,3412 |

$$x = +0'',288$$

$$X = 43^\circ 26' 43'',29$$

$$y = +0,017$$

$$Y = 77 39 13 ,02$$

$$z = +0,173$$

$$Z = 128 40 33 ,17$$

$$l = -0,129$$

$$L = 164 19 14 ,87$$

$$R = 53$$

$$m + n - 1 = 25$$

$$m = 21$$

$$R - (m + n - 1) = 28$$

$$n = 5$$

$$m + n - 1 = 25$$

$$\mu = \sqrt{\frac{47,3412}{28}} = \sqrt{1,6897} = \pm 1'',30.$$

Первичные уклоны  $v$  выписаны в табл. 36; по ним величины  $\omega$  получаются следующие:

$$\begin{array}{llll} \omega_1 = +0,58 & \omega_6 = +1,21 & \omega_{11} = -0,42 & \omega_{16} = -0,02 \\ \omega_2 = -0,46 & \omega_7 = +0,83 & \omega_{12} = +0,54 & \omega_{17} = +0,21 \\ \omega_3 = +0,17 & \omega_8 = +0,16 & \omega_{13} = +0,18 & \omega_{18} = -0,83 \\ \omega_4 = -1,75 & \omega_9 = -1,33 & \omega_{14} = +0,01 & \omega_{19} = -1,97 \\ \omega_5 = -0,25 & \omega_{10} = -0,31 & \omega_{15} = -0,32 & \omega_{20} = +1,08 \\ & & & \omega_{21} = -0,50 \end{array}$$

Вторичные уклонения или погрешности  $\delta$  наблюденных направлений даны в табл. 38.

Таблица 38

| № приемов   | Мира     |          | Hedgehog |          | Whales Head |          | Agardh   |          | Cap Lee |           |
|-------------|----------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|----------|---------|-----------|
|             | $\delta$ | $\alpha$ | $\beta$  | $\gamma$ | $\delta$    | $\gamma$ | $\delta$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\lambda$ |
| 1           | +0°,585  | 2        | -2",225  | 1        | -0",60      | 1        | +0",45   | 1        | .       | —         |
| 2           | -0°,46   | 2        | -0°,67   | 1        | -0°,56      | 1        | +1°,01   | 1        | .       | —         |
| 3           | +0°,17   | 2        | -0°,54   | 1        | -0°,19      | 1        | —        | —        | —       | —         |
| 4           | -1°,754  | 2        | +2°,55   | 1        | -0°,97      | 1        | —        | —        | —       | —         |
| 5           | -0°,25   | 2        | +2°,64   | 1        | +0°,13      | 1        | —        | —        | —       | —         |
| 6           | +1°,21   | 2        | -1°,29   | 1        | —           | —        | -0°,62   | 1        | -0°,52  | 1         |
| 7           | +0°,83   | 2        | —        | —        | +1°,75      | 1        | —        | —        | +0°,10  | 1         |
| 8           | +0°,16   | 2        | —        | —        | —           | —        | -0°,37   | 1        | +0°,03  | 1         |
| 9           | -1°,333  | 1        | +0°,67   | 2        | —           | —        | —        | —        | —       | —         |
| 10          | -0°,31   | 1        | —        | —        | -0°,61      | 0,5      | —        | —        | —       | —         |
| 11          | -0°,42   | 2        | —        | —        | —           | —        | -0°,85   | 1        | —       | —         |
| 12          | +0°,54   | 2        | —        | —        | —           | —        | -1°,09   | 1        | —       | —         |
| 13          | +0°,18   | 2        | —        | —        | —           | —        | —        | —        | -0°,35  | 1         |
| 14          | +0°,01   | 2        | —        | —        | —           | —        | —        | —        | -0°,02  | 1         |
| 15          | -0°,32   | 2        | —        | —        | —           | —        | —        | —        | +0°,65  | 1         |
| 16          | -0°,02   | 2        | —        | —        | —           | —        | —        | —        | +0°,05  | 1         |
| 17          | +0°,21   | 2        | —        | —        | —           | —        | —        | —        | -0°,42  | 1         |
| 18          | —        | —        | —        | —        | -0°,83      | 1        | +0°,83   | 1        | —       | —         |
| 19          | —        | —        | —        | —        | -1°,97      | 0,5      | +0°,49   | 2        | —       | —         |
| 20          | —        | —        | —        | —        | +1°,08      | 1        | -1°,08   | 1        | —       | —         |
| 21          | —        | —        | —        | —        | —           | —        | -0°,50   | 2        | +1°,00  | 1         |
| $p\delta^2$ | 14,9566  |          | 15,1654  |          | 8,7085      |          | 6,4900   |          | 2,0058  |           |

Внизу таблицы подписаны для каждого направления  $[p\delta^2]$ . Общая сумма  $[p\delta^2]$  оказывается равной 47,3265.

Так как углы  $X, Y, Z, L, Y - X, Z - Y, \dots$  войдут затем в уравнение сети, то приведенное уравнивание станций должно, конечно, закончиться определением весовых коэффициентов  $Q_{1 \cdot 1}, Q_{1 \cdot 2}, Q_{2 \cdot 3}, \dots$

### § 77. Упрощенные способы уравнивания станций; британский прием (видоизмененный)

Можно доказать, что при всяком порядке расположения наблюдений на станции вероятнейшее значение угла, образованного двумя одинаково наблюдавшимися направлениями (т. е. с одинаковыми весами во всех тех приемах, в которые входило любое из этих направлений),

равно среднему арифметическому из наблюденных в разных приемах значений этого угла. Отсюда вытекает, что вероятнейшее значение любого угла близко к среднему арифметическому выводу из наблюденных значений этого угла, и что этот средний арифметический вывод можно всегда принять за первое приближение при отыскании вероятнейшего значения угла.

Допустим, что мы для  $X_0, Y_0, Z_0, L_0 \dots$  приняли значения, равные соответственно арифметическим срединам из наблюденных значений углов  $X, Y, Z, L \dots$ . Вводя в (323) и (324) поправки углов  $x, y, z, l, \dots$ , определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} X &= X_0 + x \\ Y &= Y_0 + y \\ Z &= Z_0 + z \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

мы в уравнениях (324) будем иметь

$$[\beta\delta] = 0; \quad [\gamma c] = 0; \quad [\varepsilon e] = 0; \quad \dots \quad [vn] = 0,$$

если только все  $a$  равны нулю, т. е. если все направления до вывода  $X_0, Y_0, Z_0 \dots$  были приведены к некоторому нулевому направлению на предмет  $A$ . Очевидно, что уравнения (324) в данном случае напишутся так

$$\left. \begin{aligned} x &= - \frac{[\beta\omega]}{[\beta]} \\ y &= - \frac{[\gamma\omega]}{[\gamma]} \\ z &= - \frac{[\varepsilon\omega]}{[\varepsilon]} \\ l &= - \frac{[\lambda\omega]}{[\lambda]} \end{aligned} \right\}. \quad (330)$$

При указанном выборе  $X_0, Y_0, Z_0 \dots$  величины  $x, y, z, l$  будут весьма малы, и в первом приближении надлежит положить:

$$x' = 0; \quad y' = 0; \quad z' = 0; \quad l' = 0 \dots$$

Приняв это, на основании (327) будем иметь

$$\omega'_k = \frac{b_k \beta_k + \gamma_k c_k + \varepsilon_k l_k + \dots}{z_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots}. \quad (331)$$

По (331) вычислим первые приближенные значения  $\omega'$  для всех приемов и теперь по (330) найдем вторые приближения

$$\left. \begin{aligned} x'' &= - \frac{[\beta\omega']}{[\beta]} \\ y'' &= - \frac{[\gamma\omega']}{[\gamma]} \\ z'' &= - \frac{[\varepsilon\omega']}{[\varepsilon]} \end{aligned} \right\}. \quad (332)$$

Теперь вычисляем по (327) вторые приближения для  $\omega$

$$\omega''_k = \frac{\beta_k(b_k - x'') + \gamma_k(c_k - y'') + \varepsilon_k(e_k - z'') + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots}. \quad (333)$$

Далее можем определить

$$x''' = -\frac{[\beta\omega'']}{[\beta]}$$

$$y''' = -\frac{[\gamma\omega'']}{[\gamma]}$$

$$z''' = -\frac{[\varepsilon\omega'']}{[\varepsilon]}.$$

Затем по  $x''', y''', z''', \dots$  определим указанным же приемом  $\omega'''_1, \omega'''_2, \dots \omega'''_k, \dots$  и т. д.

Описанный прием определения поправок углов на практике легко проводится в простых и понятных схемах вычисления, причем в большинстве случаев достаточно остановиться на выводе  $x'', y'', z'' \dots$

Однако, в действительности обычно применяют несколько иной прием, который носит название британский прием уравнивания, потому что он был применен англичанами при обработке триангуляций Британии и Ирландии. Британский прием приводит, как показывает опыт, к более точным результатам.

Представим себе, как и ранее, что все наблюденные направления мы привели к некоторому нулевому, которое и приняли за первое направление, затем по каждому направлению, из приведенных таким образом его значений, вывели арифметическую средину, которую и приняли за приближенное значение этого направления. Запомеровав все направления, будем иметь

$$X = (I, II) = II - I,$$

$$Y = (I, III) = III - I,$$

$$Z = (I, IV) = IV - I,$$

$$L = (I, V) = V - I.$$

Назав приближенные значения направлений, выведенные как арифметические средины из наблюденных и приведенных к нулю их значений, через  $I_0, II_0, III_0, IV_0 \dots$ , примем:

$$I = I_0 + (1),$$

$$II = II_0 + (2),$$

$$III = III_0 + (3).$$

. . . . .

Следовательно, (1), (2), (3) ... будут искомыми поправками величин  $I_0, II_0, III_0, \dots$

Обращаясь к уравнению (322), мы отмечаем, что при вышеуказанной предварительной обработке материала и при указанных обозначениях все величины  $a_k$  обращаются в нули; величины  $b_k, c_k, e_k \dots$  являются уклонениями наблюденных значений направлений от  $II_0, III_0, IV_0, \dots; X, Y, Z \dots$ , стоящие в правых частях уравнений (322) и

в уравнениях (323), обращаются в поправки  $x, y, z, \dots$  этих углов, вследствие чего:

$$\begin{array}{ll} x \text{ можно заменить через (2) — (1)} \\ y & " " " (3) — (1) \\ z & " " " (4) — (1) \end{array}$$

. . . . .

и уравнения (322) переписать так

$$\begin{aligned} \delta_a^k - \omega_k &= 0 \\ b_k + \delta_b^k - \omega_k &= (2) - (1) \\ c_k + \delta_c^k - \omega_k &= (3) - (1) \\ e_k + \delta_e^k - \omega_k &= (4) - (1) \end{aligned}$$

Полагая

$$\omega_k - (1) = u_k, \quad (334)$$

имеем

$$\left. \begin{array}{l} \delta_a^k = u_k + (1) \\ b_k + \delta_b^k = u_k + (2) \\ c_k + \delta_c^k = u_k + (3) \\ e_k + \delta_e^k = u_k + (4) \end{array} \right\}. \quad (335)$$

Полагая в первом приближении (1), (2), (3), (4) равными нулю, из (335) находим первое приближение для  $u_k$

$$u'_k = \frac{\beta_k b_k + \gamma_k c_k + \varepsilon_k e_k + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots}. \quad (336)$$

Применим теперь уравнения (335), написанные для всех приемов, к определению, например, неизвестных (1) и (2), воспользовавшись при этом величинами  $u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_k \dots$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta'_a &= (1) + u'_1 \quad b_1 + \delta'_b = (2) + u'_1 \\ \delta''_a &= (1) + u'_2 \quad b_2 + \delta''_b = (2) + u'_2 \\ \delta'''_a &= (1) + u'_3 \quad b_3 + \delta'''_b = (2) + u'_3 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \delta_a^k &= (1) + u'_k \quad b_k + \delta_b^k = (2) + u'_k \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко получаем (помня, что  $\frac{[\beta b]}{[\beta]} = 0$ )

$$(1)' = -\frac{[\alpha u']}{[\alpha]}, \quad (2)' = -\frac{[\beta u']}{[\beta]}, \quad (3)' = -\frac{[\gamma u']}{[\gamma]}. \quad (337)$$

Теперь второе приближение для  $u_k$  получится из (335) так

$$u_k'' = \frac{\alpha_k (0 - (1)') + \beta_k (b_k - (2)') + \gamma_k (c_k - (3)') + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots},$$

а вторые приближения для (1), (2), (3) ... очевидно будут

$$(1)'' = -\frac{[\alpha u'']}{[\alpha]}, \quad (2)'' = -\frac{[\beta u'']}{[\beta]}, \quad (3)'' = -\frac{[\gamma u'']}{[\gamma]}. \quad (338)$$

В практике очень часто довольствуются выводом (1)', (2)', (3)'; эти величины отличаются обычно только в сотых долях секунды от вероятнейших значений соответствующих поправок.

Пример. Возьмем те же наблюдения на Whales Point, которые были обработаны в § 76. С приближенными значениями углов

$$X_0 = 43^{\circ}26'43'',0$$

$$Y_0 = 77^{\circ}39'13',0$$

$$Z_0 = 128^{\circ}40'33',0$$

$$L_0 = 164^{\circ}19'15',0$$

приводим все направления к нулевому направлению на Миру и получаем табл. 39.

Таблица 39

| № при-<br>емов | Мира           |    | Hedgehog = X    |   | Whales<br>Head = Y |     | Agardh = Z      |    | Cap Lce = L    |   |
|----------------|----------------|----|-----------------|---|--------------------|-----|-----------------|----|----------------|---|
|                | a              | α  | b               | β | c                  | γ   | e               | ε  | l              | λ |
| 1              | 0°0'0",0       | 2  | 43°26'46",1     | 1 | 77°39'13",0        | 1   | 128°40'33",3    | 1  | —              | — |
| 2              | 0,0            | 2  | 43,5            | 1 | 12,0               | 1   | 31,7            | 1  | —              | — |
| 3              | 0,0            | 2  | 44,0            | 1 | 13,0               | 1   | —               | —  | —              | — |
| 4              | 0,0            | 2  | 39,0            | 1 | 10,3               | 1   | —               | —  | —              | — |
| 5              | 0,0            | 2  | 42,4            | 1 | 12,9               | 1   | —               | —  | —              | — |
| 6              | 0,0            | 2  | 45,8            | 1 | —                  | —   | 35,0            | 1  | 164°19'16",6   | 1 |
| 7              | 0,0            | 2  | —               | — | 15,6               | 1   | —               | —  | 15,6           | 1 |
| 8              | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | 33,7            | 1  | 15,0           | 1 |
| 9              | 0,0            | 1  | 41,3            | 2 | —                  | —   | —               | —  | —              | — |
| 10             | 0,0            | 1  | —               | — | 12,10,5            | —   | —               | —  | —              | — |
| 11             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | 31,9            | 1  | —              | — |
| 12             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | 34,8            | 1  | —              | — |
| 13             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | —               | —  | 15,4           | 1 |
| 14             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | —               | —  | 14,9           | 1 |
| 15             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | —               | —  | 13,9           | 1 |
| 16             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | —               | —  | 14,8           | 1 |
| 17             | 0,0            | 2  | —               | — | —                  | —   | —               | —  | 15,5           | 1 |
| 18             | —              | —  | —               | — | 13,0               | 1   | 31,5            | 1  | —              | — |
| 19             | —              | —  | —               | — | 13,0               | 0,5 | 30,7            | 2  | —              | — |
| 20             | —              | —  | —               | — | 13,0               | 1   | 35,3            | 1  | —              | — |
| 21             | —              | —  | —               | — | —                  | —   | 33,0            | 2  | 13,2           | 1 |
|                | 0°0'0",0       | 32 | 43°26'42",93    | 8 | 77°39'12",82       | 9   | 128°40'32",88   | 12 | 164°19'14",99  | 9 |
|                | I <sub>0</sub> |    | II <sub>0</sub> |   | III <sub>0</sub>   |     | IV <sub>0</sub> |    | V <sub>0</sub> |   |

Внизу таблицы выписаны средние арифметические (по весам) из наблюденных направлений и суммы  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ ,  $[\gamma]$ ,  $[\varepsilon]$ ,  $[\lambda]$ .

Теперь составляем табл. 40 уклонений от I<sub>0</sub>, II<sub>0</sub>, III<sub>0</sub>, ...

Дальнейшие вычисления поведем иначе, чем это обычно делается по британскому приему; именно, пользуясь таблицей 40, непосредственно из нее вычислим

$$(1)' = -\frac{[\alpha u']}{[\alpha]}, \quad (2)' = -\frac{[\beta u']}{[\beta]}, \dots,$$

Таблица 40

| №№<br>при-<br>емов | $a$  | $\alpha$ | $b$    | $\beta$ | $c$    | $\gamma$ | $e$    | $\varepsilon$ | $i$    | $\lambda$ | $u'$   | $z$ |
|--------------------|------|----------|--------|---------|--------|----------|--------|---------------|--------|-----------|--------|-----|
| 1                  | 0",0 | 2        | +3",17 | 1       | -0",18 | 1        | +0",42 | 1             | ..     | ..        | +0",75 | 5   |
| 2                  | 0",0 | 2        | -0",57 | 1       | -0",82 | 1        | -1",18 | 1             | ..     | ..        | -0",29 | 5   |
| 3                  | 0",0 | 2        | +1",07 | 1       | +0",18 | 1        | ..     | ..            | ..     | ..        | +0",31 | 4   |
| 4                  | 0",0 | 2        | -3",93 | 1       | -2",52 | 1        | ..     | ..            | ..     | ..        | -1",61 | 4   |
| 5                  | 0",0 | 2        | -0",53 | 1       | +0",08 | 1        | ..     | ..            | ..     | ..        | -0",11 | 4   |
| 6                  | 0",0 | 2        | -1",87 | 1       | ..     | ..       | +2",12 | 1             | +1",61 | 1         | +1",32 | 5   |
| 7                  | 0",0 | 2        | ..     | ..      | +2",78 | 1        | ..     | ..            | +0",61 | 1         | +0",35 | 4   |
| 8                  | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | +0",82 | 1             | +0",01 | 1         | +0",21 | 4   |
| 9                  | 0",0 | 1        | -1",63 | 2       | ..     | ..       | ..     | ..            | ..     | ..        | -1",69 | 3   |
| 10                 | 0",0 | 1        | ..     | ..      | -0",72 | 0,5      | ..     | ..            | ..     | ..        | -0",24 | 1,5 |
| 11                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | -0",98 | 1             | ..     | ..        | 0",33  | 3   |
| 12                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | +1",92 | 1             | ..     | ..        | -0",64 | 3   |
| 13                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | ..     | ..            | +0",41 | 1         | +0",14 | 3   |
| 14                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | ..     | ..            | -0",09 | 1         | -0",03 | 3   |
| 15                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | ..     | ..            | -1",09 | 1         | -0",36 | 3   |
| 16                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | ..     | ..            | -0",19 | 1         | -0",06 | 3   |
| 17                 | 0",0 | 2        | ..     | ..      | ..     | ..       | ..     | ..            | +0",51 | 1         | +0",17 | 3   |
| 18                 | ..   | ..       | ..     | ..      | +0",18 | 1        | 1",38  | 1             | ..     | ..        | -0",60 | 2   |
| 19                 | ..   | ..       | ..     | ..      | +0",18 | 0,5      | -2",18 | 2             | ..     | ..        | -1",71 | 2,5 |
| 20                 | ..   | ..       | ..     | ..      | +0",18 | 1        | +2",42 | 1             | ..     | ..        | +1",30 | 2   |
| 21                 | ..   | ..       | ..     | ..      | ..     | ..       | -0",12 | 2             | -1",79 | 1         | -0",52 | 3   |
|                    | 32   | -0",04   | 8      | -0",03  | 9      | +0",04   | 12     | -0",01        | 9      | ..        | ..     | ..  |

В нижней строке табл. 40 выписаны суммы  $(b\beta)$ ,  $(\gamma c)\dots$ , а в графе 12 помещены первые приближения для  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3\dots$ , вычисленные по формуле (336).

тогда как собственно в британском приеме вычисляют так: из всех чисел каждой строки табл. 40 вычитают стоящее в той же строке  $u'$  и образуют новую таблицу с числами в строке с номером  $k$

$$-u'_k, \quad b_k - u'_k, \quad c_k - u'_k, \quad e_k - u'_k, \quad l_k - u'_k,$$

а затем вычисляют:

$$(1)' = -\frac{[zu']}{[z]}, \quad (2)' = -\frac{[\beta(b-u')]}{[\beta]}, \quad (3)' = -\frac{[\gamma(c-u')]}{[\gamma]},$$

причем очевидно, что вычитания для образования новой таблицы совершаю излишни.

Пользуясь табл. 40, получаем

$$-[zu'] = -0,87; \quad -[\beta u'] = +1,81; \quad -[\gamma u'] = +0,38 \\ -[\varepsilon u'] = +1,46; \quad -[\lambda u'] = -1,72.$$

Отсюда:

$$(1)' = -0,03; \quad (2)' = +0,22; \quad (3)' = +0,04; \quad (4)' = +0,12; \quad (5)' = -0,19.$$

С найденными величинами образуем табл. 41 путем вычитания из  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $i$ , помещенных в табл. 40, соответственно величин  $(1)', (2)', (3)', (4)', (5)'$ . По числам, заключенным в строке  $k$  табл. 41, выводим:

$$u''_k = \frac{-(1)' \alpha_k - (2)' \beta_k + (3)' \gamma_k + \dots}{z_k + \beta_k + \gamma_k + \dots}.$$

Таблица 41

|    | $a - (1)'$ | $\alpha$ | $b - (2)'$ | $\beta$ | $c - (3)'$ | $\gamma$ | $c - (4)'$ | $\varepsilon$ | $l - (5)'$ | $\lambda$ | $u''$  | $\sigma$ |
|----|------------|----------|------------|---------|------------|----------|------------|---------------|------------|-----------|--------|----------|
| 1  | +0",03     | 2        | +2",95     | 1       | +0",14     | 1        | +0",30     | 1             | —          | —         | +0",69 | 5        |
| 2  | +0",03     | 2        | +0",35     | 1       | -0",86     | 1        | -1",30     | 1             | —          | —         | -0",35 | 5        |
| 3  | +0",03     | 2        | -0",85     | 1       | +0",14     | 1        | —          | —             | —          | —         | +0",26 | 4        |
| 4  | +0",03     | 2        | -4",15     | 1       | -2",56     | 1        | —          | —             | —          | —         | -1",66 | 4        |
| 5  | +0",03     | 2        | -0",75     | 1       | +0",04     | 1        | —          | —             | —          | —         | -0",16 | 4        |
| 6  | +0",03     | 2        | +2",65     | 1       | —          | —        | +2",00     | 1             | +1",80     | 1         | +1",30 | 5        |
| 7  | +0",03     | 2        | —          | —       | +2",74     | 1        | —          | —             | +0",80     | 1         | -0",90 | 4        |
| 8  | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | +0",70     | 1             | -0",20     | 1         | +0",24 | 4        |
| 9  | +0",03     | 1        | -1",85     | 2       | —          | —        | —          | —             | —          | —         | -1",22 | 3        |
| 10 | +0",03     | 1        | —          | —       | -0",76     | 0,5      | —          | —             | —          | —         | -0",24 | 3        |
| 11 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | -1",10     | 1             | —          | —         | -0",35 | 3        |
| 12 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | +1",80     | 1             | —          | —         | +0",62 | 3        |
| 13 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | —          | —             | +0",60     | 1         | +0",22 | 3        |
| 14 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | —          | —             | +0",10     | 1         | -0",05 | 3        |
| 15 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | —          | —             | -0",90     | 1         | -0",28 | 3        |
| 16 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | —          | —             | 0",00      | 1         | +0",02 | 3        |
| 17 | +0",03     | 2        | —          | —       | —          | —        | —          | —             | +0",70     | 1         | +0",26 | 3        |
| 18 | —          | —        | —          | —       | +0",14     | 1        | -1",50     | 1             | —          | —         | -0",68 | 2        |
| 19 | —          | —        | —          | —       | +0",14     | 0,5      | -2",30     | 2             | —          | —         | -1",81 | 2,5      |
| 20 | —          | —        | —          | —       | +0",14     | 1        | +2",30     | 1             | —          | —         | +1",22 | 2        |
| 21 | —          | —        | —          | —       | —          | —        | 0",00      | 2             | -1",60     | 1         | -0",53 | 3        |
|    | 32         |          | 8          |         | 9          |          |            | 12            |            | 9         |        |          |

Затем, пользуясь непосредственно таблицей 41, выводим

$$-[xu''], \quad -[\beta u''], \quad -[\gamma u''], \dots$$

и получаем далее (1)"', (2)"', (3)''' по формулам (338)

$$-[au''] = -2,06; \quad -[\beta u''] = +2,36; \quad -[\gamma u''] = +0,80; \quad -[\varepsilon u''] = +1,99;$$

$$-[\lambda u''] = -2,18$$

$$(1)'' = -0",064; \quad (2)'' = +0",295; \quad (3)'' = +0",088; \quad (4)'' = +0",166;$$

$$(5)'' = -0",242.$$

С этими значениями поправок мы получаем следующие значения самих направлений и углов

$$I = 359^{\circ}59'59",936$$

$$II = 43^{\circ}26'43",225$$

$$X = 43^{\circ}26'43",289$$

$$III = 77^{\circ}39'12",908$$

$$Y = 77^{\circ}39'12",972$$

$$IV = 128^{\circ}40'33",046$$

$$Z = 128^{\circ}40'33",110$$

$$V = 164^{\circ}19'14",748$$

$$L = 164^{\circ}19'14",812$$

Как видно, наибольшее различие найденных значений углов от выведенных в § 76 не превышает 0",07.

Взятый пример, очевидно, является невыгодным для применения британского приема уравнивания. Очевидно, что выгоды этого приема — в быстроте получения результата — сказываются ярко в тех случаях, когда на станции наблюдалось много предметов при малом числе групп приемов, помимо подгрупп

пой совокупность приемов, в которых состав предметов при переходе от приема к приему не изменяется и в каждом из которых веса наблюдаемых направлений все равны между собой (изменяясь лишь от приема к приему). При большом числе предметов получается большое число нормальных уравнений (325), вследствие чего строгое уравнивание становится затруднительным. При большом числе групп приемов составление таблиц 40 и 41 и вывод (1), (2), (3) ... становится громоздким и делает маловыгодным применение британского приема, если стремиться к определению поправок с ошибками, меньшими 0",05 секунды.

### § 78. О выводе весов уравненных на станции (на пункте) направлений или углов. Метод Гельмерта

#### 1. Условия, при которых результат наблюдений на тригонометрическом пункте может быть представлен в виде одного ряда направлений

Допустим, что на тригонометрическом пункте мы наблюдали направления на  $n$  предметов. Если результат этих наблюдений может быть представлен в виде одного ряда направлений, тогда, очевидно, будем иметь при любых (целых) значениях  $r$  и  $s$ , лежащих между единицей и  $n$ , следующее равенство

$$\frac{1}{p_{r,s}} = \frac{1}{p_r} + \frac{1}{p_s} \quad (339)$$

или, обозначая величину, обратную весу, через  $q$

$$q_{r,s} = q_r + q_s. \quad (339')$$

При этом под  $p_s$  и  $p_r$  понимаются веса окончательно установленных направлений  $s$  и  $r$ , а под  $p_{r,s}$  — вес угла между этими направлениями, полученного в результате обработки всего собранного на станции материала. С другой стороны, если за неизвестные, подлежащие определению из уравнивания на станции, примем углы  $X, Y, Z, \dots$ , отсчитываемые все от направления первого, то, применяя (339') к всевозможным углам, написав на основании (309) § 75:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 + q_2 = Q_{1 \cdot 1} \\ q_1 + q_3 = Q_{2 \cdot 2} \\ \dots \dots \\ q_1 + q_n = Q_{n-1 \cdot n-1} \end{array} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_2 + q_3 = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 2} + Q_{2 \cdot 2} \\ q_2 + q_4 = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3} \\ q_2 + q_5 = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4} \\ \dots \dots \\ q_2 + q_n = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1} \end{array} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_3 + q_4 = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3} \\ q_3 + q_5 = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4} \\ \dots \dots \\ q_3 + q_n = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1} \end{array} \right\} \quad (c)$$

Для пояснения получения уравнений группы (б) укажем, что  $q_{2 \cdot n}$  соответствует углу:

$$(2 \cdot n) = (1 \cdot n) - (1 \cdot 2).$$

Поэтому в (309) § 75:

$$f_1 = -1; f_2 = f_3 = \dots = f_{n-2} = 0; f_{n-1} = +1.$$

В группе уравнений (а) всех уравнений  $n - 1$ ; в группе (б) ...  $(n - 2)$ ; в группе (с) ...  $(n - 3)$ , и т. д. Очевидно, число всех уравнений, связывающих  $q$  и  $Q$ , будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; в них войдет  $\frac{n(n-1)}{2}$  коэффициентов  $Q$  и  $n$  величин  $q$ .

При произвольном расположении наблюдений на станции результат уравнивания этих наблюдений представляется в виде углов. Чтобы получилась возможность замены этих уравненных на станции углов одним рядом направлений с весами, обратными величинам  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ , для этого необходимо иметь вполне определенное решение задачи: по  $\frac{n(n-1)}{2}$  величинам  $Q$ , уже получившимся в результате обработки станции, вычислить  $n$  величины  $q$  из  $\frac{n(n-1)}{2}$  уравнений типа (а), (б), (с) ... Очевидно, задача эта вообще неопределенная. Только при  $n = 3$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 3,$$

т. е. мы приходим к существенному выводу, что если  $n = 3$ , то при любом порядке наблюдений на станции результат их представляется в виде одного ряда направлений.

При  $n > 3$  нужно, очевидно, связать величины  $Q$  добавочными условиями, число которых равно:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Только тогда, когда эти  $\frac{n(n-3)}{2}$  добавочные условия между величинами  $Q$  существуют или так или иначе устанавливаются, результат на станции представится в виде одного ряда направлений при  $n > 3$ .

Эти  $\frac{n(n-3)}{2}$  условия можно легко отыскать таким образом: складывая первое из уравнений группы (а) с каждым из остальных, мы получим

$$\left. \begin{aligned} 2q_1 + q_2 + q_3 &= Q_{1 \cdot 1} + Q_{2 \cdot 2} \\ 2q_1 + q_2 + q_4 &= Q_{1 \cdot 1} + Q_{3 \cdot 3} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ 2q_1 + q_2 + q_n &= Q_{1 \cdot 1} + Q_{n-1 \cdot n-1} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Вычитая же из первого уравнения группы (д) первое уравнение группы (б), из второго уравнения группы (д) второе уравнение группы (б), и т. д., будем иметь

$$q_1 = Q_{1 \cdot 2} = Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = \dots = Q_{1 \cdot n-1}. \quad (e)$$

Уравнения (e) дают  $n - 2$  условий между величинами  $Q$ . Складывая второе из уравнений группы (a) со всеми последующими в этой группе, получим

$$\left. \begin{array}{l} 2q_1 + q_3 + q_4 = Q_{2 \cdot 2} + Q_{3 \cdot 3} \\ 2q_1 + q_3 + q_5 = Q_{2 \cdot 2} + Q_{4 \cdot 4} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ 2q_1 + q_3 + q_n = Q_{2 \cdot 2} + Q_{n-1 \cdot n-1} \end{array} \right\}. \quad (f)$$

Из первого уравнения группы (f) придется вычесть первое уравнение группы (c), из второго уравнения группы (f) — второе уравнение группы (c) и т. д. Выполнив это, получим

$$q_1 = Q_{2 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 4} = Q_{2 \cdot 5} = \dots = Q_{2 \cdot n-1}. \quad (g)$$

Продолжая поступать таким образом, мы, очевидно, образуем всего условий

$$(n-2) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + \dots + 2 = \frac{n}{2}(n-3),$$

т. е. столько, сколько и нужно.

Следовательно, чтобы результат уравнивания станции выразился одним рядом направлений, нужно, чтобы

$$\begin{aligned} Q_{1 \cdot 2} &= Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = \dots = Q_{1 \cdot n-1} = Q_{2 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 4} = \dots = Q_{2 \cdot n-1} = \\ &= Q_{3 \cdot 4} = Q_{3 \cdot 5} = \dots = Q_{3 \cdot n-1} = \dots = Q_{n-3 \cdot n-2} = Q_{n-3 \cdot n-1} = Q_{n-2 \cdot n-1}. \end{aligned} \quad (h)$$

Как увидим, эти условия соблюдаются: 1) при наблюдениях направлений на пункте в одной группе полных приемов; 2) при исполнении наблюдений отдельных углов во всех комбинациях с одним и тем же весом для всех комбинаций (способ Шрейбера, старый ганноверский способ Гаусса).

Исчерпывается ли лишь этими случаями соблюдение необходимых  $\frac{n}{2}(n-3)$  условий между  $Q$ ? До недавнего времени склонны были давать на этот вопрос положительный ответ, по работы проф. Н. А. Урмаева в Научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии дали иное решение этого вопроса. Именно, проф. Урмаевым доказано, что если углы на пункте измерены во всех комбинациях, причем отношение  $\frac{p_{1 \cdot i} p_{1 \cdot k}}{p_{i \cdot k}}$  остается постоянным при всех  $i$  и  $k$ , то результат уравнивания таких углов приведет к одному ряду направлений.

Для доказательства возьмем случай наблюдения пяти направлений с пункта. Называя через  $x, y, z, t$  углы соответственно между направлениями 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, допустим, что измерены были углы:

|     |                           |
|-----|---------------------------|
| 1.2 | с весом $p_{1 \cdot 2}$ ; |
| 1.3 | " $p_{1 \cdot 3}$ ;       |
| 1.4 | " $p_{1 \cdot 4}$ ;       |
| 1.5 | " $p_{1 \cdot 5}$ ;       |
| 2.3 | " $p_{2 \cdot 3}$ ;       |
| 2.4 | " $p_{2 \cdot 4}$ ;       |
| 2.5 | " $p_{2 \cdot 5}$ ;       |
| 3.4 | " $p_{3 \cdot 4}$ ;       |
| 3.5 | " $p_{3 \cdot 5}$ ;       |
| 4.5 | " $p_{4 \cdot 5}$ .       |

Нормальные уравнения, соответствующие этим измерениям, напишутся так

$$\left. \begin{array}{l} (p_{1 \cdot 2} + p_{2 \cdot 3} + p_{2 \cdot 4} + p_{2 \cdot 5})x - p_{2 \cdot 3} \cdot y - p_{2 \cdot 4} \cdot z - p_{2 \cdot 5} \cdot t + A = 0 \\ - p_{2 \cdot 3} \cdot x + (p_{1 \cdot 3} + p_{2 \cdot 3} + p_{3 \cdot 4} + p_{3 \cdot 5})y - p_{3 \cdot 4} \cdot z - p_{3 \cdot 5} \cdot t + B = 0 \\ - p_{2 \cdot 4} \cdot x - p_{3 \cdot 4} \cdot y + (p_{1 \cdot 4} + p_{2 \cdot 4} + p_{3 \cdot 4} + p_{4 \cdot 5})z - p_{4 \cdot 5} \cdot t + C = 0 \\ - p_{2 \cdot 5} \cdot x - p_{3 \cdot 5} \cdot y - p_{4 \cdot 5} \cdot z + (p_{1 \cdot 5} + p_{2 \cdot 5} + p_{3 \cdot 5} + p_{4 \cdot 5})t + D = 0 \end{array} \right\}. \quad (340)$$

С другой стороны, называя попрежнему через  $q_k$  величину, обратную весу уравненного направления с номером  $k$ , имеем на основании (q) и (h)

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_{1 \cdot 2} = Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = Q_{1 \cdot 5} = Q_{2 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 4} = Q_{2 \cdot 5} = Q_{3 \cdot 4} = Q_{3 \cdot 5} = Q_{4 \cdot 5}; \\ Q_{1 \cdot 1} &= q_1 + q_2; \quad Q_{3 \cdot 3} = q_1 + q_4; \\ Q_{2 \cdot 2} &= q_1 + q_3; \quad Q_{4 \cdot 4} = q_1 + q_5. \end{aligned}$$

Так как в (340) величины  $A, B, C, D$  соответствуют  $[raw], [pbw], [pcw], [pdw]$  (или по другим обозначениям  $[pal], [tbl], [pcl], [ndl]$ ), то «неопределенное» решение нормальных уравнений согласно (68)

$$\left. \begin{array}{l} -x = (q_1 + q_2)A + q_1B + q_1C + q_1D \\ -y = q_1A + (q_1 + q_3)B + q_1C + q_1D \\ -z = q_1A + q_1B + (q_1 + q_4)C + q_1D \\ -t = q_1A + q_1B + q_1C + (q_1 + q_5)D \end{array} \right\}. \quad (341)$$

Из уравнений (341) легко получаем

$$\left. \begin{array}{l} q_3B = q_2A + (x - y) \\ q_4C = q_2A + (x - z) \\ q_5D = q_2A + (x - t) \end{array} \right\}. \quad (342)$$

После подстановки этих выражений  $B, C, D$  в первое из уравнений (341) получаем

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2)A + \frac{q_1q_2}{q_3}A + \frac{q_1q_2}{q_4}A + \frac{q_1q_2}{q_5}A + \frac{q_1(x - y)}{q_3} + \frac{q_1(x - z)}{q_4} + \\ + \frac{q_1(x - t)}{q_5} + x = 0 \end{aligned}$$

или

$$(q_1 + q_2)A + q_1q_2 \cdot A \left( \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \frac{1}{q_5} \right) + q_1 \left( \frac{x - y}{q_3} + \frac{x - z}{q_4} + \frac{x - t}{q_5} \right) + x = 0.$$

Обозначим сумму:  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = p$ .

Так как

$$q_1 + q_2 + q_1q_2 \left( \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \frac{1}{q_5} \right) = q_1 q_2 \left[ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \frac{1}{q_5} \right],$$

то далее имеем

$$pA + \frac{x - y}{q_2q_3} + \frac{x - z}{q_2q_4} + \frac{x - t}{q_2q_5} + \frac{x}{q_1q_2} = 0;$$

$$pA + (p_1p_2 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5)x - p_2p_3 \cdot y - p_2p_4 \cdot z - p_2p_5 \cdot t = 0.$$

Сравнивая коэффициенты этого последнего уравнения с соответственными коэффициентами первого из уравнений (340), получаем

$$\frac{p_2 \cdot p_3}{p} = p_{2 \cdot 3}; \quad \frac{p_2 \cdot p_4}{p} = p_{2 \cdot 4}; \quad \frac{p_2 \cdot p_5}{p} = p_{2 \cdot 5}; \quad \frac{p_1 \cdot p_2}{p} = p_{1 \cdot 2}.$$

Точно так же после подстановки  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , определяемых уравнениями (342), во второе, третье и четвертое из уравнений (341) и после соответствующих небольших преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{p_1 p_3}{p} &= p_{1 \cdot 3}; \quad \frac{p_3 p_4}{p} = p_{3 \cdot 4}; \quad \frac{p_3 p_5}{p} = p_{3 \cdot 5}; \\ \frac{p_1 p_4}{p} &= p_{1 \cdot 4}; \quad \frac{p_4 p_5}{p} = p_{4 \cdot 5}; \\ \frac{p_1 p_5}{p} &= p_{1 \cdot 5}.\end{aligned}$$

Другими словами, в общей форме мы приходим к соотношению:

$$\frac{p_i \cdot p_h}{p} = p_{i \cdot h}. \quad (343)$$

Далее имеем

$$\frac{p_{1 \cdot 2} \cdot p_{1 \cdot 3}}{p_{2 \cdot 3}} = \frac{p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p}{p^2 \cdot p_2 \cdot p_3} = \frac{p_1^2}{p}.$$

Точно так же окажется

$$\frac{p_{1 \cdot 2} \cdot p_{1 \cdot 4}}{p_{2 \cdot 4}} = \frac{p_{1 \cdot 2} \cdot p_{1 \cdot 5}}{p_{2 \cdot 5}} = \frac{p_{1 \cdot 3} \cdot p_{1 \cdot 4}}{p_{3 \cdot 4}} = \frac{p_{1 \cdot 3} \cdot p_{1 \cdot 5}}{p_{3 \cdot 5}} = \frac{p_{1 \cdot 4} \cdot p_{1 \cdot 5}}{p_{4 \cdot 5}} = \frac{p_1^2}{p}.$$

Таким образом, условия (h), при которых результат обработки станции представляется в виде одного ряда направлений, будут соблюдены, если при измерении углов во всех комбинациях так распределим веса измерения этих углов, чтобы для всех них соблюдалось:

$\frac{p_{1 \cdot i} \cdot p_{1 \cdot h}}{p_{i \cdot h}}$  равно постоянному.

Этой теоремой приходится пользоваться при составлении программы наблюдений на пунктах сложной базисной сети при выгоднейшем распределении в ней весов.

## 2. Вывод весов уравненных направлений (или углов); метод Гельмерта

Прежде всего остановимся на методе Гельмерта. Допустим, что мы на данном пункте имеем  $n$  направлений, подлежащих наблюдению. Пусть мы выполнили наблюдения на этом пункте в некотором произвольном порядке. По формулам § 76 мы выведем (это показано и в примере, приведенном в том же параграфе) вероятнейшие значения углов:

$$\begin{array}{lll}(1.2) & \text{между направлениями } 1 \text{ и } 2 \\(1.3) & " & 1 \text{ и } 3 \\(1.4) & " & 1 \text{ и } 4 \\& \vdots & \vdots \\(1.n) & " & 1 \text{ и } n\end{array}$$

Далее, пользуясь правилами § 77, мы можем вычислить весовые коэффициенты:  $Q_{1 \cdot 1}, Q_{1 \cdot 2}, \dots, Q_{1 \cdot n-1}, Q_{2 \cdot 2}, Q_{2 \cdot 3}, \dots, Q_{2 \cdot n-1}, Q_{n-1 \cdot n-1}$  и после этого, пользуясь формулой (309), можем вычислить веса любых уравненных на станции углов, т. е. веса не только углов (1.2), (1.3), (1.4) ... (1.n), но и вообще любого угла ( $i \cdot k$ ) между любыми направлениями  $i$  и  $k$ , входящими в серию направлений 1, 2, 3 ...  $n$ .

Таким образом, если бы дело сводилось к получению уравненных на станции углов, то нам нужно было бы только остановиться на применении теоретических обоснований § 75 и 76 к некоторым типовым случаям сортирования материала на пунктах триангуляции, а также на возможных упрощениях вычислений.

Но посмотрим, нельзя ли, хотя бы и приближенно, представить результат собранного материала на станции в виде одного ряда направлений в тех случаях, когда заранее известно не соблюдаются условия для этого, указанные в разделе 1 настоящего параграфа.

Назовем величину, обратную весу угла (*s.t.*), через  $q_{s.t}$ . Тогда напишем табл. 42 для величин  $q_{s.t}$ :

Таблица 42

| У г л ы   | У г л ы  |
|---|--|
| $1.2 \dots q_{1 \cdot 2} = Q_{1 \cdot 1}$         | $2.3 \dots q_{2 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 2} + Q_{2 \cdot 2}$       |
| $1.3 \dots q_{1 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 2}$         | $2.4 \dots q_{2 \cdot 4} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3}$       |
| $1.4 \dots q_{1 \cdot 4} = Q_{3 \cdot 3}$         | $2.5 \dots q_{2 \cdot 5} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4}$       |
| $1.5 \dots q_{1 \cdot 5} = Q_{4 \cdot 4}$         | $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$  |
| $\dots \dots \dots \dots \dots$                   |  |
| $1.n-1 \dots q_{1 \cdot n-1} = Q_{n-2 \cdot n-2}$ | $2.n-1$  |
| $1.n \dots q_{1 \cdot n} = Q_{n-1 \cdot n-1}$     | $2.n \dots q_{2 \cdot n} = Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1}$ |

| У Г Л Ы  | У Г Л Ы  |
|--|--|
| $3.4 \dots q_{3 \cdot 4} = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3}$             | $s.t \dots q_{s \cdot t} = Q_{s-1 \cdot s-1} - 2Q_{s-1 \cdot t-1} + Q_{t-1 \cdot t-1}$ |
| $3.5 \dots q_{3 \cdot 5} = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4}$             | $s.t+1 \dots q_{s \cdot t+1} = Q_{s-1 \cdot s-1} - 2Q_{s-1 \cdot t-1} + Q_{t \cdot t}$ |
| .....  | .....  |
| $3 \cdot n \dots q_{3 \cdot n} = Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1}$ | $s.n \dots q_{s \cdot n} = Q_{s-1 \cdot s-1} - 2Q_{s-1 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1}$ |

Пусть мы сделали уравнивание станции по формулам (325) и вывели затем весовые коэффициенты  $Q$ , а по ним рассчитали величины  $q$ , приведенные в табл. 42. Называя по прежнему через  $a_i$  величину

обратную весу  $p_i$  уравненного направления с номером  $i$ , будем иметь такие уравнения

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 q_1 + q_2 = q_{1 \cdot 2} & q_2 + q_3 = q_{2 \cdot 3} & q_3 + q_4 = q_{3 \cdot 4} & \dots & \\
 q_1 + q_3 = q_{1 \cdot 3} & q_2 + q_4 = q_{2 \cdot 4} & q_3 + q_5 = q_{3 \cdot 5} & \dots & \\
 q_1 + q_4 = q_{1 \cdot 4} & q_2 + q_5 = q_{2 \cdot 5} & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 q_1 + q_n = q_{1 \cdot n} & q_2 + q_n = q_{2 \cdot n} & q_3 + q_n = q_{3 \cdot n} & \dots & q_{n-1} + q_n = q_{n-1 \cdot n}
 \end{array} \tag{344}$$

Число величин  $q_{s \cdot t}$  будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Если рассматривать  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ , как неизвестные, подлежащие определению по  $\frac{n(n-1)}{2}$  величинам  $q_{s \cdot t}$  из уравнений (344), то задача при  $n > 3$  становится неопределенной, и, как уже ранее говорилось, эта неопределенность и обуславливает невозможность при произвольном порядке наблюдений представить результат обработки на станции в виде одного ряда направлений.

Но из уравнений (344) мы можем вычислить, применяя способ наименьших квадратов,  $p$  величин  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  таким образом, чтобы сумма квадратов несогласий левых частей этих уравнений была бы наименьшей. Это своеобразное решение задачи, при котором величины  $q_{1 \cdot 2}, q_{1 \cdot 3}, q_{s \cdot t}, \dots$  рассматриваются как бы получеными независимо друг от друга из наблюдений, и было предложено Гельмертом. Назовем

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= q_{1\cdot 2} + q_{1\cdot 3} + q_{1\cdot 4} + \dots + q_{1\cdot n} \\ s_2 &= q_{1\cdot 2} + q_{2\cdot 3} + q_{2\cdot 4} + \dots + q_{2\cdot n} \\ s_3 &= q_{1\cdot 3} + q_{2\cdot 3} + q_{3\cdot 4} + \dots + q_{3\cdot n} \\ &\vdots && \\ s_n &= q_{1\cdot n} + q_{2\cdot n} + q_{3\cdot n} + \dots + q_{n-1\cdot n} \\ S &\equiv s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \end{aligned} \right\}. \quad (345)$$

Переходя от уравнений (344) к соответствующим им нормальным уравнениям, будем иметь

$$\begin{aligned}
 (n-1)q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots + q_n - s_1 &= 0 \\
 q_1 + (n-1)q_2 + q_3 + q_4 + \dots + q_n - s_2 &= 0 \\
 q_1 + q_2 + (n-1)q_3 + q_4 + \dots + q_n - s_3 &= 0 \\
 \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots + (n-1)q_n - s_n &= 0
 \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$2(n-1) \sum_1^n q - S = 0.$$

$$\sum_1^n q = \frac{S}{2(n-1)}.$$

Теперь легко находим

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{s_1}{n-2} - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} \\ q_2 &= \frac{s_2}{n-2} - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} \\ q_3 &= \frac{s_3}{n-2} - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} \\ &\dots \\ q_n &= \frac{s_n}{n-2} - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} \end{aligned} \right\}. \quad (346)$$

Итак, после вывода вероятных значений углов 1.2; 1.3; 1.4; ... 1 по приемам, указанным в § 76, и расчета всех весовых коэффициентов  $Q_{1.1}, Q_{1.2}, \dots, Q_{1.n-1}, Q_{2.2}, Q_{2.3}, \dots$ , общее число которых  $\frac{n(n-1)}{2}$ , вычисляем величины  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, S$  и по формулам (346) определяем  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Если уравненные значения углов 1.2, 1.3, 1.4, ..., 1.n буде называть через [1.2], [1.3], [1.4], ..., [1.n], то ряд уравненных направлений представится числами:  $0^{\circ}0'0''00, [1.2], [1.3], [1.4], \dots, [1.n]$ , с весами

$$p_1 = \frac{1}{q_1}; \quad p_2 = \frac{1}{q_2}; \quad p_3 = \frac{1}{q_3}; \dots; \quad p_n = \frac{1}{q_n}.$$

С этими весами уравненные направления, числовые значения которых совпадают с вероятными значениями соответственных углов, отсытываемых от направления номер первый, вводятся в дальнейшее уравнивание тригонометрической сети, в ее условные уравнения.

Произвольность метода Гельмерта очевидна. Но мы также допускаем не меньшую произвольность в обработке триангуляции, когда по выполнении уравниваний на станциях по методу § 76 и по получены из такого уравнивания вероятных углов на каждом пункте сети, зато при решении условных уравнений сети такие углы рассматриваем как непосредственно и независимо друг от друга полученные из измерений. Возможность уравнивания направлений при решении условных уравнений сети, обеспечиваемая методом Гельмерта, может приводить несмотря на его произвольность, к более правильным результатам при уравнивании данной сети, чем при введении в ее условия углов, уравненных на станциях, и отыскании поправок таких углов, рассматриваемых при этом искусственно, как величины непосредственно наблюденные. Конечно, нужно все-таки считаться с конструкцией сети и имеющим определенный опыт в уравнительных вычислениях триангуляции, чтобы оценивать правильно выгоды применения метода Гельмерта в данной сети.

Для примера применим метод Гельмерта к материалу, приведенному в § 76 и собранному на пункте Whales Point в градусном измерении на Шпицбергене. При пяти направлениях мы имеем так значения  $Q$  в нашем случае:

$$\begin{aligned} Q_{1.1} &= 0,231; \quad Q_{1.2} = 0,050; \quad Q_{1.3} = 0,0366; \quad Q_{1.4} = 0,0216; \\ Q_{2.2} &= 0,189; \quad Q_{2.3} = 0,0642; \quad Q_{2.4} = 0,0388; \\ Q_{3.3} &= 0,184; \quad Q_{3.4} = 0,0526; \\ Q_{4.4} &= 0,198. \end{aligned}$$

Гауссова схема (см. § 76) при определении величин  $Q$  представляется в виде табл. 43.

Таблица 43

|       |   |                                    |                                  |                                |                               |                      |           |
|-------|---|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|----------------------|-----------|
| +5,32 | -1,15                                   | -0,60                              | -0,20                            | -1,00                          | 0                             | 0                    | 0         |
|       | +6,330<br>-0,249                        | -1,80<br>-0,130                    | -0,25<br>-0,432                  | 0<br>-0,216                    | -1,00<br>0,00                 | 0<br>0,00            | 0<br>0,00 |
|       | +6,081                                  | -1,930                             | -0,682                           | -0,216                         | -1,00                         | 0,00                 | 0,00      |
|       | +6,55<br>-0,0677<br>-0,6123             | -1,12<br>-0,2256<br>-0,2165        | 0<br>-0,113<br>-0,068            | 0<br>0<br>-0,317               | -1,00<br>0,00<br>0,00         | 0,00<br>0,00<br>0,00 |           |
|       | +5,870                                  | -1,562                             | -0,181                           | -0,317                         | -1,00                         | 0,00                 |           |
|       | +6,300<br>-0,7519<br>-0,0766<br>-0,4157 | 0,00<br>-0,038<br>-0,024<br>-0,048 | 0,00<br>0,00<br>-0,112<br>-0,084 | 0,00<br>0,00<br>0,00<br>-0,266 | -1,00<br>0,00<br>0,00<br>0,00 |                      |           |
|       | +5,056                                  | -0,110                             | -0,196                           | -0,266                         | -1,00                         |                      |           |

Теперь вычисляем, пользуясь табл. 43 § 78.

$$q_{1 \cdot 2} = 0,231 \quad q_{2 \cdot 3} = 0,231 - 0,100 + 0,189 = 0,320$$

$$q_{1 \cdot 3} = 0,189 \quad q_{2 \cdot 4} = 0,231 - 0,073 + 0,184 = 0,342$$

$$q_{1 \cdot 4} = 0,184$$

$$q_{1 \cdot 6} = 0,198 \quad \underline{q_{2 \cdot 5} = 0,231 - 0,043 + 0,198 = 0,386}$$

$$\underline{q_{3 \cdot 4} = 0,189 - 0,128 + 0,184 = 0,245}$$

$$\underline{q_{3 \cdot 5} = 0,189 - 0,078 + 0,198 = 0,309}$$

$$\underline{q_{4 \cdot 5} = 0,184 - 0,105 + 0,198 = 0,277}$$

$$s_1 = 0,802$$

$$s_2 = 1,279 \quad S = 5,362$$

$$s_3 = 1,063$$

$$s_4 = 1,048 \quad \frac{S}{2(n-1)n(n-2)} = \frac{5,362}{2 \cdot 4 \cdot 3} = 0,223$$

$$s_5 = 1,170 \quad p_1 = 22,7$$

$$q_1 = \frac{0,802}{3} - 0,223 = 0,044 \quad p_2 = 4,9$$

$$q_2 = \frac{1,279}{3} - 0,223 = 0,203$$

$$q_3 = \frac{1,063}{3} - 0,223 = 0,131 \quad p_3 = 7,6$$

$$q_4 = \frac{1,048}{3} - 0,223 = 0,126 \quad p_4 = 8,0$$

$$q_5 = \frac{1,170}{3} - 0,223 = 0,167 \quad p_5 = 6,0.$$

Итак, имеем следующий результат на нашей станции

| №№ направлений | Направления   | Веса |
|----------------|---------------|------|
| 1              | 0° 0' 0",00   | 22,7 |
| 2              | 43 26 43 ,29  | 4,9  |
| 3              | 77 39 13 ,02  | 7,6  |
| 4              | 128 40 33 ,17 | 8,0  |
| 5              | 164 19 14 ,87 | 6,0  |

Так как «Мира», служившая первым направлением, в триангуляцию не входила, то этот ряд направлений можем заменить таким:

| Направления |               | Веса    |
|-------------|---------------|---------|
| 2           | 0° 0' 0",0,   | 4,9     |
| 3           | 34 12 29 ,73  | 7,6 (i) |
| 4           | 85 13 49 ,88  | 8,0     |
| 5           | 120 52 31 ,58 | 6,0     |

Веса углов, отсчитываемых от «Миры», суть:

| Углы | Веса                            |
|------|---------------------------------|
| 1.2  | $4,3 = \frac{1}{q_{1 \cdot 2}}$ |
| 1.3  | $5,3 = \frac{1}{q_{1 \cdot 3}}$ |
| 1.4  | $5,4 = \frac{1}{q_{1 \cdot 4}}$ |
| 1.5  | $5,1 = \frac{1}{q_{1 \cdot 5}}$ |

Веса углов, отсчитываемых от направления с номером 2:

| Углы | Веса | Значения углов | Веса тех же углов на<br>основании таблички (i) |
|------|------|----------------|--|
| 2.3  | 3,1  | 34°12'29",73   | 3,0  |
| 2.4  | 2,9  | 85 13 49 ,88   | 3,0  |
| 2.5  | 2,6  | 120 52 31 ,58  | 2,7  |

Этот пример приводит к такому общему заключению: если из наблюдавшихся направлений одно было взято в значительно большем числе приемов, чем все остальные (потому что оно служило связующим для разных групп приемов), то вес такого направления после уравнивания станции получается неприемлемо большим по сравнению с весами остальных уравненных направлений. Если соответствующий предмет (в нашем примере — «Мира») не входит в триангуляцию, тогда это несоответствие весов не играет в дальнейшем никакой роли. Отсюда может возникнуть и возникает мысль (иногда и осуществляющаяся) — вводить в качестве связующего для разных групп предметов некоторую вспомогательную марку или миру, соответственно устроенную, если заведомо известно, что проведение наблюдений на данном пункте

в одной группе полных приемов неосуществимо, и поэтому является неизбежным разделение предметов, подлежащих наблюдению на этом пункте, на две-три отдельные группы. Эта мысль, в условиях и требованиях точной работы на триангуляции I класса, заключает в себе слабую сторону, на которую уже указано в § 70 (глава IX).

Различие внешних условий, главным образом рефракционных, при связи марки  $M$  с предметом  $C$  от таковых же условий при связи в другое время той же марки  $M$  с предметом  $D$ , делают то, что мы по существу вовсе не измеряем того угла между этими предметами  $D$  и  $C$ , какой существует в натуре, выводя же его, как  $(D - M_d) - (C - M_c)$ , увлекаемся геометрическими представлениями и вовсе забываем и отмечаем действительную обстановку геодезических работ. Осуществлением очень малых ошибок в  $M_d$  и  $M_c$  нельзя покрыть разности действия рефракции в величинах  $M_d$  и  $M_c$ , если они отнесены к разному времени суток, а тем более — к разным дням.

В действительности, однако, приходится считаться с тем, что в триангуляции I класса в некоторых районах могут быть случаи существенной разновременности в видимости разных сигналов, наблюдавшихся с данного пункта, — разновременности, выражаящейся иногда несколькими сутками и даже неделями. В таких тяжелых случаях можно пойти на введение в наблюдения вспомогательной марки с соблюдением того порядка и требований, которые указаны в § 70.

В триангуляции II класса (заполняющей) могут быть не так редки случаи наблюдений предметов II класса в нескольких группах предметов. Установилось мнение в практике, что связующим для разных групп должно быть одно и то же направление с постоянной хорошей видимостью. Если это направление было и единственным общим для всех групп, то, конечно, никакого уравнивания на станции не возникает, а одни углы получатся с нормальным весом, а другие — с половинным, причем в число их войдут и ответственные в построении триангуляции углы. Поэтому этот принятый у нас порядок должно корректировать посредством добавочного измерения — в отдельных группах приемов — ответственных углов. Так как надежная и правильная связь различных групп направлений требует непременно добавочной работы, то мы должны идти на увеличение стандартного числа приемов, приходящихся на одно направление, если направления на данном пункте приходится разбивать на группы. При составлении программы наблюдений на пункте II класса триангулятор должен заранее сообразить и исследовать: возможные невыгодные влияния внешних условий по тем или иным направлениям (временами исчезающая видимость, низкое прохождение визирного луча); точность связей отдельных групп, обусловленную инструментом; важность тех или иных углов в построении триангуляции (конечно, наиболее важны углы, принадлежащие необходимо обеспечивающим построение триангуляции треугольникам, но также важны углы, обеспечивающие наилучшую передачу азимутов). Учитывая все эти обстоятельства, триангулятор составляет варианты программы и, применив правила §§ 75, 76 и настоящего параграфа, делает расчет весов углов и направлений, соответствующих этим вариантам программы. Этот расчет займет вряд ли более двух часов, и, нам кажется, на затрату столь малого времени следует идти, чтобы вполне сознательно выполнять точную работу, тем более, что случаи сложных программ не так часты, а на расчеты можно употребить время, непригодное для наблюдений. Нужно решительно отказаться от при-

вычки исполнять ответственную работу «на ощупь», и ввести в геодезическую полевую практику расчеты, аналогичные по своему значению расчетам прочности сооружений.

Позволим себе привести следующий пример. При наблюдениях пяти направлений одно, из-за ухудшившейся видимости, пришлось не наблюдать в 4, 5 и 6 приемах. Так как в данном случае применялся хороший пятиsekундный теодолит и при малых инструментальных ошибках имели заметные рефракционные влияния, то выполнили программу, указанную в табл. 44.

Таблица 44

| Предметы       | Число приемов | Число приемов | Число приемов | Число приемов |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1. A . . . . . | 3             | 3             | 2             | —             |
| 2. B . . . . . | 3             | 3             | 2             | —             |
| 3. C . . . . . | 3             | —             | 2             | 2             |
| 4. D . . . . . | 3             | 3             | —             | 2             |
| 5. E . . . . . | 3             | 3             | —             | 2             |
| Серии . . . .  | I             |               | III           | IV            |

Называя углы 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 соответственно через  $X, Y, Z, V$ , будем иметь такие нормальные уравнения

$$\begin{aligned} 5,98 X - 1,27 Y - 1,35 Z - 1,35 V + l_1 &= 0; \\ + 5,07 Y - 1,27 Z - 1,27 V + l_2 &= 0; \\ + 5,98 Z - 2,02 V + l_3 &= 0; \\ + 5,98 V + l_4 &= 0; \end{aligned}$$

Величины  $Q$  будут таковы

$$\begin{aligned} Q_{1 \cdot 1} &= 0,254; & Q_{1 \cdot 2} &= 0,129; & Q_{1 \cdot 3} &= 0,129; & Q_{1 \cdot 4} &= 0,129; \\ Q_{2 \cdot 2} &= 0,300; & Q_{2 \cdot 3} &= 0,142; & Q_{2 \cdot 4} &= 0,142; \\ Q_{3 \cdot 3} &= 0,281; & Q_{3 \cdot 4} &= 0,156; \\ Q_{4 \cdot 4} &= 0,282. \end{aligned}$$

Веса углов:

|           | $p$ |           | $p$ |           | $p$ |           | $p$ |
|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|
| 1.2 . . . | 3,9 | 2.3 . . . | 3,4 | 3.4 . . . | 3,3 | 4.5 . . . | 4,0 |
| 1.3 . . . | 3,3 | 2.4 . . . | 3,6 | 3.5 . . . | 3,3 |           |     |
| 1.4 . . . | 3,5 | 2.5 . . . | 3,6 |           |     |           |     |
| 1.5 . . . | 3,5 |           |     |           |     |           |     |

Веса направлений

|           | $p$ |
|-----------|-----|
| 1 . . . A | 7,4 |
| 2 . . . B | 7,0 |
| 3 . . . C | 6,0 |
| 4 . . . D | 7,2 |
| 5 . . . E | 7,2 |

Как видно, получилось очень благоприятное распределение весов. Если бы углы 2.3 и 3.4 были более важны, и, кроме того, инструмент был бы иного, худшего качества, то эту программу пришлось бы изменить, например, зачеркивая вовсе четвертую серию, а в третью вводя только предметы  $B$ ,  $C$  и  $D$  при четырех приемах.

Тогда имели бы такую программу.

| Предметы   | Число приемов | Число приемов | Число приемов |
|--|---------------|---------------|---------------|
| 1. $A \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ | 3             | 3             | —             |
| 2. $B \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$       | 3             | 3             | 4             |
| 3. $C \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$       | 3             | —             | 4             |
| 4. $D \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$       | 3             | 3             | 4             |
| 5. $E \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$       | 3             | 3             | —             |
| Серии . . .  | I             | II            | III           |

Веса углов получили бы:

| Углы | Веса | Углы                 | Веса |
|------|------|----------------------|------|
| 1.2  | 3,4  | 2.3                  | 4,0  |
| 1.3  | 2,7  | 2.4                  | 5,0  |
| 1.4  | 3,3  | 2.5                  | 3,4  |
| 1.5  | 3,0  |                      |      |
| Углы | Веса |                      |      |
| 3.4  | 4,0  | Угол 4.5 с весом 3,3 |      |
| 3.5  | 2,9  |                      |      |

Колебания весов получились большие, чем в предыдущей программе, но зато наиболее важные, согласно заданию, углы получены с большим весом.

## § 79. Обработка наблюдений, выполненных в одной группе полных приемов

Пусть на данном пункте наблюдали  $n$  направлений в одной группе полных приемов, выполнив всего  $m$  приемов. Применяя для этого случая обозначения и формулы § 76, будем иметь

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k = \dots = \sigma_n = n$$

$$\Sigma_k = a_k + b_k + c_k + \dots + r_k$$

$$[\beta] = [\gamma] = \dots = [\lambda] = [\nu] = m$$

$$\left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = \frac{m}{n} = \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = \dots = \left[ \frac{\nu^2}{\sigma} \right] = \frac{m}{n}$$

$$\left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\beta\nu}{\sigma} \right] = \dots = \left[ \frac{\nu\lambda}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\beta\lambda}{\sigma} \right] = \frac{m}{n}$$

$$\left[ \frac{\gamma\nu}{\sigma} \right] = \dots \left[ \frac{\nu\lambda}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\lambda\beta}{\sigma} \right] = \frac{m}{n}$$

• • • • • • • • • • • •

$$[\beta b] = \sum_1^m b; \quad [\gamma c] = \sum_1^m c; \quad [\nu n] = \sum_1^m r$$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = \frac{1}{n} \left\{ \sum_1^m a + \sum_1^m b + \sum_1^m c + \dots + \sum_1^m r \right\}$$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\varepsilon\Sigma}{\sigma} \right] = \dots = \left[ \frac{\nu\Sigma}{\sigma} \right].$$

Вводя обозначения

$$\frac{\Sigma a}{m} = A; \quad \frac{\Sigma b}{m} = B; \quad \frac{\Sigma c}{m} = C \dots$$

напишем теперь нормальные уравнения § 76 в таком виде

$$\left. \begin{aligned} & \frac{m(n-1)}{n} X - \frac{m}{n} Y - \frac{m}{n} Z - \frac{m}{n} V - \dots = \\ & = m.B - \frac{m}{n} (A + B + C + \dots + R); \\ & - \frac{m}{n} X + \frac{m(n-1)}{n} Y - \frac{m}{n} Z - \frac{m}{n} V - \dots = \\ & = m.C - \frac{m}{n} (A + B + C + \dots + R); \\ & - \frac{m}{n} X - \frac{m}{n} Y + \frac{m(n-1)}{n} Z - \frac{m}{n} V - \dots = \\ & = m.D - \frac{m}{n} (A + B + C + \dots + R). \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (347)$$

Складывая эти уравнения (347), получим:

$$\frac{m}{n} X + \frac{m}{n} Y + \frac{m}{n} Z + \frac{m}{n} V + \dots = \frac{m}{n} (A + B + C + \dots + R) - m.A.$$

Складывая это уравнение с каждым из (347), получим

$$\left. \begin{aligned} m.X &= m.B - m.A; \quad X = B - A \\ m.Y &= m.C - m.A; \quad Y = C - A \\ m.Z &= m.D - m.A; \quad Z = D - A \\ & \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

Понятно, этот результат получается сам собой, без всякого вывода по способу наименьших квадратов. Из (348) сейчас же получим:

$$(i.k) = K - I,$$

где под  $(i,k)$  понимается уравненный угол между предметами  $K$  и  $I$ . Так как

$$B = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m}; \quad A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m}$$

$$K = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{m}; \quad I = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_m}{m}$$

то, конечно, все величины  $B - A$ ,  $C - A$ ,  $D - A$ ,  $C - B$ , ...,  $K - I$ ,  $K - A$ ,  $R - K$ , ... имеют один и тот же вес. Следовательно, пользуясь таблицей 43 (§ 78), имсем

$$\begin{aligned}
 Q_{1 \cdot 1} &= Q_{2 \cdot 2} = Q_{3 \cdot 3} = \dots = Q_{n-1 \cdot n-1} \\
 Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 2} + Q_{2 \cdot 2} &= Q_{1 \cdot 1} = Q_{2 \cdot 2} \\
 Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3} &= Q_{1 \cdot 1} = Q_{3 \cdot 3} \\
 Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4} &= Q_{1 \cdot 1} = Q_{4 \cdot 4} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 Q_{1 \cdot 1} - 2Q_{1 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1} &= Q_{1 \cdot 1} = Q_{n-1 \cdot n-1}
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_{1 \cdot 2} &= Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = \dots = Q_{1 \cdot n-1} = \frac{Q_{1 \cdot 1}}{2} \\ Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 3} + Q_{3 \cdot 3} &= Q_{2 \cdot 2} = Q_{3 \cdot 3} \\ Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 4} + Q_{4 \cdot 4} &= Q_{2 \cdot 2} = Q_{4 \cdot 4} \\ Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot 5} + Q_{5 \cdot 5} &= Q_{2 \cdot 2} = Q_{5 \cdot 5} \\ &\dots \\ Q_{2 \cdot 2} - 2Q_{2 \cdot n-1} + Q_{n-1 \cdot n-1} &= Q_{2 \cdot 2} = Q_{n-1 \cdot n-1} \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_{2 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 4} = Q_{2 \cdot 5} = \dots = Q_{2 \cdot n-1} = \frac{Q_{2 \cdot 2}}{2} = \frac{Q_{1 \cdot 1}}{2}.$$

Конечно, продолжая эти вычисления, мы легко увидим, что все  $\frac{n}{2}(n-3)$  условия, указанные в § 78 и приводящие к тому, что результат обработки станции представляется в виде одного ряда направлений, в рассматриваемом нами здесь случае соблюдаются. Обратный вес направления при этом по § 78 будет равен

$$Q_{1 \cdot 2} = Q_{i \cdot k} = \dots Q_{1 \cdot n-1} = \frac{Q_{1 \cdot 1}}{2},$$

т. с. вес уравненного направления равен  $\frac{2}{Q_{1,1}} = m$ , если единица веса приписывается направлению, наблюденному в одном приеме. Вес любого уравненного угла будет тогда равен  $\frac{m}{2}$ . Понятно, что ряд направлений, которым представляется результат обработки станций, будет рядом чисел

$$A = \frac{\Sigma a}{m}; \quad B = \frac{\Sigma b}{m}; \quad C = \frac{\Sigma c}{m}; \quad \dots R = \frac{\Sigma r}{m}.$$

Переходим теперь к выводу ошибки единицы веса в случае одной группы полных приемов.

Для этого случая уравнения (323) дают

$$\omega_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots + r_1}{n} - \frac{(X + Y + Z + \dots)}{n}$$

$$\omega_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2 + \dots + r_2}{n} - \frac{(X + Y + Z + \dots)}{n}$$

.....

$$\omega_k = \frac{a_k + b_k + c_k + \dots + r_k}{n} - \frac{(X + Y + Z + \dots)}{n}$$

.....

Отсюда

$$\delta_a^k = \omega_k - a_k = \frac{a_k + b_k + c_k + \dots + r_k}{n} - \frac{[b] + [c] + [d] + \dots + [r]}{nm} + \\ + \frac{(n-1)[a]}{mn} - a_k$$

$$\delta_a^k = \frac{\left\{ a_k - \frac{[a]}{m} \right\} + \left\{ b_k - \frac{[b]}{m} \right\} + \left\{ c_k - \frac{[c]}{m} \right\} + \dots + \left\{ r_k - \frac{[r]}{m} \right\}}{n} - \\ - a_k + \frac{[a]}{m}$$

$$\delta_b^k = \omega_k - (b_k - X) = \frac{a_k + b_k + c_k + \dots + r_k}{n} - \frac{[b] + [c] + [d] + \dots + [r]}{nm} +$$

$$+ \frac{(n-1)[a]}{mn} + \frac{[b]}{m} - \frac{[a]}{m} - b_k.$$

$$\delta_b^k = \frac{\left\{ a_k - \frac{[a]}{m} \right\} + \left\{ b_k - \frac{[b]}{m} \right\} + \left\{ c_k - \frac{[c]}{m} \right\} + \dots + \left\{ r_k - \frac{[r]}{m} \right\}}{n} - b_k + \frac{[b]}{m}.$$

$$\delta_c^k = \frac{\left\{ a_k - \frac{[a]}{m} \right\} + \left\{ b_k - \frac{[b]}{m} \right\} + \dots + \left\{ r_k - \frac{[r]}{m} \right\}}{n} - c_k + \frac{[c]}{m}.$$

Величины:  $a_k - \frac{[a]}{m}$ ;  $b_k - \frac{[b]}{m}$ ;  $\dots r_k - \frac{[r]}{m}$  суть, конечно, первичные уклонения  $v$  наблюдаемых значений направлений в приеме с номером  $k$  от средних значений тех же направлений из всех  $m$  приемов. Очевидно, величины  $\delta^k$  суть вторичные уклонения: именно каждое  $\delta_i^k$  представляет собой разность или уклонение среднего из всех первичных уклонений по всем предметам в данном приеме с номером  $k$  от первичного уклонения  $v_i^k$  для предмета  $i$  в том же приеме. Мы имели ранее формулу (326) § 76 для вывода средней ошибки единицы веса.

Для нашего случая

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{mn - (m+n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{(m-1)(n-1)}}. \quad (349)$$

Обозначим

$$\frac{\left\{ a_k - \frac{[a]}{m} \right\} + \left\{ b_k - \frac{[b]}{m} \right\} + \left\{ c_k - \frac{[c]}{m} \right\} + \dots + \left\{ r_k - \frac{[r]}{m} \right\}}{n}$$

через  $v_0^k$ . Тогда имеем

$$\begin{array}{ll} \delta_a' = v_0' - v_a' & \delta_a^k = v_0^k - v_a^k \\ \delta_b' = v_0' - v_b' & \delta_b^k = v_0^k - v_b^k \\ \delta_c' = v_0' - v_c' & \delta_c^k = v_0^k - v_c^k \\ \dots & \dots \\ \delta_r' = v_0' - v_r' & \delta_r^k = v_0^k - v_r^k \end{array}$$

| Приемы              | Чертаново | $v$   | Горки       | $v$  | Ельпя      | $v$  | Сычи         |
|---------------------|-----------|-------|-------------|------|------------|------|--------------|
| I                   | 0°0'0",0  | 0",00 | 18°17'13",5 | -0,6 | 58°9'12",2 | -1,1 | 107°32' 9",3 |
| II                  | 0 ,0      | 0 ,00 | 14 ,5       | +0,4 | 13 ,5      | +0,2 | 10 ,0        |
| III                 | 0 ,0      | 0 ,00 | 13 ,4       | -0,7 | 13 ,5      | +0,2 | 9 ,9         |
| IV                  | 0 ,0      | 0 ,00 | 13 ,7       | -0,4 | 13 ,6      | +0,3 | 9 ,3         |
| V                   | 0 ,0      | 0 ,00 | 14 ,2       | +0,1 | 13 ,9      | +0,6 | 9 ,2         |
| VI                  | 0 ,0      | 0 ,00 | 15 ,2       | +1,1 | 13 ,4      | +0,1 | 10 ,4        |
| Среднее направление | 0°0'0",0  |       | 18°17'14",1 | -0,1 | 58°9'13",3 | +0,3 | 107°32' 9",7 |

Далее

$$\begin{aligned} \Sigma \delta^2 &= \Sigma v^2 + n [(v_0')^2 + (v_0'')^2 + \dots + (v_0^k)^2 + \dots + (v_0^m)^2] - \\ &- 2v_0'(v_a' + v_b' + v_c' + \dots + v_r') - \\ &- 2v_0''(v_a'' + v_b'' + v_c'' + \dots + v_r'') - \\ &- \dots - 2v_0^k(v_a^k + v_b^k + v_c^k + \dots + (v_r^k)) - \dots \end{aligned}$$

$$\Sigma \delta^2 = \Sigma v^2 - n [(v_0')^2 + (v_0'')^2 + \dots + (v_0^k)^2 + \dots + (v_0^m)^2] \quad (350)$$

$$\left( \text{так как } v_0^k = \frac{v_a^k + v_b^k + v_c^k + \dots + v_r^k}{n} \right).$$

В (350)  $\Sigma v^2$  есть сумма квадратов всех первичных уклонений.

Чтобы получить  $\Sigma \delta^2$ , получаем такое правило:

1) получив первичные уклонения  $v$ , в каждом приеме выводят из них среднее уклонение  $v_0$ .

2) вычислив сумму квадратов первичных уклонений, затем из нее вычитают сумму квадратов  $v_0$ , умноженную на  $n$  (число предметов).

Конечно, можно в каждом приеме взять просто сумму  $\sigma$  первичных уклонений и затем из  $\Sigma v^2$  вычесть сумму квадратов  $\sigma$ , деленную на  $n$ .

Это правило до сих пор оставалось, повидимому, неизвестным. Оно, приводя к правильному получению  $\Sigma \delta^2$ , в то же время освобождает от вычисления вторичных уклонений. Не зная этого правила, в производстве, пользуясь одними первичными

уклонениями  $v$ , или применяют неверные формулы, или делают лишнюю работу, выводя вторичные уклонения.

Возьмем пример на обработку полных присмов. На пункте II класса Левашово имеем сводку наблюдений в виде приведенной ниже табл. 45.

$$\Sigma v^2 = 35,27; \quad \Sigma(\Sigma v)^2 = 11,51; \quad \frac{\Sigma(\Sigma v)^2}{n} = 1,64; \quad \Sigma z^2 = 35,27 - 1,64 = 33,63$$

$$\mu = \sqrt{\frac{33,63}{5,6}} = \pm 1'',06; \quad m=6; \quad n=7; \quad (m-1)(n-1)=5 \cdot 6 = 30$$

Через  $\Sigma v$  обозначена сумма первичных уклонений в каждом приеме, заключающая в себе  $n$  слагаемых. Число слагаемых в  $\Sigma v^2$  равно  $m \cdot n$ .

Таблица 45

| <i>v</i> | Б о р        | <i>v</i> | Б е л ь      | <i>v</i> | Захарыно     | <i>v</i> | $\Sigma v$ |
|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|------------|
| -0,4     | 221°33'22",5 | +1,0     | 307°47'57",4 | -0,5     | 339°39'35",9 | +1,7     | +0,1       |
| +0,3     | 21 ,4        | -0,1     | 59 ,9        | +2,0     | 32 ,9        | -1,3     | +1,2       |
| +0,2     | 22 ,8        | +1,3     | 58 ,7        | +0,8     | 33 ,6        | -0,6     | +1,2       |
| -0,4     | 20 ,0        | -1,5     | 59 ,3        | +1,4     | 34 ,4        | +0,2     | -0,4       |
| -0,5     | 22 ,0        | +0,5     | 56 ,2        | -1,7     | 35 ,8        | +1,6     | +0,6       |
| +0,7     | 20 ,4        | -1,1     | 55 ,9        | -2,0     | 32 ,7        | -1,5     | -2,7       |
| <hr/>    |              |          |              |          |              |          |            |
| -0,1     | 221°33'21",5 | +0,1     | 307°47'57",9 | 0,0      | 339°39'34",2 | +0,1     | -          |

§ 80. Применение формул § 76 к случаю наблюдений по обычному способу Шрейбера; оценка точности измерений, выполненных этим способом

Пусть следующая табличка представляет результаты измерения углов по способу Шрейбера

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 2 \\
 & 1 \cdot 3 \quad 2 \cdot 3 \\
 & 1 \cdot 4 \quad 2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 4 \\
 & 1 \cdot 5 \quad 2 \cdot 5 \quad 3 \cdot 5 \quad 4 \cdot 5 \\
 & 1 \cdot 6 \quad 2 \cdot 6 \quad 3 \cdot 6 \quad 4 \cdot 6 \quad 5 \cdot 6 \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 6 \cdot 7 \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & 1 \cdot n \quad 2 \cdot n \quad 3 \cdot n \quad 4 \cdot n \quad 5 \cdot n \quad 6 \cdot n \quad \dots \quad n - 1 \cdot n
 \end{aligned} \tag{351}$$

причем под  $1.2; 1.3; \dots k.n, \dots$  понимаются значения углов соответственно между направлениями 1 и 2, 1 и 3,  $\dots$   $k$  и  $n$ , выведенные каждое как среднее из  $m$  приемов.

Принимая вес направления в  $m$  приемах равным  $2m$ , мы легко соображаем, что при способе Шройбера

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{\frac{n(n-1)}{2}} = 4m \\
 [\beta] &= [\gamma] = [\varepsilon] = \dots = 2m(n-1) \\
 \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] &= \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right] = \dots = m(n-1) \\
 \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] &= \left[ \frac{\beta\varepsilon}{\sigma} \right] = \dots = \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\gamma\lambda}{\sigma} \right] = \dots = m \\
 [\beta b] &= 2m [1 \cdot 2] \\
 [\gamma c] &= 2m [1.3 + 2.3] \\
 [\varepsilon e] &= 2m [1.4 + 2.4 + 3.4] \\
 [\lambda l] &= 2m [1.5 + 2.5 + 3.5 + 4.5]
 \end{aligned} \right\} \quad (352)$$

понимая, конечно, под  $b$  результаты наблюдения направления 2, под  $c$  — результаты наблюдения направления 3 и т. д. Далее, так как все веса  $\beta, \gamma, \epsilon \dots$  во всех приемах равны либо  $2m$ , либо нулю, не трудно видеть, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = m \left( \frac{1.2 + 2.3 + 2.4 + \dots + 2.n}{2} \right) \\ \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = m \left( \frac{1.3 + 2.3 + 3.4 + \dots + 3.n}{2} \right) \\ \left[ \frac{\varepsilon\Sigma}{\sigma} \right] = m \left( \frac{1.4 + 2.4 + 3.4 + \dots + 4.n}{2} \right) \end{array} \right\}. \quad (353)$$

Отсюда, обозначая искомые углы между направлениями 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, ..., 1 и  $n$  соответственно через:  $x_{1 \cdot 2}$ ,  $x_{1 \cdot 3}$ ,  $x_{1 \cdot 4}$ , ...,  $x_{1 \cdot n}$ , напишем по сокращении на  $m$  такие нормальные уравнения:

Складывая все уравнения (354), получаем

$$x_{1 \cdot 2} + x_{1 \cdot 3} + x_{1 \cdot 4} + \dots + x_{1 \cdot n} = 1.2 + 1.3 + 1.4 + 1.5 + \dots + 1.n. \quad (355)$$

Складывая уравнение (355) с каждым из уравнений (354), находим:

$$\left. \begin{aligned} nx_{1 \cdot 2} &= 2(1.2) + [1.3 - 2.3] + [1.4 - 2.4] + \\ &\quad + [1.5 - 2.5] + \dots + [1.n - 2.n] \\ nx_{1 \cdot 3} &= 2(1.3) + [1.2 + 2.3] + [1.4 - 3.4] + [1.5 - 3.5] + \\ &\quad + [1.6 - 3.6] + \dots + [1.n - 3.n] \\ nx_{1 \cdot 4} &= 2(1.4) + [1.2 + 2.4] + [1.3 + 3.4] + [1.5 - 4.5] + \\ &\quad + [1.6 - 4.6] + \dots + [1.n - 4.n] \\ nx_{1 \cdot 5} &= 2(1.5) + [1.2 + 2.5] + [1.3 + 3.5] + [1.4 + 4.5] + \\ &\quad + [1.6 - 5.6] + [1.7 - 5.7] + \dots + [1.n - 5.n] \\ \dots &\dots \\ nx_{1 \cdot k} &= 2(1.k) + [1.2 + 2.k] + [1.3 + 3.k] + \dots + \\ &\quad + [(1.k - 1) + (k - 1.k)] + [(1.k + 1) - (k.k + 1)] + \\ &\quad + [(1.k + 2) - (k.k + 2)] + \dots + [1.n - k.n] \end{aligned} \right\}. \quad (356)$$

Формулы (356) можно еще переписать так

$$\left. \begin{aligned} x_{1 \cdot 2} &= \frac{2(1.2) + [1.3 - 2.3] + [1.4 - 2.4] + [1.5 - 2.5] +}{n} \\ &\quad + [1.6 - 2.6] + \dots + 1.n - 2.n \\ x_{1 \cdot 3} &= \frac{2(1.3) + [1.2 + 2.3] + [1.4 - 3.4] + [1.5 - 3.5] +}{n} \\ &\quad + [1.6 - 3.6] + \dots + [1.n - 3.n] \\ x_{1 \cdot 4} &= \frac{2(1.4) + [1.2 + 2.4] + [1.3 + 3.4] + [1.5 - 4.5] +}{n} \\ &\quad + [1.6 - 4.6] + \dots + [1.n - 4.n] \\ \dots &\dots \\ x_{1 \cdot k} &= \frac{2(1.k) + [1.2 + 2.k] + [1.3 + 3.k] + \dots +}{n} \\ &\quad + [(1.k - 1) + (k - 1.k)] + \\ &\quad + \frac{[(1.k + 1) - (k.k + 1)] + [(1.k + 2) - (k.k + 2)] +}{n} \\ &\quad + \dots + [1.n - k.n] \end{aligned} \right\}. \quad (357)$$

Формулами (357) подтверждается общее правило, уже выведенное в § 69, определения вероятнейших значений углов, измеренных по способу Шрейбера, а именно: вероятнейшее значение угла  $x_{1,k}$  равно среднему по весам, взятыму из непосредственно наблюденного значения этого угла ( $1.k$ ), приписывая ему вес 2, и из всех производных значений этого же угла, приписывая каждому из них вес, равный единице. Каждый производный угол получается, как сумма или разность двух непосредственно измеренных углов из числа наблюденных на станции и показанных в (351); число производных углов, входящих в образование угла  $x_{1,k}$ , очевидно, равно  $n - 2$ .

Вводя для симметрии углы (1.1), (2.2), (3.3) ... ( $n.n$ ), (2.1) = — (1.2); (k.2) = — (2.k); ... (n.1) = — (1.n), мы можем формулы (357) переписать еще так:

Для определения весовых коэффициентов мы должны были бы при составлении уравнений (354) не делать сокращений на  $t$  в коэффициентах, указываемых формулами (352) и (353). Имея это в виду, мы пишем такие уравнения для определения  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, \dots, Q_{1,n}$ :

$$\begin{aligned} m(n-1)Q_{1\cdot 1} - mQ_{1\cdot 2} - mQ_{1\cdot 3} - \cdots - mQ_{1\cdot n-1} &= 1 \\ mQ_{1\cdot 1} + m(n-1)Q_{1\cdot 2} - mQ_{1\cdot 3} - \cdots - mQ_{1\cdot n-1} &= 0 \\ mQ_{1\cdot 1} - mQ_{1\cdot 2} + m(n-1)Q_{1\cdot 3} - \cdots - mQ_{1\cdot n-1} &= 0 \end{aligned}$$

из которых (взяв сперва сумму всех уравнений, а потом складывая эту сумму с каждым из уравнений) легко пишем

$$Q_{1 \cdot 1} = \frac{2}{mn}; \quad Q_{1 \cdot 2} = Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = \dots = Q_{1 \cdot n-1} = \frac{1}{mn}.$$

Очевидно далее, что из системы уравнений

$$\begin{aligned} m(n-1)Q_{1,k} - mQ_{2,k} - mQ_{3,k} - \dots - mQ_{k,k} - \dots - mQ_{k,n-1} &= 0 \\ -mQ_{1,k} + m(n-1)Q_{2,k} - mQ_{3,k} - \dots - mQ_{k,k} - \dots - mQ_{k,n-1} &= 0 \\ \dots &\dots \\ -mQ_{1,k} - mQ_{2,k} - \dots + m(n-1)Q_{k,k} - \dots - mQ_{k,n-1} &= 0 \\ -mQ_{1,k} - mQ_{2,k} - \dots - mQ_{k,k} + m(n-1)Q_{k,k+1} - \dots - mQ_{k,n-1} &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

найдем

$$Q_{k,k} = \frac{2}{mn}; \quad Q_{1,k} = Q_{2,k} = Q_{3,k} = \dots = Q_{k,n-1} = \frac{1}{mn}.$$

Таким образом, все неквадратические весовые коэффициенты действительно равны между собой, это и доказывает, что результат уравновешивания наблюдений, выполненных по способу Шрейбера, действительно представляется в виде одного ряда направлений.

Все неквадратические весовые коэффициенты равны  $\frac{1}{mn}$ , а все квадратические коэффициенты равны  $\frac{2}{mn}$ .

Для определения веса угла  $x_{i,k}$  (полагая  $i < k$ ) напишем

$$x_{i,k} = x_{1,k} - x_{1,i}.$$

Пользуемся далее уравнением (309),

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= f_1 f_1 Q_{1,1} + 2f_1 f_2 Q_{1,2} + 2f_1 f_3 Q_{1,3} + \dots \\ &\quad + f_2 f_2 Q_{2,2} + 2f_2 f_3 Q_{2,3} + \dots \end{aligned}$$

в котором для данного случая

$$f_{k-1} = 1, \quad f_{i-1} = -1,$$

а все остальные коэффициенты  $f$  равны нулю.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= f_{i-1} f_{i-1} Q_{i-1,i-1} + 2f_{i-1} f_{k-1} Q_{i-1,k-1} + f_{k-1} f_{k-1} Q_{k-1,k-1} \\ \frac{1}{P_f} &= \frac{2}{mn} - 2 \frac{1}{mn} + \frac{2}{mn} \\ P_{x_{i,k}} &= \frac{mn}{2} \end{aligned}$$

Вес любого угла, окончательно выведенного, равен  $\frac{mn}{2}$ , а вес окончательно выведенного любого направления равен  $mn$ .

Теперь перейдем к вопросу об определении точности результатов измерений, выполненных по способу Шрейбера.

1. Получив вероятнейшие значения углов  $x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{1,n}$ , вычислим по ним вероятнейшие значения и всех остальных  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  углов,



Ошибка направления из полного приема

$$\mu = \sqrt{\frac{[u^2]}{(n-1)(mn-2)}}. \quad (363)$$

Так как величины  $u$  непременно искажены влиянием систематических ошибок делений лимба, от которых величины  $v$  почти совершенно свободны, то очевидно, что  $\mu_2$  должно быть более  $\mu_1$ .

3. Образуем разности  $\delta$  между двумя значениями угла  $(i.k)$ , полученными в одном и том же приеме. Очевидно, что эта разность  $\delta$  будет совершенно свободна от влияния ошибок делений круга. Число всех  $\delta$  будет равно  $\frac{mn(n-1)}{2}$ , и средняя ошибка разности двух значений угла, полученных в некотором приеме, будет равна

$$\sqrt{\frac{[\delta^2]}{mn(n-1)}}.$$

Но так как этой ошибке соответствует вес  $\frac{1}{4}$ , то ошибка единицы веса будет:

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{[\delta^2]}{mn(n-1)}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2mn(n-1)}}. \quad (364)$$

Обозначим постоянную ошибку, обусловленную ошибками делений круга и входящую в оба вывода направления в каждом полуприеме данного приема, через  $t$ . При переходе от приема к приему  $t$  можно рассматривать как величину случайную, поэтому можно написать

$$\mu_2^2 = \mu_3^2 + t^2$$

или

$$t^2 = \mu_2^2 - \mu_3^2. \quad (365)$$

По формуле (365) можно вывести влияние ошибок делений круга на результат определения направления. Впрочем, надежность этого вывода всецело зависит от устойчивости инструмента при наблюдениях: очевидно, величины  $\delta$  искажены влиянием сдвигов лимба в два раза более, чем результаты измерения угла в одном полуприеме; влияние же этих сдвигов на вывод угла из приема почти равно нулю. Поэтому при отсутствии при наблюдениях хорошей устойчивости инструмента может оказаться, что  $\mu_2^2$  почти равно  $\mu_3^2$ , или даже  $\mu_2^2 < \mu_3^2$ .

4. Образовав уклонения

$$\omega'_{i+k} = (i.k)' - (i.k)$$

$$\omega''_{i+k} = (i.k)'' - (i.k)$$

$$\omega'''_{i+k} = (i.k)''' - (i.k)$$

результатов отдельных приемов измерения угла от среднего вывода этого угла из  $m$  приемов, можем по ним вычислить величину  $\mu$  так:

всех наблюдений имеем  $\frac{mn(n-1)}{2}$ , число необходимых для вывода величины равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , следовательно, число избыточных измерений равно

$$\frac{m \cdot n (n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} (m-1).$$

Далее, так как вес измерения угла одним приемом равен 1, то

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)(m-1)}} = \sqrt{\frac{2[\omega^2]}{n(n-1)(m-1)}}.$$

Таким образом, имеем четыре формулы для вывода средней ошибки единицы веса:

1) по уклонениям  $v$  средних из  $m$  приемов выводов углов от вероятнейших значений соответствующих углов

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m[v^2]}{\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)}};$$

2) по уклонениям  $u$  результатов всех отдельных приемов от вероятнейших значений соответствующих углов

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{2[u^2]}{(n-1)(mn-2)}};$$

3) по разностям  $\delta$  между каждыми двумя значениями угла, полученными в одном и том же приеме

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2mn(n-1)}};$$

4) по уклонениям  $\omega$  результатов измерений углов в отдельных приемах от средних выводов соответствующих углов из  $m$  приемов

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{2[\omega^2]}{n(n-1)(m-1)}}.$$

## § 81. Некоторые случаи уравнивания станции, встречающиеся нередко в производстве. Формулы Ф. Н. Красовского

### Случай наблюдений предметов двух классов

Пусть вместе с предметами  $A_2, B_2, D_2, F_2, \dots$  II класса наблюдали предметы  $C_3, E_3, G_3, \dots$  III класса. Допустим, что начальным предметом во всех исполненных приемах был предмет  $A_2$ , и все наблюденные направления мы предварительно отнесли к направлению на  $A_2$ , как к нулевому. Далее допустим, что предметы II класса наблюдались в  $m$  приемах, причем в каждом из всех этих приемов наблюдались все предметы II класса, число которых назовем через  $n_{II}$ . Предметы III класса наблюдались в некоторых приемах из этого

числа  $m$  приемов — вместе с предметами II класса — непременно все в каждом из таких приемов, число которых пусть будет  $m_{2 \cdot 3}$ . Таким образом, в  $m - m_{2 \cdot 3}$  приемах наблюдались в каждом приеме только все предметы II класса; в остальных  $m_{2 \cdot 3}$  приемах наблюдались в каждом приеме все предметы II и все предметы III классов. Результат работы на пункте представим в виде следующих наблюдаемых направлений, приведенных к нулевому направлению на  $A_2$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & b_1 & - & d_1 & - & f_1 & - \\
 0 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 & g_2 \\
 0 & b_3 & - & d_3 & - & f_3 & - \\
 0 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 & g_4 \\
 0 & b_5 & - & d_5 & - & f_5 & - \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & b_k & c_k & d_k & e_k & f_k & g_k \\
 0 & b_{k+1} & c_{k+1} & d_{k+1} & e_{k+1} & f_{k+1} & g_{k+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & b_m & c_m & d_m & e_m & f_m & g_m \\
 \hline
 0 & B & C & D & E & F & G.
 \end{array}$$

Выведем средние значения по каждому из столбцов этой таблички

$$B = \frac{\Sigma b}{m}; \quad C = \frac{\Sigma c}{m_{2 \cdot 3}}; \quad D = \frac{\Sigma d}{m}; \quad E = \frac{\Sigma e}{m_{2 \cdot 3}}; \quad F = \frac{\Sigma f}{m}; \quad G = \frac{\Sigma g}{m_{2 \cdot 3}}.$$

Далее образуем уклонации  $v$ , собранные в табл. 46.

Таблица 46

|               |               |               |               |               |               |              |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| $b_1 - B$     | $c_2 - C$     | $d_1 - D$     | $e_2 - E$     | $f_1 - F$     | $g_2 - G$     | $\Sigma_1''$ |
| $b_2 - B$     |               | $d_2 - D$     |               | $f_2 - F$     | $g_3 - G$     | $\Sigma_3''$ |
| $b_3 - B$     |               | $d_3 - D$     |               | $f_3 - F$     | $g_4 - G$     |              |
| $b_4 - B$     | $c_4 - C$     | $d_4 - D$     | $e_4 - E$     | $f_4 - F$     |               |              |
| $b_5 - B$     |               | $d_5 - D$     |               | $f_5 - F$     |               | $\Sigma_5''$ |
| <hr/>         |               |               |               |               |               |              |
| $b_k - B$     | $c_k - C$     | $d_k - D$     | $e_k - E$     | $f_k - F$     | $g_k - G$     |              |
| $b_{k+1} - B$ | $c_{k+1} - C$ | $d_{k+1} - D$ | $e_{k+1} - E$ | $f_{k+1} - F$ | $g_{k+1} - G$ |              |
| <hr/>         |               |               |               |               |               |              |
| $b_m - B$     | $c_m - C$     | $d_m - D$     | $e_m - E$     | $f_m - F$     | $g_m - G$     |              |

| №№ прием-<br>лов | <i>A</i>           | <i>v</i> | <i>B</i>             | <i>v</i> | <i>C</i>             | <i>v</i> | <i>D</i>               | <i>v</i> |
|------------------|--------------------|----------|----------------------|----------|----------------------|----------|------------------------|----------|
| 1                | $0^{\circ}0'0'',0$ | $0'',00$ | $11^{\circ}8'5'',1$  | $-1,14$  | $30^{\circ}5'6'',8$  | $-0,58$  | $68^{\circ}10'40'',1$  | $-1,45$  |
| 2                |                    | $0',00$  | $5',0$               | $-1,24$  |                      |          | $38',9$                | $-2,65$  |
| 3                |                    | $0',00$  | $8',0$               | $+1,76$  | $9',0$               | $+1,62$  | $42',0$                | $+0,45$  |
| 4                |                    | $0',00$  | $4',0$               | $-2,24$  |                      |          | $38',0$                | $-3,55$  |
| 5                |                    | $0',00$  | $8',0$               | $+1,76$  | $7',0$               | $-0,38$  | $38',0$                | $-3,55$  |
| 6                |                    | $0',00$  | $9',0$               | $+2,76$  |                      |          | $40',5$                | $-1,05$  |
| 7                |                    | $0',00$  | $7',0$               | $+0,76$  | $8',0$               | $+0,62$  | $45',9$                | $+4,35$  |
| 8                |                    | $0',00$  | $9',0$               | $+2,76$  | $6',0$               | $-1,38$  | $43',2$                | $+1,65$  |
| 9                |                    | $0',00$  | $1',1$               | $-5,14$  | $7',5$               | $+0,12$  | $47',4$                | $+5,85$  |
| Сред-<br>нее     | $0^{\circ}0'0'',0$ | $0'',00$ | $11^{\circ}8'6'',24$ | $+0,04$  | $30^{\circ}5'7'',38$ | $+0,02$  | $68^{\circ}10'41'',55$ | $+0,05$  |

Называя через  $\Sigma''$  сумму уклонений  $v$  в тех приемах, в которых наблюдалась только предметы II класса, образуем в последней графе табл. 46 величины  $\Sigma_1'', \Sigma_2'', \dots$  и т. д., число которых равно  $m - m_{2,3}$ .

Теперь применяем такую формулу проф. Красовского:

$$\Delta = \frac{1}{n_{II} m_{2,3}} [\Sigma'']$$

Вероятные значения углов, отсчитываемых от начального направления, для предметов II класса будут оставаться теми самыми, что уже полученные ранее в выводе величины  $B, D, F, \dots$ , а для предметов III класса будут таковы:

$$C + \Delta, E + \Delta, G + \Delta, \dots$$

Таблица 47

| <i>E</i>             | <i>v</i> | <i>F</i>                | <i>v</i> | <i>G</i>               | <i>v</i> | $\Sigma''$ |
|----------------------|----------|-------------------------|----------|------------------------|----------|------------|
| $90^{\circ}9'6'',3$  | $-2,87$  | $115^{\circ}43'48'',9$  | $-1,49$  | $200^{\circ}1'14'',7$  | $-1,83$  | $-7'',28$  |
| $6',5$               | $-2,67$  | $47',0$                 | $-3,39$  |                        |          |            |
|                      |          | $53',1$                 | $+2,71$  | $14',0$                | $-2,53$  | $-1',28$   |
|                      |          | $54',9$                 | $+4,51$  |                        |          |            |
| $9',3$               | $+0,13$  | $51',2$                 | $+0,81$  | $15',9$                | $-0,63$  | $-1',58$   |
|                      |          | $47',1$                 | $-3,29$  |                        |          |            |
| $10',8$              | $+1,63$  | $49',2$                 | $-1,19$  | $16',8$                | $+0,27$  |            |
| $12',6$              | $+3,43$  | $51',2$                 | $+0,81$  | $17',3$                | $+0,77$  |            |
| $9',5$               | $+0,33$  | $50',9$                 | $+0,51$  | $20',5$                | $+3,97$  |            |
| $90^{\circ}9'9'',17$ | $-0,02$  | $115^{\circ}43'50'',39$ | $-0,01$  | $200^{\circ}1'16'',53$ | $+0,02$  | $-10'',14$ |

Пример. Предметы II класса  $A, B, D, F$  наблюдались в 9 приемах, так что  $n_{II} = 4$ ;  $m = 9$ ; предметы III класса  $C, E$  и  $G$  наблюдались в шести приемах, и  $m_{III} = 6$ . Результат работы представлен в табл. 47.

Те  $v$ , которые суммируются для образования  $\Sigma''$ , подчеркнуты в табл. 47. Мы имеем

$$\Delta = -\frac{10,14}{24} = -0'',42.$$

Итак, называя через  $X, Y, Z, V, W, U$  вероятные углы, отсчитываемые от направления на  $A$ , будем иметь результат:

$$X = 11^\circ 8' 6'',24$$

$$Y = 30 5 6 ,96$$

$$Z = 68 10 41 ,54$$

$$V = 90 9 8 ,75$$

$$W = 115 43 50 ,39$$

$$U = 200 1 16 ,11$$

Можно и следовало при выводе средних ограничиться десятыми долями секунды, тогда вычисление еще более упростилось бы.

#### Случай наблюдений предметов одного и того же класса в двух группах

Пусть в первой группе  $m_1$  приемами наблюдали предметы  $A, B, C, D, E, F, G$ , а во второй группе наблюдали  $m_2$  приемами предметы  $A, D, F$  и  $H, K$ . Причина разбивки на две группы — невозможность с одной станции видеть все предметы из-за столбов сигнала.

В каждой группе выводим средние направления, отнесенные к нулевому, на предмет  $A$ . Далее выводим для предметов, общих обеим группам

$$A_m = \frac{m_1 \cdot 0''00 + m_2 \cdot 0'',00}{m_1 + m_2}$$

$$D_m = \frac{m_1 \cdot D_1 + m_2 \cdot D_2}{m_1 + m_2}$$

$$F_m = \frac{m_1 \cdot F_1 + m_2 \cdot F_2}{m_1 + m_2}.$$

Величины  $D_m$  и  $F_m$  будут окончательными значениями углов на  $D$  и  $F$ , отсчитываемых от направления на предмет  $A$ .

Величина  $\Delta_1 = \frac{0'',0 + (D_m - D_1) + (F_m - F_1) + \dots}{n_{1,2}}$  будет поправкой остальных углов, отсчитываемых от направления на  $A$  и наблюдавшихся только в первой группе; при этом  $n_{1,2}$  — число общих направлений для первой и второй групп.

Величина  $\Delta_2 = \frac{0'',0 + (D_m - D_2) + (F_m - F_2) + \dots}{n_{1,2}}$  будет поправкой остальных углов, отсчитываемых от направления на  $A$  и наблюдавшихся только во второй группе.

Пример 1. Предметы  $A, B, C, D, E, F, G$  наблюдались в первой группе каждый 6 приемами ( $m_1 = 6$ ); во второй группе 7 приемами наблюдали предметы  $A, D, H, K, F$  ( $m_2 = 7$ );  $n_{1-2} = 3$ .

Результаты имеем в виде табл. 48.

Таблица 48

| Предметы  | Первая группа |       | Вторая группа |       | Среднее по весам для направлений, общих обеим группам |
|-----------|---------------|-------|---------------|-------|---|
|           | Направления   | $v$   | Направления   | $v$   |   |
| 1 . . . A | 0° 0' 0",0    | 0",0  | 0° 0' 0",0    | 0",0  | 0° 0' 0",00   |
| 2 . . . B | 35 8 3 ,0     | —     | —             | —     | —   |
| 3 . . . C | 60 9 13 ,3    | —     | —             | —     | —   |
| 4 . . . D | 88 27 14 ,6   | +2 ,8 | 88 27 19 ,8   | -2 ,4 | 88 27 17 ,4   |
| 5 . . . H | —             | —     | 129 8 5 ,3    | —     | —   |
| 6 . . . K | —             | —     | 165 41 3 ,8   | —     | —   |
| 7 . . . E | 209 8 16 ,3   | —     | —             | —     | —   |
| 8 . . . F | 220 17 39 ,5  | —     | —             | —     | —   |
| 9 . . . G | 280 8 9 ,3    | +0 ,4 | 220 17 40 ,2  | -0 ,3 | 220 17 39 ,9  |

$$\Delta_1 = +\frac{3",2}{3} = +1",1 \quad \Delta_2 = -\frac{2",7}{3} = -0",9$$

### Окончательные значения углов

- 2.1... 35° 8' 4",1
- 3.1... 60 9 14 ,4
- 4.1... 88 27 17 ,4
- 5.1... 129 8 4 ,4
- 6.1... 165 41 2 ,9
- 7.1... 209 8 17 ,4
- 8.1... 220 17 39 ,9
- 9.1... 280 8 10 ,4

Эти правила даны проф. Ф. Н. Красовским.

Пример 2. В первой группе наблюдались предметы  $A, B, C, D, E, F, G$  шестью приемами ( $m_1 = 6$ ); во второй группе наблюдались предметы  $D, H, K, E$ , при числе приемов  $m_2 = 8$ .

Для второй группы было получено в среднем

$$D = 0^\circ 0' 0",0$$

$$H = 40^\circ 40' 45",5$$

$$K = 77^\circ 13' 44",0$$

$$E = 120^\circ 40' 57",6$$

Результаты имеем в виде табл. 49.

Особенностью примера является то, что во второй группе начальное направление на  $A$  не наблюдалось. Для приведения к нулевому направлению все эти результаты наблюдений во второй группе были увеличены на  $88^\circ 27' 14",6$ . Такой прием равносителен принятию сперва направления  $D$  за нулевое в обеих группах и затем увеличению всех результатов, отсчитанных к нулевому направлению, на  $D$ , на  $88^\circ 27' 14",6$  в обеих группах. Конечно, это не может влиять на окончательные выводы.

Таблица 49

| Предметы              | Первая группа |       | Вторая группа         |       | Среднее по весам для направлений, общих обеим группам |
|-----------------------|---------------|-------|-----------------------|-------|---|
|                       | Направления   | v     | Направления           | v     |   |
| 1 . . . A             | 0° 0' 0",0    |       | —                     |       |   |
| 2 . . . B             | 35 8 3 ,0     |       | —                     |       |   |
| 3 . . . C             | 60 9 13 ,3    |       | —                     |       |   |
| 4 . . . D             | 88 27 14 ,6   | 0",0  | 88°27'14",6           | 0",0  | (88°27'14",6)   |
| 5 . . . H             | —             |       | 129 8 0 ,1            |       |   |
| 6 . . . K             | —             |       | 165 40 58 ,6          |       |   |
| 7 . . . E             | 209 8 16 ,4   | -2 ,4 | 209 8 12 ,2           | +1 ,8 | (209 8 14 ,0)   |
| 8 . . . F             | 220 17 39 ,5  |       | —                     |       |   |
| 9 . . . G             | 280 8 9 ,3    |       | —                     |       |   |
| $(\Delta_1) = - 1",2$ |               |       | $(\Delta_2) = + 0",9$ |       |   |

Выведя по правилам, указанным в начале настоящего раздела, величины  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , мы их нарочно, для отметки особенности случая (точно так же, как и числа для общих направлений), заключаем в табл. 49 в скобки. Нужно иметь в виду, что направление на  $A$  само получит поправку  $(\Delta_1) = 1^\circ 2'$ , следовательно, если бы мы ввели поправки  $(\Delta_1)$  и  $(\Delta_2)$  соответственно в направления  $B, C, H, K, F, G$ , то мы не получили бы таким образом углов  $2.1, 3.1, 5.1, 6.1, 8.1$  и  $9.1$ . Точно так же числа в скобках в последней графе таблицы 49 не будут равны углам  $4.1$  и  $7.1$ . Очевидно, по введении поправок  $(\Delta_1)$  и  $(\Delta_2)$  нужно все полученные после этого числа изменить на  $-\Delta_1$ .

Таким образом, имеем следующий расчет окончательных углов, отсчитываемых от направления на  $A$

|           |              |                 |
|-----------|--------------|-----------------|
| 2.1 . . . | 35° 8' 3",0  | (- 1",2 + 1",2) |
| 3.1 . . . | 60 9 13 ,3   | (- 1 ,2 + 1 ,2) |
| 4.1 . . . | 88 27 15 ,8  | (+ 1 ,2)        |
| 5.1 . . . | 129 8 2 ,2   | (+ 0 ,9 + 1 ,2) |
| 6.1 . . . | 165 41 0 ,7  | (+ 0 ,9 + 1 ,2) |
| 7.1 . . . | 209 8 15 ,2  | (+ 1 ,2)        |
| 8.1 . . . | 220 17 39 ,5 | (- 1 ,2 + 1 ,2) |
| 9.1 . . . | 280 8 9 ,3   | (- 1 ,2 + 1 ,2) |

Уравнивание, только что выполненное в примере 2, можно еще произвести так: независимо измеренный угол в двух группах между предметами  $D$  и  $E$  получил значения

$120^{\circ}41'~1'',8$  из первой группы,

$120^{\circ}40'57''$ ,6 из второй группы.

Его среднее значение по вессам равно  $120^{\circ}40'59'',4$ . Следовательно, в первой группе этот угол получает поправку  $\delta_1 = -2'',4$ , а во второй —  $\delta_2 = +1'',8$ . Направления  $D$  и  $E$  в первой группе должны получить соответственно поправки

$$-\left(-\frac{2'',4}{2}\right) = +1'',2 \text{ и } -\frac{2'',4}{2} = -1'',2.$$

Таким образом, будут установлены окончательно направления на  $D$  и  $E$ .

Направление на  $C$  рассчитываем так

$$C = \frac{88^{\circ}27'14'',6 + 1'',2 - (88^{\circ}27'14'',6 - 60^{\circ}9'13'',3)}{2} + \\ + \frac{209^{\circ}8'16'',4 - 1'',2 - (209^{\circ}8'16'',4 - 60^{\circ}9'13'',3)}{2} = 60^{\circ}9'13'',3,$$

т. е. все остальные направления в первой группе, кроме направлений на  $D$  и на  $E$ , никаких поправок не получают (это будет справедливо и для направления, лежащего между  $D$  и  $E$  и принадлежащего первой группе).

Направления  $H$  и  $K$  во второй группе должны вычисляться так

$$H = \frac{88^{\circ}27'14'',6 + 1'',2 + (129^{\circ}8'0'',1 - 88^{\circ}27'14'',6)}{2} + \\ + \frac{209^{\circ}8'12'',2 + 3'',0 - (209^{\circ}8'12'',2 - 129^{\circ}8'0'',1)}{2} = \\ = 129^{\circ}8'0'',1 + 2'',1 = 129^{\circ}8'2'',2,$$

т. е. все направления второй группы  $H, K, \dots$ , кроме  $D$  и  $E$ , получают поправку  $-2'',1$ , равную  $\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$ .

## § 82. Установление программы наблюдений на пунктах базисной сети при выгоднейшем распределении весов; уравнивание станций в этом случае

В § 25 были указаны приемы для расчета весов направлений в базисной сети. Допустим, что согласно этим расчетам на некотором пункте базисной сети мы должны наблюдать предметы 1, 2, 3, 4, 5... так, чтобы результат наблюдений представился одним рядом направлений соответственно с весами  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \dots$ . Здесь приходится применять измерение углов во всех комбинациях на каждом пункте базисной сети, причем для расчета весов таких углов нужно воспользоваться формулой (343):

$$\frac{p_i \cdot p_k}{p} = p_{i \cdot k},$$

где  $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \dots$ , т. е. равно сумме весов всех направлений, наблюдаемых с данного пункта.

Зная веса  $p_1, p_2, \dots, p_5$  из расчета их по § 25, затем получаем  $p$  и делаем по (343) вычисление величин  $p_{i \cdot k}$ . Но как теперь от этих  $p_{i \cdot k}$  перейти к соответствующему, практически целесообразному, числу приемов? Вследствие значительного различия в весах  $p_1, p_2, \dots, p_5$ , различие в весах  $p_{i \cdot k}$  может достигать 10--15 раз. Если для наибольшего  $p_{i \cdot k}$  установим 24 приема, то угол с наименьшим  $p_{i \cdot k}$  придется измерять одним или двумя приемами. Если для угла с наименьшим  $p_{i \cdot k}$  установим пять приемов, то некоторые углы придется наблюдать 50 приемами. Здесь приходится напомнить сказанное в § 25 о контроле наблюдений в базисной сети.

По этим соображениям лучше пользоваться первым приближением в расчете весов по § 25, так как в нем различия в весах  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \dots$  не так велики, не так подчеркнуты. Далее следует до расчета  $p_{i,k}$  по (343) некоторые малые веса, полученные по § 25, несколько увеличить так, чтобы, приписывая наименьшим  $p_{i,k}$  5—6 приемов, для наибольших  $p_{i,k}$  получить число приемов, не превышающее 24. Иаконец, углы с нулевым весом следует отнести к отдельной программе контрольных измерений, т. е. выполнив программу, соответствующую выгоднейшему распределению весов, на каждом пункте, где есть углы с нулевым весом, сделать отдельно их измерения при числе приемов 5 или 6, не используя впоследствии этих измерений вовсе при выводе выходной стороны.

Для базисной сети черт. 45 мы имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= 1,84; & p_4 &= 1,56; & p_7 &= 1,20; & p_{10} &= 1,05; \\ p_2 &= 0,39; & p_5 &= 0,35; & p_8 &= 0; & p_{11} &= 0; \\ p_3 &= 1,45; & p_6 &= 1,91; & p_9 &= 1,20; & p_{12} &= 1,05. \end{aligned}$$

Увеличивая  $p_2$  и  $p_5$  до 0,4, получим

$$\begin{aligned} p_1 &= 1,84; & p_4 &= 1,56; \\ p_2 &= 0,40; & p_5 &= 0,40; \\ p_3 &= 1,45; & p_6 &= 1,91; \\ p &= 3,69; & p &= 3,87; \\ p_{1 \cdot 2} &= 0,20; & p_{4 \cdot 5} &= 0,16; & p_{7 \cdot 9} &= 0,60; & p_{10 \cdot 12} &= 0,54. \\ p_{1 \cdot 3} &= 0,72; & p_{4 \cdot 6} &= 0,77; \\ p_{2 \cdot 3} &= 0,16; & p_{5 \cdot 6} &= 0,20; \end{aligned}$$

Принимая теперь, что весу  $p_{i,k} = 0,16$  соответствует пять приемов, получаем такую таблицу числа приемов

| Углы      | Углы      | Углы        |
|-----------|-----------|-------------|
| 1.2....6  | 4.5....5  | 7.9....19   |
| 1.3....23 | 4.6....24 | 10.12....17 |
| 2.3....5  | 5.6....6  |             |

В действительности, конечно, углы 1.2, 2.3, 4.5 и 5.6 будут измерены каждый 6 приемами; углы 7.9 и 10.12 — каждый 18 приемами и углы 1.3 и 4.6 — 24 приемами. При расчете перестановок лимба следует считать, что углы 1.2, 1.3, 2.3 на пункте  $B$  и углы 4.5, 4.6 и 5.6 на пункте  $D$  (черт. 45) измеряются способом Шрейбера при трех предметах и при  $m.n = 18$ ; для остальных 18 приемов измерения угла 1.3 и угла 4.6 лимб переставляется так, как будто эти углы измеряются только 18 приемами.

Программа контрольных измерений в случае сети, изображенной на черт. 45, будет состоять: в измерении 6 приемами отдельных углов 7.8, 8.9, 11.10, 12.11, если только углы 11.10 или 12.11 не являются необходимыми для передачи астрономически определенного азимута сторон  $CB$  или соответственно  $CA$  на выходную сторону  $CD$ .

Теперь перейдем к уравниванию на пункте (на станции) углов, измеренных во всех комбинациях, но — в противоположность способу

Шрейбера — с неравными весами в разных комбинациях (измерения разных углов различным числом приемов). Возьмем сперва случай трех измерений.

Введем такие обозначения:

$1.2; 1.3; 2.3$  — измеренные значения углов,

$(1.2); (1.3); (2.3)$  — их поправки,

$p_{1 \cdot 2}; p_{1 \cdot 3}; p_{2 \cdot 3}$  — их веса, пропорциональные числу приемов,

$q_{1 \cdot 2}; q_{1 \cdot 3}; q_{2 \cdot 3}$  — величины, обратные весам  $p_{1 \cdot 2}; p_{1 \cdot 3}; p_{2 \cdot 3}$ .

В данном случае имеем одно условное уравнение:

$$(1.2) + (2.3) - (1.3) + \{1.2 + 2.3 - 1.3\} = 0; \quad w_1 = 1.2 + 2.3 - 1.3.$$

Поэтому будем иметь

$$(1.2) = -\frac{1.2 + 2.3 - 1.3}{q} q_{1 \cdot 2} = -\frac{w_1}{q} q_{1 \cdot 2};$$

$$(1.3) = +\frac{w_1}{q} q_{1 \cdot 3}; \quad (2.3) = -\frac{w_1}{q} q_{2 \cdot 3};$$

$$q = q_{1 \cdot 2} + q_{2 \cdot 3} + q_{1 \cdot 3}.$$

Средняя ошибка единицы веса  $\mu = \pm \frac{w_1}{\sqrt{q}}$ .

Уравненный угол

$$[1.2] = 1.2 - \frac{1.2 + 2.3 - 1.3}{q} q_{1 \cdot 2},$$

$$[1.2] = \frac{(q_{2 \cdot 3} + q_{1 \cdot 3}) \cdot 1.2 - q_{1 \cdot 2} \cdot 2.3 + q_{1 \cdot 2} \cdot 1.3}{q},$$

$$[2.3] = \frac{(q_{1 \cdot 2} + q_{1 \cdot 3}) \cdot 2.3 - q_{2 \cdot 3} \cdot 1.2 + q_{2 \cdot 3} \cdot 1.3}{q},$$

$$[1.3] = \frac{(q_{1 \cdot 2} + q_{2 \cdot 3}) \cdot 1.3 + q_{1 \cdot 3} \cdot 1.2 + q_{1 \cdot 3} \cdot 2.3}{q}.$$

Последние выражения написаны, конечно, не для вычисления уравненных углов, а для соображения их весов. Обозначая величины, обратные весам этих углов, через  $q'_{1 \cdot 2}, q'_{1 \cdot 3}$  и  $q'_{2 \cdot 3}$  легко получаем:

$$q'_{1 \cdot 2} = \frac{(q_{2 \cdot 3} + q_{1 \cdot 3})}{q} q_{1 \cdot 2}; \quad q'_{2 \cdot 3} = \frac{(q_{1 \cdot 2} + q_{1 \cdot 3})}{q} q_{2 \cdot 3};$$

$$q'_{1 \cdot 3} = \frac{(q_{1 \cdot 2} + q_{2 \cdot 3})}{q} q_{1 \cdot 3}.$$

Называя через  $p_1, p_2, p_3$  веса уравненных направлений и через  $q_1, q_2, q_3$  соответственно  $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}$ , имеем

$$q'_{1 \cdot 2} = q_1 + q_2,$$

$$q'_{1 \cdot 3} = q_1 + q_3,$$

$$q'_{2 \cdot 3} = q_2 + q_3,$$

Складывая эти уравнения, а затем вычитая последовательно из суммы уравнение для  $q'_{1 \cdot 2}$ , для  $q'_{1 \cdot 3}$  и  $q'_{2 \cdot 3}$  получим

$$q_3 = \frac{q_{1 \cdot 3} \cdot q_{2 \cdot 3}}{q},$$

$$q_2 = \frac{q_{1 \cdot 2} \cdot q_{2 \cdot 3}}{q},$$

$$q_1 = \frac{q_{1 \cdot 2} \cdot q_{1 \cdot 3}}{q}.$$

Если имеем четыре или пять направлений на станции, то выгоднее составить уравнения погрешностей и от них перейти к нормальным уравнениям. Пусть имеем такие результаты измерений:

|      |     |         |                 |      |     |         |                 |
|------|-----|---------|-----------------|------|-----|---------|-----------------|
| угол | 1.2 | с весом | $p_{1 \cdot 2}$ | угол | 2.3 | с весом | $p_{2 \cdot 3}$ |
| "    | 1.3 | "       | $p_{1 \cdot 3}$ | "    | 2.4 | "       | $p_{2 \cdot 4}$ |
| "    | 1.4 | "       | $p_{1 \cdot 4}$ | "    | 2.5 | "       | $p_{2 \cdot 5}$ |
| "    | 1.5 | "       | $p_{1 \cdot 5}$ |      |     |         |                 |
| угол | 3.4 | "       | $p_{3 \cdot 4}$ | угол | 4.5 | "       | $p_{4 \cdot 5}$ |
| "    | 3.5 | "       | $p_{3 \cdot 5}$ |      |     |         |                 |

Уравнения погрешности будут

$$x - (1.2 - X_0) = \delta_1 \quad \text{с весом } p_{1 \cdot 2}$$

$$y - (1.3 - Y_0) = \delta_2 \quad " \quad p_{1 \cdot 3}$$

$$z - (1.4 - Z_0) = \delta_3 \quad " \quad p_{1 \cdot 4}$$

$$t - (1.5 - T_0) = \delta_4 \quad " \quad p_{1 \cdot 5}$$

$$y - x - [2.3 - (Y_0 - X_0)] = \delta_5 \quad " \quad p_{2 \cdot 3}$$

$$z - x - [2.4 - (Z_0 - X_0)] = \delta_6 \quad " \quad p_{2 \cdot 4}$$

$$t - x - [2.5 - (T_0 - X_0)] = \delta_7 \quad " \quad p_{2 \cdot 5}$$

$$z - y - [3.4 - (Z_0 - Y_0)] = \delta_8 \quad " \quad p_{3 \cdot 4}$$

$$t - y - [3.5 - (T_0 - Y_0)] = \delta_9 \quad " \quad p_{3 \cdot 5}$$

$$t - z - [4.5 - (T_0 - Z_0)] = \delta_{10} \quad " \quad p_{4 \cdot 5}$$

При этом  $X_0, Y_0, Z_0, T_0$  — приближенные значения углов 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.

По общим правилам переходим от этих уравнений к четырем нормальным уравнениям, и, при решении этих последних, отводим в гауссовой схеме графы для определения  $Q_{1 \cdot 1}, Q_{1 \cdot 2}, Q_{1 \cdot 3}, Q_{1 \cdot 4}, Q_{2 \cdot 2}, Q_{2 \cdot 3}, Q_{2 \cdot 4}, Q_{3 \cdot 3}, Q_{3 \cdot 4}, Q_{4 \cdot 4}$ .

В базисных сетях, если вес угла рассчитывался по формуле  $p_{i \cdot k} = \frac{p_i \cdot p_k}{p}$ , должно иметь равенство:

$$Q_{1 \cdot 2} = Q_{1 \cdot 3} = Q_{1 \cdot 4} = Q_{2 \cdot 3} = Q_{2 \cdot 4} = Q_{3 \cdot 4} = q_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_2 &= Q_{1 \cdot 1} - q_1, \\ q_3 &= Q_{2 \cdot 2} - q_1, \\ q_4 &= Q_{3 \cdot 3} - q_1, \\ q_5 &= Q_{4 \cdot 4} - q_1. \end{aligned}$$

Таким образом, будут получены веса уравненных направлений. Если веса  $p_{k-i}$  измеренных углов были взяты с некоторыми отступлениями от расчета по формуле Н. А. Урмаева:  $p_{i \cdot k} = \frac{p_i \cdot p_k}{p}$ , то рассчитываем величины  $q'_{1 \cdot 2}, q'_{1 \cdot 3}, q'_{1 \cdot 4}, q'_{1 \cdot 5}, q'_{2 \cdot 3}, q'_{2 \cdot 4}, q'_{2 \cdot 5}, q'_{3 \cdot 4}, q'_{3 \cdot 5}, q'_{4 \cdot 5}$ , т. е. величины, обратные весам уравненных углов, пользуясь таблицей 42, § 78. Далее по формулам (345) того же параграфа подсчитываем величины  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, S$  и по (346) — значения  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$  величин, обратных весам уравненных направлений.

## Глава XII

### УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПО МЕТОДУ УСЛОВНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

#### § 83. Виды условных уравнений

Пусть наша триангуляция отнесена на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера. Под наблюденными углами или направлениями будем поэтому в дальнейшем понимать собственно полученные из наблюдений углы или направления, исправленные их редукциями за переход на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера.

Будем рассматривать сперва свободную сеть, т. е. распространяющуюся от одного базиса без примыканий к другим базисам или к другим сторонам ранее составленных сетей и без образования в ней самой замкнутых полигонов. В такой сети могут быть условия фигур, условия горизонта и условия боковые (частный вид последних — условия полюсные).

**Условия фигур.** В замкнутой фигуре, при всех вершинах которой были измерены углы, сумма уравненных значений этих углов должна быть равна геометрической сумме углов фигуры. Условия фигуры возникают, очевидно, в каждой замкнутой фигуре сети, образованной сплошными<sup>1</sup> линиями. Будем обозначать: измеренные значения углов — арабскими цифрами без скобок; поправки измеренных углов — соответствующими арабскими цифрами в скобках; уравненные значения углов соответственно римскими цифрами. В плоском треугольнике  $ABD$  (черт. 267) условие фигуры напишется так:

$$I + II + III + VIII = 180^\circ$$

или

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) + 8 + (8) = 180^\circ.$$

или

$$(1) + (2) + (3) + (8) + w = 0, \quad (366)$$

причем свободный член  $w = 1 + 2 + 3 + 8 - 180^\circ$ .

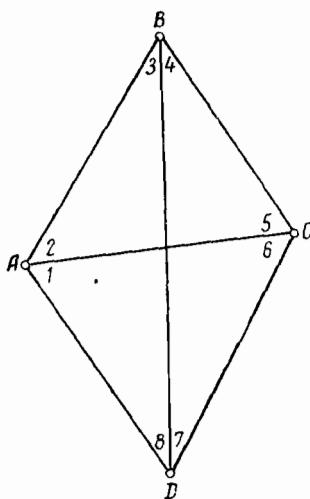
<sup>1</sup> Линия  $AB$  называется сплошной, если с пункта  $A$  наблюдался пункт  $B$  и с пунктом  $A$ ; если с  $B$  не было сделано обратного визирования на  $A$ , то несплошная линия  $AB$  обозначается на чертеже несплошной линией с пунктиром при  $B$ .

Уравнение (366) представляет в окончательном виде условное уравнение фигуры для плоского треугольника при уравнивании углов. Если бы уравнивались направления, то, называя измеренные значения направлений арабскими цифрами (см. черт. 268), а поправки к ним — соответственными арабскими цифрами в скобках, мы условие фигуры для того же треугольника  $ABD$  написали бы так:

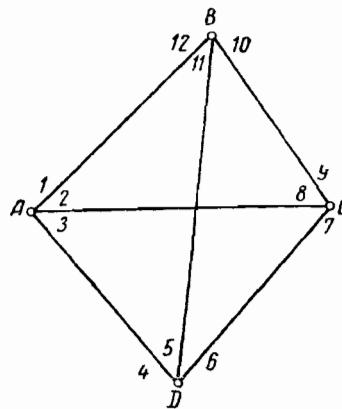
$$-(1) + (3) - (4) + (5) - (11) + (12) + w = 0;$$

$$w = 3 - 1 + 5 - 4 + 12 - 11 = 180^\circ.$$

Очевидно, что при замкнутой фигуре из  $n$  точек, образованной сплошными линиями, в левую часть соответствующего ей условия фигуры при уравнивании углов войдут: 1) сумма поправок всех измеренных при вершинах фигуры внутренних углов, число коих вообще больше  $n$ , так



Черт. 267



Черт. 268

как внутренний угол фигуры может составиться из 2, 3 и более измеренных углов; 2) свободный член, получаемый вычитанием из суммы измеренных значений внутренних углов геометрической суммы углов фигуры.

При уравнивании направлений поправка угла заменяется разностью поправок направлений, причем в фигуре из  $n$  точек число поправок направлений в условии фигуры равно  $2n$ , и сумма коэффициентов при всех поправках направлений равна нулю.

**Условия горизонта.** Если в сети образуются центральные системы, то при уравнивании углов необходимо в каждой такой системе ввести условия, чтобы сумма уравненных углов, имеющих общую вершину в полюсе центральной системы, была равна  $360^\circ$ . Если такого условия, называемого условием горизонта, не вводить, то, например, в случае центральной системы, изображенной на черт. 269, угол IV не окажется после уравнивания сети равным  $360^\circ - I - II - III$ , и вследствие этого центральная система, построенная по уравненным углам, разомкнется: если строить, начиная от стороны  $OA$ , цепь треугольников в порядке  $ABO, BCO, CDO, DOA$ , то в последнем треугольнике сторона

$O A$  займет положение  $O A_1$ , не совпадающее с первоначально взятым положением той же стороны, причем угол  $AOA_1$  будет равен уклонению суммы I + II + III + IV от  $360^\circ$ . Для системы, изображенной на чертеже 269, условие горизонта налишется так:

$$I + II + III + IV - 360^\circ = 0$$

или

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) + 4 + (4) - 360^\circ = 0$$

или в окончательной форме

$$(1) + (2) + (3) + (4) + 1 + 2 + 3 + 4 - 360^\circ = 0.$$

При уравнивании направлений условий горизонта не возникает. Действительно, называя уравненные значения направлений в  $O$  на сигналы  $A, B, C, D$  соответственно через  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и вычисляя по этим направлениям уравненные углы при  $O$ , имеем:

$$I = \beta - \alpha$$

$$II = \gamma - \beta$$

$$III = \delta - \gamma$$

$$IV = 360^\circ + \alpha - \delta.$$

При любых значениях чисел  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  сумма  $I + II + III + IV$  (углов при полюсе) будет тождественно равна  $360^\circ$ .

Если на точке  $O$ , полюсе центральной системы, в результате наблюдений

были выведены направления  $A, B, C, D, E$ , то свободный член условия горизонта будет равен нулю; в самом деле, измеренные углы при точке  $O$  будут выведены так:

$$1 = B - A$$

$$2 = C - B$$

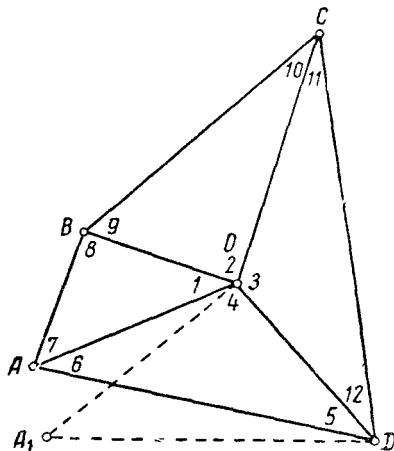
$$3 = D - C$$

$$4 = E - D$$

$$5 = 360^\circ + A - E.$$

Следовательно, при любых значениях  $A, B, C \dots$  сумма  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  равна нулю; равенство нулю свободного члена в рассмотренном случае при уравнивании сети по углам не ведет, однако, к возможности не вводить условия горизонта.

Если бы, кроме углов 1, 2, 3, 4, входящих в условия сети (черт. 269) и измеренных независимо друг от друга, были бы на точке  $O$  еще независимо измерены углы  $AOC, BOD$  и т. п., то тогда надлежало бы составить условия станций, вводя в их число и условия горизонта; после определения из условий станции и условия горизонта поправок углов 1, 2, 3, 4, в условия горизонта в сети нужно



Черт. 269

было ввести углы, исправленные этими поправками, причем свободный член в условии горизонта окажется уже тогда равным нулю.

Пример. Наблюденные значения углов в  $O$  (черт. 269) оказались такие

$$\angle AOB = 1 = 40^\circ 0' 0'',0$$

$$\angle BOC = 2 = 90^\circ 5' 2'',0$$

$$\angle COD = 3 = 120^\circ 5' 4'',0$$

$$\angle DOA = 4 = 109^\circ 49' 52'',0$$

$$\angle AOC = f = 130^\circ 5' 4'',0$$

Условия станции напишутся

$$1) \quad (1) + (2) + (3) + (4) - 2'',0 = 0$$

$$(1) + (2) + 130^\circ 5' 2'',0 = 130^\circ 5' 4'',0 + (f)$$

$$2) \quad (1) + (2) - (f) - 2'',0 = 0$$

Уравнения коррелят, соответствующие условиям 1) и 2), будут

$$4k_1 + 2k_2 - 2'',0 = 0 \quad k_1 = + 0,25$$

$$2k_1 + 3k_2 - 2'',0 = 0 \quad k_2 = + 0,50$$

Поправки углов оказываются:

$$(1) = k_1 + k_2 = + 0'',75$$

$$(2) = + 0'',75$$

$$(3) = + 0,25$$

$$(4) = + 0,25$$

В условия сети (и в условие горизонта сети) надлежит в качестве измеренных ввести углы:

$$1 = 40^\circ 0' 0'',75$$

$$2 = 90^\circ 5' 2'',75$$

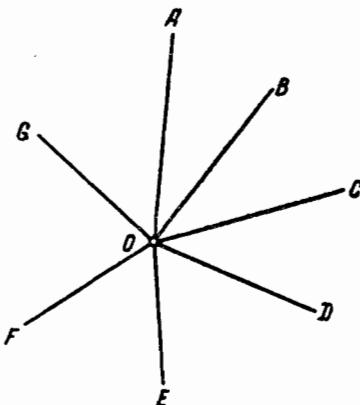
$$3 = 120^\circ 5' 4'',25$$

$$4 = 109^\circ 49' 52'',25$$

сумма которых равна  $360^\circ$

Не так редко предметы, наблюдаемые из  $O$  (черт. 270), приходится делить на группы, либо вследствие различия времени хорошей видимости для разных предметов, либо вследствие того, что часть предметов не может быть наблюдаема из центра знако. Допустим, что в первой группе были определены направления  $A, B, C, D$  на предметы тех же названий; во второй группе были определены направления  $D_1, E, F$  на предметы  $D, E, F$ ; в третьей группе были получены направления  $F_1, G, A_1$  на предметы  $F, G, A$ ; предположим, что наблюдения каждой группы сделаны независимо от наблюдений других групп.

Очевидно, что при указанном порядке работы получились в ее результате независимые углы:  $\angle AOD = D - A$ ;  $\angle DOF = F - D_1$ ;  $\angle FOA =$



Черт. 270

$= A_1 - F_1$  и зависимые между собой углы каждой группы, выводимые по разностям направлений этой группы.

Связывая независимые между собой углы  $AOD$ ,  $DOF$ ,  $FOA$  условием горизонта на станции, мы получим поправки этих углов, равные между собой. После этого углы  $AOB$ ,  $COD$ ,  $DOE$ , ..., примыкающие к начинаящим или замыкающим группу сторонам и вычисляемые соответственно как разности  $B - A$ ,  $D - C$ ,  $E - D_1$ , ..., должны быть исправлены половиной поправки  $\delta$ , выведенной для соответственных независимых углов. Это правило вытекает из такого соображения. Для угла  $AOB$  имеем одно значение, равное  $B - A$ ; для этого же угла получаем второе значение так:  $(D - A + \delta) - (D - B) = B - A + \delta$ , т. е. вычисляем его по исправленному углу  $AOD$  и по выводимому из наблюдений углу  $BO\bar{D}$ ; из этих двух значений нужно взять арифметическую средину.

Пример.

$$\begin{aligned} A &= 0^{\circ}0'0'',0 & B &= 30^{\circ}0'5'',0 & C &= 60^{\circ}0'3'',0 & D &= 90^{\circ}0'4'',0 \\ D_1 &= 000,0 & E &= 85 107,0 & F &= 120 55,0 \\ F_1 &= 000,0 & G &= 75 83,0 & A_1 &= 149 5445,0 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} AOD &= \alpha = 90^{\circ}0'4'',0 \\ DOF &= \beta = 120 55,0 \\ FOA &= \gamma = 149 5445,0 \end{aligned}$$

Условие станции напишется так

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) - 6'',0 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\alpha) &= (\beta) = (\gamma) = +2',0; \\ \angle AOB &= 30^{\circ}0'5'',0 + 1'',0 = 30^{\circ}0'6'',0 \\ \angle BOC &= 60 03,0 - 30^{\circ}0'5'',0 = 29^{\circ}59'58'',0 \text{ (не исправляется)} \\ \angle COD &= 90 04,0 - 60^{\circ}0'3'',0 + 1'',0 = 30^{\circ}0'2'',0 \\ \angle DOE &= 85 107,0 + 1'',0 = 85^{\circ}10'8'',0. \end{aligned}$$

Исправленные таким образом углы и должно подставить в условие горизонта в сеть.

Если бы сеть уравнивалась по направлениям, а при наблюдениях на пункте  $O$  пришлось бы разбить предметы на группы, то до уравнивания сети пришлось бы сделать *уравнивание станции*  $O$ , как указано в §§ 76 и 78, с той только разницей, что уравненные углы, отсчитываемые все от одного направления, можно принять при уравнивании сети за измеренные на  $O$  направления, причем условия горизонта в  $O$  не возникнет.

**Условия боковые.** В четырехугольнике  $ABCD$ , изображенном на черт. 267, имеем собственно пять условий фигур

- 1) из треугольника  $ABD \dots (1)+(2)+(3)+(8)+1+2+3+8 = 180^\circ = 0$
- 2) " "  $BCD \dots (4)+(5)+(6)+(7)+4+5+6+7 = 180^\circ = 0$
- 3) " "  $ABC \dots (2)+(3)+(4)+(5)+2+3+4+5 = 180^\circ = 0$
- 4) " "  $ACD \dots (1)+(6)+(7)+(8)+1+6+7+8 = 180^\circ = 0$
- 5) " четырехугольника....(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)+1+  
 $+2+3+4+5+6+7+8 = 360^\circ = 0,$

Очевидно, что из этих условий только три независимы, а остальные два — следствия этих трех: уравнение пятое есть сумма уравнений первого и второго; уравнение четвертое получается вычитанием третьего уравнения из суммы первого и второго уравнений. Таким образом, при уравнивании углов в четырехугольнике  $ABCD$  мы исчерпаем все условия фигур, если их начнем из треугольников  $ABD$ ,  $BCD$ ,  $ABC$ . Допустим, что из трех условий фигур, соответствующих этим трем треугольникам, мы нашли поправки углов; будем ли мы теперь, по исправлении измеренных углов такими поправками, иметь единственное решение нашего четырехугольника  $ABCD$ ?

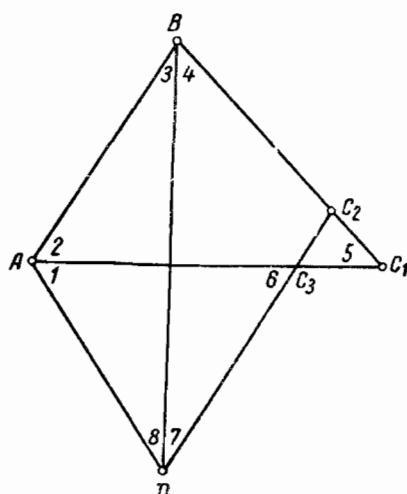
Построив с исправленными за условия фигур углами треугольники  $ABD$  и  $BDC$ , мы определим положение всех вершин четырехугольника; пусть при этом  $C$  совпадает с  $C_2$  (черт. 271); если теперь построим по углу 2 диагональ  $AC$ , то она, образуя с  $BC_2$  угол 5, дополняющий сумму  $2+3+4$  до  $180^\circ$ , тем не менее вообще не пройдет через  $C_2$ , а пересечется со сторонами  $DC$  и  $BC$  в точках  $C_3$  и  $C_1$ . Выполнение одних условий фигур не исключает возможности после этого вместо четырехугольника построить фигуру  $ABC_2C_1CD$ . Требование прохождения диагонали при  $A$  через точку  $C$ , построенную ранее без участия этой диагонали, должно быть введено, кроме условий фигур, в число условий четырехугольника; это требование и представляет собой боковое условие.

Боковое условие, очевидно, можно рассматривать как требование совпадения точек  $C_3$  и  $C_1$  или как требование получения одного и того же значения для длины диагонали  $AC$  при двух независимых ее определениях: по стороне  $AB$  из треугольника  $ABC$  и по стороне  $AB$  из треугольников  $ABD$  и  $ADC$ . Таким образом, с уравненными углами должно иметь

$$\frac{AB \sin [\text{III} + \text{IV}]}{\sin V} = \frac{AB \sin \text{III} \sin [\text{VII} + \text{VIII}]}{\sin \text{VIII} \sin \text{VI}}$$

или

$$\frac{\sin V}{\sin [\text{III} + \text{IV}]} \cdot \frac{\sin [\text{VII} + \text{VIII}]}{\sin \text{VI}} \cdot \frac{\sin \text{III}}{\sin \text{VIII}} = 1.$$



Черт. 271

С измеренными же углами напишем

$$\frac{\sin [5+(5)]}{\sin [3+4+(3)+(4)]} \cdot \frac{\sin [7+8+(7)+(8)]}{\sin [6+(6)]} \cdot \frac{\sin [3+(3)]}{\sin [8+(8)]} = 1. \quad (367)$$

Боковое условие можно для четырехугольника написать еще так

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1. \quad (368)$$

Уравнение (368) есть тождество, которое должно выполняться с измеренными углами и смысл которого тот, что отношение сторон  $AB$  и  $AD$ , выводимое из треугольников  $ABC$  и  $ADC$  [произведение первых двух множителей в уравнении (368)], должно быть равно отношению тех же сторон, определяемому треугольником  $ABD$ ; при вычислении указанных отношений с измеренными углами уравнение (368) не будет выполнено.

Боковые условия возникают непременно, если в сети имеются диагонали: или пересекающие стороны треугольников, или соединяющие вершины нескольких треугольников, или замыкающие цепи треугольников (такие диагонали обращают цепь треугольников в сеть треугольников). Во всех случаях мы имеем диагональ с построенной уже точкой сети на вершину, определяемую, помимо этой диагонали, двумя прямыми с предшествующими ей в процессе построения сети точек: требование, чтобы диагональ и эти две прямые дали бы одно пересечение, и приводит к боковому условию. В большинстве случаев боковое условие сводится к требованию, чтобы для длины некоторой стороны сети, которую можно вычислить двумя независимыми путями, получалось бы одно и то же значение при применении обоих путей ее вычисления. Это мы уже видели на примере четырехугольника. Если возьмем центральную систему (черт. 269), то в ней цепь треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  обращается в сеть посредством вседения замыкающей стороны (диагонали)  $AD$ ; построив на стороне  $AB$  треугольники  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ , будем иметь определенными все вершины системы без участия в этом построении диагонали  $AD$ ; строя эту диагональ при  $D$  по углу 5, мы должны, конечно, взвести требование прохождения ее через построенную уже точку  $A$ .

Это же требование можно выразить иначе так: приняв сторону  $AO$  за основную, для стороны  $OD$  мы должны получить одно и то же значение, будем ли вычислять ее из треугольника  $AOD$ , или из треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ .

Другими словами, с измеренными углами в нашей центральной системе должно существовать тождество:

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1, \quad (369)$$

понимаемое так, что первые три множителя левой части его определяют отношение  $OA$  к  $OD$  из треугольников  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COD$ , а последний множитель дает отношение тех же сторон из треугольника  $AOD$ . Заменяя отношения сторон отношениями синусов углов им противолежащих, боковое условие (369) напишем еще в виде

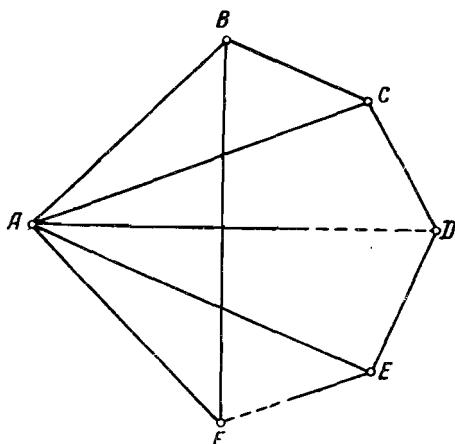
$$\frac{\sin [8+(8)]}{\sin [7+(7)]} \cdot \frac{\sin [10+(10)]}{\sin [9+(9)]} \cdot \frac{\sin [12+(12)]}{\sin [11+(11)]} \cdot \frac{\sin [6+(6)]}{\sin [5+(5)]} = 1. \quad (370)$$

Очевидно, что боковое условие в центральной системе имело бы место, если бы угол 6 и не был измерен, т. е. линия  $DA$  была бы не сплошная: в этом случае в уравнении (370) пришлось бы заменить  $\sin[6 + (6)]$  через  $\sin[4 + 5 + (4) + (5)]$ . Точно так же и в четырехугольнике  $ABCD$  (черт. 267) боковое условие сохранилось бы, если бы не были измерены углы 5 и 6, и линия  $AC$  была бы несплошная: тогда в уравнении (367) пришлось бы заменить  $\sin[5 + (5)]$  через  $\sin[2 + 3 + 4 + (2) + (3) + (4)]$ , а  $\sin[6 + (6)]$  — через  $\sin[1 + 7 + 8 + (1) + (7) + (8)]$ .

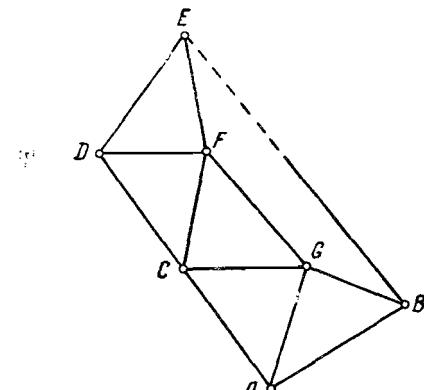
Для уравнений (368) и (369) характерно то, что они представляют боковое условие в виде полюсного уравнения, т. е. в виде произведения отношений длин сторон, соединяющих общую точку — полюс — со всеми вершинами некоторой замкнутой фигуры. Здесь мы подошли к возможности сделать следующее обобщение: если в сети есть точка  $A$  (черт. 272), из которой идут линии на все вершины замкнутой фигуры  $BCDEF$ , то в фигуре  $ABCDEF$  имеется боковое условие, которое напишется в форме полюсного уравнения с полюсом  $A$  и именно так:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AF}{AB} = 1. \quad (371)$$

Уравнение (371) должно пониматься как требование, чтобы с углами уравненными отношение сторон  $AB$  и  $AF$ , определяемое из цепи треугольников  $ABC, ACD, ADE, AEF$ , должно быть равно отношению тех же сторон, выводимому из треугольника  $ABF$ . Диагональ  $FB$  обращает на черт. 272 простую цепь треугольников в сеть треугольников. Очевидно, что замкнутая фигура  $BCDEF$ , на которую опирается исходящий



Черт. 272



Черт. 273

из полюса пучок линий, может иметь некоторые линии и не сплошные; точно так же в числе линий, исходящих из полюса  $A$ , могут быть и не сплошные.

Кроме рассмотренных, надлежит несколько остановиться на таких случаях, в которых боковое условие не может быть выражено требованием равенства двух значений некоторой стороны сети, выводимых двумя независимыми путями; эти случаи, один из которых изображен

на черт. 273, возникают вообще тогда, когда в сети имеется диагональ, соединяющая вершины удаленных друг от друга (в порядке их построения) треугольников, причем такая диагональ не образует ни центральной системы, ни замкнутой фигуры, на все вершины которой идут линии из некоторого полюса. Здесь приходится ставить иное требование, а именно — чтобы проекция ломаной линии  $BGFE$  на перпендикуляр к диагонали  $BE$  была бы равна нулю; уравнение, выражающее указанное требование, через измеренные углы и их поправки, имеет сложный вид и его не следует собственно называть боковым условием.

Уравнения (367) и (370) должны быть приведены к линейному виду. Считая поправки углов достаточно малыми, напишем

$$\lg \sin [5 + (5)] = \lg \sin 5 + M(5)'' \sin 1'' \operatorname{ctg} 5, \quad (372)$$

где  $M$  — модуль логарифмов. Применяя формулу (372) к преобразованию уравнения (367), будем иметь боковое условие четырехугольника в таком виде

$$\begin{aligned} & M \sin 1'' \{ (5) \operatorname{ctg} 5 + (7) \operatorname{ctg} [7 + 8] + (8) \operatorname{ctg} [7 + 8] + (3) \operatorname{ctg} 3 \} - \\ & - M \sin 1'' \{ (3) \operatorname{ctg} [3 + 4] + (4) \operatorname{ctg} [3 + 4] + (6) \operatorname{ctg} 6 + (8) \operatorname{ctg} 8 \} + \\ & + \lg \frac{\sin 5 \sin [7 + 8] \sin 3}{\sin [3 + 4] \sin 6 \sin 8} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \{ \operatorname{ctg} 3 - \operatorname{ctg} [3 + 4] \} (3) - \operatorname{ctg} [3 + 4] (4) + \operatorname{ctg} 5 (5) - \\ & - \operatorname{ctg} 6 (6) + \operatorname{ctg} [7 + 8] (7) + \{ \operatorname{ctg} [7 + 8] - \operatorname{ctg} 8 \} (8) + \\ & + \frac{1 \cdot 10^7}{M \cdot 10^7 \sin 1''} \cdot \lg \frac{\sin 5 \cdot \sin [7 + 8] \cdot \sin 3}{\sin [3 + 4] \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} = 0. \quad (367') \end{aligned}$$

В виду того, что  $\frac{1}{M \sin 1''}$  число большое, в свободный член уравнения введено делителем и множителем  $10^7$ ;  $\frac{1}{M 10^7 \sin 1''}$  — число уже малое, логарифм которого равен  $8.6766 - 10$ ; произведение  $10^7 \lg \frac{\sin 5 \sin [7 + 8] \sin 3}{\sin [3 + 4] \sin 6 \sin 8} = 10^7 \lg \Delta$  представляет  $\lg \Delta$  в единицах седьмого знака. В большинстве случаев, однако, приводят боковое условие к несколько иному виду, чем (367'). Предполагая, что в пределах каждого десятисекундного интервала, имеющегося в семизначных таблицах логарифмов тригонометрических функций, приращение логарифма синуса прямо пропорционально приращению углового аргумента, можем написать при значениях поправок углов, меньших  $10''$

$$\lg \sin [5 + (5)] = \lg \sin 5 + \Delta_5 (5), \quad (373)$$

понимая под  $\Delta_5$  изменение логарифма синуса угла 5 при изменении этого угла на одну секунду. Величина  $\Delta_5$  при указанном предположении получится посредством деления на десять разности двух находящихся в логарифмических таблицах смежных логарифмов синусов, между которыми лежит  $\lg \sin 5$ . Если угол 5 меньше  $90^\circ$ , то найденное указанным образом из логарифмических таблиц значение  $\Delta_5$  подставляется в уравнение (373) со знаком плюс, если же угол 5 более  $90^\circ$ , то со знаком минус. Это правило станет понятным из сличения уравнения (373) с уравнением (372):  $\Delta_5$ , очевидно, равно  $M \sin 1'' \operatorname{ctg} 5$ . Применяя

уравнение (373) к приведению в линейный вид уравнения (367), будем иметь боковое условие четырехугольника, изображенного на черт. 267, в такой форме

$$[\Delta_3 - \Delta_{3+4}] (3) - \Delta_{3+4} (4) + \Delta_5 (5) - \Delta_6 (6) + \Delta_{7+8} (7) + [\Delta_{7+8} - \Delta_8] (8) + \lg \frac{\sin 5 \sin [7+8] \sin 3}{\sin [3+4] \sin 6 \sin 8} = 0. \quad (374)$$

Из черт. 271 ясно, что

$$AC_1 = \frac{AB \sin [3+4]}{\sin 5}; \quad AC_3 = \frac{AB \sin 3 \sin [7+8]}{\sin 8 \sin 6}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lg \frac{AC_3}{AC_1} &= \lg \frac{\sin 5 \sin [7+8] \sin 3}{\sin [3+4] \sin 6 \sin 8}, \\ \lg \frac{AC_3}{AC_1} &= \lg \left[ \frac{AC_1 - C_1 C_3}{AC_1} \right] = \lg \left[ 1 - \frac{C_1 C_3}{AC_1} \right]. \end{aligned}$$

Так как  $C_1 C_3$  всегда чрезвычайно мало по сравнению с  $AC_1$ , то, раскладывая  $\lg \left[ 1 - \frac{C_1 C_3}{AC_1} \right]$  в ряд, мы можем ограничиться лишь одним первым членом этого ряда, и тогда будем иметь

$$-M \frac{C_1 C_3}{AC_1} = \lg \frac{\sin 5 \sin [7+8] \sin 3}{\sin [3+4] \sin 6 \sin 8}.$$

Следовательно, свободный член уравнения (374) равен относительной певязке четырехугольника по направлению диагонали, умноженной на модуль неперовых логарифмов.

В сетях не с одним, а несколькими базисами, в сетях, примыкающих к нескольким сторонам ранее составленной триангуляции, и в цепях треугольников, образующих замкнутые полигоны, возникают особые условия, которые мы вкратце сейчас и рассмотрим.

**Базисные условия.** Если в триангуляции имеются две основные стороны  $AB$  и  $CD$  (черт. 274), вычисленные из двух базисных сетей по базисам  $ab$  и  $cd$ , то возникает базисное условие, состоящее в требовании, чтобы значение длины стороны  $CD$ , определенное по основной стороне  $AB$  и по углам, связывающим две эти стороны треугольников, было бы равно значению  $b$  стороны  $CD$ , выведенному из базисной сети  $CcDd$ . Называя длину основной стороны  $AB$  через  $a$ , имеем, очевидно

$$\frac{a \sin II}{\sin I} \cdot \frac{\sin IV}{\sin III} \cdot \frac{\sin VI}{\sin V} \dots = b$$

или

$$\begin{aligned} \lg \sin [2+(2)] - \lg \sin [1+(1)] + \lg \sin [4+(4)] - \lg \sin [3+(3)] + \\ + \lg \sin [6+(6)] - \lg \sin [5+(5)] + \lg a - \lg b = 0 \end{aligned}$$

или

$$\alpha_2(2) - \beta_1(1) + \alpha_4(4) - \beta_3(3) + \alpha_6(6) - \beta_5(5) + \\ + \lg \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \dots}{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \dots} + \lg a - \lg b = 0. \quad (375)$$

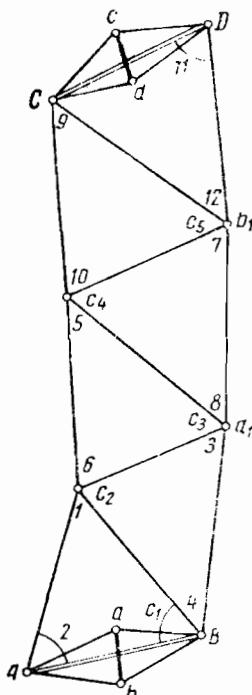
причем через  $\alpha$  обозначены первенцы логарифмов синусов четных углов при изменении их на одну секунду, а через  $\beta$  — такие же величины для

углов нечетных. Обычно базисное условие в виде уравнения (375) решается отдельно и после решения условий фигур, горизонтов и боковых: рассматривая сперва есть как свободную, уравнивают ее и затем, введя в измеренные углы поправки из такого уравнивания, с исправленными углами составляют уравнение (375) и из него находят вторичные поправки углов. При таком порядке вычисления приходится, конечно, требовать, чтобы вторичные поправки углов, определенные из базисного условия, удовлетворяли бы существующим в сети условиям фигур, условиям боковым и т. д.; другими словами, к уравнению (375) нужно собственно присоединить все условия сети, введя в них исправленные из первого уравнивания углы, и находить вторичные поправки, решая все эти условия совместно с базисным. Сложность такой задачи в общем случае и при строгом ее решении очевидна, и она несколько не меньше сложности задачи совместного решения всех условий сети и базисного условия прямо с измеренными значениями углов: разница заключается лишь в выборе приближенных значений неизвестных углов. Но в частном случае, если сеть представляет *простую цепь* треугольников и если уравнивание ведут по углам, задача нахождения вторичных поправок со способу наименьших квадратов из совместного решения уравнения (375) и всех условий сети является очень простой, и это упрощение достигается именно предшествующим отдельным решением всех условий, кроме базисного.

Рассмотрим этот частный случай. К уравнению (375) мы должны присоединить следующие условия фигур, доставляемые каждым треугольником цепи:

$$(1) + (2) + (c_1) = 0 \quad | \quad k_1 \\ (3) + (4) + (c_2) = 0 \quad | \quad k_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad | \quad \dots \\ (2n-1) + (2n) + (c_n) = 0 \quad | \quad k_n$$

[здесь под (1), (2), (c) понимаются вторичные поправки]. Обозначая коррелаты, соответствующие условиям фигур из первого, второго и т. д. треугольников, через  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , а через  $K$  — коррелату уравнения (375), напишем такие выражения поправок через коррелаты



Черт. 274

$$\begin{array}{l|l|l} (1) = k_1 - \beta_1 K & (3) = k_2 - \beta_3 K & \dots \\ (2) = k_1 + \alpha_2 K & (4) = k_2 + \alpha_4 K & \dots \\ (c_1) = k_1 & (c_2) = k_2 & \dots \end{array}$$

Нормальные уравнения коррелат будут такие

$$(\alpha_2 - \beta_1) k_1 + (\alpha_4 - \beta_3) k_2 + (\alpha_6 - \beta_5) k_3 + \dots + (\Sigma \alpha^2 + \Sigma \beta^2) K + w = 0$$

$$3k_1 + (\alpha_2 - \beta_1) K = 0$$

$$3k_2 + (\alpha_4 - \beta_3) K = 0$$

$$3k_3 + (\alpha_6 - \beta_5) K = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

причем под  $w$  понимается свободный член уравнения (375). Из этих нормальных уравнений легко получаем

$$k_1 = -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} K$$

$$k_2 = -\frac{\alpha_4 - \beta_3}{3} K$$

$$k_3 = -\frac{\alpha_6 - \beta_5}{3} K$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left\{ \left[ \alpha_{2i}^2 + \beta_{2i-1}^2 - \frac{(\alpha_{2i} - \beta_{2i-1})^2}{3} \right] + \left[ \alpha_{2i+2}^2 + \beta_{2i+1}^2 - \frac{(\alpha_{2i+2} - \beta_{2i+1})^2}{3} \right] + \dots \right\} K + w = 0$$

или,

$$\frac{2}{3} K \sum_1^n (\alpha_{2i}^2 + \beta_{2i-1}^2 + \alpha_{2i} \cdot \beta_{2i-1}) + w = 0$$

$$\frac{1}{3} K \sum_1^n [\alpha_{2i}^2 + \beta_{2i-1}^2 + (\alpha_{2i} + \beta_{2i-1})^2] + w = 0,$$

откуда

$$K = -\frac{w}{\Sigma \sigma}, \quad (376)$$

причем в формуле (376) величины  $\sigma$  входят из всех треугольников цепи и для треугольника с номером  $i$  и с названием углов:

$$2i, \quad 2i-1, \quad c_i,$$

$$\sigma_i = \frac{1}{3} [\alpha_{2i}^2 + \beta_{2i-1}^2 + (\alpha_{2i} + \beta_{2i-1})^2].$$

По определении  $K$  имеем

$$(1) = -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} K - \beta_1 K = -\frac{2\beta_1 + \alpha_2}{3} K$$

$$(2) = -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} K + \alpha_2 K = +\frac{2\alpha_2 + \beta_1}{3} K$$

$$(c_1) = -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} \cdot K$$

$$(2n-1) = -\frac{2\beta_{2n-1} + \alpha_{2n}}{3} K$$

$$(2n) = +\frac{2\alpha_{2n} + \beta_{2n-1}}{3} K$$

$$(c_n) = -\frac{\alpha_{2n} - \beta_{2n-1}}{3} K.$$

Или, заменяя  $K$  по формуле (376), для поправок углов  $n$ -го треугольника получим окончательно

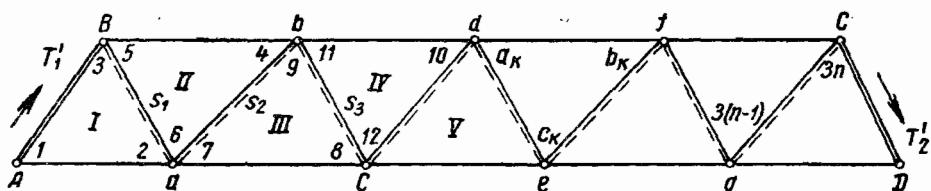
$$(2n-1) = (2\beta_{2n-1} + \alpha_{2n}) \frac{w}{3\Sigma\sigma}$$

$$(2n) = -(2\alpha_{2n} + \beta_{2n-1}) \frac{w}{3\Sigma\sigma}$$

$$(c_n) = +(\alpha_{2n} - \beta_{2n-1}) \frac{w}{3\Sigma\sigma}.$$

Сумма вторичных поправок в каждом треугольнике, очевидно, равна нулю. Связующий угол с нечетным номером должен находиться при составлении базисного условия против исходной стороны треугольника.

**Условие дирекционных углов и условие азимутов.** Предположим, что триангуляция в проекции Гаусса-Крюгера отнесена на плоскость. Если ряд треугольников II класса прокладывается между сторонами I класса, то для этих последних сторон имется не только твердо и окончательно установленные значения их длин, но и твердо и окончательно установленные значения на плоскости их дирекционных углов  $T'$ .



Черт. 275

Пусть твердо установленные дирекционные углы сторон высшего класса  $AB$  и  $CD$  (черт. 275) равны соответственно  $T'_1$  и  $T'_2$ . Обычно ряды II и III класса уравнивают по углам. Тогда при составлении условия дирекционных углов берут ходовую линию  $ABabcdefgCD$ , как показано

на черт. 275 пунктиром, т. е. по связующим сторонам ряда. Очевидно, условие напишется так

$$T'_1 - 3 - (3) + 6 + (6) - 9 - (9) + \dots - 3n - (3n) \pm 180^\circ = T'_2 \\ \text{или}$$

$$-(3) + (6) - (9) + \dots - (3n) + \\ + [(-3 + 6 - 9 + \dots - 3n \pm 180^\circ) - (T'_2 - T'_1)] = 0.$$

Свободный член

$$w = \{-3 + 6 - 9 + \dots - 3n \pm 180^\circ\} - (T'_2 - T'_1).$$

Здесь  $n$  — число треугольников ряда. Сумма

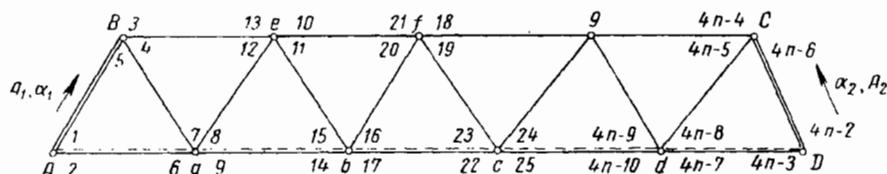
$$\{-3 + 6 - 9 + \dots - 3n \pm 180^\circ\}$$

есть, конечно, получаемая по неуравненным углам ряда разность дирекционных углов твердых сторон  $AB$  и  $CD$ .

Конечно, легко написать условие дирекционных углов и для случая уравнивания направлений, и для иного выбора ходовой линии.

Условия азимутов возникают в звенях триангуляции I класса, при уравнивании которых обычно считают, что триангуляция отнесена к поверхности референц-эллипсоида, и не вводят поэтому в наблюденные углы или направления редукций за отнесение их на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера.

В этом случае для выходных сторон  $AB$  и  $CD$  звена (черт. 276) мы имеем обычно не геодезические дирекционные углы  $T_1$  и  $T_2$  (т. е. дирекционные углы на поверхности референц-эллипсоида),



Черт. 276

а астрономические азимуты  $\alpha_1$  с  $A$  на  $B$  и  $\alpha_2$  с  $D$  на  $C$ . От этих астрономических азимутов, искаженных не только ошибками их определения, но еще и влиянием уклонений отвесных линий в  $A$  и в  $D$ , мы должны сперва перейти к геодезическим азимутам  $A_1$  и  $A_2$  посредством уравнений:

$$A_1 = \alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1,$$

$$A_2 = \alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2,$$

о чем уже сказано в § 13. При этом  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  суть астрономически определенные долготы пунктов  $A$  и  $D$ ;  $L_1$  и  $L_2$  — геодезические долготы тех же пунктов;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — астрономические широты точек  $A$  и  $D$ . Долгота  $L_1$  обычно известна из обработки звеньев I класса, примыкающих к звену  $ABCD$  и ранее его уравненных. Долгота  $L_2$  определится, если будем знать геодезическую разность долгот  $l$  точек  $A$  и  $D$ . Эта величина  $l$  вычисляется по неуравненным элементам нашего ряда  $ABCD$  с точностью, однако, достаточной для составления азимутального уравнения. Ходовую линию берут обычно по линии  $AabcdnD$  (черт. 276)

или по линии  $BegC$ , т. е. по направлениям промежуточных сторон сети. Непременно в рассматриваемом случае уравнивают направления.

Азимутальное уравнение заключается в требовании, чтобы, исходя от азимута  $A_1$  и вычисляя по уравненным элементам цепи последовательно геодезические азимуты сторон  $Aa$ ,  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $dD$  и  $CD$ , мы получили бы для этой последней стороны геодезический азимут, в точности равный ранее соображеному или заданному геодезическому азимуту ее  $A_2$ .

Обозначим на эллипсоиде разности геодезических азимутов

в  $a$  по линии  $aA$  и в  $A$  по линии  $Aa$  через  $180^\circ + \delta_1$ ,

в  $b$  „ „  $ba$  и в  $a$  „ „  $ab$  „  $180^\circ + \delta_2$ ,

в  $c$  „ „  $cb$  и в  $b$  „ „  $bc$  „  $180^\circ + \delta_3$ ,

Тогда азимутальное уравнение напишем так

$$\begin{aligned} A_1 + 2 - 1 + (2) - (1) + 180^\circ + \delta_1 + 9 - 6 + (9) - (6) + 180^\circ + \delta_2 + 17 - \\ - 14 + (17) - (14) + 180^\circ + \delta_3 + 25 - 22 + (25) - (22) + \delta_4 + \dots + \\ + [4n - 7] - [4n - 10] + (4n - 7) - (4n - 10) + 180^\circ + \delta_n + [4n - 2] - \\ - [4n - 3] + (4n - 2) - (4n - 3) = A_2. \end{aligned}$$

Или иначе

$$\begin{aligned} (2) - (1) + (9) - (6) + (17) - (14) + (25) - (22) + \dots + (4n - 2) - \\ - (4n - 3) + \{2 - 1 + 9 - 6 + 17 - 14 + 25 - 22 + \dots + [4n - 2] - \\ - [4n - 3] + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n \pm 180^\circ\} - (A_2 - A_1) = 0. \quad (377) \end{aligned}$$

Сумма:  $\{2 - 1 + 9 - 6 + 17 - 14 + 25 - 22 + \dots + [4n - 2] -$

$- [4n - 3] + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n \pm 180^\circ\}$  есть, конечно, разность геодезических азимутов твердых сторон  $AB$  и  $DC$ , выводимая по неуравненным направлениям ряда.

С другой стороны, ясно, что сумма:  $A_1 + 2 - 1 + \delta_1 + 9 - 6 + \delta_2 + \dots + 17 - 14 + \delta_3 + \dots + [4n - 2] - [4n - 3]$  равна выведенному по неуравненным направлениям ряда значению геодезического азимута линии  $DC$  в  $D$ , которое мы назовем через  $A''_2$ . Поэтому можем написать азимутальное уравнение еще в таком виде

$$\begin{aligned} (2) - (1) + (9) - (6) + (17) - (14) + \dots + (4n - 7) - (4n - 10) + \\ + (4n - 2) - (4n - 3) + A''_2 - A_2 = 0. \quad (378) \end{aligned}$$

Как увидим во II части Руководства по высшей геодезии, уравнения (377) или (378) представляют азимутальное условие на эллипсоиде в несколько все-таки упрощенном виде.

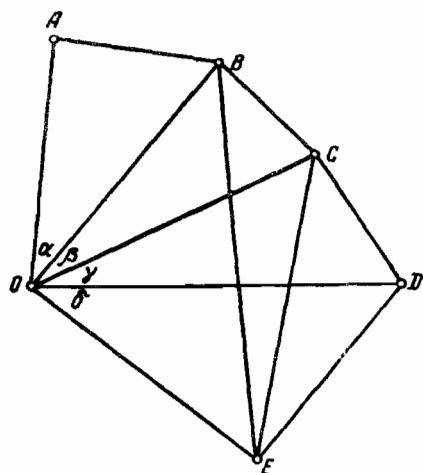
Величина  $l$  и величины  $\delta$ , нужные для вывода геодезических азимутов сторон ходовой линии, чтобы в результате получить  $A''_2$ , выводятся по неуравненным углам треугольников звена — по формулам высшей геодезии, приводимым во II части Руководства по высшей геодезии. Поэтому и самый вопрос уравнивания первоклассных звеньев за условия азимутов мы относим ко II части Руководства.

**Условия сумм.** Если ряд треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  (черт. 277) вставляется между сторонами  $OL$  и  $OE$  ранее составленной

и окончательно вычисленной триангуляции, то в новой сети, при уравнивании ее по углам, возникает условие, чтобы сумма уравненных углов  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  была бы равна величине  $Q$  угла  $AOE$ , выведенной из обработки прежней триангуляции. Это условие суммы, которое исприменно должно присоединить к условиям сети, напишется, конечно, так:

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta) + \alpha + \beta + \gamma + \delta - Q = 0. \quad (5)$$

Если углы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  были измерены независимо друг от друга и никаких производных углов от них на пункте  $O$  более не было измерено, то уравнение (5), составленное с наблюденными значениями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  этих углов, можно включить прямо в число уравнений сети. Но если, кроме углов  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$ , были также независимо измерены еще углы  $AOC$ ,  $COE$  и т. п., то тогда следует до уравнивания сети вывести вероятнейшие значения необходимых углов  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  из уравнивания станции, в которое следует ввести и условие суммы в виде уравнения (5). Это уравнивание станции надлежит выполнить так, как указано в примере настоящего параграфа. Очевидно, вторичные поправки  $(\alpha)', (\beta)', (\gamma)'$  и  $(\delta)'$ , которые получаются из уравнивания сети, должны удовлетворять условию суммы в сети в таком виде



Черт. 277

$$(\alpha)' + (\beta)' + (\gamma)' + (\delta)' = 0. \quad (5)'$$

Нередко условие суммы, составленное в виде уравнения (5), решают до уравнивания сети даже тогда, когда измерены на пункте  $O$  независимо друг от друга только углы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$ ; в этом случае поправки углов на станции, очевидно, будут равны каждая

$$-\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta - Q}{n},$$

где  $n$  — число углов, а в уравнения сети нужно будет ввести условие в виде уравнения (5)'. Если новая сеть уравнивается по направлениям, то направления, полученные из исполненных при составлении новой сети на  $O$  наблюдений, подлежат уравниванию на станции и соответственному исправлению до введения их в условия сети. Пусть выведенные из прежней сети направления для сторон  $OA$  и  $OE$  суть  $A_0$  и  $E_0$ , а из наблюдений на  $O$  при составлении новой сети пусть получились направления  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ . Поправки направлений  $A$  и  $E$ , очевидно, будут соответственно равны  $A_0 - A$  и  $E_0 - E$ , а, следовательно, поправка каждого из остальных направлений (см. «Условия горизонта» в настоящем параграфе) будет равна

$$\Delta = \frac{(A_0 - A) + (E_0 - E)}{2}.$$

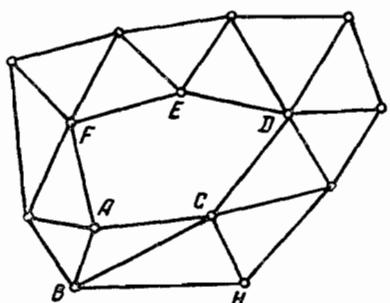
Уравненные на станции направления представляются рядом чисел:  $A_0, B_1, \dots, B_{i-1}, \Delta, C_1 = C + \Delta, D_1 = D - \Delta, E_0$ , которые и нужно будет ввести в условные уравнения сети, отыскивая из них поправки величин  $B_1, C_1, D_1$ ; при этом никакого условия суммы в уравнения сети уже не нужно будет вводить; поправки направлений  $A_0$  и  $E_0$  должны быть приняты в уравнениях сети равными цуло.

**Условия сторон.** Эти условия возникают обычно в тех же случаях, как и условия сумм, т. е. когда цепь или сеть треугольников вставляется между исходящими из одной точки  $O$  сторонами  $OA$  и  $OE$  (черт. 277) ранее составленной триангуляции. Очевидно, условия сторон можно отнести к числу базисных условий и составлять их так, как составляется базисное условие. Но, конечно, можно условия сторон написать в таком виде

$$\frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OE}{OD} = \frac{(OE)}{(OA)},$$

причем в левой части этого уравнения отношения  $\frac{OB}{OA}, \frac{OC}{OB}, \dots, \frac{OE}{OD}$  заменяются затем отношениями синусов соответствующих углов из треугольников  $AOB, BOC, \dots, DOE$ , а в правой части уравнения отношение  $\frac{(OE)}{(OA)}$  должно быть взято из ранее составленной триангуляции.

**Полигональные условия.** Если цепь треугольников образует замкнутый полигон, изображенный на черт. 278, то в ней возникают четыре условия, не входящие в число условий свободной сети. Если бы не было измерено шести углов в треугольниках  $ACB$  и  $BCH$ , то замыкания полигона не произошло бы, но все вершины его были бы уже построены. Таким образом, эти шесть углов должны привести к шести условиям сверх существующих в свободной сети, считаемой (по часовой стрелке) от  $AB$  до  $CH$ ; но два из шести этих условий являются условиями фигур в треугольниках  $ABC$  и  $CBH$ , и, по причислении их к обычным условиям сети, останутся, следовательно, только четыре специально полигонных условия. Приняв некоторые значения координат точки  $A$ ,



Черт. 278

азимута ( $AB$ ) и длины стороны  $AB$ , и пройдя с вычислением от  $AB$  по ходу часовой стрелки через весь полигон, мы должны прийти к тем же значениям координат  $A$ , азимута ( $AB$ ) и длины  $AB$ ; другими словами, четыре полигонных условия выражаются такими требованиями:

1) сумма углов в полигоне  $AFEDCA$  должна быть равна геометрической сумме его углов: соблюдение этого требования приводит к согласию значения азимута ( $AB$ ), вычисленного из полигона, с данным значением того же азимута;

2) должно удовлетворяться базисное уравнение, соответствующее вычислению  $AB$  по  $AB$  же через весь полигон;

3) вычисленная по элементам хода  $AFEDCA$  широта точки  $A$  (или ее абсцисса при прямоугольных координатах Гаусса-Крюгера) должна быть равна данной при этом вычислении широте  $B_a$  точки  $A$  (или данной ее абсциссе  $x_a$ );

4) вычисленная по элементам хода  $AFEDCA$  долгота точки  $A$  (или ее ордината) должна быть равна данной при этом вычислении долготе  $L_a$  точки  $A$  (или данной ее ординате  $y_a$ ).

Если координаты точек  $A, B, C, D$  (черт. 275) будут даны, то, очевидно, и в цепи незамкнутой, но заключенной между двумя основными сторонами, возникнут четыре указанных полигонных условия, причем первое условие заменится условием азимутов или условием дирекционных углов.

Остановимся на составлении полигонных условий для ряда второго класса, изображенного на черт. 275 и отнесенного на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера. Пусть точки  $A, B, C, D$ , принадлежащие триангуляции I класса или основным рядам второго класса, имают окончательно установленные прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера. Понятно, мы легко вычислим (если только они не даны) длины сторон  $AB$  и  $CD$  и дирекционные углы  $T'_1$  и  $T'_2$  этих сторон. Очевидно, в число четырех полигонных условий войдут: условие базисное, условие азимутальное и два координатных условия: условие абсцисс и условие ординат. Назовем через  $x_1, y_1, x_n, y_n$  координаты соответственно пунктов  $B$  и  $C$ . Будем предполагать, что уравнивание ряда ведем по углам и, как ранее, паметим ходовую линию для передачи координат по ломаной линии  $Babcde|gC$ . Обозначим: длину стороны  $AB$  через  $b$ ; вычисляемые по неуравненным углам разности абсцисс и ординат точек  $a$  и  $B$  — через  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$ ; точек  $b$  и  $a$  — через  $\Delta x_2$  и  $\Delta y_2$ ; точек  $c$  и  $b$  — через  $\Delta x_3$  и  $\Delta y_3$  и т. д.; абсциссы и ординаты точек  $a, b, c$  — через  $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ . Запоминаем треугольники ряда и назовем: промежуточный угол в треугольнике с номером  $k$  через  $\alpha_k$ ; связующий угол в том же треугольнике, лежащий против стороны продолжения, — через  $\alpha'_k$ , второй связующий угол — через  $\beta_k$ ; длины связующих сторон — через  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , как показано на черт. 275; дирекционные углы тех же сторон через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ . При этом предполагаем, что  $s_1, s_2, \dots$  и  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  вычисляются по неуравненным углам. Назовем, наконец, через  $\Delta x'_k$  и  $\Delta y'_k$  разности вероятнейших абсцисс и ординат по связующей стороне с номером  $k$ . Мы имеем

$$\begin{aligned}\Delta x'_k &= (s_k + ds_k) \cos (\alpha_k + \delta \alpha_k) \\ \Delta y'_k &= (s_k + ds_k) \sin (\alpha_k + \delta \alpha_k)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta x'_k &= \Delta x_k + ds_k \cos \alpha_k - \delta \alpha_k \cdot s_k \sin \alpha_k \\ \Delta y'_k &= \Delta y_k + ds_k \sin \alpha_k + \delta \alpha_k \cdot s_k \cos \alpha_k \\ \Delta x'_k &= \Delta x_k + \frac{ds_k}{s_k} \Delta x_k - \Delta y_k \cdot \frac{\delta \alpha_k}{\rho''} \\ \Delta y'_k &= \Delta y_k + \frac{ds_k}{s_k} \Delta y_k + \Delta x_k \cdot \frac{\delta \alpha''_k}{\rho''} \\ \Delta x'_k &= \Delta x_k + \frac{\Delta \lg s_k}{M 10^6} \Delta y_k - \Delta y_k \cdot \frac{\delta \alpha''_k}{\rho''} \\ \Delta y'_k &= \Delta y_k + \frac{\Delta \lg s_k}{M 10^6} \Delta x_k + \Delta x_k \cdot \frac{\delta \alpha_k}{\rho''},\end{aligned}$$

понимая под  $\Delta \lg s_k$  изменение логарифма  $s_k$ , выраженное в единицах шестого знака логарифма. Обозначим через  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  перемены логарифмов синусов соответственно углов  $a_k$  и  $b_k$  при изменении этих углов на  $1''$ . Мы имеем, если под  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  и  $(c_k)$  будем понимать поправки углов  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$

Поэтому напишем

$$\Delta x'_k = \Delta x_k + \frac{1}{M 10^6} \sum_1^k \{ \alpha(a) - \beta(b) \} \Delta x_k - \frac{\Delta y_k}{\rho''} [ - (c_1) + (c_2) - (c_3) + \\ + \dots (-1)^k \cdot (c_k)];$$

$$\Delta y'_k = \Delta y_k + \frac{1}{M 10^6} \sum_1^k \{ \alpha(a) - \beta(b) \} \Delta y_k + \frac{\Delta x_k}{\rho''} [ - (c_1) + (c_2) - (c_3) + \\ + \dots (-1)^k \cdot (c_k)].$$

Складываем разности абсцисс и ординат для всех связующих сторон:

$$x_n - x_1 = \sum_1^{n-1} \Delta x_k + \frac{1}{M 10^6} \cdot \{ [\alpha_1(a_1) - \beta_1(b_1)](x_n - x_1) + \\ + [\alpha_2(a_2) - \beta_2(b_2)](x_n - x_2) + \dots + [\alpha_{n-2}(a_{n-2}) - \beta_{n-2}(b_{n-2})](x_n - x_{n-2}) + [\alpha_{n-1}(a_{n-1}) - \beta_{n-1}(b_{n-1})](x_n - x_{n-1}) \} + (c_1) \frac{y_n - y_1}{\rho''} - \\ - (c_2) \frac{y_n - y_2}{\rho''} + (c_3) \frac{y_n - y_3}{\rho''} + \dots + (-1)^n (c_{n-1}) \frac{y_n - y_{n-1}}{\rho''}. \quad (379)$$

$$y_n - y_1 = \sum_1^{n-1} \Delta y_k + \frac{1}{M 10^6} \{ [\alpha_1 \cdot (a_1) - \beta_1 \cdot (b_1)] (y_n - y_1) + [\alpha_2 (a_2) - \beta_2 (b_2)] (y_n - y_2) + \dots + [\alpha_{n-2} (a_{n-2}) - \beta_{n-2} (b_{n-2})] (y_n - y_{n-2}) + [\alpha_{n-1} (a_{n-1}) - \beta_{n-1} (b_{n-1})] (y_n - y_{n-1}) \} - (c_1) \frac{x_n - x_1}{\rho''} + (c_2) \frac{x_n - x_2}{\rho''} - (c_3) \frac{x_n - x_3}{\rho''} + \dots + (-1)^{n-1} (c_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{\rho''}. \quad (380)$$

Формулы (379) и (380) представляют собой условия координат, причем свободный член в них соответственно равен:

- 1) разности абсцисс жестких точек, вычисленной по неуравненным углам, минус заданная разность абсцисс тех же точек;
- 2) разности ординат жестких точек, вычисленной по неуравненным углам, минус заданная разность ординат тех же точек.

### § 84. Число условных уравнений

В сети, построенной на одном базисе, без примыканий к другим сторонам ранее составленных триангуляций и без образования в ней самой замкнутых полигонов, общее число  $S$  условных уравнений при уравнивании углов равно  $N - 2n + 4$ ; под  $N$  понимается число всех измеренных в сети углов, а под  $n$  — число вершин, на которых были сделаны угловые измерения.

Для связей первых трех точек сети необходимо иметь три линии; каждая из последующих  $n - 3$  точек определяется пересечением двух линий, соединяющих ее с двумя уже построенными. Таким образом, если в сети будет  $3 + 2(n - 3)$  линий, то каждая последующая точка будет определяться как пересечение двух линий, соединяющих ее с двумя предыдущими точками, и, следовательно, никаких боковых условий в сети не возникает. Каждая линия, сверх числа  $2n - 3$ , линия оказывается соединяющей уже построенные точки сети и поэтому приводит к боковому условию. Таким образом, если всех линий в сети  $p$  (сплошных и несплошных), то число  $s$  независимых в ней боковых условий, равное числу избыточных линий, вычисляется так

$$s = p - (2n - 3) = p - 2n + 3. \quad (381)$$

Число  $a$  условий фигур и горизонтов (при уравнивании углов) будет равно

$$N - 2n + 4 - s$$

или

$$a = N - p + 1. \quad (382)$$

Если число центральных точек в сети, служащих полюсами центральных систем, равно  $q$ , то число условий горизонта равно  $q$ , а число  $f$  условий фигур вычисляется по формуле

$$f = N - p + 1 - q. \quad (383)$$

Когда уравниваются направления, то по чертежу сети ведется счет по углам, а направлениям, и определение числа условных уравнений делается иначе. Если для определения относительного положения  $n$  точек необходимо иметь  $2n - 4$  угла, то для образования такого числа углов необходимо  $n + 2n - 4$  направления, если только все  $n$  точек — основные, т. е. на каждой из них исполняются измерения углов. Таким образом, число необходимых для построения сети из  $n$  точек направлений равно  $3n - 4$ ; каждое лишнее, сверх этого числа  $3n - 4$ , направление приведет к одному, независимому от прочих условию. Поэтому, называя через  $D$  число всех наблюденных в сети направлений, имеем для числа  $S_1$  всех условных в ней уравнений формулу

$$S_1 = D - 3n + 4. \quad (384)$$

Число боковых условий при уравнивании по направлениям определяется формулой (381), а число условий фигур так

$$f = S_1 - c = D - p - n + 1. \quad (385)$$

Называя через  $l$  число сплошных линий в сети, имеем, очевидно,  $D = l + p$ , и вследствие этого формула для  $f$  перепишется еще так:

$$f = l - n + 1. \quad (386)$$

Этой формулой (386) и следует пользоваться вместо (383) при уравнивании по углам.

Если в сети имеется  $q$  центральных точек (полюсов центральных систем), то число  $N$  всех углов, образующихся на всех станциях между каждыми двумя смежными направлениями одной станции, будет равно  $D - n - q$ , потому что на каждой центральной точке число таких углов равно числу взятых с нее направлений, а на каждой из остальных точек число таких углов на единицу меньше числа взятых направлений. Заменяя  $D$  через  $N + n - q$  в (384) и (385), получаем

$$S_1 = N - 2n + 4 - q = S - q,$$

$$f = N - p + 1 - q,$$

т. е. число условий фигур по формуле (386) получается то же самое, что и по формуле (383), но общее число  $S_1$  условий при уравнивании направлений меньше на  $q$  числа  $S$  уравнений при уравнивании сети по углам, что и должно быть. При  $q$ , равном нулю, т. е. при отсутствии в сети центральных систем, число условных уравнений при уравнивании сети и по углам и по направлениям остается одно и то же.

В сетях I класса мы имеем не одну, а несколько выходных сторон с твердо установленными длинами и азимутами (Лапласа). Понятно, что каждая такая сторона добавляет одно условие базисное и одно условие азимутальное к числу условий, рассчитанных по предыдущим формулам для этих сетей (рассматриваемых при этом как бы свободными). Если в такой сети происходит еще замыкание полигона, имеющего внутри «люк», то тогда прибавляются еще четыре условия: базисное, азимутальное и два координатных.

В заполняющих сетях (II или III класса), если имеем  $n$  вновь определяемых точек (не включая сюда определяемых засечками), то, конечно, каждая такая вновь определяемая точка требует для своего построения двух углов. Следовательно, если всего измерено  $N$  углов для вставки этой сети из  $n$  новых точек, то общее число условий при уравнивании по углам будет равно  $N - 2n$ : сюда войдут условия фигур, боковые (полюсные и сторон), горизонтов, сумм, базисные, стороны, дирекционных углов и координатные. При уравнивании по направлениям общее число условий будет равно  $N - 2n - q - s$ , понимая под  $q$  число условий горизонтов и под  $s$  — число условий сумм. Если заполняющая сеть образовалась из цепей, вставленных между твердыми точками, то каждое пересечение таких цепей друг с другом или замыкание их в самих себе с образованием при этом «люка» ведет к четырем условиям: базисному, азимутальному и двум координатным, сверх  $N - 2n$  условий.

Для подсчета, сколько в числе  $N - 2n$  условий будет условий фигур, боковых, горизонтов, сумм, базисных, азимутальных и координатных, следует различать два случая.

1. Стороны, соединяющие жесткие точки, на которых изменили углы при построении заполняющей сети, не образуют замкнутых полигонов; тогда для подсчета числа условий фигур  $f$  служит прежняя формула

$$f = l - m + 1,$$

в которой  $l$  — число сплошных линий, включающее в себя и жесткие линии,  $m$  — число всех вершин в сети, включая и жесткие точки. Для подсчета боковых условий также служит прежняя формула

$$c = p - 2m + 3,$$

понимая под  $p$  число всех линий в сети, включая и направленные по жестким сторонам. Число условий горизонтов и сумм, конечно, легко подсчитывается по чертежу сети; в число условий базисов будут отнесены и условия сторон.

2. Стороны, соединяющие жесткие точки, образуют замкнутый полигон, на всех вершинах которого были сделаны наблюдения для построения заполняющей сети; в этом случае приходится такой полигон разомкнуть, уничтожив временно одну из жестких сторон, приводя тем самым этот второй случай к первому и, конечно, отбрасывая временно часть измеренных углов. Сделав подсчет условий для разомкнутого полигона, как указано для первого случая, далее по чертежу сети разыскивают добавочные условия, возникающие по введении отброшенных углов — число этих условий равно, конечно, числу отброшенных углов. (Во втором случае возможны нарушения обычного простого правила в отношении числа условий горизонтов.)

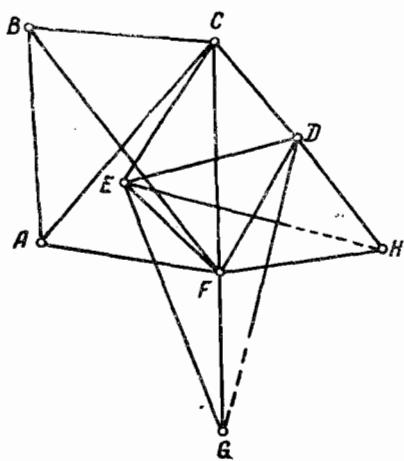
## § 85. Замечания относительно составления условных уравнений

В каждой сети можно составить условия фигур или условия боковые в числе, значительно превышающем определяемое соответственной формулой § 84 число независимых условий того же вида. Это обстоятельство иногда ведет к ошибочному введению в число условий таких, которые являются следствиями уже введенных условий, и так как число всех составленных уравнений данного вида будет равно, конечно, определяемому соответственной формулой § 84, то, следовательно, введение таких условий, зависимых от остальных, равносильно устраниению из уравнивания сети такого же числа независимых условий.

Чтобы при составлении условных уравнений не ввести условий, являющихся следствиями уже введенных, можно рекомендовать следующий порядок. Имея чертеж сети с показанными на нем только сплошными линиями, выбирают и выписывают замкнутую фигуру для составления первого условия фигуры и затем на чертеже стирают одну из сторон этой фигуры; выбрав и выписав вторую замкнутую фигуру для второго условия фигуры, стирают в ней одну из сторон, и т. д. — до тех пор, пока на чертеже сети не останется ни одной замкнутой фигуры. Вообще, в каждой замкнутой фигуре, намеченной для составления из нее условия фигуры, стирают, по выписке ее, одну сторону, причем можно эту сторону брать и произвольно, по желательно выбирать стираемую сторону так, чтобы следующие условия не пришлось бы составлять из фигур с большим числом вершин (это пожелание почти всегда осуществляется, если стирание стороны не ведет к уничтожению сразу двух треугольников). Составив чертеж сети и нанеся на него все сплош-

ные и несплошные линии, выбирают четырехугольник или центральную систему или вообще фигуру с полюсом — для составления первого бокового условия и, по выписке этой фигуры, стирают на чертеже либо одну ее диагональ, либо одну ее сторону; стираемый элемент, если возможно, следует брать из числа не входящих в смежные четырехугольники или в смежные фигуры с полюсом и по стиранию выбранного элемента должно остаться в сети определение каждой последующей точки относительно предыдущих из треугольника. Выбрав вторую фигуру для составления из нее второго бокового условия, стирают в ней один ее элемент с соблюдением вышеуказанного правила и т. д., до тех пор, пока сеть не обратится в цепь треугольников. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим сеть, показанную на черт. 279. Выбрав четырехугольник  $ECDF$  для составления из него бокового условия, нельзя в нем стирать ни диагональ  $CF$  (она входит в четырехугольник  $ABCF$ ), ни диагональ  $ED$  (она входит в четырехугольник  $EFHD$ ), а придется стирать сторону  $CD$  (или  $EC$ ).

При составлении условных уравнений необходимо иметь в виду, что чем сложнее вид условия, тем труднее будут дальнейшие вычисления. Поэтому принимают за правило независимые между собой условные уравнения составлять из возможно простых



Черт. 279

фигур: условия фигур — из треугольников, а условия боковые — из четырехугольников и центральных систем с возможно меньшим числом вершин. Согласно сказанному, в четырехугольнике  $CEFD$  (черт. 279) три соответствующие ему независимые условия фигур нужно составить из треугольников  $DEC$ ,  $CDF$  и  $CEF$ , хотя можно было бы взять треугольники  $DEC$  и  $CDF$  и четырехугольник  $DFEC$ ; точно также полюсное уравнение с полюсом в  $F$  нужно составить из центральной системы  $EDGF$ , а не из системы  $ECDGF$ . При составлении полюсных уравнений из четырехугольников можно за полюс принять любую из его четырех вершин; чем ближе принятая за полюс вершина к противолежащей ей диагонали, тем более острые углы

диагонали, тем более острые углы войдут в полюсное уравнение, и, следовательно, тем значительнее будут коэффициенты (котангенсы) при поправках углов в этом уравнении и свободный член уравнения. С другой стороны, чем более коэффициенты уравнения, тем менее влияют ошибки вычислений при его решении на точность вывода неизвестных. Поэтому, с точки зрения точности вычисления поправок углов из условных уравнений, выбор вершины четырехугольника за полюс не безразличен: следует, собственно, принимать за полюс из четырех вершин ту, расстояние которой от противолежащей диагонали наименьшее. Несоблюдение этого правила приводит к ошибкам в поправках углов в сотых долях секунды, следовательно, это правило необходимо соблюдать при обработке сетей I класса.

При вычислении триангуляции на эллипсоиде свободный член в условном уравнении фигуры, написанном из некоторого треугольника

$ABC$ , определяется вычитанием из суммы измеренных углов этого треугольника геометрической суммы его углов, равной  $180^\circ$  плюс избыток  $\varepsilon$  треугольника. Вследствие незначительности сторон треугольника  $ABC$  по сравнению с размерами земного эллипсоида и вследствие близости земного эллипсоида к шару можно при вычислении  $\varepsilon$  эллипсоидальный треугольник  $ABC$  рассматривать как сферический, взяв лишь подлежаще радиус сферы  $R$ . Величина радиуса  $R$  рассчитывается обычно по формуле  $R = \sqrt{MN}$ , в которой  $M$  и  $N$  — соответственно радиусы кривизны в точке  $A$  кривой меридианной и кривой нормального сечения, перпендикулярного к меридиану, проведенной на эллипсоиде через  $A$ . Называя через  $\Delta$  площадь треугольника  $ABC$ , очевидно имеем

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta \cdot \rho''}{R^2} = \frac{\Delta \cdot \rho''}{MN}.$$

Вследствие малости  $\varepsilon$  площадь  $\Delta$  может быть всегда вычисляема, считая треугольник  $ABC$  за плоский, т. е. по формулам

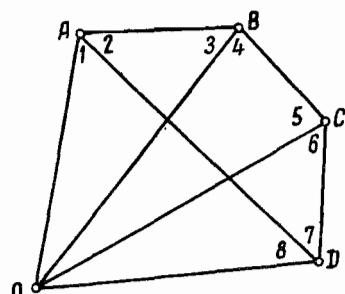
$$\Delta = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin (A + C)}$$

и, следовательно, для  $\varepsilon''$  получаются такие выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{ab \sin C \rho''}{2MN} = \frac{b^2 \sin A \sin C \cdot \rho''}{2MN \sin (A+C)} \\ \varepsilon'' &= f \cdot ab \sin C = f \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin (A+C)}, \end{aligned} \quad (387)$$

причем в (387) символом  $f$  обозначена величина логарифма  $\frac{\rho''}{2MN}$ . Эта величина  $f$  есть функция широты места и при вычислениях извлекается из особых геодезических таблиц по аргументу приближенно известной (взятой с карты) широты точки  $A$ . Вследствие малости  $\varepsilon''$  вычисление его можно производить с приближенными значениями  $a$ ,  $b$ ,  $A$  и  $C$ : в действительных работах для  $a$  и  $b$  берут значения, выведенные из предварительного расчета длии сторон треугольников с углами, не приведенными к центрам тригонометрических знаков, а вместо  $A$  и  $C$  подставляют в (387) измеренные значения этих углов, также не приведенные к центрам знаков. При сторонах треугольника  $ABC$  около 25 км,  $\varepsilon''$  примерно равен  $1'',2$ .

При составлении полюсного уравнения из фигуры  $ABCD$  (черт. 280), расположенной на эллипсоиде, тождество:  $\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1$  остается, конечно, в силе. Рассматривая треугольники  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$ , как сферические, и обозначая их избытки соответственно че-



Черт. 280

результате  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ , можем применить к решению этих треугольников теорему Лежандра и написать

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin \left[ III - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[ I + II - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}, \quad \frac{OB}{OC} = \frac{\sin \left[ V - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}{\sin \left[ IV - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}$$

и, следовательно, полюсное уравнение представляется в нижеследующей форме

$$\frac{\sin \left[ III - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[ I + II - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ V - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}{\sin \left[ IV - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ VII + VIII - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[ VI - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ I - \frac{\varepsilon_4}{3} \right]}{\sin \left[ VIII - \frac{\varepsilon_4}{3} \right]} = 1. \quad (388)$$

Но, очевидно, что для фигуры  $ABCD O$  существует и другое тождество

$$\frac{\sin \frac{OA}{R}}{\sin \frac{OB}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OB}{R}}{\sin \frac{OC}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OC}{R}}{\sin \frac{OD}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OD}{R}}{\sin \frac{OA}{R}} = 1,$$

понимаемое в том смысле, что отношение синусов сторон  $OA$  и  $OD$  (выражаемых в радиальной мере), определяемое через ряд треугольников  $AOB, BOC, COD$ , должно быть равно отношению синусов тех же сторон, выводимому из треугольника  $LOD$ . Заменяя в этом тождестве отношения синусов сторон отношениями синусов уравненных углов, им противолежащих, напишем полюсное уравнение в виде

$$\frac{\sin III}{\sin [I + II]} \cdot \frac{\sin V}{\sin IV} \cdot \frac{\sin [VII + VIII]}{\sin VI} \cdot \frac{\sin I}{\sin VIII} = 1. \quad (389)$$

Уравнение (389) показывает, что при составлении полюсного уравнения из фигуры, расположенной на эллипсоиде, можно эту фигуру рассматривать, как плоскую; обычно этим выводом и пользуются при составлении боковых условий в триангуляциях. Из уравнения (388) следует, что если измеренные значения углов, синусы которых входят в боковое условие, уменьшить каждое на треть избытка соответствующего треугольника, и с такими измененными значениями углов составить полюсное уравнение, то по приведении его к линейному виду мы получим в нем коэффициенты при поправках углов и свободный член те же самые, как и в уравнении, составленном для той же фигуры обычным порядком с применением формулы (389).

Этим пользуются для проверки вычисления свободных членов в полюсных уравнениях: составив полюсное уравнение обычным способом, т. е. приведя уравнение (389) к линейному виду по введении в него измеренных углов и их поправок, затем уменьшают каждый угол, синус которого входит в уравнение, на одну треть избытка

соответственного треугольника, и с такими измененными углами вновь вычисляют свободный член.

Ошибки в величинах коэффициентов при поправках и в величинах свободных членов, сделанные при составлении условных уравнений, обнаруживаются лишь при окончательном вычислении сети, т. е. при определении по уравненным углам длин сторон треугольников, азимутов и координат точек сети; при исполнении уравнительных вычислений указанные ошибки в коэффициентах и в свободных членах условных уравнений, конечно, остаются незамеченными. Таким образом, чтобы не переделывать большую вычислительную работу по определению поправок углов или направлений заново, необходимо прежде, чем приступить к ней, совершенно убедиться в полной правильности составления условных уравнений. Величины свободных членов в уравнениях фигур могут быть проектированы путем вычисления угловых невязок в фигурах, являющихся суммами или разностями фигур, введенных в условные уравнения; так, имея в условных уравнениях треугольников  $DEC$ ,  $CDF$  и  $CEF$  свободные члены соответственно  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  и подсчитав угловые невязки:  $w$  — в четырехугольнике  $CEFD$ ,  $w_4$  — в треугольнике  $DFE$  (черт. 279), напишем такие контрольные уравнения

$$\begin{aligned} w_2 + w_3 &= w; \\ w_2 + w_3 - w_1 &= w_4. \end{aligned}$$

Что касается полюсных уравнений, то при составлении сетей I класса свободные члены уравнений передко повсюду уже указанным способом, основанным на соотношении между уравнениями (388) и (389).

В каждом четырехугольнике имеется такая проверка: уравнение, соответствующее полюсу в конце  $A$  диагонали  $AB$ , равно сумме двух уравнений, составленных с присоединением полюсов в другом конце  $B$  той же диагонали  $AB$  и в фиктивной точке пересечения двух диагоналей четырехугольника. Однако, применение этой проверки громоздко и есть большие шансов ошибиться в контрольных уравнениях, чем в повсюдем ими; случаев такой проверки нам не приходилось встречать. Из сказанного ясно, что проверки составления условных уравнений, основанные на геометрических и алгебраических соотношениях, далеко не полны. Поэтому наилучшим средством контроля следует признать здесь независимое составление одних и тех же уравнений двумя вычислителями.

Коэффициенты при поправках углов в уравнениях фигур и горизонтов равны либо единице, либо нулю; коэффициенты же при поправках в полюсных уравнениях передко выражаются большими числами (десятиками и сотнями единиц). Для удобства последующего составления и решения нормальных уравнений коррелят, надлежит, в случае значительности коэффициентов полюсных уравнений, разделить эти уравнения на 10, на 20 и даже на 100 так, чтобы после этого деления коэффициенты полюсных уравнений имели бы целыми только единицы<sup>1</sup>.

Если уравниваются направления, то в каждом условном уравнении сумма коэффициентов при поправках направлений должна быть равна нулю: в самом деле, условное уравнение для направлений получается, собственно, из условного уравнения для углов посредством замены

<sup>1</sup> При этом следует сделать округлением в коэффициентах, сообразив, конечно, вызываемые этими округлениями погрешности; в свободном члене округления, naturally, недопустимы.

поправки каждого угла разностью поправок двух направлений, его образующих; следовательно, коэффициент, стоящий при поправке угла, войдет со знаком плюс в множитель при поправке одного из этих направлений и со знаком минус — в множитель при поправке другого из этих двух направлений. Условие равенства цулю суммы коэффициентов при поправках направлений в каждом условном уравнении может служить проверкой приведения подобных членов в этих уравнениях.

### § 86. Допустимые размеры свободных членов в условных уравнениях тригонометрической сети

В триангуляции I класса углы измеряются с средней ошибкой  $\pm 0'',5 - \pm 0'',9$ ; в основных рядах II класса средняя ошибка измеренного угла около  $\pm 1'',2$ ; в заполняющей триангуляции II класса при употреблении десятисекундных инструментов — эта ошибка угла около  $\pm 2'',0 - \pm 2'',5$ . Поэтому *невязка треугольника* не должна превышать

для I класса . . .  $\pm 3'',6$ ;

для основных рядов II класса . . .  $\pm 5'',7$ ;

для заполняющих сетей II класса . . .  $\pm 12'',0 - 13'',0$ .

приимая, что для суммы из трех слагаемых предельная ошибка в три раза более средней ошибки этой суммы.

Но, конечно, указанные предельные невязки  $\pm 3'',6$ ;  $\pm 5'',7$ ; и  $\pm 13'',0$  должны иметь место в практике геодезических работ в виде очень редких исключений, вернее почти никогда не встречаться. Наши звенья I класса и основные ряды II класса заключают в себе 12—14—16 треугольников; в заполняющих сетях II класса число вставляемых вместе, в одной обработке, треугольников не превышает обычно 30. Применяя критерий Шовене (см. книгу проф. Чеботарева, «Способ наименьших квадратов», стр. 425—426)\*, мы можем написать, что наибольшая невязка треугольника не должна превышать

в звене I класса . . .  $\pm 0'',8 \sqrt{3} \cdot 2,15 = \pm 3'',0$ ;

в 2—3 звеньях I класса . . .  $\pm 0'',8 \sqrt{3} \cdot 2,4 = \pm 3'',4$ ;

в основном ряде II класса . . .  $\pm 1'',2 \sqrt{3} \cdot 2,24 = \pm 4'',6$ ;

в заполняющей сети II класса . . .  $\pm 2'',5 \sqrt{3} \cdot 2,4 = \pm 10'',4$ .

Практика, впрочем, показывает, что при применении десятисекундных универсалов ошибки измерений распределяются, не вполне следуя гауссовым законам, и в заполняющих сетях II класса встречаются случаи, когда, наряду с незначительными невязками в подавляющем большинстве треугольников, невязка в  $12''$  попадается в одном-двух-трех треугольниках, несмотря на исполнение наблюдений очень опытным наблюдателем.

Для соображения допустимых размеров свободного члена в полусном уравнении используем черт. 271 и будем рассуждать так: первое определение стороны  $AC$  из треугольника  $ABC$  дает

$$AC_1 = \frac{AB \sin [3+4]}{\sin 5};$$

\* Издание ОНТИ, 1936 г.

второе определение той же стороны из треугольников  $ABD$  и  $ADC$  дает

$$AC_3 = AB \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin [7+8]}{\sin 6};$$

$$\Delta = AC_1 - AC_3 = AB \cdot \left[ \frac{\sin [3+4]}{\sin 5} - \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin [7+8]}{\sin 6} \right].$$

Далее будем считать, что углы 3, 4, 5, 6, 7 и 8 измерены независимо друг от друга. Теперь напишем

$$\begin{aligned} m_{\Delta}^2 &= AB^2 \left[ \left\{ \frac{\sin [3+4]}{\sin 5} \operatorname{ctg} [3+4] - \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin [7+8]}{\sin 6} \operatorname{ctg} 3 \right\}^2 + \right. \\ &\quad + \frac{\sin^2 [3+4]}{\sin^2 5} \operatorname{ctg}^2 5 + \frac{\sin^2 3}{\sin^2 8} \cdot \frac{\sin^2 [7+8]}{\sin^2 6} \operatorname{ctg}^2 6 + \\ &\quad + \frac{\sin^2 3}{\sin^2 8} \cdot \frac{\sin^2 [7+8]}{\sin^2 6} \operatorname{ctg}^2 [7+8] + \frac{\sin^2 [3+4]}{\sin^2 5} \operatorname{ctg}^2 [3+4] + \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin [7+8]}{\sin 6} \operatorname{ctg} 8 - \frac{\sin 3}{\sin 8} \cdot \frac{\sin [7+8]}{\sin 6} \operatorname{ctg} [7+8] \right\}^2 \right] \frac{m''^2}{\rho''^2}, \end{aligned}$$

понимая под  $m''$  среднюю ошибку измерения угла.

Далее,

$$\begin{aligned} m_{\Delta}^2 &= \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \overline{AC}^2 \{ 2 \operatorname{ctg}^2 [3+4] - 2 \operatorname{ctg} [3+4] \operatorname{ctg} 3 + \operatorname{ctg}^2 3 + \operatorname{ctg}^2 5 + \\ &\quad + \operatorname{ctg}^2 6 + \operatorname{ctg}^2 8 - 2 \operatorname{ctg} 8 \operatorname{ctg} [7+8] + 2 \operatorname{ctg}^2 [7+8] \}. \end{aligned}$$

Но  $\Delta$  есть разница в двух определениях одной и той же стороны триангуляции. Поэтому  $m_{\Delta}$  есть одновременно и средняя квадратическая ошибка величины  $\Delta$  и средне-квадратическая величина самого  $\Delta$ . С другой стороны,  $\Delta = -w \cdot M \cdot \overline{AC}$  и, следовательно,

$$m_{\Delta}^2 = \frac{m_w^2 \cdot \overline{AC}^2}{M^2},$$

где под  $m_w$  понимается средне-квадратическая величина свободного члена полусного уравнения.

Итак

$$\begin{aligned} m_w^2 &= \frac{m''^2}{\rho''^2} M^2 \{ 2 \operatorname{ctg}^2 [3+4] + \operatorname{ctg}^2 3 + \operatorname{ctg}^2 5 + \operatorname{ctg}^2 6 + \operatorname{ctg}^2 8 + \\ &\quad + 2 \operatorname{ctg}^2 [7+8] - 2 \operatorname{ctg} [3+4] \operatorname{ctg} 3 - 2 \operatorname{ctg} 8 \operatorname{ctg} [7+8] \}. \end{aligned}$$

Но  $\operatorname{ctg} A \frac{M}{\rho''} = \delta_A$ , понимая под  $\delta_A$  изменение логарифма синуса угла  $A$ , при изменении угла на  $1''$ .

Поэтому

$$m_w = m'' \sqrt{2\delta_{3+4}^2 + \delta_3^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 + \delta_8^2 + 2\delta_{7+8}^2 - 2\delta_{3+4} \cdot \delta_3 - 2\delta_8 \cdot \delta_{7+8}}. \quad (390)$$

Конечно, формулу (390) очень нетрудно подсчитать. Следует далее принять, что  $w$  наибольшее не превышает  $2,00 m_w$ , так как мы всегда имеем в наших сетях малое число однородных сложных фигур, не больше 10—12.

При соображении размеров свободного члена в базисном условном уравнении приходится различать случаи звеньев I класса и случаи рядов или сетей II класса. Базисное условие в звене I класса составляется, используя *наблюденные* величины связующих углов. Тогда, очевидно,  $m^{*2} (\delta_{A_k}^2 + \delta_{B_k}^2)$  выразит собой квадрат средней ошибки в логарифме связующей стороны треугольника с номером  $k$ , поскольку эта ошибка обусловлена ошибками связующих углов этого треугольника. Если через  $m_{lg\ a}$  и  $m_{lg\ b}$  назовем средние ошибки в логарифмах выходных сторон звена, то

$$m_w = \sqrt{m_{lg\ a}^2 + m_{lg\ b}^2 + m^{*2} \sum_1^n (\delta_{A_k}^2 + \delta_{B_k}^2)}, \quad (n \text{ — число треугольников})$$

представит собой среднее квадратическое расхождение данного логарифма выходной стороны  $b$  и логарифма той же стороны, вычисляемой из треугольников звена как связующая сторона последнего  $n$ -го треугольника. В зависимости от числа сопоставляемых друг с другом звеньев триангуляции I класса, множитель, переводящий  $m_w$  в наибольшее допустимое значение свободного члена в базисном условии, будет заметно колебаться.

Для СССР этот множитель можно принять равным 2,75, так как речь идет о невязках примерно в 80 звеньях I класса. Поэтому в триангуляции I класса СССР

$$w_{базисное} \leq 2,75 \sqrt{m_{lg\ a}^2 + m_{lg\ b}^2 + m^{*2} \sum_1^n (\delta_{A_k}^2 + \delta_{B_k}^2)}. \quad (391)$$

При  $n = 12$ ,  $m = +0,7$  и при  $A = B = 60^\circ$ , получим:  $w_{базисное} \leq 120$  единиц седьмого знака логарифма.

В рядах и в сетях II класса до составления базисного условия углы *первично* уравнивают за условия фигур. Поэтому

$$m_w = \sqrt{m_{lg\ a}^2 + m_{lg\ b}^2 + \frac{2}{3} m^{*2} \sum_1^n (\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \cdot \delta_B)}.$$

Так как в полигоне I класса вряд ли придется сопоставлять между собой более 10 однородных базисных условий по рядам II класса, то

$$w_{базисное} \leq 2,0 \sqrt{m_{lg\ a}^2 + m_{lg\ b}^2 + \frac{2}{3} m^{*2} \sum_1^n (\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \cdot \delta_B)}. \quad (392)$$

Азимутальное условие составляется в звеньях I класса так же, как и базисное, по наблюденным значениям углов; очевидно, здесь

$$\left. \begin{aligned} m_w &= \sqrt{2m_{\alpha}^2 + 2m_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi + \frac{n+3}{2} m''^2}, \text{ при } n \text{ нечетном} \\ m_w &= \sqrt{2m_{\alpha}^2 + 2m_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi + \frac{n+2}{2} m''^2}, \text{ при } n \text{ четном} \end{aligned} \right\} \quad (393)$$

В (393)  $m_{\alpha}$  — ошибка наблюденного астрономического азимута,  $m_{\lambda}$  — ошибка астрономической долготы,  $n$  — число треугольников ряда.

Можно для триангуляции I класса принять:

$$\left. \begin{aligned} w_{\text{азимутальное}} &\leq 2,75 \sqrt{2m_{\alpha}^2 + 2m_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi + \frac{n+3}{2} m''^2}, \text{ при } n \text{ нечетном} \\ w_{\text{азимутальное}} &\leq 2,75 \sqrt{2m_{\alpha}^2 + 2m_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi + \frac{n+2}{2} m''^2}, \text{ при } n \text{ четном} \end{aligned} \right\} \quad (394)$$

Для звеньев I класса в СССР  $w_{\text{азимутальное}} \leq \pm 6'',0$ .

В рядах и сетях II класса до составления условия дирекционных углов углы в треугольниках предварительно уравниваются первично за условия фигур. В этом случае имеем, согласно (78)

$$m_w = \sqrt{m_{A_1}^2 + m_{A_2}^2 + \frac{2}{3} m^2 n},$$

где  $n$  — число треугольников;

$$w_{\text{азимутальное}} \leq 2 \sqrt{m_{A_1}^2 + m_{A_2}^2 + \frac{2}{3} m''^2 n}. \quad (395)$$

В триангуляции I класса условия координат составляются после уравнивания звеньев за условия фигур, базисов и азимутов. Так как звенья I класса располагаются обычно по меридианам и по параллелям, то ошибки в приращениях координат по звену равны соответственно или продольному, или поперечному сдвигу звена. Поэтому для вычисления средней несмыкаемости полигона I класса или для расчета ошибок в координатах конца звена применяем формулы (44) и (57'). Для перехода к наибольшему несмыканию  $w$  в полигоне I класса умножаем вычисленное для него по этим формулам среднее несмыкание на 2,25. Для получения  $m_{A_1}^2$  и  $m_{A_2}^2$  в (395) нужно применять формулу (2) (гл. III), рассчитывая по ней средние ошибки азимутов сторон I класса или основных рядов II класса, между которыми прокладывается ряд II класса. Если прокладываем ряд II класса, то до составления условия координат его углы первично уравнивают за условия фигур. При расположении ряда II класса приблизительно по меридиану, имеем, применяя (41), (42), (82) и (82') § 16 и следующие формулы

$$\left. \begin{array}{l} \text{по } x \dots m_w = \sqrt{m^2_{(x_2-x_1)} + L^2 \left[ \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{4n^2 \mp 3n + 5}{9n} \cdot \frac{m^{\prime 2}}{\rho^{\prime 2}} \right]} \\ \text{по } y \dots m_w = \sqrt{m^2_{(y_2-y_1)} + \frac{L^2}{\rho^{\prime 2}} \left[ m^2_A + \frac{2}{15} m^{\prime 2} \cdot \frac{n^2 + n + 3}{n} \cdot 1,25 \right]} \\ \text{по } y \dots m_w = \sqrt{m^2_{(y_2-y_1)} + \frac{L^2}{\rho^{\prime 2}} \left[ m^2_A + \frac{m^{\prime 2}}{15} \cdot \frac{2n^2 + 5n + 5}{n} \cdot 1,25 \right]} \end{array} \right\} \quad (396)$$

В этих формулах (396)  $m_{(x_2-x_1)}$  и  $m_{(y_2-y_1)}$  — ошибки в разностях абсцисс и ординат начального и конечного пункта ряда II класса, определяемых из триангуляции более высокого класса и ранее уравненной;  $m_A$  — ошибка дирекционного угла той стороны триангуляции более высокого класса, к которой наш ряд II класса примыкает;  $\frac{m_b}{b}$  — относительная ошибка в длине той же стороны;  $n$  — число промежуточных сторон в нашем ряде.

При нечетном числе треугольников в ряде работает первая из формул для  $m_w$  по  $y$ , при четном числе треугольников — вторая из этих формул. Если ряд II класса вытянут примерно по параллели, то для средней невязки по  $x$  работает вторая или третья из формул (396), соответственно тому, нечетное или четное число треугольников ряда, а для средней невязки по  $y$  — работает первая из формул (396). Если ряд II класса имеет направление, характеризуемое дирекционным углом  $T'$ , то вместо (396) применяем (80) и (81) с добавлением в правой части: в (80) члена  $m^2_{(x_2-x_1)}$ , в (81) —  $m^2_{(y_2-y_1)}$ . Величины  $\frac{m_b}{b}$  и  $m_A (m^2_A)$ , рассчитываются по формулам (77) и (a) (гл. III). Расчет  $m_{(x_2-x_1)}$  и  $m_{(y_2-y_1)}$  следует выполнять, руководясь примерами и формулами, приведенными в § 18. В зависимости от того, сколько рядов II класса мы сопоставляем между собой, устанавливается множитель, переводящий  $m_w$  по  $x$  или  $m_w$  по  $y$  к наибольшему, для этого числа рядов,  $w$  по  $x$  или по  $y$ ; думается, этот множитель близок к 2,0.

Критерий Шовене позволяет установить значение наибольшей ошибки в ряде  $n$  величин, измеренных в однородных условиях. Именно эта наибольшая ошибка равна  $k \cdot m$ , где  $m$  — средняя ошибка измеренных величин ряда, а  $k$  дается в табл. 50.

Таблица 50

| $n$ | $k$  | $n$ | $k$  | $n$ | $k$  |
|-----|------|-----|------|-----|------|
| 5   | 1,65 | 16  | 2,15 | 40  | 2,49 |
| 6   | 1,73 | 17  | 2,17 | 50  | 2,58 |
| 7   | 1,80 | 18  | 2,20 | 75  | 2,71 |
| 8   | 1,86 | 19  | 2,22 | 100 | 2,81 |
| 9   | 1,93 | 20  | 2,24 | 200 | 3,02 |
| 10  | 1,96 | 21  | 2,26 |     |      |
| 11  | 2,00 | 22  | 2,28 |     |      |
| 12  | 2,03 | 23  | 2,30 |     |      |
| 13  | 2,07 | 24  | 2,31 |     |      |
| 14  | 2,10 | 25  | 2,33 |     |      |
| 15  | 2,13 | 30  | 2,39 |     |      |

Если в ряде, содержащем ошибки  $n$  величин, оказываются ошибки большие, чем эта наибольшая для ряда ошибки  $k \cdot m$ , то это указывает или на наличие промахов, или на наличие систематических влияний. Применение критерия Шовене к рядам с малыми  $n$  не совсем обосновано. Мы в настоящем параграфе применяли этот критерий к рядам *к о с в е ц и о* измеренных величин (к функциям углов треугольников триангуляции). Здесь тогда нужно провести особенно строго требования однородности величин ряда в смысле условий их измерения и в смысле геодезического их построения. Это и было соблюдено при получении выше-приведенных формул для наибольших певязок  $w$  в условиях фигур, базисов, азимутов и координат. Но, конечно, геодезист может каждый раз сообразить, на основании изложенного в этом параграфе, надлежащий, более соответствующий обстоятельствам, выбор величины  $k$ .

### § 87. Составление и решение нормальных уравнений коррелат

Обозначим: 1) веса измеренных (или, вернее, выведенных из уравнений на станциях) направлений (или углов) 1, 2, 3, ...,  $N$  соответственно через  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ; 2) коэффициенты первого условного уравнения — буквами  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ; коэффициенты второго условного уравнения — буквами  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ; коэффициенты третьего условного уравнения — буквами  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , и т. д., причем коэффициенты при поправке направления (или угла)  $k$  во всех уравнениях сопровождаются одним и тем же указателем  $k$ ; 3) свободные члены первого, второго, третьего, ... уравнений — соответствие через  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ .

По составлении условных уравнений, их коэффициенты и свободные члены записывают в особую таблицу условных уравнений, представленную табл. 51.

Таблица 51

| №№<br>уравнений | (1)             | (2)             | (3)             | (4)             | (5)             | ..... | (n)             | $w$   |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-----------------|-------|
|                 | $\frac{1}{p_1}$ | $\frac{1}{p_2}$ | $\frac{1}{p_3}$ | $\frac{1}{p_4}$ | $\frac{1}{p_5}$ | ..... | $\frac{1}{p_n}$ |       |
| I . . . . .     | $a_1$           | $a_2$           | $a_3$           | $a_4$           | $a_5$           | ..... | $a_n$           | $w_1$ |
| II . . . . .    | $b_1$           | $b_2$           | $b_3$           | $b_4$           | $b_5$           | ..... | $b_n$           | $w_2$ |
| III . . . . .   | $c_1$           | $c_2$           | $c_3$           | $c_4$           | $c_5$           | ..... | $c_n$           | $w_3$ |
| IV . . . . .    | $d_1$           | $d_2$           | $d_3$           | $d_4$           | $d_5$           | ..... | $d_n$           | $w_4$ |
| V . . . . .     | $e_1$           | $e_2$           | $e_3$           | $e_4$           | $e_5$           | ..... | $e_n$           | $w_5$ |
| Суммы . . . .   | $s_1$           | $s_2$           | $s_3$           | $s_4$           | $s_5$           | ..... | $s_n$           |       |

Системе условных уравнений

$$a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + \dots + a_n(n) + w_1 = 0$$

$$b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + \dots + b_n(n) + w_2 = 0$$

$$c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + \dots + c_n(n) + w_3 = 0$$

.....

$$h_1(1) + h_2(2) + h_3(3) + \dots + h_n(n) + w_h = 0$$

соответствует такая система нормальных уравнений коррелат

$$\begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_3 + \dots + \left[ \frac{ah}{p} \right] k_h + w_1 &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_3 + \dots + \left[ \frac{bh}{p} \right] k_h + w_2 &= 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] k_3 + \dots + \left[ \frac{ch}{p} \right] k_h + w_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \left[ \frac{ah}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bh}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ch}{p} \right] k_3 + \dots + \left[ \frac{hh}{p} \right] k_h + w_h &= 0 \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов этих нормальных уравнений пользуются таблицей условных уравнений и поверяют коэффициенты каждого нормального уравнения посредством чисел:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \dots + h_1, \\ s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \dots + h_2, \\ \dots &\dots \\ s_n &= a_n + b_n + c_n + d_n + \dots + h_n, \end{aligned}$$

представляющих каждое сумму коэффициентов во всех условных уравнениях при одной и той же поправке, имеющей одинаковый номер с  $s$ .

Нетрудно видеть, что:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{as}{p} \right] &= \left[ \frac{aa}{p} \right] + \left[ \frac{ab}{p} \right] + \left[ \frac{ac}{p} \right] + \dots + \left[ \frac{ah}{p} \right] \\ \left[ \frac{bs}{p} \right] &= \left[ \frac{ab}{p} \right] + \left[ \frac{bb}{p} \right] + \left[ \frac{bc}{p} \right] + \dots + \left[ \frac{bh}{p} \right] \\ \dots &\dots \\ \left[ \frac{hs}{p} \right] &= \left[ \frac{ah}{p} \right] + \left[ \frac{bh}{p} \right] + \left[ \frac{ch}{p} \right] + \dots + \left[ \frac{hh}{p} \right] \end{aligned}$$

Сумма  $\left[ \frac{cs}{p} \right]$  должна быть равна сумме коэффициентов третьего нормального уравнения (не считая свободного члена), сумма  $\left[ \frac{ds}{p} \right]$  должна быть равна сумме коэффициентов четвертого нормального уравнения и т. д. По вычислении коэффициентов всех нормальных уравнений и по проверке их при помощи сумм  $\left[ \frac{as}{p} \right]$ ,  $\left[ \frac{bs}{p} \right]$ , ... образуют еще суммы:

$$S_1 = \left[ \frac{as}{p} \right] + w_1; \quad S_2 = \left[ \frac{bs}{p} \right] + w_2; \quad S_3 = \left[ \frac{cs}{p} \right] + w_3; \dots$$

и после этого приступают к решению нормальных уравнений по схеме Гаусса или Дулигеля, используя числа  $S_1, S_2, S_3, \dots$  в контрольном (последнем) столбце схемы. В этом контрольном столбце с числами  $S$  вычисление идет совершенно так же, как и во всех прочих столбцах.

цах гауссовой схемы; каждая новая строчка чисел, получаемая в схеме, контролируется числом, полученным в этой же строчке контрольного столбца.

Называя условно:  $w_1$  через  $[ab]$ ,  $w_2$  через  $[bl]$ , ...,  $S_2$  через  $[bS]$ ,  $S_3$  через  $[cS]$ ..., имеем в гауссовой схеме такие контрольные уравнения:

$$\begin{aligned}
 -[ab] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] - \frac{[ab]}{[aa]} [ac] - \dots - \frac{[ab]}{[aa]} w_1 = -\frac{[ab]}{[aa]} S_1 &\quad \dots \times \\
 [bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + [bd \cdot 1] + \dots + [bh \cdot 1] = [bS \cdot 1] &\quad \dots \times \times \\
 -[ac] - \frac{[ac]}{[aa]} [ab] - \frac{[ac]}{[aa]} [ac] - \dots - \frac{[ac]}{[aa]} w_1 = -\frac{[ac]}{[aa]} S_1 &\quad \dots \odot \\
 -[bc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bd \cdot 1] - \dots - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1] = \\
 &= -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bS \cdot 1] \quad \dots \oplus \\
 [cc \cdot 2] + [cd \cdot 2] + \dots + [ch \cdot 2] = [cS \cdot 2] &\quad \dots .4 \\
 -[ad] - \frac{[ad]}{[aa]} [ab] - \frac{[ad]}{[aa]} [ac] - \dots - \frac{[ad]}{[aa]} w_1 = -\frac{[ad]}{[aa]} S_1 &\quad \dots .5 \\
 -[bd \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bd \cdot 1] - \dots - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1] = \\
 &= -\frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bS \cdot 1] \quad \dots .* \\
 -[cd \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cd \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [ch \cdot 2] = -\frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cS \cdot 2] &\quad .7 \\
 [dd \cdot 3] + [dh \cdot 3] = [dS \cdot 3] &\quad \dots .8
 \end{aligned}$$

Проверки выполняются в порядке знаков:  $\times$ ,  $\times \times$ ,  $\odot$ ,  $\oplus$ ,  $.4$ ,  $.5$ ,  $.*$ ,  $.7$ ,  $.8$ , по схеме, приводимой в табл. 52; одним и тем же значком из числа вышесказанных обозначены слагаемые, образующие одну из проверяемых сумм.

Кроме этих контролей, в каждой строчке, где слева стоит  $(-1)$ , сумма слагаемых, включая и эту единицу, должна быть равна числу, полученному в той же строчке в графе  $S$ . Приведенную схему следует назвать видоизмененной схемой Дулитля; она рассчитана на вычисления с помощью арифмометра (или счетной линейки). При вычислениях пользуются, конечно, графленой вычислительной бумагой.

Собственно, в американской схеме Дулитля (см. табл. 52) действуют иначе, а именно: кроме тех же вертикальных граф, что и в нашей схеме, прибавляют слева одну узкую графу для нумерации уравнений, а справа одну обычную по ширине или несколько более широкую (иногда этих двух добавочных граф не делают).

В первом отделении схемы имеют только одну строку — для выписки первого нормального уравнения и  $S_1$ . Первое нормальное уравне-

Таблица 52

## Схема решения нормальных уравнений

| $k_1$  | $k_2$   | $k_3$   | $k_4$   | $w$   | $S$  |
|--|---|---|---|---|--|
| $[aa]$<br>$(-1)$                             | $\begin{matrix} [ab] \times \\ -[ab] \\ [ab] \end{matrix}$                                | $\begin{matrix} [ac] \odot \\ -[ac] \\ [aa] \end{matrix}$                                 | $\begin{matrix} [ad]_5 \\ -[a'd] \\ [aa] \end{matrix}$                                    | $\begin{matrix} w_1 \\ -\frac{w_1}{[aa]} \end{matrix}$                                    | $\begin{matrix} S_1 \\ -\frac{S_1}{[aa]} \end{matrix}$ |
| $[bb]$<br>$[ab][ab]$<br>$[aa] \times$        | $\begin{matrix} [bc] \\ -[ab][ac] \\ [aa] \times \end{matrix}$                            | $\begin{matrix} [bd] \\ -[ab][ad] \\ [aa] \times \end{matrix}$                            | $\begin{matrix} w_2 \\ -\frac{[ab] \cdot w_1}{[aa]} \times \\ 5 \end{matrix}$             | $\begin{matrix} S_2 \\ -\frac{[ab] \cdot S_1}{[aa]} \times \end{matrix}$                  |  |
| $[bb \cdot 1]$<br>$(-1) \times \times$       | $\begin{matrix} [bc \cdot 1] \times \times \\ -[bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} [bd \cdot 1] \times \times \\ -[bd \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} [bl \cdot 1] \times \times \\ -[bl \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} [bs \cdot 1] \times \times \\ -[bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$ |  |
| $[cc]$<br>$-[ac][ac]$<br>$[aa] \odot$        | $\begin{matrix} [ca] \\ -[ac][ad] \\ [aa] \odot \end{matrix}$                             | $\begin{matrix} w_3 \\ -\frac{[ac] \cdot w_1}{[aa]} \odot \\ 5 \end{matrix}$              | $\begin{matrix} S_3 \\ -\frac{[ac] \cdot S_1}{[aa]} \odot \end{matrix}$                   |   |  |
| $[bc \cdot 1][bc \cdot 1]$<br>$[bb \cdot 1]$ | $\begin{matrix} [bc \cdot 1][bd \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [bc \cdot 1][bl \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [bc \cdot 1][bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    |   |  |
| $\oplus$                                     |   | $\oplus$  | $\oplus$  | $\oplus$  |  |
| $[cc \cdot 2]$<br>$(-1)$                     | $\begin{matrix} [cd \cdot 2] \\ -[cd \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$               | $\begin{matrix} [cl \cdot 2] \\ -[cl \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$               | $\begin{matrix} [cs \cdot 2] \\ -\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \end{matrix}$          |   |  |
|  | $\begin{matrix} [dd] \\ -[ad][ad] \\ [aa] \end{matrix}$                                   | $\begin{matrix} w_4 \\ -\frac{[ad] \cdot w_1}{[aa]} \\ 5 \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} S_4 \\ -\frac{[ad] \cdot S_1}{[aa]} \\ 5 \end{matrix}$                    |   |  |
|  | $\begin{matrix} [bd \cdot 1][bd \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [bd \cdot 1][bl \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [bd \cdot 1][bs \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                    |   |  |
|  | $\begin{matrix} [cd \cdot 2][cd \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [cd \cdot 2][cl \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$                    | $\begin{matrix} [cd \cdot 2][cs \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$                    |   |  |
|  | $[dl \cdot 3]$<br>$(-1)$  | $[dl \cdot 3]$  | $[ds \cdot 3]$  |   |  |
| $\frac{w_1}{[aa]}$                           | $\begin{matrix} [bl \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix}$                                | $\begin{matrix} [cl \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix}$                                | $\begin{matrix} [dl \cdot 3] \\ [dd \cdot 3] \end{matrix}$                                |   |  |
| $\frac{[ad]}{[aa]} k_4$                      | $\begin{matrix} [bd \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix} k_4$                            | $\begin{matrix} [cd \cdot 2] \\ [cc \cdot 2] \end{matrix} k_4$                            | $k_4$   |   |  |
| $\frac{[ac]}{[aa]} k_3$                      | $\begin{matrix} [bc \cdot 1] \\ [bb \cdot 1] \end{matrix} k_3$                            | $k_3$   |   |   |  |
| $\frac{[ab]}{[aa]} k_2$                      | $k_2$   |   |   |   |  |
| $k_1$  |   |   |   |   |  |

ние обозначается цифрой I. После этого в первой строке второго отделения схемы выписывают второе нормальное уравнение, начиная с коэффициента  $[bb]$  и кончая  $S_2$ . Далее, получив на арифмометре величину  $-\frac{[ab]}{[aa]}$ , умножают на нее коэффициенты первого нормального уравнения, начиная с  $[ab]$  и кончая  $S_1$ . Результат выписывают во вторую строку второго отделения схемы и, сложив первую и вторую строки этого отделения, получают первое преобразованное уравнение в гауссовой схеме, которое обозначают римской цифрой II. Отчеркнув теперь законченное второе отделение, в первой строке следующего третьего отделения выписывают коэффициенты третьего нормального уравнения, начиная с  $[cc]$  и кончая  $S_3$ . Обращаясь к первому отделению схемы, получают на арифмометре  $-\frac{[ac]}{[aa]}$  и на это число умножают коэффициенты уравнения I, т. е. первого нормального уравнения, начиная с  $[ac]$  и кончая  $S_1$ . Результат выписывают во второй строке третьего отделения. Далее, обращаясь ко второму отделению, получают (из уравнения II) на арифмометре  $-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$  и на это число умножают коэффициенты уравнения II, начиная с  $[bc \cdot 1]$  и кончая  $[bS \cdot 1]$ . Результат подписывают в третьей строке третьего отделения. Сложив первую, вторую и третью строки этого отделения, получают в его четвертой строке второе преобразованное уравнение в гауссовой схеме:  $[cc \cdot 2] k_3 + [cd \cdot 2] k_4 + \dots + [cl \cdot 2] = 0$ , которые обозначают римской цифрой III. Закончив этим третье отделение схемы, его отчеркивают горизонтальной чертой и начинают следующее, четвертое отделение, которое заполняют, конечно, по совершенно аналогичному порядку. Следовательно, строки нашей схемы в таблице 52: 2, 6, 11, 17, 24, 32, и т. д. в схеме Дулитля вовсе отсутствуют. По этому при вычислении коррелат придется пользоваться не этими строчками, как мы делаем, а уравнениями I, II, III, IV и т. д., т. с. вести такое вычисление:

$$k_3 = -\frac{[cd \cdot 2] k_4 + [cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}, \quad k_2 = -\frac{[bc \cdot 1] k_3 + [bd \cdot 1] k_4 + [bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}, \quad \dots$$

Вообще, в схеме Дулитля меньше контроля, но остающийся контроль в ней все-таки достаточен; поэтому, так как в этой схеме вычислений меньше и меньше список чисел в схему, следует ее, взятую в чистом виде, предпочесть введенной в нашу практику видоизмененной схеме Дулитля.

Пусть имеем четыре нормальных уравнения:

$$\begin{aligned} 4k_1 &+ 2k_3 + 6,32 k_4 - 5,51 = 0 & S_1 &= + 6,81 \\ &+ 4k_2 + 2k_3 - 4,98 k_4 + 1,53 = 0 & S_2 &= + 2,55 \\ &+ 4k_3 + 0,55 k_4 - 0,02 = 0 & S_3 &= + 8,53 \\ &+ 36,75 k_4 - 2,70 = 0 & S_4 &= + 35,94 \end{aligned}$$

Тогда вычисление по схеме Дулитля представляется<sup>1</sup> в виде табл. 53.

По вычислении коррелат из нормальных уравнений выводят искомые поправки углов или направлений по формулам

<sup>1</sup> Задано из „Geodesy“ Hosmer'a.

Таблица 53

|     | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$           | $k_4$  | $w$     | $S$   |                              |
|-----|-------|-------|-----------------|--------|---------|-------|------------------------------|
| I   | 4     | —     | +2              | + 6,32 | - 5,51  | +6,81 |                              |
|     |       | 4     | +2              | -4,98  | +1,53   | +2,55 | $\times \frac{0}{4}$         |
|     |       | —     | —               | —      | —       | —     |                              |
| II  | +4    | +2    | -4,98           | +1,53  | +2,55   |       |                              |
|     |       | +4    | +0,55           | -0,02  | +8,53   |       | I $\times -\frac{2}{4}$      |
|     |       | -1    | -3,16           | +2,755 | -3,405  |       | II $\times -\frac{2}{4}$     |
| III |       | -1    | +2,49           | -0,765 | -1,275  |       |                              |
|     | +2    |       | -0,12           | +1,97  | +3,85   |       |                              |
|     |       |       | +36,75          | -2,70  | +35,94  |       | I $\times -\frac{6,32}{4}$   |
|     |       |       | -9,986          | +8,706 | -10,76  |       | II $\times +\frac{4,98}{4}$  |
|     |       |       | -6,200          | -1,905 | +3,175  |       | III $\times +\frac{0,12}{4}$ |
|     |       |       | -0,007          | +0,118 | +0,231  |       |                              |
|     |       |       | +20,557         | +8,029 | +28,586 |       |                              |
|     |       |       | $k_4 = -0,3906$ |        |         |       |                              |

$$k_3 = \frac{-1,97 + 0,12 \times -0,3906}{2}$$

$$k_3 = -1,008$$

$$k_2 = -0,365$$

$$k_1 = +2,50$$

$$(1) = \frac{a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots}{p_1}$$

$$(2) = \frac{a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots}{p_2}$$

.....

$$(n) = \frac{a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \dots}{p_n}$$

и затем вычисляют сумму

$$p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + p_3(3)^2 + \dots + p_n(n)^2,$$

которую мы назовем через  $\sum p v^2$ .

Проверкой правильности вычисления коррелат и по ним — поправок служит соблюдение равенства

$$\sum p v^2 = -[kv].$$

Средняя ошибка  $\mu$  единицы веса определяется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{r}},$$

где  $r$  — число условных уравнений. Обычно под  $\mu$  понимается средняя ошибка угла или направления (в зависимости от того, уравнивается ли сеть по углам или по направлениям), измеренного определенным числом приемов. Сравнивая  $\mu$  с выведенной из обработки материала на станциях средней ошибкой  $\mu_1$  угла или направления, измеренного тем же числом приемов, мы получаем возможность судить о систематических ошибках в углах триангуляции: обычно  $\mu > \mu_1$ . Наконец, надо отметить, что при уравнивании направлений в свободных сетях на каждом пункте сети сумма поправок направлений, умноженных на соответствующие веса, равняется нулю:  $[pv] = 0$ . Это видно из следующих соображений. Если в некоторое условное уравнение входит поправка  $v_t$  направления  $T$ , то в это же уравнение непременно войдет еще и поправка  $v_s$  другого направления  $S$ , наблюденного с того же тригонометрического пункта  $O$ , что и направление  $T$ ; другими словами, поправки направлений, наблюденных на одном пункте, входят в каждое условное уравнение попарно — соответственно тому, что в условных уравнениях при переходе к уравниванию направлений приходится поправку каждого угла заменять разностью поправок двух направлений, образующих этот угол. При этом поправки двух направлений, образующих в условном уравнении пару, входят в него с коэффициентами равными, но противоположными по знаку. Следовательно, если  $v_t$  и  $v_s$  образуют пару в некотором условном уравнении с номером  $r$  и коэффициенты при них в этом уравнении будут  $h$  и  $-h$ , то при весах направлений  $T$  и  $S$ , равных  $p_t$  и  $p_s$ , в выражениях  $v_t$  и  $v_s$  через коррелаты войдут члены: для  $v_t \dots \frac{hk_r}{p_t}$  и для  $v_s \dots -\frac{hk_r}{p_s}$ ; эти члены ладут в  $[pv]$ , образованной для пункта  $O$ , пару слагаемых:  $\frac{p_t hk_r}{p_t}$  и  $-\frac{p_s hk_r}{p_s}$ , в сумме равную нулю. Очевидно, что суммируя выраженные через коррелаты поправки направлений, наблюденных с одного пункта  $O$ , мы будем иметь сумму, состоящую из пар слагаемых, соответствующих парам поправок, причем каждая такая пара слагаемых будет равна нулю.

### § 88. Двухгрупповое уравнивание (метод Крюгера)

Нередко из-за большого числа условных уравнений вычислительная работа по решению такого же числа нормальных уравнений становится слишком тяжелой. В этих случаях применяют или различные упрощения за счет замены точного решения более или менее приближенным, или

изыскивают, сохраняя строгость решения, те или иные методы сокращения вычислительного труда. Одним из таких методов является в известных случаях разбивка на отдельные группы нормальных уравнений, подлежащих решению в м с с т е, и решение таких групп отдельно, но многократно.

Представим себе такую систему условных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \dots + \alpha_n(v) + w_1 &= 0 \\ \beta_1(1) + \beta_2(2) + \beta_3(3) + \dots + \beta_n(v) + w_{11} &= 0 \\ \dots &\dots \\ i_1(1) + i_2(2) + i_3(3) + \dots + i_n(v) + w_i &= 0 \\ \dots &\dots \\ \lambda_1(1) + \lambda_2(2) + \lambda_3(3) + \dots + \lambda_n(v) + w_\lambda &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (398)$$

Пусть уравнения (397) отнесены к первой группе, а все остальные уравнения (398) — ко второй группе. Допустим, что мы составили нормальные уравнения, соответствующие только первой группе условных уравнений (397), и, решив их, определили систему значений поправок  $(1)', (2)', (3)' \dots$ , которые назовем первичными. С углами или направлениями, исправленными этими первичными поправками, составим вновь уравнения (398), что, очевидно, вызовет лишь изменение в этих уравнениях свободных членов  $w_1, w_{11}, w_{111} \dots, w_\lambda$ . Найдем теперь из нормальных уравнений, соответствующих этим перечисленным уравнениям (398), систему поправок  $(1)'', (2)'', (3)'' \dots$ , которые назовем вторичными поправками. С углами, исправленными суммой первичных и вторичных поправок:  $(1)' + (1)'', (2)' + (2)'', (3)' + (3)'' \dots$  составляем вновь уравнения (397), что, конечно, сводится лишь к перечислению в них свободных членов. Изменив соответственно этому перечислению свободные члены в нормальных уравнениях, соответствующих группе (397), решаем их вторично, и находим поправки  $(1)''', (2)''', (3)''' \dots$ , которые назовем третичными. Исправив углы суммой поправок  $(1)' + (1)'' + (1)''', (2)' + (2)'' + (2)''', (3)' + (3)'' + (3)''' \dots$ , перечисляем свободные члены уравнений группы (398), и, изменив соответственно этому перечислению свободные члены в нормальных уравнениях второй группы, из них выводим четвертичные поправки, и т. д. Способ наименований квадратов показывает, что, проделав ряд таких решений, ряд таких последовательных приближений, мы придем в конце концов к совершенно строгому определению вероятнейших поправок в виде сумм:  $(1)' + (1)'' + (1)''' + (1)^{IV} + \dots, (2)' + (2)'' + (2)''' + (2)^{IV} + \dots$ . Конечно, при каждом новом приближении приходится в гауссовой схеме для группы (397) и в гауссовой схеме для группы (398) решать заново только графу для свободных членов и вычислять заново коррелаты. Но тем не менее практически в этом общем виде групповой метод уравнивания может представлять ценность лишь в редких случаях. Идея двухгруппового уравнивания сделалась

плодотворной лишь после того, как известный ученый Крюгер предложил свой способ решения, не основанный на методе последовательных приближений.

Назовем группу уравнений (397) — группой I, группу (398) — группой II. Поправка  $(i)$  будет определяться следующим уравнением:

$$(i) = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \dots + r_i k_r + \alpha_i k_{\text{I}} + \beta_i k_{\text{II}} + \gamma_i k_{\text{III}} + \dots + \lambda_i k_{\lambda}, \quad (399)$$

В (399)  $k_1, k_2, \dots, k_r$  — коррелаты уравнений I группы;  $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_\lambda$  — коррелаты уравнений II группы, при условии совместного решения обеих групп. Допустим, что решая отдельно I группу, мы получим для поправки  $(i)$  значение:

$$(i)' = a_i k'_1 + b_i k'_2 + c_i k'_3 + \dots + r_i k'_r. \quad (400)$$

Допустим далес, что затем преобразовали коэффициенты и свободные члены в этой II группе, соблюдая такое требование: если эти преобразованные уравнения II группы решим отдельно и получим из них систему поправок (i)"', тогда должно быть:

$$(i) = (i)' + (i)'' \quad (401)$$

Но, конечно, эта преобразованная система уравнений II группы должна быть вполне эквивалентна непреобразованной системе, т. е. системе уравнений (398), или, другими словами, при совместном решении этой преобразованной системы с I группой (397), система поправок ( $i$ ) должна оставаться та, которую дают (397) и (398) вместе.

Преобразованную при соблюдении указанного требования группу II напишем в таком виде

причем очевидно

$$(i'') = A_i k'_1 + B_i k'_2 + C_i k'_3 + \dots + L_i k'_{\lambda}. \quad (403)$$

В (400)  $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_r$  — коррелаты, получаемые при решении отдельно только I группы; в (403)  $k'_1, k'_n, k'_{n+1}, \dots, k'_{\lambda}$  — коррелаты, получаемые при решении отдельно только преобразованных уравнений (402) II группы.

Но как выполнить преобразование уравнений II группы, чтобы осуществить требование (401)?

Понятно, что если это удастся сделать и притом с достаточной простотой, то тогда решение II группы становится независимым от решения I группы, и в этом несомненно будет заключаться успех способа Крюгера. Не иметь вовсе дела при нахождении вторичных поправок (*i*)'' с I группой уравнений — вот в чем заключается цель преобразования уравнений II группы.

При совместном решении обеих групп (397) и (402) мы будем иметь такие нормальные уравнения

В этих последних уравнениях через  $k''_1, k''_2, \dots, k''_\nu, k''_1, k''_{\nu+1}, \dots, k''_\lambda$  обозначены коррелаты, получаемые при совместном решении (397) и (402).

Только что написанную систему (404) из  $r + \lambda$  нормальных уравнений нужно разбить на две группы так, чтобы  $r$  первых уравнений из  $r + \lambda$  совпали бы вполне с группой нормальных уравнений, соответствующих только уравнениям (397), а  $\lambda$  вторых из  $r + \lambda$  уравнений (404) совпали бы вполне с группой нормальных уравнений, соответствующих только уравнениям (402).

Так как мы считаем коэффициенты и свободные члены в системе уравнений (402) еще неустановленными, неопределенными, то для выполнения поставленного требования надлежит положить

$$\left. \begin{array}{l} [aA] = [aB] = [aC] = \dots = [aL] = 0 \\ [bA] = [bB] = [bC] = \dots = [bL] = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [rA] = [rB] = [rC] = \dots = [rL] = 0 \end{array} \right\}. \quad (405)$$

В системе (405) имеем  $n\lambda$  неизвестных и  $\lambda r$  — уравнений; так как  $n > \lambda + r$ , то  $n\lambda > \lambda r$ . Следовательно, система (405) дает сколько угодно решений, при которых условие (401) будет соблюдаться, но при этом свободные члены  $W_1, W_{II}, \dots, W_\lambda$  в (402) останутся без определения и, следовательно, задача наша останется неразрешимой. Понятно, величины  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  и т. д. связаны друг с другом соответственно и с величинами  $W_1, W_{II}, \dots, W_\lambda$  условиями (402) через посредство поправок (1), (2), ..., (v), а, следовательно, и с коэффициентами и свободными членами условий (397). Другими словами, определение  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n, W_1, W_{II}, \dots, W_\lambda$  следует выполнять, используя и уравнения (405) и уравнения (402) и, эквивалентные последним, уравнения (398) и уравнения (397).

Умножим первое из уравнений (397) на вспомогательную коррелату  $\rho_{1,1}$ , второе из этих уравнений — на вспомогательную коррелату  $\rho_{1,2}$ , третью — на вспомогательную коррелату  $\rho_{1,3}$ , и т. д.; последнее из уравнений (397) помножим на  $\rho_{1,1}$ . Сложив теперь, после такого умножения, уравнения (397) с первым из уравнений (398), получим

Мы можем потребовать, чтобы это уравнение было тождественно с первым из уравнений (402), поэтому пишем такие равенства

Уравнения (406) выражают коэффициенты первого из уравнений системы (402) через вспомогательные коррелаты  $\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_1$ , числом  $r$ .

Аналогично поступим для получения коэффициентов второго уравнения в группе (402).

Умножим первое, второе, третье... из уравнений (397) соответственно на вспомогательные коррелаты  $\rho_{2 \cdot 1}, \rho_{2 \cdot 2}, \rho_{2 \cdot 3}, \dots, \rho_{2 \cdot r}$ . После этого сложим все уравнения I группы, умноженные каждое соответственно на эти вспомогательные коррелаты, с вторым из системы уравнений (398), и, отождествив полученный результат со вторым из уравнений (402), получим:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \beta_1 + a_1 \rho_{2 \cdot 1} + b_1 \rho_{2 \cdot 2} + c_1 \rho_{2 \cdot 3} + \dots + r_1 \rho_{2 \cdot r} \\ B_2 &= \beta_2 + a_2 \rho_{2 \cdot 1} + b_2 \rho_{2 \cdot 2} + c_2 \rho_{2 \cdot 3} + \dots + r_2 \rho_{2 \cdot r} \\ \vdots &\quad \vdots \\ B_n &= \beta_n + a_n \rho_{2 \cdot 1} + b_n \rho_{2 \cdot 2} + c_n \rho_{2 \cdot 3} + \dots + r_n \rho_{2 \cdot r} \\ W_{II} &= w_{II} + w_1 \cdot \rho_{2 \cdot 1} + w_2 \cdot \rho_{2 \cdot 2} + w_3 \cdot \rho_{2 \cdot 3} + \dots + w_r \rho_{2 \cdot r} \end{aligned} \right\} (407)$$

Таким образом, мы составим, применив этот прием к каждому из уравнений (398),  $\lambda$  систем уравнений типа (406) и (407) для определения всех коэффициентов и свободных членов уравнений (402) преобразованной второй группы. Подставляя эти выражения (406), (407) ... коэффициентов преобразованной второй группы в уравнения (405), мы получим  $\lambda \cdot r$  уравнений для определения из них  $\lambda \cdot r$  вспомогательных коррелат  $\rho_{1 \cdot i}, \rho_{2 \cdot i}, \rho_{3 \cdot i}, \dots, \rho_{r \cdot i}$  ( $i$  изменяется от 1 до  $\lambda$ ). По определении величин  $\rho$  вычисляются по (406), (407) ... все коэффициенты и свободные члены преобразованной группы II. Подстановка

выражений (406), (407) в уравнения (405) приводит к следующим группам уравнений

### Первая группа

$$\left. \begin{aligned} [aa]\varrho_{1 \cdot 1} + [ab]\varrho_{1 \cdot 2} + [ac]\varrho_{1 \cdot 3} + \dots + [ar]\varrho_{1 \cdot r} + [a\alpha] &= 0 \\ [ab]\varrho_{1 \cdot 1} + [bb]\varrho_{1 \cdot 2} + [bc]\varrho_{1 \cdot 3} + \dots + [br]\varrho_{1 \cdot r} + [b\alpha] &= 0 \\ \dots &\dots \\ [ar]\varrho_{1 \cdot 1} + [br]\varrho_{1 \cdot 2} + [cr]\varrho_{1 \cdot 3} + \dots + [rr]\varrho_{1 \cdot r} + [r\alpha] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\alpha)$$

### Вторая группа

$$\left. \begin{aligned} [aa]\varrho_{2 \cdot 1} + [ab]\varrho_{2 \cdot 2} + [ac]\varrho_{2 \cdot 3} + \dots + [ar]\varrho_{2 \cdot r} + [a\beta] &= 0 \\ [ab]\varrho_{2 \cdot 1} + [bb]\varrho_{2 \cdot 2} + [bc]\varrho_{2 \cdot 3} + \dots + [br]\varrho_{2 \cdot r} + [b\beta] &= 0 \\ \dots &\dots \\ [ar]\varrho_{2 \cdot 1} + [br]\varrho_{2 \cdot 2} + [cr]\varrho_{2 \cdot 3} + \dots + [rr]\varrho_{2 \cdot r} + [r\beta] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (\beta)$$

### Группа $i$

$$\left. \begin{aligned} [aa]\varrho_{i \cdot 1} + [ab]\varrho_{i \cdot 2} + [ac]\varrho_{i \cdot 3} + \dots + [ar]\varrho_{i \cdot r} + [ai] &= 0 \\ [ab]\varrho_{i \cdot 1} + [bb]\varrho_{i \cdot 2} + [bc]\varrho_{i \cdot 3} + \dots + [br]\varrho_{i \cdot r} + [bi] &= 0 \\ \dots &\dots \\ [ar]\varrho_{i \cdot 1} + [br]\varrho_{i \cdot 2} + [cr]\varrho_{i \cdot 3} + \dots + [rr]\varrho_{i \cdot r} + [ri] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (i)$$

Число всех таких групп будет  $\lambda$ . Понятно, что уравнения в каждой такой группе совершенно идентичны нормальным уравнениям группы I (397) и отличаются от них только свободными членами. Следовательно, в схеме Гаусса, написанной для нормальных уравнений группы I, надлежит лишь добавить  $\lambda$  граф для свободных членов соответственно первой, второй,  $i, \dots$  групп уравнений для определения вспомогательных коррелат. Вычисления в этих добавочных графах и последующий расчет (вместо коррелат  $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'$  в Гауссовой схеме) этих вспомогательных коррелат  $\varrho$  — вот какая добавочная работа выполняется при определении их, не считая вычислений величин  $[a\alpha], [b\alpha], [c\alpha], \dots, [ai], [bi], \dots$ .

Таким образом, ход вычислений при применении двухгруппового уравнивания по Крюгеру представляется в таком виде:

1) составляем нормальные уравнения I группы и одновременно вычисляем:

$$[a\alpha], [b\alpha], \dots, [r\alpha]; \quad [a\beta], [b\beta], \dots, [r\beta]; \quad \dots, [a\lambda], [b\lambda], \dots, [r\lambda];$$

2) решаем Гауссову (или Дулиттля) схему для нормальных уравнений I группы, с добавлением к ней  $\lambda$  столбцов, отводимых свободным членам соответствующей группы нормальных, для определения вспомогательных коррелат, уравнений;

3) после определения вспомогательных коррелат вычисляют по (406), (407) и т. д. коэффициенты и свободные члены преобразованной II группы;

4) определив по пункту 2 коррелаты  $k'_1, k'_2, \dots, k'$ , для I группы, с ними по (400) вычисляют поправки ( $i'$ );

5) составив нормальные уравнения II группы

$$\begin{aligned} [AA] k'_I + [AB] k'_{II} + [AC] k'_{III} + \dots + [AL] k'_{\lambda} + W_I &= 0 \\ [AB] k'_I + [BB] k'_{II} + [BC] k'_{III} + \dots + [BL] k'_{\lambda} + W_{II} &= 0 \\ \vdots &\quad \vdots \\ [AL] k'_I + [BL] k'_{II} + [CL] k'_{III} + \dots + [LL] k'_{\lambda} + W_{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

и решив их, вычисляем поправки  $(i)''$  по формуле (403) и окончательно получаем

$$(i) = (i)' + (i)''.$$

## Мы имеем

$$[(i)^2] = [(i)'^2] + [(i)''^2] + 2 \sum (i)', (i)''$$

По в силу (405) все коэффициенты в последнем выражении обращаются в нули, и поэтому

$$[(i)^2] = [(i)'^2] + [(i)''^2]. \quad (408)$$

Обратимся к определению весса функции  $F$  от уравненных элементов при двухгрупповом уравнивании. Назовем через  $r^0_1, r^0_2, r^0_3, \dots, r^0_r$  переходные коэффициенты (см. § 8), соответствующие I группе уравнений, и через  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_s$  — переходные коэффициенты для преобразованной II группы. Не трудно видеть, применяя метод и обозначения § 8, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = & (a_1 r_1^0 + b_1 r_2^0 + c_1 r_3^0 + \dots + r_1 r_r^0 + A_1 R_1 + B_1 R_2 + \dots \\ & \dots + L_1 R_\lambda + f_1)^2 + (a_2 r_1^0 + b_2 r_2^0 + c_2 r_3^0 + \dots + r_2 r_r^0 + A_2 R_1 + \\ & + B_2 R_2 + \dots + L_2 R_\lambda + f_2)^2 + \\ & + \end{aligned}$$

Илк

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = & \{(a_1r_1^0 + b_1r_2^0 + c_1r_3^0 + \dots + r_1r_n^0)^2 + (a_2r_1^0 + b_2r_2^0 + \\ & + c_2r_3^0 + \dots + r_2r_n^0)^2 + \dots + (a_nr_1^0 + b_nr_2^0 + \dots + r_nr_n^0)^2\} + \\ & + \{(A_1R_1 + B_1R_2 + \dots + L_1R_\lambda + f_1)^2 + (A_2R_1 + B_2R_2 + \dots + L_2R_\lambda + \\ & + f_2)^2 + \dots + (A_nR_1 + B_nR_2 + \dots + L_nR_\lambda + f_n)^2\} + \\ & + \{2f_1(a_1r_1^0 + b_1r_2^0 + c_1r_3^0 + \dots + r_1r_n^0) + 2f_2(a_2r_1^0 + b_2r_2^0 + \dots + \\ & + r_2r_n^0) + \dots + 2f_n(a_nr_1^0 + b_nr_2^0 + \dots + r_nr_n^0)\}. \end{aligned}$$

Такой результат получается потому, что в силу (405):  $[aA] r^0_1 R_1 = 0$ ;  $[aB] r^0_1 R_2 = 0$ ; ...  $[aL] r^0_1 R_\lambda = 0$ ;  $[bA] r^0_2 R_1 = 0$ ; ... Но далее мы можем написать, прибавляя и вычитая в правой части уравнения для  $P_F$  величину  $[ff]$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= \{(a_1 r^0_1 + b_1 r^0_2 + c_1 r^0_3 + \dots + r_1 r^0_r + f_1)^2 + \\ &+ (a_2 r^0_1 + b_2 r^0_2 + c_2 r^0_3 + \dots + r_2 r^0_r + f_2)^2 + \dots + \\ &+ \dots + (a_n r^0_1 + b_n r^0_2 + c_n r^0_3 + \dots + r_n r^0_r + f_n)^2\} + \\ &+ \{(A_1 R_1 + B_1 R_2 + \dots + L_1 R_\lambda + f_1)^2 + (A_2 R_1 + B_2 R_2 + \dots + \\ &+ L_2 R_\lambda + f_2)^2 + \dots + (A_n R_1 + B_n R_2 + \dots + L_n R_\lambda + f_n)^2\} - [ff]. \end{aligned}$$

Но первая большая скобка в этом выражении для  $\frac{1}{P_F}$  [см. (19) § 8] равна

$$G'_1 = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots = [ff] + G_1;$$

вторая большая скобка в том же выражении равна

$$G'_2 = [ff] - \frac{[Af]^2}{[AA]} - \frac{[Bf \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} - \frac{[Cf \cdot 2]^2}{[CC \cdot 2]} - \dots = [ff] + G_2,$$

т. с.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= \left\{ [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots - \frac{[rf \cdot r-1]^2}{[rr \cdot r-1]}\right\} + \\ &+ \left\{ [ff] - \frac{[Af]^2}{[AA]} - \frac{[Bf \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} - \frac{[Cf \cdot 2]^2}{[CC \cdot 2]} - \dots - \frac{[Lf \cdot \lambda-1]^2}{[LL \cdot \lambda-1]}\right\} - \\ &- [ff] = G_1 + G_2 + [ff]. \end{aligned} \quad (409)$$

Другими словами, при решении нормальных уравнений I группы отводим добавочную графу, как бы соответствующую уравнению:

$$[af] k'_1 + [bf] k'_2 + [cf] k'_3 + \dots + [ff] K^I = 0.$$

При решении нормальных уравнений II группы также отводим добавочную графу, как бы соответствующую уравнению:

$$[Af] k'_1 + [Bf] k'_{II} + \dots + [ff] K^{II} = 0.$$

Результат исключения в таких графах соответственно коррелат  $k'_1, k'_2, \dots, k'_r$  и корюсалат  $k'_1, k'_{II}, \dots, k'_\lambda$  приведет к коэффициентам при  $K^I$  и  $K^{II}$ , равным соответственно  $G_1$  и  $G_2$ . В заключение параграфа укажем, что изложенный метод Крюгера дает в известных случаях существенно упрощение уравнительных вычислений, и именно в тех случаях, когда уравнения  $(\alpha), (\beta), \dots, (i)$  ... для определения вспомогательных коррелат получаются настолько простыми, что решение их не требует вовсе обычно длительного вычисления Гауссовой схемы, а по существу выполняется в уме.

## § 89. Применение Крюгерова метода двухгруппового уравнивания

Применим этот метод к уравниванию углов; при этом, применим его сначала только к простым цепям, т. е. к системам треугольников, в которых не имеется пересекающихся диагоналей; центральные системы могут, однако, быть в таких цепях, если только они не входят друг в друга. В первую группу будем всегда относить условия фигур, во вторую группу — условия базисов, дирекционных углов, координатные, а также условия горизонтов и полюсные при наличии центральных систем.

Решение первой группы сводится к получению для каждого угла треугольника с номером  $k$  первичной поправки, равной  $-\frac{w_k}{3}$ , понимая под  $w_k$  невязку в сумме углов этого треугольника. Далее, нормальные уравнения I группы для этого случая записываются так

$$\begin{aligned} 3k'_1 + w_1 &= 0, \\ 3k'_2 + w_2 &= 0, \\ \dots &\dots \\ 3k'_r + w_r &= 0. \end{aligned}$$

и в уравнениях  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , ...,  $(i)$  § 88 все неквадратические коэффициенты обращаются в нули, все же квадратические равны каждый  $+3$ . Суммы  $[\alpha\alpha]$ ,  $[b\alpha]$ , ...,  $[r\alpha]$ , очевидно, обращаются в суммы «по треугольникам» коэффициентов  $\alpha$  в первом условии II группы, т. е. в суммы  $\alpha$ , относящихся к углам соответственно и только первого, второго, третьего ... треугольников. Поэтому эти величины можно обозначить через  $[\alpha]_1$ ,  $[\alpha]_2$ ,  $[\alpha]_3$ , ... Точно так же каждая сумма  $[\alpha\beta]$ ,  $[b\beta]$ , ...,  $[r\beta]$  равна сумме коэффициентов  $\beta$  второго условия II группы, взятых соответственно по углам первого, второго, третьего и т. д. треугольников. Эти суммы следует обозначить через  $[\beta]_1$ ,  $[\beta]_2$ ,  $[\beta]_3$ , ... Таким образом, уравнения (406), (407) и уравнения  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , ...,  $(i)$  ... § 88 напишутся так

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 + \rho_{1 \cdot 1} \\ A_2 &= \alpha_2 + \rho_{1 \cdot 1} \quad \rho_{1 \cdot 1} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = -\frac{[\alpha]_1}{3} \\ A_3 &= \alpha_3 + \rho_{1 \cdot 1} \\ A_4 &= \alpha_4 + \rho_{1 \cdot 2} \\ A_5 &= \alpha_5 + \rho_{1 \cdot 2} \quad \rho_{1 \cdot 2} = -\frac{\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6}{3} = -\frac{[\alpha]_2}{3} \\ A_6 &= \alpha_6 + \rho_{1 \cdot 2} \\ A_7 &= \alpha_7 + \rho_{1 \cdot 3} \\ A_8 &= \alpha_8 + \rho_{1 \cdot 3} \quad \rho_{1 \cdot 3} = -\frac{\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9}{3} = -\frac{[\alpha]_3}{3} \\ A_9 &= \alpha_9 + \rho_{1 \cdot 3} \\ \dots &\dots \\ W_1 &= w_1 - \frac{w_1}{3} [\alpha]_1 - \frac{w_2}{3} [\alpha]_2 - \dots - \frac{w_r}{3} [\alpha]_r \end{aligned}$$

$$B_1 = \beta_1 + \rho_{2 \cdot 1}$$

$$B_2 = \beta_2 + \rho_{2 \cdot 1} \quad \rho_{2 \cdot 1} = -\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} = -\frac{[\beta]_1}{3}$$

$$B_3 = \beta_3 + \rho_{2 \cdot 1}$$

$$B_4 = \beta_4 + \rho_{2 \cdot 2}$$

$$B_5 = \beta_5 + \rho_{2 \cdot 2} \quad \rho_{2 \cdot 2} = -\frac{[\beta]_2}{3}$$

$$B_6 = \beta_6 + \rho_{2 \cdot 2}$$

$$B_7 = \beta_7 + \rho_{2 \cdot 3}$$

$$B_8 = \beta_8 + \rho_{2 \cdot 3} \quad \rho_{2 \cdot 3} = -\frac{[\beta]_3}{3}$$

$$B_9 = \beta_9 + \rho_{2 \cdot 3}$$

$$W_{II} = w_{II} - \frac{w_1}{3} [\beta]_1 - \frac{w_2}{3} [\beta]_2 - \frac{w_3}{3} [\beta]_3 - \dots$$

Отсюда получается такое простое правило получения преобразований коэффициентов и свободных членов в условных уравнениях II группы:

1) коэффициенты в каждом условном уравнении этой группы группируются по треугольникам; из значений коэффициентов (непреобразованных) каждого треугольника в данном условном уравнении II группы выводится среднее арифметическое;

2) преобразованные коэффициенты данного условия II группы, относящиеся к треугольнику с номером  $k$ , получаются из непреобразованных коэффициентов этого треугольника путем вычитания из каждого из них среднего арифметического значения этих непреобразованных коэффициентов треугольника с номером  $k$  в рассматриваемом условии;

3) свободный член при преобразовании данного условия получается из непреобразованного его свободного члена путем вычитания из него всех свободных членов уравнений I группы, умноженных каждый на среднее значение коэффициентов соответствующего треугольника в данном условии II группы.

Если, предварительно решив условия фигур, условные уравнения II группы составим с углами, исправленными первичными поправками, то, очевидно, что этим самым мы уже исправим свободные члены уравнений II группы:

первого уравнения на  $-\left\{ \frac{w_1}{3} [a]_1 + \frac{w_2}{3} [a]_2 + \dots + \frac{w_r}{3} [a]_r \right\}$ ;

второго уравнения на  $-\left\{ \frac{w_1}{3} [\beta]_1 + \frac{w_2}{3} [\beta]_2 + \dots + \frac{w_r}{3} [\beta]_r \right\}$ .

Другими словами, тогда вовсе уже не нужно будет исправлять свободных членов уравнений II группы, а в преобразованной системе

надо взять их так, как они получились при составлении уравнений II группы с углами, исправленными уже первичными поправками. Так именно и поступают в действительных вычислениях; следовательно, вышеуказанное правило получения преобразованных свободных членов обычно не применяется. Заметим также, что если в II группу входят уравнения горизонта или дирекционных углов, то в таких уравнениях коэффициенты при углах будут или нули, или единицы. Чтобы не иметь дела с дробями ( $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ), следует такие условные уравнения II группы предварительно умножить (вместе с свободными членами) на три, и после этого производить преобразование по указанному правилу.

Понятны значительные упрощения, вносимые в уравнительные вычисления описанным в настоящем параграфе способом применения метода Крюгера. Такой вид применения метода Крюгера является заслугой проф. Н. А. Урмадева, приведшего соответствующую научную работу в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Так как уравнивание по углам всегда применяется в триангуляции II класса, то понятно, что способ Урмадева получил широкое применение в нашем геодезическом производстве сейчас же после его опубликования.

Метод Урмасза-Крюгера был опубликован в 1931 г.; применение его к цепям II и III классов и к некоторым простым по виду системам II и III классов вносит существенные упрощения в вычисления. Несмотря на это и на сравнительно недавний срок опубликования метода, к настоящему времени имеется достаточно предложений по внесению в него упрощений или изменений в самом методе. Из этих предложений обратим внимание на предложение геодезиста И. Ю. Прапис-Праневича, в его статье, опубликованной в журнале «Геодезист» № 11 за 1935 г.

Сущность приема Пранис-Праневича сводится к следующему. Назовем коэффициенты условных уравнений II группы: первого через  $\alpha$ , второго через  $\beta$ , третьего через  $\gamma \dots$ ; далее назовем через  $[\alpha]_k$ ,  $[\beta]_k$ ,  $[\gamma]_k \dots$  суммы коэффициентов при поправках углов треугольника с номером  $k$  соответственно в первом, втором, третьем,  $\dots$  условных уравнениях II группы.

Условные уравнения напишем в таком виде

$$\left. \begin{array}{l} (1) + (2) + (3) + w_1 = 0 \\ (4) + (5) + (6) + w_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ (n-2) + (n-1) + (n) + w_s = 0 \end{array} \right\} \text{I группа}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1(1) + x_2(2) + x_3(3) + \dots + x_n(n) + w_{\alpha} = 0 \\ \beta_1(1) + \beta_2(2) + \beta_3(3) + \dots + \beta_n(n) + w_{\beta} = 0 \\ \gamma_1(1) + \gamma_2(2) + \gamma_3(3) + \dots + \gamma_n(n) + w_{\gamma} = 0 \\ \delta_1(1) + \delta_2(2) + \delta_3(3) + \dots + \delta_n(n) + w_{\delta} = 0 \end{array} \right\} \text{II группа}$$

Коррелаты первой группы обозначаем через  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , коррелаты второй группы — через  $k_a, k_b, k_c, k_d$ .

Далес пустъ

$$3k_1 = \zeta_1,$$

$$3k_2 = \xi_2,$$

• • • •

$$3k_s = \xi_s.$$

Тогда легко видеть, что нормальные уравнения, соответствующие совместному решению обеих групп, будут таковы

$$\left. \begin{aligned} \frac{[\alpha]_1}{3} \xi_1 + \frac{[\alpha]_2}{3} \xi_2 + \dots + \frac{[\alpha]_s}{3} \xi_s + [\alpha\alpha] k_\alpha + [\alpha\beta] k_\beta + [\alpha\gamma] k_\gamma + \\ \frac{[\beta]_1}{3} \xi_1 + \frac{[\beta]_2}{3} \xi_2 + \dots + \frac{[\beta]_s}{3} \xi_s + [\alpha\beta] k_\alpha + [\beta\beta] k_\beta + [\beta\gamma] k_\gamma + \\ \frac{[\gamma]_1}{3} \xi_1 + \frac{[\gamma]_2}{3} \xi_2 + \dots + \frac{[\gamma]_s}{3} \xi_s + [\alpha\gamma] k_\alpha + [\beta\gamma] k_\beta + [\gamma\gamma] k_\gamma + \end{aligned} \right\} \text{II группа.} + \dots + w_\alpha = 0 + \dots + w_\beta = 0 + \dots + w_\gamma = 0$$

Исключение величин  $\xi$  из этих двух систем уравнений приводит к такой системе нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ 3[\alpha\alpha] - \sum_1^s [\alpha]_i [\alpha]_i \right\} k_\alpha + \left\{ 3[\alpha\beta] - \sum_1^s [\alpha]_i [\beta]_i \right\} k_\beta + \\ & + \left\{ 3[\alpha\gamma] - \sum_1^s [\alpha]_i [\gamma]_i \right\} k_\gamma + \dots + \left( 3w_\alpha - \sum_1^s [\alpha]_i w_i \right) = 0 \\ & \left\{ 3[\beta\alpha] - \sum_1^s [\beta]_i [\alpha]_i \right\} k_\alpha + \left\{ 3[\beta\beta] - \sum_1^s [\beta]_i [\beta]_i \right\} k_\beta + \\ & + \left\{ 3[\beta\gamma] - \sum_1^s [\beta]_i [\gamma]_i \right\} k_\gamma + \dots + \left( 3w_\beta - \sum_1^s [\beta]_i w_i \right) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (411)$$

Эти последние уравнения и должны быть составлены и решены для получения  $k_x, k_y, k_z \dots$ , причем пользуются таблицей условных уравнений II группы, внося лишь в нее то изменение, что для каждого треугольника отводят (после трех строк, ими занятых) добавочную строку для сумм  $[x] [y] [z] \dots$  и для  $w_k$ . Таблица условных уравнений II группы по Пранис-Праневичу представлена табл. 54.

Таблица 54

| №№ треугольников | №№ углов                | $\alpha$                               | $\beta$                             | $\gamma$                               | $\delta$                               | $s$                     | $w$   | Вес         |
|------------------|-------------------------|--|-------------------------------------|--|--|-------------------------|-------|-------------|
| I                | $a_1$<br>$b_1$<br>$c_1$ | $\alpha_1$<br>$\alpha_2$<br>$\alpha_3$ | $\beta_1$<br>$\beta_2$<br>$\beta_3$ | $\gamma_1$<br>$\gamma_2$<br>$\gamma_3$ | $\delta_1$<br>$\delta_2$<br>$\delta_3$ | $s_1$<br>$s_2$<br>$s_3$ |       | 3<br>3<br>3 |
|                  |                         | $[\alpha]_1$                           | $[\beta]_1$                         | $[\gamma]_1$                           | $[\delta]_1$                           |                         | $w_1$ | -1          |
| II               | $a_2$<br>$b_2$<br>$c_2$ | $\alpha_4$<br>$\alpha_5$<br>$\alpha_6$ | $\beta_4$<br>$\beta_5$<br>$\beta_6$ | $\gamma_4$<br>$\gamma_5$<br>$\gamma_6$ | $\delta_4$<br>$\delta_5$<br>$\delta_6$ | .                       |       | 3<br>3<br>3 |
|                  |                         | $[\alpha]_2$                           | $[\beta]_2$                         | $[\gamma]_2$                           | $[\delta]_2$                           |                         | $w_2$ | -1          |
| III              | $a_3$<br>$b_3$<br>$c_3$ | $\alpha_7$<br>$\alpha_8$<br>$\alpha_9$ | $\beta_7$<br>$\beta_8$<br>$\beta_9$ | $\gamma_7$<br>$\gamma_8$<br>$\gamma_9$ | $\delta_7$<br>$\delta_8$<br>$\delta_9$ | .                       |       | 3<br>3<br>3 |
|                  |                         | $[\alpha]_3$                           | $[\beta]_3$                         | $[\gamma]_3$                           | $[\delta]_3$                           |                         | $w_3$ | -1          |

Числа в графе «вес» нужно понимать своеобразно: это, собственно, множители, на которые нужно умножать результаты перемножений чисел по строчкам в графах  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $w$ , чтобы получать коэффициенты уравнений (411).

Поправки углов  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  будут вычисляться по формулам

$$a_k = \alpha_{3k-2} k_\alpha + \beta_{3k-2} k_\beta + \gamma_{3k-2} k_\gamma + \dots + k_k;$$

$$b_k = \alpha_{3k-1} k_\alpha + \beta_{3k-1} k_\beta + \gamma_{3k-1} k_\gamma + \dots + k_k;$$

$$c_k = \alpha_{3k} k_\alpha + \beta_{3k} k_\beta + \gamma_{3k} k_\gamma + \dots + k_k;$$

т. с. к обычным результатам, получаемым согласно совершенно неизмененной таблице условных уравнений II группы без строк для  $[\alpha]_k$ ,  $[\beta]_k$ ,  $[\gamma]_k$ ... нужно прибавить коррелату  $k_k$  треугольника с номером  $k$ ; эта коррелата  $k_k$  согласно уравнениям (410), равна

$$k_k = -\frac{[\alpha]_k k_\alpha + [\beta]_k k_\beta + [\gamma]_k k_\gamma + \dots + w_k}{3}.$$

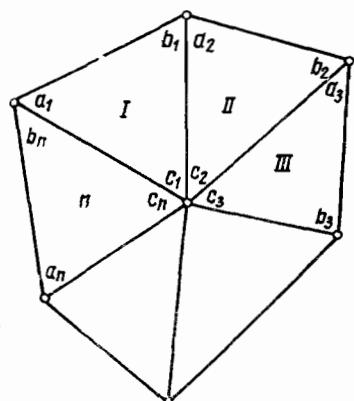
Мы привели этот прием Пранис-Прансевича главным образом потому, что здесь имеется свой методический подход, который может быть с пользой применен при уравнивании сложных систем, о чем говорится в § 106. Но сам автор полагает, что прием его и соответствующая схема вычисления приводят к заметному будто бы сокращению вычислительного труда по сравнению с ранее приведенным нами приемом вычисления по Урмаеву; для нас это «замстное» сокращение труда при уравнивании сравнительно простых сетей остается сомнительным.

Если предварительно уравняли углы в треугольниках за условия фигур, то, конечно, все  $w_k$  делаются равными нулю.

Другие предложения по изменениям метода Урмадеа имеют в виду применение его к центральным системам и геодезическим четырехугольникам. На этом мы останавливаемся в следующем параграфе.

### § 90. Уравнивание центральной системы и геодезического четырехугольника

Эти частные задачи очень привлекают внимание геодезистов, работающих не на основных геодезических работах, а на прокладке опорных сетей при съемках прикладного, «ведомственного» характера (землеустройство, маркшейдерские работы, съемки городов и т. п.). Казалось бы, применение двухгруппового уравнивания здесь настолько решает вопрос, что уже нет оснований этим вопросом заниматься. Но здесь имеется особенность, заключающаяся в стремлении выразить поправки углов этих простых фигур непосредственно через свободные члены



Черт. 281

условий уравнений, в виде некоторых формул, которые затем вычислитель подсчитывает механически, минуя вовсе составление и решение нормальных уравнений и вычисление коррелат. Именно такая постановка вопроса возможна в центральных системах и четырехугольниках, и осуществление ее, конечно, полезно. Далее может быть поставлен следующий вопрос — об упрощении полученных формул, выражающих поправки через свободные члены условий уравнений, о приспособлении этих формул к требованиям невысокой точности результатов в сетях низших разрядов.

**Центральная система. А.** Если в центральную систему входит  $n$  треугольников, то при уравнивании углов, в ней имеем  $n$  условий фигур (из треугольников), условие горизонта и одно полюсное условие. Обозначим углы треугольников, как указано на черт. 281; пермены логарифмов синусов углов  $a$  назовем через  $\alpha$ , а пермены логарифмов синусов углов  $b$  — через  $\beta$ . Отнесем условия фигур к I группе, а условие горизонта и условие боковое (полюсное) — к группе II. Первичные поправки углов получаем, конечно, по такой формуле:

$$(a_k) = (b_k) = (c_k) = -\frac{w_k}{3}.$$

С уравненными плоскими углами составляем уравнение горизонта и уравнение боковое; обозначим полученные в них свободные члены соответственно через  $W'_A$  и  $W'_B$ .

На основании изложенного в предыдущем параграфе совсем легко составить табл. 55 условных уравнений нашей системы.

При этом и условие горизонта и условие боковое — оба временно умножены на три, следовательно, в преобразованном условии горизонта

Таблица 55

| №№ тре-<br>угольников | №№<br>углов             |     |            | <i>A</i>             | <i>B</i>  | $\Delta$             | $\sigma$                                    |
|-----------------------|-------------------------|-----|------------|----------------------|---|----------------------|---|
|                       | $a_1$<br>$b_1$<br>$c_1$ | + 1 | $-\beta_1$ | $-1$<br>$-1$<br>$+2$ | $2\alpha_1 + \beta_1$<br>$-(\alpha_1 + 2\beta_1)$<br>$\beta_1 - \alpha_1$ | $\beta_1 - \alpha_1$ | $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1$ |
| II                    | $a_2$<br>$b_2$<br>$c_2$ | + 1 | $-\beta_2$ | $-1$<br>$-1$<br>$+2$ | $2\alpha_2 + \beta_2$<br>$-(\alpha_2 + 2\beta_2)$<br>$\beta_2 - \alpha_2$ | $\beta_2 - \alpha_2$ | $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_2$ |
| III                   | .                       |     |            | .                    | .   | .                    |   |
| <i>K</i>              | $a_k$<br>$b_k$<br>$c_k$ | + 1 | $-\beta_k$ | $-1$<br>$-1$<br>$+2$ | $2\alpha_k + \beta_k$<br>$-(\alpha_k + 2\beta_k)$<br>$\beta_k - \alpha_k$ | $\beta_k - \alpha_k$ | $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k \beta_k$ |
|                       |                         |     |            |                      |   | <i>R</i>             | <i>Q</i>                                    |

(A) свободный член равен  $3W'_A$ , а в преобразовании условий полюса  
(B) свободный член равен  $3W'_B$ . Введем обозначения

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \sigma \quad (a)$$

$$\beta - \alpha = \Delta \quad (b)$$

$$\Sigma\beta = Q \quad (c)$$

$$\Sigma\Delta = R \quad (d)$$

Мы имеем при этих обозначениях такие нормальные уравнения II группы

$$2n \cdot K_A + R \cdot K_B + W'_A = 0,$$

$$B \cdot K_A + 2Q \cdot K_B + W'_B = 0.$$

(при этом полученные согласно приведенной выше табл. 55 условных уравнений коэффициенты  $[AA]$ ,  $[AB]$  и  $[BB]$ , разделены каждый на три).

Отсюда, конечно, получаем

$$K_B = \frac{R \cdot W'_A - 2n \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2}; \quad (e)$$

$$K_A = \frac{R \cdot W'_B - 2Q \cdot W'_A}{4n \cdot Q - R^2}. \quad (f)$$

Далее имеем для вторичных поправок  $v''$

$$\left. \begin{aligned} v''_{a_k} &= -K_A + (2\alpha_k + \beta_k) K_B \\ v''_{b_k} &= -K_A + (\alpha_k + 2\beta_k) K_B \\ v''_{c_k} &= +2K_A + (\beta_k - \alpha_k) K_B \end{aligned} \right\}. \quad (g)$$

Формулы (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) и являются рабочими, причем вычисление по ним располагается в соответственно построенной удобной схеме, которую, в виду очевидности дела, мы не приводим; составление условных уравнений II группы (а также, конечно, и первой) совсем выпадает. Свободный член условия горизонта  $W'_A = \Sigma c - 360^\circ$ , понимая под  $c$  исправленные первичными поправками углы при полюсе фигуры; свободный член бокового условия  $W'_B = \Sigma \lg \sin a - \Sigma \lg \sin b$ , понимая под  $a$  и  $b$  также исправленные первичными поправками связующие углы фигуры.

Это решение было предложено С. Е. Баршай («Геодезист», 1935 г., № 8); оно, конечно, более чем просто вытекает из метода Урмса-Крюгера и заключается в устранении всех промежуточных вычислений по составлению и решению нормальных уравнений II группы, так как в данном случае простота сети позволяет просто получить формулы (e) и (f) для коррелят.

Величина  $R$  нередко выражается только десятыми долями единицы шестого знака логарифма; очень редко эта величина достигает 1,5 единицы шестого знака логарифма. Собравшись с значением  $R$  и с размерами  $W'_A$  и  $W'_B$ , опытный вычислитель может несколько упростить формулы для  $K_A$  и  $K_B$ .

**Б.** Мы остановимся еще на несколько ином подходе к уравниванию центральной системы, предложенном еще в 1925 году проф. Ф. Н. Красовским (см. «Руководство по высшей геодезии» часть I, издание 1926 г.).

Включим в первую группу не только условия фигур, но и условие горизонта. Следовательно, в I группе пишем такие уравнения

$$\begin{aligned} (a_1) + (b_1) + (c_1) + w_1 &= 0; \\ (a_2) + (b_2) + (c_2) + w_2 &= 0; \\ &\dots \\ (a_n) + (b_n) + (c_n) + w_n &= 0; \\ (c_1) + (c_2) + (c_3) + \dots + (c_n) + w_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Нормальные уравнения I группы пишутся так

$$\begin{aligned} 3k_1 + k_{n+1} + w_1 &= 0; \\ 3k_2 + k_{n+1} + w_2 &= 0; \\ 3k_3 + k_{n+1} + w_3 &= 0; \\ &\dots \\ 3k_n + k_{n+1} + w_n &= 0; \\ k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n + nk_{n+1} + w_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Складывая первые  $n$  нормальных уравнений, имеем:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n + \frac{n}{3} k_{n+1} + \frac{\sum^n w}{3} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{3} n \cdot k_{n+1} + w_{n+1} - \frac{\sum_1^n w}{3} = 0;$$

$$k_{n+1} = \frac{\sum_1^n w - 3w_{n+1}}{2n};$$

$$k_1 = -\frac{w_1}{3} - \frac{k_{n+1}}{3};$$

$$k_2 = -\frac{w_2}{3} - \frac{k_{n+1}}{3};$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$k_n = -\frac{w_n}{3} - \frac{k_{n+1}}{3}.$$

Отсюда получаем такие выражения для первичных поправок

$$(a_k)' = (b_k)' = -\frac{w_k + k_{n+1}}{3} = -\frac{w_k + \frac{\sum_1^n w - 3w_{n+1}}{2n}}{3};$$

$$(c_k)' = \frac{2k_{n+1} - w_k}{3} = -\frac{w_k - \frac{\sum_1^n w - 3w_{n+1}}{n}}{3}.$$

Всегда в производстве предварительным уравниванием углов, измеренных на центральной точке системы, достигают того, что  $w_{n+1} = 0$ . Поэтому обычно мы имеем

$$\left. \begin{aligned} (a_k)' &= (b_k)' = -\frac{w_k}{3} - \frac{\sum_1^n w}{6n} \\ (c_k)' &= -\frac{w_k}{3} + \frac{\sum_1^n w}{3n} \end{aligned} \right\}. \quad (412)$$

Вычислив с исправленными первичными поправками значениями углов свободный член  $W'_B$  бокового условия, пишем его, как всегда, в такой форме

$$\alpha_1(a_1)'' - \beta_1(b_1)'' + \alpha_2(a_2)'' - \beta_2(b_2)'' + \dots + \alpha_n(a_n)'' - \beta_n(b_n)'' + W'_B = 0.$$

Для вычисления вспомогательных коррелат  $\rho$  мы должны составить только одну группу уравнений (а) § 88. Именно имеем:

$$\begin{aligned} 3\rho_{1 \cdot 1} + \rho_{1 \cdot n+1} + \alpha_1 - \beta_1 &= 0; \\ 3\rho_{1 \cdot 2} + \rho_{1 \cdot n+1} + \alpha_2 - \beta_2 &= 0; \\ \dots &\dots \\ 3\rho_{1 \cdot n} + \rho_{1 \cdot n+1} + \alpha_n - \beta_n &= 0; \\ \rho_{1 \cdot 1} + \rho_{1 \cdot 2} + \rho_{1 \cdot 3} + \dots + \rho_{1 \cdot n} + n\rho_{1 \cdot n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_1^n \rho + \frac{n}{3} \rho_{1 \cdot n+1} + \frac{\sum_1^n (\alpha - \beta)}{3} = 0;$$

$$\sum_1^n \rho + n\rho_{1 \cdot n+1} = 0;$$

$$\rho_{1 \cdot n+1} = \frac{\sum_1^n (\alpha - \beta)}{2n};$$

$$\rho_{1 \cdot 1} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n};$$

$$\rho_{1 \cdot k} = \frac{\beta_k - \alpha_k}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n};$$

.....

$$\rho_{1 \cdot n} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n}.$$

Теперь по формулам (406) § 88 вычисляем

$$A_1 = \alpha_1 + \rho_{1 \cdot 1} = \frac{2\alpha_1 + \beta_1}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n} \dots \text{коэффициент при } (a_1)''$$

$$A_2 = -\beta_1 + \rho_{1 \cdot 1} = -\frac{2\beta_1 + \alpha_1}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n} \dots \quad " \quad (b_1)''$$

$$A_3 = \rho_{1 \cdot 1} + \rho_{1 \cdot n+1} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{3} - \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{3n} \dots \quad , \quad (c_1)''$$

$$A_4 = \alpha_2 + \rho_{1 \cdot 2} = \frac{2\alpha_2 + \beta_2}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n} \dots \quad , \quad (a_2)''$$

$$A_5 = -\beta_2 + \rho_{1 \cdot 2} = -\frac{2\beta_2 + \alpha_2}{3} + \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{6n} \dots \quad , \quad (b_2)''$$

$$A_6 = \rho_{1 \cdot 2} + \rho_{1 \cdot n+1} = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{3} - \frac{\sum_1^n (\beta - \alpha)}{3n} \dots \quad , \quad (c_2)''$$

.....

Закон образования этих коэффициентов совершенно ясен. Обозначая попрежнему

$$R = \sum_1^n (\beta - \alpha),$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \sigma,$$

$$\sum_1^n \sigma = Q,$$

имеем

$$[AA] = \frac{1}{3} \left( 2Q - \frac{R^2}{2n} \right);$$

$$K_B = -\frac{6n \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2}.$$

Обозначая

$$B = -\frac{2n \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2},$$

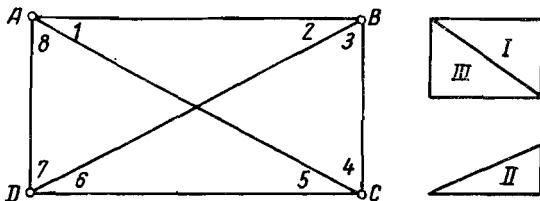
имеем

$$\left. \begin{aligned} (a_k)'' &= (2\alpha_k + \beta_k) B - \frac{R \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2} \\ (b_k)'' &= -(2\beta_k + \alpha_k) B - \frac{R \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2} \\ (c_k)'' &= (\beta_k - \alpha_k) B + 2 \cdot \frac{R \cdot W'_B}{4n \cdot Q - R^2} \end{aligned} \right\}. \quad (413)$$

Формулы (412) и (413) и являются рабочими, с прибавлением к ним

$$R = \sum_1^n (\beta - \alpha); \quad Q = \sum_1^n (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

**Геодезический четырехугольник.** Назовем углы четырехугольника  $ABCD$  так, как показано на черт. 282. В первую группу отнесем условия, даваемые треугольниками  $ABC$ ,  $BCD$  и  $ADC$ .



Черт. 282

При решении этой группы разобьем ее в свою очередь на две подгруппы: в первую подгруппу включим условия треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , т. е. условия I и III треугольника, а во вторую группу отнесем только условие треугольника  $BCD$ , значащегося на черт. 282 под номером II. Из первой группы, конечно, получаем непосредственно

$$(1)' = (2)' = (3)' = (4)' = -\frac{w_1}{4},$$

$$(5)' = (6)' = (7)' = (8)' = -\frac{w_3}{4}.$$

где  $w_1$  и  $w_3$  — невязки треугольников  $ABC$  (I) и  $ACD$  (III). Исправим этими поправками углы четырехугольника и вычислим после этого невязку в треугольнике  $BCD$  (II), которую назовем через  $w'_2$ . Нетрудно видеть, что

$$w'_2 = w_2 - \frac{w_1 + w_3}{2}.$$

Теперь, применяя правило, указанное в § 89, легко замечаем, что преобразованные коэффициенты в уравнении второй подгруппы:  $(3) - (4) - (5) + (6) + w_2 = 0$  будут таковы

$$-\frac{1}{2} \text{ при } (1) \text{ и } (2);$$

$$+\frac{1}{2} \text{ при } (3), (4), (5) \text{ и } (6);$$

$$-\frac{1}{2} \text{ при } (7) \text{ и } (8)$$

Это преобразованное уравнение второй подгруппы напишется так

$$-\frac{1}{2} (1)'' - \frac{1}{2} (2)'' + \frac{1}{2} (3)'' + \frac{1}{2} (4)'' + \frac{1}{2} (5)'' + \frac{1}{2} (6)'' - \\ - \frac{1}{2} (7)'' - \frac{1}{2} (8)'' + w'_2 = 0.$$

Отсюда

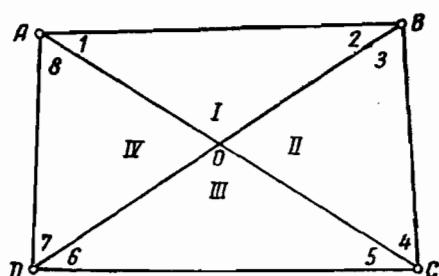
$$2k + w'_2 = 0; \quad k = -\frac{w'_2}{2}; \\ (1)'' = (2)'' = +\frac{w'_2}{4}; \\ (3)'' = (4)'' = (5)'' = (6)'' = -\frac{w'_2}{4}; \\ (7)'' = (8)'' = +\frac{w'_2}{4}.$$

Называя теперь через  $i'_k$  сумму поправок угла из наших двух подгрупп, напишем такие формулы для вычисления поправок из первой группы, в которую, следовательно, относим три условия треугольников  $ABC$ ,  $BCD$  и  $ACD$

$$\left. \begin{aligned} (1)' &= (2)' = -\frac{w_1}{4} + \frac{w'_2}{4} \\ (3)' &= (4)' = -\frac{w_1}{4} - \frac{w'_2}{4} \\ (5)' &= (6)' = -\frac{w_3}{4} - \frac{w'_2}{4} \\ (7)' &= (8)' = -\frac{w_3}{4} + \frac{w'_2}{4} \\ w'_2 &= w_2 - \frac{w_1 + w_3}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (414)$$

Формулы (414) указывают такой порядок действий: сначала в каждом из двух треугольников  $ABC$  и  $ACD$ , не имеющих общих углов, исправляем углы четвертью его невязки, взятой с обратным знаком; после этого углы этих же двух треугольников, не входящие во второй треугольник  $BCD$ , получают добавочную поправку  $+\frac{w'_2}{4}$ , а углы тех же треугольников  $ABC$  и  $ACD$ , входящие во второй треугольник  $BCD$ , получают добавочную поправку  $-\frac{w'_2}{4}$ .

После получения первичных поправок по формулам (414) с исправленными ими углами составим боковое условное уравнение в нашем



Черт. 283

четырехугольнике, но принимая за полюс фиктивную точку  $O$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника (черт. 283). При решении уравнений второй группы, представленной только одним этим боковым уравнением, вообразим, что условия фигур (т. е. условия первой группы) составлены иначе, из иных фигур, чем то было сделано при получении выражений (414).

Именно, условие первое в первой группе напишем из фигуры  $ABODC$  (накрест лежащие треугольники  $I$  и  $III$  на черт. 283); второе условие первой группы напишем из фигуры  $BCOAD$  (накрест лежащие треугольники  $II$  и  $IV$  на черт. 283); третье условие напишем из четырехугольника  $ABCD$ .

Мы имеем

$$\left. \begin{array}{l} a \dots (1)'' + (2)'' - (5)'' - (6)'' = 0; \\ b \dots (3)'' + (4)'' - (7)'' - (8)'' = 0; \\ c \dots (1)'' + (2)'' + (3)'' + (4)'' + (5)'' + (6)'' + (7)'' + (8)'' = 0 \end{array} \right\} \quad (415)$$

Сюда присоединяется полюсное уравнение в виде

$$\Delta_1(1)'' - \Delta_2(2)'' + \Delta_3(3)'' - \Delta_4(4)'' + \Delta_5(5)'' - \Delta_6(6)'' + \Delta_7(7)'' - \Delta_8(8)'' + W'_B = 0, \quad (416)$$

причем под  $W'_B$  понимается свободный член полюсного уравнения, составленного с углами, исправленными определяемыми формулами (414) первичными поправками, а под  $\Delta_k$  — изменение логарифма синуса угла с номером  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ). Системе (415) соответствуют такие значения вспомогательных коррелят:

$$\rho_{1 \cdot 1} = -\frac{[ax]}{4}; \quad \rho_{1 \cdot 2} = -\frac{[bx]}{4}; \quad \rho_{1 \cdot 3} = -\frac{[cx]}{8} = -\frac{[\alpha]}{8} \quad (417)$$

Через  $\alpha$  названы коэффициенты уравнения (416).

Вычислив по (417) величины  $\rho_{1 \cdot 1}$ ,  $\rho_{1 \cdot 2}$ ,  $\rho_{1 \cdot 3}$ , что делается очень просто, так как коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  равны или  $\pm 1$  или нулю, далее выводим коэффициенты  $A$  преобразованного полюсного уравнения по формуле

$$A_k = a_k \rho_{1 \cdot 1} + b_k \rho_{1 \cdot 2} + c_k \rho_{1 \cdot 3}. \quad (418)$$

Далее имеем

$$\left. \begin{array}{l} k_B = -\frac{W'_B}{[AA]}; \\ v''_k = (-1)^{k+1} \cdot \Delta_k \cdot k_B \end{array} \right\}. \quad (419)$$

Вычисление формул (416), (417) и (418) следует выполнять в схеме, представленной табл. 56.

Конечно, выражения в графе 8 табл. 56 приведены лишь для сведения; в вычислениях эти выражения не записывают в схеме, а прямо заполняют графу числами согласно формуле (418), написанной в заголовке этой графы 8.

Приведенный способ уравнивания геодезического четырехугольника по углам сперва вычислением формул (414) и затем заполнением табл. 56 представляется одним из простейших и удобнейших.

Таблица 56

| Номера углов | $a$   | $b$ | $c$ | $\alpha$     | $a\alpha$    | $b\alpha$    | $A_k = a_{k\rho_{1.1}} + b_{k\rho_{1.2}} + c_{k\rho_{1.3}}$ | $\Lambda A$ | $v$ |
|--------------|-------|-----|-----|--------------|--------------|--------------|---|-------------|-----|
| 1            | 2     | 3   | 4   | 5            | 6            | 7            | 8   | 9           | 10  |
| 1            | + 1   |     | + 1 | + $\Delta_1$ | + $\Delta_1$ |              | $\Delta_1 - \rho_{1.1} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 2            | + 1   |     | + 1 | - $\Delta_2$ | - $\Delta_2$ |              | $\Delta_2 - \rho_{1.1} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 3            |       | + 1 | + 1 | + $\Delta_3$ |              | + $\Delta_3$ | $\Delta_3 + \rho_{1.2} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 4            |       | + 1 | + 1 | - $\Delta_4$ |              | - $\Delta_4$ | $\Delta_4 + \rho_{1.2} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 5            | - - 1 |     | + 1 | + $\Delta_5$ | - $\Delta_5$ |              | $\Delta_5 - \rho_{1.1} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 6            | - - 1 |     | + 1 | - $\Delta_6$ | + $\Delta_6$ |              | $\Delta_6 - \rho_{1.1} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 7            |       | - 1 | + 1 | + $\Delta_7$ |              | - $\Delta_7$ | $\Delta_7 - \rho_{1.2} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| 8            |       | - 1 | + 1 | - $\Delta_8$ |              | + $\Delta_8$ | $\Delta_8 - \rho_{1.2} + \rho_{1.3}$                        |             |     |
| Суммы        |       |     |     | $[\alpha]$   | $[a\alpha]$  | $[b\alpha]$  | .   | $[AA]$      |     |

$$\rho_{1.1} = - \frac{[a\alpha]}{4}$$

$$\rho_{1.2} = - \frac{[b\alpha]}{4}$$

$$\rho_{1.3} = - \frac{[\alpha]}{8}$$

$$W'_B = \lg \frac{\sin [1 + (1)'] \sin [3 + (3)'] \sin [5 + (5)'] \sin [7 + (7)']}{\sin [2 + (2)'] \sin [4 + (4)'] \sin [6 + (6)'] \sin [8 + (8)']}.$$

$$k_B = - \frac{W'_B}{[AA]}, \quad v''_k = (-1)^{k+1} \alpha_k k_B.$$

### § 91. Дополнительные замечания по применению двухгруппового метода уравнивания. Вставка цепи между двумя заданными пунктами

Нередко в практике возникает задача уравнивания углов треугольников  $AOa$ ,  $aOb$ ,  $bOB$ , вставленных между двумя сторонами  $OA$  и  $BO$  триангуляции высшего класса (черт. 284). Конечно, эта задача совершенно совпадает с рассмотренной уже задачей уравнивания центральной системы.

Предполагаем, что предварительным уравниванием станции  $O$  достигнуто равенство суммы углов  $c_1 + c_2 + c_3$  с углом  $AOB$ , определенным окончательно из триангуляции высшего класса. Далее применяем сперва формулы (412) для нахождения первичных поправок и затем формулы (413) для вычисления вторичных поправок, причем свободный член  $W'_B$  определяется так

$$W'_B = \lg \frac{\sin [a_1 + (a_1)'] \sin [a_2 + (a_2)'] \sin [a_3 + (a_3)']}{\sin [b_1 + (b_1)'] \sin [b_2 + (b_2)'] \sin [b_3 + (b_3)']} - [\lg \overline{OB} - \lg \overline{OA}]$$

Часто в практике возникает задача вставки ряда треугольников низшего класса между двумя твердыми сторонами триангуляции высшего класса, для которых даны длины, дирекционные углы и окончательные координаты обоих концов каждой стороны. Эта задача

полностью рассмотрена в § 89, конечно, при этом там дан наиболее простой и целесообразный путь ее решения.

Но иногда цепь треугольников II или III класса, начинаясь от твердых пунктов и стороны высшего разряда, по тем или иным причинам не доводится до твердо установленных пунктов и стороны высшего разряда, а заканчивается на последней стороне самой этой цепи II и III классов; в этих случаях длина такой стороны тщательно определяется или путем измерения базиса и составления особой базисной сети, или путем измерения этой стороны в порядке прокладки вдоль нее точного полигонометрического хода I или II разряда. В силу требований срочности выполнения топографических работ, такую цепь приходится уравнивать, не дожидаясь примыкания ее к общей триангуляции, чтобы

дать рабочие координаты ее пунктов; при этом имеют дело с условиями фигур и условием базисов.

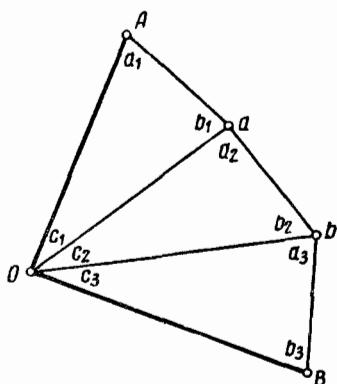
В маркшейдерских работах, при инженерных изысканиях (речных), и т. д., могут быть случаи прокладки цепей III и IV классов, примыкающих друг к другу последовательно, причем вставка таких цепей в общегосударственную триангуляцию передко отодвигается на более или менее продолжительный срок. Но тогда такие цепи начинают и кончают основными их сторонами, т. е. сторонами, длины которых тщательно определены или из специальных базисных сетей или путем применения точной полигонометрии. Во всех этих случаях также приходится уравнивать цепь за условия фигур и за условия базиса.

Эта задача исчерпывающе рассмотрена в § 83, но следует лишь несколько изменить формулы и обозначения. Именно, промежуточные углы обозначим через  $c$ , связующие — через  $a$  и  $b$ . Получив уравненные плоские углы, с ними вычисляют свободный член  $W'_b$  базисного условия. Далее заполняют графы схемы, представленной табл. 57.

Наконец, рассмотрим случай вставки цепи треугольников между твердыми пунктами  $A$  и  $B$ , представленный на черт. 285.

Конечно, всегда, при возможности к тому, на пунктах  $A$  и  $B$  измеряют примычные углы  $P_1$  и  $P_2$ , но могут быть случаи, когда измеряется только один из этих углов или когда не измеряется ни один из примычных углов (например, из-за полной утраты сигналов на пунктах основной триангуляции). Если оба примычных угла не измерены, то уравнивание углов цепи сводится, конечно, к распределению поровну незвязки каждого треугольника на три его угла. Измерение одного примычного угла ведет к добавочному условию, чтобы проекция хода  $AbacdefB$  (или — все равно — хода  $AadfB$ ) на перпендикуляр к диагонали  $AB$  была бы равна нулю. Измерение второго примычного угла приводит к условию дирекционных углов.

Уравняем углы треугольников сперва только за условия фигур. Далее примем для стороны  $Ab$  длину  $s_0$ , приближенную, но достаточно близкую к истинной, например, ту длину для  $Ab$ , которой пользовались при определении приведений (с ошибкой до 1 : 500).



Черт. 284

Таблица 57

| №№<br>треугольни-<br>ков | Углы                    |  | Поправки<br>(вторичные) |  |
|--------------------------|-------------------------|--|-------------------------|--|
| I                        | $a_1$<br>$b_1$<br>$c_1$ | $\frac{2\alpha_1 + \beta_1}{\beta_1 - \alpha_1}$ |                         | $\frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2}$<br>$(\alpha_1 + \beta_1)^2$ |
| II                       | $a_2$<br>$b_2$<br>$c_2$ | $\frac{2\alpha_2 + \beta_2}{\beta_2 - \alpha_2}$ |                         | $\frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2}$<br>$(\alpha_2 + \beta_2)^2$ |
| ⋮                        | ⋮                       | ⋮  | ⋮                       | ⋮  |
| n                        | $a_n$<br>$b_n$<br>$c_n$ | $\frac{2\alpha_n + \beta_n}{\beta_n - \alpha_n}$ |                         | $\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}$<br>$(\alpha_n + \beta_n)^2$ |

$$K_B = -\frac{W_B'}{2Q}; \quad Q = \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \alpha_k \beta_k + \beta_k^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k + \beta_k)^2 + \alpha_k^2 + \beta_k^2].$$

$$(\alpha_k)'' = (2\alpha_k + \beta_k) K_B,$$

$$(b_k)'' = -(2\beta_k + \alpha_k) K_B,$$

$$(c_k)'' = (\beta_k - \alpha_k) K_B.$$

Рассчитаем по данным координатам  $A$  и  $B$  дирекционный угол  $T'_{AB}$  и расстояние  $AB$  с полной точностью по формуле:

$$\operatorname{tg} T'_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \quad AB = \frac{y_B - y_A}{\sin T'_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{\cos T'_{AB}} = S.$$

Далее сообразим угол  $T_0$  направления  $Ab$  с диагональю  $AB$ , отсчитываемый от направления с  $A$  на  $B$  по ходу часовой стрелки, по такой формуле

$$T_0 = T'_{AC} - T'_{AB} - P_1 - a_1 - (a_1).$$

Если принять теперь направление с  $A$  на  $B$  за меридиан, то  $T_0$  будет отнесен как раз для стороны  $Ab$  к такому меридиану. Приняв  $A$  за начало координат, отираясь от длины  $s_0$  и дирекционного угла  $T_0$  для стороны  $Ab$ , вычисляем с углами, исправленными первичными поправками, условные дирекционные углы и длины элементов ходовой линии  $AbacdefB$ , показанной пунктиром на черт. 285; после этого вычисляем в новой системе координат абсциссы и ординаты точек  $b, a, c, d, e, f, B$ . Нужно иметь теперь в виду, что в уравнениях (380)

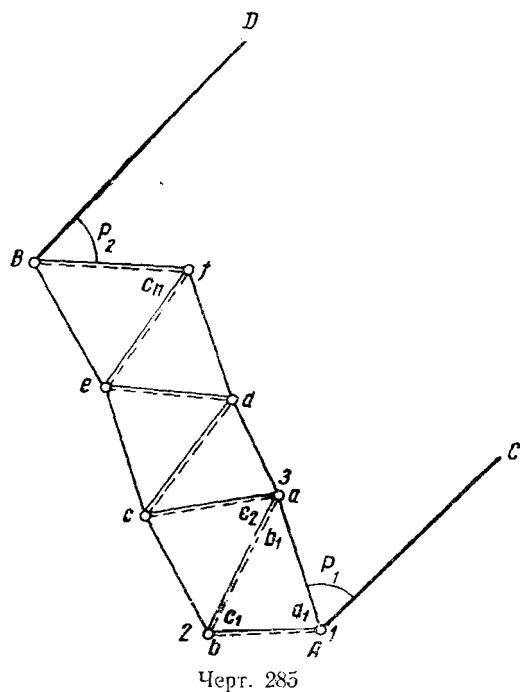
и (379) § 83 коэффициенты  $x_n - x_k$  и  $y_n - y_k$  суть  $\sum_k^n \Delta x$  и  $\sum_k^n \Delta y$ , вычисленные с углами, первично исправленными, и с принятием длины, данной для основной или выходной стороны ряда. Это замечание не

имеет никакого значения в общем случае, когда эта выходная сторона имеет безупречную длину. Но в данном случае все коэффициенты типа

$\sum_k^n \Delta x$  и  $\sum_k^n \Delta y$  будут ошибочны пропорционально относительной ошибке в  $s_0$ . Однако, пропорционально этой относительной ошибке в  $s_0$  будет ошибоч-

на и  $\sum_1^n \Delta y_k$ . Так как свободный член уравнения для ординаты в данном случае вследствие равенства нулю ординат точек

$A$  и  $B$  просто равен  $\sum_1^n \Delta y_k$ , то, очевидно, что произвольность выбора  $s_0$  не играет роли в составлении в данном случае условного уравнения по углам, доставляемым углом  $P_1$ .



Черт. 285

Назовем углы в треугольнике с номером  $k$ : промежуточный через  $c_k$ , связующие через  $a_k$  и  $b_k$ ; условные, если вычисленные координаты назовем через  $y^0$  и  $x^0$ ; тогда напишем условие ординат в таком виде

$$\begin{aligned} & [\alpha_1(a_1)'' - \beta_1(b_1)''] (y^0_B - y^0_2) + [\alpha_2(a_2)'' - \beta_2(b_2)''] (y^0_B - y^0_{n+1}) + \dots + \\ & + [\alpha_n(a_n)'' - \beta_n(b_n)''] (y^0_B - y^0_{n+1}) - \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (x^0_B - x^0_2) (c_1)'' + \\ & + \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (x^0_B - x^0_3) (c_2)'' + \dots \pm (c_n)'' (x^0_B - x^0_{n+1}) \cdot \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} + \\ & + (y^0_B - y^0_A) \cdot 10^6 \cdot M = 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении под  $n$  понимается число треугольников цепи; точка  $A$  имеет номер первый, точка  $B$  — номер  $n+2$ ; но отметим, что это уравнение написано, предполагая безошибочность  $T_0$ . Ошибочность  $T_0$  на  $\Delta T_c$  обязывает нас ввести в уравнение ординаты добавочный член, равный:

$$+ (x^0_B - x^0_A) \Delta T''_0 \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} = - (x^0_B - x^0_A) \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} [(P_1)'' + (a_1)''].$$

Окончательно уравнение ординаты напишется так

$$\begin{aligned}
 & - (x_B^0 - x_A^0) \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (P_1)'' - (x_B^0 - x_A^0) \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (a_1)'' + [z_1 (a_1)'' - \\
 & - \beta_1 (b_1)''] (y_B^0 - y_{2n}^0) + [z_2 (a_2)'' - \beta_2 (b_2)''] (y_B^0 - y_{3n}^0) + \dots + [z_n (a_n)'' - \\
 & - \beta_n (b_n)''] (y_B^0 - y_{(n+1)}^0) - \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (x_B^0 - x_{2n}^0) (c_1)'' + \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (x_B^0 - \\
 & - x_{3n}^0) (c_2)'' + \dots + \\
 & \pm (c_n)'' (x_B^0 - x_{(n+1)}^0) \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} + (y_B^0 - y_A^0) \cdot 10^6 \cdot M = 0. \quad (420)
 \end{aligned}$$

Условие дирекционных углов напишется так

$$\begin{aligned}
 & - (P_1)'' - (a_1)'' - (c_1)'' + (c_2)'' - (c_3)'' + \dots + (c_n)'' + (P_2)'' + \\
 & + T_{BD}^e - T_{BD}' = 0. \quad (421)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{В (421): } T_{BD}^e &= T_{AC}' - P_1 - a_1 - (a_1)' - c_1 - (c_1)' + \\
 & + c_2 + (c_2)' + \dots + P_2.
 \end{aligned}$$

В уравнения (420) и (421) соответственно поправки углов  $c$  и самые эти углы входят со знаком плюс, если они лежат влево от ходовой линии, и со знаком минус, если они приходятся вправо от ходовой линии. Знаки при  $(P_1)$ ,  $(a_1)$ ,  $(P_2)$  надо сообразить каждый раз по чертежу. Переход от (420) и (421) к двум нормальным уравнениям с преобразованными коэффициентами совершается так: назовем коэффициент при  $(P_1)''$  в (420) через  $B_0$ , а коэффициент при  $(P_1)''$  в (421) через  $A_0$ , коэффициент же при  $(P_2)''$  — через  $A_{3n+1}$ . Размещая в таблице условных уравнений II группы углы по треугольникам, по каждому треугольнику выводим среднее арифметическое из коэффициентов при поправках его углов в данном условном уравнении; после этого в каждом треугольнике берем уклонения коэффициентов при поправках углов этого треугольника в данном условном уравнении от среднего значения тех же коэффициентов в том же треугольнике. Эти уклонения и будут коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3\dots$ , или соответственно  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3\dots$  Нужно первым поставить в таблице условие (421), а вторым — условие (420). Коэффициенты и свободный член уравнения (421) должно предварительно умножить на три. В этот расчет не войдут коэффициенты  $A_0$ ,  $B_0$  и  $A_{3n+1}$  — они остаются без изменения. Нормальные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \{[AA] + A_0^2 + A_{3n+1}^2\} K_A + \{[AB] + A_0 B_0\} K_B + 3W'_A &= 0; \\
 \{[AB] + A_0 B_0\} K_A + \{[BB] + B_0^2\} K_B + W'_B &= 0.
 \end{aligned}$$

Получение вторичных поправок выполняется по известным общим правилам.

До самого последнего времени нахождение вторичных поправок и при уравнивании центральной системы — полной и неполной, — и при уравнивании четырехугольника, и при решении базисного условия выпол-

няли, делая всегда произвольное допущение, что в боковом условии (или базисном), составленном с первично исправленными углами и доставляющем единственное уравнение II группы, поправки связующих углов данного треугольника равны по величине, но противоположны по знаку. Конечно, это ни на чем не основанное допущение, противоречащее геометрическому смыслу. При этом допущении

$$(a_k)'' = -(b_k)'' = -\frac{W'_B}{\sum_1^n (\alpha_k + \beta_k)^2} (\alpha_k + \beta_k);$$

$$(c_k)'' = 0.$$

Конечно, этот прием должен быть в настоящее время забракован, хотя и имеются до сих пор его защитники. Те простые, но совершенно строгие приемы, которые были указаны в настоящем и в предыдущем параграфах для нахождения вторичных поправок в перечисленных случаях, должны войти в практику создания геодезической основы для каких угодно целей; препятствий к этому нет никаких. Точно так же, при вставке цепи между сторонами с данными их длинами и азимутами, относили в первую группу условия фигур и условие дирекционных углов и давали правила получения первичных поправок; при решении же базисного условия опять вводили для отыскания вторичных поправок то же произвольное допущение

$$(a_k)'' = -(b_k)'',$$

хотя нет ничего проще, как применить строгое решение.

При вставке цепи между двумя точками относили в первую группу условия фигур и условие дирекционных углов, или так называемое условие полигона, и давали затем довольно сложные правила для определения первичных поправок; условие ординаты совсем не решали, т. е. вторичных поправок совсем не определяли, а самое это условие лишь приводили в курсах и статьях (Шилов, Граур), но совсем в неверном виде.

Думается, что нами дан в настоящем параграфе наиболее простой и совершенно строгий прием уравнивания углов при вставке цепи между двумя данными точками.

В заключение напомним, что уравнения для определения вспомогательных коррелат  $\varrho$  имеют тот же вид, что и нормальные уравнения первой группы, но только  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_r$  заменяются соответственно через  $[az], [bx], [cz] \dots [rx], [a^2], [b^2], [c^2], \dots [r^2], [ay], [by], [cy] \dots [ry]$ , причем  $\alpha$  — коэффициенты в первом условном уравнении II группы;  $\beta$  — коэффициенты во втором условном уравнении II группы и т. д.

Множители  $\varrho$  (или вспомогательные коррелаты) выражаются функционально через  $[az], [bx], [cz] \dots$  или через  $[a^2], [b^2], [c^2] \dots$  так же, как коррелаты первой группы условных уравнений — через их свободные члены  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_r$ .

## § 92. Уравнивание по методу Больца или по способу последовательных разложений по свободным членам

Изложенный выше метод двухгруппового уравнивания приложим все-таки к сетям сравнительно простого вида. Для приложения его к большим и сложным сетям требуется дальнейшее развитие и обобщение этого метода. Нужно, кроме того, иметь в виду, что государственная триангуляция очень большого государства развивается постепенно, включая в себя с каждым годом все новые и новые сети или покрывающие новые территории, или заменяющие давно построенные старые сети. Таким образом, обширная государственная триангуляция может находиться в состоянии постоянной обработки; прокладка новых ее полигонов заставляет выполнять новое переуравнивание всей сети; изменение тех или иных данных в ранее исполненных полигонах вынуждает также к новому переуравниванию всей сети. Как упростить этот процесс переуравнивания большой сети, как сделать, чтобы результаты уравнительных вычислений, выполненных ранее, не были бы просто отбрасываемы, а используемы при новом переуравнивании, тем значительно облегчая?

Известный геодезист Больц дал ответ на этот вопрос, предложив в 1923 г. свой способ уравнивания обширных сетей, характерной особенностью которого является выражение коррелат через свободные члены условных уравнений, причем добавление новых условий к уже уравненной сети вызывает необходимость лишь дополнять за их счет выражения коррелат, отвечающих прежде уравненной сети, и прибавить выражения новых коррелат через свободные члены и новых и старых условий.

Таким образом, прибавление новых условий лишь заставляет дополнить прежде выполненную работу, а отнюдь ее не отбрасывать. В метод Больца входят и датные им формулы, позволяющие в простой цепи получать поправки направлений и коррелаты механически, в виде линейных функций от свободных членов условий фигур. Сперва рассмотрим метод Больца выражения коррелат через свободные члены при разбиении сети на несколько групп, постепенно связываемых друг с другом в одно целое.

Пусть имеем две группы условных уравнений сети:

$$\left. \begin{array}{l} a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + \dots + a_m(m) + w_1 = 0 \\ b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + \dots + b_m(m) + w_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_1(1) + r_2(2) + r_3(3) + \dots + r_m(m) + w_r = 0 \\ \alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \dots + \alpha_m(m) + w_{\alpha} = 0 \\ \beta_1(1) + \beta_2(2) + \beta_3(3) + \dots + \beta_m(m) + w_{\beta} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v_1(1) + v_2(2) + v_3(3) + \dots + v_m(m) + w_v = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I группа (422)} \\ \text{II группа (423)} \end{array}$$

Поправка  $v_i$  выразится так

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \dots + r_i k_r + \alpha_i k_{\alpha} + \beta_i k_{\beta} + \dots + v_i k_v. \quad (424)$$

Подставив выражения (424) в (422) и (423), получим, как всегда, нормальные уравнения коррелат в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} [aa] k_1 + [ab] k_2 + \dots + [ar] k_r &= -w_1 - [a\alpha] k_1 - \\ &\quad - [a\beta] k_{II} - \dots - [av] k_v \\ [ab] k_1 + [bb] k_2 + \dots + [br] k_r &= -w_2 - [b\alpha] k_1 - \\ &\quad - [b\beta] k_{II} - \dots - [bv] k_v \\ [ar] k_1 + [br] k_2 + \dots + [rr] k_r &= -w_r - [r\alpha] k_1 - \\ &\quad - [r\beta] k_{II} - \dots - [rv] k_v \end{aligned} \right\}. \quad (425)$$

$$\left. \begin{aligned} [\alpha a] k_1 + [\alpha b] k_2 + \dots + [\alpha r] k_r + [\alpha \alpha] k_1 + [\alpha \beta] k_{II} + \\ \dots + [\alpha v] k_v + w_1 &= 0 \\ [\beta a] k_1 + [\beta b] k_2 + \dots + [\beta r] k_r + [\beta \alpha] k_1 + [\beta \beta] k_{II} + \\ \dots + [\beta v] k_v + w_{II} &= 0 \\ [\gamma a] k_1 + [\gamma b] k_2 + \dots + [\gamma r] k_r + [\gamma \alpha] k_1 + [\gamma \beta] k_{II} + \\ \dots + [\gamma v] k_v + w_v &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (426)$$

Обозначим правые части в уравнениях (425) через  $w'$  с соответствующими индексами; решая эти уравнения, получим в результате

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f_{1 \cdot 1} w'_1 + f_{1 \cdot 2} w'_2 + \dots + f_{1 \cdot r} w'_r \\ k_2 &= f_{2 \cdot 1} w'_1 + f_{2 \cdot 2} w'_2 + \dots + f_{2 \cdot r} w'_r \\ \dots & \\ k_r &= f_{r \cdot 1} w'_1 + f_{r \cdot 2} w'_2 + \dots + f_{r \cdot r} w'_r \end{aligned} \right\}, \quad (427)$$

где  $f$  — некоторые коэффициенты (весовые коэффициенты).

Если бы в уравнениях (427) все  $w'_i$  заменить каждое соответственно через  $w_i$ , то мы тогда вместо  $k_1, k_2, \dots, k_r$  получили бы  $k'_1, k'_2, \dots, k'_r$ , т. е. значения коррелат, удовлетворяющие только первой группе условных уравнений (422).

Чтобы получить окончательные значения коррелат I группы, мы подставим в (427) вместо  $w'$  правые части уравнений (425). Будем тогда иметь:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f_{1 \cdot 1} w_1 + f_{1 \cdot 1} [a\alpha] k_1 + f_{1 \cdot 1} [a\beta] k_{II} + \dots + f_{1 \cdot 1} [av] k_v + \\ &\quad + f_{1 \cdot 2} w_2 + f_{1 \cdot 2} [b\alpha] k_1 + f_{1 \cdot 2} [b\beta] k_{II} + \dots + f_{1 \cdot 2} [bv] k_v + \\ &\quad + \dots + \dots + \\ &\quad + f_{1 \cdot r} w_r + f_{1 \cdot r} [r\alpha] k_1 + f_{1 \cdot r} [r\beta] k_{II} + \dots + f_{1 \cdot r} [rv] k_v \\ k_2 &= f_{2 \cdot 1} w_1 + f_{2 \cdot 1} [a\alpha] k_1 + f_{2 \cdot 1} [a\beta] k_{II} + \dots + f_{2 \cdot 1} [av] k_v + \\ &\quad + f_{2 \cdot 2} w_2 + f_{2 \cdot 2} [b\alpha] k_1 + f_{2 \cdot 2} [b\beta] k_{II} + \dots + f_{2 \cdot 2} [bv] k_v + \\ &\quad + \dots + \dots + \\ &\quad + f_{2 \cdot r} w_r + f_{2 \cdot r} [r\alpha] k_1 + f_{2 \cdot r} [r\beta] k_{II} + \dots + f_{2 \cdot r} [rv] k_v \\ k_3 &= \dots \end{aligned} \right\}. \quad (428)$$

В выражениях (428) первый вертикальный ряд, очевидно, представляет собой  $k'_1$ , остальные же вертикальные ряды соответствовали бы уравнениям (427), если в них заменять  $w'_1, w'_2, \dots, w'_r$  соответственно через:

$$\begin{aligned}
 \rho_{1\cdot 1} &= f_{1\cdot 1}[ax] + f_{1\cdot 2}[bx] + \cdots + f_{1\cdot r}[rx] \\
 \rho_{1\cdot 2} &= f_{2\cdot 1}[ax] + f_{2\cdot 2}[bx] + \cdots + f_{2\cdot r}[rx] \\
 &\vdots \\
 \rho_{1\cdot r} &= f_{r\cdot 1}[ax] + f_{r\cdot 2}[bx] + \cdots + f_{r\cdot r}[rx] \\
 \rho_{II\cdot 1} &= f_{1\cdot 1}[a\beta] + f_{1\cdot 2}[b\beta] + \cdots + f_{1\cdot r}[r\beta] \\
 \rho_{II\cdot 2} &= f_{2\cdot 1}[a\beta] + f_{2\cdot 2}[b\beta] + \cdots + f_{2\cdot r}[r\beta] \\
 &\vdots \\
 \rho_{II\cdot r} &= f_{r\cdot 1}[a\beta] + f_{r\cdot 2}[b\beta] + \cdots + f_{r\cdot r}[r\beta] \\
 &\vdots \\
 \rho_{V\cdot 1} &= f_{1\cdot 1}[av] + f_{1\cdot 2}[bv] + \cdots + f_{1\cdot r}[rv] \\
 \rho_{V\cdot 2} &= f_{2\cdot 1}[av] + f_{2\cdot 2}[bv] + \cdots + f_{2\cdot r}[rv] \\
 &\vdots \\
 \rho_{V\cdot r} &= f_{r\cdot 1}[av] + f_{r\cdot 2}[bv] + \cdots + f_{r\cdot r}[rv]
 \end{aligned} \tag{429}$$

Очевидно, что подстановка выражений (429) в (428) даст

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k'_1 + \varrho_{I\cdot 1} k_I + \varrho_{II\cdot 1} k_{II} + \cdots + \varrho_{v\cdot 1} k_v \\ k_2 &= k'_2 + \varrho_{I\cdot 2} k_I + \varrho_{II\cdot 2} k_{II} + \cdots + \varrho_{v\cdot 2} k_v \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ k_r &= k'_r + \varrho_{I\cdot r} k_I + \varrho_{II\cdot r} k_{II} + \cdots + \varrho_{v\cdot r} k_v \end{aligned} \right\}. \quad (430)$$

Значения  $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'$ , должны быть получены из решения I группы нормальных уравнений, соответствующей I группе условных уравнений. Но это решение мы должны провести так, чтобы получить коррелаты  $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'$ , в виде линейных функций от  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_r$ , с попутным, следовательно, определением коэффициентов  $f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,r}; f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,r}; f_{r,1}, f_{r,2}, f_{r,3}, \dots, f_{r,r}$ . Это может быть осуществлено или известными приемами из способа наименьших квадратов [см. § 14 формулы (63) и (68)] или иными приемами. Известность этих множителей  $f$  позволяет из уравнений (429) определить все промежуточные коррелаты  $\rho$ . После этого по (430) будут определены все  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , если будут известны  $k_1, k_{II}, k_{III}, \dots, k_r$ .

Для определения  $k_1, k_{II}, k_{III}, \dots, k_v$ , т. е. коррелат II группы, подставим (430) в (426) и тогда получим

причем в (431)

$$\left. \begin{aligned}
 A_{I\cdot I} &= [\alpha x] + [\alpha a] \rho_{I\cdot 1} + [\alpha b] \rho_{I\cdot 2} + [\alpha c] \rho_{I\cdot 3} + \dots + [\alpha r] \rho_{I\cdot r} \\
 A_{I\cdot II} &= [\alpha \beta] + [\alpha a] \rho_{II\cdot 1} + [\alpha b] \rho_{II\cdot 2} + [\alpha c] \rho_{II\cdot 3} + \dots + [\alpha r] \rho_{II\cdot r} \\
 &\dots \\
 A_{I\cdot v} &= [\alpha v] + [\alpha a] \rho_{v\cdot 1} + [\alpha b] \rho_{v\cdot 2} + [\alpha c] \rho_{v\cdot 3} + \dots + [\alpha r] \rho_{v\cdot r} \\
 W_I &= w_I + [\alpha a] k'_1 + [\alpha b] k'_2 + [\alpha c] k'_3 + \dots + [\alpha r] k'_r \\
 A_{II\cdot I} &= [\beta x] + [\beta a] \rho_{I\cdot 1} + [\beta b] \rho_{I\cdot 2} + [\beta c] \rho_{I\cdot 3} + \dots + [\beta r] \rho_{I\cdot r} \\
 A_{II\cdot II} &= [\beta \beta] + [\beta a] \rho_{II\cdot 1} + [\beta b] \rho_{II\cdot 2} + [\beta c] \rho_{II\cdot 3} + \dots + [\beta r] \rho_{II\cdot r} \\
 &\dots \\
 W_{II} &= w_{II} + [\beta a] k'_1 + [\beta b] k'_2 + [\beta c] k'_3 + \dots + [\beta r] k'_r
 \end{aligned} \right\}. \quad (432)$$

Изложенное решение двух групп нормальных уравнений может быть названо общим их решением. Соответственно поставленной в начале параграфа задаче мы это решение должны провести так, чтобы получить все корреляты, как линейные функции свободных членов условных уравнений. В отношении коррелят  $k'_1, k'_2, \dots, k'$ , это достигается или неопределенным решением нормальных уравнений только I группы, или приемом, данным Больцем, если I группа относится только к условиям фигур в простой цепи (или в центральной системе).

Решая I группу нормальных уравнений, мы получаем

$$\left. \begin{array}{l} k'_1 = f_{1 \cdot 1} w_1 + f_{1 \cdot 2} w_2 + f_{1 \cdot 3} w_3 + \dots + f_{1 \cdot r} w_r \\ k'_2 = f_{2 \cdot 1} w_1 + f_{2 \cdot 2} w_2 + f_{2 \cdot 3} w_3 + \dots + f_{2 \cdot r} w_r \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ k'_r = f_{r \cdot 1} w_1 + f_{r \cdot 2} w_2 + f_{r \cdot 3} w_3 + \dots + f_{r \cdot r} w_r \end{array} \right\} \quad (433)$$

и вычисляем по (429) промежуточные коррелаты  $\rho$ . Подставим теперь (433) в выражения (432) для  $W_1, W_{\Pi}, \dots$ . Мы получим

$$\left. \begin{aligned} W_I &= w_I + \rho_{I,1} w_1 + \rho_{I,2} w_2 + \cdots + \rho_{I,r} w_r \\ W_{II} &= w_{II} + \rho_{II,1} w_1 + \rho_{II,2} w_2 + \cdots + \rho_{II,r} w_r \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned} \right\}. \quad (434)$$

Поэтому после получения величины  $\varphi$  следует получение по (434) свободных членов  $W_1, W_2, \dots$  опять-таки, как разложений по свободным членам, но уже I и II групп условных уравнений. Вычислив по (432) величины  $A$ , далее составляем преобразованные нормальные уравнения II группы, т. е. уравнения (431), в которых коэффициенты должны будут оказаться симметричными.

Сделаем теперь попутно такое замечание. Сравним выражения (429) для промежуточных коррелат  $\rho$  с уравнениями  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , ...,  $(i)$  ... § 88. Эти последние уравнения при так называемом неопределением их решений дадут для величин  $\rho$ , стоящих в них, в точности выражения (429). Поэтому, очевидно, коэффициенты  $A_{1,1}$ ,  $A_{1,2}, \dots, A_{1,n}$  в уравнениях (431) в точности равны соответственно коэффициентам  $[AA]$ ,  $[AB]$ ,

[AC]... в преобразованных нормальных уравнениях II группы § 88; конечно, не трудно видеть, что  $W_1, W_{II}, \dots$  формул (434) соответственно равны свободным членам первого, второго, третьего... уравнений в системе преобразованных нормальных уравнений II группы § 88. Одним словом, легко видеть, что коррелаты  $k_1, k_{II}, \dots, k_N$ , получаемые из (431), совпадают соответственно с коррелатами  $k'_1, k'_{II}, \dots, k'_N$ , преобразованной II группы по Крюгеру § 88. Но из (422), (423), (425) и (426) следует, что коррелаты  $k_1, k_{II}, \dots, k_N$ , получаемые из (431), суть те самые, которые получились бы из обычного решения одной общей системы нормальных уравнений, составленной вместе из уравнений (425) и (426), и соответствующей всей совокупности уравнений (422) и (423). Следовательно,  $k'_1, k'_{II}, \dots, k'_N$  получаемые в § 88 из решения только II преобразованной группы уравнений, имеют те же самые значения, что и коррелаты  $k''_1, k''_{II}, \dots, k''_N$ , фигурирующие в формулах (404) § 88. Другими словами, в § 88 мы могли бы не водить обозначений  $k'_1, k'_{II}, k'_{III}, \dots$  и  $k''_1, k''_{II}, k''_{III}, \dots$  и не различать  $k'_1$  от  $k''_1$ ,  $k'_{III}$  от  $k''_{III}$ ,  $k'_N$  от  $k''_N$ , а оставить и в (403) и в (404) одно обозначение  $k_1, k_{II}, k_{III}, \dots, k_N$ , соответствующее коррелатам уравнений (398), но при совместном общем решении обеих групп уравнений (397) и (398) § 88. Это замечание следует иметь в виду при применении двухгруппового уравнивания по Крюгеру.

Решение группы (431) в способе Больца должно быть выполнено опять-таки приемом, дающим коррелаты  $k_1, k_{11}, k_{111}, \dots, k_s$  в виде разложений по свободным членам, т. е. в виде

После получения выражений (435) обращаемся к (430) и вычисляем «дополнения» коррелат 1 группы, т. е. выражения

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{1,1} k_1 + \rho_{11,1} k_{11} + \cdots + \rho_{v,1} k_v, \\ \rho_{1,2} k_1 + \rho_{11,2} k_{11} + \cdots + \rho_{v,2} k_v, \\ \vdots \\ \rho_{1,r} k_1 + \rho_{11,r} k_{11} + \cdots + \rho_{v,r} k_v \end{array} \right\}, \quad (436)$$

которые также будут получены в виде разложений по свободным членам.

Итак, схема действий такова:

- 1) получение коррелат  $k'_1, k'_2, \dots, k'$ , по (433);
  - 2) вычисление промежуточных коррелат по (429);
  - 3) вычисление  $W_1, W_2, \dots$  по (434) и коэффициентов  $A$  по (432);
  - 4) составление и решение преобразованной II группы (431) нормальных уравнений, причем в результате получаем коррелаты II группы

в виде выражений (435), что легко достигается, если в этой группе не более двух уравнений;

- 5) вычисление дополнений коррелат  $k'_1, k'_2, \dots, k'_r$  I группы по (436);
- 6) получение окончательных выражений коррелат I группы по (430).

При заданных значениях свободных членов вычисляем коррелаты в числах и затем по (424) получаем поправки углов или направлений. В этом методе только последовательное проведение получения коррелат в виде разложений по свободным членам принадлежит Больцу, собственно же обоснование задачи принадлежит Крюгеру. Но далее мы приходим к такому пути обобщения теории Крюгера уравнивания в двух группах посредством приема, выдвинутого опять-таки впервые Больцем: мы можем нашу сеть разбить не на две, а на три, четыре и т. д. групп.

Решив первые две группы только что описанным приемом, далее отнесем эти обе группы в новую, первую группу, а третью группу будем считать за вторую. Тогда, очевидно, нам придется повторить решение задачи, но пункт 6 прежней программы заменяет уже выполнение пункта 1 новой программы; он уже выполнен, так как окончательные коррелаты первых двух групп обрацаются в коррелаты  $k'$ , в новой первой группе. Остальные пункты программы от 2 до 6 заметно облегчаются выполнением, так как обычно в III группу относят одно-два уравнения, и, кроме того, многие коэффициенты в (429) при вычислении новых вспомогательных коррелатов будут нулями. Решив в двух группах: I + II группы и III группу, далее считаем I + II + III группы за новую первую группу, а IV группу — за новую вторую, проделываем вновь решение задачи, и т. д.

Значение этого метода, разработанного Больцем на основе предшествовавших исследований Крюгера, является более чем важным при присоединении к исполненной большой сети новых рядов, новых сетей и новых полигонов; таково же его значение при внесении изменений в результаты измерений, исполненных ранее и уже использованных при первом уравнивании сети. Но необходимо, чтобы первое уравнивание сети, соответствующее ее построению на данный момент, было бы выполнено уже по методу Больца, т. е. с получением результатов в виде выражений для коррелат, представляющих каждое разложение коррелаты по свободным членам принятых при этом первом уравнивании условных уравнений. Тогда присоединения новых сетей и полигонов будут только давать новые группы уравнений, и работа по переуравниванию сети будет идти с использованием работы по первому уравниванию и сводиться к вычислению дополнений к прежним коррелатам и небольшого числа новых коррелатов.

Уравнивание всей сети I класса в целом, без разбивки ее на части, — вот та постановка дела, к которой мы должны стремиться, и, конечно, метод Больца обеспечивает теоретически проведение этой постановки. Но понятно, что в очень больших сетях этот метод достаточно тяжел и громоздок.

### § 93. Разложения Больца

Представим себе простую и свободную цепь треугольников, в которой при уравнивании отыскивают поправки направлений. Нормальные уравнения коррелат в такой цепи напишутся так



Зная числа  $N_i$ , по формуле  $\frac{2N_{i+1}}{N_i}$  мы можем вычислить старшие члены наших элиминационных уравнений. Решение уравнений (437) легко приводит нас к такой системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2N_2 k_1 - 2N_1 k_2 + N_1 w_1 &= 0 \\ 2N_3 k_2 - 2N_2 k_3 + N_2 w_2 + w_1 &= 0 \\ 2N_4 k_3 - 2N_3 k_4 + N_3 w_3 + N_2 w_2 + w_1 &= 0 \\ \cdot &\quad \cdot & \\ 2N_n k_{n-1} - 2N_{n-1} k_n + N_{n-1} w_{n-1} + N_{n-2} w_{n-2} + \cdots + \\ &\quad + N_2 w_2 + w_1 &= 0 \\ 2N_{n+1} k_n + \cdots + N_n w_n + N_{n-1} w_{n-1} + N_{n-2} w_{n-2} + \cdots + \\ &\quad + N_2 w_2 + w_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (438)$$

Из (438) находим

$$k_n = -\frac{w_1}{2N_{n+1}} - \frac{N_2}{2N_{n+1}} w_2 - \frac{N_3}{2N_{n+1}} w_3 - \dots - \frac{N_{n-1}}{2N_{n+1}} w_{n-1} - \frac{N_n}{2N_{n+1}}.$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= N_1 w_1 \\ W_2 &= N_2 w_2 + W_1 \\ W_3 &= N_3 w_3 + W_2 \\ &\dots \\ W_{n-1} &= N_{n-1} w_{n-1} + W_{n-2} \\ W_n &= N_n w_n + W_{n-1} \end{aligned} \right\}. \quad (439)$$

Пользуясь (439), перепишем (438) еще в таком виде

$$\left. \begin{array}{l} 2N_2 k_1 - 2N_1 k_2 = -W_1 \\ 2N_3 k_2 - 2N_2 k_3 = -W_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 2N_n k_{n-1} - 2N_{n-1} k_n = -W_{n-1} \\ 2N_{n+1} k_n = -W_n \end{array} \right\}. \quad (440)$$

Имея из последнего уравнения (440) выражение для  $k_n$  и подставляя его в предпоследнее из (440), получим выражение для  $k_{n-1}$  и т. д. Но для практических целей пользуются не расчетами по формулам (440), а готовыми выражениями коррелат через свободные члены, составленными Больцем и приводимыми им в особых таблицах. Мы приводим здесь часть этих таблиц, чтобы читатели видели их расположение и устройство. Табл. 58 для первой коррелаты  $k_1$  — рассчитана для ряда из 11 треугольников, потому что 12-й и все дальнейшие треугольники, сколько бы их ни было в цепи, уже не оказывают влияния на значение  $k_1$ ; табл. 58 для второй коррелаты рассчитана по той же причине для ряда, кончающегося 12 треугольником; табл. 59 для третьей коррелаты захватывает 13 треугольников ряда, и т. д.

Таблица 58

Первая коррелата  $k_1 =$ 

| 1<br>треуголь-<br>ник | 2<br>треуголь-<br>ника | 3<br>треуголь-<br>ника | 4<br>треуголь-<br>ника | 5<br>треуголь-<br>ников | 6<br>треуголь-<br>ников | 7<br>треуголь-<br>ников | 8<br>треуголь-<br>ников | 9<br>треуголь-<br>ников | 10<br>треуголь-<br>ников | 11 и до $\infty$<br>треуголь-<br>ников |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--|
| -0,16667              | -0,18750               | -0,19048               | -0,19091               | -0,19097                | -0,19098                | -0,19098                | -0,19098                | -0,19098                | -0,19098                 | -0,19098                               |
|                       | -0,06250               | -0,07143               | -0,07273               | -0,07292                | -0,07294                | -0,07295                | -0,07295                | -0,07295                | -0,07295                 | $w_1$                                  |
|                       |                        | -0,02381               | -0,02727               | -0,02778                | -0,02783                | -0,02786                | -0,02786                | -0,02786                | -0,02786                 | $w_2$                                  |
|                       |                        |                        | -0,00909               | -0,01042                | -0,01061                | -0,01064                | -0,01064                | -0,01064                | -0,01064                 | $w_3$                                  |
|                       |                        |                        |                        | -0,00347                | -0,00398                | -0,00405                | -0,00406                | -0,00406                | -0,00407                 | $w_4$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         | -0,00133                | -0,00152                | -0,00155                | -0,00155                | -0,00155                 | $w_5$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         | -0,00051                | -0,00058                | -0,00059                | -0,00059                 | $w_6$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         |                         | -0,00019                | -0,00022                | -0,00023                 | $w_7$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         | -0,00008                | -0,00009                 | $w_8$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         | -0,00003                | -0,00003                 | $w_9$                                  |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         |                         | -0,00001                 | $w_{10}$                               |
|                       |                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         |                         |                          | $w_{11}$                               |

Вторая коррелата  $k_2 =$ 

| 2<br>треуголь-<br>ника | 3<br>треуголь-<br>ника | 4<br>треуголь-<br>ника | 5<br>треуголь-<br>ников | 6<br>треуголь-<br>ников | 7<br>треуголь-<br>ников | 8<br>треуголь-<br>ников | 9<br>треуголь-<br>ников | 10<br>треуголь-<br>ников | 11<br>треуголь-<br>ников | 12 и до $\infty$<br>треуголь-<br>ников |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--|
| -0,06250               | -0,07143               | -0,07273               | -0,07292                | -0,07294                | -0,07295                | -0,07295                | -0,07295                | -0,07295                 | -0,07295                 | $w_1$                                  |
| -0,18750               | -0,21428               | -0,21818               | -0,21875                | -0,21883                | -0,21885                | -0,21885                | -0,21885                | -0,21885                 | -0,21885                 | $w_2$                                  |
|                        | -0,07143               | -0,08182               | -0,08333                | -0,08355                | -0,08359                | -0,08359                | -0,08359                | -0,08359                 | -0,08359                 | $w_3$                                  |
|                        |                        | -0,02727               | -0,03125                | -0,03183                | -0,03191                | -0,03193                | -0,03193                | -0,03193                 | -0,03193                 | $w_4$                                  |
|                        |                        |                        | -0,01042                | -0,01194                | -0,01215                | -0,01219                | -0,01220                | -0,01220                 | -0,01220                 | $w_5$                                  |
|                        |                        |                        |                         | -0,00398                | -0,00456                | -0,00464                | -0,00466                | -0,00466                 | -0,00466                 | $w_6$                                  |
|                        |                        |                        |                         |                         | -0,00152                | -0,00174                | -0,00177                | -0,00178                 | -0,00178                 | $w_7$                                  |
|                        |                        |                        |                         |                         |                         | -0,00058                | -0,00067                | -0,00068                 | -0,00068                 | $w_8$                                  |
|                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         | -0,00022                | -0,00025                 | -0,00026                 | $w_9$                                  |
|                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         |                         | -0,00008                 | -0,00010                 | $w_{10}$                               |
|                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         |                         | -0,00003                 | -0,00004                 | $w_{11}$                               |
|                        |                        |                        |                         |                         |                         |                         |                         |                          | -0,00001                 | $w_{12}$                               |

Таблица 59

Третья коррелата  $k_3$ 

| 3 тре-<br>угольника | 4 тре-<br>угольника | 5 тре-<br>угольников | 6 тре-<br>угольников | 7 тре-<br>угольников | 8 тре-<br>угольников | 9 тре-<br>угольников | 10 тре-<br>угольников | 11 тре-<br>угольников | 12 тре-<br>угольников | 13 и до $\infty$<br>тре-<br>угольников |
|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--|
| -0,02381            | -0,02727            | -0,02778             | -0,02785             | -0,02786             | -0,02786             | -0,02786             | -0,02786              | -0,02786              | -0,02786              | -0,02786 $w_1$                         |
| -0,07143            | -0,08182            | -0,08333             | -0,08355             | -0,08359             | -0,08359             | -0,08359             | -0,08359              | -0,08359              | -0,08359 $w_2$        |  |
| -0,19048            | -0,21818            | -0,22222             | -0,22281             | -0,22290             | -0,22290             | -0,22290             | -0,22290              | -0,22290              | -0,22290 $w_3$        |  |
| -0,07273            | -0,08333            | -0,08488             | -0,08511             | -0,08514             | -0,08514             | -0,08515             | -0,08515              | -0,08515              | -0,08515 $w_4$        |  |
| -0,02778            | -0,03183            | -0,03242             | -0,03251             | -0,03252             | -0,03252             | -0,03252             | -0,03252              | -0,03252              | -0,03252 $w_5$        |  |
|                     | -0,01061            | -0,01216             | -0,01238             | -0,01242             | -0,01242             | -0,01242             | -0,01242              | -0,01242              | -0,01242 $w_6$        |  |
|                     | -0,00405            | -0,00464             | -0,00473             | -0,00474             | -0,00474             | -0,00474             | -0,00474              | -0,00474              | -0,00474 $w_7$        |  |
|                     | -0,00155            | -0,00155             | -0,00177             | -0,00181             | -0,00181             | -0,00181             | -0,00181              | -0,00181              | -0,00181 $w_8$        |  |
|                     |                     |                      | -0,00059             | -0,00068             | -0,00068             | -0,00068             | -0,00068              | -0,00068              | -0,00068 $w_9$        |  |
|                     |                     |                      |                      | -0,00023             | -0,00023             | -0,00023             | -0,00023              | -0,00023              | -0,00023 $w_{10}$     |  |
|                     |                     |                      |                      |                      | -0,00009             | -0,00009             | -0,00009              | -0,00009              | -0,00009 $w_{11}$     |  |
|                     |                     |                      |                      |                      | -0,00003             | -0,00003             | -0,00003              | -0,00003              | -0,00003 $w_{12}$     |  |
|                     |                     |                      |                      |                      |                      | -0,00001             | -0,00001              | -0,00001              | -0,00001 $w_{13}$     |  |

Четвертая коррелата  $k_4$ 

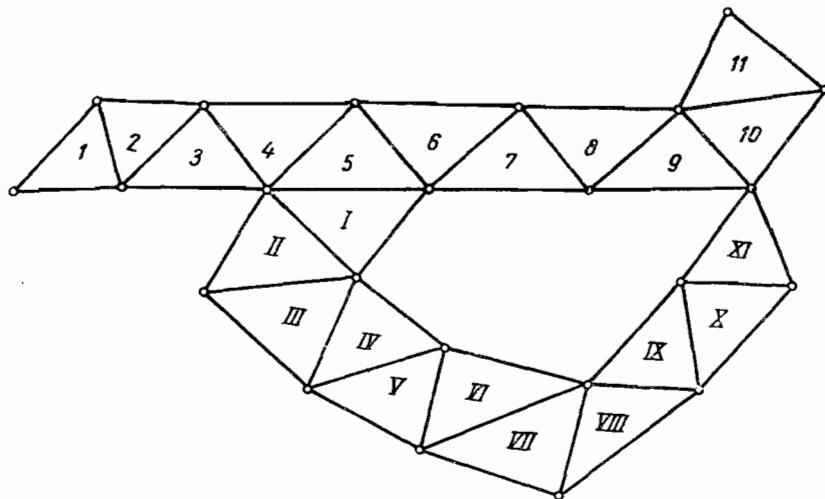
| 4 тре-<br>угольника | 5 тре-<br>угольников | 6 тре-<br>угольников | 7 тре-<br>угольников | 8 тре-<br>угольников | 9 тре-<br>угольников | 10 тре-<br>угольников | 11 тре-<br>угольников | 12 тре-<br>угольников | 13 тре-<br>угольников | 14 и до $\infty$<br>тре-<br>угольников |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--|
| -0,00909            | -0,01042             | -0,01061             | -0,01064             | -0,01064             | -0,01064             | -0,01064              | -0,01064              | -0,01064              | -0,01064 $w_1$        |  |
| -0,02727            | -0,03125             | -0,03183             | -0,03191             | -0,03193             | -0,03193             | -0,03193              | -0,03193              | -0,03193              | -0,03193 $w_2$        |  |
| -0,07273            | -0,08333             | -0,08488             | -0,08511             | -0,08514             | -0,08515             | -0,08515              | -0,08515              | -0,08515              | -0,08515 $w_3$        |  |
| -0,19091            | -0,21875             | -0,22281             | -0,22340             | -0,22349             | -0,22350             | -0,22351              | -0,22351              | -0,22351              | -0,22351 $w_4$        |  |
| -0,07292            | -0,08355             | -0,08511             | -0,08533             | -0,08536             | -0,08537             | -0,08537              | -0,08537              | -0,08537              | -0,08537 $w_5$        |  |
| -0,02785            | -0,03191             | -0,03251             | -0,03259             | -0,03261             | -0,03261             | -0,03261              | -0,03261              | -0,03261              | -0,03261 $w_6$        |  |
| -0,01064            | -0,01219             | -0,01242             | -0,01245             | -0,01245             | -0,01245             | -0,01245              | -0,01245              | -0,01245              | -0,01245 $w_7$        |  |
|                     | -0,00406             | -0,00466             | -0,00466             | -0,00474             | -0,00474             | -0,00474              | -0,00474              | -0,00474              | -0,00474 $w_8$        |  |
|                     | -0,00155             | -0,00155             | -0,00178             | -0,00181             | -0,00181             | -0,00181              | -0,00181              | -0,00181              | -0,00181 $w_9$        |  |
|                     |                      |                      | -0,00059             | -0,00068             | -0,00068             | -0,00068              | -0,00068              | -0,00068              | -0,00068 $w_{10}$     |  |
|                     |                      |                      |                      | -0,00023             | -0,00023             | -0,00023              | -0,00023              | -0,00023              | -0,00023 $w_{11}$     |  |
|                     |                      |                      |                      |                      | -0,00009             | -0,00009              | -0,00009              | -0,00009              | -0,00009 $w_{12}$     |  |
|                     |                      |                      |                      |                      | -0,00003             | -0,00003              | -0,00003              | -0,00003              | -0,00003 $w_{13}$     |  |
|                     |                      |                      |                      |                      |                      | -0,00001              | -0,00001              | -0,00001              | -0,00001 $w_{14}$     |  |

Треугольники, отделенные более чем 10 треугольниками от треугольника с номером, равным номеру коррелаты, не оказывают никакого влияния на эту коррелату. Вообще эти таблицы Больца дают безупречно выражения первых одиннадцати коррелат для цепи из произвольного числа треугольников. Если число  $n$  треугольников более 11, то тогда поступают по такому приему: коррелата последняя имеет такое же построение, как первая; коррелата предпоследняя — такое же построение, как вторая; коррелата перед предпоследней — такое же построение, как третья, и т. д. Но, конечно, при этом  $w_1$  заменяется через  $w_n$ ,  $w_2$  — через  $w_{n-1}$ ,  $w_3$  — через  $w_{n-2}$  и т. д.

Эти таблицы Больца, оформляющие его «разложения», позволяют найти выражения коррелат в простой и свободной цепи с каким угодно числом треугольников, без всяких вычислений, путем простых выписок. Конечно, это следует отнести к заслугам Больца. Напомним, что здесь идет речь об уравнивании направлений за условия фигур.

В большой и сложной сети мы всегда можем выделить простую цепь треугольников, захватывающую, однако, значительнейшую часть всех треугольников сети. Условие фигур в такой цепи и относим к первую группу, причем  $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_n$  находим сразу по таблицам Больца. Конечно, мы можем отнести в первую группу условие фигур для треугольников, образующих в нашей сети замкнутое внешнее кольцо.

Таким образом, всегда в первом уравнивании выполнение пункта I программы вычислений по методу Больца, приведенной в предыдущем параграфе, является делом совершение простым, требующим труда лишь на заполнение графа выписками из таблиц Больца.



Черт. 286

Заметим, что в центральной системе и в ряде треугольников, образующих замкнутое кольцо (полигон), достаточно при получении  $k'_i$  выписать выражение первой коррелаты, а затем, производя в этом выражении круговую замену величин  $w$ , получим и все остальные коррелаты. Нужно упомянуть, что в своих разложениях Больц не ограничивается только случаем одной простой цепи, условия фигур которой

представлены уравнениями (437). Если к цепи с треугольниками 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, 11 (черт. 286) примыкает одной стороной и еще одним пунктом цепь из треугольников I, II, III, ..., XI, то, отнеся первую цепь в первую группу, а вторую — во вторую группу, мы имеем возможность при выполнении пункта 4 программы вычислений, указанной в § 92, т. е. при получении выражений для коррелят второй группы  $k_1, k_{II}, k_{III}, \dots, k_{XI}$ , воспользоваться особыми разложениями, данными в других, составленных Больцем таблицах; это опять-таки приводит в соответствующих случаях к очень заметному сокращению вычислительного труда.

#### § 94. Пример уравнивания по способу Больца

Считая треугольник  $DBC$  — первым (черт. 286); треугольник  $EBD$  — вторым; треугольник  $ABE$  — третьим и треугольник  $ABC$  — четвертым, напишем таблицу условных уравнений в виде табл. 60.

В первую группу отнесем условия фигур в треугольниках I, II, III, IV; во вторую группу — условие фигуры в треугольнике  $EDC$  и в третью группу — два боковых условия.

Из таблиц Большца выписываем таблицу  $A$ .

Нормальное уравнение, соответствующее треугольнику  $EDC$ , напишется по чертежу сети так:

$$2k_1 + 2k_2 + \dots + 6k_5 + w_5 = 0.$$

Схему нормальных уравнений первых двух групп приведем в таблице  $B$ .

Теперь должно получить  $\rho_{5 \cdot 1}, \rho_{5 \cdot 2}, \rho_{5 \cdot 3}, \rho_{5 \cdot 4}$  согласно (429). Очевидно, достаточно в таблице  $A$  заменить  $w_1$  через  $+2$ ,  $w_2$  — через  $+2$ ,  $w_3$  и  $w_4$  — через нули, чтобы перейти от этой схемы к схеме вычисления  $\rho$ . Ясно, что  $[a\alpha], [b\alpha], [c\alpha]$  и  $[d\alpha]$  суть коэффициенты при  $k_5$  в графе таблицы  $B$ , озаглавленной символом (5). Вычисления  $\rho$  ведем в таблице  $C$ .

Таблица 60

| №<br>направ-<br>лений | $a$    | $b$    | $c$    | $d$    | $e$    | $f$    | $g$    |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                     |        |        |        |        |        |        |        |
| 2                     | -1     |        |        |        |        |        |        |
| 3                     | +1     | -1     |        |        |        |        |        |
| 4                     |        | +1     | -1     |        |        |        |        |
| 5                     |        | -1     |        |        | -1     | + 0,19 |        |
| 6                     | -1     | +1     |        |        |        | - 1,52 |        |
| 7                     | +1     |        |        |        | + 1    | + 1,33 |        |
| 8                     | -1     |        |        |        | -1     | + 3,73 |        |
| 9                     |        |        |        |        | + 1    | - 8,87 | + 8,87 |
| 10                    | +1     |        |        | -1     |        | + 5,14 | -11,73 |
| 11                    |        |        |        | +1     |        |        | + 2,86 |
| 12                    |        |        | -1     |        |        |        | + 3,01 |
| 13                    |        | -1     | +1     |        |        | + 5,98 | -12,94 |
| 14                    |        |        |        |        | -1     | - 9,03 | + 9,03 |
| 15                    |        | +1     |        |        | +1     | + 3,05 |        |
| 16                    |        |        |        | -1     |        |        | + 2,38 |
| 17                    |        |        | -1     | +1     |        |        | - 4,82 |
| 18                    |        |        | +1     |        |        |        | + 2,44 |
| $w$                   | + 1,13 | + 0,15 | - 1,30 | + 0,20 | - 0,39 | - 6,45 | + 8,45 |

Таблица A

|       | $w_1$     | $w_2$     | $w_3$     | $w_4$     |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $k_1$ | - 0,19091 | - 0,07273 | - 0,02727 | - 0,00909 |
| $k_2$ | - 0,07273 | - 0,21818 | - 0,08182 | - 0,02727 |
| $k_3$ | - 0,02727 | - 0,08182 | - 0,21818 | - 0,07273 |
| $k_4$ | - 0,00909 | - 0,02727 | - 0,07273 | - 0,19091 |

Таблица B

(5)

$$\begin{array}{l|l|l}
\begin{array}{l} -1 \cdot 6k_1 - 2k_2 - 2k_4 \\ + 6k_2 - 2k_1 - 2k_3 \\ + 6k_3 - 2k_2 - 2k_4 \\ + 6k_4 - 2k_3 - 2k_1 \\ + 6k_5 + 2k_1 + 2k_2 \end{array} & \begin{array}{l} + 2k_5 \\ + 2k_5 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} + w_1 = 0 \\ + w_2 = 0 \\ + w_3 = 0 \\ + w_4 = 0 \\ + w_5 = 0 \end{array}
\end{array}$$

Таблица C

|                    | - 2       | + 2       | 0 | 0 | $\rho$    |
|--------------------|-----------|-----------|---|---|-----------|
| $\rho_{5 \cdot 1}$ | - 0,38192 | - 0,14546 | - | - | - 0,52738 |
| $\rho_{5 \cdot 2}$ | - 0,14546 | - 0,43636 | - | - | - 0,58182 |
| $\rho_{5 \cdot 3}$ | - 0,05454 | - 0,16364 | - | - | - 0,21818 |
| $\rho_{5 \cdot 4}$ | - 0,01818 | - 0,05454 | - | - | - 0,07272 |

Далее по (432) и (434) вычисляем  $A$  и  $W_1$ 

$$A_{1 \cdot 1} = + 6 - 1,05476 - 1,16364 = + 3,78160;$$

$$W_1 = w_5 + \rho_{5 \cdot 1} w_1 + \rho_{5 \cdot 2} w_2 + \rho_{5 \cdot 3} w_3 + \rho_{5 \cdot 4} w_4;$$

$$W_1 = - 0,52738 w_1 - 0,58182 w_2 - 0,21818 w_3 - 0,07272 w_4 + w_5;$$

$$\begin{aligned} k_5 = - \frac{W_1}{A_{1 \cdot 1}} = & 0,13946 w_1 + 0,15385 w_2 + 0,05770 w_3 + \\ & + 0,01923 w_4 - 0,26444 w_5. \end{aligned}$$

Определив  $k_5$ , вычисляем дополнение коррелат  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'_3$ ,  $k'_4$  по (430); имеем

$$\text{дополнение } k'_1 = - 0,52738 k_5,$$

$$\text{, } \quad k'_2 = - 0,58182 k_5,$$

$$\text{, } \quad k'_3 = - 0,21818 k_5,$$

$$\text{, } \quad k'_4 = - 0,07272 k_5.$$

Сложив эти дополнения соответственно с значениями  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'_3$ ,  $k'_4$  (пользуясь, конечно, при этом таблицей A), получим в результате таблицу D коррелат первых пяти нормальных уравнений.

Таблица D

|       | $w_1$     | $w_2$     | $w_3$     | $w_4$     | $w_5$     |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $k_1$ | - 0,26444 | - 0,15385 | - 0,05770 | - 0,01923 | - 0,13946 |
| $k_2$ | - 0,15386 | - 0,30769 | - 0,11539 | - 0,03846 | + 0,15386 |
| $k_3$ | - 0,05770 | - 0,11539 | - 0,23077 | - 0,07693 | + 0,05770 |
| $k_4$ | - 0,01923 | - 0,03846 | - 0,07693 | - 0,19105 | + 0,01923 |
| $k_5$ | + 0,13946 | + 0,15385 | + 0,05770 | + 0,01923 | - 0,26444 |

Теперь выписываем схему всех семи нормальных уравнений нашей сети в таблице E.

Таблица E

|   | (6)                           | (7)         |  |
|---|-------------------------------|-------------|--|
| $+ 6k_1 - 2k_2 - 2k_4$  | $+ 2k_5 + 4,26k_6 - 11,73k_7$ | $+ w_1 = 0$ |  |
| $+ 6k_2 - 2k_1 - 2k_3 - 2k_5$                                     | $- 4,64k_6 + 12,04k_7$        | $+ w_2 = 0$ |  |
| $+ 6k_3 - 2k_2 - 2k_4 - 2k_5$                                     | $+ 5,98k_6 - 7,79k_7$         | $+ w_3 = 0$ |  |
| $+ 6k_4 - 2k_3 - 2k_1 - 2k_5$                                     | $- 5,14k_6 + 7,39k_7$         | $+ w_4 = 0$ |  |
| $+ 6k_5 + 2k_1 + 2k_2 - 2k_4$                                     | $+ 0,62k_6 - 0,16k_7$         | $+ w_5 = 0$ |  |
| $+ 4,26k_1 - 4,64k_2 + 5,98k_3 - 5,14k_4 + 0,62k_5 + 2497,3k_6$   | $- 292,51k_7$                 | $+ w_6 = 0$ |  |
| $- 11,73k_1 + 12,04k_2 - 7,79k_3 + 7,39k_4 - 0,16k_5 - 292,51k_7$ | $+ 494,86k_7$                 | $+ w_7 = 0$ |  |

При вычислении теперь  $\rho_{6 \cdot 1}, \rho_{6 \cdot 2}, \rho_{6 \cdot 3}, \rho_{6 \cdot 4}, \rho_{6 \cdot 5}$  мы, очевидно, в таблице D должны будем заменить  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  соответственно через  $[af], [bf], [cf], [df], [ef]$ , т. е. через числа, стоящие и подчеркнутые в вертикальной графе таблицы E, озаглавленной цифрой (6); точно так же при вычислении  $\rho_{7 \cdot 1}, \rho_{7 \cdot 2}, \rho_{7 \cdot 3}, \rho_{7 \cdot 4}, \rho_{7 \cdot 5}$ , мы должны заменить  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  в таблице D соответственно через  $[ag], [bg], [cg], [dg], [eg]$ , т. е. через числа, стоящие и подчеркнутые в графе (7) таблицы E; после умножений в столбцах таблицы D и складывания результатов по строкам этой таблицы, получаем  $\rho$ , значения которых приводятся в таблице F.

Таблица F

|                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $\rho_{6 \cdot 1} = - 0,57249$ | $\rho_{7 \cdot 1} = + 1,53483$ |
| $\rho_{6 \cdot 2} = + 0,38523$ | $\rho_{7 \cdot 2} = - 1,30964$ |
| $\rho_{6 \cdot 3} = - 0,65920$ | $\rho_{7 \cdot 3} = + 0,50748$ |
| $\rho_{6 \cdot 4} = + 0,63041$ | $\rho_{7 \cdot 4} = - 1,05315$ |
| $\rho_{6 \cdot 5} = - 0,03750$ | $\rho_{7 \cdot 5} = - 0,04857$ |

Теперь нужно будет выписать:

$$\left. \begin{aligned} W_6 &= w_6 + \rho_{6 \cdot 1} w_1 + \rho_{6 \cdot 2} w_2 + \rho_{6 \cdot 3} w_3 + \rho_{6 \cdot 4} w_4 + \rho_{6 \cdot 5} w_5 \\ W_7 &= w_7 + \rho_{7 \cdot 1} w_1 + \rho_{7 \cdot 2} w_2 + \rho_{7 \cdot 3} w_3 + \rho_{7 \cdot 4} w_4 + \rho_{7 \cdot 5} w_5 \end{aligned} \right\} \quad (T)$$

и вычислить:

$$\begin{aligned} A_{6 \cdot 6} &= + 249,73 + 4,26 p_{6 \cdot 1} - 4,64 p_{6 \cdot 2} + 5,98 p_{6 \cdot 3} - 5,14 p_{6 \cdot 4} + 0,62 p_{6 \cdot 5} \\ A_{6 \cdot 7} &= - 292,51 + 4,26 p_{7 \cdot 1} - 4,64 p_{7 \cdot 2} + 5,98 p_{7 \cdot 3} - 5,14 p_{7 \cdot 4} + 0,62 p_{7 \cdot 5} \\ A_{7 \cdot 6} &= - 292,51 - 11,73 p_{6 \cdot 1} + 12,04 p_{6 \cdot 2} - 7,79 p_{6 \cdot 3} + 7,39 p_{6 \cdot 4} - 0,16 p_{6 \cdot 5} \\ A_{7 \cdot 7} &= + 494,86 - 11,73 p_{7 \cdot 1} + 12,04 p_{7 \cdot 2} - 7,79 p_{7 \cdot 3} + 7,39 p_{7 \cdot 4} - 0,16 p_{7 \cdot 5}. \end{aligned}$$

причем должно быть:  $A_{6 \cdot 7} = A_{7 \cdot 6}$ .

Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} A_{6 \cdot 6} &= + 238,8981; \\ A_{6 \cdot 7} &= - 271,3886; \\ A_{7 \cdot 7} &= + 450,3601; \\ 238,8981 k_6 - 271,3886 k_7 + W_6 &= 0; \\ - 271,3886 k_6 + 450,3601 k_7 + W_7 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (441)$$

Решая эти два последних уравнения, легко получаем выражения  $k_6$  и  $k_7$  через  $W_6$  и  $W_7$ , а заменяя  $W_6$  и  $W_7$  по (T), приходим к окончательным выражениям  $k_6$  и  $k_7$ , в виде разложений по свободным членам  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7$ .

Именно мы имеем:

$$\begin{aligned} k_6 &= - 0,00051 W_6 - 0,0008 W_7; \\ k_7 &= - 0,0008 W_6 - 0,000704 W_7; \\ k_6 &= - 0,00094 w_1 + 0,00085 w_2 - 0,00007 w_3 + 0,00062 w_4 - \\ &\quad - 0,00002 w_5 - 0,00051 w_6 - 0,00080 w_7; \\ k_7 &= - 0,00062 w_1 + 0,00061 w_2 - 0,00017 w_3 + 0,00024 w_4 - \\ &\quad - 0,000004 w_5 - 0,0008 w_6 - 0,000704 w_7. \end{aligned}$$

Далее следует вычислить дополнения к значениям коррелат  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ , значащимся в таблице  $D$  по формулам (430).

$$\begin{aligned} p_{6 \cdot 1} k_6 + p_{7 \cdot 1} k_7 &\dots \text{дополнение } k_1; \\ p_{6 \cdot 2} k_6 + p_{7 \cdot 2} k_7 &\dots " k_2; \\ p_{6 \cdot 3} k_6 + p_{7 \cdot 3} k_7 &\dots " k_3; \\ p_{6 \cdot 4} k_6 + p_{7 \cdot 4} k_7 &\dots " k_4; \\ p_{6 \cdot 5} k_6 + p_{7 \cdot 5} k_7 &\dots " k_5. \end{aligned}$$

Конечно, дополнения эти будут получены в виде разложений по свободным членам  $w$ .

Сложив эти дополнения с числами соответственных строк таблицы  $D$  и приписав в неё добавочные строки для  $k_6$  и  $k_7$ , получим выражения коррелат в виде табл. 61.

Табл. 61 является окончательным результатом применения метода Больца к нашей сети. Подставив в неё значения свободных членов, получим численные значения коррелат, а с ними по обычным правилам рассчитаем поправки направлений.

Таблица 61

|       | $w_1$    | $w_2$    | $w_3$    | $w_4$    | $w_5$    | $w_6$    | $w_7$    |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $k_1$ | -0,26487 | -0,15340 | -0,05792 | -0,01921 | +0,13947 | -0,00094 | -0,00062 |
| $k_2$ | -0,15342 | -0,30816 | -0,11520 | -0,03853 | +0,15386 | +0,00085 | +0,00061 |
| $k_3$ | -0,05739 | -0,11564 | -0,23081 | -0,07685 | +0,05770 | -0,00007 | +0,00017 |
| $k_4$ | -0,01919 | -0,03856 | -0,07679 | -0,19091 | +0,01923 | +0,00052 | +0,00024 |
| $k_5$ | +0,13953 | +0,15379 | +0,05771 | +0,01920 | -0,26444 | +0,00006 | +0,00006 |
| $k_6$ | -0,00094 | +0,00085 | -0,00007 | +0,00062 | -0,00002 | -0,00051 | -0,00080 |
| $k_7$ | -0,00062 | +0,00061 | -0,00017 | +0,00024 | -0,00004 | -0,00080 | -0,00074 |

Конечно, достаточно ясно видно, что если стремиться получить лишь численные значения коррелят, то для нашей сети метод Больца приводит к значительному осложнению и увеличению вычислительного труда по сравнению с обычным методом Гаусса. Но мы имеем в виду на нашем примере достаточно ясно показать применение метода Больца, последовательность расчетов в нем и некоторые их особенности, выражающиеся в применении соответственных схем и таблиц. Полагаю, что эта цель вполне достигнута, причем простота взятой сети служила на пользу дела.

### § 95. Видоизменение способа Больца, предложенное А. А. Изотовым

При числовом решении нормальных уравнений (437) § 93, соответствующих условным уравнениям фигур в простой цепи треугольников, можно применить с выгодой такой прием: получим сперва, применяя разложение и таблицы Больца, выражения первой  $k_1$  и последней  $k_n$  корреляты; далее, подставив в эти выражения численные значения свободных членов  $w_1, w_2, \dots, w_n$  условных уравнений фигур в нашей цепи, вычислим численные значения  $k_1$  и  $k_n$ ; теперь  $k_2$  легко вычисляется так:

$$k_2 = +\frac{w_1}{2} + 3k_1, \quad (442)$$

а  $k_{n-1}$  — по формуле

$$k_{n-1} = +\frac{w_n}{2} + 3k_n. \quad (443)$$

Имея  $k_1$  и  $k_2$ , получаем далее очень просто численное значение для  $k_3$ :

$$k_3 = +\frac{w_2}{2} - k_1 + 3k_2. \quad (444)$$

Имея же  $k_n$  и  $k_{n-1}$ , также просто получаем численное значение для  $k_{n-2}$  по формуле

$$k_{n-2} = +\frac{w_{n-1}}{2} - k_n + 3k_{n-1}. \quad (445)$$

Таким образом, переходя постепенно в уравнениях (437) от первого уравнения ко второму, от второго — к третьему, от третьего — к четвертому, и т. д. — вплоть до уравнения с номером  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n+1}{2}$ , мы легко

получим коррелаты  $k_2, k_3, \dots, k_{\frac{n}{2}}$  (или  $k_{\frac{n+1}{2}}$ ). Точно такой же постепенный переход от  $n$ -го уравнения к  $(n-1)$ , от  $(n-1)$  к  $(n-2)$ , и т. д. — вплоть до уравнения с номером  $\frac{n}{2}$  (или  $\frac{n+1}{2}$ ), приведет к числовому определению коррелат  $k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_{\frac{n}{2}}$  (или  $k_{\frac{n+1}{2}}$ ). При этом двойное получение коррелаты  $k_{\frac{n}{2}}$  (или  $k_{\frac{n+1}{2}}$ ) послужит хорошим контролем вычислений. Так как при переходе от коррелаты к коррелате приходится делать умножения соответственных частей предыдущих уравнений на числа  $N$ , то точность вычисления коррелат заметно убывает при постепенном переходе от  $k_1$  к  $k_{\frac{n}{2}}$ , и точно так же — при постепенном переходе от  $k_n$  к  $k_{\frac{n+1}{2}}$ . Поэтому в указанном только что приеме расчета коррелат следует пользоваться не приведенными в § 94 таблицами Больца, а очень удачно построенной небольшой табличкой А. А. Изотова, дающей лишь первую  $k_1$  и последнюю  $k_n$  коррелату, но с восемью, а не с пятью десятичными знаками (см. стр. 692). Если для  $k_1$  имеем формулу

$$k_1 = \Sigma f_i w_i, \quad (446)$$

то для  $k_n$ , очевидно, работает формула:

$$k_n = \Sigma f_i w_{n-i+1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (447)$$

Другими словами, таблица, дающая с восемью десятичными знаками первую коррелату в виде

$$k_1 = f_1 w_1 + f_2 w_2 + f_3 w_3 + \dots + f_n w_n, \quad (448)$$

служит и для расчета  $k_n$  по формуле

$$k_n = f_1 w_n + f_2 w_{n-1} + f_3 w_{n-2} + \dots + f_n w_1. \quad (449)$$

Если наша сеть представляет простую и свободную цепь треугольников, то описанный прием расчета коррелат, при пользовании при этом табличкой Изотова для  $k_1$  и  $k_n$ , приводит, несомненно, к наиболее быстрому и простому решению нормальных уравнений (437).

Но допустим, что наша сеть не свободна, и в ней, кроме условий фигур, имеются еще условия боковые, условия базисные и условия азимутальные. Разделим все условные уравнения на две группы, причем в первую группу отнесем условия фигур для всех тех треугольников сети, которые, примыкая друг к другу, образуют простую цепь треугольников (в которой, следовательно, не имеется пересекающихся диагоналей и не возникает замыканий в центральных системах). Пусть в первой группе условий имеем всего  $n$  уравнений. Условные уравнения второй группы тогда напишем так

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \dots + w_{n+1} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\beta_1(1) + \beta_3(2) + \beta_3(3) + \cdots + w_{n+2} = 0 \quad (\beta)$$

$$\gamma_1(1) + \gamma_2(2) + \gamma_3(3) + \dots + w_{r+3} = 0 \quad (\gamma)$$

Применяя метод двухгруппового уравнивания Крюгера, мы на основании § 88 и формул (432) § 92 напишем в таком виде преобразованные нормальные уравнения второй группы:

Вспомогательные коррелаты  $\rho$  определяются, как известно, из нормальных уравнений, соответствующих первой группе условных уравнений, лишь с заменой в ней  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ , соответственно: через  $[a\alpha], [b\alpha], \dots, [n\alpha]$  при вычислении коррелат  $\rho_{1:1}, \rho_{1:2}, \rho_{1:3}, \dots, \rho_{1:n}$ ; через  $[a\beta], [b\beta], \dots, [n\beta]$  при вычислении коррелат  $\rho_{2:1}, \rho_{2:2}, \rho_{2:3}, \dots, \rho_{2:n}$ , и т. д. Другими словами, величины  $\rho$  должны быть вычислены из уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} 6\rho_{i:1} - 2\rho_{i:2} + [aj] = 0 \\ -2\rho_{i:1} + 6\rho_{i:2} - 2\rho_{i:3} + [bj] = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -2\rho_{i:(n-1)} + 6\rho_{i:n} + [nj] = 0 \end{array} \right\}, \quad (451)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$j = \alpha, \beta, \gamma, \dots$

Получение величин  $\rho$  из уравнений (451) конечно, быстро и всего проще выполняется именно при помощи указанного в начале параграфа и предложенного Изотовым приема, пользуясь при этом и составленной им табличкой («Геодезист», 1936, № 8—9). После получения величин  $\rho$  следует, конечно, вычисление коэффициентов  $[AA]$ ,  $[AB]$ ,  $[AC]$ , ... второй преобразованной группы нормальных уравнений по формулам, приведенным выше и совпадающим с формулами (432) § 92. Решив эту вторую группу уравнений, получаем  $k_{n+1}$ ,  $k_{n+2}$ ,  $k_{n+3}$ , причем, как указано в § 92, эти коррелаты будут те самые, которые получились бы при совместном решении условных уравнений и первой и второй группы.

Если в нашей несвободной сети мы составим  $n$  первых нормальных уравнений, с квадратическими коэффициентами при  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , то эти уравнения будут иметь вид

Однако, так как  $k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$  уже вычислены, то в этих последних уравнениях члены с  $k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$  мы можем отнести и относим к составу свободного члена в каждом из них. Тогда для определения коррелят  $k_1, k_2, \dots, k_n$  получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} + 6k_1 - 2k_2 + w'_1 &= 0 \\ - 2k_1 + 6k_2 - 2k_3 + w'_2 &= 0 \\ - 2k_2 + 6k_3 - 2k_4 + w'_3 &= 0 \\ \dots & \\ - 2k_{n-1} + 6k_n + w'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (453)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} w'_1 &= w_1 + [a\alpha] k_{n+1} + [a\beta] k_{n+2} + \dots \\ w'_2 &= w_2 + [b\alpha] k_{n+1} + [b\beta] k_{n+2} + \dots \\ &\vdots \\ w'_n &= w_n + [n\alpha] k_{n+1} + [n\beta] k_{n+2} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (454)$$

Коэффициенты  $[a_2]$ ,  $[a_3]$ ,  $[b_2]$ ,  $[b_3]$ , ... были уже получены при вычислении  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[A_3]$ , ... поэтому вычисление свободных членов в системе уравнений (453) не представляет затруднений.

Понятно, что эта система уравнений (453) имеет тот же вид, как и уравнения (437), т. е. решение ее можно сделать очень просто, применяя прием Изотова определения  $k_2$  по  $k_1$ ,  $k_3$  по  $k_2$  и  $k_1$ ,  $k_4$  по  $k_2$  и  $k_3$ , и т. д.

Таким образом, схема действий такова:

1) после выделения  $n$  условий фигур в первую группу, пишем условные уравнения I группы и условные уравнения II группы;

2) составляем нормальные уравнения коррелат вместе для обеих групп, без их разделения, т. е. составляем общую всем условиям сети систему нормальных уравнений коррелат;

3) вычисляем вспомогательные коррелаты  $\rho$ , для чего в уравнениях (451) свободные члены просто выбираем из  $n$  первых нормальных уравнений: это будут коэффициенты  $[a\alpha], [b\alpha], \dots, [n\alpha]$  при  $k_{n+1}$  соответственно в первом, втором, третьем, ...,  $n$ -ом нормальных уравнениях, при определении  $\rho_{1\cdot 1}, \rho_{1\cdot 2}, \dots, \rho_{1\cdot n}$ ; или это будут коэффициенты  $[a\beta], [b\beta], \dots, [n\beta]$  при  $k_{n+2}$  соответственно в первом, втором, ...,  $n$ -ом нормальных уравнениях, при определении  $\rho_{2\cdot 1}, \rho_{2\cdot 2}, \rho_{2\cdot 3}, \dots, \rho_{2\cdot n}$ , и т. д. После выписки свободных членов, решение уравнений (451) выполняется приемом Изотова и при помощи его табл. 62 для  $k_1$  и  $k_n$ .

4) вычисляем по формулам (432) коэффициенты  $[AA]$ ,  $[AB]$ ,  $\dots$  второй преобразованной группы нормальных уравнений, причем используем коэффициенты при коррелатах  $k_{n+1}$ ,  $k_{n+2}$ ,  $k_{n+3}$ ,  $\dots$  в уравнениях с номерами  $k_{n+1}$ ,  $k_{n+2}$ ,  $k_{n+3}$ ,  $\dots$  в составе общей системы нормальных уравнений.

ний, составленной согласно пункту 2 (это суть величины  $[\alpha\alpha]$ ,  $[\alpha\beta]$ , ...,  $[\beta\beta]$ ,  $[\beta\gamma]$ , ...);

5) решаем по схеме Гаусса (или Дулиттля) преобразованные нормальные уравнения второй группы;

6) вычисляем преобразованные свободные члены первых  $n$  нормальных уравнений, пользуясь формулами (454), и приходим к системе уравнений (453);

7) определяем из уравнений (453) приемом Изотова первые  $n$  коррелат  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ;

8) вычисляем поправки направлений обычным путем, пользуясь значениями коррелат  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$ . И зложенный прием уравнивания уменьшает вычислительную работу по сравнению с применением метода Больца в чистом виде в несколько раз — в 3–4 раза, поэтому он заслуживает полного внимания. Особенно выгодно его применять при уравнивании отдельных звеньев триангуляции I класса, составленных из простых треугольников: здесь мы имеем  $n$  условий фигур, одно базисное и одно азимутальное условие, и во вторую группу выделяем только два последних условия.

Таблица 62

Таблица А. А. Изотова для вычисления первой и последней коррелат

|          | $n=5$     | $n=6$     | $n=7$     | $n=8$     | $n=9$     | $n=10$    |          |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
|          | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       |          |
| $f_1$    | 1909 7222 | 1909 8143 | 1909 8278 | 1909 8297 | 1909 8300 | 1909 8300 | $f_1$    |
| $f_2$    | 0729 1667 | 0729 4430 | 0729 4833 | 0729 4892 | 0729 4900 | 0729 4901 | $f_2$    |
| $f_3$    | 0277 7778 | 0278 5146 | 0278 6221 | 0278 6378 | 0278 6401 | 0278 6404 | $f_3$    |
| $f_4$    | 0104 1667 | 0106 1008 | 0106 3830 | 0106 4241 | 0106 4302 | 0106 4301 | $f_4$    |
| $f_5$    | 0034 7222 | 0039 7878 | 0040 5268 | 0040 6347 | 0040 6504 | 0040 6527 | $f_5$    |
| $f_6$    |           | 0013 2626 | 0015 1976 | 0015 4799 | 0015 5211 | 0015 5271 | $f_6$    |
| $f_7$    |           |           | 0005 0659 | 0005 8050 | 0005 9128 | 0005 9285 | $f_7$    |
| $f_8$    |           |           |           | 0001 9350 | 0002 2173 | 0002 2585 | $f_8$    |
| $f_9$    |           |           |           |           | 0000 7391 | 0000 8469 | $f_9$    |
| $f_{10}$ |           |           |           |           |           | 0000 2822 | $f_{10}$ |

|          | $n=11$    | $n=12$    | $n=13$    | $n=14$    | $n=15$    | $n=16$    |          |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
|          | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       | —0,       |          |
| $f_1$    | 1909 8301 | 1909 8301 | 1909 8301 | 1909 8301 | 1909 8301 | 1909 8301 | $f_1$    |
| $f_2$    | 0729 4902 | 0729 4902 | 0729 4902 | 0729 4902 | 0729 4902 | 0729 4902 | $f_2$    |
| $f_3$    | 0278 6404 | 0278 6404 | 0278 6404 | 0278 6404 | 0278 6404 | 0278 6404 | $f_3$    |
| $f_4$    | 0106 4312 | 0106 4312 | 0106 4312 | 0106 4812 | 0105 4312 | 0106 4312 | $f_4$    |
| $f_5$    | 0040 6530 | 0040 6531 | 0040 6531 | 0040 6531 | 0040 6531 | 0040 6531 | $f_5$    |
| $f_6$    | 0015 5280 | 0015 5281 | 0015 5281 | 0015 5281 | 0015 5281 | 0015 5281 | $f_6$    |
| $f_7$    | 0005 9308 | 0005 9311 | 0005 9312 | 0005 9312 | 0005 9312 | 0005 9312 | $f_7$    |
| $f_8$    | 0002 2645 | 0002 2654 | 0002 2655 | 0002 2655 | 0002 2655 | 0002 2655 | $f_8$    |
| $f_9$    | 0000 8627 | 0000 8650 | 0000 8653 | 0000 8653 | 0000 8654 | 0000 8654 | $f_9$    |
| $f_{10}$ | 0000 3235 | 0000 3295 | 0000 3304 | 0000 3305 | 0000 3305 | 0000 3305 | $f_{10}$ |
| $f_{11}$ | 0000 1078 | 0000 1236 | 0000 1259 | 0000 1262 | 0000 1262 | 0000 1263 | $f_{11}$ |
| $f_{12}$ |           | 0000 0412 | 0000 0472 | 0000 0481 | 0000 0482 | 0000 0482 | $f_{12}$ |
| $f_{13}$ |           |           | 0000 0157 | 0000 0180 | 0000 0184 | 0000 0184 | $f_{13}$ |
| $f_{14}$ |           |           |           | 0000 0060 | 0000 0069 | 0000 0070 | $f_{14}$ |
| $f_{15}$ |           |           |           |           | 0000 0023 | 0000 0026 | $f_{14}$ |
| $f_{16}$ |           |           |           |           |           | 0000 0009 | $f_{16}$ |

Формулы для коррелат:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum f_i w_i; \\ k_n &= \sum f_i w_{n-i+1}; \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

## § 96. Уравнивание триангуляции по способу Бесселя

Если бы на всех пунктах сети результаты наблюдений были представлены в виде одного ряда направлений на каждом пункте, то строгая задача уравнивания такой триангуляции заключалась бы в отыскании поправок измеренных направлений из условных уравнений сети. Но, конечно, в практике бывают, правда, очень редкие в настоящее время, случаи, когда даже в точных сетях результаты наблюдений на ее пунктах представляются в виде нескольких групп неполных приемов, и в этих случаях уравнивание станций приводит на каждом пункте к серии уравнений на станции значений углов, которые можно, конечно, искусственно и не имея к тому научного основания, счесть за непосредственно измеренные величины и ввести в качестве таковых в условные уравнения сети. Понятно, задача строгого уравнивания триангуляции и в этих случаях представляет интерес и, конечно, ее приходится ставить так, чтобы в условные уравнения сети вводить непосредственно наблюденные величины и чтобы по ее решении минимум суммы квадратов поправок имел бы место по отношению к поправкам непосредственно наблюденных величин (т. е. направлений), а не их функций (например, углов).

Очевидно, при вполне строгой постановке задачи по уравновешиванию триангуляции мы должны написать уравнения погрешностей, которые возникают на станциях, к ним присоединить условные уравнения сети, и из совокупности этих уравнений погрешностей и условных уравнений находить вероятнейшую систему значений неизвестных углов; другими словами, здесь приходится вести обработку «посредственных наблюдений с условными уравнениями». Бесселев способ есть один из способов такой обработки.

Пусть на некотором пункте сети результаты наблюдения направлений выражаются такой табличкой:

|  |  |
|--|--|
| $o_1, a_1, b_1, c_1, d_1 \dots$<br>$\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \dots$<br>$v^o_1, v^a_1, v^b_1, v^c_1, v^d_1 \dots$<br>$\dots \dots \dots \dots$ | из первого приема, причем $o_1, a_1, b_1, c_1, \dots, d_1$ —<br>направления, полученные в этом приеме; $\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \dots,$<br>$\delta_1$ — веса этих направлений; $v^o_1, v^a_1, \dots, v^d_1$ — ошибки<br>величин $o_1, a_1, b_1 \dots$ |
|--|--|

|  |                           |
|--|---------------------------|
| $o_s, a_s, b_s, c_s, d_s \dots$<br>$\omega_s, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s \dots$<br>$v^o_s, v^a_s, v^b_s, v^c_s, v^d_s \dots$<br>и т. д. | из приема с номером $s$ . |
|--|---------------------------|

Обозначая ошибку наблюдения начального направления в приеме  $s$  через  $z_s$ , мы согласно § 76 панишем из этого приема такие уравнения погрешностей

$$\left. \begin{array}{l} v^o_s = z_s - o_s \\ v^a_s = z_s + X - a_s \\ v^b_s = z_s + Y - b_s \\ v^c_s = z_s + U - c_s \end{array} \right\}, \quad (455)$$

понимая при этом под  $X$ ,  $Y$ ,  $U$ , ... углы, отсчитываемые от начального направления.

Чтобы иметь в левых частях уравнений ошибки, не зависимые друг от друга, здесь приходится (как и в § 76) принять за неизвестное, кроме  $X, Y, U, \dots$ , еще и величину  $z_s$ .

Если условные уравнения сети представим в виде

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = A_1X + A_2Y + A_3U + \dots + f_1 = 0 \\ S_2 = B_1X + B_2Y + B_3U + \dots + f_2 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ S_m = M_1X + M_2Y + M_3U + \dots + f_m = 0 \end{array} \right\}, \quad (456)$$

то задача сводится к отысканию таких значений  $X, Y, U, \dots$ , при которых удовлетворялись бы уравнения (456) и одновременно — функция

$$2\Omega = \sum p v^2 = \sum \{ \omega_s (z_s - o_s)^2 + \alpha_s (z_s + X - a_s)^2 + \beta_s (z_s + Y - b_s)^2 + \dots \} \quad (457)$$

имела бы минимум, причем суммирование в правой части уравнения (457) распространяется на все приемы, выполненные на всех пунктах сети. Пусть на всех пунктах сети было исполнено  $p$  приемов наблюдений направлений, а число неизвестных углов  $X, Y, U, \dots$  во всей сети пусть равно  $n$ . Помножая каждое из уравнений (456) соответственно на  $-2k_1, -2k_2, -2k_3, \dots, -2k_m$  и понимая под  $k$  корреляты условных уравнений, мы, очевидно, в данном случае должны искать минимум функции

$$W = 2\Omega - 2k_1 S_1 - 2k_2 S_2 - 2k_3 S_3 - \dots - 2k_m S_m.$$

Другими словами, мы должны приравнять нулю

$$\frac{\partial W}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial z_2}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial z_s}, \quad \frac{\partial W}{\partial X}, \quad \frac{\partial W}{\partial Y}, \dots$$

и к полученным отсюда уравнениям присоединить условные уравнения (456).

Мы будем иметь, очевидно, такую систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \sum \alpha_s (z_s + X - a_s) - k_1 A_1 - k_2 B_1 - k_3 C_1 - \dots = 0 \\ \sum \beta_s (z_s + Y - b_s) - k_1 A_2 - k_2 B_2 - k_3 C_2 - \dots = 0 \end{array} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1X + A_2Y + A_3U + \dots + f_1 = 0 \\ B_1X + B_2Y + B_3U + \dots + f_2 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ M_1X + M_2Y + M_3U + \dots + f_m = 0 \end{array} \right\}. \quad (c)$$

Число уравнений (а) равно  $p$ , число уравнений группы (б) равно  $n$ , а число уравнений группы (с) равно  $m$ . Таким образом, имеем  $p+n+m$  уравнений для определения  $p$  величин  $z$ ,  $n$  величин углов  $X, Y, U, \dots$  и  $m$  коррелат  $k$ . При решении этих уравнений нужно будет исключить все величины  $z$  и  $X, Y, U, \dots$  и перейти к уравнениям, содержащим лишь одни коррелаты.

Прежде всего исключим из уравнений (а) и (б) величины  $z_s$ . Для этого введем обозначения, вполне тождественные с употребленными в § 76.

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \omega_k + \alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \dots \\ \Sigma_k &= a_k \alpha_k + b_k \beta_k + c_k \gamma_k + \dots \end{aligned}$$

и, кроме того, обозначим

$$\left. \begin{array}{l} A_1k_1 + B_1k_2 + C_1k_3 + \dots = [1] \\ A_2k_1 + B_2k_2 + C_2k_3 + \dots = [2] \\ A_3k_1 + B_3k_2 + C_3k_3 + \dots = [3] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}. \quad (458)$$

Предположим, что все величины  $o$  равны нулю (что, конечно, не трудно сделать).

Исключение  $z$  из уравнений (а) и (б) приведет нас к уравнениям, вполне схожим с уравнениями (325) § 76, а именно, мы получим

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ [\alpha] - \left[ \frac{\alpha^2}{\sigma} \right] \right\} X - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] Y - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] U - \dots + \left[ \frac{\alpha\Sigma}{\sigma} \right] - [\alpha a] = [1] \\ - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] X + \left\{ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right\} Y - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] U - \dots + \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] - [\beta b] = [2] \\ - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] X - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] Y + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} U - \dots + \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] - [\gamma c] = [3] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\}. \quad (459)$$

Теперь, следовательно, надлежит исключить  $X, Y, U, \dots$  из уравнений (459) и (с). Для этого воспользуемся формулами неопределенного решения нормальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} X + Q_{1 \cdot 1} [al] + Q_{1 \cdot 2} [bl] + Q_{1 \cdot 3} [cl] + \dots = 0 \\ Y + Q_{2 \cdot 1} [al] + Q_{2 \cdot 2} [bl] + Q_{2 \cdot 3} [cl] + \dots = 0 \\ U + Q_{3 \cdot 1} [al] + Q_{3 \cdot 2} [bl] + Q_{3 \cdot 3} [cl] + \dots = 0 \end{array} \right\}. \quad (460)$$

Понятно, что

$$\left. \begin{aligned} [al] &= \left[ \frac{\alpha\Sigma}{\sigma} \right] - [\alpha a] - [1] \\ [bl] &= \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] - [\beta b] - [2] \\ [cl] &= \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] - [\gamma c] - [3] \end{aligned} \right\} \quad (461)$$

и  $a, b, c, \dots$ , входящие в выражения  $[al], [bl], [cl]$ , вовсе не совпадают с  $a, b, c, \dots$ , входящими в уравнение (455) настоящего параграфа. Представим себе теперь, что мы до составления условных уравнений сети проделали на каждом ее пункте уравнивания постаниционные, т. е., заменив в уравнениях (459) величины, стоящие в правых их частях, нулями, определили  $X_0, Y_0, U_0, \dots$  и вычислили весовые коэффициенты  $Q_{1 \cdot 1}, Q_{1 \cdot 2}, Q_{1 \cdot 3}, Q_{2 \cdot 2}, Q_{2 \cdot 3}, \dots$ . Конечно, определенные таким образом значения  $X_0, Y_0, U_0, \dots$  мы должны рассматривать не как окончательные и дальнейшее дело заключается в отыскании поправок  $x, y, u, \dots$  к этим значениям  $X_0, Y_0, U_0, \dots$

Составляя вновь уравнения (a), (b) и (c), но только не с величинами  $X, Y, U, \dots$ , а с поправками  $x, y, u, \dots$  приближенных значений  $X_0, Y_0, U_0, \dots$ , мы, конечно, изменим в этих уравнениях лишь величины их свободных членов, так что и в уравнениях (459) изменятся лишь их свободные члены. Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \left\{ [\alpha] - \left[ \frac{\alpha^2}{\sigma} \right] \right\} x - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] y - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] u - \dots &= [1] \\ - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] x + \left\{ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right\} y - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] u - \dots &= [2] \\ - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] x + \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] y + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} u - \dots &= [3] \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (459')$$

т. е. по сравнению с (459) в уравнениях (459') исчезнут в левых частях слагаемые

$$\left[ \frac{\alpha\Sigma}{\sigma} \right] - \dots, \quad \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] - [\beta b], \quad \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] - [\gamma c],$$

а в соответствии с этим уравнения (460) перепишутся так

$$\left. \begin{aligned} x &= [1] Q_{1 \cdot 1} + [2] Q_{1 \cdot 2} + [3] Q_{1 \cdot 3} + \dots \\ y &= [1] Q_{1 \cdot 2} + [2] Q_{2 \cdot 2} + [3] Q_{2 \cdot 3} + \dots \\ u &= [1] Q_{1 \cdot 3} + [2] Q_{2 \cdot 3} + [3] Q_{3 \cdot 3} + \dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\}. \quad (460')$$

Уравнения же (c) представляются так

$$\left. \begin{aligned} A_1x + A_2y + A_3u + \dots + f'_1 &= 0 \\ B_1x + B_2y + B_3u + \dots + f'_2 &= 0 \\ C_1x + C_2y + C_3u + \dots + f'_3 &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\}, \quad (461')$$

понимая под  $f'_1, f'_2, f'_3, \dots$  значения свободных членов в условных уравнениях, полученные по подстановке в них вместо вероятнейших величин  $X, Y, U, \dots$  приближенных величин  $X_0, Y_0, U_0, \dots$

Остается, следовательно, исключить  $x, y, u, \dots$  из уравнений (460') и (461').

Развертывая правые части уравнений (460'), получаем

$$\begin{aligned} x &= \{A_1 Q_{1 \cdot 1} + A_2 Q_{1 \cdot 2} + A_3 Q_{1 \cdot 3} + \dots\} k_1 + \{B_1 Q_{1 \cdot 1} + B_2 Q_{1 \cdot 2} + \\ &\quad + B_3 Q_{1 \cdot 3} + \dots\} k_2 + \{C_1 Q_{1 \cdot 1} + C_2 Q_{1 \cdot 2} + C_3 Q_{1 \cdot 3} + \dots\} k_3 + \dots \\ y &= \{A_1 Q_{1 \cdot 2} + A_2 Q_{2 \cdot 2} + A_3 Q_{2 \cdot 3} + \dots\} k_1 + \{B_1 Q_{1 \cdot 2} + B_2 Q_{2 \cdot 2} + \\ &\quad + B_3 Q_{2 \cdot 3} + \dots\} k_2 + \{C_1 Q_{1 \cdot 2} + C_2 Q_{2 \cdot 2} + C_3 Q_{2 \cdot 3} + \dots\} k_3 + \dots \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Вводя же обозначения

$$\left. \begin{aligned} A^0_1 &= [A_i Q_{1 \cdot i}]; & B^0_1 &= [B_i Q_{1 \cdot i}]; & C^0_1 &= [C_i Q_{1 \cdot i}] \dots \\ A^0_2 &= [A_i Q_{2 \cdot i}]; & B^0_2 &= [B_i Q_{2 \cdot i}]; & C^0_2 &= [C_i Q_{2 \cdot i}] \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^0_k &= [A_i Q_{k \cdot i}]; & B^0_k &= [B_i Q_{k \cdot i}]; & C^0_k &= [C_i Q_{k \cdot i}] \dots \end{aligned} \right\}, \quad (462)$$

пишем

$$\left. \begin{aligned} x &= A^0_1 k_1 + B^0_1 k_2 + C^0_1 k_3 + \dots \\ y &= A^0_2 k_1 + B^0_2 k_2 + C^0_2 k_3 + \dots \\ u &= A^0_3 k_1 + B^0_3 k_2 + C^0_3 k_3 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (463)$$

Уравнения (463) суть, конечно, выражения поправок через коррелаты. Подставляя эти выражения в (461'), получаем нормальные уравнения коррелат в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} [A_i A^0_i] k_1 + [A_i B^0_i] k_2 + [A_i C^0_i] k_3 + \dots + f'_1 &= 0 \\ [A_i B^0_i] k_1 + [B_i B^0_i] k_2 + [B_i C^0_i] k_3 + \dots + f'_2 &= 0 \\ [A_i C^0_i] k_1 + [B_i C^0_i] k_2 + [C_i C^0_i] k_3 + \dots + f'_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (464)$$

причем, конечно, принято

$$[A_i B^0_i] = [A_i^0 B_i]; \quad [B_i C^0_i] = [C_i B^0_i], \dots$$

Таким образом, способ Бесселя заключается в следующих действиях:

1) в исполнении уравновешивания станций отдельно от уравновешивания сети, согласно формулам § 76, с определением при этом весовых коэффициентов  $Q_{i \cdot s}$ .

2) в составлении с выведенными из уравновешивания станций значениями углов  $x_0, y_0, u_0, \dots$  условных уравнений сети;

3) в вычислении коэффициентов  $A^0_i, B^0_i, C^0_i, \dots$ ;

4) в составлении выражений поправок  $x, y, u, \dots$  приближенных углов  $X_0, Y_0, U_0, \dots$  через коррелаты  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , причем величины  $A^0_i, B^0_i, C^0_i, \dots$  играют совершенно ту же роль, какую играют при обыкновенном уравновешивании сети коэффициенты условных уравнений  $A_1, B_1, \dots, A_i, C_i, \dots$ ;

5) в составлении нормальных уравнений коррелат (464), получаемых, как и обычно, путем исключения  $x$ ,  $y$ ,  $u$ , из условных уравнений сети помощью выражений поправок через коррелаты;

6) в решении нормальных уравнений коррелат и вычислении поправок  $x$ ,  $y$ ,  $u$ .

При самом вычислении углы нумеруются на чертеже сети, отсчитывая каждый угол на данном пункте слева направо от одного и того же направления, самого левого из всех направлений, взятых на этом пункте.

При образовании коэффициентов  $A^o_1$ ,  $B^o_2$ ,  $C^o_3 \dots$  нужно помнить, что верхний значок  $o$  указывает на то, что эти коэффициенты вычисляются по величинам, относящимся к одному и тому же пункту сети. Чтобы яснее представить образование этих коэффициентов, допустим, что на некотором пункте сети  $M$  имеем углы: 15, 16, 17, 18. Приняв младшее по номеру на этом пункте неизвестное за первое, следующее по номеру за второе и т. д., вычислим для этого пункта

$$\begin{aligned} & Q_{1 \cdot 1}; \\ & Q_{1 \cdot 2}, Q_{2 \cdot 2}; \\ & Q_{1 \cdot 3}, Q_{2 \cdot 3}, Q_{3 \cdot 3}; \\ & Q_{1 \cdot 4}, Q_{2 \cdot 4}, Q_{3 \cdot 4}, Q_{4 \cdot 4}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} A^M_1 &= A_{15} Q_{1 \cdot 1} + A_{15} Q_{1 \cdot 2} + A_{17} \cdot Q_{1 \cdot 3} + A_{18} Q_{1 \cdot 4}; \\ A^M_2 &= A_{15} Q_{1 \cdot 2} + A_{16} Q_{2 \cdot 2} + A_{17} \cdot Q_{2 \cdot 3} + A_{18} Q_{2 \cdot 4}; \\ A^M_3 &= A_{15} Q_{1 \cdot 3} + A_{16} Q_{2 \cdot 3} + A_{17} \cdot Q_{3 \cdot 3} + A_{18} Q_{3 \cdot 4}; \\ A^M_4 &= A_{15} Q_{1 \cdot 4} + A_{16} Q_{2 \cdot 4} + A_{17} \cdot Q_{3 \cdot 4} + A_{18} Q_{4 \cdot 4}. \end{aligned}$$

понимая под  $A_{15}$ ,  $A_{16}$ ,  $A_{17}$ ,  $A_{18}$  коэффициенты в том условном уравнении, в котором они обозначены буквой  $A$ , соответственно при углах 15, 16, 17, 18. Очевидно, что в обозначениях (462):

$$[A_i Q_{i \cdot 1}], [A_i Q_{i \cdot 2}], \dots [A_i Q_{i \cdot 4}],$$

$A_{15}$  заменяется через  $A_1$ ;  $A_{16}$  через  $A_2$ ;  $A_{17}$  — через  $A_3, \dots$ , причем такая замена совершается в порядке старшинства номеров углов для каждого пункта сети отдельно.

При вычислении коэффициентов уравнений (464) нужно помнить, что  $A_1^M$  может умножаться только на те коэффициенты условных уравнений, которые стоят при младшем по номеру неизвестном на пункте  $M$ , т. е. на  $A_{15}$ ,  $B_{15}$ ,  $C_{15}, \dots$ , что  $A_3^M$  может умножаться лишь на те коэффициенты условных уравнений, которые стоят при третьем по порядку старшинства номеров неизвестном на пункте  $M$  и т. д. Целесообразным расположением таблиц, содержащих коэффициенты условных уравнений, величины  $Q$  и коэффициенты уравнений (463), достигается устранение каких-либо неудобств при составлении нормальных уравнений коррелат и при вычислении поправок углов.

## Г л а в а XIII

# УРАВНИВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕТИ ПО МЕТОДУ ПОСРЕДСТВЕННЫХ (КОСВЕННЫХ) НАБЛЮДЕНИЙ

### § 97. Общие замечания

Заполняющие сети II класса, а также сети III и низших классов нередко представляют собой довольно сложные построения: обычно при уравнивании таких сетей приходится иметь дело с значительным числом условных уравнений, связывающих наблюденные на пунктах этих сетей направления или углы. Примыкания заполняющих сетей к ряду твердых сторон и пунктов высшего класса нередко приводят к тому, что соотношение между числом вновь определяемых пунктов и числом возникающих в вставляемой сети условных уравнений становится явно невыгодным, — при сравнительно небольшом числе пунктов число условий достаточно велико; к тому же в число этих условий входят иногда сложные полигональные условия, составление и решение которых особенно хлопотливо.

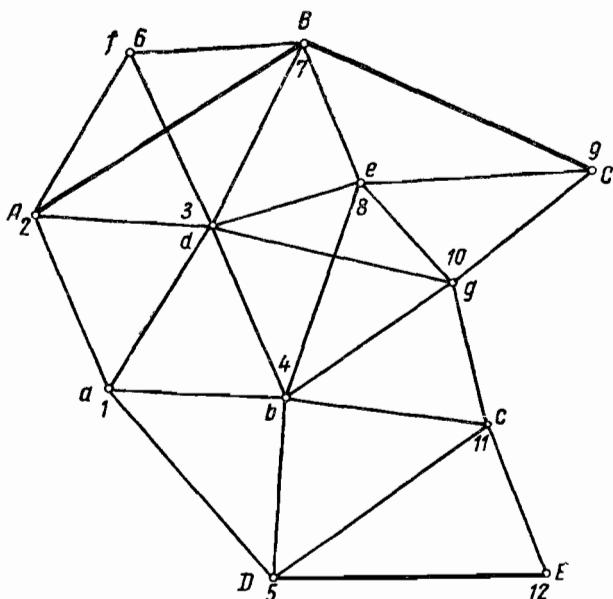
На черт. 287 изображена сеть, в которой для определения новых семи пунктов измерено 52 направления; твердые пункты суть  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ . При уравнивании направлений в этой сети возникнет 25 условий: 15 условий фигур, 5 — полюсных, 1 — сторон, 1 — базисное, 1 — дирекционных углов и 2 — координат. Конечно, при семи вновь определяемых точках решение 25 условий должно считать работой излишне громоздкой.

Вообще, в заполняющих сетях метод уравнивания условных наблюдений, при котором в качестве неизвестных мы вводим коррелаты условных уравнений, становится излишне громоздким.

Представим себе теперь, что в качестве отыскиваемых неизвестных из уравнивания сети мы ввели поправки координат вновь определяемых пунктов.

Так как окончательные координаты этих пунктов суть функции окончательных направлений, то, очевидно, системе вероятных поправок координат соответствует вполне определенная система вероятных поправок наблюденных направлений и наоборот. Другими словами, мы можем, исходя от некоторой системы приближенных координат вновь определяемых пунктов, отыскивать, пользуясь всеми наблюдениями, сперва поправки таких приближенных значений координат, а потом по этим поправкам сообразить и поправки наблюденных направлений. Вопрос сводится именно к тому, чтобы поправки координат вновь определяемых пунктов выразить в функции наблюденных направлений

и их поправок. Сделав это мы получим уравнения погрешностей (а не условные уравнения), в которых функции наблюдаемых величин — поправки координат — будут выражены через эти наблюдаемые величины и их поправки. Определяя из таких уравнений погрешностей вероятнейшие значения поправок координат под условием минимума суммы квадратов поправок наблюдаемых направлений, мы будем применять уравнивание посредственных наблюдений. После вывода посредственно или косвенно определяемых величин, — в данном случае поправок координат, — мы из уравнений погрешностей известным образом вычислим поправки наблюдаемых направлений, т. е. непосредственно наблюдаемых величин.



Черт. 287

Выгода этого метода ясна, когда число определяемых поправок координат замстно менее числа условных уравнений в сети и когда в сети притом имеются еще условия полигональные. В сети, изображенной на черт. 287, число поправок координат равно 14. Следовательно, решение 25 нормальных уравнений заменится решением 14 нормальных уравнений при применении в уравнивании метода посредственных наблюдений или при отыскании поправок координат. Уменьшение работы, конечно, не произойдет в отношении 14 к 25. Составление уравнений погрешностей, число которых будет равно числу наблюдаемых направлений (52 в нашем примере), составит работу, несколько большую, чем составление 25 условных уравнений, хотя при уравнивании на плоскости вычисления приходится предельывать при составлении уравнений погрешностей по существу лишь для половины направлений; работа по составлению нормальных уравнений будет большая при нахождении поправок координат. Но, конечно, самое решение 14 нормальных уравнений вместо 25 дает значительную экономию в работе, примерно в четыре раза, в этом наиболее трудоемком этапе.

### § 98. Составление уравнений погрешностей

Мы предполагаем, что координаты твердых пунктов, дирекционные углы и длины твердых сторон в уравниваемой сети даны в проекции Гаусса-Крюгера; далее мы предполагаем, что измеренные элементы в уравниваемой сети, т. е. измеренные в ней направления, также отнесены на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера.

Для уравнивания по методу посредственных наблюдений нам нужно получить прежде всего приближенные координаты вновь определяемых пунктов; эти приближенные координаты могут быть ошибочными даже до 1 м. Однако, по нашему мнению, следует вести расчет этих приближенных координат так, чтобы часть вычислений и материалов, исполненных или использованных при этом, могла бы быть использована и в дальнейшем.

Для получения приближенных координат прежде всего придется проделать вычисление сторон треугольников вновь вставляемой сети следующим образом. В треугольниках (см. черт. 287)  $D\bar{E}c$ ,  $D\bar{b}c$ ,  $b\bar{a}D$ ,  $b\bar{g}c$ ,  $b\bar{g}e$ ,  $a\bar{b}d$ ,  $a\bar{d}A$ ,  $A\bar{d}f$ , необходимых для получения координат всех новых пунктов, мы выписываем из таблицы направлений, пользуясь ориентированными направлениями  $R$ , в каждом треугольнике только по два угла, при вершинах, подчеркнутых в приведенном выше перечне этих треугольников; эти два угла лежат в каждом треугольнике при концах известной стороны, определенной из предыдущего треугольника, или — все равно — при двух вершинах предыдущего треугольника. Третий угол в треугольнике, вписываемый в первую строке схемы решения треугольника, получается как дополнение суммы первых двух углов до  $180^\circ$ . Для контроля третий угол сопоставляется с значением его, даваемым таблицей направлений, — различие будет равно невязке треугольника. Для пояснения приведем схему решения треугольника  $c\bar{b}g$ :

|         |                       | Контроль          | $\lg \frac{bc}{\sin g}$ | $\text{don. } \lg \sin g$ |
|---------|-----------------------|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| $g$     | $180^\circ - (b + c)$ | $R_{gb} - R_{gc}$ | $\lg \sin g$            | $\lg bc$                  |
| $c$     | $R_{cg} - R_{cb}$     | из таблицы        | $\lg \sin c$            | $\lg bg$                  |
| $b$     | $R_{bc} - R_b$        | направлений       | $\lg \sin b$            | $\lg gc$                  |
| $b + c$ |                       |                   |                         |                           |

Вычисление сторон в указанном порядке ведут в сети II класса семизначными логарифмами и шестизначными логарифмами в сети III класса. После этого вычисляют приращения координат по линиям:  $E\bar{c}$  и  $D\bar{c}$ , используя при этом  $R_{E\bar{c}}$  и  $R_{D\bar{c}}$  — те самые, которые служили при выводе углов  $E$  и  $D$  в треугольнике  $D\bar{c}E$ ; по линиям  $cb$  и  $D\bar{b}$ , используя при этом  $R_{cb}$  и  $R_{D\bar{b}}$  — те самые, которые служили при выводе углов  $b$  и  $D$  в треугольнике  $D\bar{b}c$ , и т. д. Координаты точки  $c$  получим дважды, — идя от  $E$  и от  $D$ ; результаты должны совпасть до 0,01 м. Координаты  $b$  получим дважды, — идя от  $c$  и от  $D$ , опять-таки с расходжениями в результатах до 0,01 м. Таким образом, идя треугольниками  $D\bar{E}c$ ,  $b\bar{c}D$ ,  $c\bar{b}g$ ,  $g\bar{b}e$ ,  $a\bar{D}b$ ,  $a\bar{b}d$ , — получаем приближенные координаты точек  $c$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $g$ ,  $e$ ,  $d$ , с удержанием в них 0,01 м. Далее берем треугольники  $daA$  и  $A\bar{d}f$ , и, считая координаты  $A$  неизвестными, выводим по линиям  $d\bar{A}$  и  $a\bar{A}$  приращения координат, и затем, используя координаты  $a$  и  $d$ , получаем координаты пункта  $A$ ; наконец, по разно-

стям координат, вычисленным по сторонам  $Af$  и  $df$ , по координатам  $d$  и только что полученным координатам  $A$ , выводим координаты  $f$ . Все время строго соблюдали правило, чтобы вычисление приращений координат по некоторой линии выполнялось с тем значением  $R$ , которое было использовано для вывода соответствующего угла в решении треугольников.

Заметим, что после установления приближенных координат в дальнейшем следует точный вывод дирекционных углов  $T'$  по сторонам треугольников в предположении, что эти стороны соединяют пункты, заданные именно их приближенными координатами. Другими словами, мы могли бы довольно произвольно и с известной большой свободой установить приближенные координаты пунктов нашей триангуляции. Но для получения свободных членов уравнений погрешностей, как скоро увидим, необходимо иметь точные значения дирекционных углов по направлениям, соединяющим именно определяемые этими приближенными координатами пункты. Конечно, для этого служит вообще формула

$$\operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2} = \frac{y^o_2 - y^o_1}{x^o_2 - x^o_1},$$

в которой  $y^o_2, x^o_2, y^o_1, x^o_1$  — приближенные координаты точек 1 и 2 и которую нужно вычислять семизначными логарифмами. Однако, если мы строго провели предложенный выше порядок решения треугольников и вывода приращений координат, то, очевидно, по линиям  $Ec, Dc, cb, Db, Da, ba, ad, bd, df, bg, cg, be, ge$ , будем иметь для прямых направлений по этим линиям:

$$T' = R,$$

а для обратных направлений

$$T' = R \pm 180^\circ,$$

причем  $R$  — то самое, которое было использовано при вычислении по данной линии приращений координат. Другими словами, написанную выше формулу для  $\operatorname{tg} T'$  придется употребить лишь для небольшого числа линий, а именно:  $Af, Ad, fB, dB, de, dg, gC, eC, Be$ . Понятно, при выводе  $T'$ , по этим линиям для  $A, B, C$  используются данные твердые координаты их. Называя

$$\begin{aligned} y^o_2 - y^o_1 &= \Delta y, \\ x^o_2 - x^o_1 &= \Delta x, \end{aligned}$$

мы при вычислении  $T'_{1 \cdot 2}$  должны применить контроль, т. е.  $T'_{1 \cdot 2}$  вычислить дважды

$$\operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad (T'_{1 \cdot 2} + 45^\circ) = \frac{\Delta y + \Delta x}{\Delta x - \Delta y}.$$

Если таблица направлений составлялась без вывода в лесной ориентированных направлений  $R$ , то придется выписать из нее в каждом необходимом для вычисления координат треугольнике сети все три угла, произвести в каждом таком треугольнике уравнивание углов путем раскладки поровну его невязки и затем обычным образом сделать вычисление сторон треугольников. По предварительно уравненным углам треугольников выводят дирекционные углы их сторон и затем приступают к вычислению приращений координат. В каждом треугольнике

координаты выводятся передачей по двум сторонам, с допустимым расхождением между двумя выводами в 0,01 м. И при этом порядке вывода приближенных координат те значения дирекционных углов, которые служили для вычисления приращений координат по отдельным сторонам треугольников, будут, конечно, равны величинам  $T'$  для тех сторон, которые не примыкают к твердым пунктам сверх двух твердых, использованных в качестве исходных. Следовательно, останется, как и раньше, вычислить  $T'$  только для тех сторон, которые или примыкают к избыточным твердым пунктам или образуют избыточные треугольники.

По существу оба порядка вывода приближенных координат — и с использованием  $R$  и без такого использования — одинаковы по затрате вычислительного труда, но оба они характеризуются точными расчетами приращений приближенных координат, что освобождает от последующего вывода величин  $T'$  по очень значительному числу линий сети. В противоположность этому порядку применяют более грубый, но и более скорый вывод приближенных координат, когда не увязывают углов в треугольниках и допускают в них округления как при выводе сторон, так и при выводе дирекционных углов, используемых при вычислении приращений координат. При таком порядке придется и во всем или и в частях затем сделать точный вывод величин  $T'$  по приближенным координатам пунктов.

Назовем вероятные координаты определяемого пункта через  $x$ ,  $y$ ; приближенные координаты его через  $x^o$  и  $y^o$ ; поправки приближенных координат через  $\delta x$  и  $\delta y$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}x &= x^o + \delta x, \\y &= y^o + \delta y.\end{aligned}$$

Мы имеем для уравненного значения дирекционного угла  $T_{1 \cdot 2}$  такую формулу

$$\operatorname{tg} T_{1 \cdot 2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y^o_2 - y^o_1 + \delta y_2 - \delta y_1}{x^o_2 - x^o_1 + \delta x_2 - \delta x_1}.$$

Считая  $\delta x$  и  $\delta y$  достаточно малыми, напишем далее:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} T_{1 \cdot 2} &= \frac{y^o_2 - y^o_1}{x^o_2 - x^o_1} + \frac{\delta y_2}{x^o_2 - x^o_1} - \frac{\delta y_1}{x^o_2 - x^o_1} - \frac{(y^o_2 - y^o_1)}{(x^o_2 - x^o_1)^2} \delta x_2 + \\&\quad + \frac{(y^o_2 - y^o_1)}{(x^o_2 - x^o_1)^2} \delta x_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} T_{1 \cdot 2} - \operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2} &= \frac{\delta y_2}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} - \frac{\delta y_1}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} - \frac{\operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} \delta x_2 + \\&\quad + \frac{\operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} \delta x_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_{1 \cdot 2} - T'_{1 \cdot 2})'' &= \frac{\cos T_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta y_2 - \frac{\cos T_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta y_1 - \\&\quad - \frac{\sin T'_{1 \cdot 2} \cos T_{1 \cdot 2} \rho''}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} \delta x_2 + \frac{\sin T'_{1 \cdot 2} \cos T_{1 \cdot 2} \rho''}{s_{1 \cdot 2} \cos T'_{1 \cdot 2}} \delta x_1.\end{aligned}$$

Под  $s_{1 \cdot 2}$  понимается расстояние между точками 2—1. Понятно, в последнем уравнении в правой его части мы можем не различать  $\cos T_{1 \cdot 2}$  от  $\cos T'_{1 \cdot 2}$  и поэтому напишем

$$(T_{1 \cdot 2} - T'_{1 \cdot 2})'' = \frac{\cos T'_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta y_2 - \frac{\cos T'_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta y_1 - \\ - \frac{\sin T'_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta x_2 + \frac{\sin T'_{1 \cdot 2} \cdot \rho''}{s_{1 \cdot 2}} \delta x_1.$$

Вероятное уравненное значение дирекционного угла  $T_{1 \cdot 2}$  можно представить в таком виде

$$T_{1 \cdot 2} = N'_{1 \cdot 2} + \sum_1 + v_{1 \cdot 2} + z_1.$$

Здесь:  $N'_{1 \cdot 2}$  — наблюденное направление, но уже сложенное с поправкой за кривизну  $r^k_{1 \cdot 2}$ ;  $\sum_1$  — ориентировочное направление;

$v_{1 \cdot 2}$  — погрешность наблюденного направления  $N'_{1 \cdot 2}$ ;  $z_1$  — погрешность в  $\sum_1$  или общая погрешность ориентировки направлений на пункте 1.

Обычно по соображениям, приведенным ниже, величины  $\sum$  и  $R$  выводят, придерживаясь порядка, указанного в табл. 63.

Табл. 63 составляется в одной схеме для всех пунктов сети, каждому пункту отводится в схеме свое место, свой раздел.

Таблица 63

## Пункт Ивановка

| Наблюденные пункты          | $N'$  | $T'$ или $T$   | Ориентировочные углы $\Sigma$        | Приближение ориентированных направлений $R$          | $t$                        | $\lg s$ | $a$ | $b$ | Уравненные направления |
|-----------------------------|---|--|--------------------------------------|--|----------------------------|---------|-----|-----|------------------------|
| 1                           | 2   | 3  | 4                                    | 5  | 6                          | 7       | 8   | 9   | 10                     |
| Семиню<br>Волынь<br>Шестово | 0° 0' 0",15<br>46° 8' 52",27<br>64° 9' 39",61 | 93° 21' 42",75<br>138° 30' 32",80<br>156° 31' 21",34 | 92° 21' 42",60<br>40° ,53<br>41° ,73 | 92° 21' 41",64<br>138° 30' 33",76<br>156° 31' 21",10 | +1°,11<br>-0°,96<br>+0°,24 |         |     |     |                        |
| Зяблево                     | 188° 52' 45",40                               | 226° 14' 26",49                                      | 41° ,09                              | 226° 14' 26",89                                      | -0°,40                     |         |     |     |                        |
|                             |   | $\Sigma_0 =$   | 92° 21' 41",49                       |  | +0°,01                     |         |     |     |                        |

В графе 1 записывают названия наблюденных пунктов с данной станции; в графе 2 — величин  $N'$ , понимая под ними  $N + r^k$ ; в графе 3 помещают величины  $T'$ , полученные для соответствующих линий или в процессе вычисления приближенных координат, как указано выше, или выведенные по приближенным координатам по формуле

$$\operatorname{tg} T'_{1 \cdot 2} = \frac{y^o_2 - y^o_1}{x^o_2 - x^o_1}.$$

Для твердых направлений в этой графе просто записывают данное  $T$ . В графе 4 помещают по строкам разности третьей и второй граф, т. е. величины  $\Sigma$ , даваемые каждым наблюденным с данной станции

пунктом. Среднес из всех  $\sum$  принимается за ориентировочный угол  $\Sigma_0$ , который и прилагается к каждой из величин для получения в графе 5 приближенно ориентированных направлений  $R$ . В шестой графе  $l$  получаем разности  $T' - R$  или  $T - R$ , сумма которых должна быть равна нулю. В графике 7 вписывают логарифмы сторон с четырьмя знаками; о назначении следующих граф будем сказано ниже.

Очевидно, теперь уравнение погрешности для направления с пункта 1 на пункт 2 мы можем переписать так

$$v_{1 \cdot 2} = -z_1 + \frac{\cos T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2}} \rho'' \cdot \delta y_2 - \frac{\cos T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2}} \rho'' \cdot \delta y_1 - \\ - \frac{\sin T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2}} \rho'' \cdot \delta x_2 + \frac{\sin T'_{1 \cdot 2}}{s_{1 \cdot 2}} \rho'' \cdot \delta x_1 + l_{1 \cdot 2}.$$

Величина  $z_1$  — погрешность  $\Sigma_0$  или общая погрешность величин  $R$ , выведенных на пункте 1, обусловленная погрешностью ориентировки на этом пункте; величины  $l_{1 \cdot 2}$  — те самые, которые получены в графике 6 табл. 63.

Выражая  $s$  в километрах, а поправки  $\delta y$  и  $\delta x$  в дециметрах, и введя обозначения

$$10 \delta x = \xi; \quad 10 \delta y = \eta;$$

$$(a) = -20,6265 \sin T'; \quad (b) = +20,6265 \cos T', \quad \left. \begin{array}{l} a = \frac{(a)}{s_{km}}; \quad b = \frac{(b)}{s_{km}} \end{array} \right\}. \quad (465)$$

Тогда уравнение погрешностей напишется еще так

$$-z_1 + a_{1 \cdot 2} \xi_2 + b_{1 \cdot 2} \eta_2 - a_{1 \cdot 2} \xi_1 - b_{1 \cdot 2} \eta_1 + l_{1 \cdot 2} = v_{1 \cdot 2} \quad (466)$$

Для величин  $(a)$  и  $(b)$  имеются особые таблицы А. С. Филоненко, в которых аргументом служит, конечно,  $T'$ . Величины  $a$  и  $b$  получают по  $(a)$  и  $(b)$  в 8 и 9 графах табл. 63 посредством вычисления на логарифмической линейке.

Очевидно, для противоположных направлений в уравнениях (466) коэффициенты  $a$  и  $b$  лишь изменяют свой знак.

Уравнения (466) надо составить для каждого наблюденного в уравниваемой сети направления, включая и направления, наблюденные по твердым сторонам и на твердых пунктах. Нужно различать при составлении этих уравнений следующие случаи:

1) наблюденное направление идет с твердой точки 1 на твердую же точку 2, тогда

$$-z_1 + l_{1 \cdot 2} = v_{1 \cdot 2}, \quad (467)$$

так как

$$\delta x_2 = \delta x_1 = 0, \quad \delta y_2 = \delta y_1 = 0;$$

2) наблюденное направление идет с твердой точки 1 на определяющую точку 2, тогда

$$-z_1 + a_{1 \cdot 2} \xi_2 + b_{1 \cdot 2} \eta_2 + l_{1 \cdot 2} = v_{1 \cdot 2}; \quad (468)$$

3) наблюденное направление идет с определяемой точки 1 на твердую точку 2, тогда

$$-z_1 - a_{1 \cdot 2} \xi_1 - b_{1 \cdot 2} \eta_1 + l_{1 \cdot 2} = v_{1 \cdot 2}; \quad (469)$$

4) наблюденное направление идет с определяемой точки 1 на определяемую же точку 2, тогда

$$-z_1 + a_{1 \cdot 2} \xi_2 + b_{1 \cdot 2} \eta_2 - a_{1 \cdot 2} \xi_1 - b_{1 \cdot 2} \eta_1 + l_{1 \cdot 2} = v_{1 \cdot 2}. \quad (470)$$

Составив уравнения погрешностей, мы могли бы от них по общим правилам переходить к нормальным уравнениям. Но на каждом пункте сумма поправок  $v$  наблюдаемых направлений должна быть равной нулю; поэтому сумма уравнений (466), написанных для всех направлений, наблюдаемых с данного пункта, должна быть приравнена нулю на каждом пункте. Эти уравнения приводят к возможности легко исключить из общего решения неизвестные величины  $z$ , и тем самым уменьшить число нормальных уравнений, решаемых в общей схеме, на число пунктов сети. Нормальные уравнения, из которых исключены величины  $z$ , называются редуцированными нормальными уравнениями.

### § 99. Составление редуцированных нормальных уравнений и их решение

На черт. 287 пункты сети, кроме буквенных названий, имеют еще номера.

На пункте  $c$  уравнения погрешностей имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} -z_{11} - a_{11 \cdot 12} \xi_{11} - b_{11 \cdot 12} \eta_{11} + l_{11 \cdot 12} = v_{11 \cdot 12} \\ -z_{11} - a_{11 \cdot 5} \xi_{11} - b_{11 \cdot 5} \eta_{11} + l_{11 \cdot 5} = v_{11 \cdot 5} \\ -z_{11} + a_{11 \cdot 4} \xi_4 + b_{11 \cdot 4} \eta_4 - a_{11 \cdot 4} \xi_{11} - b_{11 \cdot 4} \eta_{11} + l_{11 \cdot 4} = v_{11 \cdot 4} \\ -z_{11} + a_{11 \cdot 10} \xi_{10} + b_{11 \cdot 10} \eta_{10} - a_{11 \cdot 10} \xi_{11} - b_{11 \cdot 10} \eta_{11} + l_{11 \cdot 10} = v_{11 \cdot 10} \end{array} \right\} \quad (471)$$

Уравнения (471) составляют известную часть в общей системе нормальных уравнений сети; чтобы эту часть написать проще, обозначим в (471) коэффициенты при неизвестных так: при  $\xi_4$  — через  $A$ , при  $\eta_4$  — через  $B$ ; при  $\xi_{10}$  — через  $C$ ; при  $\eta_{10}$  — через  $D$ , при  $\xi_{11}$  — через  $E$ ; при  $\eta_{11}$  — через  $F$ . Тогда мы получим

- 1)  $4z_{11} - [A]\xi_4 - [B]\eta_4 - [C]\xi_{10} - [D]\eta_{10} - [E]\xi_{11} - [F]\eta_{11} = 0$
- 2)  $-[A]z_{11} + [AA]\xi_4 + [AB]\eta_4 + [AC]\xi_{10} + [AD]\eta_{10} + [AE]\xi_{11} + [AF]\eta_{11} + [Al]$
- 3)  $-[B]z_{11} + [AB]\xi_4 + [BB]\eta_4 + [BC]\xi_{10} + [BD]\eta_{10} + [BE]\xi_{11} + [BF]\eta_{11} + [Bl]$
- 4)  $-[C]z_{11} + [AC]\xi_4 + [BC]\eta_4 + [CC]\xi_{10} + [CD]\eta_{10} + [CE]\xi_{11} + [CF]\eta_{11} + [Cl]$
- 5)  $-[D]z_{11} + [AD]\xi_4 + [BD]\eta_4 + [CD]\xi_{10} + [DD]\eta_{10} + [DE]\xi_{11} + [DF]\eta_{11} + [Dl]$
- 6)  $-[E]z_{11} + [AE]\xi_4 + [BE]\eta_4 + [CE]\xi_{10} + [DE]\eta_{10} + [EE]\xi_{11} + [EF]\eta_{11} + [El]$
- 7)  $-[F]z_{11} + [AF]\xi_4 + [BF]\eta_4 + [CF]\xi_{10} + [DF]\eta_{10} + [FF]\xi_{11} + [FF]\eta_{11} + [Fl]$

Только первое из этих семи выражений представляет собой одно из уравнений общей системы нормальных уравнений, потому что  $z_{11}$  входит только в уравнения пограничностей, даваемые пунктом  $c$ . Остальные выражения должны будут еще суммироваться с соответственными выражениями, получаемыми на остальных пунктах триангуляции, и понятно, что, например, выражение второе будет суммироваться с теми, в которых квадратический коэффициент будет при  $\xi_4$ ; выражение седьмое будет суммироваться с теми, в которых квадратический коэффициент будет при  $\eta_{11}$ , и т. д. Мы можем помочь выражения первого исключить из шести остальных выражений, полученных на пункте  $c$ , неизвестное  $z_{11}$ ; конечно, этим самым мы уменьшим число нормальных уравнений, решаемых в общей схеме, на число пунктов в нашей сети. Сделав такое исключение  $z_{11}$ , мы перейдем от выражений 2—7 к таким выражениям

$$\left. \begin{aligned} 2)' & \left\{ [AA] - \frac{[A]^2}{4} \right\} \xi_4 + \left\{ [AB] - \frac{[A][B]}{4} \right\} \eta_4 + \left\{ [AC] - \right. \\ & \left. - \frac{[A][C]}{4} \right\} \xi_{10} + \left\{ [AD] - \frac{[A][D]}{4} \right\} \eta_{10} + \left\{ [AE] - \right. \\ & \left. - \frac{[A][E]}{4} \right\} \xi_{11} + \left\{ [AF] - \frac{[A][F]}{4} \right\} \eta_{11} + [Al] \\ 3)' & \left\{ [AB] - \frac{[A][B]}{4} \right\} \xi_4 + \left\{ [BB] - \frac{[B]^2}{4} \right\} \eta_4 + \left\{ [BC] - \right. \\ & \left. - \frac{[B][C]}{4} \right\} \xi_{10} + \left\{ [BD] - \frac{[B][D]}{4} \right\} \eta_{10} + \left\{ [BE] - \right. \\ & \left. - \frac{[B][E]}{4} \right\} \xi_{11} + \left\{ [BF] - \frac{[B][F]}{4} \right\} \eta_{11} + [Bl] \\ \dots & \dots \\ 7)' & \left\{ [AF] - \frac{[A][F]}{4} \right\} \xi_4 + \left\{ [BF] - \frac{[B][F]}{4} \right\} \eta_4 + \right. \\ & \left. + \left\{ [CF] - \frac{[C][F]}{4} \right\} \xi_{10} + \left\{ [DF] - \frac{[D][F]}{4} \right\} \eta_{10} + \right. \\ & \left. + \left\{ [EF] - \frac{[E][F]}{4} \right\} \xi_{11} + \left\{ [FF] - \frac{[F]^2}{4} \right\} \eta_{11} + [Fl] \end{aligned} \right\} \quad (472)$$

Выражения (472) и являются частями соответственных редуцированных нормальных уравнений, причем редуцирование заключается в исключении величин  $z$ .

Присоединим к группе (471) еще уравнение такого вида

$$[A] \xi_4 + [B] \eta_4 + [C] \xi_{10} + [D] \eta_{10} + [E] \xi_{11} + [F] \eta_{11} - 4z_{11} = 0, \quad (473)$$

которое существует в силу того, что  $v_{11.12} + v_{11.5} + v_{11.4} + v_{11.10} = 0$ . Если уравнению (473) присвоить вес  $-\frac{1}{4}$ , а уравнениям группы (471) вес единицы, то, переходя от (471) с присоединением к ним (473) по обычным правилам к нормальным уравнениям, мы получим сразу выражения (472).

Очевидно, в (473)  $z$  входит вообще с коэффициентом, равным числу  $n$  наблюденных с данного пункта направлений. Следовательно, для получения редуцированных нормальных уравнений мы на каждом пункте образуем сумму составленных на нем уравнений погрешностей, которую приравниваем нулю. Приписывая каждому из уравнений погрешностей вес единица, а этому уравнению, представляющему собой  $\sum v$ , вес, равный  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  — число наблюденных на данном пункте направлений, переходим по общим правилам от таких  $n-1$  уравнений к нормальным уравнениям, и получаем в результате части редуцированных нормальных уравнений, доставляемые данным пунктом в общей системе нормальных уравнений. До этого перехода при действительных вычислениях заполняют особую табл. 64, в которой каждому пункту отводится особый раздел для выписки в нем уравнений погрешностей этого пункта.

Таблица 64

## Пункт

|       | $\xi_4$           | $\eta_4$          | $\xi_{10}$         | $\eta_{10}$        | $\xi_{11}$         | $\eta_{11}$        | $z_{11}$ | $t$               | $s$ | $p$            | $v$ |
|-------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|-------------------|-----|----------------|-----|
| 11—4  | $+a_{11 \cdot 4}$ | $+b_{11 \cdot 4}$ |                    |                    | $-a_{11 \cdot 4}$  | $-b_{11 \cdot 4}$  | -1       | $t_{11 \cdot 4}$  |     | 1              |     |
| 11—5  |                   |                   |                    |                    | $-a_{11 \cdot 5}$  | $-b_{11 \cdot 5}$  | -1       | $t_{11 \cdot 5}$  |     | 1              |     |
| 11—10 |                   |                   | $+a_{11 \cdot 10}$ | $+b_{11 \cdot 10}$ | $-a_{11 \cdot 10}$ | $-b_{11 \cdot 10}$ | -1       | $t_{11 \cdot 10}$ |     | 1              |     |
| 11—12 |                   |                   |                    |                    | $-a_{11 \cdot 12}$ | $-b_{11 \cdot 12}$ | -1       | $t_{11 \cdot 12}$ |     | 1              |     |
| Суммы | $+a_{11 \cdot 4}$ | $+b_{11 \cdot 4}$ | $+a_{11 \cdot 10}$ | $+b_{11 \cdot 10}$ | $-\Sigma a$        | $-\Sigma b$        | -4       | $\Sigma t$        |     | $-\frac{1}{4}$ |     |

Через  $p$  обозначен вес уравнения,  $s$  — сумма всех чисел в каждой строчке, но без коэффициентов — 1 при  $z_{11}$ .

Понятно, что работа по составлению частей редуцированных нормальных уравнений может быть распределена между двумя-тремя вычислителями, ведущими работу независимо друг от друга, что, конечно, существенно ускорит весь процесс уравнивания триангуляции при значительном числе наблюденных в ней направлений. Обычно искомые поправки координат обозначают римскими цифрами. Так следует обозначить (черт. 287):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= I; \quad \eta_1 = II; \quad \xi_3 = III; \quad \eta_5 = IV; \quad \xi_4 = V; \quad \eta_4 = VI; \quad \xi_6 = VII; \quad \eta_6 = VIII; \\ \xi_8 &= IX; \quad \eta_8 = X; \quad \xi_{10} = XI; \quad \eta_{10} = XII; \quad \xi_{11} = XIII; \quad \eta_{11} = XIV. \end{aligned}$$

Результаты вычисления на каждом пункте частей редуцированных нормальных уравнений вписывают в особую табл. 65, в которой первая графа отводится для названий станций и неизвестных, входящих в части редуцированных уравнений, составленных на данной станции, причем для каждой станции отводится в табл. 65 особый раздел (горизонтальная полоса); последующие графы отводятся для неизвестных — для каждого неизвестного I, II, III, ... — своя графа. Предпоследняя графа табл. 65 отводится под свободные члены и последняя под суммы коэффициентов. Условимся называть при образовании нормальных уравнений через:  $aa$  произведения коэффициентов неизвестного I, умножаемых сами на себя;  $ab$  — произведения коэффициентов неизвестного I на

Таблица 65

| Станция | I        | II       | III      | IV       | V        | VI       | VII      | VIII     | IX       | X        | XI       | XII      | XIII     | XIV | I        | ss       |          |          |          |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
|         |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |     |          |          |          |          |          |
| 1       | $[aa]_1$ | $[ab]_1$ | $[bb]_1$ | $[ac]_1$ | $[ad]_1$ | $[bc]_1$ | $[bd]_1$ | $[cd]_1$ | $[dd]_1$ | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $[ah]_1$ | $[bh]_1$ | $[ch]_1$ | $[dh]_1$ |          |
|         | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ai]_2$ | $[bi]_2$ | $[ci]_2$ | $[di]_2$ |
|         | $III$    | $IV$     | $V$      | $VI$     | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ai]_1$ | $[bi]_1$ | $[ci]_1$ | $[di]_1$ |
|         | $IV$     | $V$      | $VI$     | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[gi]_2$ | $[hi]_2$ | $[ji]_2$ | $[ki]_2$ |
|         | $V$      | $VI$     | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ci]_2$ | $[di]_2$ | $[gi]_2$ | $[hi]_2$ |
|         | $VI$     | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ci]_1$ | $[di]_1$ | $[gi]_1$ | $[hi]_1$ |
| 2       | $I$      | $II$     | $III$    | $IV$     | $—$      | $[ab]_2$ | $[ac]_2$ | $[ad]_2$ | $[bc]_2$ | $[bd]_2$ | $[cd]_2$ | $[cc]_2$ | $[dd]_2$ | $-$ | $[ag]_2$ | $[bg]_2$ | $[cg]_2$ | $[dg]_2$ | $[gh]_2$ |
|         | $II$     | $III$    | $IV$     | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ah]_2$ | $[bh]_2$ | $[ch]_2$ | $[dh]_2$ |
|         | $III$    | $IV$     | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[gh]_1$ | $[hi]_1$ | $[gi]_1$ | $[hi]_1$ |
|         | $IV$     | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[gh]_2$ | $[hi]_2$ | $[gi]_2$ | $[hi]_2$ |
|         | $VII$    | $VIII$   | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_2$ | $[dh]_2$ | $[gh]_2$ | $[ih]_2$ |
|         | $VIII$   | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_1$ | $[dh]_1$ | $[gh]_1$ | $[ih]_1$ |
| 7       | $III$    | $IV$     | $VII$    | $VIII$   | $IX$     | $X$      | $-$      | $-$      | $[cc]_7$ | $[cd]_7$ | $[dd]_7$ | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_7$ | $[dh]_7$ | $[gh]_7$ | $[ih]_7$ |
|         | $IV$     | $VII$    | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_1$ | $[dh]_1$ | $[gh]_1$ | $[ih]_1$ |
|         | $VII$    | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_2$ | $[dh]_2$ | $[gh]_2$ | $[ih]_2$ |
|         | $VIII$   | $—$      | $—$      | $—$      | $—$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$      | $-$ | $-$      | $[ch]_1$ | $[dh]_1$ | $[gh]_1$ | $[ih]_1$ |

коэффициенты неизвестного II;  $ac$  — произведения коэффициентов неизвестного I на коэффициенты неизвестного III;  $be$  — произведения коэффициентов неизвестного II на коэффициенты неизвестного V и так далее.

Другими словами, каждому неизвестному припишем букву алфавита, порядковый номер которой в алфавите равен номеру неизвестного. Эти обозначения и проведены в табл. 65.

Конечно, в каждом горизонтальном разделе табл. 65 просто выписываются коэффициенты частей редуцированных нормальных уравнений, полученных на соответствующем пункте (станции), разнося эти коэффициенты по соответствующим графикам и строкам и выписывая только квадратические коэффициенты и коэффициенты, находящиеся вправо от диагонали, образуемой квадратическими коэффициентами. Для получения теперь коэффициентов первого нормального уравнения мы должны суммировать по графикам числа, находящиеся в пересечении строк, подписанных цифрой I, со всеми графиками; для получения коэффициентов второго нормального уравнения мы должны суммировать по графикам числа, стоящие в пересечении строк, подписанных цифрой II, со всеми графиками, начиная с озаглавленной цифрой II, и т. д.

Если придерживаться порядка вычисления приближенных координат, указанного нами в § 98, то поправки  $\delta x$  и  $\delta y$  будут вообще невелики, они вряд ли будут превосходить 0,3 м. Поэтому вполне достаточно коэффициенты нормальных уравнений вычислять только с двумя десятичными знаками и даже с одним десятичным знаком; в схеме же Гаусса (или Дулитля) все числа достаточно получать также только с двумя десятичными знаками.

После решения нормальных уравнений на каждом пункте используют уравнение (473) для вывода из него соответствующего  $z$ . Поправки направлений определяются, конечно, из уравнений (471), выписанных в табл. 64; значение  $v$  помещают в последней графе табл. 64. Вычисление поправок контролируется тем, что на каждом пункте  $\sum v$  должна быть равной нулю.

Окончательные дирекционные углы получаются по формуле

$$T_{i \cdot k} = R_{i \cdot k} + z_i + v_{i \cdot k}, \quad (474)$$

понимая под  $i$  — номер станции, а под  $k$  — номер пункта, направление на который с  $i$  имеет дирекционный угол  $T_{i \cdot k}$ ;  $R_{i \cdot k}$  берется то самое, которое было получено в табл. 63.

Для направления с твердого пункта на твердый имели по (467):

$$v_{1 \cdot 2} = -z_1 + l_{1 \cdot 2} = -z_1 + T_{1 \cdot 2} - R_{1 \cdot 2}.$$

Подставляя это выражение  $v_{1 \cdot 2}$  в (474), получим в правой части  $T_{1 \cdot 2}$ . Следовательно, дирекционные углы твердых сторон никаких поправок при уравнивании не получат, что и должно быть.

Назовем через  $D$  число всех наблюденных направлений, считая в этом числе и направления, взятые с твердых пунктов на твердые. Если число вновь определяемых пунктов равно  $n$ , то число неизвестных поправок координат будет равно  $2n$ ; число неизвестных  $z$  будет равно  $n+q$ , где  $q$  — число твердых пунктов, на которых были исполнены

наблюдения при вставке новой сети. Тогда ошибка  $\mu$  измеренного направления вычисляется по такой формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{D - q - 3n}}. \quad (475)$$

Так как сумма  $l$  на каждом пункте была равна нулю, то

$$\sum v^2 = [ll] + [al] I + [bl] II + [cl] III + \dots \quad (476)$$

Следует отмстить, что в самое недавнее время входит в практику несколько иной порядок составления нормальных уравнений. До составления этих уравнений изготавливается схематический чертеж сети, на котором выписывают при соответствующих направлениях: коэффициенты  $a$  и  $b$  уравнений (471), но только для направлений с определяемых пунктов; свободные члены этих уравнений для всех направлений;  $l_{\text{пр}} + l_{\text{обр}}$ , т. е. суммы свободных членов для прямого и обратного направлений; величины  $c = l_{\text{пр}} + l_{\text{обр}} + 2(a + b)$ , но только для направлений с определяемых пунктов на твердые. Ускорение работы по составлению нормальных уравнений обусловливается как использованием такого чертежа, так и принятием в расчет соображения, что прямые и обратные направления имеют коэффициенты при одних и тех же неизвестных, равные по величине, но противоположные по знаку. Кроме того, каждое нормальное уравнение разделяется на две части: первая часть получается без принятия в расчет уравнений (473), вторая часть доставляется уравнениями (473); каждое окончательное уравнение получается как сумма этих двух частей. При составлении первой части нормального уравнения с квадратическим коэффициентом при  $\delta x_k$ , коэффициенты  $a$ , подписанные при направлениях, исходящих из пункта  $K$ , возводят в квадрат и сумму  $[aa]$  помножают на два, — в результате получают коэффициент при  $\delta x_k$  в первой части этого нормального уравнения; умножая коэффициенты  $a$  на коэффициенты  $b$ , подписанные при тех же исходящих из  $K$  направлениях, беря сумму таких произведений и удваивая ее, получают коэффициент в том же уравнении при  $\delta y_k$ ; остальные коэффициенты относятся только к определяемым пунктам и получаются так: коэффициент при  $\delta x_{k+1}$  равен  $-2a^2_{k,k+1}$ ; коэффициент при  $\delta y_{k+1}$  равен  $-2a_{k,k+1} \cdot b_{k,k+1}$  и т. д.; конечно, на самом деле для получения коэффициента при  $\delta x_{k+1}$  перемножают коэффициенты  $a$ , подписанные по стороне  $K$ ,  $K+1$  при  $K$  и  $K+1$  и умножают на два; а при получении коэффициента при  $\delta y_{k+1}$  перемножают коэффициент  $a$ , подписанный по этой линии при  $K$ , на коэффициент  $b$ , подписанный по той же линии при  $K+1$ , и результат удваивают. Аналогично поступают для получения коэффициента при  $\delta x_{k+2}$  и при  $\delta y_{k+2}$ , и т. д. Для получения свободного члена уравнения с квадратическим коэффициентом при  $\delta x_k$  умножают коэффициенты  $a$  при направлениях, исходящих из  $K$ , на суммы ( $l_{\text{пр}} + l_{\text{обр}}$ ) по соответственным линиям. Этот порядок при некотором навыке, конечно, приводит к быстрому составлению первых частей нормальных уравнений, причем каждое нормальное уравнение составляется, следовательно, сразу в полном его составе (но отношению, правда, к его первой части), в противоположность порядку заполнения табл. 65, когда сперва составляются части нормальных уравнений, доставляемые наблюдениями только на данной станции, а затем такие части суммируются. Для составления вторых частей нормальных уравнений поступаем так.

На пункте № 1, с которого наблюдали  $n_1$  направлений, берем сумму коэффициентов  $a$  для направлений с этого пункта и делим ее на  $\sqrt{n_1}$ ; затем берем сумму таких же коэффициентов  $b$  и делим ее на  $\sqrt{n_1}$ ; далее следует деление на  $\sqrt{n_1}$  коэффициентов  $a_{2 \cdot 1}$  и  $b_{2 \cdot 1}$ , при пункте № 2 для направления 2—1; далее идет деление на  $\sqrt{n_1}$  коэффициентов  $a_{3 \cdot 1}$  и  $b_{3 \cdot 1}$  при пункте № 3 для направления 3—1, и т. д. Эти деления заменяются в действительности просто выписками из вспомогательных табличек, составленных для  $n = 2; n = 3; \dots; n = 11$ , в которых аргументом служит делимая на  $\sqrt{n}$  величина. Совершенно аналогично поступают на остальных определяемых пунктах и, по существу, на каждом пункте занимаются, пользуясь чертежом сети и выписанными на нем коэффициентами, получением коэффициентов уравнения (473), но приводимых к весу единица. Результаты этих действий вписывают в особую табл. 66, в которой первая строка отводится пункту № 1, вторая — пункту № 2, ..., а графы — неизвестным I, II, III, ...

При этом для твердых пунктов прямые с них коэффициенты  $a$  и  $b$  равны нулю. Составив такую табл. 66, далее назовем числа графы

Таблица 66

| Неизвестные<br>Пункты | I<br>$\alpha$                        | II<br>$\beta$                        | III<br>$\gamma$                      | IV<br>$\delta$                       | V<br>$\epsilon$                      | VI                                   | VII                                | VIII                               |
|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1                     | $\frac{[a_{1 \cdot k}]}{\sqrt{n_1}}$ | $\frac{[b_{1 \cdot k}]}{\sqrt{n_1}}$ | $\frac{a_{2 \cdot 1}}{\sqrt{n_1}}$   | $\frac{b_{2 \cdot 1}}{\sqrt{n_1}}$   | $\frac{a_{3 \cdot 1}}{\sqrt{n_1}}$   | $\frac{b_{3 \cdot 1}}{\sqrt{n_1}}$   | .....                              | .....                              |
| 2                     | $\frac{a_{1 \cdot 2}}{\sqrt{n_2}}$   | $\frac{b_{1 \cdot 2}}{\sqrt{n_2}}$   | $\frac{[a_{2 \cdot k}]}{\sqrt{n_2}}$ | $\frac{[b_{2 \cdot k}]}{\sqrt{n_2}}$ | $\frac{a_{3 \cdot 2}}{\sqrt{n_2}}$   | $\frac{b_{3 \cdot 2}}{\sqrt{n_2}}$   | .....                              | .....                              |
| 3                     | $\frac{a_{1 \cdot 3}}{\sqrt{n_3}}$   | $\frac{b_{1 \cdot 3}}{\sqrt{n_3}}$   | $\frac{a_{2 \cdot 3}}{\sqrt{n_3}}$   | $\frac{b_{2 \cdot 3}}{\sqrt{n_3}}$   | $\frac{[a_{3 \cdot k}]}{\sqrt{n_3}}$ | $\frac{[b_{3 \cdot k}]}{\sqrt{n_3}}$ | $\frac{a_{3 \cdot 4}}{\sqrt{n_3}}$ | $\frac{b_{3 \cdot 4}}{\sqrt{n_3}}$ |
| 4                     | .....                                | .....                                | .....                                | .....                                | .....                                | .....                                | .....                              | .....                              |
| 5                     |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                    |                                    |
| 6                     |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                    |                                    |
| .                     |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                    |                                    |
| .                     |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                    |                                    |
| .                     |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                      |                                    |                                    |

I, II, III, IV, ... соответственно через  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ . Беря теперь  $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma], [\alpha\delta], [\alpha\epsilon], \dots$  с обратными знаками, получаем в виде: —  $[\alpha\alpha]$  I — I  $[\alpha\beta]$  II —  $[\alpha\gamma]$  III —  $[\alpha\delta]$  IV — ... вторую часть первого нормального уравнения с квадратическим коэффициентом при неизвестном I.

Далее: —  $[\alpha\beta]$  I —  $[\beta\beta]$  II —  $[\beta\gamma]$  III —  $[\beta\delta]$  IV — ... доставит вторую часть второго нормального уравнения с квадратическим коэффициентом при неизвестном II, и т. д.

Трудно сказать, существенны ли преимущества этого порядка составления нормальных уравнений по сравнению с порядком, основанным на составлении табл. 64 и 65. Конечно, в этом порядке число вычислительных действий меньше, но требуется большее напряжение от вычислителей, тогда как переход от табл. 64 к табл. 65 и последую-

щие действия по суммированию в табл. 65 выполняются механически. Кроме того, ясно, что этот порядок предполагает все направления в сети сплошными.

### § 100. Правила Шрейбера

Эти правила приводят к облегчению работы по составлению нормальных уравнений путем уменьшения числа уравнений погрешностей в табл. 64 предыдущего параграфа.

Пусть на некотором пункте имеем уравнения погрешностей

$$\begin{aligned} -z + a_1x + b_1y + c_1u + d_1w + \dots + l_1 &= v_1; \\ -z + a_2x + b_2y + c_2u + d_2w + \dots + l_2 &= v_2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -z + a_nx + b_ny + c_nu + d_nw + \dots + l_n &= v_n. \end{aligned}$$

Шрейбер внес следующие положения.

**Первое положение.** От этих уравнений перейти условно к уравнениям, которые он назвал «редуцированными» уравнениями погрешностей, такого вида

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1u + d_1w + \dots + l_1 &= 0 \dots \text{с весом } 1; \\ a_2x + b_2y + c_2u + d_2w + \dots + l_2 &= 0 \dots, \quad " \quad 1; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_nx + b_ny + c_nu + d_nw + \dots + l_n &= 0 \dots \text{с весом } 1; \\ [a]x + [b]y + [c]u + [d]w + \dots + [l] &= 0 \dots, \quad " \quad -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

**Второе положение.** Редуцированные уравнения погрешностей

$$\begin{aligned} ax + by + cu + \dots + l_1 &= 0 \dots \text{с весом } p_1, \\ ax + by + cu + \dots + l_2 &= 0 \dots, \quad " \quad p_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ ax + by + cu + \dots + l_m &= 0 \dots \text{с весом } p_m, \end{aligned}$$

которые различаются только свободными членами, могут быть заменены одним уравнением

$$ax + by + cu + \dots + \frac{p_1l_1 + p_2l_2 + \dots + p_ml_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} = 0 \dots$$

с весом  $(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_m)$ .

Положение второе распространяется на уравнения, относящиеся к разным станциям. На основе этого положения два уравнения: одно для направления с A на B и второе — для направления с B на A, соединяются в одно, так как коэффициенты при одних и тех же неизвестных в таких двух уравнениях равны между собой.

Так как несплошные линии в заполняющих сетях как правило почти отсутствуют, то значение положения второго очевидно.

**Третье положение.** Уравнение

$$ax + by + cu + \dots + l = 0 \dots \text{ с весом } p$$

может быть заменено уравнением

$$qax + qby + qcui + \dots + ql = 0 \dots \text{ с весом } \frac{p}{q^2}.$$

**Четвертое положение.** Это положение является следствием положений первого и второго и гласит так: если на пункте  $P$  имеем только два уравнения погрешностей

$$-z + l_1 = v_1 \dots \text{ с весом } 1,$$

$$-z + ax + by + cu + \dots + l_2 = v_2 \dots \text{ с весом } 1,$$

то они заменяются одним уравнением

$$ax + by + cu + \dots + l_2 - l_1 = 0 \dots \text{ с весом } \frac{1}{2}.$$

**Пятое положение.** Два редуцированных уравнения погрешностей

$$ax + by + cu + \dots + l_1 = 0 \dots \text{ с весом } 1,$$

$$ax + by + cu + \dots + l_2 = 0 \dots, \quad " \quad 1,$$

различающиеся лишь свободными членами, заменяются одним:

$$2ax + 2by + 2cu + \dots + l_1 + l_2 = 0 \dots \text{ с весом } \frac{1}{2}.$$

Это есть следствие второго и третьего положений.

**Шестое положение.** Два уравнения

$$ax + by + cu + \dots + l_1 = 0 \dots \text{ с весом } 1,$$

$$ax + by + cu + \dots + l_2 = 0 \dots, \quad " \quad \frac{1}{2},$$

различающиеся только свободными членами и весами, заменяются одним

$$3ax + 3by + 3cu + \dots + 2l_1 + l_2 = 0 \dots \text{ с весом } \frac{1}{6}.$$

(Следствие второго и третьего положений.)

Применение положений второго, третьего, пятого и шестого предполагает сохранение на каждом пункте в составе редуцированных уравнений погрешностей уравнения вида

$$[a]x + [b]y + [c]u + \dots + [l] = 0 \dots \text{ с весом } -\frac{1}{n},$$

за исключением лишь тех твердых пунктов, где наблюдались только два направления, из которых одно при этом идет также на твердый пункт; в этом случае действует положение четвертое, и на пункте остается только одно редуцированное уравнение:

$$ax + by + cu + \dots + l_2 - l_1 = 0 \dots \text{ с весом } \frac{1}{2}$$

(уже без прибавления к нему суммы двух уравнений).

В практическом применении эти правила Шрейбера предполагают:

1) что на каждом твердом пункте наблюдалось, вместе с направлениями на определяемые пункты, только одно твердое направление;

2) что свободные члены  $l$  уравнений погрешностей на твердом пункте получаются, как  $T' - (T_0 - N'_0 + N')$ . Другими словами, на твердом пункте ориентировочный угол  $\sum_0$  получается просто, как разность  $T_0 - N'_0$ , понимая под  $T_0$  дирекционный угол на твердый пункт, наблюденный с нашего твердого пункта, а под  $N'_0$  — наблюденное направление на этот же твердый пункт. Следовательно, в табл. 63 на твердых пунктах в графе четвертой будет просто стоять только  $T_0 - N'_0$ , без заполнения других строк этой графы. Прибавляя это  $\sum_0 = T_0 - N'_0$  к числам второй графы, получим в пятой графе величины  $R$ , и далее получим

$$l = T' - (\sum_0 + R) = T' - (T_0 - N'_0 + N').$$

Очевидно,  $l$  для направления на твердый пункт будет равно нулю, а  $|l|$  для твердого пункта в табл. 63 не будет равно нулю.

При соблюдении указанных двух условий правила Шрейбера, получая наименование механических правил, формулируются так:

**Первое правило.** Два противоположных направления 1 и 2 дают уравнение

$$0 = (1) + (2) \dots \text{с весом } \frac{1}{2},$$

за исключением случая, когда одно из этих направлений является единственным на вновь определяемый пункт с твердого пункта; если таковым является направление 2, то получаем измененное первое правило

$$0 = 2(1) + (2) \dots \text{с весом } \frac{1}{6}.$$

**Второе правило.** Каждое одностороннее направление 1 дает

$$0 = (1) \dots \text{с весом } 1,$$

за исключением случая, когда оно является единственным на вновь определяемый пункт с твердого пункта; в этом случае

$$0 = (1) \dots \text{с весом } \frac{1}{2}$$

**Третье правило.** Кроме уравнений, доставляемых отдельными направлениями или соединениями их по первому правилу или по измененному первому правилу, каждая станция с  $n$  направлениями дает

$$0 = (1) + (2) + (3) + \dots + (n) \text{ с весом } -\frac{1}{n},$$

включая сюда и направление с твердого пункта на твердый. Но на твердом пункте, с которого наблюдался только один вновь определяемый пункт, третье правило отпадает.

Так как нередко направления, наблюдаемые с твердого пункта на вновь определяемые пункты, ссылаются не с одним, а с двумя или с тремя направлениями на твердые пункты, то для применения ме-

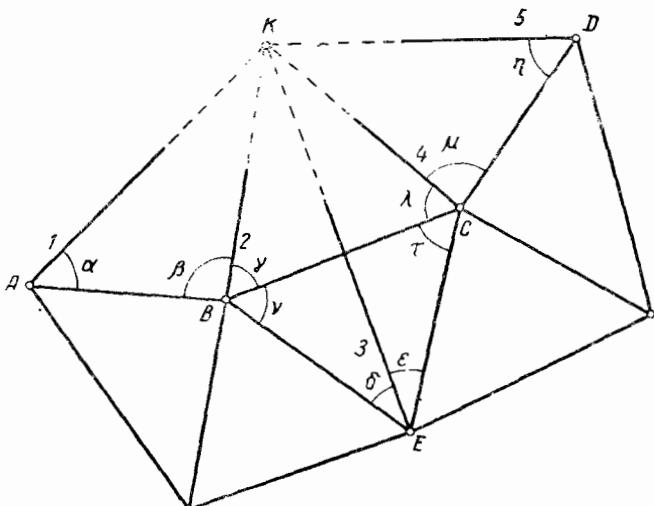
нических правил Шрейбера предварительно на таком твердом пункте производят уравнивание наблюденных направлений, а после этого оставляют в списке наблюденных направлений такие уравненные направления на определяемые пункты вместе с направлением только на один из твердых пунктов, выбор которого безразличен.

### § 101. Определение дополнительных пунктов; общие соображения

Дополнительный пункт  $K$  может определяться: а) многократной прямой засечкой, когда на него взяты направления с ряда твердых точек, координаты которых уже установлены, причем число твердых точек должно быть более двух; б) многократной обратной засечкой, когда на определяемом пункте измерены углы между направлениями с него более чем на три твердые точки, причем предполагается, что два из этих углов уже дают надежное определение дополнительного пункта по задаче Потенота; в) комбинированной засечкой, когда кроме направлений или углов, взятых с определяемого пункта на твердые пункты и приводящих уже к определению его многократно (или однократно) по задаче Потенота, взяты одно или несколько направлений на этот пункт  $K$  с твердых точек.

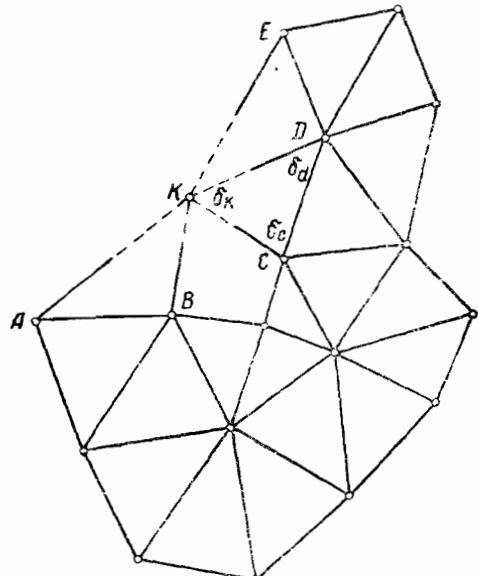
Если с двух твердых точек имеем два направления на пункт  $K$ , образующих при нем угол не менее  $40^\circ$  и не более  $140^\circ$ , то, конечно, имеем определение этого пункта из простой прямой засечки: каждое лишнее направление на пункт  $K$ , сверх этих двух, с других твердых точек ставит уже вопрос об уравнивании такого пункта. Точно так же, если на пункте  $K$  измерены только два угла между направлениями с него на три твердых пункта, то пункт  $K$  определяется обратной засечкой по известной задаче Потенота; каждый лишний угол, измеренный сверх этих двух, на пункте  $K$  с использованием новых твердых точек сверх взятых ранее трех вызывает необходимость уравнивания многократно определенной таким образом точки Потенота. Если бы на пункт  $K$  был измерен угол на некотором твердом пункте, а затем на самом пункте  $K$  был бы измерен угол между направлением на этот твердый пункт и на некоторый второй твердый пункт, то при величине этого угла, большей  $40^\circ$  и меньшей  $140^\circ$ , мы имели бы определение  $K$  из боковой засечки. Прибавление к этим двум углам углов, измеренных на пункте  $K$  на другие твердые точки, приводит к комбинированной засечке и к уравниванию материала по определению  $K$ . Понятно, что дополнительные пункты, как являющиеся сгущением опорной сети, должно определяться непременно с контролем, а это требование приводит именно к тому, что простые прямая, обратная или боковая засечки обращаются в многократные прямые и обратные засечки и в комбинированные засечки, а это в свою очередь приводит к необходимости уравнивания каждого дополнительного пункта или строго или приближенно. Отметим, что при определении дополнительных пунктов обратной засечкой очень существенным является иметь добавочное направление с одного из твердых пунктов на определяемый  $K$ , вследствие чего получается твердость ориентировки направлений, взятых с  $K$ , и одновременно обращение обратной засечки в комбинированную. Это нужно иметь в виду, особенно при съемках городов и при больших строительствах: организационно, при современных видах транспорта в городах, добавочная работа по измерению угла на одном твердом пункте должна считаться очень легко проводимой, а польза от нее при определении

дополнительных пунктов — очень существенна. К сожалению, мы должны констатировать, что боковая засечка и комбинированная засечка совсем как-то выпали из поля зрения геодезистов, работающих по опорным сетям в городах и на новых строительствах.



Черт. 288

Обращаясь сперва к многочленным прямым засечкам, следует отметить здесь два различных случая определения пункта  $K$ . Первый случай характеризуется тем, что к каждому направлению, взятому на  $K$  с некоторой твердой точки, можно присоединить еще два направления на  $K$  с других двух твердых точек таким образом, что эти направления оказываются исходящими из вершин треугольника основной сети или из вершин двух смежных сторон треугольников основной сети. Этот случай представлен на черт. 288, на котором точки  $A, B, C, D, E$  твердые; в этом случае уравнивание выполняют, применив метод условных наблюдений. Второй случай представлен черт. 289; для него характерным является то, что направления, определяющие пункт  $K$ , относятся к вершинам не смежных, удаленных значительно по порядку их нумерации в составлении основной сети, треугольников. Здесь с успехом применяется уравнивание в координатах или уравнивание непосредственных наблюдений.



Черт. 289

Обычно в заполняющих сетях направления на дополнительные пункты, определяемые прямыми засечками, наблюдают вместе с направлениями на основные пункты только в четных или только в нечетных из всех шести использующихся приемов наблюдений на пунктах этих сетей. Но могут быть случаи, когда пункты структуры сетей выбирают и строят на них знаки после построения основной сети и выполнения в ней наблюдений; иногда это выгодно с организационной точки зрения. В этих последних случаях связывают направления на определяемые дополнительные пункты с одним или двумя твердыми направлениями; конечно, правильно будет всегда эту связь давать с двумя твердыми направлениями, чтобы иметь контроль в работе.

Очевидно, почти всегда возникает в последующем вопрос о предварительном уравнивании на станциях наблюдений для определения дополнительных пунктов; этот вопрос решается не только в зависимости от порядка сортировки материала на станциях, но еще и от порядка уравнивания основной сети.

Вообще, из-за различия в порядке наблюдений и из-за различия в порядке уравнивания, мы можем иметь целый ряд случаев предварительного уравнивания на станциях материала, взятого для определения дополнительных пунктов. Мы увидим, что все эти разнообразные случаи могут быть сведены к двум. Но пока остановимся на рассмотрении некоторых характерных случаев.

В § 79 даны формулы и пример на уравнивание станции, на которой в одних приемах наблюдались только направления на все основные пункты, в других же приемах наблюдались направления на все основные пункты и на все дополнительные. Этот случай является типическим, и данные в § 79 формулы получают значение ходовых для получения значений на бледных направлений (вершины, углов, отсчитываемых от направления на начальный предмет) на дополнительные пункты.

Ia. Допустим теперь, что мы уравнивали основную сеть по направлениям и что наблюденные направления  $A, B, D, F, \dots$  с некоторой станции  $O$  на основные пункты получили при этом уравнивании поправки  $\delta A, \delta B, \delta D, \delta F, \dots$ . Далее допустим, что вместе с этими основными пунктами на  $O$  наблюдали дополнительные пункты, и в результате применения формул § 79 получили для них наблюденные направления  $C, E, G, \dots$ .

Приимая в расчет результаты уравнивания основных направлений, мы напишем, например, для направления на  $C$ , следующие выводы

$$\begin{aligned} C' &= A + \delta A + (C - A) = C + \delta A; \\ C'' &= B + \delta B + (C - B) = C + \delta B; \\ C''' &= D + \delta D + (C - D) = C + \delta D; \\ C^{IV} &= F + \delta F + (C - F) = C + \delta F. \end{aligned}$$

.....

Окончательно для направления на  $C$  получим

$$C_m = C + \frac{\delta A + \delta B + \delta D + \delta F + \dots}{n},$$

где  $n$  — число основных направлений с пункта  $O$ . Но при уравнивании основной сети по направлениям сумма  $\delta A + \delta B + \delta D + \delta F + \dots$  равна нулю.

Понятно, что равенство

$$C_m = C$$

будет иметь место и по отношению к любым направлениям  $E, G, \dots$ , взятым с  $O$  на дополнительные пункты вместе со всеми основными направлениями с этого же пункта.

Следовательно, если основная сеть уравнивается по направлениям, то направления на дополнительные пункты, наблюденные на некотором пункте вместе со всеми основными с него направлениями, никаких поправок за уравнивание основной сети не получают, а при определении дополнительных пунктов мы используем на пункте  $O$  или направления:

$$A + \delta A, B + \delta B, C, D + \delta D, E, F + \delta F, G, \dots,$$

исправленные поправками за кривизну, или углы

$$\angle AOC = C - (A + \delta A),$$

$$\angle BOC = C - (B + \delta B),$$

.....

также исправленные поправками за кривизну.

Конечно, направления  $A + \delta A, B + \delta B, D + \delta D$ , или углы  $B - A + \delta B - \delta A, D - B + \delta D - \delta B, \dots$  никаких поправок при уравнивании дополнительного пункта уже не получают.

16. Допустим далее, что основная сеть уравнивалась по углам, хотя наблюдения основных и дополнительных пунктов были исполнены в порядке § 79. Тогда, при уравнивании дополнительных пунктов естественно отыскивать поправки углов между направлениями на них и направлениями на основные пункты, хотя можно уравнивать дополнительный пункт и по направлениям.

В этом случае, если направление  $OC$  с пункта  $O$  на дополнительный пункт  $C$  приходится между смежными основными направлениями  $OB$  и  $OD$  (т. е. внутри угла  $BOD$ , рассматривавшегося при уравнивании основной сети в качестве независимо измеренного, с отысканием его поправки  $\Delta$  из условных уравнений сети), то при уравнивании дополнительного пункта  $C$  по углам мы, по формальным соображениям, должны были бы собственно на  $O$  ввести условие суммы:  $\angle BOC + \delta_1 + \angle COD + \delta_2 =$  уравненному углу  $BOD$ , причем в левой части этого уравнения  $\angle BOC$  и  $\angle COD$  имеют наблюденные значения, выведенные по правилам § 79. Указанное условие суммы мы должны были бы присоединить к остальным условиям или к уравнениям погрешностей, возникающим при уравнивании нашего пункта  $C$ , не делая никаких предварительных уравниваний углов  $BOC$  и  $COD$  на станции  $O$ . Число этих условий сумм равно числу основных пунктов, с которых наблюдался пункт  $C$ ; прибавление их к прочим уравнениям заметно осложнит работу по уравниванию пункта  $C$ .

Но в рассматриваемом случае углы  $BOC$  и  $COD$  не были получены независимо друг от друга. Поэтому нет собственно оснований для введения в уравнивание пункта  $C$  обоих этих углов в качестве независимых друг от друга. Другими словами, мы имеем основания не писать вышеприведенных условий сумм, а в уравнивание пункта  $C$  ввести на пункте  $O$  только один из этих углов:  $BOC$  или  $COD$ . Но, конечно, при

этом следует учесть результат уравнивания основной сети: именно следует считать, что если угол  $BOD$  получил при этом уравнивании поправку  $\Delta$ , то это ведет к исправлению углов  $BOC$  и  $COD$  каждого на  $+\frac{\Delta}{2}$ . Другими словами, написанное выше условие суммы следует решить отдельно, в порядке уравнивания станции, и затем при уравнивании пункта  $C$  иметь дело на пункте  $O$  с отысканием или только поправки (3) угла  $[BOC + \frac{\Delta}{2}]$  или только поправки ( $\gamma$ ) угла  $[COD + \frac{\Delta}{2}]$ , полагая непременно, что (3)  $= -(\gamma)$ . Конечно, приведенный прием — приближенный, но в данном случае при неправильном уравнивании основной сети не может быть речи о правильном уравнивании дополнительного пункта; с другой стороны, при определении дополнительных пунктов мы можем поступиться строгостью решения.

Если дополнительные пункты наблюдались отдельно от основных, то предварительно уравнивание наблюденных на эти пункты направлений возникает только тогда, когда на станциях направления на дополнительные пункты связываются с двумя или более направлениями на остальные пункты. При связи направлений на дополнительные пункты на данной станции только с одним основным (например, на  $A$ ) направлением, все наблюденные направления на дополнительные пункты получают лишь поправку  $A_0 - A$ , понимая под  $A_0$  значение уравненного на  $A$  направления, а под  $A$  — значение направления, наблюденного на этот пункт вместе со всеми направлениями на дополнительные пункты.

На. Допустим, что направления на дополнительные пункты  $C, E, G, \dots$  наблюдались на пункте  $O$  отдельно от основных пунктов, но связывались в каждом приеме с основными направлениями на  $A, B$  и  $F$ . Если уравненные в основной сети направления с  $O$  на  $A, B, F$  назовем через  $A_0, B_0, F_0$ , то очевидно имеем такие выводы:

$$C' = A_0 + C - A = C + A_0 - A;$$

$$C'' = B_0 + C - B = C + B_0 - B;$$

$$C''' = F_0 + C - F = C + F_0 - F.$$

Такие же уравнения можем написать для вывода направлений на  $E, G, \dots$  (причем, конечно, считается, что в наблюденные направления  $A, B, E, \dots$  введены поправки за кривизну). Очевидно, что каждое наблюденное направление  $C, E, G, \dots$  с  $O$  на дополнительные пункты получает поправку

$$\Delta = \frac{(A_0 - A) + (B_0 - B) + (F_0 - F)}{n},$$

понимая под  $n$  число твердых направлений, наблюденных на пункте  $O$  вместе с направлениями на пункты дополнительные.

Если основная сеть уравнивалась по направлениям, то до уравнивания дополнительных пунктов наблюденные на них с пункта  $O$  направления получают постоянную поправку  $\Delta$ , вычисляемую по вышеприведенной формуле. Если будем при уравнивании пункта  $C$  отыскивать поправки к углам, то в качестве наблюденных будут использоваться углы:

$$\angle AOC = (C + \Delta) - A_0;$$

$$\angle COB = (C + \Delta) - B_0.$$

Но по тем же соображениям, которые уже указаны в пункте Iб, на каждом основном пункте будет при уравнивании дополнительного пункта отыскиваться поправка только одного из таких углов.

Iб. Если основная сеть уравнивалась по углам, а для определения дополнительного пункта  $K$  были измерены независимо друг от друга углы  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu \dots$  (черт. 288), то при уравнивании пункта  $K$  в качестве неизвестных вводят поправки этих углов. Если бы в рассматриваемом случае с основного пункта наблюдался только один дополнительный пункт, например с пункта  $C$  (черт. 288) наблюдался бы только один пункт  $K$ , то тогда, не производя стационарного уравнивания, мы должны были бы к уравнениям погрешностей и к условным уравнениям, возникающим при уравнивании пункта  $K$ , прибавить условие суммы

$$\delta\lambda + \delta\mu + \lambda + \mu - \angle BCD = 0,$$

беря в этом уравнении для угла  $BCD$  его значение, уравненное при обработке основной сети. Но обычно на основном пункте  $O$  (черт. 290) наблюдают углы для определения нескольких дополнительных пунктов  $C, E, G$ . Так как уравнивание дополнительных пунктов ведется отдельно для каждого из них, то, очевидно, до этого уравнивания нужно сделать предварительное исправление независимо измеренных углов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (черт. 290), лежащих между смежными основными направлениями  $OB$  и  $OD$ . Каждый из этих углов получит поправку  $\Delta$ , вычисляемую так

$$\Delta = \frac{(\angle BOD)_0 - (\angle BOD)_n}{k}.$$

причем под  $(\angle BOD)_0$  понимается уравненное в основной сети значение угла  $BOD$ , а  $(\angle BOD)_n = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ ;  $k$  — число независимо измеренных углов внутри угла  $BOD$ . По существу при последующем отдельном уравнивании пункта  $C$  нужно было бы использовать условие суммы, для угла  $\alpha' = \alpha + \Delta$  и угла  $\varepsilon = (\beta + \gamma + \delta) + 3\Delta$ , придавая этим углам соответственные веса. Но обычно этого не делают, отыскивая лишь поправку для  $\alpha'$ .

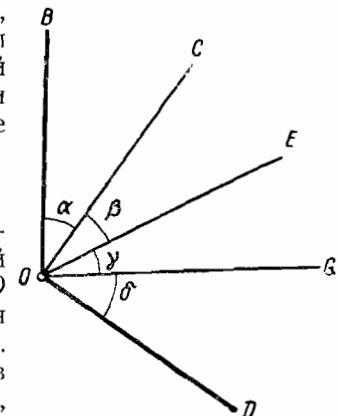
Пусть направления с пункта  $O$  на основные пункты  $A, B, D, F, \dots$  имеют окончательные (уравненные) значения дирекционных углов  $T_A, T_B, T_D, T_F, \dots$ . Далее, если назовем через  $N'_A, N'_B, N'_D, N'_F, N'_C, N'_E, N'_G, \dots$  исправленные поправками за кривизну наблюденные с  $O$  направления на пункты  $A, B, D, F, C, E, G, \dots$ , из которых  $C, E, G, \dots$  суть дополнительные, то тогда для ориентированного направления  $R_C$  на пункт  $C$  будем иметь такие выводы

$$R'_C = T_A + N'_C - N'_A = N'_C + T_A - N'_A$$

$$R''_C = T_B + N'_C - N'_B = N'_C + T_B - N'_B$$

.....

$$R'''_C = T_F + N'_C - N'_F = N'_C + T_F - N'_F$$



Черт. 290

или в результате

$$R^m_c = N'_c + \frac{(T_A - N'_A) + (T_B - N'_B) + \dots + (T_F - N'_F)}{n}. \quad (477)$$

Так как

$$N'_A = R_A - \Sigma,$$

$$N'_B = R_B - \Sigma,$$

. . . . .

$$N'_F = R_F - \Sigma,$$

то формулу (477) можно еще переписать так

$$R^m_c = R_c + \frac{(T_A - R_A) + (T_B - R_B) + \dots + (T_F - R_F)}{n}. \quad (478)$$

причем в (478) под  $R_A, R_B, \dots, R_F$  понимаются приближенно ориентированные направления  $R$ .

Формулы (477) и (478) работают, если материал для определения дополнительных пунктов собран в порядке § 79, а также при измерении направлений на дополнительные пункты отдельно от измерения направлений на основные пункты, но при связи с любым числом твердых направлений. Понятно, что выводы по формулам (477) или (478) имеют силу независимо от того, будем ли мы при последующем уравнивании дополнительного пункта принимать в качестве неизвестных поправки углов или направлений.

В (477) и (478)  $n$  — число тех основных направлений, которые наблюдались вместе с направлениями на дополнительные пункты — безразлично, выполнялись наблюдения направлений на дополнительные пункты в порядке § 79 или в ином порядке.

Если таблица направлений заканчивалась получением величин  $N'$ , то тогда применяем формулу (477); если таблица направлений была продолжена и дополнена выводом величин  $R$ , то применяем (478). Заметим, что величины  $R^m_E, R^m_G, R^m_c, \dots$  вместе с величинами  $T_A, T_B, T_F$  будут играть роль направлений при уравнивании дополнительных пунктов по направлениям, но, конечно, с отысканием поправок только к  $R^m_c, R^m_E, R^m_G, \dots$ . Величины же  $R^m_c - T_A, R^m_F - T_B, \dots$  будут играть роль наблюденных углов при уравнивании дополнительных пунктов по углам, если для определения этих пунктов материал был собран в виде направлений.

Формулами (477) и (478) не охватывается только случай IIб, когда для определения дополнительных пунктов измерялись независимо друг от друга углы  $BOC, COE, EOG, GOD$  (черт. 290).

В этом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} R^m_c &= T_{OB} + \alpha + \Delta + r^k_{OC} - r^k_{OB} \\ R^m_E &= T_{OB} + \alpha + \beta + 2\Delta + r^k_{OF} - r^k_{OB} \\ R^m_G &= T_{OB} + \alpha + \beta + \gamma + 3\Delta + r^k_{OG} - r^k_{OB} \\ \Delta &= (T_{OD} - T_{OB}) - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - (r^k_{OD} - r^k_{OB}) \end{aligned} \right\}. \quad (479)$$

4

Конечно, если уравнивание дополнительного пункта ведут, отыскивая поправки углов, то после получения величин  $R^m$  по формулам (477),

(478) или (479) надлежит собственно удержать в этом уравнивании условия сумм, в которых свободный член будет в силу примененного метода вывода величин  $R^m$  всегда равен нулю. Однако, принимая в расчет пониженные требования к определению дополнительных пунктов, этих условий сумм обычно не вводят, для чего принимают, что на каждом основном пункте направление на пункт дополнительный определяется углом только с одним основным направлением; к такому углу и отыскивают поправку при уравнивании дополнительного пункта по углам.

## § 102. Определение дополнительного пункта из многократной прямой засечки по методу условных наблюдений

Допустим, что определению подлежит пункт  $K$ , изображенный на черт. 288. Пункт  $K$  наблюдался с основных пунктов  $A, B, E, C, D$ . Для определения дополнительного пункта прямой засечкой достаточно иметь на него два направления с основных пунктов или два угла между двумя направлениями с двух основных пунктов на него и соответствующими твердыми направлениями. Если на пункт  $K$  взято  $n$  направлений, то при уравнивании его по направлениям имеем  $n - 2$  условий, причем все эти условия будут условиями сторон или полюсными.

При уравнивании углов приходится иметь в виду, что наблюдеными на пункте  $B$  приходится считать как угол  $KBA$ , так и угол  $KBC$ , а на пункте  $C$  приходится считать наблюдеными как угол  $KCB$ , так и угол  $KCD$ . Следовательно, избыточно наблюдеными будут  $n - 2 + q$  угла, причем под  $q$  понимается число тех основных пунктов, на которых направление на  $K$  разбивает на две части угол между твердыми направлениями. Очевидно, в этом случае мы имеем  $n - 2$  условий стороны и  $q$  условий сумм.

Конечно, до приступа к уравниванию пункта  $K$  мы выполняем по правилам предыдущего параграфа предварительное уравнивание углов или направлений, взятых на этот пункт с основных пунктов  $A, B, E, C, D$ . Занумеруем направления и углы на  $K$ , как показано на черт. 288.

При уравнивании направлений будем иметь условия сторон в таком виде:

из фигуры  $AKEB$

$$\frac{\sin [\alpha - (1)]}{\sin [\alpha + \beta - (1) + (2)]} \cdot \frac{\sin [\delta + \nu + \gamma + (3) - (2)]}{\sin [\delta + (3)]} \cdot \frac{AB}{BE} = 1;$$

из фигуры  $BKCE$

$$\frac{\sin [\delta + (3)]}{\sin [\nu + \gamma - (2)]} \cdot \frac{\sin [\lambda + \tau + (4)]}{\sin [\varepsilon - (3)]} \cdot \frac{\sin [\gamma - (2)]}{\sin [\lambda + (4)]} = 1;$$

из фигуры  $BKDC$

$$\frac{\sin [\gamma - (2)] \cdot \sin [\mu + \eta - (4) + (5)]}{\sin [\gamma + \lambda + (4) - (2)] \sin [\eta + (5)]} \cdot \frac{BC}{DC} = 1.$$

Как видно, одно из этих условий обращается в условие полюсное. Величины  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$  суть наблюденные углы, уравненные предварительно по правилам предыдущего параграфа:

$$\alpha = T_{AB} - R^m_{AK}, \quad \beta = R^m_{BK} - T_{BA}, \dots$$

Величины (1), (2), (3) суть, конечно, поправки величин  $R^m_{AK}$ ;  $R^m_{BK}$ ;  $R^m_{EK}$ ... При уравнивании углов условные уравнения нанишутся так

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sin [\alpha + (\gamma)]}{\sin [\alpha + \beta + (\alpha) + (\beta)]} \cdot \frac{\sin [\delta + \nu + \gamma + (\delta) + (\gamma)]}{\sin [\delta + (\delta)]} \cdot \frac{AB}{BE} = 1 \\ & \frac{\sin [\delta + (\delta)]}{\sin [\nu + \gamma + (\gamma)]} \cdot \frac{\sin [\lambda + \tau + (\lambda)]}{\sin [\varepsilon + (\varepsilon)]} \cdot \frac{\sin [\gamma + (\gamma)]}{\sin [\lambda + (\lambda)]} = 1 \\ & \frac{\sin [\gamma + (\gamma) \cdot \sin [\mu + \eta + (\mu) + (\eta)]]}{\sin [\gamma + \lambda + (\lambda) + (\gamma)] \sin [\eta + (\eta)]} \cdot \frac{BC}{DC} = 1; \\ & \quad \left. \begin{aligned} & (\beta) + (\gamma) = 0 \\ & (\lambda) + (\mu) = 0 \\ & (\delta) + (\varepsilon) = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}. \quad (480)$$

Равенство нулю свободных членов в последних трех уравнениях (в условиях сумм) обусловлено, конечно, тем, что проведено предварительное уравнивание материала, служащего для определения дополнительного пункта. Следует отметить, что уравнивание углов при определении пункта  $K$  предполагает, что углы  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  действительно измерены независимо друг от друга. Только тогда условия сумм получают все свое значение.

Если для определения дополнительных пунктов на соответственных пунктах основной сети измерялись направления, в том или ином порядке, то выходом угла  $\beta$  покрывается вывод угла  $\gamma$ , а вывод угла  $\mu$  является следствием вывода угла  $\lambda$ . В этом случае наблюдаемыми величинами являются только величины:  $R^m_{AK}$ ,  $R^m_{BK}$ ,  $R^m_{CK}$ ,  $R^m_{DK}$ , и следует, конечно, из уравнивания находить поправки именно только этих величин, независимо от того, уравнена ли основная сеть по направлениям или по углам. Поправка  $R^m_{AK}$  и поправка угла  $R^m_{AB} - R^m_{AK}$  повторяют друг друга; из двух углов  $\beta$  и  $\gamma$  или  $\lambda$  и  $\mu$ , один является производным от другого, и условия сумм являются по существу не соответствующими собранному при наблюдениях материалу. Другими словами, если даже основная сеть уравнивалась по углам, то все-таки следует дополнительные пункты уравнивать по направлениям, если для определения их на основных пунктах измерялись направления, причем придется или произвести предварительное уравнивание этих направлений, как указано в пункте II а предыдущего параграфа, или, что то же, вывести  $R^m_c$  по формуле (477) или (478).

Независимое друг от друга измерение углов  $\beta$  и  $\gamma$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  выполняется иногда (и в общем очень редко) только в сетях III класса, для определения точек IV и V классов. При определении таких дополнительных пунктов низших классов мы можем, однако, поступиться строгостью уравнивания и из уравнений (480) оставить только условия сторон, использовав уравнения сумм лишь для исключения в уравнениях сторон или поправок углов  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , или поправок углов  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$ .

При этом имеем

$$\begin{aligned} & (\beta) = -(\gamma), \\ & (\lambda) = -(\mu), \\ & (\delta) = -(\varepsilon). \end{aligned}$$

Нестрогость решения будет, конечно, заключаться в том, что в выражение суммы квадратов поправок углов, при условии минимума которой будут отыскиваться неизвестные, войдут поправки не всех наблюденных независимо углов, а лишь тех, которые остались в уравнениях сторон по исключении ряда углов при помощи условий сумм.

### § 103. Определение дополнительного пункта из многократной прямой засечки по методу посредственных наблюдений

По существу эта задача является частным и простым видом общей задачи по уравниванию тригонометрической сети методом посредственных наблюдений, рассмотренной в §§ 97—100.

Сеть определяемых точек заменяется одной точкой, все наблюденные направления обращаются в односторонние, идущие только с твердых пунктов на один определяемый.

Вычисление начинается с предварительного уравнивания направлений или углов на дополнительный пункт, как указано в § 101, и вывода величин  $R^m$ . После этого следует вывод приближенных координат  $x^o_K$  и  $y^o_K$  пункта  $K$  (черт. 289). Из треугольников  $ABK$ ,  $CDK$ ,  $DEK$ , ... выбираем тот, в котором угол при  $K$  ближе подходит к прямому, и от основной стороны которого пункт  $K$  находится всего ближе, комбинируя, конечно, если нужно, оба эти требования. Пусть это будет (черт. 289) треугольник  $CDK$ . Вывод из этого треугольника  $x^o_K$  и  $y^o_K$  можно сделать по следующим формулам.

**Первые формулы.** Назовем через  $R^m_{CK}$  и  $R^m_{DK}$  приближенно ориентированные направления с  $C$  на  $K$  и с  $D$  на  $K$ ; через  $\delta_C$  — угол  $KCD$ , через  $\delta_D$  — угол  $KDC$  и через  $\delta_K$  — угол  $CKD$ .

Вычисляем

$$\begin{aligned}\delta_C &= T_{CD} - R^m_{CK}; \\ \delta_D &= R^m_{DK} - T_{CD} \pm 180^\circ; \\ \delta_K &= R^m_{CK} - R^m_{DK}.\end{aligned}$$

Сумма  $\delta_C + \delta_D + \delta_K$  должна быть в точности равна  $180^\circ 0', 0'', 00$ .

$$m = \frac{y_D - y_C}{\sin \delta_K \cdot \sin T_{CD}} = \frac{x_D - x_C}{\sin \delta_K \cdot \cos T_{CD}};$$

$$\Delta y_{CK} = m \sin \delta_D \cdot \sin R^m_{CK};$$

$$\Delta x_{CK} = m \sin \delta_D \cdot \cos R^m_{CK};$$

$$\Delta y_{DK} = m \sin \delta_C \cdot \sin R^m_{DK};$$

$$\Delta x_{DK} = m \sin \delta_C \cdot \cos R^m_{DK};$$

$$y^o_K = y_C + \Delta y_{CK} = y_D + \Delta y_{DK};$$

$$x^o_K = x_C + \Delta x_{CK} = x_D + \Delta x_{DK}.$$

**Вторые формулы.**

$$x^o_K - x_C = \frac{(y_D - y_C) - (x_D - x_C) \operatorname{tg} R^m_{DK}}{\operatorname{tg} R^m_{CK} - \operatorname{tg} R^m_{DK}}; \quad y^o_K - y_C = (x^o_K - x_C) \operatorname{tg} R^m_{CK};$$

$$x^o_K - x_D = \frac{(y_D - y_C) - (x_D - x_C) \operatorname{tg} R^m_{CK}}{\operatorname{tg} R^m_{CK} - \operatorname{tg} R^m_{DK}}; \quad y^o_K - y_D = (x^o_K - x_D) \operatorname{tg} R^m_{DK}.$$

При  $R^m_{CK}$  или  $R^m_{DK}$ , близких к  $90^\circ$  или к  $270^\circ$ , следует эти формулы заменить такими:

$$y^o_K - y_C = \frac{(x_D - x_C) - (y_D - y_C) \operatorname{ctg} R^m_{DK}}{\operatorname{ctg} R^m_{CK} - \operatorname{ctg} R^m_{DK}}; \quad x^o_K - x_C = (y^o_K - y^o_C) \operatorname{ctg} R^m_{CK};$$

$$y^o_K - y_D = \frac{(x_D - x_C) - (y_D - y_C) \operatorname{ctg} R^m_{CK}}{\operatorname{ctg} R^m_{CK} - \operatorname{ctg} R^m_{DK}}; \quad x^o_K - x_D = (y^o_K - y_D) \operatorname{ctg} R^m_{DK}.$$

### Третьи формулы:

$$x^o_K - x_C = \frac{(x_D - x_C) \operatorname{ctg} \delta_C + (y_D - y_C)}{\operatorname{ctg} \delta_C + \operatorname{ctg} \delta_D};$$

$$y^o_K - y_C = \frac{(y_D - y_C) \operatorname{ctg} \delta_C - (x_D - x_C)}{\operatorname{ctg} \delta_C + \operatorname{ctg} \delta_D};$$

$$x^o_K - x_D = \frac{-(x_D - x_C) \operatorname{ctg} \delta_D + (y_D - y_C)}{\operatorname{ctg} \delta_C + \operatorname{ctg} \delta_D};$$

$$y^o_K - y_D = \frac{-(y_D - y_C) \operatorname{ctg} \delta_D - (x_D - x_C)}{\operatorname{ctg} \delta_C + \operatorname{ctg} \delta_D}.$$

Формулы вторые и третьи рассчитаны на применение арифмометра и таблиц натуральных значений тригонометрических функций Петерса. Формулы первые могут быть применены и при логарифмическом вычислении. В третьих формулах  $\delta_C$  и  $\delta_D$ , конечно, суть предварительно уравненные углы. Так как мы всегда располагаем и величинами  $R^m$  и  $T$ , и величинами углов  $\delta_C$  и  $\delta_D$ , то применение первых, вторых или третьих формул обусловливается только средствами вычисления, но не теми различиями в построении простой прямой засечки, которые разбираются в пизшей геодезии.

По вычислении приближенных координат следует вычисление дирекционных углов  $T'$  по формулам

$$\operatorname{tg} T'_{AK} = \frac{y^o_K - y_A}{x^o_K - x_A}; \quad \operatorname{tg} T'_{BK} = \frac{y^o_K - y_B}{x^o_K - x_B}; \dots$$

с точностью до  $0'',1$ , и вычисление расстояний

$$d_{AK} = \frac{y^o_K - y_A}{\sin T'_{AK}}; \dots \text{ с точностью до целых метров.}$$

Далее следует нахождение коэффициентов

$$(a) = -20,265 \sin T'; \quad (b) = +20,6265 \cos T'$$

(по таблицам Филоненко)

$$a = \frac{(a)}{d_{\text{км}}}; \quad b = \frac{(b)}{d_{\text{км}}};$$

Здесь  $d_{\text{км}}$  — расстояние в километрах.

Понятно, что для направлений с  $C$  на  $K$  и с  $D$  на  $K$  величин  $T'$  вычислять не надо; они будут равны соответственно  $R^m_{CK}$  и  $R^m_{DK}$ .

Теперь пишем уравнения погрешностей

$$\begin{aligned} a_{AK} \xi_K + b_{AK} \eta_K + T'_{AK} - R^m_{AK} &= v_{AK}; \\ a_{BK} \xi_K + b_{BK} \eta_K + T'_{BK} - R^m_{BK} &= v_{BK}. \end{aligned}$$

· · · · ·

Обозначая свободные члены через  $l$ , переходим далее к нормальным уравнениям

$$\begin{aligned} [aa] \xi_K + [ab] \eta_K + [al] &= 0; \\ [ab] \xi_K + [bb] \eta_K + [bl] &= 0. \end{aligned}$$

Передко эти нормальные уравнения решают дважды, представив их второй раз в таком виде:

$$\begin{aligned} [bb] \eta_K + [ab] \xi_K + [bl] &= 0; \\ [ab] \eta_K + [aa] \xi_K + [al] &= 0. \end{aligned}$$

Кроме контроля, таким образом, получают из первого решения вес  $\tau_{ik}$ , как  $[bb \cdot 1]$ , а из второго решения — вес  $\xi_k$ , как  $[aa \cdot 1]$ . Понятно, до решения нормальных уравнений надлежит составить суммы:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + l_1 &= s_1, \\ a_2 + b_2 + l_2 &= s_2, \\ a_3 + b_3 + l_3 &= s_3, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

чтобы иметь контроль вычисления коэффициентов нормальных уравнений

$$\begin{aligned} [aa] + [ab] + [al] &= [as]; \\ [ab] + [bb] + [bl] &= [bs]. \end{aligned}$$

После нахождения  $\xi_K$  и  $\eta_K$  вычисляем  $v$  по формуле:

$$v_i = a_i \xi_K + b_i \eta_K + l_i,$$

а также  $\sum v^2$ , которую находим еще так

$$[vv] = [ll] + [al] \xi_K + [bl] \eta_K.$$

Ошибка единицы веса определяется формулой

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-2}},$$

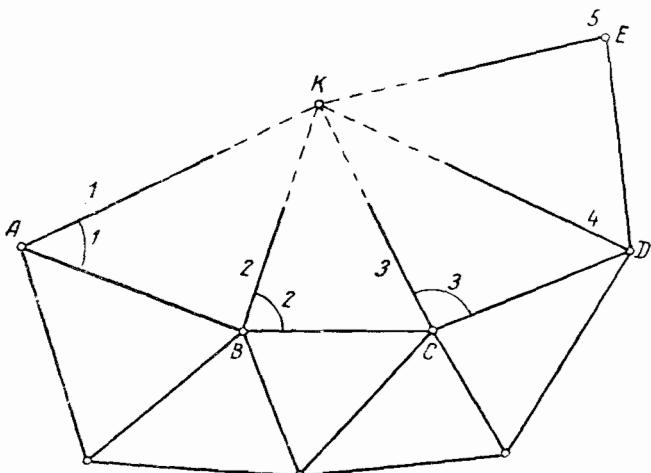
где  $n$  — число твердых точек, с которых определялся пункт  $K$ . Средние ошибки в  $x_K$  и  $y_K$  будут вычисляться так

$$m_x = \frac{\mu}{10 \sqrt{P_\xi}}, \quad m_y = \frac{\mu}{10 \sqrt{P_\eta}}.$$

Но эти средние ошибки характеризуют только точность определения пункта  $K$  относительно тех твердых пунктов, с которых он засекался; общий сдвиг этих твердых точек, может быть даже очень значительный, в величинах  $m_x$  и  $m_y$  не учитывается. Передко  $m_x$  и  $m_y$  получаются около 0,02—0,01 м, между тем общий сдвиг твердых точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  может достигать нескольких дециметров.

### § 104. Графическое уравновешивание дополнительного пункта

Вместо изложенного выше аналитического приема определения значений координат дополнительного пункта, можно с успехом применять следующий графический способ уравновешивания. Назовем направления на  $K$  с точек  $A, B, C, \dots$  (черт. 291) соответственно номерами  $1, 2, 3, \dots, s, \dots, n$ . Вследствие погрешностей в углах  $KAB, KBC, KCD$  эти  $n$  направлений, построенные по этим углам соответственно при  $A, B, C, \dots$  пересекутся вообще в  $\frac{n(n-1)}{2}$  не совпадающих друг с другом точках.



Черт. 291

В самом деле, направления  $1$  и  $2$  дадут одну точку, которую назовем  $(1, 2)$ , направление  $3$ , пересекаясь с направлениями  $1$  и  $2$ , даст две новые точки, которые назовем через  $(1, 3)$  и  $(2, 3)$ ; направление  $4$  даст три новые точки  $(1, 4)$ ;  $(2, 4)$ ;  $(3, 4)$  и т. д. Общее число всех пересечений, образуемых  $n$  направлениями, будет следовательно равно сумме

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Зададимся теперь целью построить на чертеже все эти  $\frac{n(n - 1)}{2}$  пересечений. Для этого прежде всего рассчитаем из треугольников  $KAB, KBC, KCD, KDE$  длины сторон, исходящих из  $K$ , причем каждый такой треугольник придется решить по длине стороны основной сети и по двум к ней прилежащим наблюденным углам.

Пусть:

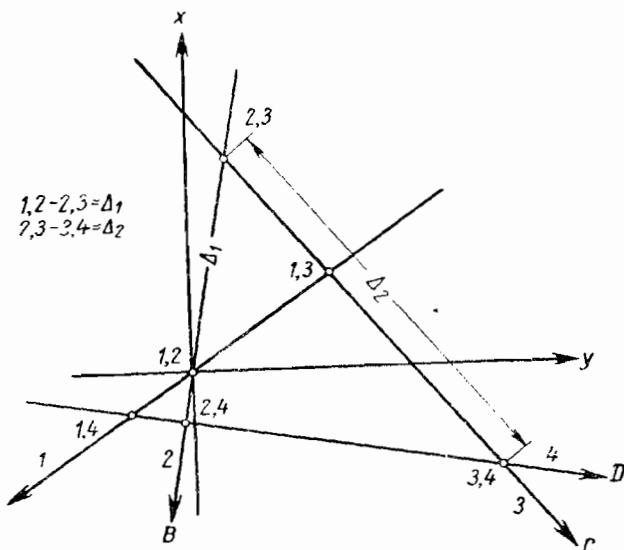
для стороны  $BK$  из треугольника  $KAB$  получилось значение  $b_1$

|   |   |      |   |   |       |   |   |       |
|---|---|------|---|---|-------|---|---|-------|
| ” | ” | $BK$ | ” | ” | $KBC$ | ” | ” | $b_2$ |
| ” | ” | $CK$ | ” | ” | $KBC$ | ” | ” | $c_1$ |

для стороны  $CK$  из треугольника  $KCD$  получилось значение  $c_2$

|   |   |      |   |       |   |   |                 |
|---|---|------|---|-------|---|---|-----------------|
| " | " | $DK$ | " | $KCD$ | " | " | $d_1$           |
| " | " | $DK$ | " | $KDE$ | " | " | $d_2$ ; и т. д. |

Понятно, что для каждой из сторон  $BK$ ,  $CK$ ,  $DK$ , ... из смежных треугольников получаются различные значения; понятно, что  $b_1 = B - (1, 2)*$ ;  $b_2 = B - (2, 3)$ ;  $c_1 = C - (2, 3)$ ;  $c_2 = C - (3, 4)$  и т. д. Расчитаем теперь из треугольника  $KAB$  координаты точки  $K$ ; очевидно, что мы получим координаты  $x_{1,2}$  и  $y_{1,2}$  точки  $(1, 2)$ . Приняв на черт. 292 точку  $(1, 2)$  за начало новых координатных осей, параллельных осям, к которым отнесена основная сеть, проведем из этого начала линии 1 и 2 под азимутами направлений 1 и 2. Если  $b_2 > b_1$  и  $b_2 - b_1 = \lambda_1$ , то,



Черт. 292

откладывая на продолжении прямой 2 (черт. 292) отрезок  $\Delta_1$ , мы, очевидно, получим на чертеже точку  $(2, 3)$ ; прочерчивая через нее прямую 3 под азимутом направления 3, мы получим точку  $(1, 3)$ , а откладывая от  $(2, 3)$  по прямой 3 разность  $c_2 - c_1$ , получим, очевидно, точку  $(3, 4)$ . Пусть  $c_2 < c_1$ ; тогда отрезок  $\Delta_2 = c_1 - c_2$  нужно будет отложить от  $(2, 3)$  по прямой 3 вниз, чтобы получить точку  $(3, 4)$ ; проведя через  $(3, 4)$  прямую 4 под азимутом направления 4, получим в пересечении этой прямой с прямыми 2 и 1 еще точки  $(1, 4)$  и  $(2, 4)$ . Описанное построение ведется в крупном масштабе, например 1:10; для прочерчивания прямых под определенными азимутами следует пользоваться таблицей хорд; при вычислении  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ... надлежит угла в треугольниках  $KAB$ ,  $KBC$ ,  $KCD$  выводить по величинам  $R^m$  и  $T$ .

Иногда вместо определения сторон  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  отыскивают пересечения направлений 3, 4, 5...  $n$  с осями, проведенными через  $(1, 2)$ , или с прямыми, им параллельными. Если с основной точки  $T$  идет на пункт  $K$  линия под азимутом  $T$ , то пересечения ее с осями, имеющими начало в точке  $x_R$  и  $y_S$  определяются такими отрезками на этих осях:

\* Т. с. расстоянию от  $B$  до точки  $(1, 2)$ .

$$\left. \begin{aligned} y &= (x_R - x_T) \operatorname{tg} T + y_T - y_S \\ x &= (y_T - y_S) \operatorname{ctg} T + x_R - x_T \end{aligned} \right\}. \quad (481)$$

Строя каждое из направлений  $1, 2, 3 \dots n$  при помощи отрезков  $x$  и  $y$ , вычисляемых по формуле (481), мы в пересечениях этих направлений друг с другом получим на чертеже точки  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$  и т. д. После построения (тем или иным способом) всех пересечений, образованных  $n$  направлениями, задача определения координат пункта  $K$  сводится к измерению на чертеже абсцисс и ординат всех точек  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(s \cdot t) \dots (n - 1 \cdot n)$  относительно осей с началом в точке  $(1, 2)$  и к вычислению весов всех построенных на чертеже пересечений. Эти вычисления весов основываются на следующем выводе.

Уравнения погрешностей мы можем написать в таком виде

Если положить  $x_{1.2} = x^o$ ;  $y_{1.2} = y^o$ , то в уравнениях (482)  $\Delta u$  и  $\Delta x$  являются поправками, которые надлежит придать к  $x_{1.2}$  и  $y_{1.2}$  для получения вероятных координат точки  $K$ . Полагая веса всех величин  $R^m$  равными между собой, мы имеем такие средние ошибки свободных членов в этих уравнениях (482):  $\mu d_1 \sin 1''$ ,  $\mu d_2 \sin 1''$ ,  $\mu d_3 \sin 1'' \dots$ , если под  $\mu$  понимать среднюю ошибку любого из углов  $1, 2, 3, \dots$ , по которым определяются наблюденные дирекционные углы  $R^m_1, R^m_2, \dots$  Следовательно, относительные веса  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  первого, второго, третьего ... из уравнений (482) соответственно равны  $\frac{1}{d^2_1}, \frac{1}{d^2_2} \dots$  Имея это в виду и обозначая:  $(R^m_1 - T'_1) d_1 \sin 1''$  через  $c_1 (R^m_2 - T'_2) d_2 \sin 1''$  через  $c_2$  и т. д., от уравнений (482) перейдем к таким нормальным уравнениям

$$\begin{aligned}\Delta y [p \cos^2 T'] - \Delta x [p \sin T' \cos T'] &= [pc \cos T']; \\ -\Delta y [p \sin T' \cos T'] + \Delta x [p \sin^2 T'] &= -[pc \sin T'].\end{aligned}$$

Из них имеем

$$\Delta y = \frac{[pc \cos T'] [p \sin^2 T'] - [pc \sin T'] [p \sin T' \cos T']}{[p \cos^2 T'] [p \sin^2 T'] - [p \sin T' \cos T']^2}.$$

Если в числителе выражения для  $\Delta y$  выделим два слагаемых такого вида

- $$1) p_k c_k \cos T'_{k'} \cdot p_s \sin^2 T'_{s'} - p_k c_k \sin T'_{k'} \cdot p_s \sin T'_{s'} \cos T'_{s'},$$

$$2) p_s c_s \cos T'_{s'} \cdot p_k \sin^2 T'_{k'} - p_s c_s \sin T'_{s'} \cdot p_k \sin T'_{k'} \cos T'_{k'},$$

то сумма их будет равна

$$\sigma_{k,s} = p_k p_s \sin [T'_s - T'_{-k}] (c_k \sin T'_s - c_s \sin T'_{-k}).$$

Ставя при  $p$ ,  $c$ ,  $T'$  указатель 1 в  $pc \cos T'$  и в  $pc \sin T'$ , а одновременно в  $p \sin^2 T'$  и  $p \sin T' \cos T'$  — указатель 2; ставя, затем, при  $p$ ,  $c$  и  $T'$  указатель 2 в  $pc \cos T'$ , и в  $pc \sin T'$ , а одновременно в  $p \sin^2 T'$  и

$p \sin T' \cos T'$  — указатель 1, мы выделим два слагаемых, сумма которых будет равна

$$\sigma_{1 \cdot 2} = p_1 p_2 \sin(T'_2 - T'_1) (c_1 \sin T'_2 - c_2 \sin T'_1).$$

Соединяя указанным образом: указатель 1 с указателями 2, 3, 4 … n; указатель 2 с указателями 3, 4, 5 … n; указатель 3 — с указателями 4, 5, 6 … n, мы, очевидно, выберем все пары слагаемых, из которых образуется числитель Z в выражении для  $\Delta v$ , и можем написать

$$Z = \sum p_k p_s \sin(T'_s - T'_k) (c_k \sin T'_s - c_s \sin T'_k). \quad (483)$$

Число слагаемых в (483) равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , потому что значок  $k$  может соединяться лишь с значками  $s$ , имеющими более старший номер, чем  $k$ .

Так как знаменатель N выражения для  $\Delta v$  получается из числителя, если в последнем заменить  $c$  через  $\cos T'$ , то

$$N = \sum p_k p_s \sin^2(T'_s - T'_k),$$

и, следовательно,

$$\Delta y = \frac{\sum p_k p_s \sin(T'_s - T'_k) (c_k \sin T'_s - c_s \sin T'_k)}{\sum p_k p_s \sin^2(T'_s - T'_k)}.$$

Представим теперь себе, что из уравнений (482) мы взяли только два соответствующие направлениям  $k$  и  $s$ ; если из этих двух уравнений определить значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , то, очевидно, это эти значения будут равны абсциссе  $x_{k \cdot s}$  и ординате  $y_{k \cdot s}$  пересечения ( $k \cdot s$ ), измеренным на черт. 292 относительно осей, проходящих через точку (1, 2). Из уравнений:

$$\begin{aligned} \cos T'_k \cdot \Delta y - \sin T'_k \cdot \Delta x &= c_k, \\ \cos T'_s \cdot \Delta y - \sin T'_s \cdot \Delta x &= c_s, \end{aligned}$$

имеем:

$$\Delta y = y_{k \cdot s} = \frac{c_k \sin T'_s - c_s \sin T'_k}{\sin(T'_s - T'_k)},$$

или

$$c_k \sin T'_s - c_s \sin T'_k = \sin(T'_s - T'_k) y_{k \cdot s}.$$

Следовательно, выражение для  $\Delta y$  перепишется так:

$$\Delta y = \frac{\sum p_k p_s \sin^2(T'_s - T'_k) y_{k \cdot s}}{\sum p_k p_s \sin^2(T'_s - T'_k)}. \quad (484)$$

Выражение (484) есть не что иное, как арифметическая средина из ординат всех построенных на черт. 292 пересечений, взятая по их весам. Очевидно, что вес  $P_{k \cdot s}$  пересечения ( $k \cdot s$ ) равен  $p_k p_s \sin^2(T'_s - T'_k)$ . Таким образом, вес каждого пересечения обратно пропорционален произведению квадратов расстояний от него до двух соответственных основных точек и прямо пропорционален квадрату синуса угла между образующими это пересечение направлениями.

Итак, обозначая

$$P_{k \cdot s} = p_k \cdot p_s \sin^2 [T'_s - T'_k],$$

имеем

$$\Delta y = \frac{\Sigma P_{k \cdot s} \cdot y_{k \cdot s}}{\Sigma P_{k \cdot s}}; \quad \Delta x = \frac{\Sigma P_{k \cdot s} \cdot x_{k \cdot s}}{\Sigma P_{k \cdot s}} \quad (485)$$

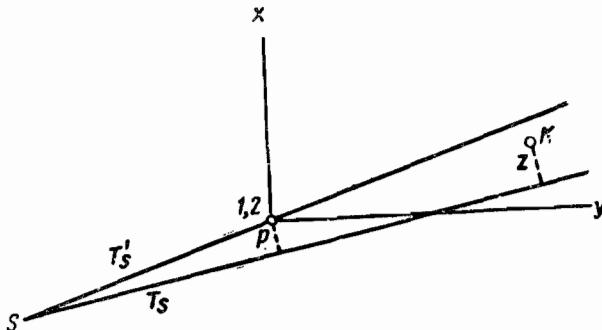
После вычисления формул (485) определим вероятные координаты пункта  $K$  так

$$x = x_{1 \cdot 2} + \Delta x,$$

$$y = y_{1 \cdot 2} + \Delta y.$$

Определим теперь средние ошибки величин  $x$  и  $y$ . Построим на черт. (293) вероятное положение точки  $K$  по координатам  $\Delta y$  и  $\Delta x$ , определяемым из формул (485). Нетрудно видеть, что уравнение прямой, проходящей через основную точку  $S$  и имеющей дирекционный угол  $T_s$ , напишется так

$$y \cos T_s - x \sin T_s (T_s - T'_s)'' d_s \sin 1'' = 0, \quad (486)$$



Черт. 293

если под  $x$  и  $y$  понимать текущие координаты относительно осей  $xy$  с началом в точке  $(1, 2)$ . В самом деле, длина  $p$  перпендикуляра, опущенного на эту прямую из начала координат  $(1, 2)$ , будет равна  $T_s - T'_s) d_s \sin 1''$ , а углы  $\gamma$  и  $\beta$ , образуемые этим перпендикуляром с осями координат  $x$  и  $y$ , соответственно равны  $90^\circ - T'_s$  и  $T_s$ , и, следовательно, уравнение нашей прямой в нормальной форме:

$$y \cos \beta + x \cos \gamma - p = 0$$

обращается в уравнение (486).

Длина  $z$  перпендикуляра, опущенного из точки  $K$  с координатами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  на прямую, выраженную уравнением (486), вычисляется, как известно так

$$z_s = \Delta y \cos T_s - \Delta x \sin T_s - (T_s - T'_s)'' d_s \sin 1''.$$

Но, вследствие малости  $\Delta y$  и  $\Delta x$  и малости различия  $T_s$  от  $T'_s$ , в последнем уравнении можно, пренебрегая малыми величинами второго порядка, заменить  $\cos T_s$  и  $\sin T_s$  через  $\cos T'_s$  и  $\sin T'_s$  и тогда:

$$z_s = \Delta y \cos T'_s - \Delta x \sin T'_s - (T_s - T'_s)'' d_s \sin 1''.$$

Другими словами,  $z_s = -v_s d_s \sin 1''$  и представляет собой погрешность или поправку свободного члена в уравнении (482), составленного

для направления с номером  $s$ . Следовательно, опуская из точки  $K$  (черт. 293) ( $\Delta x, \Delta y$ ) перпендикуляры на прямые  $1, 2, 3, \dots, n$ , построенные на чертеже, и измеряя величины этих перпендикуляров  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ , мы получаем поправки свободных членов уравнений (482), и поэтому ошибка единицы веса  $\mu$  определяется так

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \dots + p_n z_n^2}{n-2}};$$

$$p_1 = \frac{1}{d_1^2}; \quad p_2 = \frac{1}{d_2^2}; \quad \dots; \quad p_n = \frac{1}{d_n^2}.$$

Из нормальных для определения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  уравнений имеем

$$P_{\Delta y} = [p \cos^2 T'] - \frac{[p \sin T' \cos T']^2}{[p \sin^2 T']},$$

или

$$P_{\Delta y} = \frac{[p \cos^2 T'] [p \sin^2 T'] - [p \sin T' \cos T']^2}{[p \sin^2 T']}.$$

По числитель последнего выражения равен знаменателю  $N$ , прежде рассмотренного выражения для  $\Delta y$ .

Поэтому окончательно

$$P_{\Delta y} = \frac{\sum p_k p_s \sin^2 (T'_s - T'_k)}{[p \sin^2 T']} = \frac{[P_{k,s}]}{[p \sin^2 T']}.$$

Вес  $P_{\Delta x}$  определяется совершенно подобным же образом и для него получается такое выражение

$$P_{\Delta x} = \frac{[P_{k,s}]}{[p \cos^2 T']}.$$

Средние ошибки  $m_x$  и  $m_y$  в координатах  $x$  и  $y$  точки  $K$  будут равны

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\Delta x}}}; \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\Delta y}}}.$$

**Примечание.** Если бы при определении  $\Delta x$  и  $\Delta y$  из уравнений (482) мы считали бы веса всех этих уравнений равными между собой, то тогда задача была бы решена под условием минимума суммы:

$$v_1^2 d_1^2 + v_2^2 d_2^2 + \dots + v_n^2 d_n^2,$$

а не суммы квадратов поправок  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ; другими словами, задача была бы решена под условием минимума суммы квадратов перпендикуляров  $z$ , опущенных из вероятного положения пункта  $K$  на направления  $1, 2, 3, \dots, n$ . В практике иногда расчет  $P_{k,s}$  заменяют назначением точки  $K$  на черт. 292 наглаз, руководствуясь правилом называть в треугольнике из трех пересечений точку всего ближе к той стороне, которая лежит против угла, наиболее уклоняющегося от  $90^\circ$ .

#### § 105. Определение дополнительного пункта обратной засечкой

Пусть для определения пункта  $K$  (черт. 294) были измерены на нем направления  $1, 2, 3, 4, 5 \dots n$  на основные точки  $A, B, C, D \dots$ , число которых более трех и равно  $n$ . Для определения  $K$  обратной засечкой достаточно вообще измерить с нее направления на три точки с известными уже координатами их. Если число измеренных с  $K$  направлений более трех, то возникает, конечно, вопрос о нахождении вероятных координат  $x$  и  $y$  пункта  $K$  по способу наименьших квадратов.

Взяв из всех  $n$  наблюдаемых с  $K$  направлений некоторые три направления, вычислим с ними, решая задачу Потенота, значения  $x_0$  и  $y_0$  для координат точки  $K$ , которые будем считать приближенными и определяющими точку  $K_0$ , близкую к вероятному положению точки  $K$ . (Указанные три направления должно выбрать так, чтобы с ними получилось достаточно надежное определение точки  $K$  по способу Потенота). Положим

$$x = x_0 + \Delta x; \quad y = y_0 + \Delta y;$$

и вычислим расстояния  $K_0A$ ,  $K_0B$ ,  $K_0C, \dots$  и дирекционные углы  $T'_1$ ,  $T'_2$ ,  $T'_3, \dots$  направлений  $K_0A$ ,  $K_0B$ ,  $K_0C, \dots$  по формулам

$$\operatorname{tg} T'_1 = \frac{y_a - y_0}{x_a - x_0}; \quad d_1 = \frac{y_a - y_0}{\sin T'_1} = \frac{x_a - x_0}{\cos T'_1};$$

$$\operatorname{tg} T'_2 = \frac{y_b - y_0}{x_b - x_0}; \quad d_2 = \frac{y_b - y_0}{\sin T'_2} = \frac{x_b - x_0}{\cos T'_2};$$

Переходя теперь от направлений  $K_0A$ ,  $K_0B$ ,  $K_0C, \dots$  соответственно к направлениям  $KA$ ,  $KB$ ,  $KC, \dots$ , будем иметь такие уравнения

В этих уравнениях под  $(T_1)$ ,  $(T_2)$ , ...,  $(T_n)$  надлежит понимать, конечно, вероятные дирекционные углы или дирекционные углы направлений с вероятного положения точки  $K$  на основные пункты.

В противоположность задаче определения точки  $K$  прямой засечкой, эти дирекционные углы не могут быть при определении  $K$  обратной засечкой выражены через наблюденные на  $K$  направления и их по-

правки без введения особого вспомогательного неизвестного. Таким неизвестным является дирекционный угол  $z$  нулевого направления в серии полученных из измерений на  $K$  направлений 1, 2, 3, ...,  $n$ . Всегда можно (и следует) направление 1 иметь именно нулевым в этой серии направлений. Понимая под  $z$  дирекционный угол направления  $KA$ , напишем

$$\begin{aligned}(T_1) - [1 + (1)] &= z; \\ (T_2) - [2 + (2)] &= z; \\ \dots \dots \dots \dots & \\ (T_n) - [n + (n)] &= z.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos T'_1 \rho''}{d_1} \Delta y - \frac{\sin T'_1 \rho''}{d_1} \Delta x + z &= T'_1 - 1 - (1) \\ \frac{\cos T'_2 \rho''}{d_2} \Delta y - \frac{\sin T'_2 \rho''}{d_2} \Delta x + z &= T'_2 - 2 - (2) \\ \dots \dots \dots \dots & \\ \frac{\cos T'_n \rho''}{d_n} \Delta y - \frac{\sin T'_n \rho''}{d_n} \Delta x + z &= T'_n - n - (n) \end{aligned} \right\}. \quad (487)$$

Приимая  $z = z_0 + \delta z$  и определив  $z_0$  по формуле

$$z_0 = \frac{[T'_1 - 1] + [T'_2 - 2] + \dots + [T'_n - n]}{n}, \quad (488)$$

вычислим теперь такие величины

$$\left. \begin{aligned} R^m_1 &= z_0 + 1 \\ R^m_2 &= z_0 + 2 \\ R^m_3 &= z_0 + 3 \\ \dots \dots \dots & \\ R^m_n &= z_0 + n \end{aligned} \right\}, \quad (488')$$

которые можно назвать ориентированными направлениями; с этими величинами уравнения (487) перепишутся так

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos T'_1 \rho''}{d_1} \Delta y - \frac{\sin T'_1 \rho''}{d_1} \Delta x + \delta z &= T'_1 - R^m_1 - (1) \\ \frac{\cos T'_2 \rho''}{d_2} \Delta y - \frac{\sin T'_2 \rho''}{d_2} \Delta x + \delta z &= T'_2 - R^m_2 - (2) \\ \dots \dots \dots \dots & \\ \frac{\cos T'_n \rho''}{d_n} \Delta y - \frac{\sin T'_n \rho''}{d_n} \Delta x + \delta z &= T'_n - R^m_n - (n) \end{aligned} \right\}. \quad (489)$$

Вводя прежние коэффициенты  $a$  и  $b$  по (465) § 98 и обозначая

$$\begin{aligned} T'_1 - R^m_1 &= l_1; \quad T'_2 - R^m_2 = l_2; \dots; \quad T'_n - R^m_n = l_n; \\ 10 \Delta y &= \eta; \quad 10 = \Delta x = \xi,\end{aligned}$$

от уравнений (489) переходим к таким

$$\left. \begin{array}{l} -a_1\xi - b_1\eta - \delta z + l_1 = (1) \\ -a_2\xi - b_2\eta - \delta z + l_2 = (2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -a_n\xi - b_n\eta - \delta z + l_n = (n) \end{array} \right\} \quad (490)$$

Из них получаем нормальные уравнения

$$\left. \begin{array}{l} [aa]\xi + [ab]\eta + [a]\delta z - [al] = 0 \\ [ab]\xi + [bb]\eta + [b]\delta z - [bl] = 0 \\ + [a]\xi + [b]\eta + n \cdot \delta z - [l] = 0 \end{array} \right\} \quad (491)$$

Определение  $\delta z$  по существу не нужно и вследствие этого от уравнений (491) переходят к другим, содержащим лишь  $\xi$  и  $\eta$ . Если вычислить

$$a_m = \frac{(a)}{n}; \quad b_m = \frac{(b)}{n}; \quad l_m = \frac{(l)}{n}, \quad (492)$$

то уравнения (490) приводятся к таким

$$\left. \begin{array}{l} (a_m - a_1)\xi + (b_m - b_1)\eta + l_1 - l_m = (1) \\ (a_m - a_2)\xi + (b_m - b_2)\eta + l_2 - l_m = (2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (a_m - a_n)\xi + (b_m - b_n)\eta + l_n - l_m = (n). \end{array} \right.$$

Не трудно видеть, что при вычислении  $z_0$  по формуле (488) величина  $l_m$  равна нулю. Поэтому окончательно имеем

$$\left. \begin{array}{l} (a_m - a_1)\xi + (b_m - b_1)\eta + l_1 = (1) \\ (a_m - a_2)\xi + (b_m - b_2)\eta + l_2 = (2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (a_m - a_n)\xi + (b_m - b_n)\eta + l_n = (n) \end{array} \right\} \quad (493)$$

Таким образом, ход действий при определении  $\xi$  и  $\eta$  будет следующий:

1) вычисляем по задаче Потенота  $x_0$  и  $y_0$  и рассчитываем

$$T'_1, T'_2, \dots, T'_n, d_1, d_2, \dots, d_n;$$

2) вычисляем коэффициенты  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$

3) по формулам (488) вычисляем  $z_0$  и величины  $R_m$  и выводим величины:

$$l_1 = T'_1 - R^m_1; \quad l_2 = T'_2 - R^m_2; \quad \dots \quad l_n = T'_n - R^m_n;$$

4) составляем уравнения погрешностей (493) и соответствующие им два нормальных уравнения для вычисления  $\xi$  и  $\eta$ .

Решение задачи кончаем получением из (493) величин (1), (2) ... и вычислением средней ошибки единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-3}},$$

и выводом средних ошибок координат  $x$  и  $y$  точки  $K$ . Так как обычно на  $K$  измеряются именно направления, то при определении  $K$  и надлежит применять только что указанное решение задачи.

Если бы на пункте  $K$  были измерены независимо друг от друга углы  $AKB = S_1, AKC = S_2, \dots, AKN = S_{n-1}$ , то тогда, вычитая из всех

уравнений группы (A) первое уравнение этой же группы, мы получили бы

Или, вводя коэффициенты  $a$  и  $b$  и неизвестные  $\xi$  и  $\gamma_i$  и имея в виду, что

$$\begin{aligned}(T_2) - (T_1) &= S_1 + \delta S_1, \\(T_3) - (T_1) &= S_2 + \delta S_2, \\&\dots \\(T_n) - (T_1) &= S_{n-1} + \delta S_{n-1}\end{aligned}$$

напишем еще

Полагая

$$\begin{aligned}l_1 &= [T'_2 - T'_1] - S_1, \\l_2 &= [T'_3 - T'_1] - S_2, \\&\dots \dots \dots \dots \\l_{n-1} &= [T'_n - T'_1] - S_{n-1}\end{aligned}$$

мы приходим затем к таким уравнениям погрешностей

$$\left. \begin{aligned} - (a_2 - a_1) \xi - (b_2 - b_1) \eta + l_1 &= \delta S_1 \\ - (a_3 - a_1) \xi - (b_3 - b_1) \eta + l_2 &= \delta S_2 \\ \dots &\dots \\ - (a_n - a_1) \xi - (b_n - b_1) \eta + l_{n-1} &= \delta S_{n-1} \end{aligned} \right\}. \quad (494)$$

От уравнений (494) перходим, конечно, к двум им соответствующим нормальным уравнениям.

## § 106. Заключение по вопросам уравнивания тригонометрических сетей. Понятие о методе И. Ю. Пранис-Праневича

В больших астрономо-геодезических сетях I класса, кроме многочисленных условий фигур, мы имеем значительное число условий базисов и условий лапласовых азимутов и, наконец, имеем два условия

координат в каждом полигоне I класса; последние условия имеют сложный вид. Если ряды триангуляции I класса построены не в виде простых цепей, а из геодезических четырехугольников или в виде двойных цепей, то к перечисленным выше условиям приходится добавить еще многочисленные боковые условия. Понятно, что при обработке государственной триангуляции I класса надлежит сохранить полную научную строгость результатов и, следовательно, вообще говоря, надлежит решать задачу уравнивания астрономо-геодезической сети I класса под условием минимума суммы квадратов поправок измеренных на пунктах этой сети направлений. В такой постановке, однако, задача обработки значительной астрономо-геодезической сети становится крайне громоздкой, и эта громоздкость настолько велика, что по существу может быть приходится говорить скорее о принципиальной желательности уравнивания очень больших сетей под условием минимума суммы квадратов поправок измеренных в треугольниках сети направлений, но не о действительной возможности. Вследствие этого широко практикуется замена каждого звена триангуляции I класса геодезической линией, соединяющей конечные для такого звена лапласовы пункты, и образование полигонов I класса из таких геодезических линий. Каждое звено I класса при этом предварительно уравнивается за условия фигур, условия боковые, за условие базисное и за условия лапласовых азимутов. В этой задаче уравнивания звена I класса наиболее подходящий видоизмененный А. А. Изотовым способ Больца, хотя может быть применено и обычное уравнивание по методу условных наблюдений. Так как в I части руководства мы имеем дело только с триангуляциями, отнесенными на плоскость, то задача уравнивания звена I класса будет рассмотрена нами во II части руководства<sup>1</sup>, но все методы, используемые при уравнивании звена I класса, даны уже в настоящей части курса, и только из-за учета влияния сфероидичности и уклонений отвеса задача переносится во II часть руководства.

Уравнивание полигонов I класса, образованных заменившими отдельные звенья триангуляции геодезическими линиями, сводится к решению условий Лапласа в пунктах Лапласа и условий координат. Здесь задача может быть решена или посредством метода Гельмерта, видоизмененного проф. Ф. Н. Красовским, применяя обработку условных наблюдений, или по методу Больца, или по методу обработки посредственных наблюдений. В последнем случае мы в качестве неизвестных принимаем поправки координат конечных точек геодезических линий, образующих полигоны триангуляции; эти точки являются всегда лапласовыми пунктами. Но, кроме поправок координат лапласовых пунктов, приходится еще в качестве неизвестных вводить поправки астрономической долготы и астрономического азимута, наблюденных в лапласовых пунктах. Задача уравнивания системы полигонов I класса, образованных геодезическими линиями, по способу обработки посредственных наблюдений, конечно, имеет очень много общего с уравниванием тригонометрической сети по способу посредственных наблюдений, изложенным в § 98 и 99. Но учет влияния сфероидичности оказывается в выводе и коэффициентов  $a$  и  $b$ . и приближенных азимутов  $a'$ , заменяющих здесь дирекционные углы  $T'$ . Говорить об отнесении очень большой сети на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера не приходится, так как пределы применения этой проекции в точных геодезических целях ограни-

<sup>1</sup> См. Избранные сочинения, т. 4.

чиваются долготной амплитудой в  $6^\circ$ . Понятно, особенностями сопровождается и отыскание, кроме поправок координат пунктов Лапласа, еще поправок астрономических долгот и азимутов. Мы, конечно, должны отнести также во II часть руководства и изложение методов уравнивания системы полигонов I класса, хотя основания методов этого уравнивания даны в настоящей части курса. Возможно, что благодаря работам проф. Урмаева, значительное применение в уравнивании системы полигонов I класса получит именно метод уравнивания посредственных наблюдений. Что касается метода Бесселя, изложенного в § 96, то, конечно, не приходится говорить о применении его к уравниванию сколько-нибудь значительных сетей. В этом нет и нужды, потому что на 98% пунктов I класса наблюдения в настоящее время, благодаря достаточно совершенной световой сигнализации, проводят или со строгим соблюдением программы наблюдений, вытекающей из метода Шрейбера, или в одной группе полных приемов. Но возможны случаи применения метода Бесселя в сложных базисных сетях; во всяком случае, этот метод имеет в настоящее время скорее историческое значение.

Полигон I класса разбивается на части основными рядами II класса; число основных рядов II класса в полигоне I класса равно 2—4 и редко 5. Здесь уже можно поступиться строгостью уравнивания, и вместо отыскания из уравнивания поправок направлений перейти к отысканию поправок углов треугольников II класса, рассматривая их как непосредственно измеренные величины<sup>1</sup>. Очевидно, предварительно следует отнести в проекции Гаусса-Крюгера на плоскость и элементы полигона I класса и углы треугольников основных рядов II класса. Далее, уравнивая углы, мы можем в задаче вставки основных рядов II класса в полигон I класса применить с успехом способ двухгруппового уравнивания по Крюгеру, используя с выгодой прием преобразования коэффициентов уравнений второй группы, предложенный проф. Урмаевым. Так и поступают в настоящее время в основном геодезическом производстве СССР.

Задача вставки рядов II класса между твердыми сторонами и точками I класса и основных рядов II класса, а также задача вставки цепи III класса между твердыми сторонами и точками II класса решаются, применяя метод группового уравнивания по Урмаеву.

В ряде случаев уравнивания отдельных небольших сетей также с пользой можно применить способ двухгруппового уравнивания, опираясь на положение, что вспомогательные коррелаты  $\rho$  выражаются функционально через  $[a\alpha], [b\alpha], [c\alpha], \dots, [a\beta], [b\beta], \dots$  так же, как коррелаты первой группы условных уравнений — через их свободные члены. Если в первую группу отнести только условия фигур, то получение величин  $\rho$  выполняется очень просто, а тогда просто будут получены и коэффициенты преобразованных нормальных уравнений второй группы. Этот приемами был применен в § 90, он заслуживает внедрения в производство.

Наибольшую сложность представляет задача вставки обширной заполняющей сети в основную сеть. В условиях геодезических работ в СССР эта задача особенно актуальна: с развитием аэросъемочных работ должно ожидать сплошных заполнений триангуляцией II класса площадей между рядами I класса и основными рядами II класса; раз-

<sup>1</sup> Это тем более допустимо, что в пересечениях основных рядов II класса друг с другом определяют линейовые азимуты; см. расчеты в табл. IV.

мер таких площадей около 10 000 кв. км, а потому при обработке заполняющей сети придется иметь дело может быть с 80—90 треугольниками. Если вновь определяемых точек в заполняющей сети не более 20, то выгодно будет применить уравнивание посредственных наблюдений, изложенное в § 97—100. При этом следует использовать все возможности сокращения числа новых пунктов, вводимых в общее уравнивание. Эти возможности вытекают из таких соображений: а) некоторые новые пункты определяются с хорошей надежностью из треугольников, опирающихся непосредственно на твердые стороны основой сети; возможно такие пункты определить отдельно из небольших фигур, прочно связывающих их с твердыми, лежащими в непосредственной близости от них, пунктами, прежде определения всех прочих пунктов; б) некоторые пункты могут играть слабую роль в связи между собой смежных вновь определяемых пунктов, и по существу эти связи работают на определение самих таких пунктов, являясь добавочными в общем построении заполняющей сети; такие пункты следует не вводить в общее уравнивание, определив их после этого общего уравнивания, как дополнительные пункты, определяемые комбинацией прямых и обратных засечек.

В уравнивании обширных заполняющих сетей, где становится громоздким применение даже способа посредственных наблюдений, невольно возникает вопрос о разбивке такой сети на части при уравнивании ее. Здесь, конечно, нельзя ставить вопроса об уравнивании каждой части таким образом, чтобы отдельное уравнивание части давало окончательные результаты; тогда между частями сети мы должны были бы оставить разрывы и пойти на значительные смещения близких треугольников в смежных частях относительно друг друга и на возможные очень большие деформации при последующем заполнении таких разрывов. Каждая часть сети должна граничить со смежной рядом сторон треугольников. После уравнивания каждой отдельной части сети выполняется сопоставление координат общих пунктов для смежных частей, а также сопоставление длин и направлений общих им сторон треугольников. Далее следует умелое установление координат общих частям сети пунктов и установление длин и направлений общих сторон треугольников. Работа кончается новым переуравниванием частей сети, используя уже установленные, общие частям, элементы, как твердые.

В СССР этот способ уравнивания сети по частям и последующей сводки этих частей не применяется; у нас господствует взгляд, что лучше применить произвольные в той или другой степени методы уравнивания, приводящие к значительным упрощениям вычислительного процесса при уравнивании, но уравнивать всю сеть в целом, чем вести уравнивание сети по частям, с применением строгих методов при уравнивании каждой части и более или менее произвольных — при установлении общих частям элементов. Взгляд этот имеет, конечно, основания, но еще требуется научное исследование вопроса по применению методов уравнивания сети по частям. Попутно следует отметить, что к произвольным допущениям, упрощающим вычислительный процесс при уравнивании значительных заполняющих сетей, нужно относиться с осторожностью; вообще они допустимы лишь при малых значениях свободных членов условных уравнений.

Существенная часть дела в уравнительных вычислениях, — решение значительного числа нормальных уравнений, — требует применения новых сложных вычислительных машин. Уместно отметить, что в настоящее время можно с этой целью использовать специальные вычи-

слительные фабрики, существующие в крупных центрах; оборудование этих учреждений позволяет проводить без затруднений решение громадного числа нормальных уравнений. Применение этой новой вычислительной техники снимает трудность с вопроса строгого уравнивания значительных заполняющих сетей.

Наконец, следует отметить опубликованные в 1935 и 1936 гг. в журнале «Геодезист» статьи инж. И. Ю. Пранис-Праневича: «Уравнивание по частям сплошной триангуляции по способу узловых фигур» и «Многогрупповое уравнивание опорных сетей по способу условных уравнений». В этих статьях автор, используя идею эквивалентных уравнений, выдвинутую давно известными учеными Ганзеном и Андре, разрабатывает свой способ уравнивания больших триангуляций. Сущность способа, например, по отношению к случаю уравнивания условных наблюдений, заключается в следующем: а) мы разделяем всю сеть на две или на три примерно равные части; б) в каждой части сперва составляем условия фигур, образующие в этой части первую группу уравнений; затем составляем все остальные условия в данной части, возникающие в ней, если рассматривать ее, как несвязанную с остальными частями общей сети; эти условия относим ко второй группе уравнений в данной части сети; наконец, выписываем в третьей группе уравнений те части условных уравнений, связывающих треугольники разных частей сети, которые доставляются треугольниками данной части сети. Другими словами, в первую и вторую группу в данной части сети идут условия, возникающие при рассматривании этой части сети, как совершенно независимой от всех остальных ее частей, причем в первую группу относим условия фигур. В третью группу идут условия, связывающие части сети в одно целое, но для каждой части сети выписываются в третьей группе только те части этих условий, которые доставляются треугольниками именно данной части сети; такие части уравнений автор называет «частными связующими условиями», в противовес «общему связующему условию», являющемуся суммой таких частей. По каждой части сети уравнения указанных трех групп составляются отдельно, в отдельных схемах и независимо друг от друга по каждой части сети.

После составления всех условных уравнений указанным образом, т. е. в трех группах по каждой части сети, следует: а) для каждой части сети составление нормальных уравнений — так, как это делается обычно, рассматривая как одно целое все три группы уравнений в этой части сети; б) в каждой части сети решение нормальных уравнений, но с доведением этого решения только до того момента, когда будут получены преобразованные уравнения третьей группы, в которых уже исключены коррелаты всех условных уравнений первой и второй групп. Это решением ведут по каждой части сети так: сперва исключают коррелаты первой группы из уравнений второй и третьей групп и получают систему преобразованных нормальных уравнений второй и третьей групп, число которых равно числу уравнений во второй и третьей группах; после этого исключают коррелаты второй преобразованной группы из третьей группы преобразованных нормальных уравнений (пользуясь второй группой преобразованных уравнений) и получают вторично преобразованные нормальные уравнения третьей группы, число которых остается нoprежнему равным числу условных уравнений третьей группы, и которые автор называет «частными связующими нормальными уравнениями». Теперь вторично пре-

образованные нормальные уравнения третьей группы, в которых исключены, следовательно, коррелаты первой и второй групп, суммируются по частям сети, причем, конечно, складываются одновременные уравнения третьей группы для разных частей сети, т. е. составляющие части одного и того же общего связующего нормального уравнения. Конечно, коррелаты в частных связующих нормальных уравнениях получают заранее во всех частях сети одни и те же буквенные обозначения (т. е. коррелаты при квадратическом коэффициенте в некотором общем связующем нормальном уравнении обозначаются заранее одной и той же буквой при квадратических коэффициентах всех частных связующих нормальных уравнений, являющихся частями этого общего нормального уравнения). Здесь следует упомянуть, что при составлении частных связующих условий, соответствующих одному и тому же общему условию, можно положить свободные члены во всех этих частных условиях, за исключением одного, равными нулю, а в этом последнем уравнении — равными свободному члену общего связующего условия.

Суммирование частных связующих нормальных уравнений (вторично преобразованных) приводит к системе общих связующих нормальных уравнений в их окончательном виде, которые и решают затем по схеме Гаусса. Получив соответствующие коррелаты, с ними идут в преобразованные нормальные уравнения второй группы и, пользуясь элиминационными уравнениями, полученными в этой группе при исключении из второй и третьей групп коррелат второй группы, вычисляют постепенно коррелаты второй группы. С коррелатами второй и третьей групп идут в элиминационные уравнения первой группы.

Существенное упрощение в этот «механизм» вносит уравнивание сети по углам. При уравнивании сети по направлениям приходится устраивать в ней искусственно разрывы, чтобы получить не зависящие друг от друга части сети в отношении условий первых двух групп; треугольники, дающие разрывы, приводят, конечно, к особым связующим условиям. Описанный метод Праис-Праневича вовсе не уменьшает общей суммы вычислительных работ. Но так как в больших и сложных сетях связующих условных уравнений, относящихся к третьей группе, всегда значительно меньше, чем остальных уравнений, то значительно большую часть всего объема вычислительных работ можно распределить на несколько лиц, производящих вычисления независимо друг от друга. Составление условных уравнений первой и второй групп, составление частных связующих условий, составление нормальных уравнений в каждой части сети, решение нормальных уравнений вплоть до получения в третьей группе вторично преобразованных нормальных уравнений — все это исполняется по каждой части сети независимо от остальных ее частей, и, следовательно, может быть поручено нескольким вычислителям, число которых должно быть равно числу частей сети, на которые целесообразным является ее разбить. Конечно, вследствие этого окончательные результаты получаются значительно скорее, а каждый вычислитель выполняет задачу иносильную и во всяком случае не громоздкую.

В нашем центральном геодезическом производстве способ Праис-Праневича находит надлежащее широкое применение; он действительно наилучше решает вопрос об уравнивании по углам сложных и обширных заполняющих сетей II класса, позволяя правильно организовать вычислительную работу, применить разделение труда и получить окончательный результат в минимальный срок.

## Г л а в а XIV

### НИВЕЛИРОВАНИЕ ТОЧНОЕ И ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

#### § 107. Задачи высокоточного и точного нивелирования; общие схемы построения государственной нивелирной сети

В конце § 6 в общих чертах было выяснено значение точного нивелирования в правильной постановке больших топографических работ, исполняемых для составления топографической карты государства.

Основные нивелировки должны давать исходные пункты, обеспечивающие отнесение изображаемого в горизонталях рельефа на всех планшетах топографической съемки к одному уровню, и именно к уровню моря. Если представить себе, что опорная нивелирная сеть выполнена до приступа к топографическим работам, что она связала притом уровни морей, примыкающих к данному государству, и так или иначе уравнена в целом, то тогда требования собственно топографической съемки к точности основной нивелировки будут сравнительно невысокими, и, по существу, вероятно нивелировка II разряда (см. ниже) ответила бы всем требованиям этой съемки. Конечно, плашеты по мере удаления их от морей были бы все более и более неправильно поставлены по абсолютной высоте, но увязка нивелирной сети сделала бы то, что ошибки установки планшетов по абсолютной высоте изменялись бы постепенно, в небольших пределах при переходе от одной серии смежных планшетов к другой серии, и никаких недоразумений при общей сводке горизонталей не произошло бы.

В действительности в больших государствах всегда приходится развивать топографические работы до выполнения в полном объеме основной нивелирной сети и до ее общей обработки. Тогда приходится требовать, чтобы впоследствии отметки марок и реперов основной нивелировки, уже использованные в качестве исходных при съемках тех или других районов, получили бы поправки, которые практически не сказалась бы на положении построенных на планшетах горизонталей. Для равнинных районов это требование равносильно тому, чтобы «рабочие» отметки марок и реперов основного нивелирования над уровнем моря были бы даны для каждого района с ошибкой во всяком случае не более 1 м. При возможных удалениях съемочных районов от моря на 1500 км указанное требование равносильно требованию давать отметки марок основного нивелирования из нивелировки, в которой средняя систематическая ошибка на 1 км не превышала бы  $\pm 0,5$  мм. Как видно, выясняется необходимость проведения нивелировок, дающих точные результаты. Однако, в практике дела можно сейчас же найти выходы, значительно облегчающие только что поставленную достаточно

тяжелую и громоздкую задачу. Именно ничто нам не мешает в порядке так называемой точной нивелировки образовать на территории государства ряд достаточно больших по периметру, замкнутых и отчасти разомкнутых нивелирных полигонов, но в том и в другом случае связанных с морями, омывающими данное большое государство. Принимая средние уровни этих морей одинаковыми, мы с выгодой можем использовать это обстоятельство для увязки наших больших нивелирных ходов. Далее, внутри этих увязанных больших полигонов мы можем пролагать, в соответствии с перспективами развития съемочных работ, ходы менее точного нивелирования и подвергать их должной увязке. Этим путем мы удовлетворили бы запросам государственной топографической съемки, пролагая минимальное число линий и полигонов точного нивелирования. Однако, в действительности приходится иметь в виду, что с возрастанием периметров полигонов будет возрастать и возможность появления в результатах основной нивелировки грубых ошибок. Так, если имеем в точной нивелировке среднюю систематическую ошибку на 1 км равной  $\pm 0,4 \text{ мм}$  и среднюю случайную ошибку  $\pm 2,0 \text{ мм}$ , то при периметре полигона в 1600 км придется вполне допускаемой считать певязку полигона около 0,7 м и, следовательно, возможно пропустить в нивелировке необнаруженную грубую ошибку, например, порядка 0,5 м. Поэтому необходимо надеждающего контроля работы заставит нас для нужд топографической съемки все-таки ограничить периметр каждого полигона величиной около 800—1000 км. Современные основные нивелировки разделяют в СССР на три разряда:

высокоточное нивелирование (I разряда),  
точное нивелирование (II разряда),  
нивелирование III разряда.

Высокоточное нивелирование характеризуется средней систематической ошибкой  $\sigma$  на 1 км  $\pm 0,2\text{--}0,3 \text{ мм}$  и средней случайной ошибкой  $\eta$  на 1 км  $\pm 1,5 \text{ мм}$ .

Для точного нивелирования  $\sigma = \pm 0,4 \text{ мм}$  и  $\eta = \pm 2,0 \text{ мм}$ , для нивелирования III разряда  $\sigma = \pm 0,6 \text{ мм}$  и  $\eta = \pm 2,0 \text{ мм}$ <sup>1</sup>. Из сказанного следует, что при исполнении на значительной части площади государства топографической съемки в масштабе 1:50 000 для главного обоснования этой съемки в высотном отношении можно обойтись без высокоточного нивелирования, а удовлетвориться образованием сети полигонов точного нивелирования с периметром каждого около 1000 км и при непременном условии связей сети таких полигонов с уровнями морей так, чтобы наибольшее удаление в ней от мест этих связей нигде не превышало 1600—1800 км. Дальнейшее сгущение нивелирной основы можно было бы делать путем прокладки ходов нивелирования III разряда (но двусторонних).

Но запросы к материалам топографической съемки и к результатам нивелировки, кроме картографов, предъявляют геоморфологи, гидро-геологи, геологи, гидрологи, геофизики и различные инженерные специальности. Эти запросы мало освещены в геодезической литературе.

К некоторым частям рельефа в отношении их абсолютных отметок геоморфологи предъявляют более повышенные требования, к другим частям рельефа или предметам местности геологи предъявляют повышенные требования в отношении определения их абсолютных отметок

<sup>1</sup> Все эти допуски относятся к 1938—1940 гг.

и т. д. Но, конечно, эти повышенные требования, выдвигаемые той или другой специальностью, остаются одними и теми же для всей территории, за исключением иногда горных районов. Можно принять, что эти повышенные требования выражаются допущением наибольшей ошибки в абсолютной отметке соответствующих частей рельефа, нигде не превышающей  $1\text{ м}$  или, может быть, четырех метров. Если мы отсюда откинем один метр за передачу высоты от исходной нивелирной точки в данном районе, то приходим к выводу, что запросы геоморфологов и геологов требуют определения абсолютных отметок точек основной нивелирной сети с ошибкой, не превышающей  $2-3\text{ м}$ . Эта задача при огромном протяжении СССР по параллели и при трудности нивелирных связей с уровнем Северного Ледовитого океана в соответствующих его местах, очевидно, является очень трудной, так как постепенная передача высот будет выполняться на расстоянии до  $4500\text{ км}$ . Но все-таки она может быть осуществлена в порядке хорошего, строгого выполнения точного нивелирования, конечно, в системе сети полигонов надлежащее установленного периметра. Совсем иные требования ставит перед основным нивелированием геофизика. Первая задача, выдвигаемая геофизикой, — это определение разности средних уровней морей и океанов. Уже имеющиеся геодезические результаты показывают, что средние уровни разных морей и океанов не однаковы, и понятно, что эта неодинаковость, даже в  $2-3\text{ дм}$ , может быть только следствием действия гравитационных сил и, конечно, сопровождается рядом важных явлений в физике океанов и морей. Надежное определение этих малых разностей средних уровней морей и океанов, конечно, требует при огромных протяжениях связующих нивелирных линий особо высокой точности от результатов нивелирных работ. В США нивелировки I класса приводят к определенному заключению, что уровни Тихого и Атлантического океанов несколько повышаются к северу и что уровень Тихого океана выше везде, на соответственных параллелях, уровня Атлантического океана на  $0.2-0.3\text{ м}$ .

Вторая задача, выдвигаемая одновременно и геологией и геофизикой, — это выяснение вековых движений суши по высоте. Эта задача требует, во-первых, установки на материковых породах, в соответственных, указываемых геологами местах особо прочно устроенных так называемых вековых реперов; во-вторых, тщательной связи системы таких реперов с нивелирными линиями I разряда и через них — друг с другом; в-третьих, — повторения через некоторые достаточно большие промежутки времени (например, через 20 лет) нивелирования, дающего надежную связь вековых реперов друг с другом. Эта задача, очевидно, также очень тонкая и сложная. Любопытно, что выполненная недавно в Германии повторная высокоточная нивелировка по ряду линий определенно выявила общее движение материка в Северной Германии. Понятно, выявление вековых движений суши возможно только выполнением повторных нивелировок высокой точности.

Третья задача — это выяснение посредством повторных высокоточных нивелировок в соответственно намечанных районах деформаций уровенной поверхности или изменений в направлениях отвесных линий, вызываемых подземными смещениями масс. В противоположность второй задаче, здесь повторные высокоточные нивелировки должны выполняться достаточно часто и давать изменения отметок большого числа точек, располагающихся на некоторой ограниченной площади. Выбор таких площадей — дело геологов и геофизиков.

Существует ряд районов, где происходят заметные вертикальные смещения почвы, не имеющие характера вековых движений; геология в таких районах предъявляет к геодезии определенные требования, которые обычно вполне удовлетворяются выполнением в данном районе повторных точных нивелировок через известные промежутки времени, причем предварительно в районе закладывается система солидных реперов; понятно, что эти нивелировки должны каждый раз тщательно связываться с фундаментальными реперами, заложенными уже вне района значительных вертикальных сдвигов почвы. Изучение вертикальных смещений почвы, происходящих при землетрясениях, очевидно, дает ценный материал для геофизиков и для геологов; если при этом ставить задачу установления границ той территории, за пределами которой вызванные землетрясением вертикальные смещения почвы можно уже считать нулевыми, то в этой задаче мы неминуемо придем к постановке на обширной площади повторных высокоточных нивелировок.

Наконец, в перечне задач, ставящихся перед основным нивелированием, отметим еще требование гидрологов и гидротехников в отношении определения отметок нивелирных реперов для определения уровней воды в реках и в водоемах и уклонов рек. Здесь обычно нужно дать с большой точностью относительные отметки точек, отстоящих, правда, друг от друга на расстояния значительные — в несколько сотен километров и даже в 1000—2000 км. Задача отвечает тщательно выполненное точное нивелирование, но не в виде одной линии, а в виде сети полигонов, вытянутой вдоль реки.

Сделанный обзор приводит к выводу, что высокоточное нивелирование выдвигается научными задачами и соответственно этому оно должно быть поставлено и соответственно этому должно получать территориальное размещение. Как увидим в конце этой главы, в современную постановку высокоточного нивелирования следует внести существенные изменения, с другой стороны, оно, мало отличаясь в этой постановке от точного нивелирования, получило распространение в ряде стран, может быть, излишне значительное.

В Германии полигоны высокоточного нивелирования имеют períметр всего от 100 до 400 км. Внутри этих полигонов иногда выполняют нивелирование точное (II разряда), в порядке же нивелирования II разряда определяют высоты всех пунктов триангуляции I класса; в результате получают густую сеть реперов высокоточного и точного нивелирования, в которую, конечно, включаются еще технические нивелировки, исполненные по железным дорогам, шоссе и каналам. Таким образом, передача высот на планшеты топографической съемки может быть везде выполнена тригонометрическим нивелированием на расстояние 3—4 км между точками, определенными геометрическим нивелированием с ошибкой, не превышающей 0,15 м.

Во Франции генеральное нивелирование страны разделяется на 4 разряда, причем высокоточное нивелирование даст замкнутые полигоны с периметром около 500 км. Эти полигоны рассекаются ходами нивелирования II разряда; линии нивелирования III разряда идут друг от друга и от линий I и II разрядов всего в расстоянии 20—30 км, IV разряд нивелирования доставляется по крайней мере один репер на площади каждой сельской общины. Следовательно, во Франции каждый плашит государственной съемки в масштабе 1 : 10 000 обеспечен по крайней мере одним репером генерального нивелирования.

В США линии нивелирования I и II разрядов пролагаются с такой густотой, чтобы линии III разряда нигде не имели длины более 80 км, а густота ходов III разряда такова, что каждый планшет государственной топографической съемки имеет исходную точку, определенную по высоте из такого нивелирования. По существу, американская нивелировка I разряда является скорее точной нивелировкой, чем высокоточной.

В СССР мы имеем такую схему: полигоны высокоточного нивелирования имеют периметр 800—1000 км, внутри этих полигонов прокладывают ходы точного нивелирования (II разряда), между линиями высокоточного и точного нивелирования выполняется нивелирование III разряда со средней систематической ошибкой  $\pm 0,6$  мм и со средней случайной ошибкой  $\pm 2,0$  мм на километр; длина хода III разряда не должна быть более 200 км, а длина ходов последующего нивелирования IV разряда должна быть не более 100 км. Нивелирование IV разряда характеризуется систематической ошибкой до  $\pm 1$  мм и средней случайной ошибкой  $\pm 2$ —4 мм на километр. Дальнейшее сгущение нивелирной сети в случаях необходимости достигается нивелированием V разряда или техническим нивелированием, ходы которого должны быть не длиннее 40 км. Но это же дальнейшее сгущение может быть выполнено и тахеометрическими ходами и тригонометрическим нивелированием, в зависимости от условий района.

Имея в виду особое назначение высокоточного нивелирования и желательность новой его постановки, обоснованной в последних параграфах настоящей главы, следует признать все эти схемы подлежащими еще пересмотру — главным образом в отношении соотношения между размерами и густотой линий высокоточного и точного нивелирования, приурочивая линии высокоточного нивелирования к научным заданиям.

### § 108. Методы нивелирования высокой точности

При нивелировках высокой точности во всех государствах принято нивелирование из середины при равных или почти равных расстояниях нивелира от реек. Порядок наблюдений для получения взгляда по рейке существенно различен в разных государствах.

Во Франции при получении взгляда уровень нивелира строго приводится на средину, а затем делается отсчет по средней горизонтальной нити трубы, оценивая на глаз промежутки между этой нитью и ближайшими к ней младшим и старшим штрихами рейки.

В Германии горизонтальная нить трубы или, вернее, середина двух близких друг к другу горизонтальных нитей, приводится на два штриха рейки, ближайшие к горизонту трубы и расположенные — один выше, а другой ниже этого горизонта; одновременно с этими паведениями делаются отсчеты по концам пузырька уровня, соединенного неизменно с трубой, для определения наклонности оси уровня в момент наведения трубы и введение затем поправки за эту наклонность в отсчет по нити трубы, равный, конечно, номеру визиревавшегося штриха.

В СССР пузырек уровня ставится перед отсчетом рейки почти в среднее положение, затем следуют отсчеты уровня, отсчет рейки по трем нитям трубы, причем на глаз оценивается величина промежутков между нитью и ближайшими к ней штрихами, наконец, в отсчеты по нитям трубы вводится поправка за уровень.

В Австрии уровень строго приводится в горизонтальное положение, а затем подвижная горизонтальная нить окулярного микрометра наводится на ближайший к горизонту трубы младший и старший штрихи, с отсчетами по барабану микрометра и записью номеров штрихов.

Порядок наблюдений, аналогичный принятому в Австрии, может осуществляться при помощи нивелиров Цейсса с плоско-параллельным стеклом перед объективом нивелира; установив пузырь уровня на середину, особым рычагом,двигающим плоско-параллельное стекло и снабженным счетным барабаном, добиваются совмещения изображения ближайшего к горизонту трубы штриха рейки с горизонтальной нитью трубы, после чего происходит отсчет по барабану рычага; за этот отсчет барабана потом вводят поправку в отсчет по нити трубы.

Кратко описанные методы получения взгляда выражаются так:

1. Французский и американский метод — установка уровня, отсчет по нити трубы.

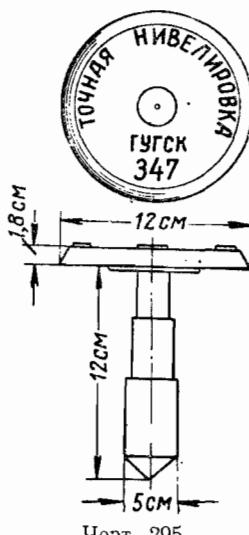
2. Германский метод — установка пинти трубы, отсчет уровня.

3. Русско-швейцарский метод — приближенная установка уровня, отсчет уровня и отсчет по пинти трубы.

4. Метод, осуществляемый нивелиром Цейсса с плоско-параллельной пластинкой. — установка уровня, совмещение изображения штриха с пинтию трубы, отсчет по микрометру, смещающему изображение штриха рейки.

### § 109. Знаки нивелирования высокой точности

Знаки нивелирования высокой точности разделяются на постоянные и временные. Постоянные знаки в свою очередь подразделяются на марки, стенные реперы и грунтовые реперы.



В СССР употребляют марки, изображенные на черт. 295; марка, отлитая из чугуна, представляет собой диск диаметром в 12 см, с приливом, имеющим два уступа. В центре диска имеется дырочка диаметром около 2 мм; центр дырочки является точкой, высота которой определяется из нивелировки. В дырочку при привязке к марке вставляется горизонтально особый стержень, на который подвешивается небольшая реечка. Такие марки устанавливаются на цементе в стенах каменных зданий, уже не подвергающихся осадке; обычно для нивелирных марок используют водокачки на станциях железных дорог, каменные устои мостов. Установка марки должна быть произведена по крайней мере за сутки до ее наблюдения; при закладке, до заполнения цементом, необходимо самым тщательным образом промыть углубление в стене, выбитое для закладки марки, а по заполнении этого углубления цементом (жидким раствором) и по вставке марки следить в течение нескольких часов, чтобы никто не потревожил марки, даже слегка.

Высота марки над почвой бывает примерно около 1,6 м, расстояние между марками — около 6 км.

В Германии и Франции предпочитают маркам стенные реперы, на которые рейка ставится при привязке к реперу. Черт. 296 изображает французский репер, отливаемый из бронзы. Высшая точка полусферы является определяемой из нивелировки точкой репера.

Грунтовые реперы закладывают в тех случаях, когда ход нивелировки не совпадает с железной линией, а идет, например, вдоль реки или по грунтовой дороге. Здесь применяют самые разнообразные конструкции.

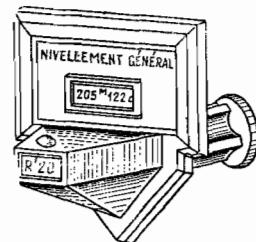
При закладке грунтовых нивелирных реперов нужно непременно учитывать те причины, которые в будущем могут вызвать смещение заложенного репера, т. е. возможные движения слоев почвы, в которых заложен репер, и возможные движения слоев почвы, лежащих ниже основания репера, и возможные движения слоев почвы, лежащих ниже основания репера. Эти движения почвы могут быть вызваны разными причинами: на склонах и в пониженных частях рельефа могут быть оползни или подгрунтовые воды в глинистых, болотистых и торфяных почвах, лежащих даже на прочном основании, значительное количество влаги вызывает движение почвы при оттаивании ее и при замерзании; грунтовые воды могут вызывать или значительное пучение почвы, или могут быть причиной провалов при размытии ими основания верхних слоев почвы; в слоистой мерзлоте при нарушении мерзлотного режима непременно будут значительные движения почвы. Должно иметь в виду, что движение по высоте даже на 1 м для репера высокоточного нивелирования является уже не пренебрежимым.

Поэтому при закладке реперов высокоточного нивелирования нужно выбрать место, установление глубины закладки и типа репера обосновывать на умелом осмотре местности, на выяснении глубины промерзания, на исследовании грунта и на выяснении в подлежащих случаях грунтовых вод и характера мерзлоты почвы.

Следует избегать закладки реперов на склонах, в котловинах и вообще на пониженных участках рельефа; следует также избегать закладки их там, где (по сведениям местных жителей и по данным осмотра) происходят пучения почвы или провалы; конечно, следует избегать также болотистых и торфяных почв, а также тех мест, которые находятся не далее 150 м от выходов грунтовых вод, от наземных водотоков, от грязевых потоков, на ледяных и от мест, заливающихся в полые воды.

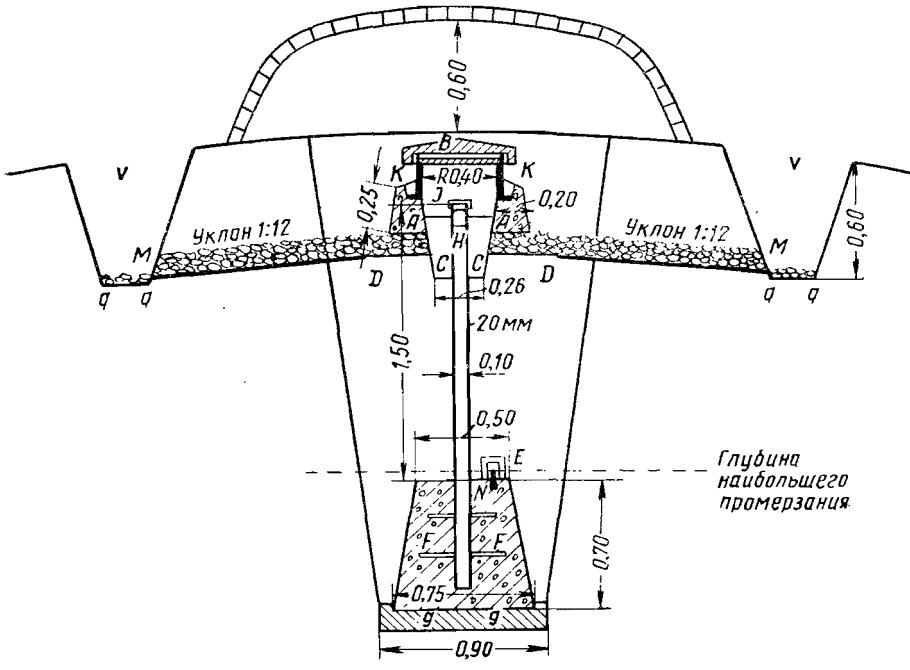
В районах, где нет мерзлоты, и в районах, где нет глубокого промерзания, т. е. в обычных районах, грунтовый нивелирный репер может быть построен или в виде рельсового репера, или в виде трубчатого репера, или в виде бетонного столба.

Основание репера должно находиться ниже по крайней мере на 0,5 м глубины наибольшего промерзания. Следовательно, для районов Европейской части СССР южнее Киева глубина закладки должна быть не менее 1,5 м, для районов между параллелями 52 и 60° — глубина закладки в западных районах Европейской части СССР не менее 2,25 м, а в Восточных районах — не менее 2,75 м; за Уралом в той же широтной зоне глубина закладки еще более возрастает.



Черт. 296

До сих пор для обычных районов мы не имеем окончательно отработанного и испытанного типа фундаментального нивелирного репера, поэтому позволяем себе привести проект такого репера, обдуманный проф. Красовским и изображенный на черт. 297. Это — трубчатый репер для наибольшей глубины промерзания около 1,75 м. Он состоит: 1) из массивного бетонного монолита *FF*, положенного на подушку *gg* из тщетого бетона; в монолит вделана железная труба, оцинкованная спаружи и изнутри, с толщиной стенки около 20 мм и при диаметре около 10 см; труба заполняется песком, в самой верхней ее части заклепывается болт *H*, кончающийся паверху сферической поверхностью,



Черт. 297

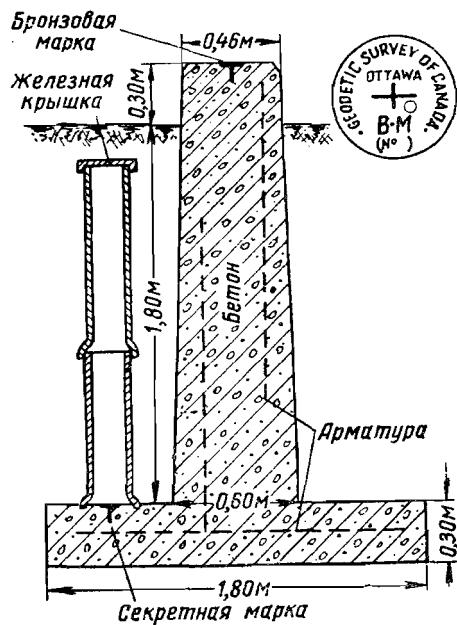
на которую и ставится рейка; краяны трубы на 1 см выступают над верхним концом болта *H*; на эти краяны надевается металлическая крылечка *J*; 2) из бетонного кольца *AA*, имеющего внизу толщину 0,20 м и высоту 0,25 м, которое покоятся на забутовке *DD* толщиной около 10 см; 3) из металлического колпака *K*, несущего металлическую же крышку *R*, причем колпак *K* заделывается в кольцо *A*; 4) из бетонной крышки *B*, покоящейся на выступающих кверху закраинах колпака *K*. Пространство *CC* между верхней частью трубы, кольцом *AA* и забутовкой *DD* забивается хрящем, гравием и мелкой галькой. В нижнем монолите закрепляется репер *N*, покрываемый бетонной крышкой *E*. Над всем сооружением устраивается курган высотой 0,60 м, откосы которого покрываются дерном. Несколько отступая от основания кургана, следует вырыть в обвод кургана и соответственно рельефу канаву глубиной около 0,6 м для отвода дождевых и талых снеговых вод и для осушения верхней части сооружения; дно канавы выкладывается забутовкой *qq*. Колпак *K* и крышка *B* должны быть спикованы. К колпаке *K* и крышке *B* устраивается замок, позволяющий открывать

крышку *B* только при помощи особого ключа, но можно ограничиться и устройством, обычно применяемым в крышках канализационных колодцев. От канав *vv* должно прокопать одну или две канавы для спуска воды в пониженные части рельефа. В двух перпендикулярных вертикальных плоскостях от краев забутовки *DD* устраиваются дренажные отводки *DM* до канав шириной 0,3 м, заполняемые камнями и песком и подстилаемые слоем глины или забутовкой.

Такой репер, конечно, достаточно сложен по его изготовлению и дорог; закладку таких реперов придется делать в пересечениях нивелирных линий (в узловых точках нивелирной сети), а по самим линиям — не через 6 км, а через 16—24 км, а может быть и реже. При большей чем 1,75 м глубине промерзания, а также в несколько сыроватых грунтах, надлежит к описанному устройству добавить обсадную трубу. Эта труба может быть изготовлена из деревянных брусьев, тщательно соединенных; стенка трубы осмаливается, низ трубы упирается в верхнее основание монолита *FF* или покоится на особой деревянной раме; верх трубы доводится до нижней части засыпки *CC*, ширина трубы около 0,25 м. Нижний дециметр трубы по ее установке заполняется варом и паклей — для образования пробки; далее идет заполнение мелкой галькой и нефтяными отходами, причем до момента смеси с нефтяными отходами галька должна быть достаточно нагрета; верхний дециметр трубы заполняется, как и нижний, варом и паклей.

Должно оговориться, что описанный репер предлагается автором, в геодезическом же производстве проектируют в настоящее время реперы значительно более простого устройства, которое получается из вышеописанного, если на черт. 297 упразднить вовсе части *A*, *K*, *B*, *R*, *C*, *D* и *DM*, а, с другой стороны, ввести прослойку кругом вдоль трубы и по контуру монолита *F* из щебня или гравия толщиной 5—10 см для ослабления смерзания трубы с грунтом. Однако, действие такой прослойки нужно считать спорным. Думается, что эти реперы упрощенного типа можно применять для закладки в точках, отстоящих друг от друга по нивелирным линиям примерно через 8 км.

На черт. 298 изображен железобетонный нивелирный репер, применимый в США и носящий название «фундаментального»; такие фундаментальные реперы закладывают в городах, больших селениях и городского типа, в скреплениях нивелирных линий и в других местах, которые по тем или другим соображениям представляются особо важными. Между фундаментальными реперами закладывают через 5—6 км обычные реперы, представляющие собой бетонный столб в виде четырех-



Черт. 298

гранной усеченной пирамиды с верхним основанием  $0,25 \times 0,25$  м, с высотой около 2 м и с нижним основанием около  $0,5 \times 0,5$  м; на 2 дм столб выступает над землей, и в верхней его плоскости зацементирована бронзовая марка; о сдвигах таких реперов по высоте данных не имеется. Вряд ли такие (не фундаментальные) реперы пригодны для наших климатических условий. Но репер, изображенный на черт. 298 и подключающий простотой конструктивного замысла, вероятно может быть применим и у нас, при условии, что глубина закладки основания репера ниже глубины наибольшего промерзания на 0,5 м; это приведет, конечно, во многих районах СССР к доведению вертикальной колонны репера до длины в 2,7—3,0 м, и, следовательно, к значительному увеличению земляных работ.

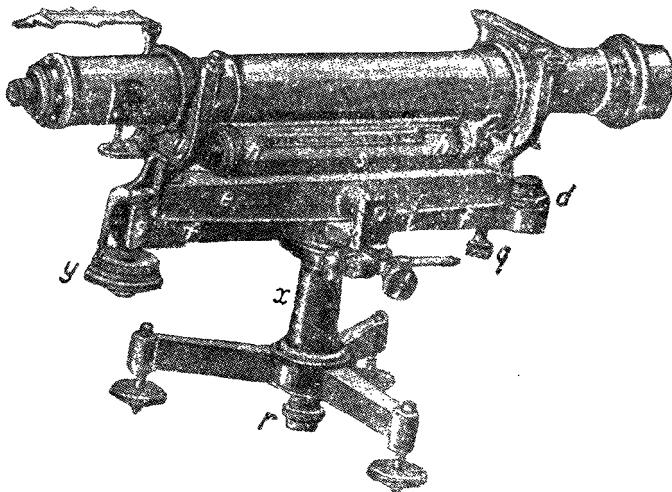
В районах глубокого промерзания и мерзлоты надлежит применять иные реперы, описанные уже в главе о тригонометрических знаках (§ 23, глава IV).

Временные знаки следуют друг от друга через 2 км и служат для обозначения конца дневной работы. Временными знаками могут служить точки, выбранные на цоколях зданий, на дорожных каменных столбах, на устоях мостов и т. п.

### § 110. Инструменты точного нивелирования. Нивелиры

В нивелировании высокой точности расстояние от нивелира до рейки принимается от 50 до 60 м, и при таком расстоянии ошибка взгляда не должна превышать 0,4—0,5 мм. Соответственно этому труба нивелира должна иметь объектив около 40 мм, фокусное расстояние около 45 см и увеличение около 40; уровень при нивелире должен иметь цену деления около 4—5". Конструкции нивелиров и реек в разных государствах различны, в зависимости от принятого в государстве метода нивелирования.

В СССР, США и Германии нивелирование ведется исключительно нивелирами, в которых уровень непосредственно и жестко связан с трубой.



Черт. 299

На черт. 299 изображен нивелир, который был принят для точных нивелировок в СССР до 1935 г.; труба имеет объектив диаметром

41 *мм* с фокусным расстоянием 44 *см*; увеличение трубы — 40; труба стальными цапфами вкладывается в лагеры подставок. Уровень с ценой деления в 5" заключен во внешнюю стеклянную трубку *hh* и снабжен воздушной камерой, подпись делений на уровне в одну сторону, от 0 до 40 или до 50. Относительное расположение оси уровня и трубы может изменяться лишь при помощи исправительных винтов при одном конце оправы уровня. Подставки *ll* трубы составляют одно целое с массивным коромыслом *ee*, с которым одно целое составляет и горизонтальная ось *i*. Нижняя пластина *ff* составляет одно целое с вертикальной конической осью инструмента, вкладываемой в коническую втулку колонны *x*. Пластина *ff* в средней части имеет приливы *k*, которые кончаются лагерами для цапф горизонтальной оси *i*. Через один конец *g* пластины *ff* проходит тонко нарезанный элевационный винт *y*, шляпка которого имеет барабан с делениями; концом своим элевационный винт упирается в коромысло *ee*, работа винта регулируется пружиной *q*, заложенной в укрепленный в противоположном конце пластины *ff* цилиндрик. Круглый уровень *d* служит для быстрого приведения инструмента в горизонтальное положение. Положение вертикальной оси во втулке *x* регулируется нижним винтом *r*. При одной из подставок трубы имеется упор *m*, в который должен упираться прилив трубы, чтобы вертикальная пить трубы приняла правильное положение.

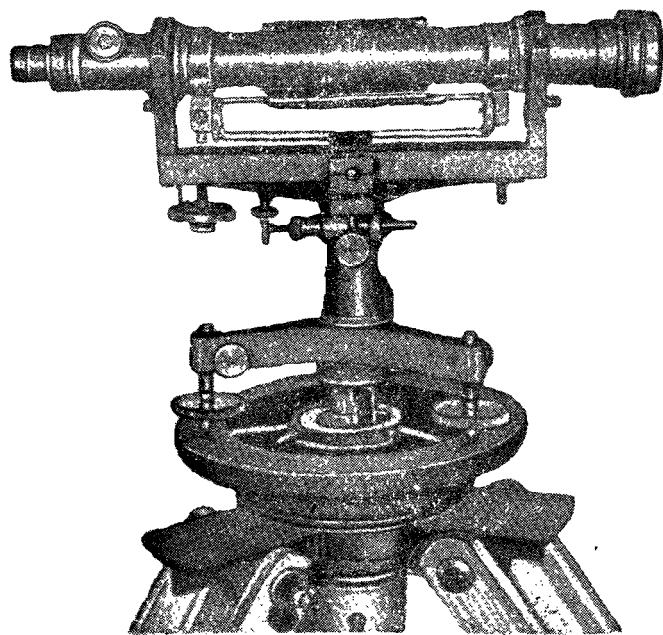
Для исполнения таким нивелиром нивелировки по германскому методу необходимо иметь сетку нитей трубы из одной вертикальной и двух близких горизонтальных нитей; для этого же метода совершенно необходим элевационный винт *y*.

Для исполнения таким нивелиром нивелировки по русскому методу необходимо иметь сетку нитей трубы из одной вертикальной и трех горизонтальных нитей с дальномерным коэффициентом 150 или 175.

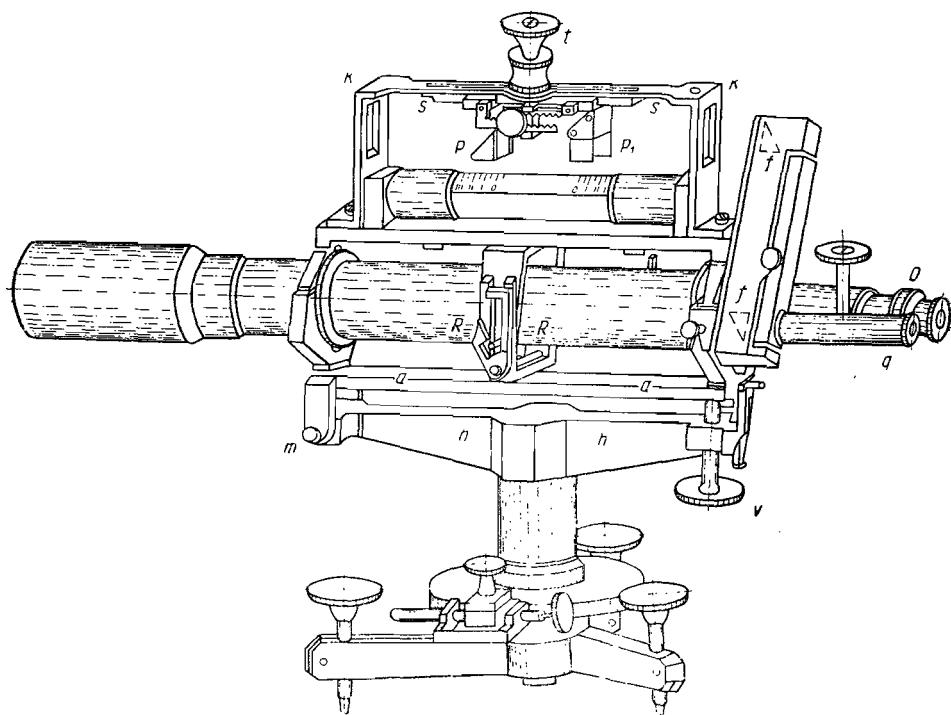
На черт. 300 изображен нивелир, изготавляемый на наших заводах с 1935 г., которым в настоящее время в СССР исполняют нивелирование высокой точности. По сравнению с точным нивелиром, изображенным на черт. 299, этот нивелир имеет несколько более мощную трубу, более длинную, доведенную до 10 *см*, горизонтальную ось *i* и, наконец, особый металлический постамент для подъемных винтов нивелира. Этот постамент снизу ограничивается сферической поверхностью, приходящейся в соответствующее углубление в голове штатива; такое устройство обеспечивает, до закрепления еще станового винта, быстрое приведение нивелира в горизонтальное положение по круглому уровню и не работая при этом вовсе подъемными винтами; после этого остается лишь немного подправить установку при помощи подъемных винтов.

На черт. 301 изображен нивелир Бертелеми, которым исполняют точное и высокоточное нивелирование во Франции. Особенностью устройства является, во-первых, то, что уровень ножками ставится на цапфы трубы сверху ее и может на этих цапфах переставляться, во-вторых, при уровне имеется особое приспособление в виде двух призм *P* и *P<sub>1</sub>* и двух призм, заключенных в футляре *ff*; при помощи этого приспособления особенно точно выполняется установка уровня на середину.

На черт. 302 в разрезе показано расположение призм *P* и *P<sub>1</sub>*, *f* и *f<sub>1</sub>*, а внизу чертежа дан вид пузырька уровня, который наблюдается при рассматривании в трубочку *q*. Очевидно, работа призм сводится к сближению изображений концов пузырька, к устранению влияния параллакса при его установке и к возможности одновременно, наблюдая правым глазом положение нити трубы на рейке через окуляр *o*, точно

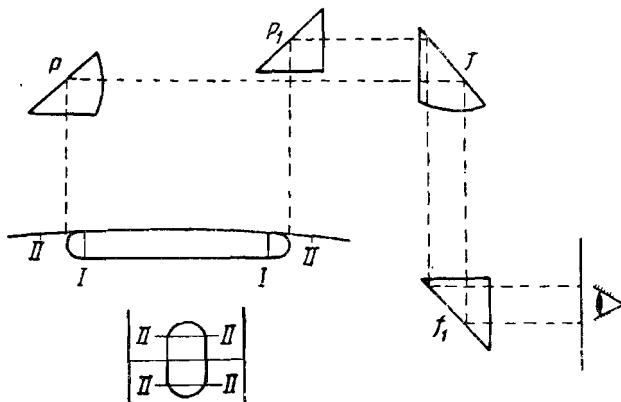


Черт. 300



Черт. 301

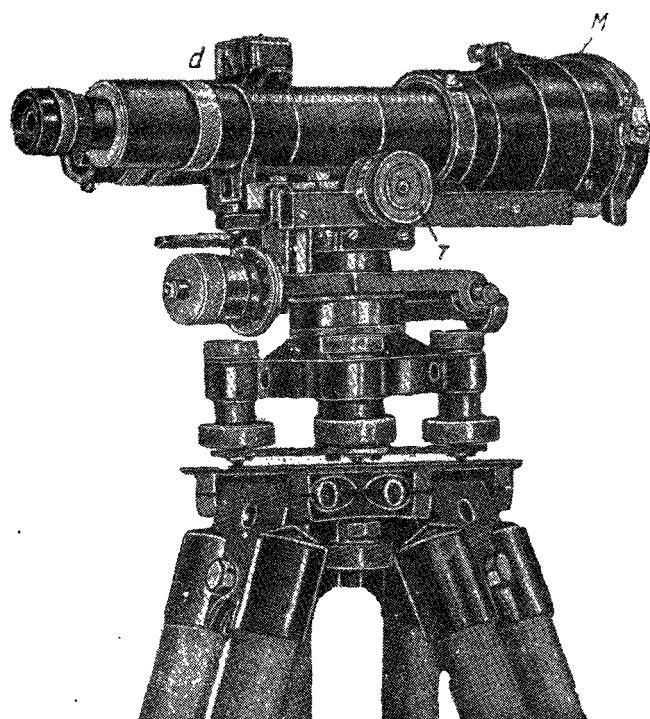
устанавливать уровень, не сходя с места и рассматривая концы пузырька левым глазом через трубочку  $q$ . Сближение концов пузырька и отсутствие параллакса позволяют замечать малейшую несимметрию концов пузырька относительно одноименных штрихов шкалы уровня ( $II$  и  $II'$ ); выпуклость катетов в призмах  $P$  и  $P_1$  делают совершенно равными для глаза промежутки между штрихами шкалы в левой и правой ее половине при рассматривании их в трубочку  $q$ . Поэтому установка уровня на середину во французском нивелире может быть выполнена с значительно повышенной точностью.



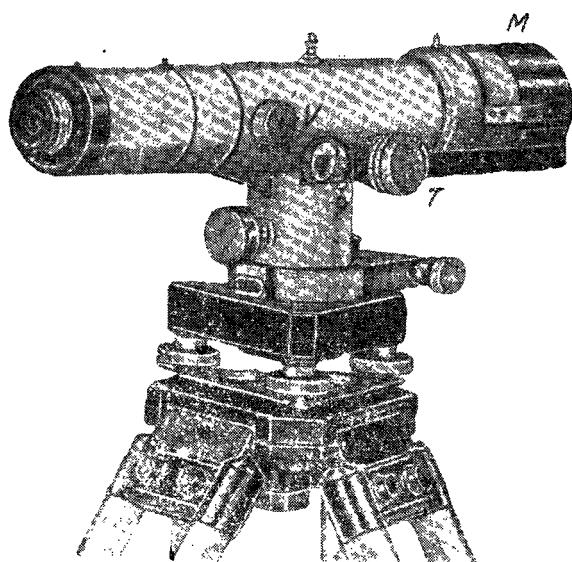
Черт. 302

В точном нивелировании, при равенстве расстояний нивелира от задней и передней ресек, особенно важно однобразие установки уровня при визировании вперед и назад; такое однобразие во французском нивелире может быть достигнуто с чрезвычайной точностью, именно с ошибкой  $\pm 0''.2$ . Посредством винта  $t$  призмы  $P$  и  $P_1$  могут скользить по салазкам  $ss$ , устроенным в верхней стенке камеры  $kk$ ; следовательно, посредством винта можно устанавливать призмы для разных длин пузырька. Давая разные положения рычагу при застежке  $R$ , можно или соединить уровень с трубой так, что его уже нельзя приподнять над цапфами, или останется возможность переложить уровень на цапфах, но без того, чтобы его снять; или сделается возможным полное отделение уровня от трубы. Одна из подставок трубы охватывает с двух сторон линейку  $hh$ , составляющую одно целое с вертикальной конической осью нивелира; через концы этих охватов проходят винты  $m$ , упирающиеся в линейку  $hh$  и образующие остриями своих концов горизонтальную ось, около которой труба и уровень могут вращаться под действием элевационного винта  $v$ . Этот винт  $v$  проходит через противоположный конец линейки  $hh$  и упирается концом в пластину  $aa$ , составляющую одно целое с подставками трубы. Наконец, во французском нивелире имеется еще ряд шпильков и упоров, на которых не будем останавливаться, но которые имеют назначением автоматически во время работы не допускать непредусмотренного расположения уровня и трубы.

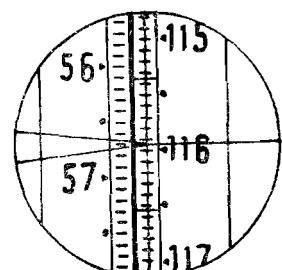
Остановимся теперь на нивелирах Цейсса и Вильда. На черт. 303 показан нивелир Вильда для высокоточного нивелирования, а на черт. 304 — нивелир Цейсса для такого же нивелирования. Особенно-



Черт. 303

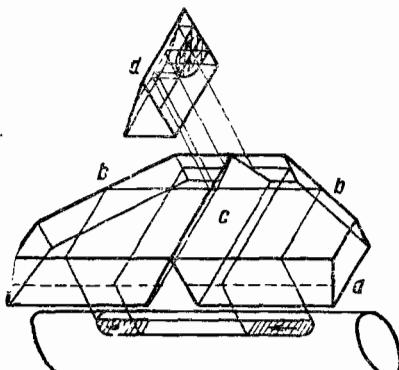


Черт. 304

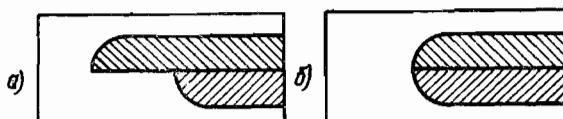


Черт. 304, а

стью этих инструментов является, прежде всего, устройство особых призм, позволяющих отсчитывание по концам пузырька уровня заменить точным совмещением изображений концов пузырька, что соответствует приведению оси уровня в горизонтальное положение. Призмы, служащие для этой цели, показаны на черт. 305: луч отражается сперва от передней грани *a* и падает на грань *b*, отразившись от которой идет параллельно оси уровня, падает на грань *c* и, отразившись в третий раз, направляется вертикально на грань *d*, наклоненную к горизонту под  $45^\circ$ ; отраженное от этой грани *d* изображение рассматривается наблюдателем. Наблюдатель видит изображения двух концов пузырька, вернес, их половинок, получающихся при вертикальном разрезе вдоль пузырька. Эти изображения расположены одно под другим и обращены закруглениями в одну сторону (черт. 306, *a*), совмещаясь своими краями (черт. 306, *b*) только при единственном положении уровня, а именно, когда ось уровня (в выверенном инструменте) горизонтальна. В нивелире Цейсса, изображением на черт. 304, концы пузырька уровня наблюдаются в поле зрения трубы, через ее окуляр; на трубке уровня имеются деления, позволяющие, отсчитывая их по концам пузырька, определять малые наклонности оси уровня. Другими словами, в этих инструментах, кроме точной установки уровня на середину, можно также



Черт. 305

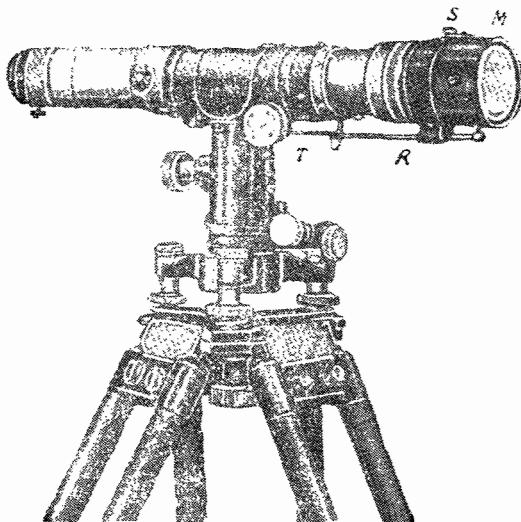


Черт. 306

отсчитывать уровень, что дает возможность с этими нивелирами Цейсса применять и германский метод нивелирования. Средняя ошибка установки уровня на середину  $\pm 0",3$  (при кривизне трубы уровня, соответствующей  $10''$  на  $2\text{ mm}$ ). Отверстие объектива трубы равно  $55\text{ mm}$ , длина трубы около  $34\text{ см}$ , увеличение — 44 у Цейсса и 36 у Вильда; труба имеет внутреннюю фокусировку; фокусировка исполняется при помощи винта *V*. Эти же нивелиры Цейсса и Вильда для высокоточного нивелирования имеют плоско-параллельную пластинку и особое приспособление для ее передвижения: плоско-параллельная пластинка помещается в особой, надеваемой на объектив трубы гильзе *M*; вращение винта *T* с барабаном передается пластинке помощью ломаного рычага.

На черт. 307 приведено изображение нивелира III Цейсса (более ранняя модель), на котором: *M* — надеваемая на объектив гильза, *S* — винт для закрепления этой гильзы, *R* — ломаный рычаг, передающий вращение винта *T* плоско-параллельной пластинке.

На черт. 308 дан продольный разрез трубы нивелира III, поясняющий схему движения плоско-параллельной пластинки. На черт. 304, *a* помещено поле зрения трубы: горизонтальная нить в левой ее части сделана двойной в виде угла, с биссектрисой которого совпадает правая



Черт. 307

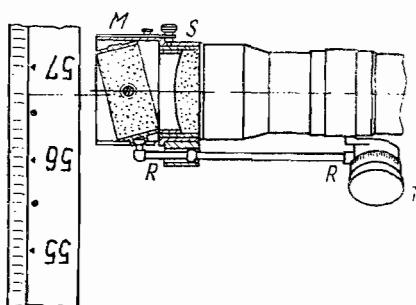
половина нити. Рейка разделена через 5 мм, и подписи на ней дают полудециметры; записав номер штриха, с которым совпадает биссектриса нитей — для нашего чертежа 56,7, затем отсчет по барабану просто

приписывают к этому номеру (например, если по барабану отчитали 46 делений, то отсчет по рейке будет 56,746 в полудециметрах). Последние модели нивелиров Цейсса снабжаются особой покрышкой, защищающей трубу и уровень от солнца (черт. 309).

Несомненно, нивелиры Цейсса и Вильда дают высокую точность результата и вместе с тем ускорение работы; однако, работа механизма, дающего вращение плоско-параллельной пластинке, вовсе не обусловливает тех сотых долей миллиметра, которые выбираются при отсчетах по барабану

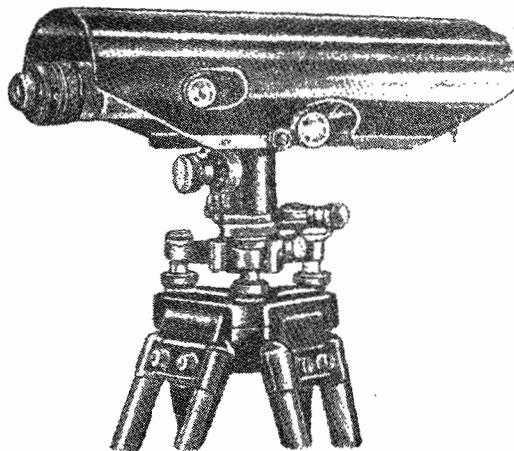
винта *T*; если этот механизм работает с ошибкой, не превышающей 0,3 мм, то и такой результат следует для него признать очень удачным; некоторую ошибку в отсчет вносит и неполная параллельность плоскостей плоско-параллельной пластинки.

Надлежит в точном нивелире иметь значительную длину рычагов дрейфуса, несущего подъемные винты; штатив нивелира должен иметь ножки значительной длины, чтобы можно было широко их расставить (это соблюдается вполне лишь в нивелирах американских). Необходимо



Черт. 308

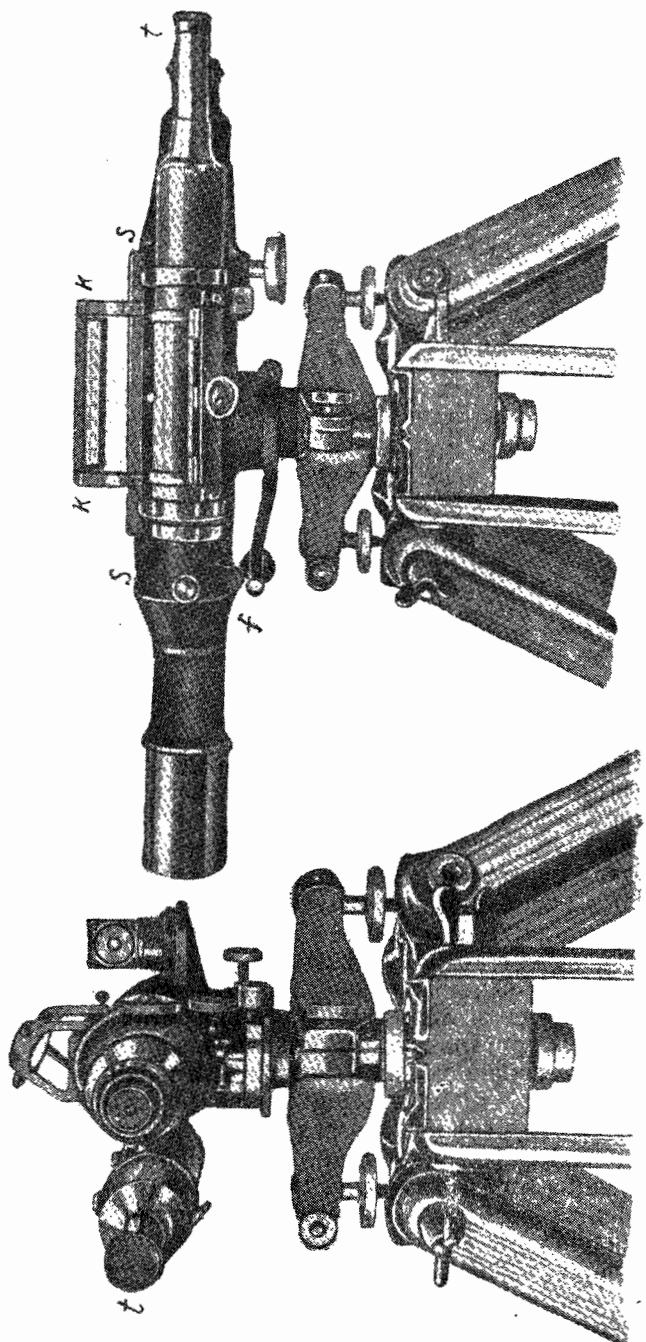
так изготавлять точный нивелир, чтобы температурные перемены не влияли на относительное расположение трубы и уровня. Для этого французы применяют отжиг металла, из которого изготавляется инструмент. С этой же целью американцы изготавливают точный нивелир из инвара, имеющего малый коэффициент расширения ( $\frac{1}{2\ 500\ 000}$ ), и покрывают весь инструмент толстым слоем масляной краски голубовато-серого цвета, составленной по особому «японскому» рецепту. Опыт показывает,



Черт. 309

что изменение температуры на  $1^{\circ}$  Цельсия может вызвать перемену в угле между осью уровня и осью трубы в пределах от  $0'',4$  до  $1''$ , если инструмент изготовлен из меди, что может повести к систематическому накоплению ошибок до  $0,5$  мм на километр.

Американский нивелир Coast and Geodetic Survey Precise Level (точный нивелир Береговой и геодезической съемки) изображен на черт. 310. К вертикальной оси инструмента прикреплен полый цилиндр *ss*, диаметр которого несколько более диаметра трубы; внутрь этого цилиндра вложена вместе с уровнем труба нивелира, причем два винта *f*, проходящие через стенки цилиндра *ss*, упираются своими остриями в углубления в теле трубы; линия этих остриев образует, таким образом, горизонтальную ось, около которой труба вращается под действием элевационного винта; конец этого винта служит третьей точкой опоры той части трубы, которая заключена в цилиндр *ss*. Вверху трубы, вдоль нее, прикреплен непосредственно к стенке трубы уровень с исправительными винтами обычного устройства. В том месте, где приходится передний конец уровня, в стенке трубы имеется уступ вниз, от которого верхняя образующая трубы идет прямолинейно к окуляру, по слегка наклонной к визирной оси трубы линии. Таким образом, уровень помещается в углублении верхней стенки трубы; над уровнем кожух *ss* несколько повышается. В верхней части цилиндра *ss* — над уровнем — имеется прорез, закрытый зеркальным стеклом. Над этим прорезом находится зеркало *kk*, имеющее короткую сторону, наклоненную к горизонту под углом в  $45^{\circ}$ . Отраженные от зеркала лучи падают на две прямоугольные стеклянные призмы, заключенные в трубку *t*; эти



Черт 310

призмы оборачивают в сторону окуляра лучи света, падающие на них от одного и другого конца пузырька уровня.

Таким образом, как и во французском нивелире Бертелеми, наблюдатель видит в трубку  $t$  сближенные изображения концов пузырька и, действуя элевационым винтом, приводит уровень строго на середину в момент взятия отсчета по рейке. Очевидно, что этот американский нивелир относится к типу глухих нивелиров, и понятно, что для высокоточного нивелирования такой тип выбран вполне правильно. С другой стороны, труба и уровень отлично защищены от внешних влияний, а однообразие установки уровня на середину достигается с высокой степенью точности. Особая кремальера позволяет устанавливать призмы соответственно длине пузырька. Особый рычаг закрепляет трубу в цилиндре  $ss$  при переносках инструмента. Штативы американских нивелиров очень велики и массивны. Это вполне отвечает требованиям полной устойчивости установки инструмента на станции, так как в такой работе не приходится ставить на первое место портативность.

Надлежит при работе держать ножки штатива в чехле, предохраняющем штатив от одностороннего нагревания солнцем при работе на данной станции.

Соединение уровня с трубой так, как это принято в СССР, Германии и Америке, казалось бы, всего лучше гарантирует полное соответствие между перемещениями трубы в вертикальной плоскости и перемещениями пузырька уровня, от какой бы причины они ни происходили. Однако, французские геодезисты (Гулье, Лаллеман) склонны к утверждению, что жесткая связь большого сравнительно массива трубы с уровнем делает то, что незначительные деформации трубы, обусловленные изменением температуры, вызывают заметные деформации в стеклянной трубке уровня. Поэтому они предпочитают свободную связь уровня с трубой, но такую, в которой обеспечивалось бы всегда полное однообразие контакта ножек уровня с цапфами трубы. Опыты, произведенные Гулье и Лаллеманом, убедили их в том, что эти оба требования превосходно удовлетворяются во французском нивелире вышеописанной конструкции.

### § 111. Рейки высокоточного нивелирования и приборы для определения их длины

В СССР рейки точного нивелирования (черт. 311) изготавливают из хорошо выдержанного кленового или соснового дерева — в виде бруска с поперечным сечением  $4 \times 6$  см, длиной несколько более 3 м и с делениями, напесенными с двух сторон: на одной стороне белой и черной краской напесены сантиметры и полусантиметры, на другой — белой и красной краской — или двухсотые доли сажени и их половины, или подразделения через  $11/10$  см и в половину этого размера.

К одной из боковых граней рейки привинчивается съемный круглый уровень, по которому рейка ставится вертикально в момент отсчитывания; на другой боковой грани имеется приспособление (крючок вверху и коническое острие в середине) для отвеса, при помощи которого поворяется уровень при рейксе. Нижний конец каждой рейки имеет плоскую металлическую оправу, которая ставится на выпуклую сферическую поверхность шина нивелирного башмака. Рейки должны иметь прочную окраску, хорошо держащую напесенные на них штрихи и защищающую дерево рейки от атмосферных влияний.

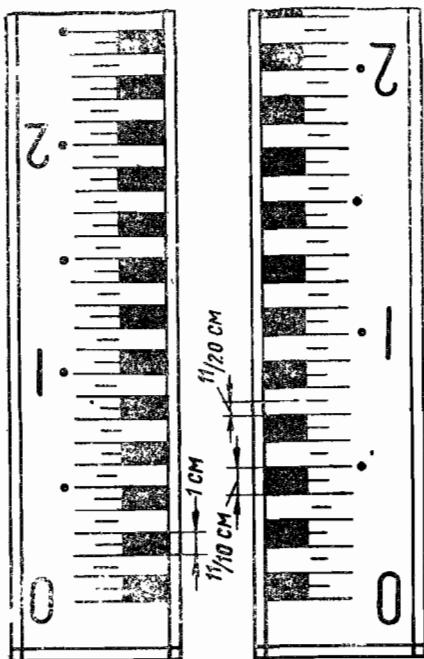
Штрихи на рейках наносятся делительной машиной весьма тщательно. Шашки на рейке, приходящиеся между ее штрихами, служат для облегчения счета целых сантиметров или вообще целых делений; при оценке долей деления, по пяти трубы интерполируют на глаз между штрихами рейки. Деления подписываются или дециметровые на черной стороне (от 0 до 30) и через промежутки в 11 см на красной стороне (от 0 до 27), или полудециметровые на черной стороне (от 0 до 60) и через промежутки в 5,5 см на красной стороне (от 0 до 54); в первом случае результат нивелировки будет выражен в метрах, а во втором — в полуметрах. Рейки имеют номера: в каждой паре один номер четный и другой — нечетный; на нечетной рейке нуль черной стороны ставится на 10 см выше нуля красной стороны. На каждой стороне рейки врезают марки, в виде металлического кружка, на верхней посеребренной поверхности которого имеются два тонко и очень аккуратно нарезанных, перпендикулярно друг к другу, штриха. Эти марки служат для выяснения изменений в длине рейки во время исполнения нивелирования. На каждой стороне рейки имеется по три контрольные марки, отстоящие друг от друга на один метр: нижняя марка находится выше нуля рейки на 0,5 м.

При работе рейки устанавливают на массивный башмак из кованого железа, весом около 5 кг; такой башмак изображен на черт. 312.

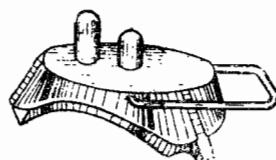
Для исследования длины реек служит так называемая женевская линейка, изображенная на черт. 313. Длина этой линейки несколько более метра; она имеет скопленные ребра *aa* и *bb*; на плоскости ребра *aa* длинные штрихи следуют через 1 мм, а каждый миллиметр подразделен, на протяжении всей длины линейки, через 0,2 мм, причем в пределах каждого миллиметра штрихи постепенно укорачиваются (см. нижнюю часть черт. 313); на ребре *b* нанесены штрихи только через миллиметр; выступ *cc* имеет вверху желобок, по которому передвигаются рукоятки двух луп, служащих для отсчитывания линейки.

Полное исследование рейки выполняется только перед началом и в конце полевого периода; оно состоит:

- 1) в тщательном промере женевской линейкой расстояний между штрихами марок;
- 2) в определении общей длины каждой стороны рейки, т. е. общей длины 30 дециметровых делений черной стороны и общей длины 27 или 28 делений (по 11 см каждое) красной стороны;

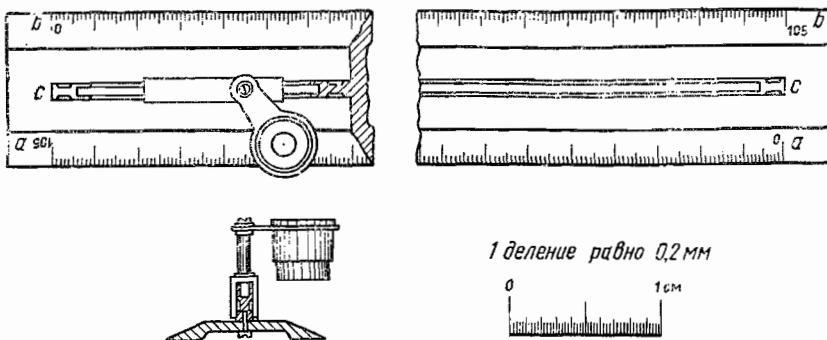


Черт. 311



Черт. 312

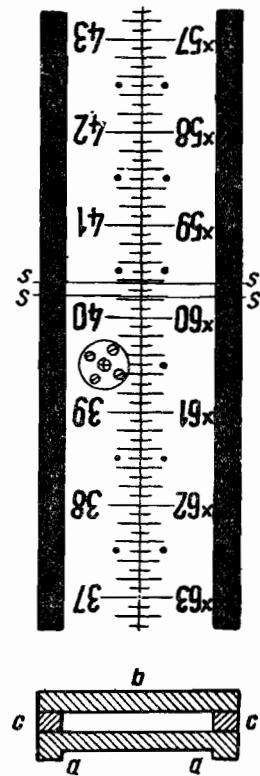
3) в тщательном определении поправок всех дециметровых штрихов на черной стороне рейки и всех штрихов на красной стороне с подписями 0, 1, 2, ..., 27, 28 (т. е. отстоящих друг от друга на 11 см).



Черт. 313

Во время полевой работы надлежит один раз в неделю вымерять женевской линейкой расстояния между марками, что путем вывода изменений в этих расстояниях по сравнению с первоначальным и конечным значением этих расстояний, позволит установить длину рейки и ее частей на каждый день работы.

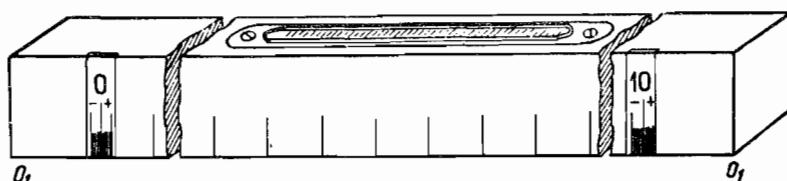
Рейки германской нивелировки рассчитаны на такой способ наблюдений, когда отсчет рейки по нити трубы заменяется паведением нити трубы на штрихи рейки. Поэтому здесь мы имеем штриховую рейку, устройство которой видно на черт. 314; рейка односторонняя и состоит: из ольховой задней доски *b*, двух словых брусков *cc* и передней ольховой доски *aa*, на лицевой стороне которой нанесены деления; доски *b* и *aa* и бруски *cc* соединены клесм и винтами; между задней стенкой футляра *b* и доской *aa* остается воздушное пространство. Деления на рейке нанесены через 5 мм, причем штрихи имеют толщину ровно в один миллиметр; в желобообразное углубление, прорезанное резцом делительной машины и имеющее ширину один миллиметр, вмазывается черная краска; расстояние 5 мм взято между осьми штрихов, между краями их расстояние равно 4 мм. Рейка имеет круглый уровень и оканчивается плоскостью, с которой совпадает ее нуль; длина рейки немного более 3 м; подпись делений через 0,5 дм, причем с левого борта имеются так называемые децимальные подписи, дополняющие до 100 обычные подписи; вблизи штрихов 20 и 40 (на концах среднего метра) врезаны в дерево рейки контрольные марки. На расстоянии в 50 м штрихи рейки кажутся в два с лишним раза более толстыми, чем нити трубы. Горизонтальная нить трубы *ss* (черт. 314) делается двойной, с угловым



Черт. 314

расстоянием между нитями около  $25''$ ; при расстоянии до рейки в  $50\text{ м}$ , по наведении биссектора на некоторый штрих, пинты должны отстоять от краев смежных с ним двух штрихов примерно на  $1,5\text{ мм}$ , т. е. просвет должен быть примерно равен полуторной толщине штриха. Очевидно, малейшая несимметрия в установке пинтей относительно штрихов рейки подмечается наблюдателем.

Для исследования длины такой рейки служит стальной жезл квадратного сечения длиной в  $1\text{ м}$ , изображенный на черт. 315: на одной стороне жезла близ его концов врезаны в тело жезла две серебряные пластинки, на которых нанесены подразделения через  $\frac{1}{5}\text{ мм}$ ; на верхней грани жезла имеется термометр, шарик которого впущен в тело жезла.



Черт. 315

Расположив ребро  $O_1O_1$  жезла по продольной оси  $OO$  рейки (отмеченной чертой через всю длину рейки), затем делают на подразделенных пластинках отсчеты по штрихам рейки, приходящимся в пределах пластинок, оценивая на глаз десятую долю деления; вследствие большой толщины штриха отсчеты делают или по правым или по левым краям штрихов. Отсчеты, сделанные на пластинках влево от концевых штрихов 0 и 10, записывают со знаком минус; отсчеты, сделанные в пределах делений, лежащих вправо от штрихов 0 и 10, записывают со знаком плюс; считая конец жезла со штрихом 10 передним, измеряемый промежуток вычисляют так: длина жезла плюс передний отсчет минус задний.

Исследование реек в Германии производится существенно проще, чем у нас, в предположении, что случайные ошибки штрихов ничтожны, а дерево рейки изменяет свою длину во время работы равномерно, по всей длине разделенных трех метров. Имению перед началом и по окончании работ в поле выполняют такую программу. Берут восемь частей рейки между штрихами: 5—25, 25—45, 10—30, 30—50, 15—35, 35—55, 20—40, 40—60. Каждую такую часть измеряют контрольным метром — по одному разу в прямом и обратном ходе, но каждый раз с отсчитыванием шкалы жезла по левому и правому краю штриха; в один прием включают две смежные из приведенных выше метровых частей рейки, причем перед приемом и после приема измеряют расстояние между контрольными марками. Из такого исследования, без введения поправок за температуру, получают, очевидно, разность для каждой части длины номинального метра рейки ( $L_m$ ) и расстояния  $M$  между контрольными марками; из этих восьми разностей выводят среднее значение  $b$ , которое, как показывает опыт 40 лет, остается для данной рейки постоянным. Во время полевых работ каждый день в полуденный перерыв измеряют расстояние  $M$  между контрольными марками, которых на немецкой рейке всего две. Очевидно

$$L_m = M + b.$$

где  $M$  — расстояние между контрольными марками в день работы, и  $L_m$  — длина номинального метра рейки для этого же дня.

В табл. 67 приводится пример такого исследования, взятый из книги Негемапп, Lehrbuch der Landesvermessung.

Таблица 67  
Определение постоянного  $b$  для рейки № 3

| Марки и края штрихов  | Контрольный метр |        | Расстояние | Постоянное $b$ равно<br>метру рейки минус<br>расстояние между<br>марками |
|---|------------------|--------|------------|--|
|   | Лево             | Право  |            |  |
| $t = +20^\circ, 2$  |                  |        |            |  |
| Марки   | + 0,06           | + 0,12 | - 0,06     |  |
| 5—25 { $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{n} \end{array}$ . . . . . }  | + 0,24           | + 0,30 | - 0,07     | $-0,01 = (-0,07 + 0,06)$   |
|   | - 0,27           | - 0,19 |            |  |
| 25—45 { $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{n} \end{array}$ . . . . . } | + 0,16           | + 0,27 | - 0,10     | $-0,04 = (-0,10 + 0,06)$   |
|   | - 0,36           | - 0,27 |            |  |
| 25—45 { $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{n} \end{array}$ . . . . . } | + 0,20           | + 0,31 | - 0,10     | $-0,07 = (-0,10 + 0,03)$   |
|   | - 0,30           | - 0,21 |            |  |
| 5—25 { $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{n} \end{array}$ . . . . . }  | + 0,29           | + 0,37 | - 0,09     | $-0,06 = (-0,09 + 0,03)$   |
|   | - 0,28           | - 0,14 |            |  |
| Марки   | + 0,04           | + 0,07 | - 0,03     |  |
| $t = +20^\circ, 4$  |                  |        |            |  |

Работу исполняет один наблюдатель; помощник его ведет запись.

Всего должно быть исполнено 4 таких приема: второй для промежутков 10—30 и 30—50; третий — для промежутков 15—35 и 35—55 и четвертый — для промежутков 20—40, 40—60. Правило знаков применено в этом примере при счете по шкалам жезла — обратное вышеуказанному; все отсчеты выражены в «двойных миллиметрах», так как десятая доля деления на шкале жезла, равная 0,02 мм, равна 0,01 двойного миллиметра. В среднем из всех определений  $b$  его значение получилось:

$$b = -0,045 \text{ двойных миллиметров.}$$

Пример определения расстояний между марками во время полевых работ представлен табл. 68.

В наших работах также применяют для определения расстояний между марками контрольный метровый жезл, изображенный на черт. 315. При этом нуль жезла будет на левом его конце, и отсчеты, сделанные по шкалам с делениями в  $\frac{1}{5}$  мм влево от штрихов, подписанных цифрами 0 и 10, сопровождаются знаком минус, а отсчеты, сделанные по тем же шкалам вправо от 0 и 10 — знаком плюс.

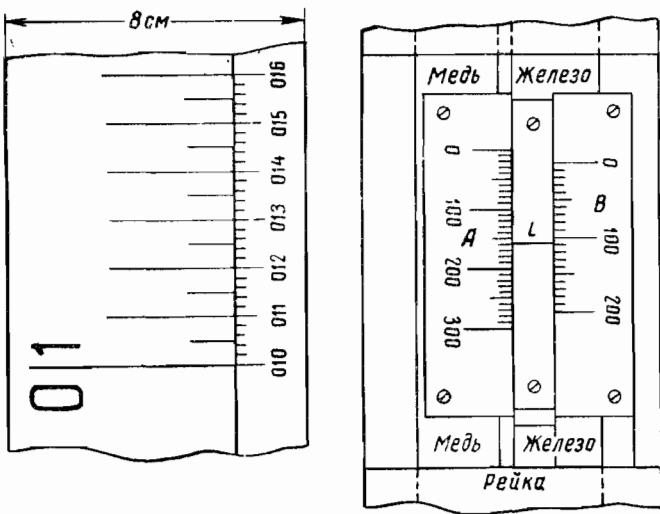
В наших точных нивелировках одновременно с вышеуказанным измерением расстояния  $M$  между крайними марками на черной и на красной стороне рейки, определяют тщательно общую длину рейки, применяя тот же контрольный стальной метр, что и при определении расстояний между марками, причем на черной стороне определяют длину 30 дециметровых делений, а на красной стороне берут отрезок в 273 деления, по 11 мм каждое.

На черт. 316 изображена рейка французской нивелировки: самыми длинными и несколько утолщенными штрихами обозначены дециметры;

Таблица 68

| 1912                                  | Рейка 3                   | Рейка 4        |
|---------------------------------------|---------------------------|----------------|
| Число . . . . .                       | 14 июля<br>9 <sup>h</sup> |                |
| Час . . . . .                         |                           |                |
| Термометр . . . . .                   | +15°,7                    | +15°,8         |
| Марки <i>л</i> . . . . .              | + 0 ,34<br>+ 0 ,29        | +0,12<br>+0,06 |
| <i>n</i> . . . . .                    |                           |                |
| <i>l</i> — <i>n</i> . . . . .         | +0,05                     | + 0,06         |
| Марки <i>л</i> . . . . .              | +0,37                     | - 0,04         |
| <i>n</i> . . . . .                    | + 0,31                    | - 0,10         |
| <i>l</i> — <i>n</i> . . . . .         | +0,06                     | + 0,06         |
| Вычисление                            |                           |                |
| Среднее <i>l</i> — <i>n</i> . . . . . | +0,11                     | +0,12          |
| Поправка за температуру . . . . .     | - 0,04                    | - 0,04         |
| <i>b</i> . . . . .                    | - 0,09                    | - 0,09         |
| <i>n</i> . . . . .                    | - 0,02                    | - 0,01         |

В среднем длина метра рейки № 3 = 1000 мм — 0,015 мм для 14/VI.



Черт. 316

затем следуют штрихи через 5 мм, из которых сантиметровые штрихи на левой половине своей длины утолщены; наконец, на крайней правой зоне рейки нанесены штрихи через два миллиметра, которыми пользуются при расстояниях до рейки, меньших 35 м. Все штрихи нанесены на пергаменте, который кнопками прикрепляется к дерсуву рейки; деления

при изготовлении рейки в Бюро нивелирования Франции наименование несколько неравными между собой; поправки штрихов тщательно определяют там же, но не сообщают их нивелировщику. Внутри рейки имеется канал, в котором помещаются две полосы: железная и мединая; эти полосы соединены наглухо с пяткой рейки, но на всем остальном своем протяжении установлены свободно, так что могут беспрепятственно изменять длину вместе с температурой. На расстоянии 2,8 м от нуля рейки к медной полосе приделана пластинка  $A$  с делениями, к дереву рейки приделана пластинка  $B$  с делениями, а на железной полосе — открытой в этом месте — имеется штрих  $i$ , по которому производят отсчеты  $a$  и  $b$  на шкалах пластинок  $A$  и  $B$ . Во время работы пластиинки  $A$  и  $B$  закрыты деревянной задвижкой. Деления на шкале  $A$  взяты равными 0,1825 мм из расчета, чтобы одно деление было равно расширению медной полосы относительно железной полосы, когда последняя получает удлинение в 0,10 мм на метр. Деления шкалы  $B$  взяты равными 0,28 мм из расчета, чтобы одно деление было равно расширению железной полосы в 0,10 мм на метр. Нетрудно видеть, что при таком расчете делений шкал  $A$  и  $B$  сумма  $a + b$  отсчетов по шкалам будет постоянна, если только дерево рейки не изменяет своей длины; наоборот, изменение этой суммы будет измерять изменение длины рейки, причем, если при исследовании рейки на компараторе, при длине ее  $L_0$ , сумма  $a + b$  была равна  $c_0$ , то в тот момент полевой работы, когда  $a + b$  было равно  $c$ , длина рейки равна:

$$L_0 + (c - c_0) \cdot 2,8.$$

Из сказанного до сих пор следует, что в высокоточной нивелировке стремятся усчитать перемены длины рейки и точно знать ее длину в любой момент работы. Хотя с точными нивелировками обычно идут по железным дорогам, т. е. по линиям, имеющим слабые уклоны, по все-таки даже в равнинных странах разность высот на 300 км пути достигает нередко 200 м. Если длина метра рейки будет установлена с ошибкой в 0,10 мм, то это вызовет систематическую ошибку в разности уровней в 200 м, равную 20 мм. Отсюда вытекает, что в странах неравнинных нужно очень строго определять длину номинального метра рейки с ошибкой, вообще не превышающей  $\pm 0,03$  мм. Между тем опыт французской нивелировки показывает, что колебание длины метра рейки, вследствие, главным образом, влияния влажности, может за день достигать величины  $\pm 0,2$  мм. Поэтому, чем крупнее рельеф поверхности земли в государстве, тем большее внимание должно быть обращено:

а) на тщательное определение длины рейки перед началом и в конце полевого периода;

б) на тщательное определение изменений в длинах реек, происходящих изо дня в день во время полевой работы.

По идею устройства французских реек наиболее отвечает этому заданию — изо дня в день тщательно определять перемены длины рейки, но по исполнению это устройство оставляет желать много лучшего.

Конечно, сказанное выше относится к реекам из дерева. В Америке уже около 30 лет применяют рейки следующего устройства: деревянная часть рейки или собственно рейка имеет размеры: 79 × 29 мм × 3,259 м; она приготавливается из хорошо выдержанного дерева, пропитанного сырьим льняным маслом; три раза покрывается shellаком и два раза свинцовыми белилами. Это отлично предохраняет рейку от коробления при сырости. Главной частью рейки является инварная полоска толщи-

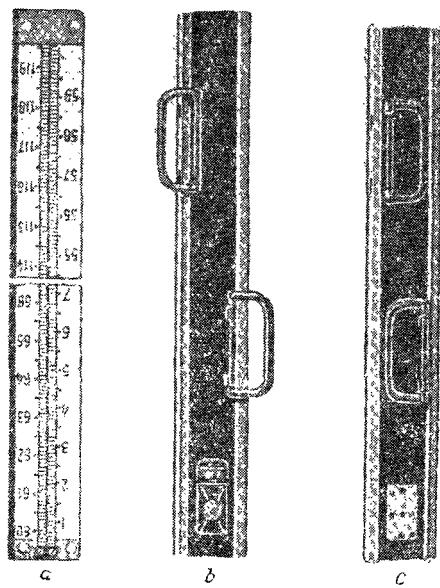
ной в 1 *мм*, шириной в 26 *мм* и длиной в 3,2 *м*. Нижним своим концом эта инварная полоска наглухо прикреплена медными болтами и винтами к металлическому наконечнику деревянной части рейки, в верхнем конце инварная полоска соединяется с пружиной, вставленной в вырез деревянной части рейки и дающей инварной полоске надлежащее натяжение. Сантиметровые деления (шашечные) наносятся на инварной полоске, на деревянной же части с лицевой стороны помещаются только цифровые подписи дециметров. На обратной стороне рейки (на дереве) наносятся футы и десятые их доли — эта сторона рейки используется при нивелировке только для контроля (для обнаружения грубых просчетов); на этой же обратной стороне укреплен на высоте 4 футов термометр. Установка рейки делается по круглому уровню. Понятно, что в американских рейках достаточно перед полевыми работами и по их окончании (на соответственно построенном компараторе) определить только общую длину рейки, все остальные их исследования просто отпадают.

Инварные рейки все более и более входят в употребление при нивелировках в Западной Европе и в СССР. Именно укажем на рейки с инварными лентами, изготовленные Цейссом и Вильдом и изображенные на черт. 317. Инварная лента имеет ширину 26 *мм* и пропущена свободно своими краями в пазах, вырезанных по сторонам среднего углубления в теле рейки, которая приготавливается из цельного куска дерева. Нижний конец инварной ленты прикреплен наглухо к стальному наконечнику рейки; верхний ее конец прикреплен к переднему концу двуплечего рычага, ось вращения которого укреплена в верхнем стальном наконечнике рейки; задний конец рычага притягивается пружиной с силой в 20 *кг*. Длина натянутой таким образом инварной ленты совершенно не зависит от изменений,

происходящих в дереве рейки. Деления на инварной ленте — полусантиметровые (штриховые) с подписью полуцентиметров; на ленте имеются всегда две шкалы делений, смешанные одна относительно другой приблизительно на 2,5 *мм*; нумерация в одной шкале идет от 0 до 60, в другой от 60 до 119, разность отсчетов по двум шкалам является постоянной величиной.

Исследование инварных реек Цейсса и Вильда сводится обычно к определению общей длины 60 полуцентиметровых делений рейки перед началом и в конце рабочего периода.

Рейки ставятся у нас и в Германии на башмак, изображенный на черт. 312. В США башмак заменяется железным костылем, достаточно массивным, длиной около 0,25 *м*, забиваемым молотком до отказа. Кроме нивелира и реек, нивелировщик должен еще иметь: контрольный



Черт. 317

метр, термометр-прац для измерения температуры воздуха, подвесную реечку для привязки к маркам, проволочный канатик, длиной 70 м для отбивки расстояний, два больших зонта, башмаки к рейкам, топоры и лопаты, запас нивелирных марок и цемента.

## § 112. Инструментальные ошибки нивелирования

Существенной ошибкой является ошибка отсчета по рейке. Исследования относительно этой ошибки выполнены (в числе прочих ученых) проф. Рейнгерцем. Мы и приведем сначала результаты его работы в этом направлении.

Назовем через  $J$  видимую в поле зрения величину интервала на рейке; по исследованиям Рейнгерца относительная ошибка  $m$  оценки части этого интервала по нити трубы может быть выражена так:

$$m = \frac{a}{\sqrt{J}}.$$

Здесь  $a$  — некоторое постоянное, не зависящее от силы трубы, если только интервал рейки рассматривался в трубу с полной отчетливостью и без всякого напряжения.

Называя через  $t$  действительную величину интервала на рейке, через  $v$  — увеличение трубы, и через  $d$  — расстояние в метрах от нивелира до рейки, напишем

$$J = \frac{t \cdot v \cdot 0,25}{d},$$

причем 0,25 м — расстояние наилучшего зрения. Отсюда

$$m = \frac{a \sqrt{d}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{v} \cdot \sqrt{0,25}} = \frac{2a \sqrt{d}}{\sqrt{t} \sqrt{v}}.$$

Очевидно  $\mu = m \cdot t$  выразит собой среднюю ошибку определения положения визирной оси трубы на рейке. Следовательно,

$$\mu = \frac{2a \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{d}}{\sqrt{v}}.$$

По исследованиям Рейнгера, величина  $a$  равна:

1) 0,04 при наведении нити на штрихи рейки или при установке нити на середину интервала на рейке;

2) 0,08 при отсчитывании рейки по нити трубы, т. е. при определении интерполированием на глаз части интервала рейки, причем нить приходится вблизи  $1/4$  или  $3/4$  интервала;

3)  $0,08 > a > 0,04$  при отсчитывании рейки в тех случаях, когда нити приходятся или вблизи половины интервала или вблизи начала, или конца интервала.

На основании сказанного, для нивелировки по германскому методу

$$\mu = \frac{0,08 \sqrt{5} \sqrt{50}}{\sqrt{40}} = \pm 0,20 \text{ м.м.}$$

Для нивелировки по русско-швейцарскому методу, при применении реек с полусантиметровыми делениями, наибольшее

$$\mu = \pm \frac{0,16 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{50}}{\sqrt{40}} = \pm 0,40 \text{ мм.}$$

Для нивелировки по русско-швейцарскому методу, при  $d = 65 \text{ м.}$ , наибольшее

$$\mu = \pm \frac{0,16 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{40}} \sqrt{65} = \pm 0,64 \text{ мм.}$$

Эггерт, автор известной книги „Handbuch der Vermessungskunde“, обрабатывая материалы Рейнгерца, Вагнера, Куммера, пришел к иной формуле для средней ошибки  $\mu$  отсчета, а именно по Эггерту

$$\mu = \pm \left( 0,136 \frac{d}{v} + 0,0292 t \right),$$

причем эта величина уменьшается в 1,5 раза, если отсчет заменяется наведением штейн на штрихи рейки, и увеличивается в 1,3—1,5 раза при оценке частей интервала, составляющих от него  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$ . По Эггерту, для нивелировки по германскому методу получаем те же  $\pm 0,20 \text{ мм.}$ , что и по Рейнгерцу.

Для нивелировки по русско-швейцарскому методу при  $d = 50 \text{ м.}$  и при применении реек с полусантиметровыми делениями с оценкой десятой доли такого деления, получим по Эггерту:  $\mu = \pm 0,43 \text{ мм}$  при положении штейна вблизи  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$  интервала, т. е. величину, близкую к полученной по Рейнгерцу. Но при  $d = 65 \text{ м.}$ , применяемом нередко в советской нивелировке, когда штрихи рейки плохо видны и приходится применять оценку десятых долей интервала в сантиметр в виде одной шашки рейки, формула Эггерта дает при наиболее невыгодных условиях

$$\mu = \pm 0,69 - \pm 0,77 \text{ мм.}$$

Если  $\mu$  считать за характеристику чисто случайных ошибок отсчета, то для последнего случая величина, получаемая по Рейнгерцу, а тем более по Эггерту, слишком велика, т. к. она ведет к предельной ошибке  $\pm 2,0 \text{ мм.}$  Нужно считать, что в приведенных значениях  $\mu$  отразилось отчасти и систематическое влияние личных ошибок наблюдателей в материале, послужившем для вывода формул для  $\mu$ .

В СССР делают отсчеты трех штейн на каждой стороне рейки. Опыт показывает, что отсчет по крайней нити имеет вес около  $\frac{1}{2}$  по сравнению с весом отсчета по средней штейни. Поэтому влияние ошибки отсчета в наших нивелировках на  $1 \text{ км}$  хода выражается так:

$$\pm \frac{0,50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \pm 1,00 \text{ мм.}$$

В этом расчете предполагается, однако, полная неподвижность рейки за время отсчитывания трех штейн, и, кроме того, не учитываются систематические ошибки отсчетов. Систематические ошибки обусловливаются личными ошибками наблюдателя, а также различием освещения задней и передней реек. На данном участке нивелировки может на ряде следующих друг за другом станций иметь место существенно различное освещение задней и передней реек, что может в нашей, французской и

американской нивелировках вызывать накопление влияния систематических ошибок отсчетов. Собственно личные ошибки отсчетов при опытном наблюдателе, при отсчете по трем нитям и по двум сторонам рейки, должны на ход длиной в несколько километров дать влияние в разности уровней, накапливающееся по закону накопления случайных ошибок. Отметим кстати, что наблюдатель расценивает всегда меньшую часть интервала и поэтому, если отсчет менее  $\frac{t}{2}$ , расцененную часть прибавляет к номеру младшего штриха, если же отсчет более  $\frac{t}{2}$ , то, оценив дополнение отсчета до  $t$ , вычитает затем эту часть из номера старшего штриха рейки. Очевидно, если иметь рейку двустороннюю, устроенную так, чтобы штрихи одной стороны были бы сдвинуты относительно штрихов другой стороны на  $\frac{t}{2}$ , то влияние личной постоянной ошибки будет исключаться.

Понятно, что в высокоточной нивелировке опасны особенно ошибки одностороннего характера. Поскольку имеется в виду влияние ошибок отсчетов, постольку должно признать целесообразным в высокоточном нивелировании переход или на немецкий метод, или на применение инструментов типа Цейсса (Вильда) с плоско-параллельной пластинкой, так как при наведении нити на штрих, конечно, получают очень однобразные условия при наблюдении задней и передней реек, т. е. почти полное исключение систематических ошибок отсчетов в разности уровней.

Остановимся теперь на одной из следующих инструментальных ошибок — ошибке взгляда, обусловленной ошибкой в отсчитывании уровня.

Эггерт на основании материалов Рейнгерца даст для средней ошибки  $m$  определения наклонности оси уровня по отсчетам концов его пузырька такую формулу

$$m = \pm 0''.20 \cdot \sqrt{K},$$

где  $K$  — цена деления уровня. Поэтому для советской и германской нивелировок, где  $K = 5''$ :

$$m = \pm 0''.44,$$

что дает во взгляде на рейку  $\pm 0.11 \text{ мм}$ .

Для установки уровня на середину

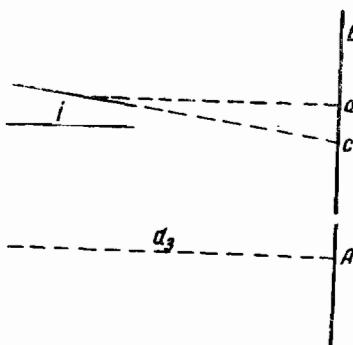
$$m = \pm 0''.09 \cdot \sqrt{K}$$

Но обе эти формулы получены в условиях лабораторных опытов. В действительности работа уровня зависит от температурных условий; всегда его пузырек смещается несколько в сторону солнца, и, очевидно, это смещение будет давать ошибку одного знака в отсчете на переднюю рейку и противоположного знака в отсчете на заднюю рейку, причем на целом ряде станций ошибка в последовательных разностях уровней будет явно систематическая. В летний солнечный день эта систематическая ошибка может дойти до  $0.5 \text{ мм}$  и более на одну станцию. Симметричное расположение наблюдений на станции здесь не поможет. Рассматриваемое систематическое влияние почти исчезает при работе в серый, пасмурный день; затем оно тем менее, чем быстрее идет работа на станции. Паконец, очевидно, значительная часть этого влияния погасится, если вести работу по полудневным секциям, т. е. проходить

секцию прямым ходом до полудня и обратным ходом после полудня. Такая система работы принята только во Франции.

В Германии нить трубы наводят на штирик рейки, затем отсчитывают уровень и вводят поправку за уровень, которая, очевидно, может достигать величины  $\frac{t}{2}$  или до  $10''$ . Конечно, такую большую поправку за уровень нужно учитывать с особенной осторожностью.

Те задержки в движении пузырька уровня, те несовершенства этого движения, которые имеют место, когда уровень приведется строго в горизонтальное положение или близкое к нему, конечно, сказываются на разности уровней в меньшей степени в французском и американском методах, а также при применении нивелиров Цейсса и Вильда, чем в методе германском и русско-швейцарском, так как однообразие установки уровня при взглядах и на переднюю и на заднюю рейки соблюдается в французском и американском методе, а также в нивелирах Цейсса и Вильда в высокой степени. Что касается несовершенств в движении пузырька, то здесь должны соблюдать правило — всегда устанавливать пузырек окончательно движением его в одном направлении относительно подписи на шкале уровня, тогда получается уверенность, что наклонности по уровню будут определены на заднюю и переднюю рейки с постоянной погрешностью, а, следовательно, это влияние, при равенстве расстояний от нивелира до реек, в разности уровней будет заметно погашаться. Германская и советская нивелировки предъявляют к уровню наиболее строгие требования, с другой стороны, обе нивелировки, требующие отсчитывания концов пузырька, приводят к конструкциям нивелиров, в которых уровень менее защищен от внешних влияний, чем в американском нивелире или в нивелире Цейсса. Отсюда вытекает необходимость тщательного исследования уровней в наших нивелирах по программе, указанной в § 45 главы VII, с выяснением из такого исследования несовершенств в движении пузырька уровня и чувствительности уровня к внешним причинам. Вследствие неполной выверки нивелира, всегда в нем имеется некоторый малый угол  $i$  между визирной осью трубы и осью уровня. Этот угол будем считать положительным, если ось трубы и ось уровня сходятся к объективу (черт. 318).



Черт. 318

Называя через  $Z_u$  отсчет на заднюю рейку при точке, соответствующей горизонтальному положению оси трубы, через  $Z_n$  отсчет на ту же рейку при точке  $c$ , соответствующей наклону оси трубы на угол  $i$ , имеем

$$Z_u = Z_n + d_3 \cdot \operatorname{tg} i,$$

понимая под  $d_3$  — расстояние до задней рейки. Называя через  $\Pi_u$ ,  $\Pi_n$  отсчеты истинный и наблюденный на переднюю рейку, через  $d_n$  — расстояние от центра нивелира до передней рейки и через  $u$  — истинную разность уровней, имеем

$$\begin{aligned} \Pi_u &= \Pi_n + d_n \cdot \operatorname{tg} i; \\ u &= Z_u - \Pi_u + (d_3 - d_n) \cdot \operatorname{tg} i. \end{aligned} \quad (495)$$

В германской нивелировке отмеряют стальной лентой 50 м от нивелира до рейки и там  $d_3 = d_n$ ; но в нивелировке советской отбивка расстояний делается проволочным канатиком, с натягиванием его руками, вследствие чего может появиться накопление разностей  $d_3 - d_n$ .

Очевидно, разность уровней  $U$  между двумя марками равна

$$U = \sum u = \sum (Z_n - \Pi_n) + \operatorname{tg} i \sum (d_3 - d_n). \quad (496)$$

Сумма  $\sum (d_3 - d_n)$  определяется достаточно хорошо помощью боковых (дальномерных) нитей трубы нивелира. Угол же  $i$  подлежит определению, причем в СССР употребляют такой способ. Назовем дальномерный коэффициент через  $k$ , разность отсчетов по верхней и нижней нитям дальномера через  $D$ . Тогда

$$\begin{aligned} d_3 &= D_3 \cdot k + c; \quad d_3 - d_n = (D_3 - D_n) \cdot k. \\ d_n &= D_n \cdot k + c; \end{aligned}$$

Далее представим себе, что мы стали с нивелиром намеренно ближе к задней рейке и исполнили нивелировку между рейками, получив отсчеты  $Z'_n$  и  $\Pi'_n$ ; после этого, оставляя на месте рейки, переставим нивелир так, чтобы он был теперь ближе к передней рейке, и сделаем вторичную нивелировку, получив отсчеты на рейках  $Z''_n$  и  $\Pi''_n$ . Тогда, очевидно, приходим к двум уравнениям

$$\begin{aligned} u &= Z'_n - \Pi'_n + k \operatorname{tg} i (D'_3 - D'_n); \\ u &= Z''_n - \Pi''_n + k \operatorname{tg} i (D''_3 - D''_n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$k \operatorname{tg} i = \frac{(Z''_n - \Pi''_n) - (Z'_n - \Pi'_n)}{(D'_3 - D'_n) - (D''_3 - D''_n)}. \quad (497)$$

При описанном опыте по определению  $i$ , нивелир ставят ближе к задней, а потом ближе к передней рейке, нарушая каждый раз равенство расстояний возможно больше, т. е. настолько, чтобы без перемены фокусировки трубы, установленной для расстояния в 50 м, можно было бы хорошо отсчитывать обе рейки, считаясь с небольшим параллаксом нитей. Определения  $i$  выполняют через день, и затем за угол  $i$  вводят поправку по формуле (496).

В Франции работа на станции ведется так, что на каждую рейку берут взгляды при двух положениях трубы в лагерах, получающихся поворотом ее около геометрической оси, и при двух положениях уровня на цапфах трубы. Поэтому здесь поправка за угол  $i$  вводить не нужно так как в среднем выводе из всех наблюдений влияние его погашается.

Необходимо указать, что формулы (495) и (496) выведены в предположении неизменяемости угла  $i$  — по крайней мере за время хода между двумя марками. Конечно, угол  $i$  на самом деле изменяется, вследствие температурных влияний и вследствие сотрясений при переносках инструмента. Эти перемены угла  $i$  на вычисление поправки по формуле (496) будут сказываться, конечно, тем менее, чем меньше допущенные неравенства расстояний, т. е. величины  $d_3 - d_n$ . В современных работах  $d_3 - d_n$  всегда менее 0,4 м и поэтому изменение угла  $i$  на 10" даст ошибку в отдельной разности уровней менее 0,02 мм.

Если перемены угла  $i$  при малых  $d_3 - d_n$  почти неощутительно влияют на определение поправки за неравенство расстояний, то эти же

перемены будут влиять совсем иначе на определение самих разностей уровней. Если представить себе, что угол  $i$  меняется равномерно с течением времени, то симметричное расположение наблюдений на станции по такой схеме

- 1)  $Z_1$ ,
- 2)  $P_1$ ,
- 3)  $P_2$ ,
- 4)  $Z_2$ ,

приведет к исключению влияния пермен в угле  $i$  на окончательный вывод величины  $Z - P$ . Но возможны перемены угла  $i$  неравномерные, скачками; внезапное изменение  $i$  на  $5''$  может повести к ошибке в  $1,2 \text{ мм}$ .

При конструировании инструмента надлежит поэтому обратить особое внимание на соединение уровня с трубой и защиту их от внешних влияний.

### § 113. Ошибки нивелирования из-за недостатков установок

Рейки при нивелировании устанавливаются по круглому уровню, хорошо выверяемому каждый день. Поэтому ошибки от наклонного держания реек совершенно ничтожны, но так как реечнику трудно держать рейку за ручки неподвижно — она колеблется; в нивелировке высокой точности держат рейки при помощи двух палок, нижние концы которых втыкаются в землю, а верхние, пропущенные через пальцы реечника, прижимаются его руками к дереву рейки.

Большую роль в нивелировке играет установка нивелира и башмаков для реек. На одних участках нивелирования установленные башмаки постепенно оседают, но бывают случаи и обратного движения башмака. Те сдвиги штатива нивелира, которые происходят во время работы на станции, значительно компенсируются в разности уровней из четырех взглядов:  $Z_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Z_2$ , симметричных относительно времени.

Те сдвиги башмака, которые происходят за время перехода нивелира со станции предыдущей на последующую, целиком входят в результат нивелирования и могут обуславливать в нем заметную систематическую ошибку. Если допустим на данном участке постепенное оседание башмаков, то, очевидно, разность уровней между двумя марками, обозначающими начало и конец участка, будет при прямом ходе получена большей, чем следует (в арифметическом смысле), если шли в гору, и меньшей, если шли под гору. В обратном ходе оседание башмаков вызовет уменьшение арифметической разности уровней при спуске с горы и увеличение ее при подъеме в гору. Таким образом, можно надеяться, что в среднем из ходов прямого и обратного, исполненных по тем же самым местам, разность уровней будет значительно освобождена от влияния движений башмаков систематического характера. В некоторых нивелировках систематические сдвиги башмаков обусловили довольно крупные расхождения между прямой и обратной нивелировками. Во Франции поэтому совершенно не пользуются башмаками, а рейки ставят на колья длиной 0,3 м и толщиной в 3 см, забиваемые почти на всю длину в землю; в вершину котла вбивается особый гвоздь с полусферической шляпкой, на верхнюю точку которого и устанавливается рейка. Вообще же в нивелировке высокой точности следует отказаться от башмаков и заменять их железными костылями, длиной около 0,3 м и толщиной около 5 см, причем в верхнюю плоскость костыля должен ввинчиваться целик, вывинчиваемый при забивке

костыля; поперечное отверстие, сделанное в костыле ниже его верха на 6—7 см, должно служить для вставки аншлага при вытаскивании костыля; таких костылей нивелирная партия должна иметь 5—6 штук.

В Америке редко пользуются башмаками, а в большинстве случаев ставят рейку на головку рельса: опыт показывает, что на старых железных дорогах рельс по высоте точно приходит в прежнее положение после прохождения поезда. Что касается сдвигов штатива во время нивелировки на станции, то очевидно большая их часть исключается



Черт. 319

в среднем выводе из четырех взглядов, исполненных симметрично, как уж указывалось ранее. Но для уменьшения опрокидывающего момента следует штатив нивелира располагать так, как указано на черт. 319, т. е. ставя всегда две его ножки параллельно линии нивелирования.

#### § 114. Внешние причины ошибок нивелирования; действие рефракции

Температурные влияния, конечно, относятся к внешним, но частью действие их вызывает ряд инструментальных ошибок, почему об этих влияниях и пришлось уже говорить в соответствующем параграфе. Однако, температурные влияния вызывают еще ряд ошибок уже другого характера, из которых мы остановимся на рефракции в нивелировке.

Характерным для геометрического нивелирования является то, что визирный луч проходит везде в непосредственной близости от почвы, изменения температуры которой передаются, конечно, в полнейшей мере тем воздушным слоям, которыми приходится пользоваться в нивелировке. Если самый верхний слой почвы по некоторому пологому скату имеет в данный момент температуру  $t$ , то можно считать, что воздушный слой, прилегающий к этому скату, имеет на всем своем протяжении температуру, близкую к  $t$ , и плотность, соответствующую этой температуре. Другими словами, является довольно обоснованным положение, что на пологих и длинных скатах, с которыми приходится иметь дело в нивелировке, в самых нижних слоях воздуха поверхности, разграничающие слои разной плотности, следуют в общем рельефу местности и отступают от поверхностей уровня. Это положение было выдвинуто Лаллеманом. Далее Лаллеман делает предположение, что температура  $t$  воздуха изменяется в прогрессии арифметической, когда высота  $h$  над почвой изменяется в прогрессии геометрической, т. е.

$$t = a + b \lg (h + c), \quad (498)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — постоянные, подлежащие определению опытным путем. Конечно, формула (498) слишком проста и в действительности законы изменения  $t$  вместе с  $h$  более сложны и разнообразны.

Кроме формулы Лаллемана укажем еще на формулу Лёффлера

$$t = a + bh + \frac{d}{2} \lg (h + c),$$

а также на формулу Беста

$$t = a + bh^c$$

и формулу Н. А. Павлова

$$t = a + bh + cd^h + f \lg(h + k).$$

Во всех этих формулах  $h$  — высота луча над почвой. При использовании формул Лаллемана, Лёффлера, Беста в основу обычно кладут предположение, что слои воздуха равной плотности имеют поверхности раздела, параллельные, примерно, поверхности почвы на данном участке. Другими словами, в пределах 100—120 м, отделяющих заднюю рейку от передней, градиент температуры воздуха по направлению, параллельному профилю местности, принимается равным нулю.

В большинстве случаев дело обстоит в действительности не так, и рефракция очень нередко обусловлена в равной мере как значениями температурного градиента по высоте, так и значениями температурного градиента по направлению, близкому к горизонтальному, по направлению, параллельному профилю местности. Это положение вполне подтвердилось в общирных исследованиях рефракции, проведенных в ЦНИИГАиК проф. Н. А. Павловым.

По Лаллеману, достаточно определить температуру воздуха на высоте визирного луча при инструменте и задней и передней рейке, чтобы затем вывести постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и затем по формуле

$$t = a + b \lg(h + c)$$

получать температуру в любой точке визирного луча. По Лёффлеру, приходится измерять температуру в тех же трех точках, что и по Лаллеману, чтобы получить возможность рассчитать по его формуле температуру в любой точке визирного луча.

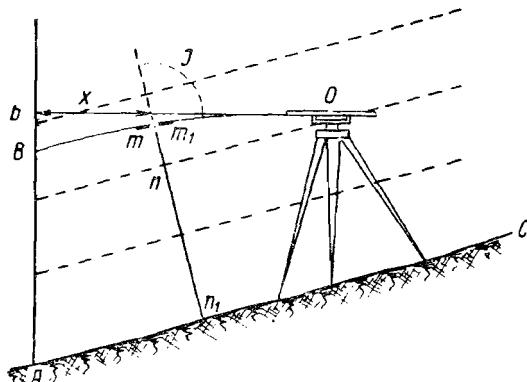
Когда распределение температуры при помощи той или другой формулы получено, то, конечно, действие рефракции на отсчет по рейке может быть вычислено. Правда, давление и влажность воздуха также играют некоторую роль в ходе визирного луча, но опыты показывают, что суммарное влияние этих причин не составит и 10% от того влияния, которое обуславливает в ходе визирного луча распределение вдоль его температуры воздуха.

Но, конечно, как уже указано, за успех дела при определении распределения температуры вдоль визирного луча при помощи формул Лаллемана, Лёффлера или Беста нельзя ручаться, если в этих формулах считать коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  относящимися ко всем точкам визирного луча, или, другими словами, считать, что на всем протяжении этого луча температурный градиент по высоте или  $\frac{dt}{dh}$  изменяется только с высотой  $h$  над почвой.

Возможно, что в одних случаях формула Лаллемана очень хорошо представляет распределение температуры воздуха на данной вертикали; возможно, что в других случаях для этого также хорошо будет служить формула Беста, но опять-таки для данной вертикали; однако, чтобы получить при помощи этих формул в соответствующих случаях истинное распределение температуры вдоль визирного луча, придется для каждой вертикали в формулах Лаллемана, Лёффлера и Беста коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  считать имеющими свои значения, изменяющиеся при переходе от одной вертикали к другой, отстоящей от первой, может быть, всего на 5 м или даже на меньшее горизонтальное расстояние.

Все вышесказанное относится, конечно, и к формуле Н. А. Павлова. Она более сложна, поэтому вообще может лучше представить распределение температуры по высоте. Но недочеты ее использования, конечно, оставались бы в общем теми же самыми, как и при использовании других формул, если бы коэффициенты  $a, b, c, d, f, k$  все считались бы постоянными на всем ходе визирного луча. Особенностью работы Н. А. Павлова является именно то, что он считает постоянными только коэффициенты  $d$  и  $k$ ; остальные коэффициенты его формулы для  $t$  рассматриваются постоянными только для данной вертикали и изменяющимися вместе с переменой положения этой вертикали, причем эти изменения  $a, b, c, f$  определяются при помощи вывода из наблюдений значения горизонтального температурного градиента (или градиента по направлению, параллельному профилю местности).

Пусть горизонтальный луч встречает рейку в  $b$  (черт. 320), а световой луч, следующий по рефракционной кривой  $OmB$  — в точке  $B$ .



Черт. 320

Отрезок  $Bb$  — поправка за рефракцию. Если расстояние элемента  $mm_1$  рефракционной кривой от рейки называть через  $x$ , а угол, который ее элемент  $mm_1$  образует с нормалью  $nn_1$  к скату  $AC$ , — через  $J$ , то

$$Bb = \varepsilon = \int_0^L x dJ,$$

где  $L$  — расстояние от нивелира до рейки.

Если через  $h$  назовем высоту элемента  $mm_1$  над почвой, через  $h_1$  — отрезок  $Ab$  и через  $p$  — уклон ската, то

$$x = \frac{h_1 - h}{p}.$$

Если  $n$  — коэффициент преломления воздуха для элемента  $mm_1$ , то:

$$n = 1 + 0,000294 \cdot \frac{B}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t},$$

где  $\alpha = 0,00366$  равно коэффициенту расширения воздуха,  $B$  — показание барометра.

Отсюда, так как  $n \sin J$  постоянно:

$$dn \sin J + n \cos J \cdot dJ = 0;$$

$$dJ = -\operatorname{tg} J \cdot \frac{dn}{n};$$

$$dn = -0,000294 \frac{B}{0,76} \cdot \frac{\alpha \cdot dt}{(1+\alpha t)^2};$$

$$Bb = \varepsilon_1 = \int_0^L \alpha \cdot \frac{(h_1 - h)}{p} \operatorname{tg} J \cdot \frac{0,000294 \frac{B}{0,76}}{(1+\alpha t)^2 \cdot n} dt.$$

При вычислении этого интеграла  $\operatorname{tg} J$ ,  $B$  и  $n$  можно считать постоянными, а  $n$  даже приравнять единице. Очевидно,  $\operatorname{tg} J = \frac{1}{p}$  (приближенно). Таким образом

$$\varepsilon_1 = -0,000294 \frac{B}{0,76} \cdot \frac{\alpha}{p^2} \int_0^L (h_1 - h) \frac{1}{(1+\alpha t)^2} \cdot \frac{dt}{dh} dh. \quad (499)$$

Здесь  $1+\alpha t$  можно заменить через  $1-\alpha\Theta$ , понимая под  $\Theta$  среднее из температур  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , взятых при рейках задней и передней на высоте визирного луча и при нивелире — на высоте его трубы:

$$\Theta = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}.$$

В формуле (499)  $\frac{dt}{dh}$  — температурный градиент, который считается по Лаллеману и Лёффлеру изменяющимся лишь с высотой  $h$  элемента приземного слоя над почвой, в то время как в работах Н. А. Павлова он считается изменяющимся и с горизонтальным положением этого элемента.

Для иллюстрации получения  $\varepsilon_1$  воспользуемся формулой Лаллемана для  $t$ , тогда получим:

$$dt = M \frac{bdh}{h+c}$$

( $M$  — модуль неперовых логарифмов);

$$\varepsilon_1 = -\frac{0,00000108}{(1+\alpha\Theta)^2 p^2} \cdot \frac{B}{0,76} Mb \int_{h_1}^H \frac{(h_1 - h)}{h+c} dh,$$

понимая под  $H$  высоту нивелира над почвой.

Отсюда окончательно получаем:

$$\varepsilon_1 = -\frac{0,00000108}{(1+\alpha\Theta)^2 p^2} \cdot \frac{B}{0,76} Mb \left\{ (h_1 - H) + (h_1 + c) \ln \frac{H+c}{h_1+c} \right\}, \quad (500)$$

причем здесь логарифм — неперов.

Если отсчет по передней рейке называть через  $h_3$ , то для нее:

$$\varepsilon_3 = -\frac{0,00000108}{(1 + \alpha\Theta)^2 \cdot p^2} \cdot \frac{B}{0,76} Mb \left\{ (h_3 - H) + (h_3 + c) \ln \frac{H+c}{h_3+c} \right\}. \quad (501)$$

Следовательно, влияние  $\delta u$  рефракции по Лаллеману на разность уровней выразится так:

$$\begin{aligned} \delta u = & -\frac{0,00000108}{(1 + \alpha\Theta)^2 \cdot p^2} \cdot \frac{B}{0,76} Mb \left\{ u - (h_3 + c) \ln \frac{H+c}{h_3+c} + \right. \\ & \left. + (h_1 + c) \ln \frac{H+c}{h_1+c} \right\}. \end{aligned} \quad (502)$$

Здесь  $h_1$ ,  $h_3$  и  $H$  выражены в метрах.

Понятно, что при получении формул для  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\delta u$  нужно считать в формуле (499) величину  $\frac{dt}{dh}$  изменяющейся не только с высотой  $h$ , но и с горизонтальным положением элемента  $tm_1$ . Поменяется температура воздуха вдоль прямой линии, параллельной профилю местности (конечно, выровненному и замененному некоторой наклонной прямой), происходят крайне разнообразно, и если формулы Лаллемана или Беста дают возможность при соответствующем подборе коэффициентов в них представить для тех или других случаев с большей или меньшей надежностью общую картину изменения температуры воздуха с изменением высоты точки на данной вертикали, то вряд ли можно говорить о создании формул для изменения температуры вдоль прямой, параллельной выровненному профилю местности. В этом и заключается трудность аналитического выражения влияния рефракции на отсчет по рейке, вытекающая из разнообразия факторов, обусловливающих распределение температуры вдоль данного профиля. Величина уклона местности и даже малые ее неровности, время дня, время года, степень облачности, ветер, растительный покров, особенности грунта, различие в устройстве дорог, по которым ведется нивелировка, степень затененности участка и т. д. — все это может существенно влиять на распределение температур воздуха.

Отсюда, конечно, вытекает, что по существу нужно разбивать расстояние между нивелиром и рейкой на части, например, длиной в 10 м, и на вертикалях, разграничитывающих такие части, получать из измерений в натуре температуры для вывода коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  и температурных градиентов  $\frac{dt}{dh}$ ; для вычисления же  $\varepsilon_1$  или  $\varepsilon_3$  придется интеграл в формуле (499) заменить суммой интегралов, распространяющихся каждый лишь на одну из тех частей, на которые разбито расстояние между нивелиром и рейкой. Соответственно этому и формулы (500) и (501) для  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$  будут образовываться из сумм слагаемых, относящихся каждое только к соответственной части визирного луча и имеющих точно такое же выражение, как и  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ , но с заменой в формулах (500) и (501) коэффициентов  $b$  и  $c$  запечатлениями их, средними для каждой части визирного луча и с заменой  $h_1$  и  $H$  (или  $h_3$  и  $H$ ) высотами над почвой конечных точек этих частей.

Важно иметь в виду, что для учета влияния рефракции совершенно недостаточно определить температуры воздуха на высоте визирного луча только в трех точках — при рейках и при нивелире, как это рекомендовано было Лаллеманом. Нужно получить температурные градиенты

по высоте в ряде точек визирного луча и температуры на ряде вертикалей в плоскости этого луча, в нескольких точках на каждой вертикали. Конечно, описанный путь учета рефракции достаточно тяжел в своем практическом применении и нельзя рассчитывать на его производственное значение.

Работы Н. А. Павлова показывают, что если взять определения температур при трех точках на вертикалях каждой рейки и при пяти точках на вертикали инструмента (причем последние располагаются на одинаковой высоте над почвой с соответствующими им точками при рейках) и затем сделать предположение линейного изменения температуры по направлению, параллельному профилю местности, то, несмотря на примитивность такого предположения, получаемые поправки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  достаточно хорошо подходят к их истинным значениям для тех вечерних и утренних часов, в которые исполняют точное нивелирование и когда обычно восходящие или нисходящие токи в воздухе близ почвы исчезают и на всем участке нивелировки длиной около 100 м устанавливается некоторая закономерность в распределении температуры.

Влияние рефракции в точном нивелировании выражается, конечно, тем, что искривление луча, идущего от нивелира на заднюю рейку, не равно искривлению луча, идущего от нивелира на переднюю рейку. Влияние на разность уровней выражается при расстоянии между рейками в 100 м в благоприятное время для наблюдений вообще несколькими десятыми миллиметра, но имеет определенно систематический характер. При увеличении против 100 м расстояния между рейками влияние рефракции на разность уровней будет возрастать; в близоподобное время искажение рефракций разности уровней может достигать 1 мм при расстоянии между рейками в 120 м, 3 мм — при расстоянии между рейками в 160 м, и 5 мм — при расстоянии в 200 м.

Приходится определено заключить, что искажения рефракцией разностей уровней следует считать крупными величинами в высокоточном нивелировании, действующими притом на результаты нивелировки систематически.

Опыты ЦНИИГАиК показывают, что на железнодорожном пути с предельными уклонами действие рефракции может приводить к искажениям суммарной разности уровней в 12—15 мм на 20 км. Отсюда вытекает, что отношение к вопросу о влиянии рефракции должно быть в высокоточном нивелировании существенно иное, чем это имеет место до сих пор везде.

Исследования рефракции должны дать ответ на вопросы о выгоднейшем в течение дня времени для нивелирования, о предельном расстоянии между рейками, о наименьшей высоте визирного луча над почвой, а также о методах и программе сортирования во время полевой работы метеорологического материала, на основании которого можно было бы твердо судить, какой порядок имело влияние рефракции на нивелировку на данном участке в несколько километров, а, следовательно, и твердо заключить о приемлемости полученных из этой нивелировки результатов.

Вряд ли можно говорить о формуле для вычисления поправки в разность уровней за рефракцию, отвечающей всем случаям; более того, вряд ли можно говорить о применении формул, отвечающих каждой тому или другому типу распределения температур воздуха потому, что в действительности мы всегда будем иметь значительные нарушения этого типа. Но возможность оценить порядок искажения разно-

сти уровней при том типе распределения температур воздуха, который подходит к условиям нивелировки на рассматриваемом участке, конечно, не может быть отрицаема, и такая оценка должна быть выполнима в высокоточном, а может быть в точном нивелировании, непременно, причем, конечно, тогда в программу нивелирных полевых работ должно быть введено и соприятие соответственным образом и соответствующего по качеству метеорологического материала. Из выполненных до сих пор исследований влияния рефракции в нивелировке можно определенно сделать такие выводы:

1) выгоднейшим временем для нивелирования являются утренние и вечерние часы от 5 до  $8\frac{1}{2}$  часов утра и от  $3\frac{1}{2}$  — 4 до 7 —  $7\frac{1}{2}$  часов вечера; другими словами, выгоднейшим временем является время вблизи моментов изменения знака и перехода через нуль градиента температуры по высоте;

2) при увеличении уклона местности действие рефракции возрастает; при увеличении расстояния между рейками свыше 120 м действие рефракции при одном и том же уклоне заметно возрастает; при расстоянии до 120 м и в благоприятное время для нивелирования, это влияние не превышает 0,5 мм в разности уровней, а при расстоянии (между рейками) около 160 м это влияние, также в благоприятное для работы время, достигает нередко уже 1,5 мм;

3) влияние рефракции имеет определенно систематический характер и является причиной наиболее крупных искажений результатов нивелирования;

4) выводы из прямого и обратного ходов между двумя постоянными марками (около 6 км) искажаются оба действием рефракции обычно почти одинаково (и по величине и по знаку);

5) цепочки нивелирных полигонов почти не включают в себя действие рефракции;

6) существенное значение имеет высота визирного луча над почвой; увеличение высоты штатива даже на 0,6—0,7 м против обычной приводит к заметному уменьшению действия рефракции (работы ЦНИИГАиК).

Таким образом, в высокоточном нивелировании следует:

1) всегда иметь отсчет по рейке не менее 0,7 м;

2) ввести в употребление высокие массивные штативы, обеспечивающие высоту инструмента около 1,9 м, с соответствующими к ним подставками для наблюдателя (применение таких штативов уже испытано в ЦНИИГАиК, причем скорость работы с ними та же самая, что и с обычными штативами);

3) расстояние от нивелира до рейки не следует брать более 60 м;

4) нивелировку вести от 5 до  $8\frac{1}{2}$  часов утра и от 4 до 8 часов вечера в летнее время, в осенне время от  $5\frac{1}{2}$  до  $9\frac{1}{2}$  часов утра и от 3 до 7 часов вечера; если прямой ход пришелся на солнечные дни, то распределить работу так, чтобы обратный ход пришелся на несолнечные, с сильной облачностью, дни; вообще же, лучше работу вести при облачном небе;

5) непременно выполнять метеорологические наблюдения и по крайней мере делать измерения температуры воздуха на вертикалях задней рейки, передней рейки и нивелира — в нескольких точках на каждой вертикали; выбор этих точек устанавливается на основании дальнейших исследований рефракции и соответственно применению штативов той или другой высоты.

Современную постановку работ в высокоточном нивелировании надлежит существенно изменить, чтобы получать результаты действительно высокоточные.

### § 115. Нивелирование по русско-швейцарскому (советскому) способу; поверки и исследования нивелира и реек

Как уже было сказано выше, в СССР употребляют нивелиры с диаметром объектива около 40 мм, с фокусным расстоянием трубы около 40 см, при увеличении 36—40 раз, с уровнем, связанным неизменно с трубой и имеющим цену деления около 5".

Нивелирная партия имеет:

- 1) нивелир со штативом и чехлом для защиты нивелира,
- 2) две рейки с уровнями и отвесами, уложенные в ящики,
- 3) одну подвесную рейку для привязки к маркам,
- 4) башмаки или костыли к рейкам числом два или три,
- 5) термометр-праш,
- 6) проволочный канатик для отбивки расстояний,
- 7) стальную рулетку,
- 8) зонты,
- 9) запас нивелирных марок, топоры, лопаты, зубила и т. п.,
- 10) запас цемента — из расчета 2 кг на марку.

Перед полевой кампанией нивелировщик:

- а) определяет на испытателе уровней цену деления уровня нивелира и исследует правильность движения пузырька;
- б) определяет увеличение трубы и убеждается в правильности даваемых ею изображений (путем рассматривания правильных геометрических фигур);
- в) определяет коэффициент дальномера трубы и несимметрию ее нитей;
- г) исследует правильность работы элевационного винта;
- д) производит все поверки нивелира и затем, нивелированием с двух концов линии в 60 м длиной, определяет угол между визирной осью трубы и осью уровня.
- е) исследует правильность хода окулярного колена трубы;
- ж) исполняет полное исследование реек, т. е. определение общей длины каждой стороны, поправок дециметровых штрихов и расстояний между контрольными марками;
- з) определяет неравенство пулей реек.

Несимметрия трех горизонтальных нитей трубы, очевидно, имеет своим следствием то, что средний отсчет по рееке из отсчетов по трем нитям относится не к средней нити трубы, а к некоторой фиктивной нити, но так как при определении угла  $i$  между визирной осью трубы и осью уровня пользуются отсчетами всех трех нитей, то, следовательно, вся нивелировка, и угол  $i$ , и поправки за него — все относится к этой фиктивной нити; другими словами, несимметрия нитей на вывод высот из нивелирования не имеет никакого влияния. С ней нужно считаться только при контроле отсчетов по нитям трубы. Поставив рейку в расстоянии 60 м от нивелира, делают ряд отсчетов по верхней (а), по средней (б) и по нижней (с) нитям трубы, давая трубе при этом разные

положения при помощи элевационного винта (или посредством подъемного винта, стоящего в плоскости трубы). Пусть получили ряд отсчетов

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

Тогда выводим

$$\Delta_1 = \frac{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n)}{n};$$

$$\Delta_2 = \frac{(c_1 - b_1) + (c_2 - b_2) + \dots + (c_n - b_n)}{n}.$$

Следовательно, среднее из отсчетов по крайним нитям должно отличаться от отсчета по средней нити на

$$x = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}.$$

Определив  $x$ , записывают его значение в журнале нивелирования, и затем в поле контроль отсчетов по нитям делают так:

$$\frac{a + c}{2} = b + x \pm 1 \text{ мм.}$$

Здесь  $\pm 1 \text{ мм}$  — допускаемое расхождение в контроле отсчетов по нитям. Из отсчетов  $a_1, b_1, c_1, \dots, a_k, b_k, c_k, \dots, a_n, b_n, c_n$  послуживших к определению несимметрии, выводят далее и коэффициент дальномера.

Неравенство нулей реек в наших работах устраивается намеренно: именно, в одной из парных реек нуль красной стороны стоит выше на 1 дм нуля черной стороны. Это делается для того, чтобы впоследствии обнаружить ошибку в записи, которую нивелировщик сделал, записав на некоторой станции отсчет по задней рейке в графу журнала для передней рейки и отсчет по передней рейке в графу журнала для задней рейки. Неравенство нулей следует определить для обеих реек.

Поставив рейку на прочию установленный башмак и расположившись с нивелиром в расстоянии от нее 15—20 м, устанавливают пузырек уровня на середину и карандашом отмечают на черной стороне рейки точку  $M$ , приходящуюся на средней горизонтальной нити трубы; затем рейка оборачивается к трубе красной стороной и отмечается на этой стороне точка  $N$ , покрываемая средней нитью трубы. Измерив женевской линейкой или миллиметровой линейкой расстояния точек  $M$  и  $N$  от близких к ним штрихов рейки, мы, очевидно, получим отсчеты  $m$  и  $n$  по черной и красной стороне, соответствующие одному и тому же положению оптической оси трубы, которое она занимала во время опыта.

Сделав перевод  $n$  из  $\frac{11}{10}$  сантиметра в метры, и называя этот переведенный отсчет через  $n'$ , получим неравенство нулей реек так

$$y = m - n'.$$

Пусть рейки имеют номера  $A$  и  $B$ ; для рейки  $A$  неравенство нулей  $y_A = m_A - n'_A$ , а для рейки  $B$  неравенство нулей  $y_B = m_B - n'_B$ . Если на некоторой станции рейка  $A$  была задней, а  $B$  — передней и по ним сделаны отсчеты: по черной стороне —  $Z'_A$  и  $P'_B$ , а по красной стороне

$Z^k_A$  и  $\Pi^k_B$ , то очевидно, по переводе разности  $(Z^k_A - \Pi^k_B)$  в метры, должны иметь контроль

$$Z^u_A - \Pi^u_B = (Z^k_A - \Pi^k_B) + y_A - y_B.$$

Очевидно, на следующей станции поправка в разности уровней за неравенство нулей будет равна:

$$y_B - y_A.$$

Величиной неравенства нулей приходится пользоваться на каждой станции для контроля отсчетов по рейкам. В описанном опыте следует определить  $y_A$  и  $y_B$  многократно, при разных постановках башмака. На разность уровней стенных марок, очевидно, неравенство нулей реек не влияет; на разность уровней реперов оно не влияет, если в начале и в конце хода на репер ставилась одна и та же рейка; неравенство нулей должно быть введено в разность уровней, если на конечном репере ставилась иная рейка, чем на начальном.

Конечно, прежде чем приступить к полевой работе, нужно нивелир исследовать и проверить. По определению увеличения трубы следует испытать ее качество — всего проще рассматриванием геометрических фигур и сравнением с трубами других точных нивелиров: одновременное рассматривание одной и той же рейки разными нивелирами отлично выясняет недостатки изображений, даваемых их трубами.

Следует требовать, чтобы нити трубы были бы ровные, прямые и такой толщины, чтобы на расстоянии в 50 м нить на рейке закрывала бы около полумиллиметра; сетка нитей должна быть перпендикулярна к оси трубы, т. е. после тщательной установки средней нити по фокусу никакого параллакса по крайним нитям не должно быть.

Окулярное колено должно иметь достаточно правильный ход. Отсутствие шатаний и колебаний в ходе окулярного колена проверяется так: от места постановки нивелира отмеряют расстояния в 15, 30, 45, 60 и 75 м и в отмеченных точках забивают прочные колья, в верхнюю часть которых вкручивают гвозди со сферическими шляпками. При некотором положении трубы — или горизонтальном или слегка наклонном — делают отсчеты по рейке, устанавливаемой поочередно на всех кольях. Затем, изменив наклон трубы, при новом ее положении повторяют эти отсчитывания рейки. Очевидно, при отсутствии колебаний и шатаний в ходе окулярного колена, изменения отсчетов будут пропорциональны (до  $\pm 1$  мм) соответственным расстояниям до реек. Но этот опыт не обнаруживает той неправильности в ходе окулярного колена, которая оказывается перемещением центра сетки нитей или по постоянной кривой, или по постоянной прямой, по делающей угол с главной оптической осью объектива.

Чтобы выяснить эту погрешность хода окулярного колена, поступают так. На ровном месте намечают точки 0, 1, 2, ..., 8 (черт. 321), расположенные по окружности радиуса в 50 м с центром в  $A$  и отстоящие от точки 0 на 10, 20, 30... м. Место для точек выбирают так, чтобы при работе вечером рейку на всех точках была бы одинаково и хорошо освещена при наблюдениях ее из  $A$  и из  $B$ . В этих точках 0, 1, ..., 8 забивают прочные колья с гвоздями, имеющими правильные сферические шляпки.

Нивелир перед исследованием выверяют самым тщательным образом. Установив нивелир в  $A$ , рейку ставят поочередно на точках 0, 1, ..., 8, и, держа все время пузырек уровня строго на середине,

делают отсчеты по рейке. Такую нивелировку колес исполняют тремя приемами, составляя каждый прием из двух полуприемов, исполненных при движении рейки в прямом и обратном направлениях и изменяя при переходе от приема к приему высоту инструмента. Очевидно, теперь будут получены точные разности высот точек 0, 1, 2, ..., 8.

Далее ставят нивелир над точкой  $B$ , находящейся на той же окружности, в расстоянии 10 метров от  $O$ , и делают три приема нивелирования колес 0, 1, 2, ..., 8, составляя каждый прием из двух полуприемов при прямом и обратном движении рейки по колесам, и изменяя при переходе от приема к приему высоту нивелира.

Теперь из шести отсчетов, полученных для каждой точки 0, 1, 2, ..., 8, выводят средние:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8, a_9$ . Обозначая разности уровней точек 0—1, 0—2, 0—3... через  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_8$ , и, принимая альтитуду точки  $O$  равной 10 000 мм, напишем

$$\begin{aligned} h &= 10\,000 + a_1 = h_1, \\ h &= 10\,000 + u_1 + a_2 = h_2, \\ h &= 10\,000 + u_2 + a_3 = h_3, \\ &\dots \\ h &= 10\,000 + u_8 + a_9 = h_9, \end{aligned}$$

Черт. 321

где  $h$  — средний горизонт инструмента. Взяв среднее из всех  $h$  и уклонения  $\delta$  от него отдельных  $h_1, h_2, \dots, h_9$ , напишем

$$\begin{aligned} \delta_1 &= bd_1 + c, \\ \delta_2 &= bd_2 + c, \\ &\dots \\ \delta_9 &= bd_9 + c, \end{aligned}$$

ионимая под  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_9$  — расстояния от  $B$  до 0, 1, 2, ..., 8. Член  $bd$  выражает собой, очевидно, влияние оставшейся в нивелире неполной параллельности оси трубы и оси уровня. Определив по способу наименьших квадратов  $b$  и  $c$ , затем получаем систему вероятных уклонений:  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , которые уже и выражают неправильности хода сеточного колена. Обычно в нивелирах, выпущенных опытными механиками и немного еще бывшими в употреблении, величины  $\Delta$  не превосходят  $\pm 0,2$  мм.

Проверки нивелира должны быть выполнены в таком порядке:

1. Ось круглого уровня устанавливается параллельно оси вращения нивелира.

2. Ось уровня устанавливается перпендикулярно оси вращения нивелира — это достигается поворачиванием верхней части нивелира около вертикальной оси на  $180^\circ$  и надлежащей вслед за этим установкой элевационного винта.

3. Ось уровня должна находиться в плоскости, параллельной оси трубы. Для этого действуют боковыми (горизонтальными) винтами оправы уровня так, чтобы при отводе трубы — вращением ее около геометрической оси — вправо и влево от нормального положения ее

в лагерях, пузырек уровня или оставался бы на месте, или же уходил немножко, но всегда в одну сторону.

4. Устанавливают параллельность оси уровня и цапфеной линии трубы — для чего трубу вместе с уровнем перекладывают в лагерях и половину уклонения пузырька уровня от середины, прошедшего при перекладке, устраниют исправительными винтами уровня.

5. Вновь устанавливают элевационным винтом перпендикулярность оси уровня к вертикальной оси вращения нивелира и записывают отсчет по барабану элевационного винта, который мы назовем нормальным.

6. Проверяют совпадение визирной и геометрической оси трубы, для чего устанавливают в расстоянии 50 м от нивелира рейку и, заметив место рейки, покрываемое пересечением нитей трубы, врашают трубу в лагерях на  $180^\circ$  и наблюдают, сходит ли при этом пересечение нитей с замеченного места рейки. Действуя винтами, держащими сетку нитей, добиваются того, чтобы при вращении трубы около геометрической оси на  $180^\circ$  пересечение нитей совпадало бы всегда с одной и той же точкой рейки.

Необходимо иметь в виду, что наблюдаемые при вращении трубы в лагерях около ее геометрической оси смещения изображения относительно нитей трубы обусловлены тремя причинами:

а) эксцентризитетом объектива, б) неправильностями лагерей и цапф трубы, в) неправильным положением самой сетки.

Вторая причина должна быть исследована при помощи специального уровня, ставящегося пожками на цапфы трубы сверху с ценой деления в  $3''$ . Таким уровнем по известным правилам можно, во-первых, определить неравенство цапф, во-вторых, вращая осторожно трубу в лагерях и оставляя добавочный уровень на цапфах, по смещениям его пузырька выяснить правильность вращения трубы в лагерях.

Что касается эксцентризитета объектива, то при заметных размерах его обнаруживают следующим образом: выдвинув или вдвинув окулярную трубочку так, чтобы нити перестали быть видимыми, фиксируют трубу по рейке в расстоянии 30 м от нивелира и, вращая трубу в лагерях, наблюдают смещения изображений; это испытание следует делать до исполнения всех поверок нивелира. Эксцентризитет объектива обычно очень мал — менее 0,02 мм и такой эксцентризитет только что описанным путем не обнаружить. При существовании эксцентризитета объектива, но при отсутствии неправильностей в устройстве лагерей и цапф, поверка б-я приведет к установлению параллельности визирной и геометрической оси (но не совпадению их).

7. По приведении нивелира в горизонтальное положение, три нити трубы должны быть горизонтальными, а перпендикулярная к ним — вертикальна. Это достигается надлежащей установкой винтов, упирающихся в прилив трубы.

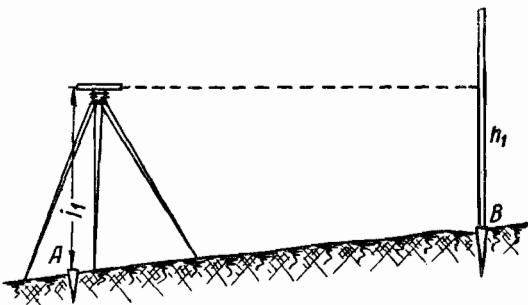
8. Визирная ось трубы, должна быть параллельна оси уровня. Невыполнение этого требования может быть обусловлено неполным выполнением требований пп. 4 и 5, а также неравенством цапф трубы. Проверка этого требования (п. 8) сводится, собственно, к определению угла  $i$ , оставшегося между осью трубы и осью уровня. Перед началом полевого периода эту поверку следует выполнить особенно тщательно.

Следует, забив на местности прочно солидные колья  $A$  и  $B$  (с гвоздями, имеющими полусферические шляпки) в расстоянии 60 м друг от

друга, прежде всего нивелированием из середины тщательно и много-кратно определить разность уровней  $u_0$  точек  $A$  и  $B$ , делая четное число приемов и слагая прием из двух полуприемов:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ полуприем } \left\{ \begin{array}{llll} 1\text{-й} & \text{взгляд на рейку № 1 на точке } A \\ 2\text{-й} & " & " & \text{№ 2 } " & " & B \end{array} \right. \\ 2 \quad " \quad \left\{ \begin{array}{llll} 3\text{-й} & " & " & \text{№ 2 } " & " & B \\ 4\text{-й} & " & " & \text{№ 1 } " & " & A \end{array} \right. \end{array}$$

Теперь, поставив нивелир в  $A$  так, чтобы его окуляр при трубе, направленной на  $B$ , приходился бы примерно на половину толщины рейки ближе к  $B$ , чем центр гвоздика в коле  $A$  (см. черт. 322), устанавливают тщательно нивелир и делают по нитям трубы, приводя каждый



Черт. 322

раз уровень строго на середину, ряд отсчетов по рейке, стоящей в точке  $B$ . После этого рейку переносят в  $A$ , устанавливают ее на гвоздике кола  $L$  и стирают на ней карандашом обвод крышечки, надеваемой на наружный конец окуляра (если только установка штатива нивелира в  $L$  была сделана с соответственным расчетом, то указанная крышечка должна почти касаться рейки). Называя отсчет по центру этого кружка через  $i_1$ , а отсчет по нитям трубы через  $h_1$ , имеем:

$$u = i_1 - h_1 - d \operatorname{tg} i = i_1 - h_1 - x.$$

Перенеся теперь нивелир в  $B$  и оставляя рейку в  $A$ , устанавливаем его штатив так, чтобы можно было измерить удобно и точно высоту  $i_2$  центра окуляра над точкой  $B$ . Затем берут ряд отсчетов по рейке, стоящей в  $A$ , и перенеся ее в  $B$ , измеряют  $i_2$ . Из этой второй нивелировки имеем

$$u = h_2 - i_2 + d \operatorname{tg} i = h_2 - i_2 + x.$$

Сделав несколько таких приемов, выводим из них  $d \operatorname{tg} i$  или  $x$  таким образом

$$x = d \operatorname{tg} i = \frac{\Sigma [(i_1 + i_2) - (h_1 + h_2)]}{2n},$$

где  $n$  — число приемов, а  $i_1$  и  $h_1$  всегда относятся к точке  $A$ . Кроме того,

$$d \operatorname{tg} i = \frac{\Sigma (i_1 - h_1)}{n} - u_0;$$

$$d \operatorname{tg} i = - \frac{\Sigma (h_2 - i_2)}{n} + u_0.$$

Определив таким образом надежно  $d \lg i$ , в случае его значения, меньшего 2 мм, пользуются затем этим его значением при введении поправки в нивелировку за неравенство расстояний нивелира от передней и задней реек, если же  $d \lg i$  более 2 мм, то или переставляют сетку нитей так, чтобы отсчет  $h_1$  обратился в  $h_1 + d \lg i$ , или же, действуя исправительными винтами узора, смещают его пузырек в сторону окуляра при  $i$  положительном и в сторону объектива при  $i$  отрицательном — на величину, рассчитываемую так

$$\frac{x \cdot \rho''}{d \cdot \tau''}.$$

Так как труба при нивелировке по русско-швейцарскому и германскому способам всегда вкладывается в лагеры однообразно, то получившаяся после такой перестановки уровня непараллельность его оси с цапфенной линией трубы не имеет никакого значения в работе. Но, конечно, эта перестановка уровня заставит еще раз установить нормальный отсчет по элевационному винту, при котором будет иметь место перпендикулярность оси уровня к оси вращения нивелира.

Обычно к точным нивелирам прилагают добавочную линзу, которая, будучи надета на объектив, позволяет отчетливо видеть при фокусировке трубы на 50 м рейку в расстоянии 3—4 м. Очевидно, такой добавочной линзой можно с выгодой воспользоваться при только что описанной поверке, ставя сперва нивелир в 3—4 м от  $A$ , и отсчитывая рейку при постановке ее в  $A$  и  $B$ , а затем, ставя нивелир в 3—4 м от  $B$  и снова отсчитывая рейку в  $B$  и  $A$ .

При всех описанных поверках следует действовать исправительными винтами с полным уменьшем, зная заранее устройство винтов и их оконечностей, и помня, что винт с соответствующей маткой имеет всегда схватывание только в нескольких точках; если поверка будет выполнена, то винты примут при этом такое положение в матках, что схватывание обеспечивается одной точкой, то такая поверка расстроится через несколько минут. У поверяющего инструмент должно быть настолько натренировано осязание, что при работе исправительными винтами он должен правильно оценивать схватывание винта с маткой. Недаром французы говорят, что поверки геодезических инструментов может делать только артист этого дела.

В рейках должно поверить круглые уровни и перпендикулярность плоскости пятки к продольной оси рейки.

Поверку перпендикулярности оси уровня к оси вращения нивелира и поверку уровней при рейках надлежит делать ежедневно.

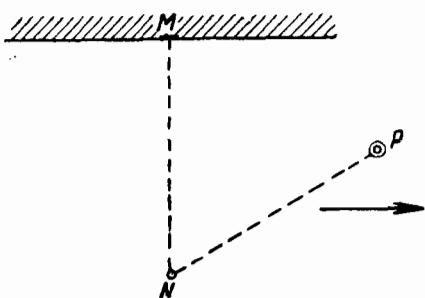
Само собой разумеется, что до выполнения всех поверок следует установить правильность и легкость вращения верхней части нивелира около вертикальной оси инструмента. Чистку вертикальной оси; втулки, в которую она вкладывается; обоймы наводящего винта; горизонтальной оси — следует делать во время полевых работ раз в месяц.

### § 116. Главные черты советских инструкций по нивелировкам; порядок наблюдений

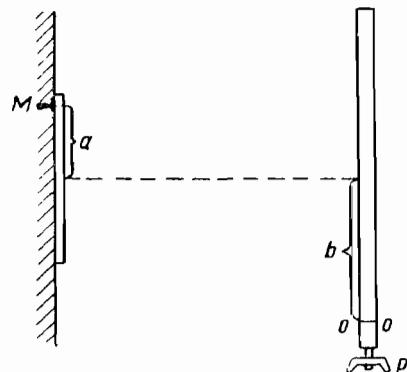
Марки точного нивелирования располагают через 6 км; на пунктах скрещения железных дорог закладывают по две марки — на разных сторонах станционного здания или на разных зданиях. Нивелировка ведется по участкам длиной 20—30 км — сперва прямым ходом и затем обратным.

Промежуточные или временные знаки точного нивелирования берут примерно через 2 км друг от друга и от марок, ограничивающих секцию. Рекомендуется коптить дневную работу на временных или постоянных знаках. Впрочем, нередко вблизи тех мест, где приходится конец дневной работы или ее полуденный перерыв, не имеется подходящих сооружений, на которых можно было бы устроить временный знак. Тогда временные знаки все равно избираются так, чтобы ими секция разбилась на три части, с захватом их при нивелировке и в прямом и в обратном направлениях (ходе).

По исполнении прямого и обратного ходов между двумя марками, секция сейчас же подсчитывается без введения, правда, поправок за рейки и за неравенство расстояний; разногласие прямого и обратного ходов не должно превышать  $\pm 4\sqrt{L}$  м в высокоточном и  $\pm 6\sqrt{L}$  мм в точном нивелировании, причем  $L$  — длина хода в километрах. В начале прямого хода нивелир ставится в точке  $N$  (черт. 323), лежащей на перпендикуляре к плоскости марки  $M$  и в расстоянии от нее 15—25 м; первый башмак ставится в  $P$  — причем  $MN = NP$ . В центр марки устанавливается штифт, на который подвешивается двусторонняя рейка длиной несколько более 1 м — нуль ее делений находится точно в центре отверстия, через которое проходит штифт для подвешивания;



Черт. 323



Черт. 324

деления на рейке идут сверху вниз. Очевидно, разность уровней марки и нуля  $oo$  рейки, стоящей на первом башмаке  $P$ , будет равна сумме отсчетов  $a$  и  $b$  по подвесной реечке и по рейке на башмаке, взятой со знаком минус  $-(a + b)$ , (черт. 324). Самое нивелирование этого первого промежутка между маркой  $M$  и башмаком  $P$  делается с соблюдением того же порядка, какой применяется на всех станциях. При привязке к марке, кончающей секцию, поступают так: место для последнего башмака должно позволить на предпоследней станции стать с нивелиром в расстояниях 50 м от предпоследнего и последнего башмака, и, кроме того, последний башмак должен прийтись вблизи марки так, чтобы можно было на последней станции нивелир поставить примерно на перпендикуляре к плоскости марки и в равных расстояниях от марки и от последнего башмака; последняя разность уровней будет получаться, как  $a + b$ . При переходе к обратному ходу происходит перемена реек, т. е. если на последнем башмаке стояла нечетная рейка, то теперь ставится четная.

На последнем штативе перед дневным перерывом оба башмака забивают на дно ям, около 0,3—0,4 м глубиной. Кроме наблюдений реек на этих башмаках, с последнего штатива по общим правилам нивелирования наблюдают еще короткую рейку, подвешенную на штифте, забитом в телеграфный столб или в стену здания. (Следовательно, последний или предпоследний башмак должен прийтись вблизи телеграфного столба или здания.) Если телеграфного столба или здания не имеется, то тогда вблизи переднего башмака забивают кол длиной в 40 см и толщиной около 8 см, причем рейка должна будет ставиться на сферическую головку гвоздя, вбитого в такой кол. Таким образом, всегда на последнем перед перерывом штативе наблюдают три точки: лев башмака и подвесную рейку, или два башмака и головку кола. После нивелирования этих трех точек (которые связываются попарно независимыми нивелировками, с получением, следовательно, невязки в треугольнике, ими образуемом) отмечают места ножек штатива, башмаки осторожно прикрывают землей и оставляют при них сторожа. После перерыва башмаки осторожно откапывают, штатив и рейки устанавливают на прежних местах и повторяют нивелирование станции, независимо по каждой из сторон треугольника, образованного теми же тремя точками. Сравнение изменений в отсчетах задней и передней реек с изменением отсчета по подвесной рейке (или по рейке, поставленной на кол) дает надежный материал для суждения о том, не свинулся ли который-нибудь из башмаков. В случае сдвига заднего башмака, оставляют результат нивелирования до перерыва и идут далее от переднего башмака. В случае сдвига переднего башмака, результат нивелирования до перерыва на последней станции зачеркивается, и нивелировка ведется вновь от заднего башмака. В редком случае сдвига обоих башмаков оставляют результат нивелирования до перерыва между задним башмаком и подвесной рейкой (или колом) и двигаются вперед от подвесной рейки или кола, как от временного знака. Понятно, что все только что приведенные соображения и расчеты основаны на полной безошибочности работы на последней станции до перерыва и после перерыва; поэтому здесь надлежит особенно внимательно контролировать работу.

При перерыве работы на ночь, передняя рейка ставится на точку, тщательно отмеченную на надежном каменном или металлическом сооружении и служащую времененным знаком, а задняя — на кол длиной около 30 см и толщиной около 8 см, прочно забитый и имеющий вверху гвоздик со сферической шляпкой (следовательно, на предпоследнем штативе передняя рейка устанавливается не на башмаке, а на этом коле). Кроме того, на последнем штативе наблюдается еще короткая рейка, подвешенная на стене, или на телеграфном столбе, а если такого столба или стены в надлежащем расстоянии не имеется, то наблюдается передняя рейка, переставленная или на голову рельса против временного знака, или на второй кол, забитый вблизи временного знака.

При отсутствии временного знака в виде точки на каменном или металлическом сооружении, таковой заменяется колом указанных размеров, с соблюдением всего остального. На следующий день нивелирование трех точек, взятых с последнего штатива, повторяется.

Работа ведется в солнечные летние дни от 5½ часов утра, с наступлением спокойных, отчетливых изображений, до 8½ часов; и с 4 часов пополудни почти до захода солнца. В пасмурные дни и осенью работу можно кончать перед полуднем в 10 часов, а начинать затем с 3½ часов пополудни и даже ранее.

Расстояния отбивают проволочным канатиком, допуская наибольшее неравенство расстояний нивелира от реек в 0,5 м. Рекомендуется во время работы образовывать  $\Sigma(d_3 - d_n)$ , т. е. сумму неравенств расстояний до реек; если оказывается накопление этих неравенств в одну сторону, то на следующих станциях намеренно переднюю рейку ставят так, чтобы знак  $d_3 - d_n$  делался бы обратным. В нивелировании высокоточном надлежит брать расстояние от нивелира до рейки от 50 до 65 м, в нивелировании точном разрешается — при хороших атмосферных условиях — доводить это расстояние до 80—100 м.

Температура воздуха определяется при работах в СССР термометром-цирцом, примерно через каждые полчаса; температуру на высоте луча (на каждой станции) при задней, передней рейке и при объективе нивелира не определяют.

Определение угла  $i$  приурочивается к времени самых спокойных изображений и к ровному участку и производится через каждые 2—3 дня.

На каждой станции (или штативе) делаются четыре взгляда:

первый — по черной стороне задней рейки ( $Z^u$ ),

второй — по „ „ передн. „ ( $P^u$ ),

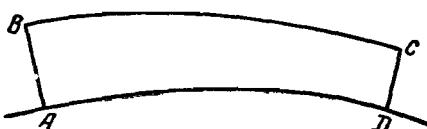
третий — по красной „ „ „ ( $P^k$ ),

четвертый — по „ „ задней „ ( $Z^k$ ).

Каждый взгляд состоит: из паведения трубы на рейку; приведения элевационным винтом пузырька уровня почти на середину, причем всегда окончательная установка уровня делается, ввинчивая элевационный винт; отсчета уровня; отсчетов по трем нитям трубы; отсчета уровня. При переходе от второго к третьему взгляду рекомендуется слегка постучать по штативу, чтобы третий отсчет был сделан при новом положении уровня.

### § 117. Ортометрическая поправка нивелировки

Уровенные поверхности между собой не параллельны, поэтому расстояния между поверхностями  $AD$  и  $CB$ , считаемые по нормалиям, например, к поверхности  $AD$  (см. черт. 325), в разных местах не будут равны между собой. Другими словами, если  $AD$  есть поверхность океана, то высота над ней точки  $B$  может из нивелировки получиться равной и отрезку  $BA$ , и отрезку  $CD$ . Возникает вопрос, что именно понимать под разностью высот точек и как в нивелировке устранить неопределенность в выводе высот точек, обусловленную непараллельностью уровенных поверхностей. Обычно в теории точного нивелирования с этой целью вводят понятие о так называемых ортометрических альтитудах и о разностях ортометрических высот. Под ортометрической альтитудой понимают расстояние точки  $C$  от поверхности океана, считаемое по нормали, проведенной из  $C$  к этой поверхности. Следовательно, точки, лежащие на поверхности, параллельной поверхности океана, будут иметь равные ортометрические высоты, и наоборот, точки, лежа-

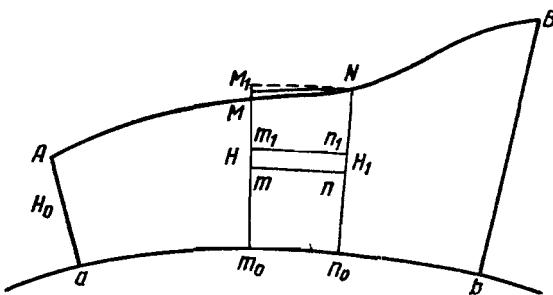


Черт. 325

щие на одной уровенной поверхности, будут иметь разные ортометрические высоты.

Очевидно, чтобы от разности уровней, полученных в точном нивелировании, перейти к разности ортометрических альтитуд, необходимо в выводы нивелировки вводить поправки, которые и называются ортометрическими поправками нивелировки. Пусть поверхность  $am_0n_0b$  — основная уровенная поверхность, на которой высоты равны нулю. Если через  $H_1$  назовем ортометрическую высоту точки  $N$  (см. черт. 326), через  $H$  — ортометрическую высоту бесконечно-близкой к ней точки  $M$ , то, проведя через  $N$  элемент  $NM_1$  уровенной поверхности, имеем

$$H_1 = H + MM_1 - (M_1m_0 - Nn_0).$$



Черт. 326

Так как  $MM_1$  есть измеренная в нивелировке разность уровней, то  $(M_1m_0 - Nn_0)$  и есть ортометрическая поправка разности уровней двух бесконечно-близких точек  $M$  и  $N$ . Для получения  $(M_1m_0 - Nn_0)$  возьмем две точки  $m$  и  $m_1$ , принадлежащие уровням  $mn$  и  $m_1n_1$ , отстоящим по высоте в точке  $m$  на  $dh$  ( $mm_1 = dh$ ). Если  $g$  — значение ускорения силы тяжести в  $m$ , то по теореме Клеро, имеем

$$g = g^0_{45} (1 - \alpha \cos 2\varphi),$$

где  $g^0_{45}$  — ускорение силы тяжести на уровне океана под широтой  $45^\circ$ ,  $\varphi$  — широта точки  $m$ ;  $\alpha = 0,0026$ .

Для уровенных поверхностей  $mn$  и  $m_1n_1$  имеем:  $gdh$  равно постоянному  $C$ .

Отсюда

$$gd^2h + dg \cdot dh = 0,$$

$$d^2h = - \frac{dg}{g} dh,$$

причем, очевидно,  $d^2h$  есть изменение  $dh$  при переходе из  $m$  в  $n$ , т. е.

$$d^2h = n_1n - m_1m$$

( $d^2h$  обусловлено именно непараллельностью  $mn$  и  $m_1n_1$ ); по

$$dg = 2\alpha g^0_{45} \sin 2\varphi d\varphi,$$

вследствие чего

$$d^2h = - 2\alpha \sin 2\varphi d\varphi dh.$$

с отбрасыванием малых членов третьего порядка. Суммируя  $d^2h$  при продвижении от  $m_0$  до  $M$ , мы очевидно получим  $M_1m_0 - Nn_0$ .

Итак, ортометрическая поправка в разности уровней точек  $M$  и  $N$  вычисляется так

$$\varepsilon_{M}^N = \int_0^H d^2h = -2\alpha \sin 2\varphi d\varphi \int_0^H dh = -2\alpha H \sin 2\varphi d\varphi.$$

Чтобы вычислить ортометрическую поправку в разности уровней точек  $A$  и  $B$ , имеющих широты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , пишем:

$$\varepsilon_A^B = -2\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H \sin 2\varphi d\varphi. \quad (503)$$

Поправку  $\varepsilon_A^B$  вычисляют механически, для чего на оси абсцисс откладывают величины  $\alpha \cos 2\varphi$  (черт. 327) для точек  $A, B, R, T, L, \dots$ , взятых на ходе нивелирования с достаточной частотой, а на соответственных ординатах — высоты  $H$  (приближенные) тех же точек над уровнем океана. Соединяя непрерывной кривой построенные точки, получим кривую  $ABRTLA$ , причем элемент площади этой кривой между ее двумя бесконечно-близкими ординатами и осью иксов будет

$$Hdx = -H2\alpha \sin 2\varphi d\varphi.$$

Следовательно, если мы вычислим планиметром площадь заштрихованной фигуры  $\alpha AB\beta\alpha$ , то она и выразит ортометрическую поправку в разности уровней точек  $A$  и  $B$ . Зная ортометрическую поправку альтитуды точки  $A$ , из такого вычисления планиметром площадей получим в конце концов ортометрические поправки альтитуд точек  $B, R, T, L, \dots$ . Очевидно, площадь  $ABRTLA$  выражает собой ортометрическую связь полигона  $ABRTLA$ , которая, конечно, не равна нулю. Это значит лишь, что если к ортометрической высоте  $H_A$  точки  $A$  мы прибавим разность уровней  $u$ , полученную в полигоне  $ABRTLA$ , то  $H_A + u$  не будет равно  $H_A$ , т. е.  $(\Sigma Z - \Sigma P)$  в замкнутом полигоне не должна быть равна нулю. Другими словами, невязка  $\delta$  полигона должна быть вычисляема так

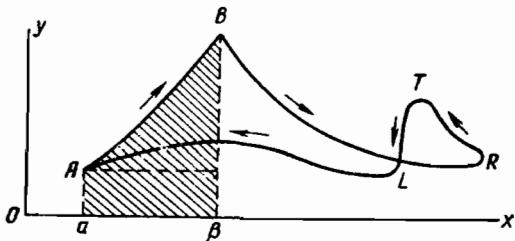
$$\delta = u + \text{ортометрическая поправка.}$$

Для больших нивелировок ортометрические поправки достигают значений в несколько десятков миллиметров и, следовательно, ни в коем случае не могут быть пренебрегаемы.

Преобразуем формулу (503) таким образом

$$\varepsilon_A^B = -2\alpha H \sin 2\varphi_m (\varphi_B - \varphi_A)' \sin 1'.$$

Приближенность этой формулы не оказывается на вычислении  $\varepsilon_A^B$ ; ее можно применять для отдельных секций нивелирования, вводя



Черт. 327

вместо  $H$  среднюю высоту секции и понимая под  $\varphi_m \frac{\varphi_B + \varphi_A}{2}$ , причем широты точек, конечно, можно брать прямо с карты. Обозначим

$$A = 2\alpha \sin 2\varphi_m \cdot \sin l',$$

тогда

$$\varepsilon^B_A = -HA(\varphi_B - \varphi_A)', \quad (504)$$

причем для величины  $A$  по аргументу широты составляется особая таблица. Обычно пользуются именно формулой (504), разбивая целе-сообразно большие нивелирные линии на ряд секций. Рассмотрение вычисления ортометрической поправки и ортометрических высот предполагало, что непараллельность уровневых поверхностей поверхности океана обусловлена только вполне закономерными изменениями силы тяжести, представлямыми, например, формулой Клеро:

$$g = g_{45}^0 (1 - \alpha \cos 2\varphi),$$

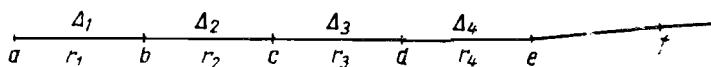
и являющимися следствием эллипсоидальности Земли. Другими словами, при получении формулы (503) для  $\varepsilon^B_A$  предполагалось, что искривления силовой линии силы тяжести от точек  $A$  или  $B$  до уровня океана происходят так, как это было бы при совершенном отсутствии аномалий силы тяжести и при эллипсоидальном виде уровневых поверхностей. В действительности аномалии силы тяжести вызывают иное искривление силовых линий, чем для системы эллипсоидальных уровневых поверхностей, а, следовательно, и иной ход непараллельности этих поверхностей с высотой под данной широтой и долготой. Вопрос об этой добавочной непараллельности уровневых поверхностей будет рассмотрен во II части Руководства<sup>1</sup>.

### § 118. Оценка точности нивелировки

Если назовем случайную ошибку нивелировки на 1 км хода через  $\eta$ , а систематическую ошибку также на 1 км хода через  $\sigma$ , то средняя ошибка  $m$  нивелирного хода длиной в  $L$  километров представится формулой

$$m^2 = \eta^2 L + \sigma^2 L^2.$$

Случайная часть ошибки  $m$  на длинном ходе  $L$  действует менее заметно, чем часть систематическая; наоборот, на коротком ходе случайная часть будет действовать более заметно, чем часть систематическая. Поэтому коэффициент  $\eta$  следует выводить из коротких ходов, а коэффициент  $\sigma$  из длинных ходов и из больших замкнутых полигонов.



Черт. 328

Если имеем ход длиной в  $L$  километров (см. черт. 328), разбитый марками  $a, b, c, d, e, \dots$  на небольшие части, имеющие длины  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , причем разности прямой и обратной нивелировок в этих частях

<sup>1</sup> См. 4 том Избранных сочинений Ф. П. Красовского.

оказались соответственно равными  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ , то по каждой части можно написать:

$$\left| \begin{array}{l} \eta^2 r_1 = \frac{\Delta^2_1}{4} - \sigma^2 r^2_1 \\ \eta^2 r_2 = \frac{\Delta^2_2}{4} - \sigma^2 r^2_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \eta^2 r_n = \frac{\Delta^2_n}{4} - \sigma^2 r^2_n \end{array} \right| \quad (505)$$

Если имеем несколько линий нивелировки протяжением  $L_1, L_2, \dots, L_p$ , на которых разности прямой и обратной нивелировок соответственно равны:  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_p$ , то, пренебрегая здесь действием случайных ошибок, имеем

$$\left| \begin{array}{l} \frac{s^2_1}{4} = \sigma^2 L^2_1; \quad \sigma^2 = \frac{s^2_1}{4L^2_1} \\ \frac{s^2_2}{4} = \sigma^2 L^2_2; \quad \sigma^2 = \frac{s^2_2}{4L^2_2} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{s^2_p}{4} = \sigma^2 L^2_p; \quad \sigma^2 = \frac{s^2_p}{4L^2_p} \end{array} \right| \quad (506)$$

Эти выводы  $\sigma^2$ , понятно, имеют разные веса; чтобы из них получить вероятное значение  $\sigma$ , им приписываются веса, пропорциональные длине линии  $L$ .

Поэтому

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\Sigma L} \sum_1^p \frac{s^2}{L}. \quad (507)$$

Определив  $\sigma$ , выводим  $\eta$  из уравнений (505), написанных для всех частей всех линий нивелирной сети:

$$\left| \begin{array}{l} \eta^2 \sum r = \frac{\Sigma \Delta^2}{4} - \frac{\Sigma r^2}{4} \frac{1}{\Sigma L} \sum_1^p \frac{s^2}{L} \\ \eta^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\Sigma \Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \sum_1^p \frac{s^2}{L} \right\} \end{array} \right| \quad (508)$$

так как  $\sum r = \Sigma L$ .

Величина  $\eta$  не превышает  $\pm 1,2$  мм, величина  $\sigma$  должна получаться менее  $\pm 0,3$  мм.

В последнее время обратил на себя внимание вывод формул для оценки точности нивелировки, данный шведским ученым Руне. Напишем уравнения (506) так

$$\left| \begin{array}{l} \frac{s^2_1}{4} = \sigma^2 L^2_1 + \eta^2 L_1 \\ \frac{s^2_2}{4} = \sigma^2 L^2_2 + \eta^2 L_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{s^2_p}{4} = \sigma^2 L^2_p + \eta^2 L_p \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \sigma^2 = \frac{s^2_1}{4L^2_1} - \frac{\eta^2}{L_1} \\ \sigma^2 = \frac{s^2_2}{4L^2_2} - \frac{\eta^2}{L_2} \\ \dots \dots \dots \\ \sigma^2 = \frac{s^2_p}{4L^2_p} - \frac{\eta^2}{L_p} \end{array} \right.$$

Конечно, в таком виде эти уравнения составлены более правильно. Выводя из них  $\sigma^2$  и приписывая отдельному выводу попрежнему вес, пропорциональный длине линии, получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{4 \Sigma L} \sum \frac{s^2}{L} - \frac{\eta^2 \cdot p}{\Sigma L}$$

( $p$  — число линий).

С другой стороны, из уравнений (505) имеем

$$\begin{aligned} \eta^2 \sum r &= \frac{\Sigma \Delta^2}{4} - \sigma^2 \sum r^2; \\ \eta^2 \sum r &= \frac{\Sigma \Delta^2}{4} - \frac{\Sigma r^2}{4 \Sigma L} \sum \frac{s^2}{L} - \frac{p \Sigma r^2 \cdot \eta^2}{\Sigma L}; \\ \eta^2 \left( \sum r - p \frac{\Sigma r^2}{\Sigma L} \right) &= \frac{1}{4} \frac{\Sigma L \cdot \Sigma \Delta^2 - \sum \frac{s^2}{L} \cdot \sum r^2}{\Sigma L}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left| \begin{array}{l} m^2_1 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4 \Sigma L} \\ m^2_2 = \frac{1}{4p} \sum \frac{s^2}{L} \end{array} \right|, \quad (509)$$

пишем далее

$$\eta^2 \left( \sum r - p \frac{\Sigma r^2}{\Sigma L} \right) = m^2_1 \sum L - \frac{m^2_2}{L_m} \sum r^2,$$

где

$$L_m = \frac{\Sigma L}{p}.$$

Отсюда:

$$\eta^2 = \frac{m^2_1 L_m \Sigma L - m^2_2 \Sigma r^2}{L_m \left( \sum r - p \frac{\Sigma r^2}{\Sigma L} \right)}.$$

Но  $\sum r = \sum L$ ; если далес назовем

$$\frac{\Sigma r}{n} = r_m. \quad (510)$$

то, заменяя  $\sum r^2$  через  $nr_m^2$ , будем далее иметь

$$\eta^2 = \frac{m_1^2 L_m - m_2^2 \cdot \frac{nr_m^2}{\Sigma L}}{L_m - \frac{nr_m^2}{\Sigma L}}.$$

Так как

$$\frac{nr_m^2}{\Sigma L} = \frac{nr_m r_m}{\Sigma L} = r_m,$$

то окончательная формула Руне будет такова:

$$\eta^2 = \frac{m_1^2 L_m - m_2^2 r_m}{L_m - r_m}. \quad (511)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{4 \Sigma L} \sum \frac{s^2}{L} = \frac{p L_m m_1^2 - p r_m m_2^2}{\Sigma L (L_m - r_m)}, \\ \sigma^2 &= \frac{m_2^2}{L_m} - \frac{m_1^2 L_m - m_2^2 r_m}{L_m (L_m - r_m)}, \\ \sigma^2 &= \frac{m_2^2 L_m - m_1^2 L_m}{L_m (L_m - r_m)},\end{aligned}$$

и окончательно

$$\sigma^2 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{L_m - r_m} \quad (512)$$

Несомненно формулы Руне более правильны и их следует применять. Формулы Руне были доложены автором Балтийской геодезической конференции в Москве в 1934 г. Для разности уровней  $u$  по некоторой линии, длиной  $L$  км мы имеем такое выражение средней ее ошибки  $m_u^2$ :

$$m_u^2 = \eta^2 L + \sigma^2 L^2 = (\eta^2 + \sigma^2 L) L. \quad (513)$$

Само собой разумеется, что формула (513) для  $m_u^2$  применима только для значений  $L$ , не превосходящих известные пределы. Рекомендуют из исследования характера расхождений результатов прямого и обратного нивелирования по целому ряду нивелирных линий установить для нивелирной сети данного государства ту среднюю длину  $L_m$  линии, в пределах которой можно считать действие систематических ошибок достаточно однообразным. Если такая длина установлена, то для оценки точности нивелировки вдоль пути, слагающегося из нескольких нивелирных линий, близких по длине к  $L_m$  и образующих суммарную длину  $D$ , мы применим такую формулу:

$$m_u^2 = (\eta^2 + \sigma^2 L_m) D. \quad (514)$$

Величина  $L_m$  для высокоточной нивелировки Франции определяется примерно в 80–100 км, и тогда она соответствует средней длине линий, образующих стороны полигонов этой нивелировки во Франции. Какой величины  $L_m$  следует принять для СССР мы пока еще сказать не можем.

Главная систематическая ошибка высокоточного и точного нивелирования обусловлена действием рефракции, влияние которой нередко

сказывается достаточно однообразно в прямом и обратном нивелировании линий и, следовательно, далеко не сказывается полностью в величинах  $s^2_1, s^2_2, \dots, s^2_n$ . Поэтому и самый вывод величины  $\sigma$  по формулам Лаллемана или Руне становится ненадежным. Если в последних высокоточных нивелировках Германия  $\sigma$  оказывается имеющим значение от  $\pm 0,03 \text{ мм}$  до  $\pm 0,06 \text{ мм}$ , а в высокоточных нивелировках СССР около  $\pm 0,08 \text{ мм}$ , то не говорит ли это за то, что здесь не учтено действие рефракции? Очевидно, и установление  $L_m$  без исследований рефракции становится необоснованным. Как видно, дело с оценкой точности результатов высокоточной и точной нивелировки обстоит далеко не благополучно, — отсутствуют в работах всех стран надлежаще поставленные научные исследования, которые дали бы основания для разбивки линий нивелирования на части при применении формулы (514); далеко не полны и надлежаще собранные материалы по условиям, сопровождающим изменения влияния рефракции на результаты нивелировки. Поэтому нужно особенно приветствовать исследования ЦНИИГАиК по этим вопросам.

В заключение параграфа укажем, что если нивелирная сеть включает в себя не менее 10 полигонов, то Лаллеманом дается еще такая формула для вывода систематической ошибки  $\sigma$ .

$$\sigma_R = \frac{1}{\Sigma L^2} \left[ \frac{1}{2} \sum f^2 - \eta^2 \sum L \right], \quad (515)$$

поправка под  $f$  нивелирную полигону и включая в число полигонов и охватывающий общую их сеть внешний многоугольник, нивелир которого, конечно, равна  $\Sigma f$ .

### § 119. Заключительные соображения по методам и аппаратуре высокоточного и точного нивелирования

Выше был подробно описан порядок ведения нивелировок по русско-швейцарскому способу, принятому и теперь в СССР. В этом способе нивелировка на станции слагается из четырех взглядов на рейки, состоящих каждый из двух отсчетов уровня и трех отсчетов по нитям, т. е. всего из 12 отсчетов по рейке; уровень ставится близко к середине посредством элевационного винта нивелира. В основе пользования уровнем лежит правило, что легче учесть малую поправку, чем сделать ее равной нулю. Понятно, что как раз в данном случае это правило опровергивается возможностью, осуществленной во французских и американских нивелирах и в нивелирах Цейсса, устанавливать посредством добавочных призм пузырек уровня на середину с высокой степенью однообразия. Очевидно, пора переходить, если только оставлять метод отсчетов по нитям, к нивелирам другой конструкции и от русско-швейцарского метода — к французскому; тогда наиболее подходящим представляется нивелир американской конструкции.

Отсчеты по трем широко расставленным нитям в трубе наших нивелиров далеко не в той степени влияют на повышение точности результата, как это можно было бы ожидать; с другой стороны, отсчеты по верхним нитям могут нередко сопровождаться заметной ошибкой систематического характера из-за действия рефракции. Очевидно, нужно в наших нивелирах расстояние между нитями делать в два раза меньшее, чем это принято, и вообще так, чтобы при расстоянии в 60 м между крайними нитями помещались бы 30 или даже 20 сантиметровых делений.

В американской точной нивелировке, как и у нас, отсчитывают лицевую, сантиметровую, сторону рейки по трем нитям, достаточно между собой сближенным (правда, по иным соображениям, именно из-за желания брать большие расстояния до рейки), но по обратной стороне рейки берут отсчет только по средней нити и притом примерно до 3 мм (с сотыми долями фута), служащий лишь для контроля отсчета по лицевой стороне. Другими словами, в американской нивелировке на станции делается собственно не четыре, как у нас, а только два взгляда, входящие в обработку нивелировки, остальные два взгляда — лишь контрольные, не доставляющие материала для выводов разностей уровней, а гарантирующие лишь обнаружение просчетов в метрах и дециметрах.

В высокоточной германской нивелировке мы имеем такую схему на станции:

- 1) наведение нитей на ближайший к горизонту и выпадающий штирик задней рейки, отсчет уровня;
- 2) наведение нитей на ближайший к горизонту и выше его лежащий штирик передней рейки, отсчет уровня;
- 3) наведение нитей на ближайший к горизонту и ниже его лежащий штирик передней рейки, отсчет уровня;
- 4) наведение нитей на ближайший к горизонту и ниже его лежащий штирик задней рейки, отсчет уровня. Рейка односторонняя, но с двумя системами подписей на левом и правом бортах.

Очевидно, американский метод дает большую быстроту работы, чем метод русско-швейцарский. Но, видимо, и метод немецкий приводит к большей быстроте в работе на станции: за 1 час нивелирования партия продвигается на  $1\frac{1}{4}$  км, при расстоянии между рейками в 100 м, затрачивая, следовательно, собственно на работу на одной станции около 3,5 минут времени. При сравнении метода нивелировки русско-швейцарского с методами американским и немецким бросается также в глаза сложная «бухгалтерия», которая проводится при обработке полевых журналов русско-швейцарской нивелировки. В высокоточном и точном нивелировании нужно особенно бояться систематических ошибок, известная часть которых тем более, чем более продолжительность работы на станции. Схема

$$\left. \begin{array}{c} Z_1 \\ P_1 \\ P_2 \\ Z_2 \end{array} \right\} \text{на данной станции} \quad \left. \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \right\} \text{на последующей станции}$$

теоретически будет наилучшей, как вполне симметричная. Она обязывает к четырем одинаково точным взглядам на станции, она выдерживается в русско-швейцарском методе, она выдерживается, но уже до некоторой степени формально, в немецком методе, и совсем не соблюдается в американском методе. Но приходится отметить, что и наиболее крупные невязки мы встречаем именно в нивелирной сети США.

Надлежащего изучения результатов и материалов советских точных и высокоточных нивелировок мы, с другой стороны, еще не имеем, и поэтому не можем ничего сказать — какой характер носят расхождения нивелировок по черной и красной сторонам реек.

В настоящее время можно лишь сказать, что или введением нивелиров новой конструкции, близкой к американской, следует обеспечить переход от русско-швейцарского метода к французскому, оставляя

открытым вопрос о программе наблюдений, или, может быть, в высокоточном нивелировании переходить с существующими инструментами к немецкому методу, как дающему прекрасные результаты при значительной скорости в работе. Не исключается, конечно, переход и на инструменты типа Цейсса — с соответствующими изменениями методики и программы наблюдений.

Характерно для современной постановки опорных нивелировок и у нас и за границей, что фактически в них стерлась разница между высокоточным и точным нивелированием. Средняя случайная ошибка  $\eta$  на километр, не превышающая  $\pm 1,5 \text{ мм}$  и систематическая ошибка  $\sigma$  на километр, не превышающая  $\pm 0,3 \text{ мм}$  — вот какие требования мы имеем со стороны Международного геодезического союза для включения нивелировки в разряд высокоточных нивелировок; кроме этого, прибавляется еще требование выполнения нивелировки каждой линии в прямом и обратном направлениях — по возможности в разные дни на каждом участке между постоянными марками. Эти требования выполняются, однако, не только в высокоточных, но и в точных нивелировках.

Несомненно, имея в виду существенно иные требования к нивелированию высокой точности, необходимо внимательно остановиться на разных сторонах работы и дифференцировать их выполнение в высокоточном и точном нивелировании.

Так, вопрос оседаний башмаков и штатива нивелира является немаловажным; может быть следует поставить требование в высокоточном нивелировании ставить инструмент на штатив, ножки которого ставятся на забитые в землю колья; вероятно, в этом же нивелировании башмаки следует применять только при твердом и сухом грунте, переходя в ряде случаев на применение железных костылей (или в слегка рыхлом грунте — на применение деревянных кольев).

Думается, что в высокоточном нивелировании должно иметь нормальное расстояние между рейками в 100 м. Но главное надлежит признать, что в высокоточном нивелировании следует:

- 1) перейти на высокие штативы, дающие высоту инструмента около 1,9 м;

- 2) собирать, кроме геодезического еще метеорологический материал, по программе, которая позволяла бы судить о порядке и характере действия рефракции в нивелировке на данном ходе.

Конечно, эта постановка нивелирования высокой точности нигде еще не принята, она требует некоторых добавочных денежных затрат, привлечения лишнего подсобного и рабочего персонала, но па это приходится пойти, если иметь в виду те задачи, которые в настоящее время падают на нивелирование высокой точности.

## Глава XV

### О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

#### § 120. Измерение вертикальных углов

Обычно в теодолитах и геодезических универсалах, применяемых для наблюдений в триангуляциях, вертикальный круг соединяется неизменно с горизонтальной осью инструмента, а следовательно, и с трубой, и имеет возрастающую по ходу часовой стрелки подпись делений. Отсчитывание вертикального круга выполняется или посредством двух верньеров, или посредством двух микроскоп-микрометров. Верньеры помещаются на алидаде, пасажиной свободно на горизонтальную ось инструмента и несущей на себе уровень; от этой алидады идет вниз отросток в виде языка, в который упирается с одной стороны микрометрический винт, а с другой — стержень противодействующей винту пружины. Микроскопы, служащие для отсчитывания вертикального круга, прикрепляются или к алидаде такого же устройства, как только что описанное, или к рычагам, ответвляющимся от одной из подставок горизонтальной оси; в последнем случае уровень при алидаде вертикального круга заменяется уровнем при этой подставке.

Назовем местом зенита и обозначим через  $MZ$  отсчет на вертикальном круге, когда визирная ось трубы находится в вертикале горизонтальной оси инструмента и когда пузырек уровня при алидаде вертикального круга (или пузырек уровня при подставке трубы в подлежащем случае) находится на середине. (Очевидно, что в идеально выверенном и совершенно правильно установленном инструменте при отсчете  $MZ$  на вертикальном круге визирная ось трубы будет совпадать с отвесной линией). Нетрудно сообразить, что при круге право мимо нуля верньера при алидаде вертикального круга будут проходить деления этого круга, с постепенно убывающими подписями, если труба ставится, начиная с нулевого, на все более и более возрастающие по величине зенитные расстояния; наоборот, при круге лево мимо нуля верньера при алидаде вертикального круга будут проходить деления этого круга с постепенно возрастающими подписями, если труба ставится, начиная с нулевого, на все более и более возрастающие по величине зенитные расстояния. Точно так же легко видеть, что отсчет  $MZ$  остается постоянным для наблюдений при круге право и для наблюдений при круге лево<sup>1</sup>.

Зенитное расстояние  $z_A$  любого предмета  $A$ , как угол, отсчитываемый от направления в зенит до направления из центра вертикального круга на предмет  $A$ , будет очевидно, равно разности  $MZ$  и отсчета по

<sup>1</sup> Или же отсчет  $MZ$  при круге право отличается на  $360^\circ$  от  $MZ$  при круге лево.

вертикальному кругу при наведении трубы на  $A$ . Если этот последний отсчет мы назовем через  $\Pi$  для наблюдения при круге право и через  $L$  — для наблюдения при круге лево, то на основании вышеизложенного пишем:

$$\begin{aligned} z_A &= L - MZ \\ z_A &= MZ - \Pi \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (516)$$

а отсюда:

$$z = \frac{L - \Pi}{2}; \quad MZ = \frac{L + \Pi}{2}. \quad (517)$$

Формулы (516) и (517) показывают, что из двукратных наблюдений одного и того же хорошо видимого предмета, исполненных при круге право и при круге лево, можно вывести заранее место зенита  $MZ$  и затем пользоваться им при измерениях зенитных расстояний всех подлежащих наблюдению с данной тригонометрической станции сигналов; эти сигналы можно уже наблюдать лишь при одном положении трубы и при вычислении зенитных расстояний применять одну из формул (516). Но вследствие неизбежных перемен, происходящих с течением времени в инструменте, не следует полагаться на неизменяемость места зенита, а надлежит при измерениях зенитных расстояний на данной станции все предметы наблюдать как при круге право, так и при круге лево — одинаковое число раз при том и другом положении трубы. При таком порядке выводимые из отсчетов на каждый предмет во время самих наблюдений величины  $MZ$  позволяют судить об отсутствии грубых промахов в отсчетах и наведениях, о точности этих отсчетов и наведений и о переменах, происходящих в инструменте. Словом, постоянство этих величин  $MZ$  играет при измерении зенитных расстояний ту же роль, что и постоянство двойной коллимационной ошибки — при измерении горизонтальных направлений. При каждом наведении трубы надо перед отсчетом вертикального круга приводить на середину пузырек уровня при алидаде этого круга или же, если уровень находится при подставке трубы, делать отсчеты по концам его пузырька.

Зенитные расстояния предметов  $A, B, C, \dots$ , подлежащие определению со станции  $O$ , наблюдаются несколькими приемами; каждый прием состоит из двух полуприемов: в первом полуприеме предметы наблюдаются в порядке  $A, B, C, \dots$ , во втором полуприеме, который исполняется после перевода трубы через зенит, предметы наблюдаются в обратном порядке  $C, B, A$ . Наибольшая погрешность в измеряемых зенитных расстояниях тригонометрических сигналов обусловливается переменами земного преломления, вследствие чего точность определения этих зенитных расстояний мало возрастает с увеличением числа приемов. Поэтому и число приемов, которыми измеряются в триангуляциях зенитные расстояния, значительно меньше числа приемов для наблюдения горизонтальных направлений. Обычно зенитные расстояния наблюдают шестью приемами на пунктах I класса<sup>1</sup> и тремя приемами — на пунктах II класса, и нередко без перестановки вертикального лимба (которая во многих инструментах невозможна) между приемами<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> В настоящее время на работах по триангуляции I класса, выполняемых в СССР, измерение зенитных расстояний с пунктов I класса на пункты I же класса совсем не производится, за исключением горных и полугорных районов.

<sup>2</sup> Если вертикальный круг не может переставляться, то в разных приемах предмет наблюдают на разных горизонтальных нитях трубы.

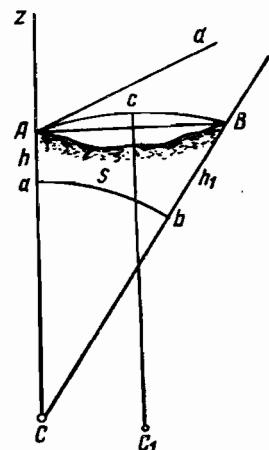
Выгоднейшим для измерения зенитных расстояний временем является промежуток от 9 до 11 часов дня и от 1 до 3 пополудни. Хотя в это время изображения сигналов неясны и расплывчаты вследствие значительных колебаний их по азимуту, но в это же время для перемены в положении изображения по высоте почти равны нулю, между тем как во время утреннего и вечернего периодов спокойных, отчетливых изображений положение изображения быстро изменяется по высоте.

## § 121. Формулы тригонометрического нивелирования

Земная атмосфера на разных высотах имеет разную плотность, а, следовательно, и разную преломляемость, так что луч света от одной точки к другой идет не по прямой, а по кривой линии, обращенной обыкновенно своей вогнутостью к поверхности земли. Это искривление луча происходит в вертикальной плоскости и изменяет зенитное расстояние весьма значительно. Наблюдатель в  $A$  видит точку  $B$  (черт. 329) не по направлению хорды  $AB$ , а по направлению касательной  $Ad$  к последнему элементу рефракционной кривой  $AcB$ . Если прямые  $zAC$  и  $BC$  совпадают с отвесными линиями в  $A$  и  $B$ , то угол  $zAB = \xi$  называется истинным зенитным расстоянием, а угол  $zAd = z$  — видимым зенитным расстоянием. При нормальном распределении плотностей в атмосфере  $z$  всегда меньше  $\xi$ .

Разность  $r - \xi - z$  называют углом земного преломления или просто земным преломлением. Многочисленные изыскания убеждают, что величина земного преломления не может быть определена точно, так как зависит не только от расстояния между точками  $A$  и  $B$ , но еще от времени дня, от вида и свойств местности между  $A$  и  $B$ , температуры и давления воздуха в момент измерения  $z$ , температуры почвы, высоты луча над почвой и т. д. Вот почему вертикальные углы измеряют менее точно, чем углы горизонтальные: бесполезна высокая точность визирования трубой и отсчитывания по вертикальному кругу, если точность определения  $z$  совершенно поглощается при переходе от  $z$  к  $\xi$  ошибкой в определении угла земного преломления. Для простоты вычислений принимают обыкновенно, что кривая  $AcB$  представляет собой круговую дугу; при таком предположении земное преломление как угол между касательной и хордой, очевидно пропорционально длине дуги  $AcB$ , или пропорционально длине дуги  $ab$ , лежащей на уровенной поверхности океана. С другой стороны, длина дуги  $ab$  пропорциональна углу  $C$  между отвесными линиями  $AC$  и  $BC$ ; следовательно, земное преломление  $r$  пропорционально углу  $C$ ; обычно и принимают, что

$$r = k \cdot \frac{C}{2},$$



Черт. 329

понимая под  $k$  так называемый коэффициент земного преломления. Земное преломление, а, следовательно, и его коэффициент, имеет наибольшую за сутки величину на рассвете, перед восходом солнца; от восхода солнца до полудня  $k$  непрерывно уменьшается; наименьшая величина

$r$  и  $k$  и наименьшая скорость изменения  $k$  приходится на время от 11 до 2 часов пополудни; с 2 часов пополудни  $k$  возрастает непрерывно вплоть до утра следующего дня. Из многочисленных опытов следует, что наименьшее за сутки близполуденное значение  $k$  довольно постоянно для разных дней и даже для разных мест; наоборот, значение  $k$  в другие моменты дня для разных дней и разных мест весьма различно. Поэтому только измеренные в близполуденное время зенитные расстояния можно перечислять па соответствующие истинные зенитные расстояния посредством формулы

$$\xi = z + k \frac{C}{2},$$

с подстановкой в нее среднего значения  $k$ , выводимого из опытов<sup>1</sup>.

Пусть проекции тригонометрических точек  $A$  и  $B$  (черт. 329) на уровенную поверхность океана суть точки  $a$  и  $b$ . Назовем: высоту  $La$  точки  $A$  над океаном через  $h$ , высоту  $Bb$  точки  $B$  над океаном через  $h_1$ , длину дуги  $ab$  (горизонтальное расстояние между  $a$  и  $b$ ) через  $s$ . Обозначив углы треугольника  $ABC$  через  $A$ ,  $B$  и  $C$ , напишем:

$$\frac{BC - AC}{BC + AC} = \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \operatorname{ctg} \frac{A + B}{2} \quad (518)$$

или, называя через  $R$  радиус кривизны дуги  $ab$  и заменяя в (518)  $BC$  через  $R + h_1$ ,  $AC$  через  $R + h$  и  $A + B$  через  $180^\circ - C$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{h_1 - h}{2R + (h_1 + h)} &= \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \\ h_1 - h &= \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \cdot 2R \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right). \end{aligned}$$

По малости угла  $C$  можно принять:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{C}{2} + \frac{1}{3} \frac{C^3}{8} = \frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24 R^3}.$$

Следовательно,

$$h_1 - h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \left(1 + \frac{s^2}{12 R^2}\right) \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right). \quad (519)$$

В формуле (519) всегда можно пренебречь стоящей в скобках величиной  $\frac{s^2}{12 R^2}$  и переписать ее так

$$h_1 - h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right). \quad (519')$$

<sup>1</sup> Всё только что сказанное предполагает, однако, что луч  $AB$  идет везде выше почвы на 6–8 м; вблизи почвы, например, на высоте 2 м, ход изменения преломления за сутки будет существенно иной, так как здесь главное влияние будет обусловлено температурой почвы (см. главу XIV, § 114).

Для мест же, лежащих над морем не выше 1 км, влияние члена  $\frac{h_1 + h}{2R}$  будет ничтожно по сравнению с погрешностью в  $h_1 - h$ , обусловленной неточностью определения земного преломления. Поэтому можно формулу (519') переписать так

$$h_1 - h = s \operatorname{tg} \frac{A - B}{2}, \quad (520)$$

применяя формулу (519') лишь в соответственных районах.

Остается  $A$  и  $B$  выразить через измеренные зенитные расстояния. Здесь представляется два случая:

- 1) когда наблюдалось только одно зенитное расстояние в  $A$  или в  $B$  (одностороннее нивелирование);
- 2) когда наблюдались два зенитных расстояния и в  $A$  и в  $B$  и при этом одновременно (взаимные наблюдения).

*1 случай.* Если измерено зенитное расстояние  $z$  только в  $A$ , то

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - z - r; \quad B = z + r - C; \\ \frac{A - B}{2} &= 90^\circ - \left\{ z - \left( \frac{C}{2} - r \right) \right\}; \\ \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} &= \operatorname{ctg} \left\{ z - \frac{1-k}{2} C \right\}. \end{aligned} \quad (521)$$

Вследствие малости  $\frac{1-k}{2} C$  можно написать

$$\operatorname{ctg} \left( z - \frac{1-k}{2} C \right) = \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{C}{\sin^2 z}.$$

Но, вследствие близости  $z$  к  $90^\circ$ , можно в малом члене  $\frac{1-k}{2} \cdot \frac{C}{\sin^2 z}$  заменить  $\sin^2 z$  через единицу; заменяя же еще  $C$  через  $\frac{s}{R}$ , формулу (521) перепишем так

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2R} s.$$

Следовательно,

$$h_1 - h = s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2R} s^2. \quad (522)$$

*2 случай.* Если измерены одновременно зенитные расстояния  $z$  точки  $B$  из  $A$  и  $z_1$  точки  $A$  — из  $B$ , то, называя углы земного преломления в  $A$  и  $B$  через  $r$  и  $r_1$ , получим

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - z - r; \quad B = 180^\circ - z_1 - r_1; \\ \frac{A - B}{2} &= \frac{z_1 - z}{2} + \frac{r_1 - r}{2} = \frac{z_1 - z}{2} + \frac{k_1 - k}{4} C; \end{aligned}$$

причем  $r$  заменен через  $k \frac{C}{2}$ , а  $r_1$  через  $k_1 \frac{C}{2}$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \operatorname{tg} \left( \frac{z_1-z}{2} + \frac{k_1-k}{4} C \right) = \operatorname{tg} \frac{z_1-z}{2} + \\ &+ \frac{k_1-k}{4} \cdot \frac{C}{\cos^2 \frac{z_1-z}{2}}, \end{aligned}$$

но, вследствие малости  $\frac{z_1-z}{2}$ , можно положить  $\cos^2 \frac{z_1-z}{2} = 1$ , а потому

$$h_1 - h = s \operatorname{tg} \frac{z_1-z}{2} + s^2 \frac{k_1-k}{4R}. \quad (523)$$

Предполагая же при одновременных наблюдениях в  $A$  и  $B$  равенство углов  $r_1$  и  $r$ , а, следовательно, и коэффициентов  $k$  и  $k_1$ , получим обычно употребляющуюся в практике формулу для вычисления высот по взаимным зенитным расстояниям

$$h_1 - h = s \operatorname{tg} \frac{z_1-z}{2}. \quad (524)$$

При наблюдениях в  $A$  центр вертикального круга не совпадает с  $A$ , а находится выше на «высоту инструмента»  $i$ ; кроме того, труба направляется не на  $B$ , а на верх сигнала  $B$ , высоту которого над  $B$  (над землей) назовем через  $a_1$ . Понимая под  $z$  непосредственно измеренное зенитное расстояние в  $A$  и  $B$ , мы, очевидно, в формулу (522) должны под знак котангенса ввести  $z + \frac{a_1 - i}{s \sin 1''}$ , а в формуле (524) заменить  $z$  через  $z + \frac{a_1 - i}{s \sin 1''}$  и  $z_1$  через  $z_1 + \frac{a - i_1}{s \sin 1''}$ , если  $a$  есть высота сигнала в  $A$  а  $i_1$  — высота инструмента при наблюдениях в  $B$ . Принимая же во внимание, что можно при  $z$ , близком к  $90^\circ$ , принять:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left( z + \frac{a_1 - i}{s \sin 1''} \right) &= \operatorname{ctg} z - \frac{a_1 - i}{s}, \\ \operatorname{tg} \left[ \frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1)(a_1 - i)}{2s \sin 1''} \right] &= \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1)(a_1 - i)}{2s}, \end{aligned}$$

получим такие окончательные формулы

1) при односторонних наблюдениях.

$$h_1 - h = s \operatorname{ctg} z + s^2 \frac{1-k}{2R} - (a_1 - i); \quad (525)$$

2) при двусторонних наблюдениях

$$h_1 - h = s \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} - \frac{a_1 + i_1}{2} + \frac{a + i}{2}. \quad (526)$$

Необходимо отметить, что в практике двусторонние наблюдения исполняются не одновременно, а с промежутком между наблюдениями в  $A$  и в  $B$ , совершенно произвольным по величине. Такой организации работ, чтобы одновременно два геодезиста наблюдали бы из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$ , никогда не проводится. Тем не менее, если получены  $z_1$  и  $z$ , то  $h_1 - h$  выводится по формуле (526). Если по формуле (525) вычис-

лить сперва  $h_1 - h$  по  $z$ , а затем — по  $z_1$ , то в среднем из двух таких выводов получим то, что дает формула (526). Очевидно, что обычное применение формулы (526) не является выводом  $h_1 - h$  из одновременных двусторонних наблюдений, а выводом *сразу* среднего  $h_1 - h$  из двух односторонних, неодновременных наблюдений.

## § 122. О точности определения высот из тригонометрического нивелирования

Ошибки высот, определяемых по формулам (522), (523) и (524) можно считать происходящими только вследствие ошибок в величинах  $z$ ,  $z_1$  и  $k$ , т. е. при вычислении средней ошибки  $\Delta h$  в разности  $h_1 - h$  можно  $s$  и  $R$  считать безошибочными. Называя через  $\Delta z$  и  $\Delta k$  средние ошибки в  $z$  и  $k$ , напишем из формулы (522):

$$\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{\Delta z^2}{\sin^4 z \rho''^2} + \frac{s^2 \Delta k^2}{4R^2}};$$

из формулы (523):

$$\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{2 \Delta z^2}{4 \cos^4 \frac{z_1 - z}{2} \rho''^2} + \frac{s^2 2 \Delta k^2}{16 R^2}};$$

из формулы (524):

$$\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{2 \Delta z^2}{\cos^4 \frac{z_1 - z}{2} \rho''^2}}.$$

Полагая же, как уже делали ранее:  $\sin z = 1$  и  $\cos \frac{z_1 - z}{2} = 1$ , напишем окончательно для одностороннего наблюдения:

$$\Delta h = \pm s \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\rho''}\right)^2 + \frac{s^2 \Delta k^2}{4R^2}}; \quad (a)$$

для двусторонних наблюдений:

$$1) \Delta h = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\rho''}\right)^2 + \frac{s^2 \Delta k^2}{4R^2}}; \quad (b)$$

$$2) \Delta h = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} \frac{\Delta z}{\rho''}. \quad (c)$$

Нужно теперь отметить, что формулой (524) и вытекающей из нее формулой (526) приходится пользоваться только потому, что различие величин  $k_1$  и  $k$  в формуле (523) мы не можем в практике определить сколько-нибудь надежно; в действительности даже при одновременном измерении в  $A$  и  $B$  взаимных зенитных расстояний мы не имеем оснований полагать  $k = k_1$  и  $r = r_1$ . Другими словами, хотя при двусторонних наблюдениях применяют формулы (524) и (526) для определения  $h_1 - h$ , но подсчет ошибки  $\Delta h$  в этом случае надлежит делать все-таки

по формуле (b), а не (c). По исследованиям разных ученых, среднее значение  $k$  оказывается равным 0,14, а значение  $\Delta k$  для близполуденных наблюдений принимается около  $\pm 0,03$  (см. *Zachariae. Geodätische Hauptpunkte*); за сутки истинное значение  $k$  колеблется от 0,10 до 0,20. Принимая  $\Delta k = \pm 0,03$  и полагая  $\Delta z = \pm 3'',0$ , получим для  $\Delta h$  при одностороннем нивелировании:

|                           | $s = 3$ | $s = 6$ | $s = 20$ |
|---------------------------|---------|---------|----------|
| $\frac{s\Delta z}{\rho}$  | 0,045   | 0,090   | 0,300    |
| $s^2 \frac{\Delta k}{2R}$ | 0,012   | 0,090   | 1,000    |
| $\Delta h$                | 0,047   | 0,127   | 1,043    |

Здесь  $s$  — в километрах,  $\Delta h$  — в метрах.

Эта таблица показывает, что при расстояниях, больших 6—7 км, влияние ошибочности принятого при вычислении формулы (525) значения  $k$ , или влияние неверности предположения о равенстве  $r$  и  $r_1$  при вычислении по формуле (526), поглощает совершение влияния на вывод  $h_1 - h$  ошибки в зенитном расстоянии. Очевидно, что за треть метра в разностях высот, определяемых из тригонометрического нивелирования, можно ручаться лишь при расстояниях, меньших 6—7 км; при больших расстояниях влияние неверного учета действия рефракции возрастает так быстро и значительно, что само тригонометрическое нивелирование, как метод определения высот опорных точек, становится сомнительным при распространении его на большие площади.

Зенитное расстояние приходится наблюдать в близполуденное время, т. е. в то время дня, когда видимость предметов, удаленных даже на 6—7 км, нередко является слабой. Это обстоятельство вносит в измеряемые зенитные расстояния добавочные ошибки, в особенности если принятый тип тригонометрических знаков не предусматривает соответствующего вида и отдалки самой верхней части знака, при которой обеспечивается уверенное наведение горизонтальной птицы трубы на предназначеннное для этого место болванки внешней пирамиды.

Поэтому приведенные выше расчеты величины  $\Delta h$  нужно считать не преувеличенными, а скорее преуменьшенными в части влияния  $\Delta z$ . Поэтому же, если тригонометрическое нивелирование должно доставить опорные по высоте пункты для топографической съемки, то в равнинных районах следует отдельные передачи высот ограничивать расстоянием между точками в 6—8 км, если наблюдения выполняются с двойных пирамид и сигналов при высоте луча над почвой везде не ниже 6 м, и расстоянием в 4 км, если наблюдения выполняются с земли. Вообще при указанном задании надлежит передачу высот вести по сторонам триангуляции II класса, если их размеры не превышают 8 км, и главным образом по сторонам триангуляции III класса. Так как у нас собственно триангуляция III класса нередко заменяется системой точек III класса, т. е. системой дополнительных точек III класса, на которых наблюдений горизонтальных углов не выполняют, то, следовательно, передачи высот через пункты III класса обращаются в односторонние, т. е. не контролируемые непосредственно. Представляется поэтому необходимым в план работ по наблюдениям в заполняющей триангуляции II класса включать

и приезды на некоторые пункты III класса, определяемые в качестве дополнительных для наблюдения с них зенитных расстояний. Конечно, выбор таких пунктов следует делать, руководясь как схемой передачи высот, так и сведениями о возможности на дополнительном пункте взять зенитные расстояния. Если высота дополнительного пункта III класса определяется с трех-четырех основных пунктов и при этом невязки в фигурах, в которые входят односторонние передачи высот на этот пункт, оказываются вполне приемлемыми, то нет оснований, как это нередко делают, выбрасывать из общего уравнивания высот такие односторонние передачи. Вес односторонних передач на пункты III класса придется принять формально в два раза меньшим, чем вес двусторонней передачи на такое же расстояние. В данной сети высот должна быть хотя бы одна цепь передач, связующая все пункты и включающая в себя отдельные передачи, но все полученные из двустороннего нивелирования на расстояние каждое не более 8 км. Надлежит в данной заполняющей сети II класса иметь твердо определенные по высоте пункты, отстоящие друг от друга не более чем на 80 км. Эти твердые пункты могут быть марками и реперами основного нивелирования I, II и III разрядов, а также реперами технического нивелирования IV и V разрядов.

Все вышесказанное в отношении постановки тригонометрического нивелирования, имеющего задачей дать опорные по высоте пункты для топографической съемки, мало относится к нашим южным степным районам. Здесь атмосферные условия в летнее время настолько неблагоприятны, что даже передачи высот на расстояния в 5–6 км могут дать совсем ненадежные результаты. В этих степных южных районах следует на каждом плашете съемки в масштабе 1 : 50 000 пролагать ход нивелирования IV и V разрядов, замыкая такие ходы на марках и реперах нивелирования III разряда; связь тригонометрических пунктов с ближайшими к ним пунктами таких нивелирных ходов может выполняться тахеометрически.

Могут быть нередко случаи, когда тригонометрическое нивелирование полезно использовать не для получения высот, служащих опорными в топографических съемках, а в иных целях, например, в целях пополнения гипсометрических материалов при составлении мелкомасштабных карт, в целях дать исходные высоты для привязок барометрических маршрутов при географических и картографических обследованиях, в целях дать высоты для общей гравиметрической съемки страны и т. д. Эти высоты могут быть грубоватыми, ошибочными даже до 5 м, но все-таки они свою службу сослужат. Поэтому даже в триангуляции I класса следует пересмотреть вопрос об измерении зенитных расстояний.

### § 123. Определение коэффициента земного преломления

Коэффициент  $k$  можно определить двумя методами:

1) определяя из геодезического нивелирования разность уровней точек, альтиitudes которых известны из геометрического нивелирования;

2) выполняя одновременные наблюдения взаимных зенитных расстояний.

1 способ. Из черт. 329 имеем:

$$\frac{\xi_1 + \xi}{2} = 90^\circ + \frac{s \cdot \rho''}{2R}. \quad (a)$$

Из формулы (516) § 121 пишем

$$\operatorname{tg} \frac{\xi_1 - \xi}{2} = \frac{h_1 - h}{s} \left( 1 - \frac{h_1 + h}{2R} \right). \quad (\text{b})$$

Из формул (a) и (b), зная из геометрического нивелирования  $h_1$  и  $h$ , выводим  $\xi_1$  и  $\xi$ .

Далее

$$k = \frac{2R}{\rho'' \cdot s} (\xi - z); \quad k_1 = \frac{2R}{\rho'' \cdot s} (\xi_1 - z_1). \quad (\text{c})$$

Конечно, в (c) нужно подставить для  $z$  и  $z_1$  не наблюденные их значения, а исправленные приведениями к центрам знаков в  $A$  и  $B$ , т. е. вместо  $z$  подставляется  $z + \frac{a_1 - i}{s \sin 1''}$  и вместо  $z_1$  величина  $z_1 + \frac{a - i_1}{s \sin 1''}$ .

2 способ. В основе его лежит допущение, что  $k = k_1$ .

Из треугольника  $ABC$  (черт. 329) имеем

$$\angle A = 180^\circ - (z + r);$$

$$\angle B = 180^\circ - (z_1 + r);$$

$$r = 180^\circ - \frac{A + B}{2} - \frac{z + z_1}{2}.$$

Так как

$$\frac{A + B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{s \cdot \rho''}{2R},$$

то, вводя в  $z$  и  $z_1$  приведения  $\frac{a_1 - i}{s \cdot \rho''}$  и  $\frac{a - i_1}{s \cdot \rho''}$ , получим:

$$r = k \frac{s \cdot \rho''}{2R} = 90^\circ + \frac{s \cdot \rho''}{2R} - \frac{z + z_1}{2} - \frac{a_1 - i + a - i_1}{2s} \rho'';$$

$$k = 1 - \frac{R}{s \cdot \rho''} [z + z_1 - 180^\circ] - \frac{R}{s^2} [(a + a_1) - (i_1 + i)]. \quad (\text{d})$$

Определение коэффициента  $k$  земного преломления составляет, конечно, только часть исследования вопроса о действии рефракции в тригонометрическом нивелировании. Вопрос о действительном виде рефракционной кривой  $AcB$  (черт. 329) является существенным, но и очень сложным. Выявить признаки, когда и при каких условиях можно считать  $k = k_1$ ; выявить признаки, когда этого равенства нет и какое из нивелирований по двум взаимным направлениям даст результат, приближающийся к вычисляемому с средним значением коэффициента  $k$  — вот одна из задач, предъявляемых к исследованию земного преломления. Но и установление факта, что в данном районе в близполуденное время в летний период среднее значение коэффициента  $k$  заметно отличается от обычно принимаемого значения  $k_0 = 0,16$ , также входит в задачи исследования действия рефракции и является существенным для обработки результатов нивелирования, исполненного в этом районе. Именно, с целью улучшения обработки и предпринимают определение коэффициента  $k$  для данного района. При этом, если исследование будет вестись первым из указанных методов, то получаемые результаты несколько более широко освещают вопрос действия рефракции, чем при применении второго метода, основанного на предположении

равенства  $k$  и  $k_1$ . Но оба метода, отвечая своей задаче, все-таки, еще не представляют методов собственно исследования рефракции, которые связаны с изучением распределения температуры и влажности воздуха в его слое, пересекаемом лучом  $AcB$ .

Ограничиваюсь лишь задачей вывода среднего значения коэффициента  $k$  для данного района, следует отметить, что при этом достаточно будет ограничиться достижением средней ошибки в определении этой заметно изменяющейся величины в  $\pm 0,02$ . Далее следует при опытах по определению коэффициента  $k$  применяться именно к тем расстояниям, которые наиболее часто имели место при исполнении тригонометрического нивелирования в данном районе, для обработки материалов которого и предпринимается вывод величины  $k$ .

Поэтому, при применении первого способа целесообразно использовать реперы геометрического нивелирования, отстоящие друг от друга на 6—10 км и размещенные гнездами по 3—4 репера в разных местах района. При применении же второго метода следует использовать геодезическое нивелирование по сторонам триангуляции длиной в 6—10 км, также размещенным в разных частях района.

При применении и того и другого метода определения  $k$  надлежит поставить специальные наблюдения зенитных расстояний, приняв меры к повышению точности измерения при этом зенитных расстояний. Эти меры заключаются, во-первых, в применении более точного и более мощного инструмента, чем тот, который служил для собственно тригонометрического нивелирования в рассматриваемом районе; во-вторых, в применении при этих специальных наблюдениях гелиотропов в солнечные дни и особых марок в пасмурные дни, например в виде укрепляемого в верхней части геодезического сигнала деревянного квадратного щита размером  $1,2 \times 1,2$  м, покрытого белой краской в его верхней, и черной краской — в его нижней половине (можно нанести на черном щите белый круг диаметром 0,6 м). Иногда выводят коэффициент не из специально поставленных наблюдений зенитных расстояний, как выше было указано, а из материалов, собранных при исполнении тригонометрического нивелирования в производственных целях. При этом обработку ведут иначе, чем это указывается формулой (d), а именно так.

Пусть разности уровней  $h - H_2 - H_1$  точек  $B$  и  $A$  выведены дважды: один раз по формуле одностороннего нивелирования с  $A$  на  $B$ , второй раз по формуле одностороннего нивелирования с  $B$  на  $A$ ; при этом с значением  $k = k_0$  были получены для  $h$  значения  $h_1$  и  $h_2$ , считаемые оба, как превышение  $B$  над  $A$ . Тогда мы имеем такие уравнения

$$h = h_1 + \delta h_1 - \frac{\Delta k}{2R} s^2, \quad h = h_2 + \delta h_2 + \frac{\Delta k}{2R} s^2,$$

понимая под  $\delta h_1$  и  $\delta h_2$  ошибки, обусловленные ошибками измеренных зенитных расстояний, а под  $\Delta k$  поправку принятого значения  $k_0$ . Далее имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{R} s^2 &= h_1 - h_2 + \delta h_1 - \delta h_2; \\ \Delta k &= \frac{(h_1 - h_2) R}{s^2} + \frac{(\delta h_1 - \delta h_2)}{s^2} R. \end{aligned} \quad (527)$$

Принимая веса этих уравнений для  $\Delta k$  пропорциональными величинам  $s^2$ , выводим из них среднее по весам значение  $\Delta k$ , используя весь материал по измерениям взаимных зенитных расстояний в тригонометрическом нивелировании данного района. Представляется, что все-таки следует в процессе выполнения тригонометрического нивелирования согласно производственному заданию выполнять по некоторым сторонам триангуляции специальные наблюдения зенитных расстояний, более точные, выполняя их так, как было указано, и дополняя использованием уравнений (527) для вывода  $\Delta k$  использованием и этих специальных наблюдений зенитных расстояний.

Приведем в заключение таблицу определений величины  $k$ , использованных Бесселем, Кларком, Байером, Тейнером, Струве.

|         | Название триангуляций     | Среднее значение |
|---------|---------------------------|------------------|
| Кларк   | Английская . . . . .      | 0,158            |
| Бессель | Прусская . . . . .        | 0,137            |
| Байер   | То же . . . . .           | 0,145            |
| Тейнер  | Западно-русская . . . . . | 0,145            |
| Струве  | Лифляндская . . . . .     | 0,124            |

В среднем для Европы  $k = 0,14 - 0,15$ .

Приведенные значения  $k$  выведены, однако, из наблюдений в триангуляции I класса, т. е. для расстояний больших, не применяемых в современном тригонометрическом нивелировании.

# О ГЛАВЛЕНИЕ

|   | <i>Стр.</i> |
|---|-------------|
| От редакторов . . . . .   | 3           |
| Предисловие . . . . .   | 9           |
| Введение . . . . .  | 13          |
| § 1. Задачи высшей геодезии . . . . .                                     | —           |
| § 2. Градусные измерения. Общий земной эллипсоид . . . . .                | 14          |
| § 3. Измерения силы тяжести . . . . .                                     | 25          |
| § 4. Референц-эллипсоид. Относительные уклонения отвесных линий . . . . . | 27          |
| § 5. Связь геодезии с другими научными дисциплинами . . . . .             | 33          |

## Глава I

### О триангуляции вообще

|   |    |
|---|----|
| § 6. Триангуляции и нивелировки. Составление карт . . . . .                 | 37 |
| § 7. Тригонометрические сети разных классов и схемы их построения . . . . . | 46 |

## Глава II

### Действие погрешностей в триангуляции

|  |    |
|--|----|
| § 8. Вес функции уравненных элементов при условных наблюдениях . . . . .   | 58 |
| § 9. Средняя квадратическая ошибка связующей и промежуточной сторон в простой цепи треугольников . . . . .   | 61 |
| § 10. Средняя ошибка произвольной связующей стороны простой цепи равнобедренных треугольников, уравленной за условия фигур по направлениям . . . . . | 67 |
| § 11. О выгоднейшей форме треугольников . . . . .  | 72 |
| § 12. Продольная ошибка триангуляционного ряда, составленного из равносторонних треугольников . . . . .  | 74 |
| § 13. Поперечный сдвиг триангуляционного ряда. Ошибки азимутов сторон ряда и диагонали ряда. Лапласовы азимуты . . . . .                             | 80 |
| § 14. Среднее значение отношений весов уравненных и измеренных величин . . . . .   | 91 |
| § 15. Американские формулы подсчета погрешностей в триангуляции. Геодезический четырехугольник . . . . .   | 96 |

## Глава III

### Основные соображения по проектированию триангуляции

|  |     |
|--|-----|
| § 16. Общая сводка расчетных формул главы II . . . . .   | 108 |
| § 17. Действие систематических ошибок в углах треугольников . . . . .  | 113 |
| § 18. Деформации при вставке тригонометрических сетей между опорными пунктами и сторонами высшего класса . . . . . | 114 |
| § 19. Основные соображения при проектировании триангуляции . . . . .   | 117 |

## Глава IV

### Геодезические разведки (обследования) и рекогносцировка. Тригонометрические знаки

|  |     |
|--|-----|
| § 20. Геодезические обследования . . . . . | 128 |
| § 21. Рекогносцировка . . . . .            | 130 |

|  |
|--|
| § 22. Рекогносцировка базисов и базисных сетей . . . . . |
| § 23. О тригонометрических знаках . . . . .              |

## Г л а в а V

**Базисные сети**

|  |
|--|
| § 24. Разные виды базисных сетей и их оценка . . . . .                 |
| § 25. Распределение весов угловых измерений в базисных сетях . . . . . |

## Г л а в а VI

**Измерение базисов**

|   |
|---|
| § 26. Старые нормальные меры . . . . .  |
| § 27. Требования, предъявляемые к нормальным мерам . . . . .                              |
| § 28. Современные нормальные меры . . . . .   |
| § 29. «Уравнение» нормальной меры . . . . .   |
| § 30. Световые эталоны . . . . .  |
| § 31. Инвар и некоторые другие сплавы . . . . .   |
| § 32. Сравнение мер. Первый тип компаратора . . . . .                                     |
| § 33. Второй тип компаратора (интерференционный) . . . . .                                |
| § 34. О базисных приборах вообще; железовые приборы . . . . .                             |
| § 35. Базисный прибор Струве, измерение им базиса и вычисление длины последнего . . . . . |
| § 36. Точность измерения базисов железовыми приборами . . . . .                           |
| § 37. Базисный прибор с проволоками. Теоретические обоснования его применения . . . . .   |
| § 38. Аппаратура базисного прибора с проволоками . . . . .                                |
| § 39. Инварные проволоки. Обращение с ними . . . . .                                      |
| § 40. Компарирующие проволоки и ленты . . . . .   |
| § 41. Интерференционный компаратор для проволок прибора Едерина . . . . .                 |
| § 42. Измерение базиса прибором Едерина. Практика СССР и других стран . . . . .           |
| § 43. Оценка точности измерения базисов прибором Едерина . . . . .                        |
| § 44. Заключительные соображения по базисным измерениям . . . . .                         |

## Г л а в а VII

**Отдельные части геодезических угломерных инструментов. Описание главных типов инструментов для наблюдений в триангуляции**

|   |
|---|
| § 45. Уровни . . . . .  |
| § 46. Верньер . . . . .   |
| § 47. Шкаловый микроскоп . . . . .  |
| § 48. Микроскоп-микрометр . . . . .   |
| § 49. Формулы отсчетов при помощи микроскоп-микрометров . . . . .   |
| § 50. Исследования, установка и поверка микроскоп-микрометра . . . . .  |
| § 51. Трубы угломерных инструментов . . . . .   |
| § 52. Устройство осей . . . . .   |
| § 53. Описание инструментов, служащих для измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний в триангуляции . . . . . |
| § 54. Описание теодолита Паркхерста и некоторых других инструментов применяемых за границей . . . . .                         |
| § 55. Теодолит Вильда . . . . .   |

## Г л а в а VIII

**Об инструментальных погрешностях**

|  |
|--|
| § 56. Эксцентризитет алидады . . . . .   |
| § 57. Об ошибках делений кругов геодезических инструментов . . . . .                   |
| § 58. Исследование ошибок делений кругов . . . . .                                     |
| § 59. Способ Брупса исследования ошибок диаметров кругов . . . . .                     |
| § 60. Способ Гейвеллинга исследования ошибок диаметров кругов . . . . .                |
| § 61. О коллимационной ошибке трубы . . . . .  |
| § 62. Влияние неправильной установки горизонтальной оси (оси вращения трубы) . . . . . |
| § 63. Влияние неправильной установки вертикальной оси (оси вращения алидады) . . . . . |

## Глава IX

## Измерение горизонтальных углов

|   |     |
|---|-----|
| § 64. Выгоднейшее время наблюдений горизонтальных направлений . . . . .   | 475 |
| § 65. Наблюдения световых сигналов и устройство гелиотропов и фонарей . . . . .   | 479 |
| § 66. Методика высокоточных угловых измерений . . . . .   | 485 |
| § 67. Измерение углов способом повторения . . . . .   | 493 |
| § 68. Способы направлений и круговых приемов . . . . .  | 497 |
| § 69. Измерение отдельных углов по способу Шрейбера . . . . .   | 506 |
| § 70. Измерение углов в особо неблагоприятных случаях — способ привязки<br>отдельных направлений к направлению на марку . . . . . | 520 |

## Глава X

## Приведение углов к центрам тригонометрических точек

|   |     |
|---|-----|
| § 71. Разные виды приведений и их элементы . . . . .  | 523 |
| § 72. Способы определения элементов приведений . . . . .                                      | 525 |
| § 73. Предварительное вычисление триангуляции; вычисление центрировок и<br>редукций . . . . . | 536 |

## Глава XI

Общие соображения по уравнительным вычислениям тригонометрической  
сети; уравнивание станций

|  |     |
|--|-----|
| § 74. Общие соображения . . . . .  | 543 |
| § 75. Вес функции уравновешенных элементов при посредственных наблюдениях . . . . .  | 553 |
| § 76. Уравнивание станции при произвольном порядке наблюдений . . . . .  | 559 |
| § 77. Упрощенные способы уравнивания станций; британский прием (видо-<br>измененный) . . . . .   | 559 |
| § 78. О выводе весов уравненных на станции (на пункте) направлений или<br>углов. Метод Гельмерта . . . . .   | 566 |
| § 79. Обработка наблюдений, исполненных в одной группе полных приемов . . . . .  | 573 |
| § 80. Применение формул § 76 к случаю наблюдений по обычному способу<br>Шрейбера; оценка точности измерений, исполненных этим способом . . . . .       | 585 |
| § 81. Некоторые случаи уравнивания станций, встречающиеся передко в произ-<br>водстве. Формулы Ф. Н. Красовского . . . . .                             | 590 |
| § 82. Установление программы наблюдений на пунктах базисной сети при выгод-<br>нейшем распределении весов; уравнивание станций в этом случае . . . . . | 597 |
|  | 603 |

## Глава XII

## Уравнивание триангуляции по методу условных наблюдений

|   |     |
|---|-----|
| § 83. Виды условных уравнений . . . . .   | 608 |
| § 84. Число условных уравнений . . . . .  | 627 |
| § 85. Замечания относительно составления условных уравнений . . . . .   | 629 |
| § 86. Допустимые размеры свободных членов в условных уравнениях тригоно-<br>метрической сети . . . . .  | 634 |
| § 87. Составление и решение нормальных уравнений коррелят . . . . .   | 639 |
| § 88. Двухгрупповое уравнивание (метод Крюгера) . . . . .   | 645 |
| § 89. Применение Крюгера метода двухгруппового уравнивания . . . . .  | 653 |
| § 90. Уравнивание центральной системы и геодезического четырехугольника . . . . .   | 658 |
| § 91. Дополнительные замечания по применению двухгруппового метода уравни-<br>вания (по Крюгеру). Вставка цепи между двумя заданными пунктами . . . . . | 667 |
| § 92. Уравнивание по методу Больца или по способу последовательного разло-<br>жения по свободным членам . . . . .                                       | 673 |
| § 93. Разложение Больца . . . . .   | 678 |
| § 94. Пример уравнивания по способу Больца . . . . .  | 684 |
| § 95. Видоизменение способа Больца, предложенное А. А. Изотовым . . . . .   | 688 |
| § 96. Уравнивание триангуляции по способу Бесселя . . . . .   | 693 |

**Г л а в а XIII****Уравнивание тригонометрической сети по методу посредственных  
(косвенных) наблюдений**

|        |   |
|--------|---|
| § 97.  | Общие замечания . . . . .   |
| § 98.  | Составление уравнений погрешностей . . . . .  |
| § 99.  | Составление редуцированных нормальных уравнений и их решение . . . . .  |
| § 100. | Правила Шрейбера . . . . .  |
| § 101. | Определение дополнительных пунктов; общие соображения . . . . .   |
| § 102. | Определение дополнительного пункта из многократной прямой засечки по методу условных наблюдений . . . . .       |
| § 103. | Определение дополнительного пункта из многократной прямой засечки по методу посредственных наблюдений . . . . . |
| § 104. | Графическое уравновешивание дополнительного пункта . . . . .  |
| § 105. | Определение дополнительного пункта обратной засечкой . . . . .  |
| § 106. | Заключение по вопросам уравнивания тригонометрических сетей; понятие о методе И. Ю. Пранис-Праневича . . . . .  |

**Г л а в а XIV****Нивелирование точное и высокой точности**

|        |  |
|--------|--|
| § 107. | Задачи высокоточного и точного нивелирования; общие схемы построения государственной нивелирной сети . . . . . |
| § 108. | Методы нивелирования высокой точности . . . . .  |
| § 109. | Знаки нивелирования высокой точности . . . . .   |
| § 110. | Инструменты точного нивелирования. Нивелиры . . . . .  |
| § 111. | Рейки высокоточного нивелирования и приборы для определения их длины . . . . .                                 |
| § 112. | Инструментальные ошибки нивелирования . . . . .  |
| § 113. | Ошибки нивелирования из-за недостатков установок . . . . .   |
| § 114. | Внешние причины ошибок нивелирования; действие рефракции . . . . .   |
| § 115. | Нивелирование по русско-швейцарскому (советскому) способу; поверки и исследования нивелира и реек . . . . .    |
| § 116. | Главные черты советских инструкций по нивелировкам; порядок наблюдений . . . . .                               |
| § 117. | Ортометрическая поправка нивелировки . . . . .   |
| § 118. | Оценка точности нивелировки . . . . .  |
| § 119. | Заключительные соображения по методам и аппаратуре высокоточного и точного нивелирования . . . . .             |

**Г л а в а XV****О тригонометрическом нивелировании**

|        |   |
|--------|---|
| § 120. | Измерение вертикальных углов . . . . .                                      |
| § 121. | Формулы тригонометрического нивелирования . . . . .                         |
| § 122. | О точности определения высот из тригонометрического нивелирования . . . . . |
| § 123. | Определение коэффициента земного преломления . . . . .                      |

---

**ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ**

| Страница | Строка    | Напечатано   | Следует читать                                       |
|----------|-----------|--|--|
| 61       | 14 сверху | $\left[ \frac{bf}{p} + 1 \right]$                    | $\left[ \frac{bf}{p} + 1 \right]^2$                  |
| 101      | 16 *      | Табл. 1  | Табл. 2  |
| 139      | 2 снизу   | $v_2 \Delta H_2 - h_2$                               | $v_2 - \Delta H_2 - h_2$                             |
| 174      | 24 "      | нос  | ног  |
| 199      | 18 "      | $\frac{1}{(\sqrt{2p_2 + p_1}) \sin \varphi},$        | $\frac{1}{(\sqrt{2p_2 + p_1}) \sin \varphi},$        |
| 202      | 5 сверху  | $\operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{v},$ | $\operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{v},$ |
| 376      | 1 ,       | $\frac{u}{18} \Delta.$                               | $\frac{u}{18} + \Delta.$                             |
| 455      | 5 снизу   | $M^2 = m^2 + 2\tau,$                                 | $M^2 = m^2 + 2\tau^2$                                |
| 466      | 19 ,      | (см. § 81)   | (см. § 79)   |
| 508      | 6 "       | (1,5),   | (1,5),   |
| 696      | 11 "      | $\left[ \frac{x\Sigma}{\sigma} \right] - ,$          | $\left[ \frac{x\Sigma}{\sigma} \right] - [aa],$      |
| 728      | 8 сверху  | $\frac{n-1}{2}$                                      | $\frac{n(n-1)}{2}$                                   |
| 732      | 12 ,      | $-x \sin T_s (T_s - T'_s)'' d_s \sin 1'' = 0$        | $-x \sin T_s + (T_s - T'_s)'' d_s \sin 1'' =$        |
| 806      | 16 ,      | $z + \frac{a_1 - 1}{s \sin 1''},$                    | $z + \frac{a_1 - i}{s \sin 1''},$                    |

Избранные сочинения. Ф. Н. Красовский, том III.