Tarea 5. Axiomas de conjuntos

Fecha de entrega: 29-septiembre-2023

Parte 1: Sean A, B, C, U conjuntos. Prueba los siguientes teoremas

a) Existe una x tal que $x \notin A$.
Sugerencia: Utiliza el método de contradicción para demostrar el teorema

Solución

Asumamos que existe un conjunto A tal que para todo x entonces $x \in A$.

Por otra parte, consideremos una propiedad $P(x) = x \notin x$. De esta forma, por el axioma esquema de comprensión, podemos garantizar la existencia de un conjunto $B = \{x \in A: x \notin x\}$

Ya que $B \in A$, entonces podemos revisar si $B \in B$ o si $B \notin B$.

Si $B \in B$, entonces satisface $P(x)$, es decir, $B \notin B$. Lo cual es una contradicción

Si $B \notin B$, entonces cumple $P(x)$ y dado que pertenece a A, entonces $B \in B$. Esto es otra contradicción.

Dado que no podemos definir si $B \in B$ o si $B \notin B$ sin caer en contradicción, concluimos que no es posible definir un conjunto universal.

Noten que esto es una extensión al teorema que afirma la no existencia de un conjunto universal que contenga a todos los conjuntos, quitando la restricción de que los elementos del conjunto universal sean conjuntos a cualquier elemento.

b) Si $B \subseteq C$, entonces $U \backslash C \subseteq U \backslash B$
Sugerencia: Muestra que todo elemento de $U \backslash C$ está en $U \backslash B$

Solución

Consideremos que $B \subseteq C$. Entonces, tomemos un elemento de $U \backslash C$ y mostremos que estará en $U \backslash B$.

1.	Sea $x \in U \backslash C$	Suposición
2.	Entonces $x \in U \land x \notin C$	Por definición de diferencia de conjuntos
3.	Si $x \notin C$ entonces $x \notin B$	Dado que $B \subseteq C$
4.	Entonces $x \in U \land x \notin B$	Por (2) y (3)
5.	Entonces $x \in U \backslash B$	Por definición de diferencia de conjuntos

Así, si asumimos que $x \in U \backslash C$ entonces $x \in U \backslash B$. Por tanto, $U \backslash C \subseteq U \backslash B$ ■

c) Sean $\mathcal{F}$ y A conjuntos. Suponga que $C \subseteq A$ para todo $C \in \mathcal{F}$. Entonces $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A$
Sugerencia: Muestra que los elementos de $\bigcup \mathcal{F}$ pertenecen a A

Solución

Asumamos que $C \subseteq A$, para cada $C \in \mathcal{F}$. Mostraremos que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq A$ tomando un elemento cualquiera de $\bigcup \mathcal{F}$ y mostrando que también está en A.

1.	Sea $x \in \bigcup \mathcal{F}$	Suposición

2. Entonces, $x \in C$ para algún $C \in \mathcal{F}$ — Por la definición de unión de familias de conjuntos
3. Entonces, $x \in A$ — Pues para cada $C \in F$, tenemos que $C \subseteq A$

De esta forma, si $x \in \bigcup\mathcal{F}$ entonces $x \in A$. Por tanto, $\bigcup\mathcal{F} \subseteq A$. ■

d) Sea A un conjunto. Entonces $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$
Sugerencia: Utiliza la definición de $\bigcup A$ y de conjunto potencia para ver quienes son los elementos de $\mathcal{P}(\bigcup A)$

Solución

Para mostrar la contención entre los conjuntos A y $\mathcal{P}(\bigcup A)$, primero especifiquemos los elementos de $\mathcal{P}(\bigcup A)$ y luego tomaremos un elemento cualquiera de A y verificaremos que también se encuentra en $\mathcal{P}(\bigcup A)$.

Por la definición de la unión, $\bigcup A = \{x: x \in X \wedge\ X \in A\}$. Parafraseando la definición, la unión es el conjunto de los elementos de cada conjunto perteneciente a A.

1. Ahora, sea $X \in A$. X es un conjunto, y sus elementos pertenecen a la unión. Es decir, $X \subseteq \bigcup A$.
2. Por la definición de conjunto potencia, $\mathcal{P}(\bigcup A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\bigcup A$. Entonces, si $X \subseteq \bigcup A$ entonces $x \in \mathcal{P}(\bigcup A)$.

De esta forma por (1) y por (2) concluimos que si $x \in A$ entonces $X \in \mathcal{P}(\bigcup A)$. Por lo tanto:

$$A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A) \ ■$$

Parte 2: Resuelve los siguientes ejercicios:

a) Indica cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. En cada caso justifica tu elección:
   a. $A = \{A\}$
   b. $\{a, b\} = \{\{a\}, \{b\}\}$
   c. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Solución;

Consideremos dos conjuntos A y $\{A\}$. El conjunto $\{A\}$ tiene un elemento, que es A. Además, sabemos que un conjunto no puede pertenecerse a sí mismo, por lo que $A \notin A$. Así, concluimos que $A \neq \{A\}$, por lo tanto (a) es FALSA

Ahora consideremos el conjunto $\{a, b\}$. Vemos que tiene dos elementos, a y b. Por otra parte, el conjunto $\{\{a\}, \{b\}\}$ también tiene dos elementos, pero estos son $\{a\}$ y $\{b\}$. Por la conclusión del inciso anterior $a \neq \{a\}$ y $b \neq \{b\}$ y con ello podemos ver que, $\{a, b\} \neq \{\{a\}, \{b\}\}$. Por lo tanto (b) es FALSA.

Por último, el conjunto $\{\emptyset\}$ tiene un solo elemento, que es el conjunto vacío, es decir, $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Por lo tanto, (c) es VERDADERA.

b) Responde las siguientes preguntas sobre subconjuntos:
   a. ¿Es cierto o falso que todo conjunto contiene al menos dos subconjuntos?
   b. ¿Qué conjunto contiene como máximo cuatro subconjuntos?

c. ¿Cuántos subconjuntos puede contener un conjunto de tres elementos y cuántos de n elementos?
d. ¿Puede un conjunto contener un número impar de subconjuntos?

Solución

Para cualquier conjunto X, siempre se cumple que $\emptyset \subseteq X$ y $X \subseteq X$. Por lo que, cualquier conjunto $X \neq \emptyset$, siempre tendrá al menos dos subconjuntos (el conjunto vacío y el mismo). Por otro lado, si $X = \emptyset$, entonces solo tendrá un subconjunto. Por lo tanto (a) es cierta solo para $X \neq \emptyset$

Ahora, para identificar qué conjunto contiene como máximo cuatro subconjuntos recordemos que el número de subconjuntos está en función del número de elementos del conjunto. Si un conjunto tiene n elementos, entonces tendrá 2^n subconjuntos. Así, el conjunto que tiene como máximo 4 subconjuntos, es aquel que tiene como máximo 2 elementos.

Siguiendo la función anterior, un conjunto de tres elementos tendrá $2^3 = 8$ subconjuntos, y un conjunto de n elementos tendrá 2^n subconjuntos.

Por último, sabiendo que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos, es imposible que un conjunto tenga un número impar de subconjuntos.

c) Indica si los siguientes pares de conjuntos son iguales o no
   a. $A = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 5\}$ $\quad B = \{1,2,3,4,5\}$
   b. $A = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ $\quad B = \{1,2\}$
   c. $A = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ múltiplo\ de\ 3\ y\ x \leq 24\}$
      $B = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ múltiplo\ de\ 6\ y\ x \leq 24\}$

Para (a), los elementos del conjunto A son $\{1,2,3,4,5\}$. Por lo tanto $A = B$

Para (b), los elementos del conjunto A son $\{0,1,2\}$. Como $\{0\} \notin B$ entonces $A \neq B$

Para (c), los elementos del conjunto A son $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ y los elementos del conjunto B son $\{6,12,18,24\}$. Como A y B no tienen los mismos elementos, concluimos que $A \neq B$

Parte 3: Diagramas de Venn

Se realiza una encuesta para determinar cuál lenguaje de programación, entre C y Python, es más popular. Se entrevistaron a 1000 programadores y los resultados fueron los siguientes:

a. 500 programadores utilizan C
b. 600 programadores utilizan Python
c. 150 no utilizan C ni Python

Determina qué porcentaje de personas utilizan solo C, qué porcentaje de personas utilizan solo Python y qué porcentaje de personas utilizan ambos lenguajes.

Justifica tu respuesta. Sugerencia: Utiliza diagramas de Venn.

Solución

Hay 150 alumnos que no utilizan ni C ni Python. Entonces hay 850 alumnos que utilizan C o Python o ambos. Sea N_P el número de programadores que prefieren Python, sea N_C el número de programadores que prefieren C y sea $N_P N_C$ el número de programadores que prefieren ambos lenguajes. Entonces se debe de cumplir la siguiente igualdad:

$$N_P + N_C - N_P N_C = 850$$

Reemplazando los valores que conocemos tendremos:

$$600 + 500 - N_P N_C = 850$$
$$N_P N_C = 1100 - 850 = 250$$

Por tanto, hay 250 alumnos que prefieren Python y C. Entonces, solo debemos encontrar los programadores que solo prefieren Python y los que solo prefieren C. Los calculamos como sigue:

$$N_P = 600 - 250 = 350$$
$$N_C = 500 - 250 = 250$$

El diagrama de Venn resultante se ve de la siguiente manera: