Tarea 6. Operaciones de conjuntos

Fecha de entrega: 6-octubre-2023

Parte 1: Realiza las siguientes operaciones de conjuntos.

Considera los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 5\}, B = \{x \in \mathbb{N} : x\ es\ múltiplo\ de\ 3\ y\ x \leq 15\}, C = \{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 15\}$$

a) $A \times (B \cup C)$
b) $(A \times B) \cup (A \times C)$
c) $A \times (B \cap C)$
d) $(A \times B) \cap (A \times C)$

Solución

Primero obtenemos los elementos de cada conjunto:

$$A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{3,6,9,12,15\}, C = \{10,11,12,13,14,15\}$$

Ahora calculamos algunas operaciones entre conjuntos que utilizaremos:

$$\begin{aligned}
B \cup C &= \{3,6,9,10,11,12,13,14,15\} \\
A \times B &= \{(1,3), (1,6), (1,9), (1,12), (1,15), \\
&\quad (2,3), (2,6), (2,9), (2,12), (2,15), \\
&\quad (3,3), (3,6), (3,9), (3,12), (3,15), \\
&\quad (4,3), (4,6), (4,9), (4,12), (4,15), \\
&\quad (5,3), (5,6), (5,9), (5,12), (5,15)\} \\
A \times C &= \{(1,10), (1,11), (1,12), (1,13), (1,14), (1,15), \\
&\quad (2,10), (2,11), (2,12), (2,13), (2,14), (2,15), \\
&\quad (3,10), (3,11), (3,12), (3,13), (3,14), (3,15), \\
&\quad (4,10), (4,11), (4,12), (4,13), (4,14), (4,15) \\
&\quad (5,10), (5,11), (5,12), (5,13), (5,14), (5,15)\} \\
B \cap C &= \{12,15\}
\end{aligned}$$

Con estos conjuntos, obtenemos las operaciones solicitadas:

a) $A \times (B \cup C) = \left\{\begin{matrix} (1,3), (1,6), (1,9), (1,10), (1,11), (1,12), (1,13), (1,14), (1,15), \\ (2,3), (2,6), (2,9), (2,10), (2,11), (2,12), (2,13), (2,14), (2,15), \\ (3,3), (3,6), (3,9), (3,10), (3,11), (3,12), (3,13), (3,14), (3,15), \\ (4,3), (4,6), (4,9), (4,10), (4,11), (4,12), (4,13), (4,14), (4,15), \\ (5,3), (5,6), (5,9), (5,10), (5,11), (5,12), (5,13), (5,14), (5,15) \end{matrix}\right\}$

b) $(A \times B) \cup (A \times C) = \left\{\begin{matrix} (1,3), (1,6), (1,9), (1,10), (1,11), (1,12), (1,13), (1,14), (1,15), \\ (2,3), (2,6), (2,9), (2,10), (2,11), (2,12), (2,13), (2,14), (2,15), \\ (3,3), (3,6), (3,9), (3,10), (3,11), (3,12), (3,13), (3,14), (3,15), \\ (4,3), (4,6), (4,9), (4,10), (4,11), (4,12), (4,13), (4,14), (4,15), \\ (5,3), (5,6), (5,9), (5,10), (5,11), (5,12), (5,13), (5,14), (5,15) \end{matrix}\right\}$

c) $A \times (B \cap C) = \left\{\begin{matrix} (1,12), (2,12), (3,12), (4,12), (5,12) \\ (1,15), (2,15), (3,15), (4,15), (5,15) \end{matrix}\right\}$

d) $(A \times B) \cap (A \times C) = \left\{\begin{matrix} (1,12), (2,12), (3,12), (4,12), (5,12) \\ (1,15), (2,15), (3,15), (4,15), (5,15) \end{matrix}\right\}$

Parte 2: Resuelve los siguientes ejercicios, justificando tu respuesta:

a) Prueba que $(a,b) \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\})$
b) Demuestra que $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c) Considera A, B, C tres conjuntos. Responde si es verdadero o falso que el producto cartesiano es asociativo. Es decir, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. Justifica tu respuesta

Solución

a) Para probar que $(a,b) \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\})$ realizamos lo siguiente:
Sabemos que por definición $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Además, el conjunto potencia de $\{a,b\}$ es $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Entonces es fácil ver que los elementos de (a,b), es decir, $\{a\}$ y $\{a,b\}$, son elementos de $\mathcal{P}(\{a,b\})$. Por tanto, $(a,b) \subseteq \mathcal{P}(\{a,b\})$

b) Para demostrar que $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ utilizaremos la estrategia del si y sólo si:

1. $(x,y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow [x \in (A \cap B)] \wedge (y \in C)$ Por def. de producto cartesiano
2. $\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (y \in C)$ Por def. de intersección
3. $\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (x \in C)]$ Por taut.
4. $\Leftrightarrow [(x,y) \in A \times C] \wedge [(x,y) \in B \times C]$ Por def. de producto cart.
5. $\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ Por def. de intersección

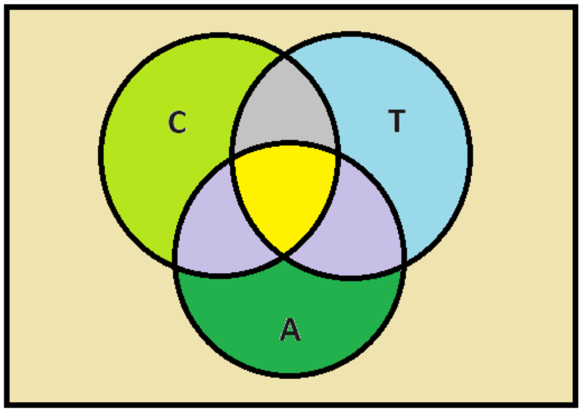
c) Por último, el producto cartesiano no es asociativo. Para verlo, es suficiente tomar tres conjuntos y verificar que no cumplen la igualdad. Entonces, sean $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$
Entonces tenemos que:
$$A \times B = \{(1,2)\} \quad y \quad B \times C = \{(2,3)\}$$
Y con ello podemos obtener:
$$(A \times B) \times C = \{((1,2),3)\}$$
$$A \times (B \times C) = \{(1,(2,3))\}$$
Ahora solo basta ver que el par ordenado $((1,2),3)$ es diferente al par ordenado $(1,(2,3))$.
Para eso, utilizamos la definición de par ordenado:
$$((1,2),3) = \{\{(1,2)\},\{(1,2),3\}\}$$
$$(1,(2,3)) = \{\{1\},\{1,(2,3)\}\}$$
Para ver que son conjuntos diferentes, basta encontrar al menos un elemento que esté en un conjunto y no en el otro. Esto es fácil de ver, pues $\{1\} \in (1,(2,3))$ pero $\{1\} \notin ((1,2),3)$.

Parte 3: Responde de forma clara cada ejercicio

a) Una encuesta realizada a un grupo de empleados reveló que 277 tenían casa propia; 233 poseían automóvil; 405 televisor; 165 automóvil y televisor; 120 automóvil y casa; 190, casa y televisor y 105 tenían casa, automóvil y televisor.
a. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
b. ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?
c. ¿Cuántas personas tienen solamente casa y televisor?

Solución.

Construiremos un diagrama de Venn para responder las preguntas. Para ello identificaremos cuántos individuos hay en cada región. Tenemos tres conjuntos: C: personas con casa propia, A: Personas con automóvil y T: personas con televisión. El diagrama de Venn tendrá la siguiente forma:



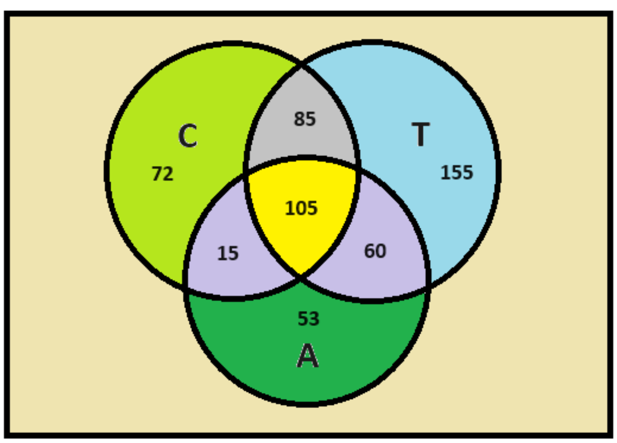
Denotemos el número de elementos dentro de un conjunto como |·|. Entonces, los datos que tenemos son:

$|C| = 277, |A| = 233 \;\; |T| = 405, |A \cap T| = 165, |A \cap C| = 120, |C \cap T| = 190,$
$|C \cap A \cap T| = 105$

Las regiones faltantes son:

personas con casa propia y televisor, pero sin automóvil = $|C \cap T| - |C \cap A \cap T| = 85$
personas con automóvil y televisor, pero sin casa propia = $|A \cap T| - |C \cap A \cap T| = 60$
personas con automóvil y casa propia, pero sin televisor = $|A \cap C| - |C \cap A \cap T| = 15$
personas con únicamente automóvil = $|A| - |A \cap C \cap T^c| - |A \cap T \cap C^c| - |C \cap A \cap T| = 53$
personas con únicamente televisor = $|T| - |T \cap C \cap A^c| - |T \cap A \cap C^c| - |C \cap A \cap T| = 155$
personas con únicamente casa propia = $|C| - |C \cap T \cap A^c| - |C \cap A \cap T^c| - |C \cap A \cap T| = 72$

De esta forma, el diagrama de Venn resultante será:



Entonces, podemos responder a las preguntas planteadas:

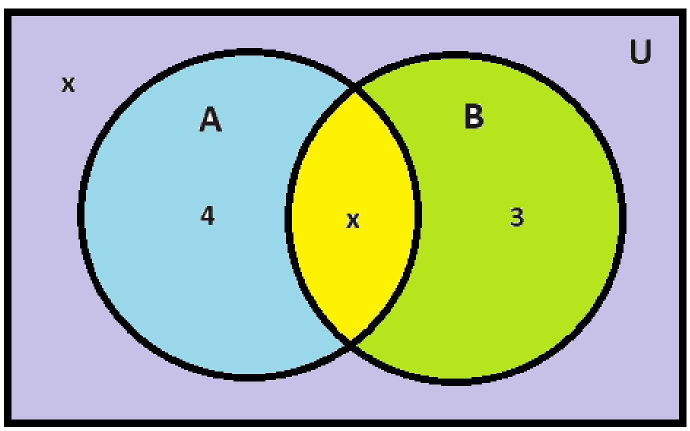
a. ¿Cuántas personas fueron encuestadas? R = 545 (todos los individuos tienen al menos uno de los tres artículos)

b. ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia? R = 72
c. ¿Cuántas personas tienen solamente casa y televisor? R = 85

b) Se realizó una encuesta a 11 personas, sobre sus preferencias por dos tipos de productos A y B. Obteniéndose lo siguientes resultados: El número de personas que prefirieron uno solo de los productos fueron 7. El número de personas que prefirieron ambos productos fue igual al número de personas que no prefirió ninguno de los dos productos. El número de personas que no prefieren el producto A y prefirieron el producto B fueron 3. Se desea saber:
a. ¿Cuántas personas prefieren el producto A?
b. ¿Cuántas personas prefieren el producto B solamente?
c. ¿Cuántas personas prefieren ambos productos?

Solución

Con los datos del problema, podemos identificar dos conjuntos: A: Personas que prefieren el producto A, y B: Personas que prefieren el producto B. Además, con la información que nos proporciona el problema, podemos construir el siguiente diagrama de Venn:



En el diagrama anterior, identificamos que hay 3 personas que prefieren B pero no A, y dado que hay 7 personas que prefieren uno solo de los productos, entonces habrá 4 que prefieren A pero no B. Además, todas las regiones deben de contener 11 personas, por lo cual se debe de cumplir que:

$$4 + x + 3 + x = 11$$

Por lo cual, $x = 2$. Es decir, el número de personas que prefieren ambos productos y el número de personas que no prefieren ni uno ni otro es igual a 2. Con esto, podemos responder las preguntas:

a. ¿Cuántas personas prefieren el producto A? R = 6
b. ¿Cuántas personas prefieren el producto B solamente? R = 3
c. ¿Cuántas personas prefieren ambos productos? R = 2