p.16

- Evaluating $\log \sum_{\mathbf{z}} p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \theta)$ can be intractable. Suppose we have 30 binary latent features, $\mathbf{z} \in \{0, 1\}^{30}$. Evaluating $\sum_{\mathbf{z}} p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \theta)$ involves a sum with 2^{30} terms. For continuous variables, $\log \int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \theta) d\mathbf{z}$ is often intractable.

$\sum_z p(x, z; \theta) = \sum_z [p(x|z;\theta)p(z)]$ 이런 식에 의해 joint distribution을 구할 수 있습니다.

$p(x|z;\theta)$

likelihood는 미리 정한 모델에 의해서 계산할 수 있습니다,
gaussian mixture model의 경우, z의 값(어떤 component에 속하느냐)에 따라 mean과 variance를 정해 얻을 수 있습니다.
linear gaussian model의 경우, 트레이닝 가능한 weight와 bias로 z를 linear transform하여 구한 mean과, 트레이닝 가능한 variance 값에 의해서 계산할 수 있습니다.
neural network model(VAE)의 경우, bernoulli나 gaussian의 파라메터를 네트워크를 통해 구하여 계산할 수 있습니다.

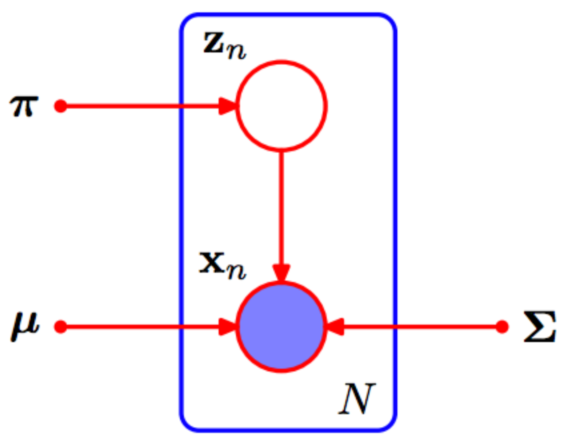
$p(z;\theta)$

prior도 미리 정한 모델에 의해 계산됩니다.
gaussian mixture model의 경우,
categorical distribution으로 표현되며 해당 parameter들은 theta안에 포함되고 트레이닝에 의해 바뀝니다.
linear gaussian model의 경우,
normal distribution으로 표현되며, 보통 N(0, I)로 결정하고 mean과 variance가 트레이닝에 의해 바뀌지 않습니다.
neural network model의 경우(VAE),
normal distribution으로 표현되며, 보통 N(0, I)로 결정하고 mean과 variance가 트레이닝에 의해 바뀌지 않습니다.

z를 marginalize하는 계산이 불가능한(intractable) 경우는 z의 차원이 매우 큰 경우 예를 들어 30차원인 경우, z가 0또는 1의 값을 가질 수 있는 binomial random variables이더라도 2^30가지의 수 만큼 summation을 해야하므로 실질적으로 불가능하다고 말하는 겁니다.

또는 z가 continuous variables인 경우, linear gaussian model처럼 적분을 closed form으로 구할 수 있는 경우도 있지만,
(Pattern Recognition and Machine Learning, p.93 참고)
p(x|z)가 non-linear로 표현되는 neural-network의 경우 쉽게 계산할 수 없으므로 intractable하다고 합니다.

Gaussian Mixture Model



Prior : categorical

$$p(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{z_k}.$$

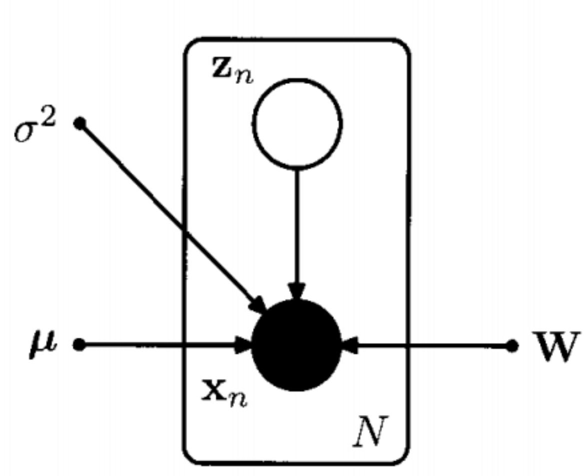
Likelihood : Gaussian

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^{K} \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)^{z_k}$$

Maginal likelihood : Gaussian Mixture

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k).$$

Linear Gaussian Model (probabilistic PCA)



Prior : Gaussian

$$p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}|\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Likelihood : Gaussian

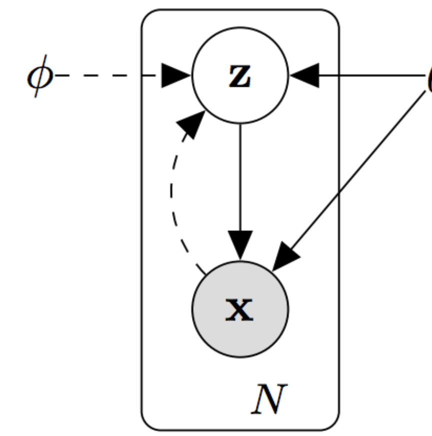
$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{W}\mathbf{z} + \boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I})$$

Marginal likelihood : Gaussian

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \sigma^2\mathbf{I}$$

Variational Auto-Encoder



Prior : Gaussian

$$p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}|\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Likelihood : Gaussian or bernoulli

$$p(x\,|\,z) = N(x\,|\,\mu(z), \sigma(z))$$
$$or\ B(p_1(z), p_2(z), \cdots, p_N(z))$$
$$\mu, \sigma, p_n\ are\ neural\ network\ functions$$

Marginal likelihood : Intractable

$$p(x) = ???$$