Tarea 3. Fundamentos de teoría de conjuntos

Fecha de entrega: 15-septiembre-2023

Parte 1: Elementos base de teoría de conjuntos.

1. Obtén los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : 0 < \mathrm{x}^2 < 24\}$
b) $B = \{y \in \mathbb{Z} : y|12\}$ * Considera que $a|b$ significa que la división de b entre a es exacta
c) $C = \{y \in \mathbb{N} : 4|z\}$
d) $D = \{y \in \mathbb{R}^- : 1 \leq y^2 \leq 4\}$

Solución

a) $\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : 0 < \mathrm{x}^2 < 24\} = \{1,2,3,4\}$
b) $B = \{y \in \mathbb{Z} : y|12\} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
c) $C = \{y \in \mathbb{N} : 4|z\} = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$
d) $D = \{y \in \mathbb{R}^- : 1 \leq y^2 \leq 4\} = [-2, -1]$

2. Sean $A, B\ y\ C$ los conjuntos del ejercicio 1. Evalúa los siguientes conjuntos: $A \cup B$, $A \cap C$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ y $C \backslash (A \cup B)$

Solución

a. $A \cup B = \{x: x \in A \vee\ x \in B\} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\} = B$
b. $A \cap C = \{x: x \in A \wedge\ x \in B\} = \{4\}$
c. $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge\ x \notin B\} = \{1,2,3\}$
d. $B \setminus A = \{x: x \in B \wedge\ x \notin A\} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 12\}$
e. $C \backslash (A \cup B) = \{x: x \in C \wedge x \notin A \cup B\} = \{8, 16, 20, \dots\}$

3. Encuentra dos elementos en el conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Explica por qué $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{R} = \emptyset$

Solución

a) Si a los números reales, le quitamos los números racionales, obtendremos los números irracionales. Así, dos elementos de este conjunto son π y e
b) La razón de que $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{R}$ sea el conjunto vacío, es debido a que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. De esta forma, al quitar del conjunto $\mathbb{Q}$ todos los elementos que estén en $\mathbb{R}$ estaremos quitando todos los elementos, y el conjunto resultante no tendrá elementos.

Parte 2: Lógica proposicional

1. Usa tablas de verdad para mostrar que $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

Solución

La tabla de verdad es la siguiente:

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\boldsymbol{\neg(P \rightarrow Q)}$	$\boldsymbol{(P \wedge \neg Q)}$
V	V	F	V	**F**	**F**
V	F	V	F	**V**	**V**

F	V	F	V	**F**	**F**
F	F	V	V	**F**	**F**

Es posible ver que los valores de verdad de $\neg(P \rightarrow Q)$ y de $(P \wedge \neg Q)$ son idénticos para cada una de las asignaciones. Por tanto, concluimos que son lógicamente equivalentes.

2. Usa tablas de verdad para mostrar que $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$

Solución

La tabla de verdad es la siguiente:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$Q \wedge R$	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Dado que los valores de verdad de ambas proposiciones son iguales para cada asignación, concluimos que $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$

3. Usa leyes lógicas para mostrar que $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$

Solución

Para mostrar equivalencia lógica con leyes lógicas, debemos utilizarlas en serie, remplazando proposiciones lógicamente equivalentes hasta llegar de una a otra proposición. La demostración es la siguiente:

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$	Por la ley condicional (CL)
	$\Leftrightarrow$	$\neg P \vee (Q \wedge R)$	Por la ley distributiva
	$\Leftrightarrow$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	Por la ley condicional (CL)

Por tanto, queda demostrado que $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ es lógicamente equivalente a $P \rightarrow (Q \wedge R)$

4. Muestra que $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ y $P \rightarrow (Q \wedge R)$ no son lógicamente equivalentes

Solución

Para mostrar que dos proposiciones no son lógicamente equivalentes, debemos encontrar al menos una asignación en la cual sus valores de verdad sean diferentes. Esto lo podemos hacer por tanteo, o utilizando una tabla de verdad. En este caso, usaremos la tabla de verdad, sin embargo, a medida que la práctica aumente, seremos capaces de encontrar la asignación sin necesidad de las tablas.

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \wedge R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V

V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V

Podemos ver que tenemos 4 asignaciones, de las 8 posibles, en las cuales las proposiciones $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ y $P \rightarrow (Q \wedge R)$ tienen valores de verdad diferentes. Por lo tanto, las proposiciones $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ y $P \rightarrow (Q \wedge R)$ no son lógicamente equivalentes.