Tarea 4. Fundamentos de teoría de conjuntos

Fecha de entrega: 22-septiembre-2023

Parte 1: Conjuntos y subconjuntos.

a) Muestra que si $A\setminus B \subseteq C$ y $A \nsubseteq C$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$

Solución

Asumamos que $A\setminus B \subseteq C$ y además que $A \nsubseteq C$. Mostraremos que $A \cap B \neq \emptyset$ por contradicción.

Para esto, asumamos que $A \cap B = \emptyset$

1. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A\setminus B = A$, pues $(\forall x)\big((x \in A) \rightarrow (x \notin B)\big)$
2. Dado que $A\setminus B \subseteq C$ (suposición), y $A\setminus B = A$ (por 1) entonces $A \subseteq C$
3. Así, $A \subseteq C$ (por 2) y $A \nsubseteq C$ (suposición). Lo cual es una contradicción

Por tanto, $A \cap B \neq \emptyset$ ■

b) Asume que $A \subseteq B$ y $B \cap C = \emptyset$. Muestra que $A \subseteq B\setminus C$

Solución

Asumamos que $A \subseteq B$ y $B \cap C = \emptyset$. Mostraremos que $A \subseteq B\setminus C$

1. Suponga que $x \in A$.
2. Dado que $A \subseteq B$ (suposición), entonces $x \in B$
3. Como $B \cap C = \emptyset$ (suposición) y $x \in B$ (por 2), entonces $x \notin C$ (por ser conjuntos ajenos)
4. Entonces $x \in B$ (por 1) y $x \notin C$ (por 2)
5. Entonces $x \in B/C$ (por 4 y definición de diferencia)

Por tanto, $A \subseteq B\setminus C$ ■

c) Muestra que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ y $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Mostraremos que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Usaremos la estrategia de si y sólo si

1.	$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cap C)$	Por definición de intersección
2.	$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \in C)]$	Por definición de intersección
3.	$\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (x \in C)$	Por asociatividad de la conjunción
4.	$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \in C)$	Por definición de intersección
5.	$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$	Por definición de intersección

Por tanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ■

Para la segunda parte de la demostración, podemos seguir la misma demostración, usando la definición de la unión y la asociatividad de la disyunción

d) Muestra que $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \backslash (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A})$

Solución

Para mostrar la igualdad de conjuntos, utilizaremos la estrategia de doble contención.

Asumamos $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Eso es equivalente a:

1. $x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$ Por definición de diferencia,
2. $[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge \neg(x \in A \cap B)$ Por definición de unión y doble negación
3. $[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge \neg[(x \in A) \wedge (x \in B)]$ Por definición de intersección
4. $[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)]$ Por leyes de De Morgan
5. $\big[(x \in A) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)]\big] \vee \big[(x \in B) \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)]\big]$ Por ley distributiva
6. $[(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin A)]$ Por ley distributiva y ley de contradicción
7. $(x \in A \backslash B) \vee (x \in B \backslash A)$ Por definición de diferencia
8. $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ Por definición de unión

Dado que se da la equivalencia en cada renglón, concluimos que:

$$x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Por tanto, $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ ■

e) Muestra que si $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$, entonces $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}$

Solución

Asumamos que $A \backslash B \subseteq C$. Entonces debemos demostrar que $A \backslash C \subseteq B$. Para esto seguiremos la siguiente estrategia:

1. Supongamos que $x \in A \backslash C$
2. Entonces, $x \in A$ y $x \notin C$ Por definición de diferencia
3. Como $x \notin C$, podemos concluir que $x \notin A \backslash B$ Por definición de subconjuntos
4. $x \notin A \backslash B$ es equivalente a que $x \notin A$ o $x \in B$ Por negación de la definición de A\B
5. Entonces $x \notin A\ o\ x \in B$, y además $x \in A$ Por 2 y 4
6. Dado que $x \notin A$ es falso (pues $x \in A$), concluimos que $x \in B$ Por definición de disyunción

Por tanto, $A \backslash C \subseteq B$ ■

Parte 2: Conjunto potencia

a) **Considera $\boldsymbol{A = \{2,3\}}$ y $\boldsymbol{B = \{3,a\}}$. Encuentra $\boldsymbol{\mathcal{P}(A \cup B)}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)}$**

Solución

Recordemos que el conjunto potencia, es el conjunto de subconjuntos. Por tanto, tenemos:

1. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{2,3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$
2. $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{3,a\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{a\}, \{3,a\}\}$

Entonces $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{a\}, \{3,a\}\}$

Calculamos ahora $A \cup B = \{2,3,a\}$

Entonces $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{a\}, \{2,3\}, \{2,a\}, \{3,a\}, \{2,3,a\}\}$

Nota que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, pero $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$

b) **Encuentra $\boldsymbol{\mathcal{P}(\emptyset)}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))}$**

Solución

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (Recordemos que el único subconjunto del conjunto vacío es el mismo)
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (No olvidar que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$)

c) **Muestra que $\boldsymbol{A \subseteq B}$ si y sólo si $\boldsymbol{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$**

Solución

Dado que debemos mostrar un sí y sólo si, debemos asegurarnos que se dan las dos direcciones de la implicación: $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ y además $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

($\Rightarrow$) Iniciemos suponiendo que $A \subseteq B$. Debemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Para ello hacemos lo siguiente:

1. Supongamos que $X \in \mathcal{P}(A)$
2. Si X es elemento de $\mathcal{P}(A)$, entonces $X \subseteq A$ — Por definición de conjunto potencia
3. Si $X \subseteq A$, entonces $X \subseteq B$ (pues $A \subseteq B$) — Por transitividad de la contención
4. Como $X \subseteq B$, entonces $X \in \mathcal{P}(B)$ — Por definición de conjunto potencia
5. Por (1) y (4) concluimos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Entonces, $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ $\star$

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Debemos mostrar que $A \subseteq B$. La estrategia para mostrarlo es:

1. Asumamos que $x \in A$
2. Definamos $X = \{x\}$. Podemos decir que $X \subseteq A$ — Por definición de subconjuntos
3. Ya que $X \subseteq A$, concluimos que $X \in \mathcal{P}(A)$ — Por definición de conjunto potencia
4. Como $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $X \in \mathcal{P}(B)$ — Por definición de subconjuntos
5. Si $X \in \mathcal{P}(B)$, entonces $X \subseteq B$ — Por definición de conjunto potencia
6. Como $X = \{x\}$, entonces $x \in B$ — Por definición de subconjuntos
7. Por 1 y por 6, concluimos que $A \subseteq B$

Entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$ $\star\star$

Por tanto, por $\star$ y $\star\star$ concluimos que

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \blacksquare$$

d) Muestra que $\boldsymbol{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)}$

Solución

Usaremos la estrategia vista en clase para mostrar contención:

Tomaremos un elemento de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ y mostraremos que también es elemento de $\mathcal{P}(A \cup B)$

1. Supongamos $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$	
2. Significa que $X \in \mathcal{P}(A)$ o $X \in \mathcal{P}(B)$	Por definición de la unión
3. Es decir, $X \subseteq A$ o $X \subseteq B$	Por definición de conjunto potencia
4. Si $X \subseteq A$ o $X \subseteq B$, entonces $X \subseteq A \cup B$	Por definición de contención
5. Entonces, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$	Por definición de conjunto potencia

Por (1) y (2) concluimos que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ $\blacksquare$

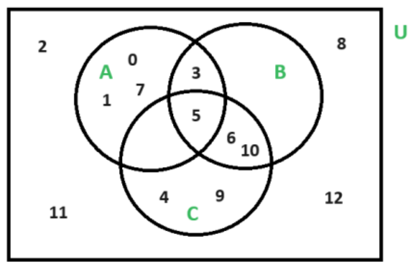
Parte 3: Diagramas de Venn

Considera los siguientes conjuntos $U = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}; A = \{0,1,3,5,7\}; B = \{3,5,6,10\}; C = \{4,5,6,9,10\}$. Determina los siguientes conjuntos y represéntalos en un diagrama de Venn:

a) $A \cap (B \backslash C)$
b) $A \cap (B \backslash C)^c$ Nota: Para cualquier conjunto $A \subseteq U$, considera que $A^c = U \backslash A$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $(A \cap C)^c \cup (A \cap B)$
e) $(A \backslash B) \backslash C$

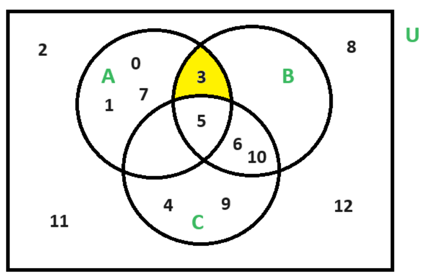
Solución

Primero debemos de construir el diagrama de los conjuntos A, B, C y U, además de acomodar cada uno de los elementos en la región que corresponda. El diagrama será el siguiente:

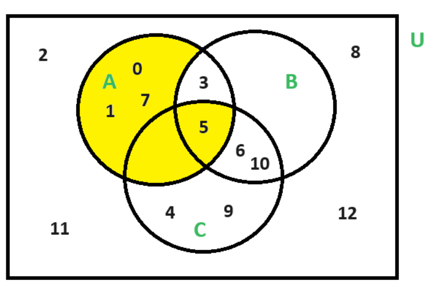


Ahora, mostraremos el diagrama respectivo a cada operación de conjuntos, coloreando el área correspondiente y colocando al lado de la operación, el conjunto resultante:

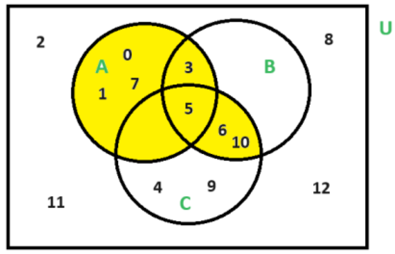
a) $A \cap (B \backslash C) = \{3\}$



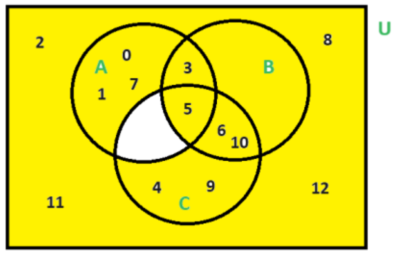
b) $A \cap (B \backslash C)^c = \{0,1,3,7\}$



c) $A \cup (B \cap C) = \{0,1,3,5,6,7,10\}$



d) $(A \cap C)^c \cup (A \cap B) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$



e) $(A \backslash B) \backslash C = \{0,1,7\}$