

# 重力与固体潮

第九讲 重力异常反演

陈涛

地球物理学院  
中国石油大学（北京）



# 课前测试

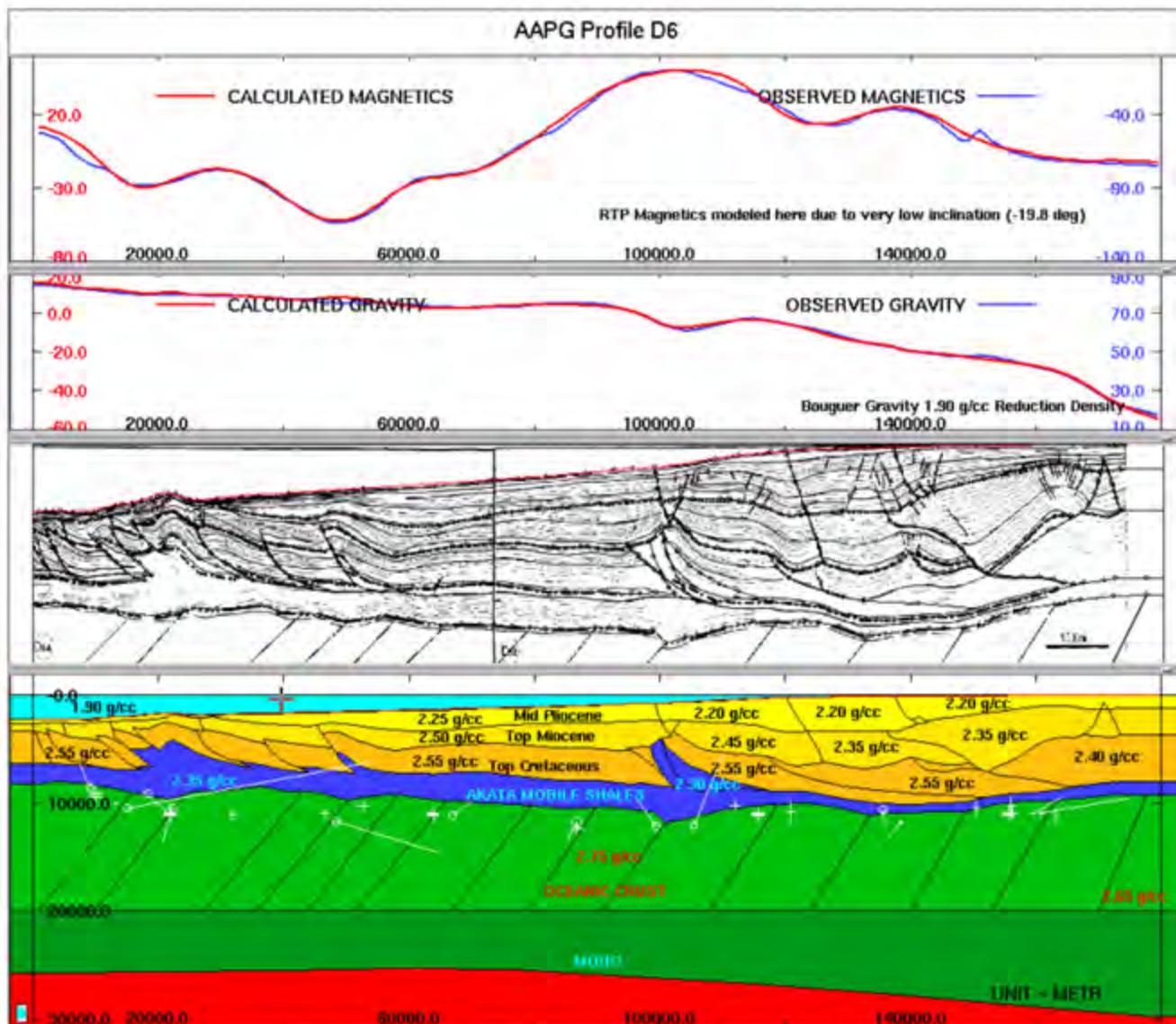
□ 向上延拓可以应用的场景

□ 场分离的作用



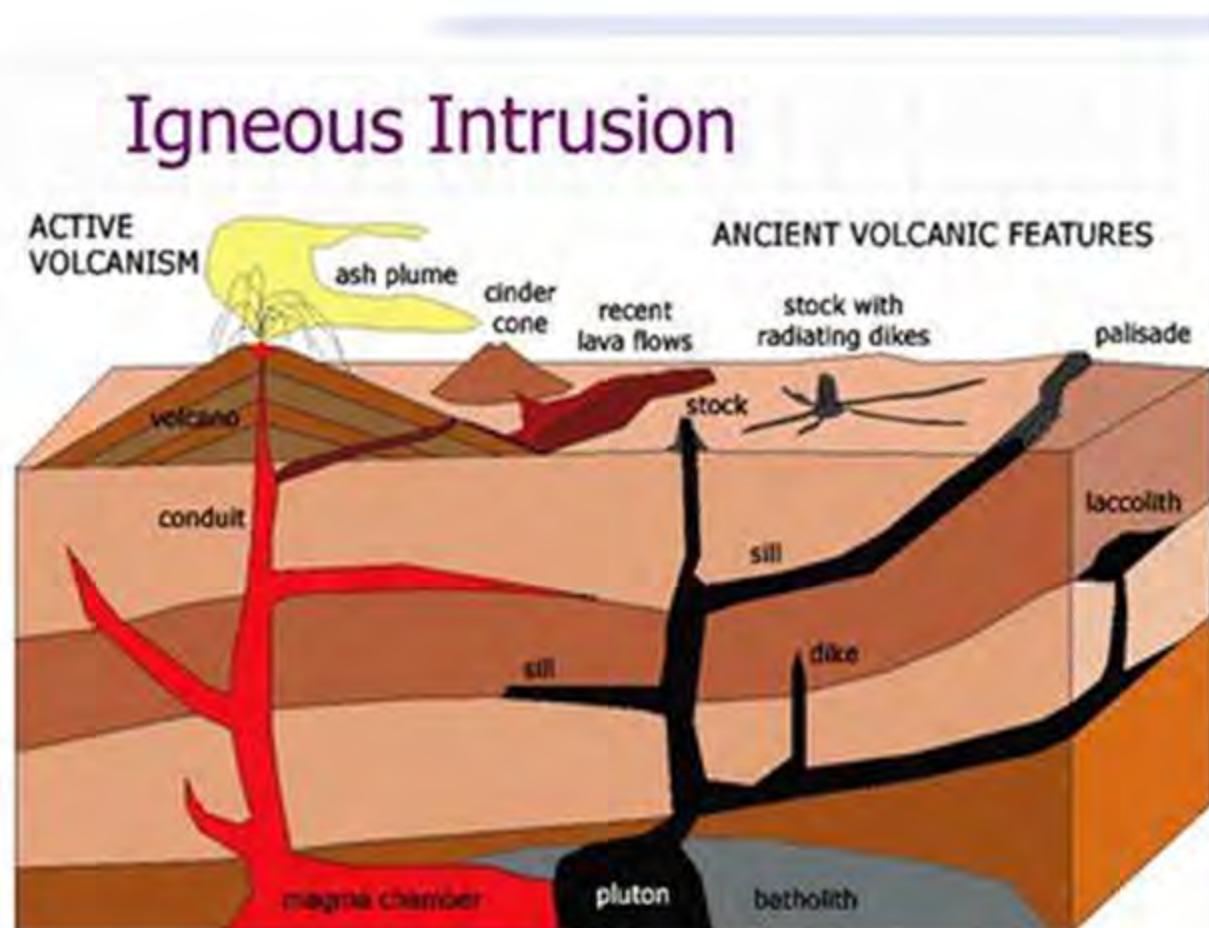
# 课前知识

- ✓ 正演的概念
- ✓ 刻画地下目标体结构需要的信息

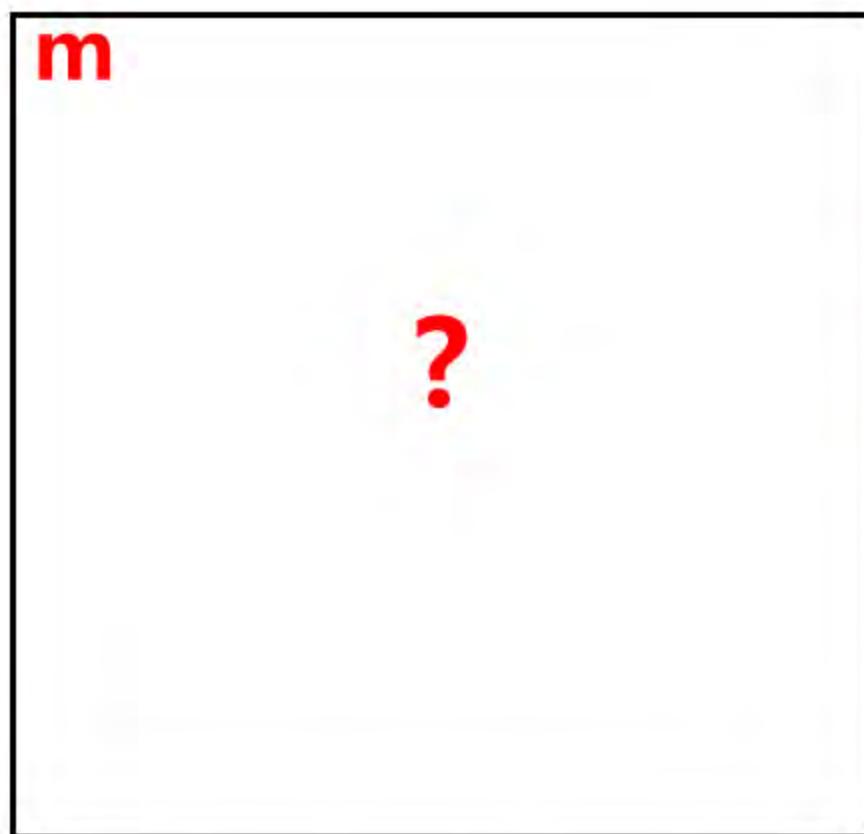


# 课前知识

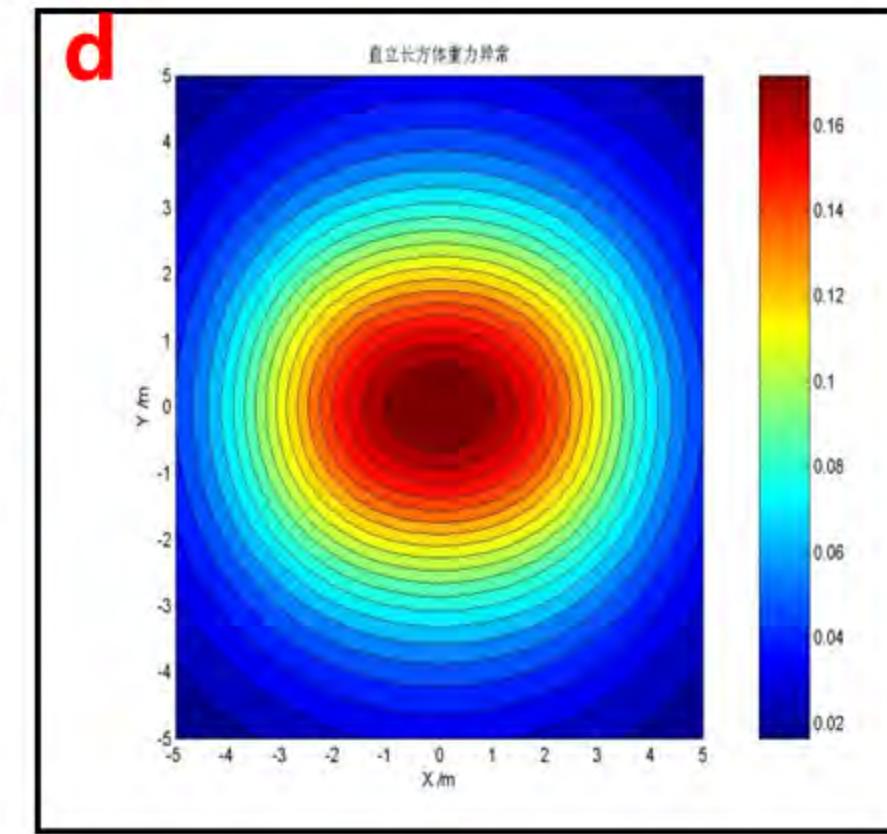
- ✓ 正演的概念
- ✓ 刻画地下目标体结构需要的信息



# 课前知识



反演  
←



已知异常的分布特征和变化规律，求场源的**赋存状态**（如产状、形状和剩余密度等）。

# 课前知识

- 狹义的反演：获取地下目标地质体的物性信息（物性反演）
- 广义的反演：能够定量获取地下目标地质体赋存状态信息的手段都是反演。（密度成像、欧拉反褶积、物性反演）

# 课前知识

## 数学物理关系:线性和非线性

数学物理关系:  $d=f(m)$ , 线性问题  $d=Gm$

产生何种“关系”至少取决于

(1) 方法

重磁勘探: 泊松方程或拉普拉斯方程

直流电法: 拉普拉斯方程

交流电法: 麦克斯韦方程

地震勘探: 波动方程

地热: 热传导方程

(2) 模型建立

规则体、地下剖分、界面、...

# 课前知识

线性反演

$$d_N = G_{M \times N} m_M$$

(1)  $M = r$  时，—— [克莱姆法则](#) [百度百科 \(baidu.com\)](#)

(2)  $M > N = r$  时，超定问题——

最小二乘法模型

(3)  $N > M = r$  时，欠定问题——

解的欧几里德长度为最小模型

(4)  $\text{Min}(M, N) > r$  时，混定问题——

阻尼最小二乘法模型 (马奎特方法)

( $r$  为矩阵  $G$  的秩)

# 课前知识

非线性反演

$$d = f(m)$$

- (1) 梯度法：传统的最速下降法
- (2) 尝试法：从初始模型 $m_0$ 出发，通过正演做反演，可以人机交互互联作
- (3) 人工神经网络（ANN）法
- (4) 蒙特卡洛法
- (5) 模拟退火法
- (6) 遗传算法
- (7) 多尺度反演法

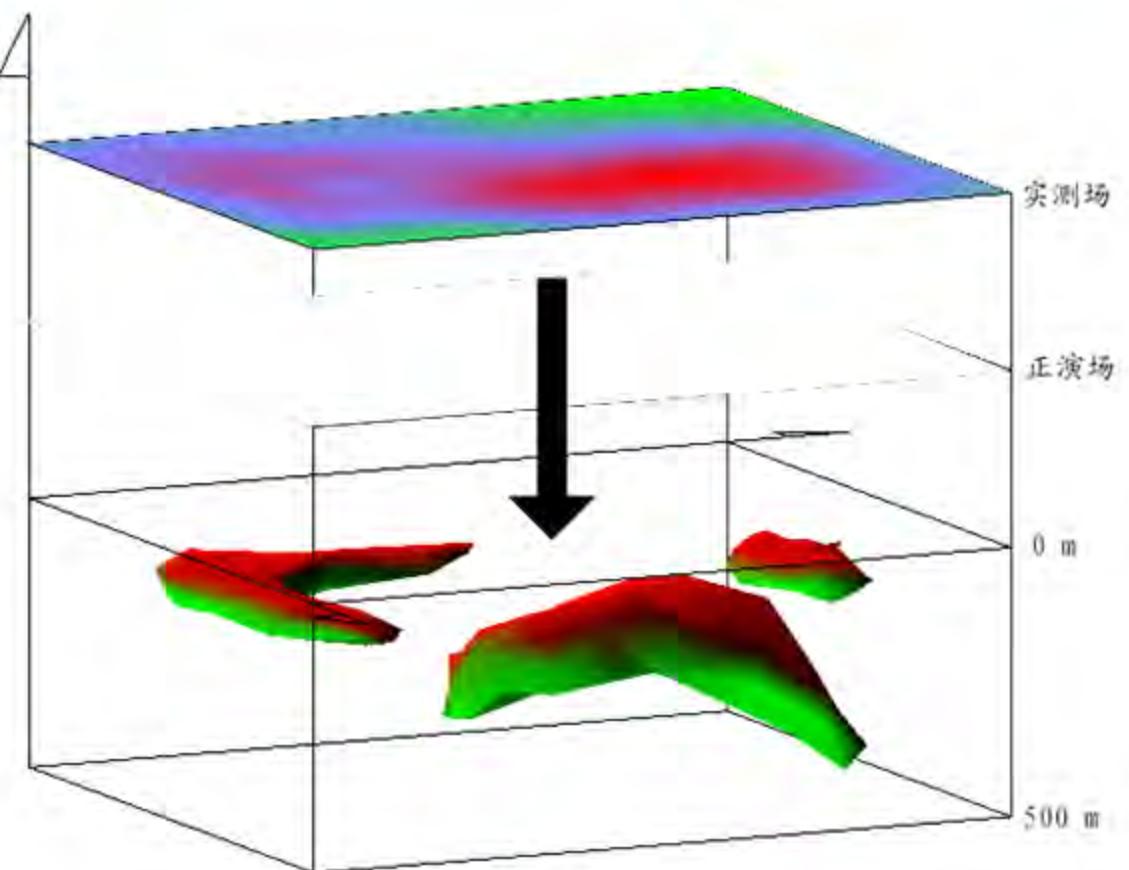
# 目 录

## 第一节 重力异常反问题

# 1.重力异常反问题

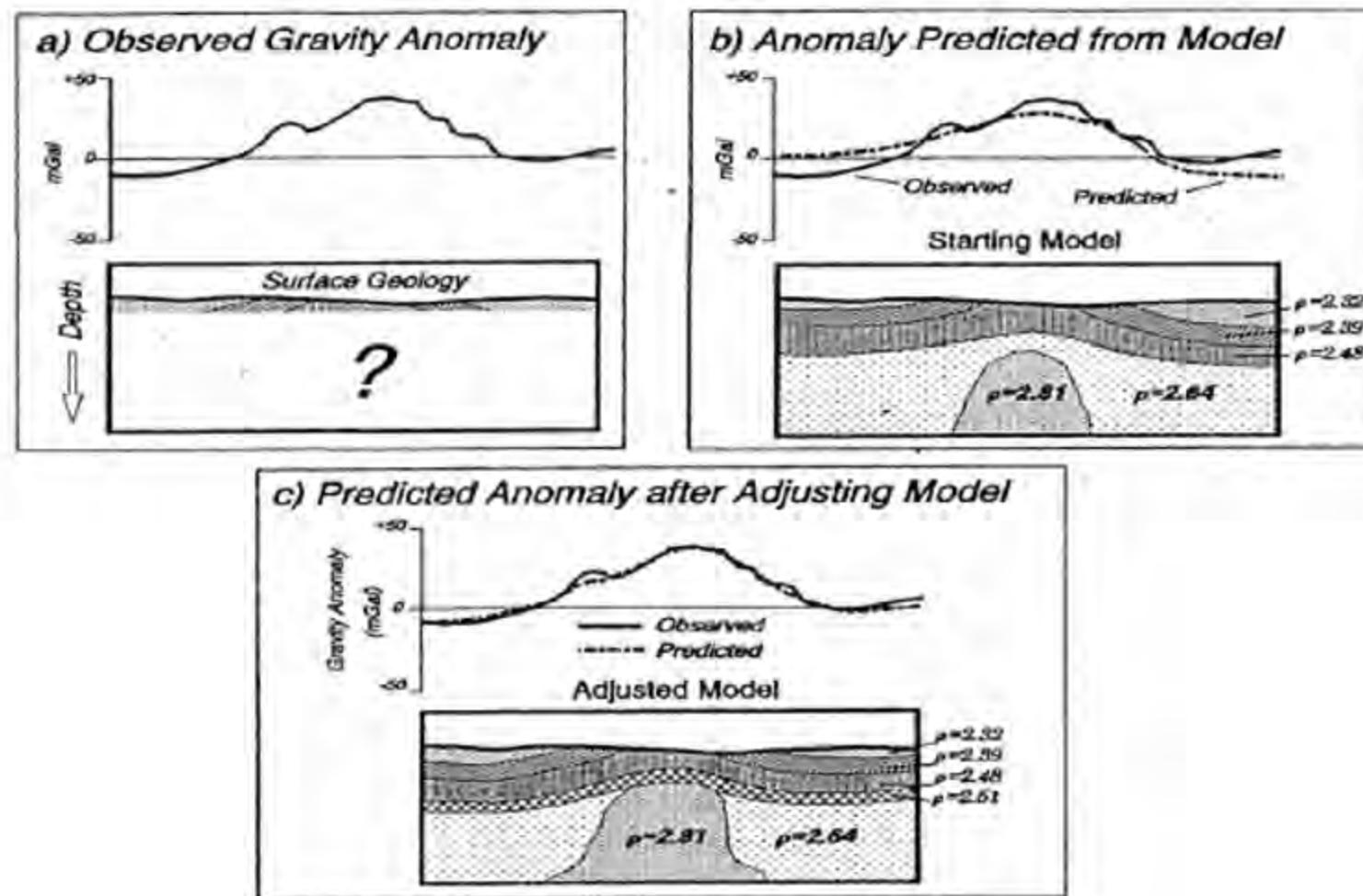
## ■什么是反演？

反问题是已知**异常的分布特征和变化规律**，求场源的赋存状态（如产状、形状和剩余密度等）。



# 1. 重力异常反问题

## ■ 什么是反演?



## 正演

- 已知地质体的形状、产状和剩余密度等，通过理论计算来求得异常的分布和规律。

是解决反问题的基础

## 反演

- 已知异常的分布特征和变化规律，求场源的赋存状态(产状、形状和剩余密度等)。

是勘探解决的目的

# 1.重力异常反问题

## ■ 反演的目标

### 仅从地质角度，解重力反演问题的目标

- ✓ 矿体类问题：寻找、研究或推断金属或非金属矿体；
- ✓ 构造类问题：研究地质构造，包括控矿构造，如含石油、天然气、煤的构造以及区域性的深部构造等。

### 从地球物理角度，解重力反演问题的目标

- ✓ 矿体类问题：确定地质体的几何和物性参数；
- ✓ 构造类问题：确定物性分界面的深度及起伏；
- ✓ 密度分布问题：确定密度的分布。

# 1.重力异常反问题

## ■反演的不适定性

解的存在性?

解的唯一性?

解的稳定性?



## 1.重力异常反问题

■反演的不适定性

解的存在性?

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ y = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

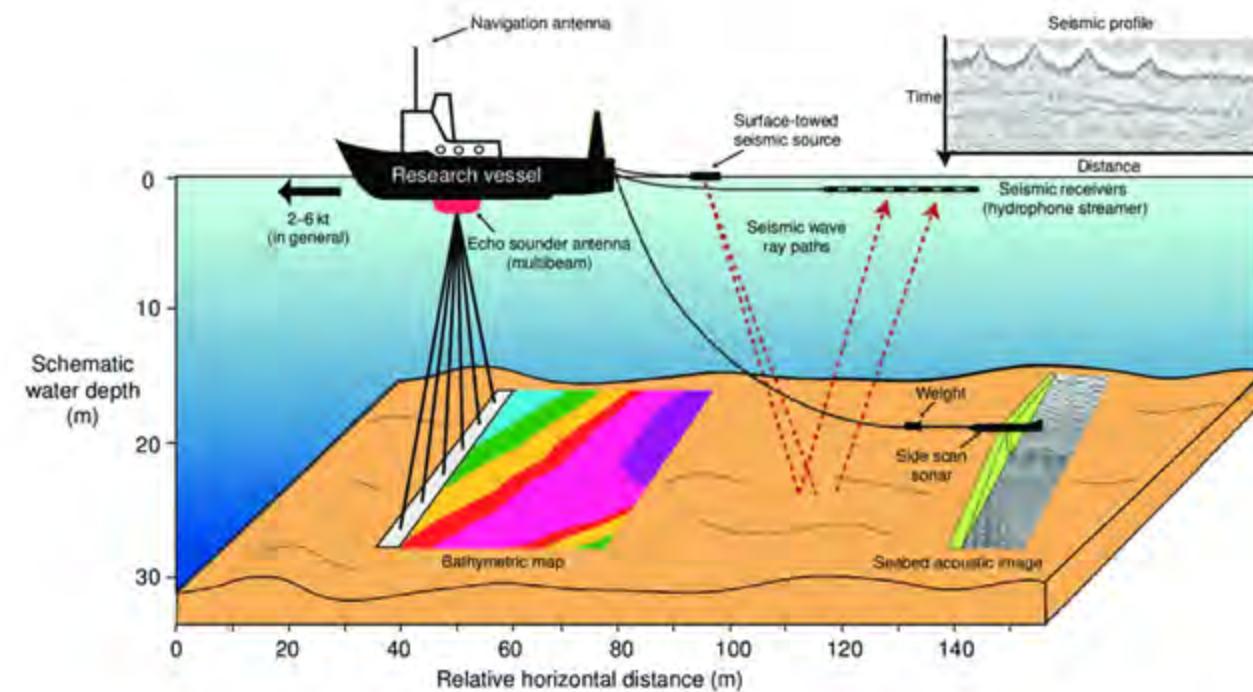
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的存在性?

所见即所得



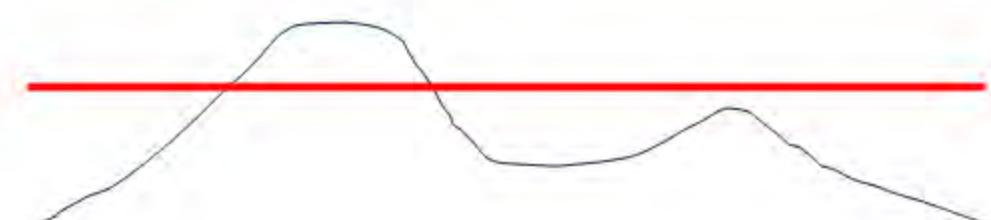
在地球物理领域，引起重力异常的地下密度体是客观存在，因此反演的解是客观存在的

# 1.重力异常反问题

## ■反演的不适定性

- ✓ 在仪器正常条件下，实际测量数据出现的重力异常高于仪器的噪声水平时，都会对应于地下密度异常体的存在。
- ✓ 因此，实际工作中，反演问题解的存在性是肯定。
- ✓ 需要注意的是，仪器的噪声和干扰混合在一起时，有时难以确认异常的真假。

解的存在性？



# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的唯一性?

$$3x + 4y = 5$$

方程个数小于未知数个数，有无穷多解

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的唯一性?

对于实际测量中，测量数据的有限性，致使重力测量数据的反演中多解性较为严重。

$$M_{\text{球}} = \frac{4\pi}{3} \sigma_1 R_1^3 = \frac{4\pi}{3} \sigma_2 R_2^3$$

$$M_{\text{柱}} = \pi \lambda_1 R_1^2 = \pi \lambda_2 R_2^2$$

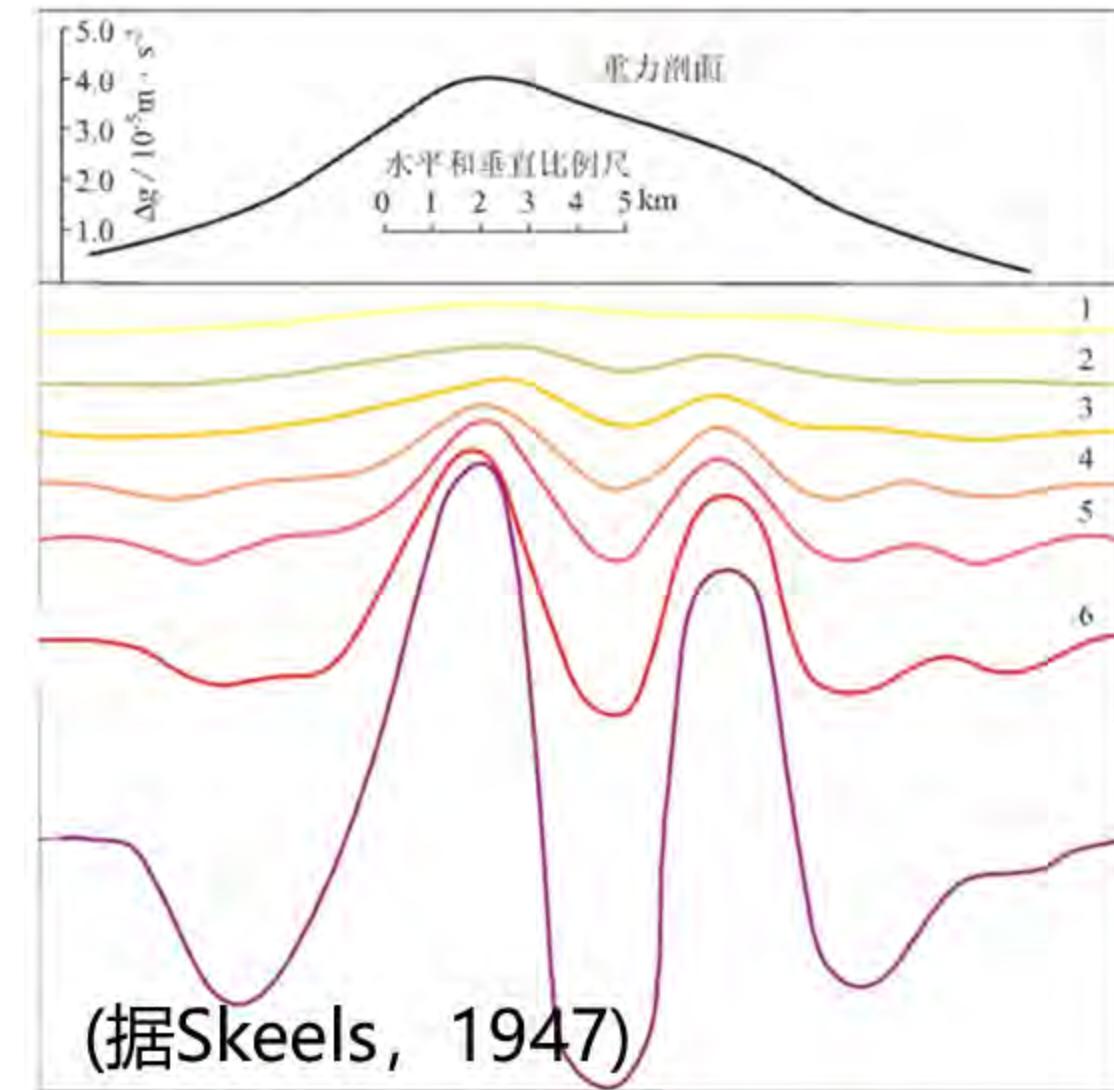
# 1.重力异常反问题

## ■ 反演的不适定性

### 多解性现象

处在不同深度的、具有不同起伏的界面，还包括在这些界面之间的许多界面，都能够引起在测量精度范围内的相同的重力异常。

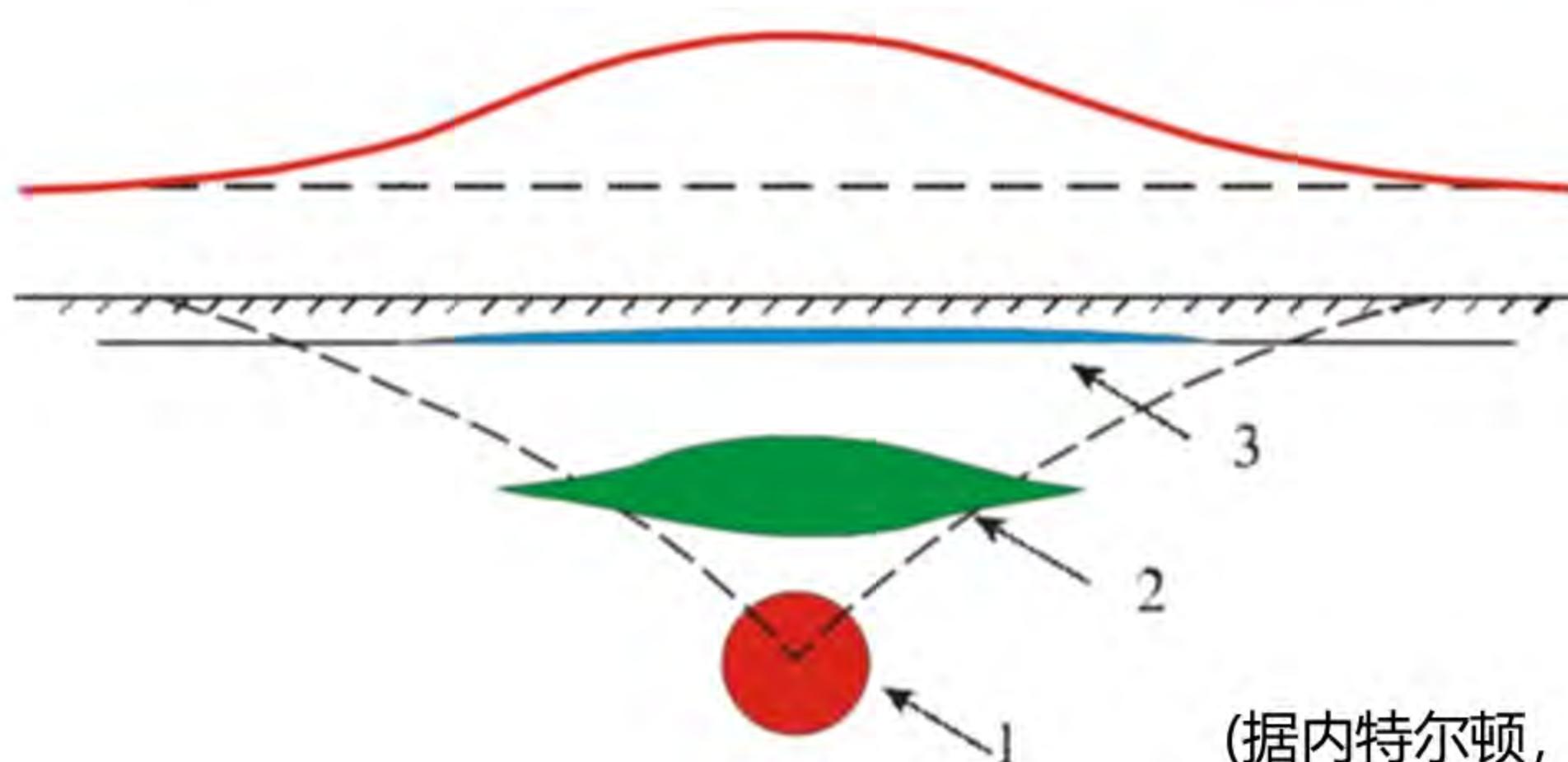
解的唯一性？



# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的唯一性?

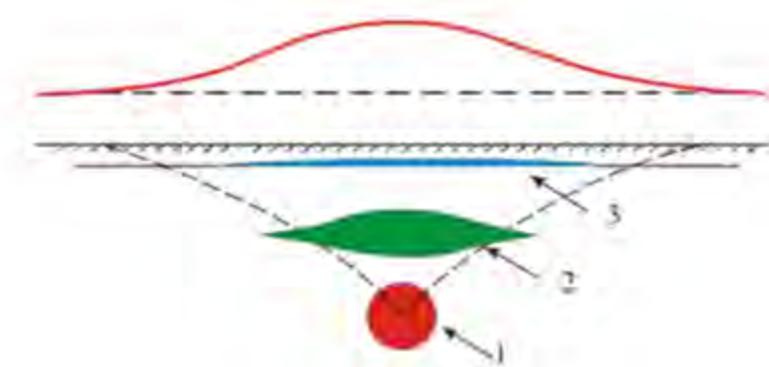


# 1.重力异常反问题

## ■ 反演的不适定性

解的唯一性?

- 与一定的异常宽度对应的场源的可能的最大深度，就是引起同样宽度异常的点源(球体)的深度。
- 在这个最大深度和地面之间，存在一个可能源的锥形区。
- 同一个异常可以由埋藏很浅的薄透镜体，或不太狭窄的较厚的物体，或球体引起，而且在球体上方较浅的深度上，却有无限多个可能的场源引起这个相同的异常。
- 引起同一异常的不同的场源，有一个唯一的共同的特性，就是它们的剩余质量必须是相同的。



(据内特尔顿, 1987)

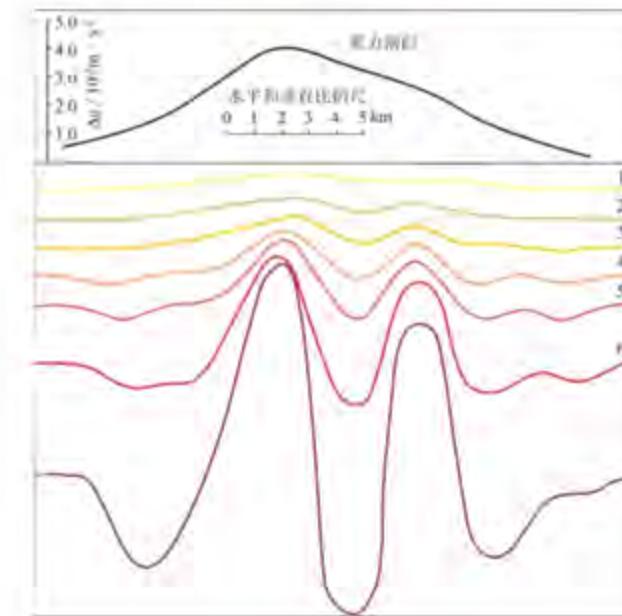
# 1.重力异常反问题

## ■ 反演的不适定性

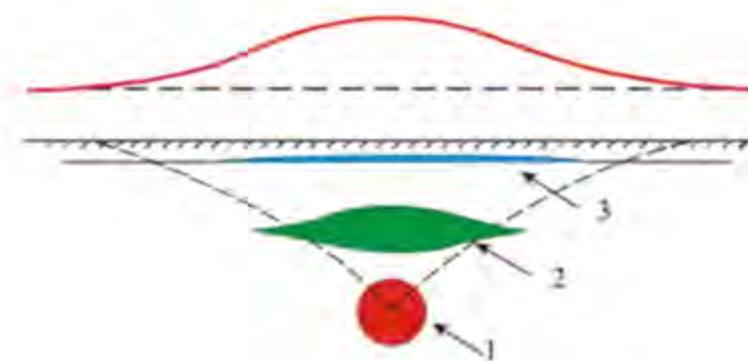
### 引起多解性的原因

- 场的等效性；
- 观测数据离散、有限；
- 实测的异常包含一定误差的；
- 数据预处理、处理带来的误差。

### 解的唯一性？



反问题解的非唯一性是客观存在的。



# 1.重力异常反问题

## ■反演的不适定性

解的唯一性?

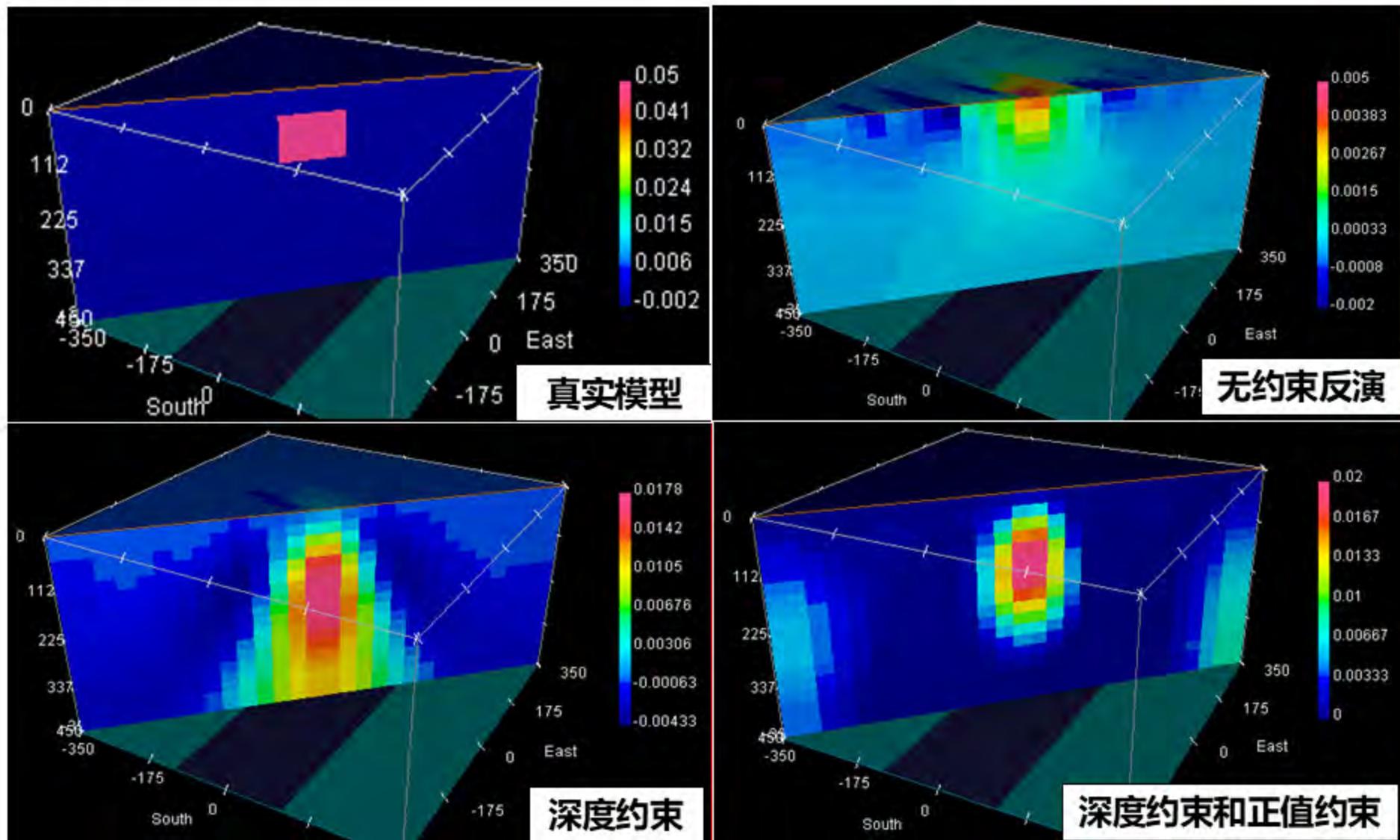
### 限制多解性的方法

- 除了应用重力资料外，还引用工区内的地质、钻井、物性和其他地球物理资料等，尽可能地增加已知条件和约束条件，则反问题的解答数目就会大大减少，甚至可以得到单一的解。
- 提高仪器的测量精度。
- 改进各项校正的计算方法，使得能够更加精确地得到重力异常的分布。

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

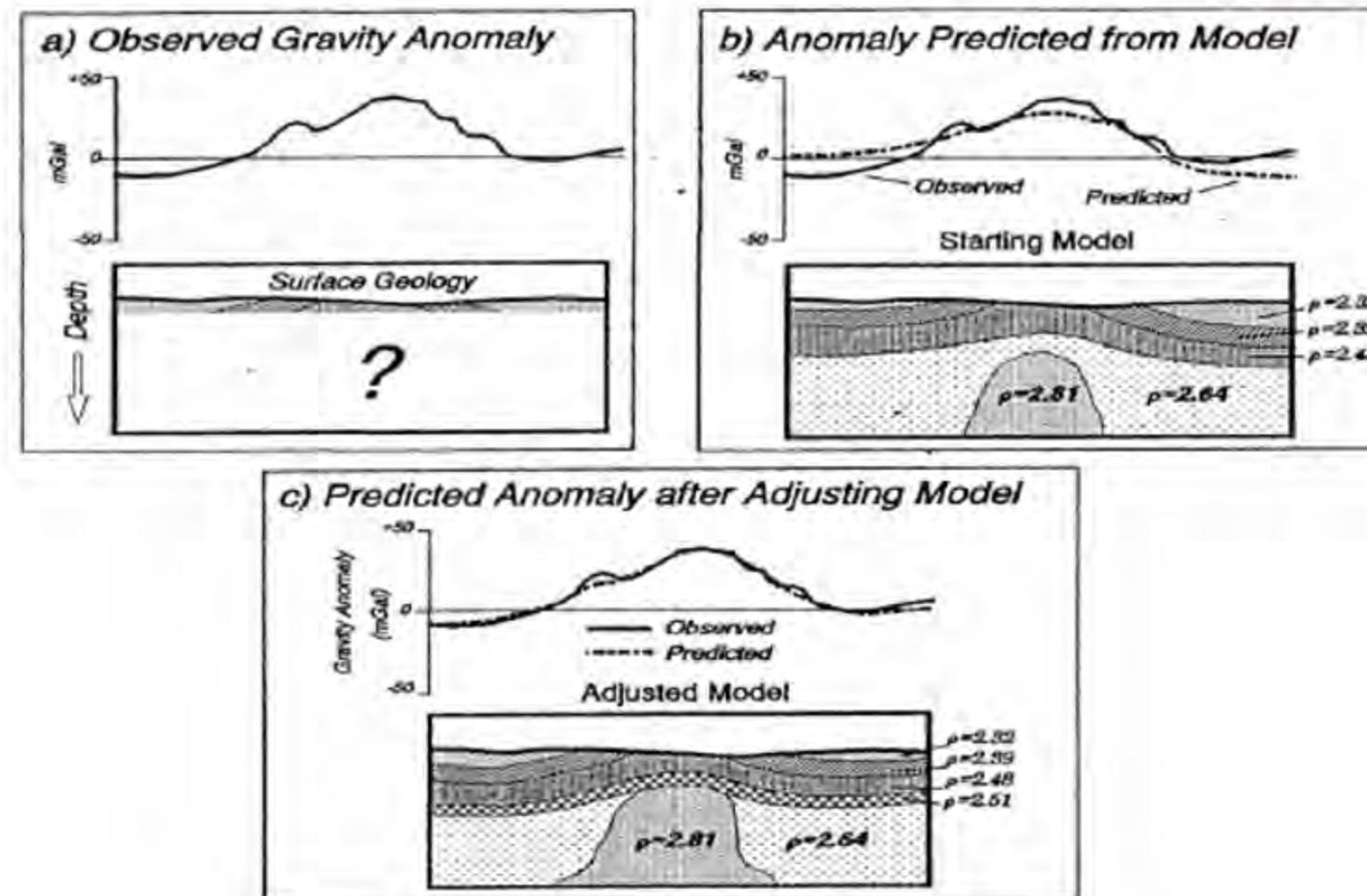
解的唯一性?



# 1. 重力异常反问题

■ 反演的不适用性

解的唯一性?

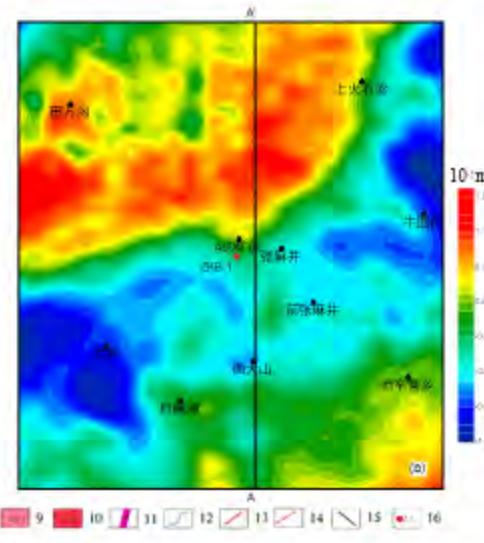
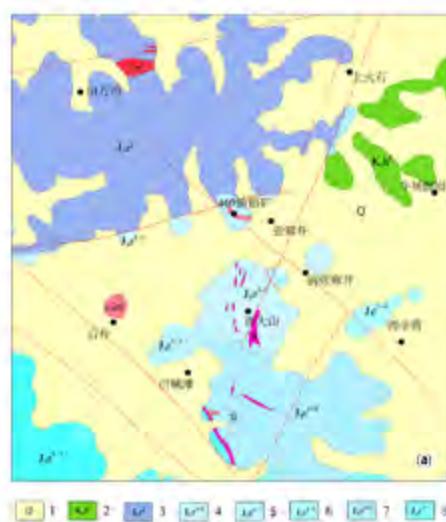


地质约束重力反演

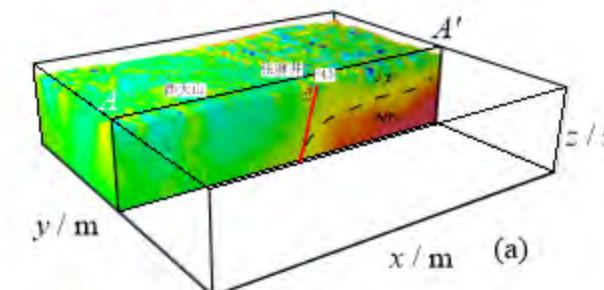
# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

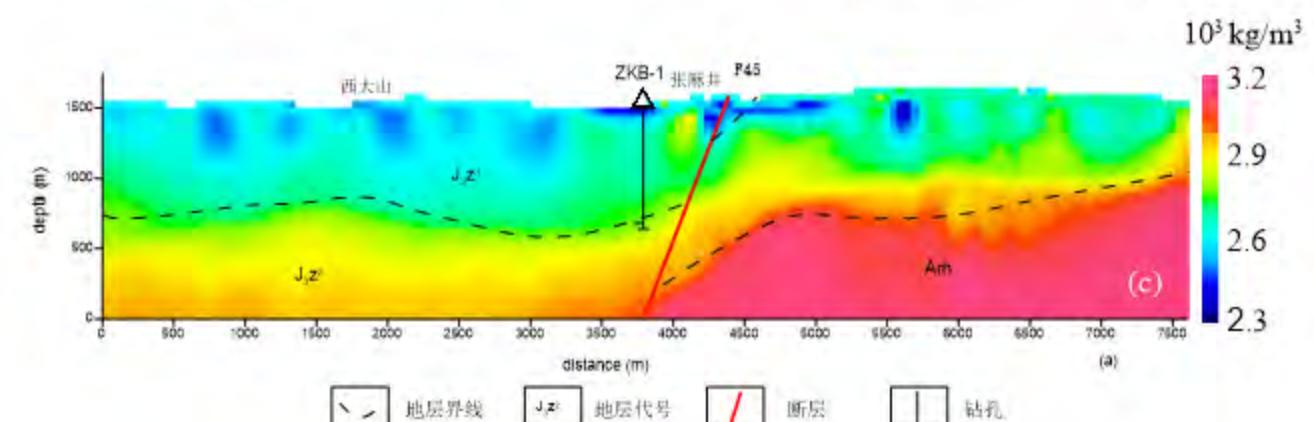
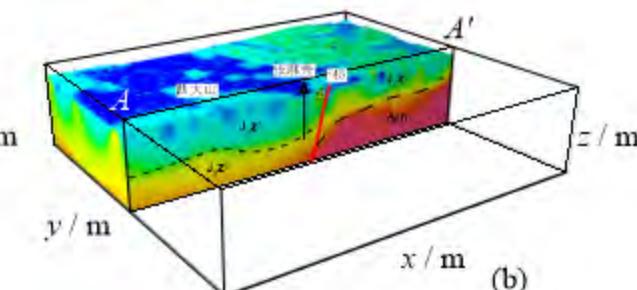
解的唯一性?



无约束反演



地质约束反演



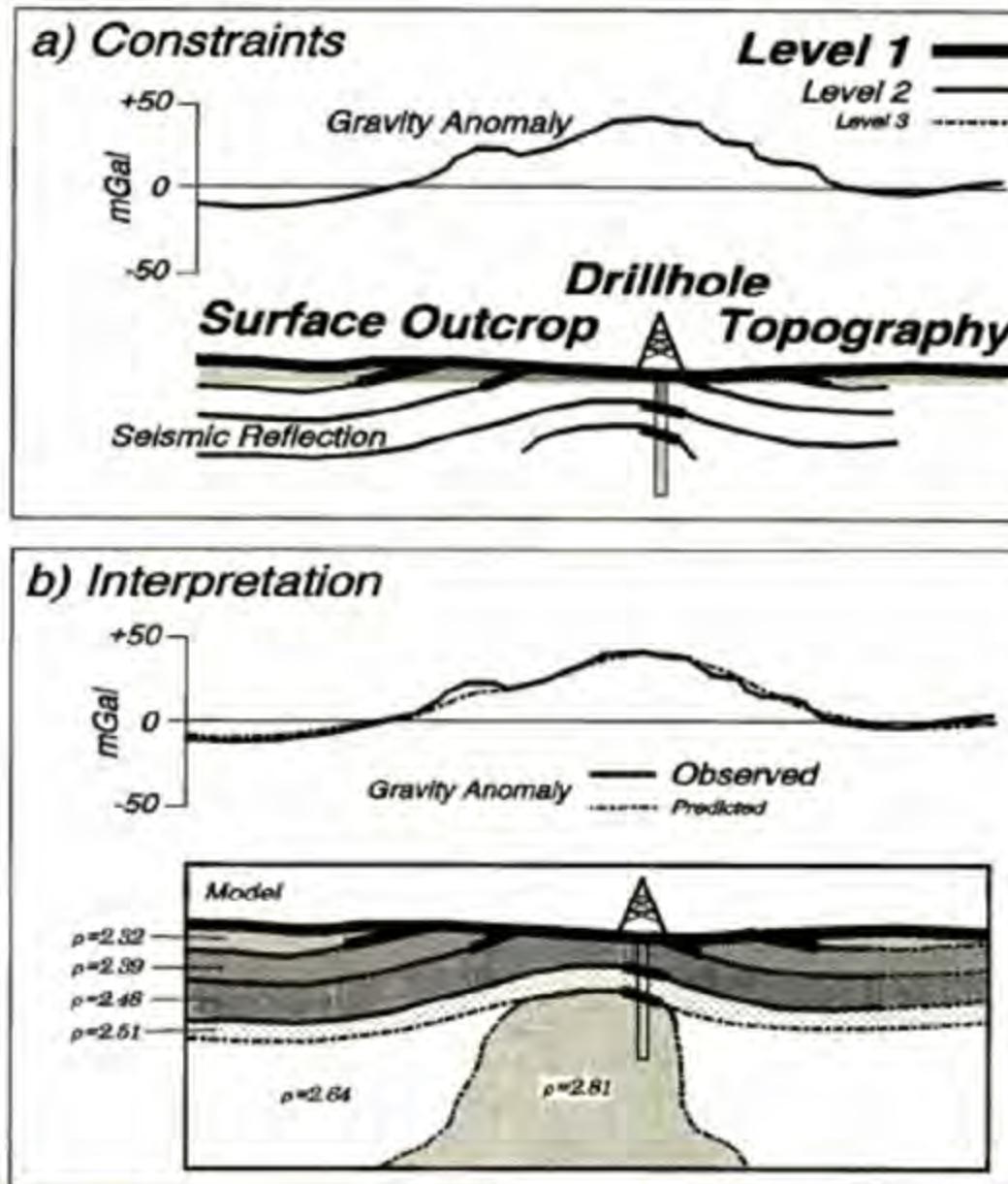
地质约束重力反演

# 1. 重力异常反问题

## ■ 反演的不适用性

解的唯一性?

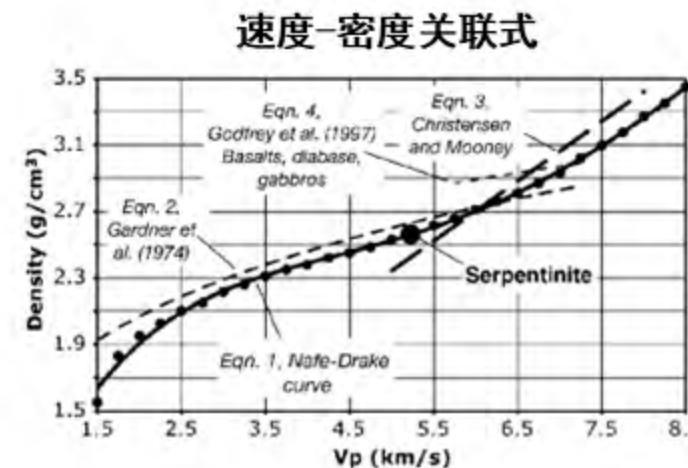
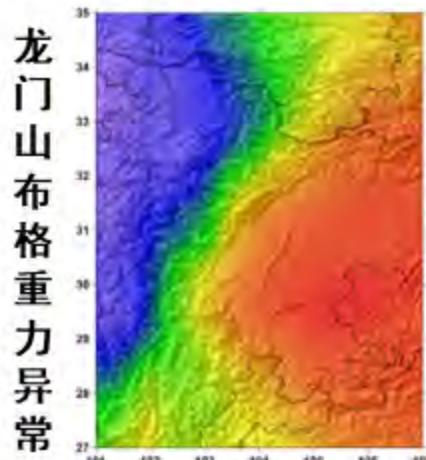
地质、地震约束重力反演



# 1. 重力异常反问题

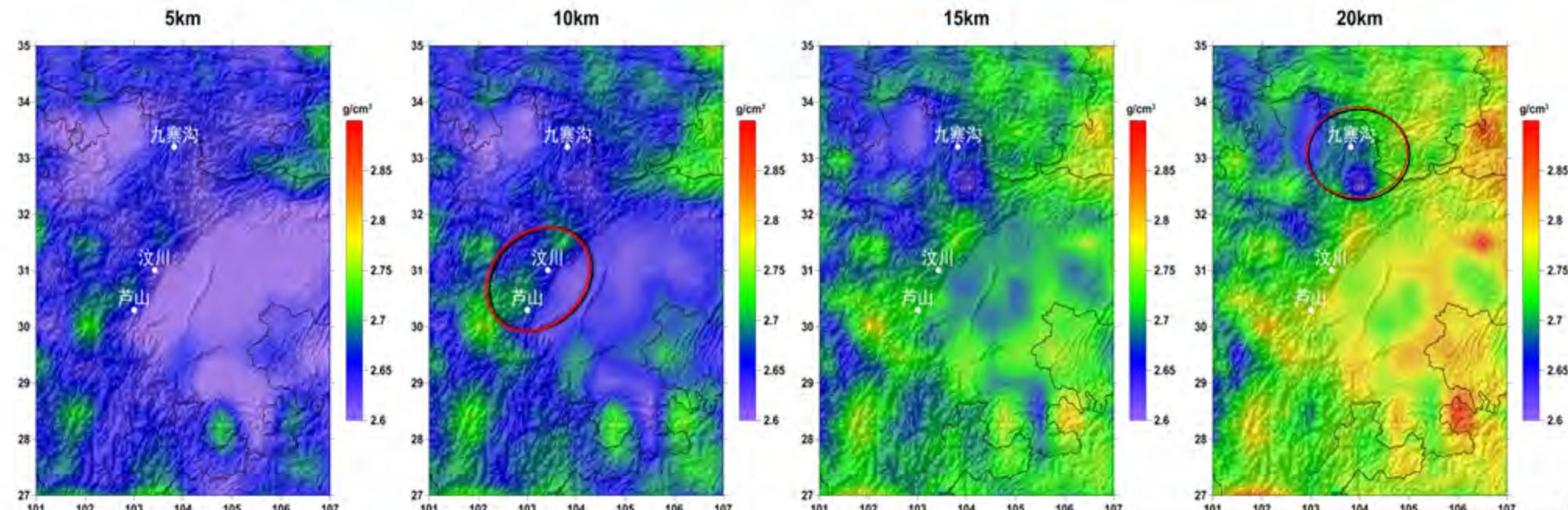
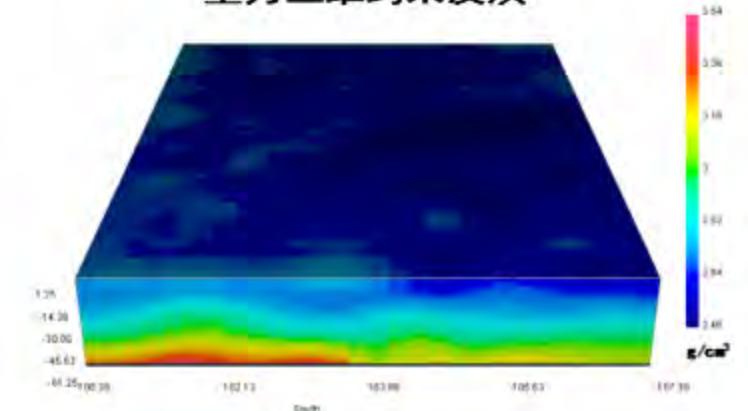
## ■ 反演的不适用性

地质、地震约束重力反演



解的唯一性？

重力三维约束反演



# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的稳定性?



# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的稳定性?

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

它的矩阵形式为  $Ax = b$  , 其中系数矩阵A和常数向量b分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的稳定性?

$$\nabla^2 W = 0$$

$$W(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$W(x, y, h) = ? \quad (0 < h < H)$$

$$W(x, y, 0) = A[W(x, y, h)]$$

A延拓算子

# 1.重力异常反问题

## ■反演的不适定性

解的稳定性?

实际测量中由于仪器和其它因素的干扰，数据中多少会存在噪声，那么噪声会对解产生什么影响？

$$f(x, y) = a \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

→  $W(x, y, 0) = a \sin(k_x x) \sin(k_y y) = f(x, y)$

→  $W(x, y, z) = ae^{n_0 z} \sin(k_x x) \sin(k_y y), n_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适定性

解的稳定性?

现有两个不同的观测数据

$$f_1(x, y) = a \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$f_2(x, y) = (a + \varepsilon) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

那么，对应的两个解为：

$$W_1(x, y, h) = ae^{n_0 h} \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$W_2(x, y, h) = (a + \varepsilon)e^{n_0 h} \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$|W_1(x, y, h) - W_2(x, y, h)| = \varepsilon e^{n_0 h} |\sin(k_x x) \sin(k_y y)|$$

# 1.重力异常反问题

■ 反演的不适用性

解的稳定性?

现有考察两个不同的观测数据得到的解的差

$$|W_1(x, y, h) - W_2(x, y, h)| = \varepsilon e^{n_0 h} |\sin(k_x x) \sin(k_y y)|$$

在测量点,

$$x_n = \pm(2n+1) \frac{\pi}{2k_x}, y_m = \pm(2m+1) \frac{\pi}{2k_y}, (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$|W_1(x, y, h) - W_2(x, y, h)| = \varepsilon e^{n_0 h}$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$|W_1(x, y, h) - W_2(x, y, h)|$  可以任意大

# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

## 2. 直接法

直接利用由反演目标引起的**局部异常**，通过某种积分运算和  
函数关系，求得与异常分布有关**地质体的某些参量**。

## 2. 直接法

### ■ 三度体

全空间剩余质量与引力通量关系：

$$I = \iint_S F_n \cdot dS = -G \iint_S \frac{M}{r^2} dS = -4\pi GM$$

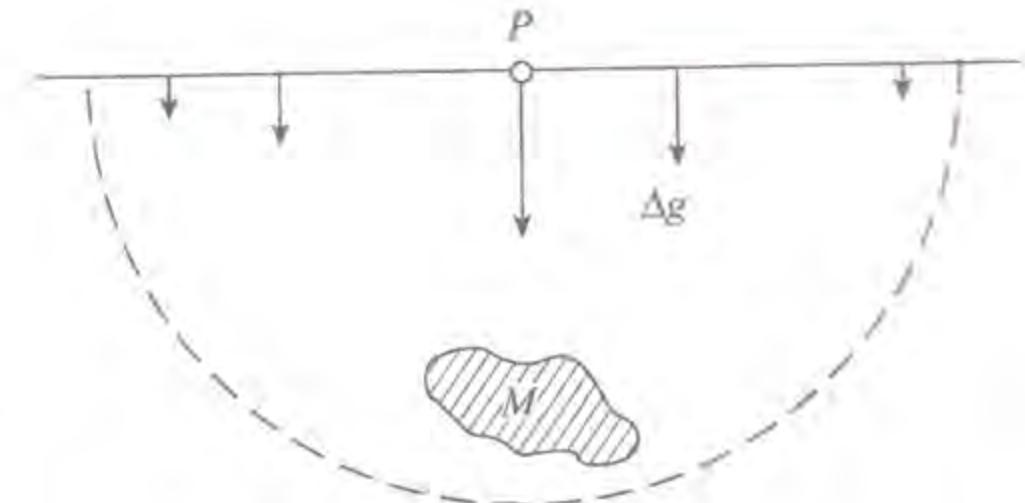


图 8-1 通量的计算

半空间剩余质量与引力通量关系：

$$I = \iint_S \Delta g dx dy = 2\pi GM$$

## 2. 直接法

### ■ 三度体

三度体剩余质量的求法

$$M = 2.386 \left[ \{\Delta x \Delta y\}_m \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{\Delta g_{ij}\}_{g.u.} + 2\pi \{R^2\}_m \{\Delta g(R)\}_{g.u.} \right]$$

三度体重心水平坐标的求法

$$x_0 \approx \frac{2.386}{\{M\}_t} \cdot \{\Delta x \Delta y\}_m \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\{x_i\}_m \cdot \{\Delta g_{ij}\}_{g.u.}]$$

$$y_0 \approx \frac{2.386}{\{M\}_t} \cdot \{\Delta x \Delta y\}_m \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\{y_i\}_m \cdot \{\Delta g_{ij}\}_{g.u.}]$$

## 2. 直接法

### ■ 二度体

二度体剩余质量的求法

$$\lambda = \frac{\Delta x \sum_{i=1}^n \Delta g_i}{4Gt g^{-1} \frac{x}{D}}$$

二度体重心水平坐标的求法

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (x \cdot \Delta g)_i}{\sum_{i=1}^n \Delta g_i}$$

# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

第三节 特征点法

### 3. 特征点法

根据异常曲线上的一些**点或特征点**（如极大值点、零值点、拐点）的  
异常值及相应的坐标求取**场源体的几何或物性参数**；

**仅适用于**剩余密度为常数的几何形体。

### 3. 特征点法

#### ■ 应用条件

- ✓ 对异常作平滑处理，尽量准确确定原点的位置；
- ✓ 对异常曲线作分离处理，获得单纯由研究对象引起的异常；
- ✓ 对剩余（局部）异常进行分类，判明该异常的场源体接近于何种可能的几何形体，然后选用相应的反演公式。

### 3. 特征点法

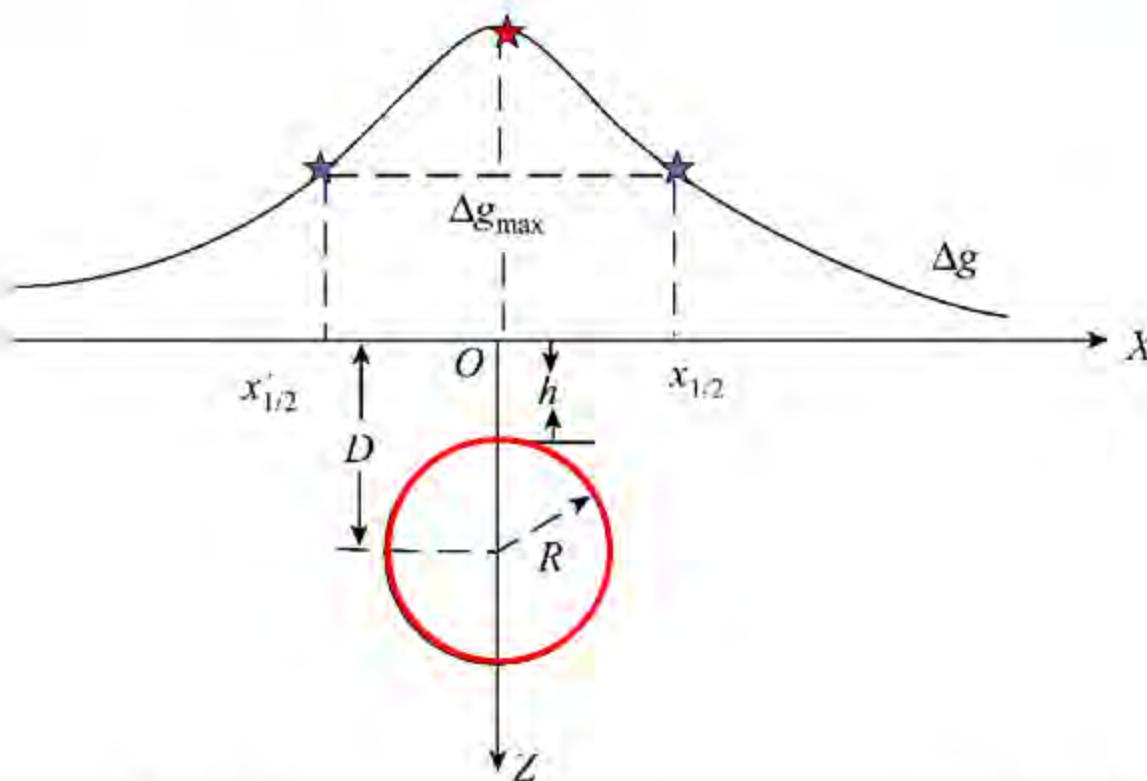
#### ■ 异常曲线形态分类

- ✓ 第一类是单峰异常，零值点在无穷远处  
如球体的 $\Delta g$ 曲线、台阶的 $V_{xz}$ 曲线等；
- ✓ 第二类是具有极大值、极小值和一个零值点  
如球体的 $V_{xz}$ 曲线、台阶的 $V_{zz}$ 、 $V_{zsz}$ 曲线；
- ✓ 第三类是具有一个极大值、两个极小值和两个零值点  
如球体、水平圆柱体的 $V_{zz}$ 和 $V_{zsz}$ 曲线；
- ✓ 第四类是台阶的 $\Delta g$ 曲线，一边高一边低的形态

### 3. 特征点法

■ 第一类单峰异常，零值点在无穷远处

球体 $\Delta g$



$$\Delta g_1 = \frac{GMD}{(x_1^2 + D^2)^{3/2}} \quad \Delta g_2 = \frac{GMD}{(x_2^2 + D^2)^{3/2}}$$

### 3. 特征点法

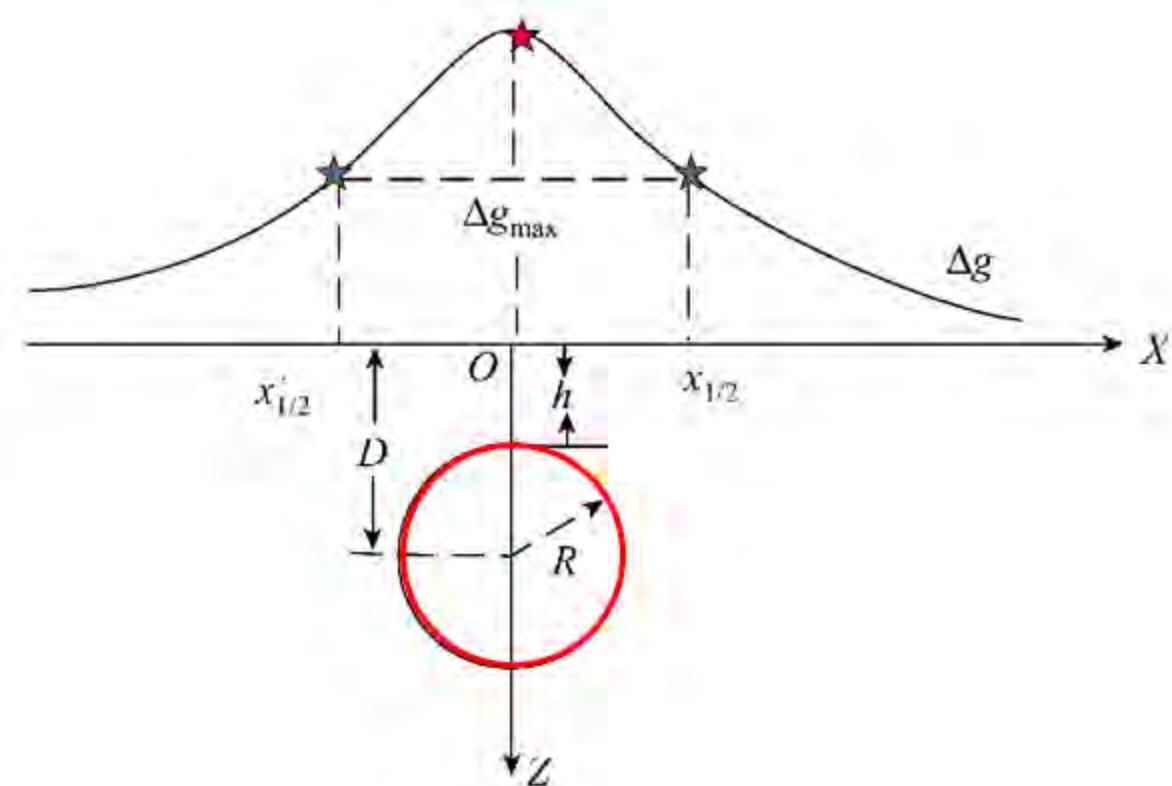
■ 第一类单峰异常，零值点在无穷远处

球体 $\Delta g$

$$n = \frac{\Delta g_1}{\Delta g_2} = \frac{(x_2^2 + D^2)^{3/2}}{(x_1^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$D = \left( \frac{x_2^2 - x_1^2 \cdot n^{2/3}}{n^{2/3} - 1} \right)^{1/2}$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{x_{1/n} - x'_{1/n}}{\sqrt{n^{2/3} - 1}}$$



### 3. 特征点法

■ 第一类单峰异常，零值点在无穷远处

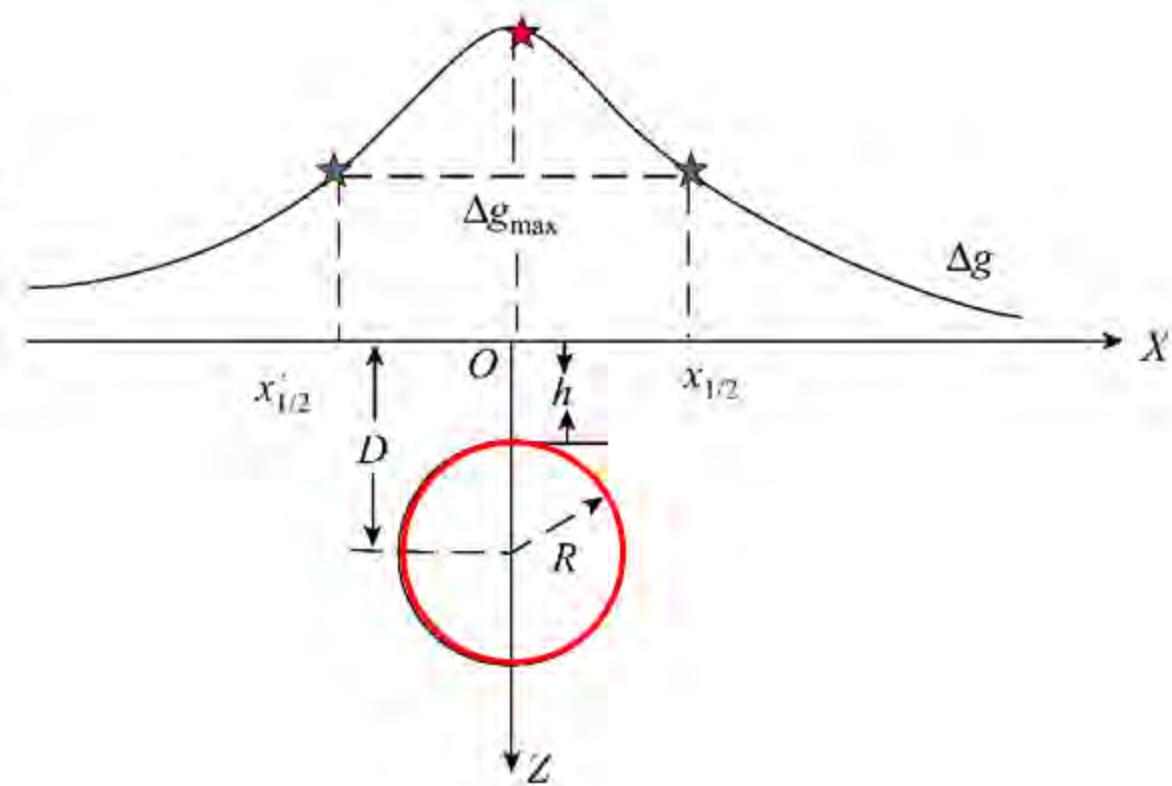
球体 $\Delta g$

$$M = 14.99 D^2 \Delta g_{\max}$$

$$R_m = \left[ \frac{3M}{4\pi(\sigma' - \sigma_0)} \right]^{1/3} = 0.62 \left( \frac{\{M\}_t}{\{\sigma\}_{g/cm^3}} \right)^{1/3}$$

$$h = D - R$$

$$M_{\text{实}} = \left\{ \frac{\sigma'}{\sigma} \right\}_{g/cm^3} \{M\}_t$$



### 3. 特征点法

■ 第二类是具有极大值、极小值和一个零值点

球体  $V_{xz}$

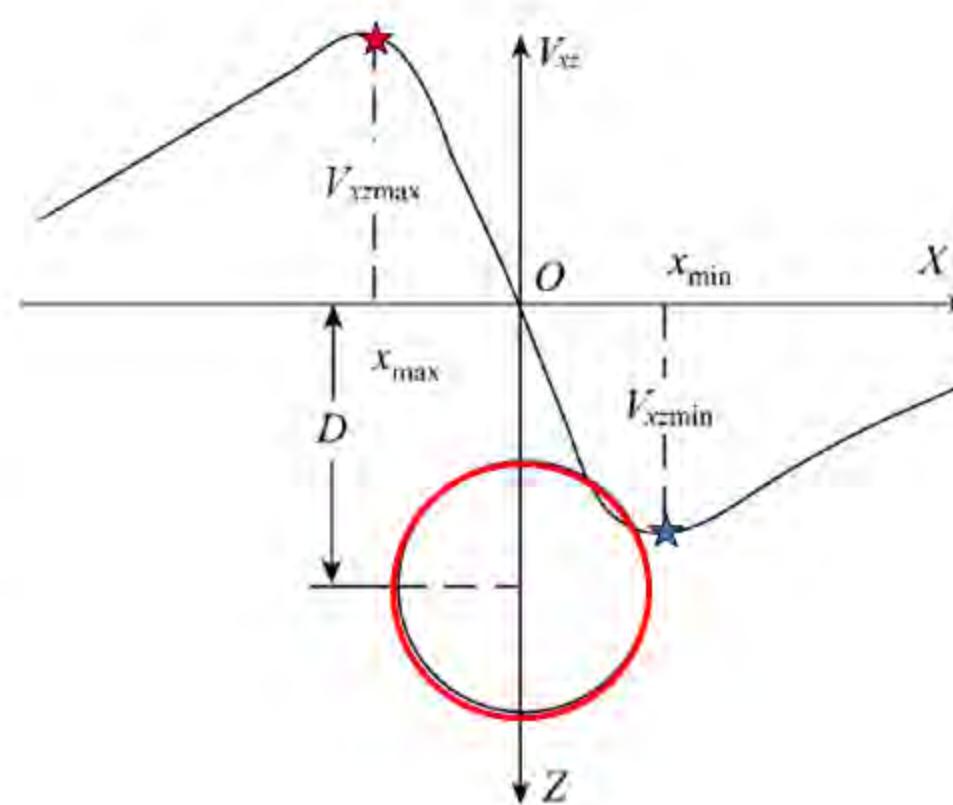
$$V_{xz} = -3GM \frac{Dx}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$x_{\max} = -\frac{1}{2}D, \quad x_{\min} = \frac{1}{2}D$$

$$(V_{xz})_{\max} = -(V_{xz})_{\min} = \frac{48GM}{25\sqrt{5}D^3}$$

$$D = 2x_{\min} = -2x_{\max} = x_{\min} - x_{\max}$$

$$M = 0.01746D^3(V_{xz})_{\max}$$



### 3. 特征点法

■ 第三类是具有一个极大值、两个极小值和两个零值点

球体  $V_{zz}$

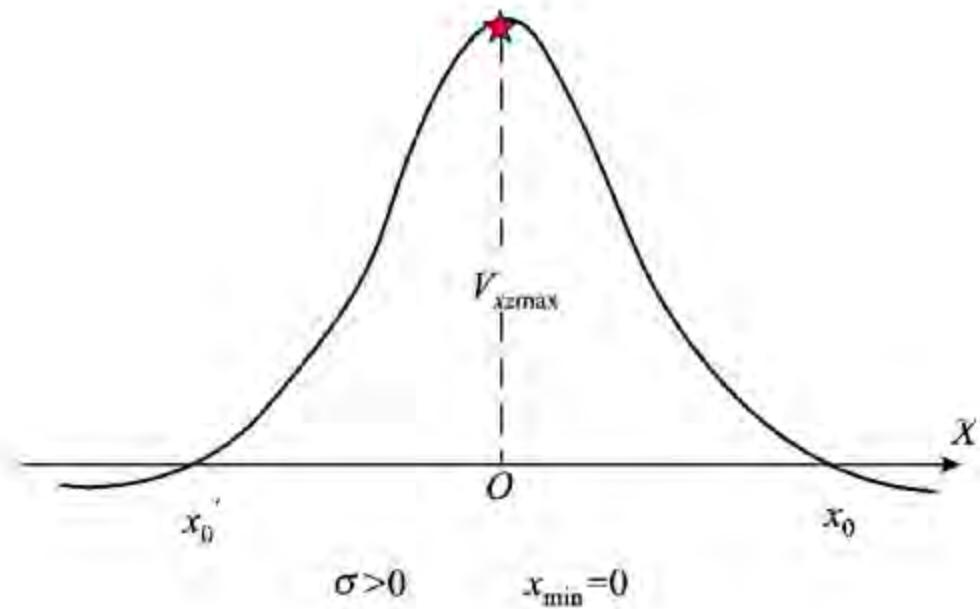
$$V_{zz} = GM \frac{2D^2 - x^2}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$(V_{zz})_{\max} = \frac{2GM}{D^3}$$

$$x_0 = \sqrt{2}\{D\}_m, x_0 = -\sqrt{2}\{D\}_m$$

$$M = 0.00749D^3(V_{zz})_{\max}$$

$$= 0.00265x_0^3(V_{zz})_{\max}$$



### 3. 特征点法

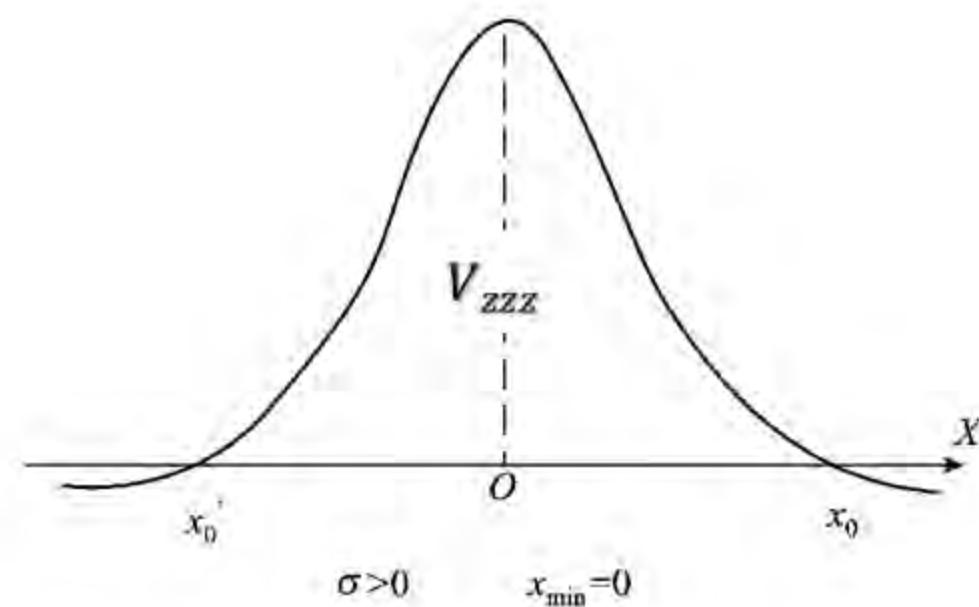
■ 第三类是具有一个极大值、两个极小值和两个零值点

球体  $V_{zzz}$

$$V_{zzz} = 3GM \frac{2D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^{7/2}}$$

$$(V_{zzz})_{\max} = \frac{6GM}{D^4}$$

$$D = 1.225|x_0|$$



$$M = 2.499D^4(V_{zzz})_{\max} \times 10^{-3} = 5.622x_0^4(V_{zzz})_{\max}$$

### 3. 特征点法

■ 第四类是一边高一边低的形态

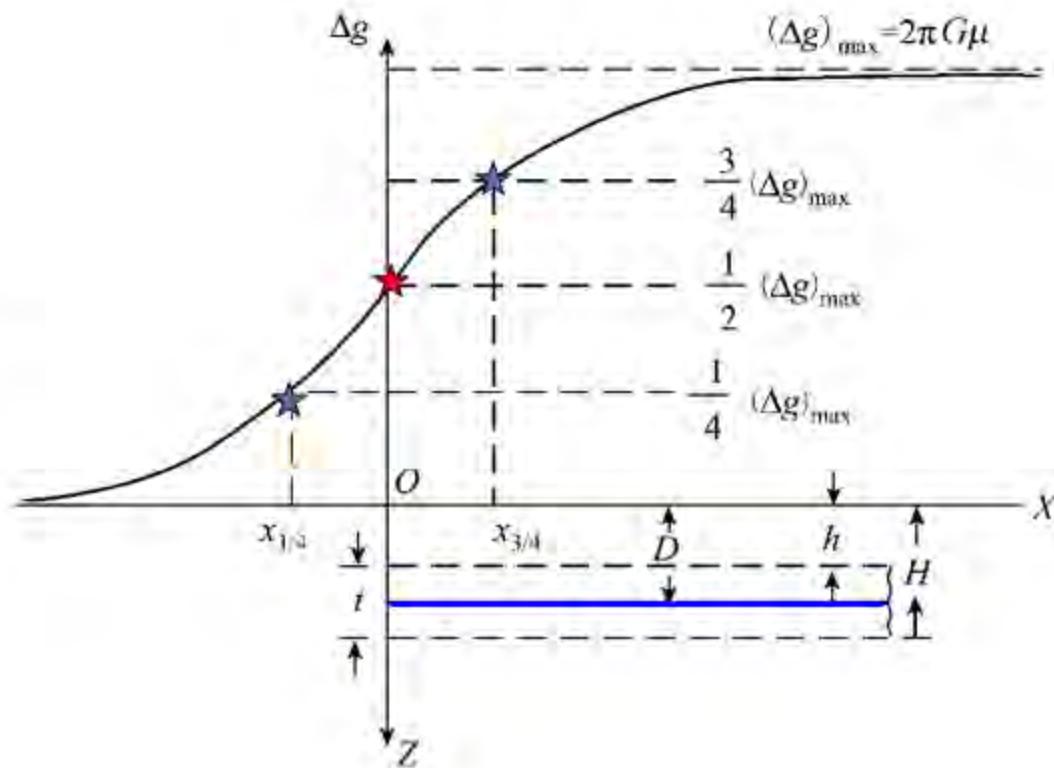
台阶

$$\Delta g = G\mu(\pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{D})$$

$$\Delta g_{\max} = \Delta g(x) + \Delta g(-x) = 2\pi G\mu$$

$$\frac{2\pi G\mu}{n} = G\mu(\pi + 2\operatorname{tg}^{-1} \frac{x_{1/n}}{D})$$

$$D = \frac{x_{1/n}}{\operatorname{tg} \frac{(2-n)\pi}{2n}}$$



### 3. 特征点法

■ 第四类是一边高一边低的形态

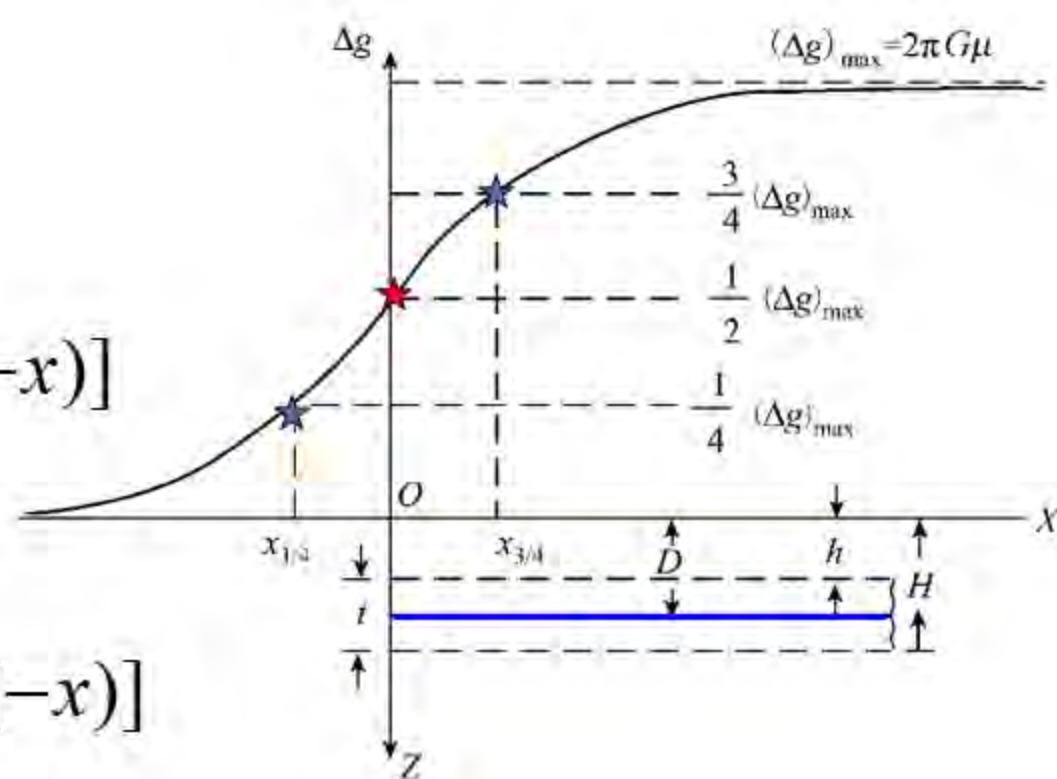
台阶

$$\mu = \frac{1}{2\pi G} [\Delta g(x) + \Delta g(-x)]$$

$$\sigma(H-h) = \mu$$

$$h = \frac{x_{1/n}}{(2-n)\pi} - \frac{1}{4\pi G\sigma} [\Delta g(x) + \Delta g(-x)]$$

$$H = \frac{x_{1/n}}{(2-n)\pi} + \frac{1}{4\pi G\sigma} [\Delta g(x) + \Delta g(-x)]$$



# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

第三节 特征点法

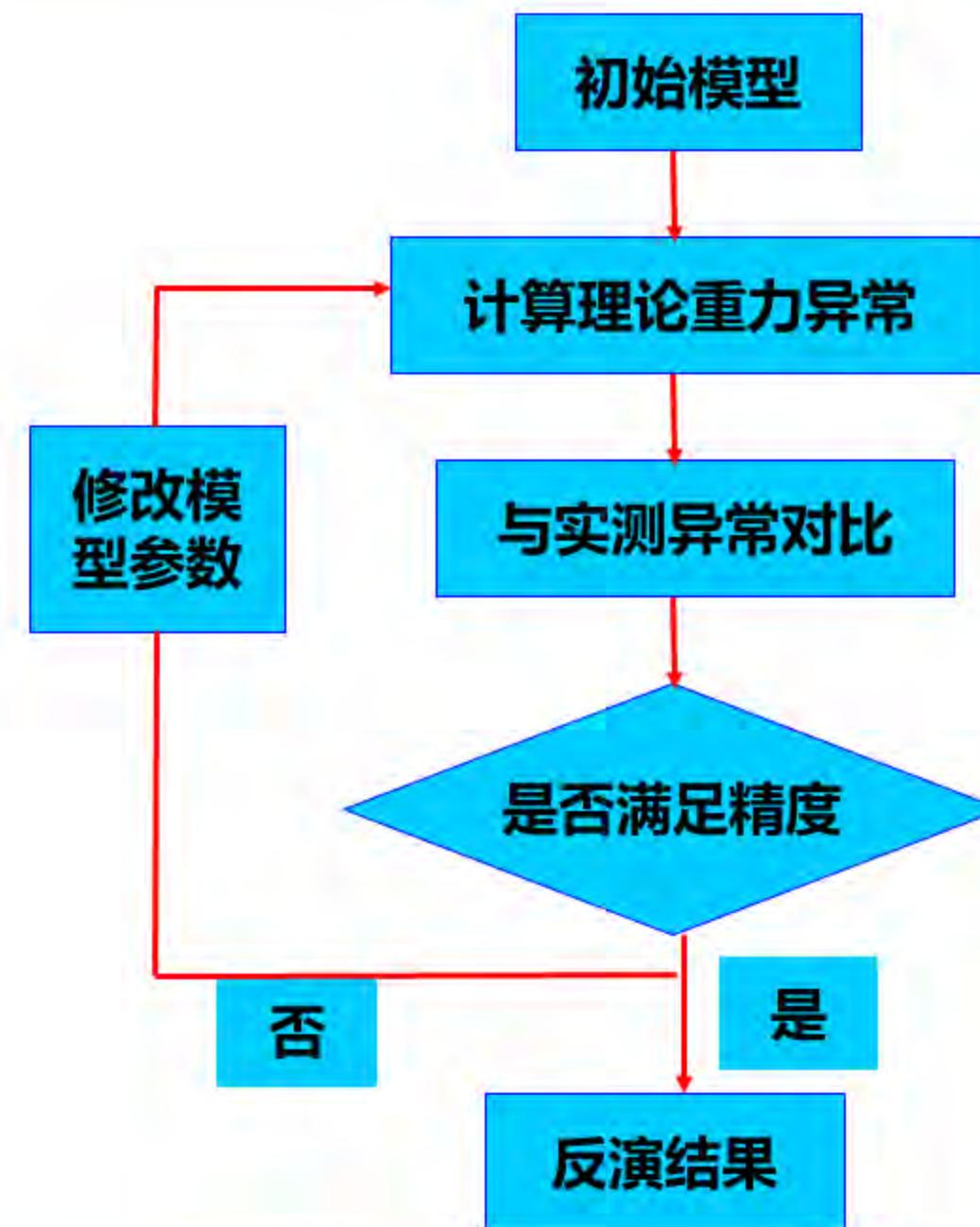
第四节 人机交互法



## 4.人机交互法



## 4.人机交互法



## 4. 人机交互法

- a) 根据**实测**重力异常的分布和变化的基本特征，结合工区的地质和其他地球物理和物性等资料，给出引起异常的**初始地质体模型**；
- b) 然后进行**正演**计算；
- c) 将理论异常与实测异常进行**对比**

$$\phi = \sum_{k=1}^m [\Delta g_k - f(x_k, y_k, z_k, b_1, b_2, \dots, b_n)]^2 = \min$$

- d) 当两者偏差较大时，根据解正问题时掌握的场与场源的对应关系，对模型进行**修改**，重算其理论异常，再次进行对比……；
- e) 如此反复进行，直至两种异常的偏差达到事前要求的误差范围为止，则这最后的理论模型就可作为地下目标体的最佳近似。

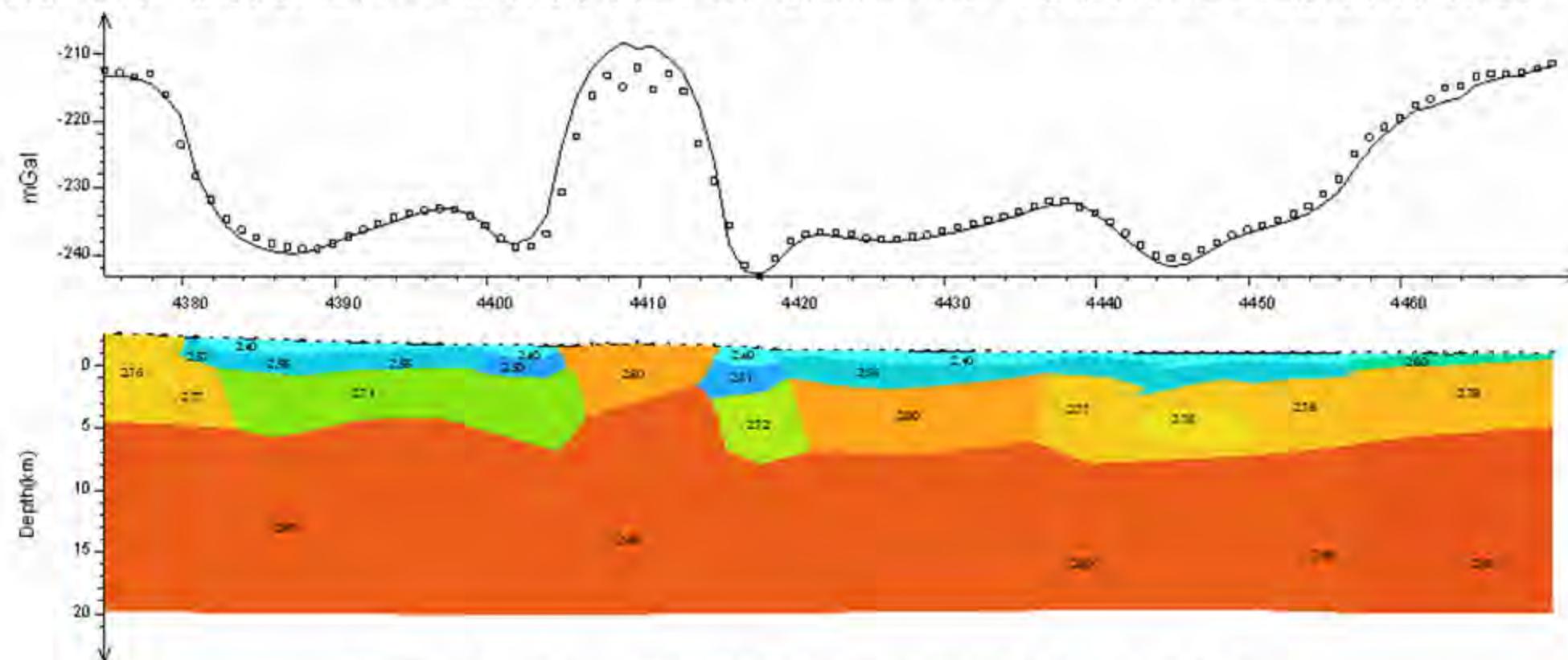
## 4.人机交互法

### ■人机交互法的特点

- ✓ 异常可以是整条剖面或整个测区的数据，受个别点误差的影响较小，  
**抗干扰的能力较强。**
- ✓ 需要重复而复杂的正演计算，可编制相应程序由计算机来**自动完成。**
- ✓ 解释复杂重力资料时，**能够考虑研究区已知的地质构造资料**，在反演过程中利用这些资料，控制或约束计算结果，使得到的地质模型更接近实际的地质体。

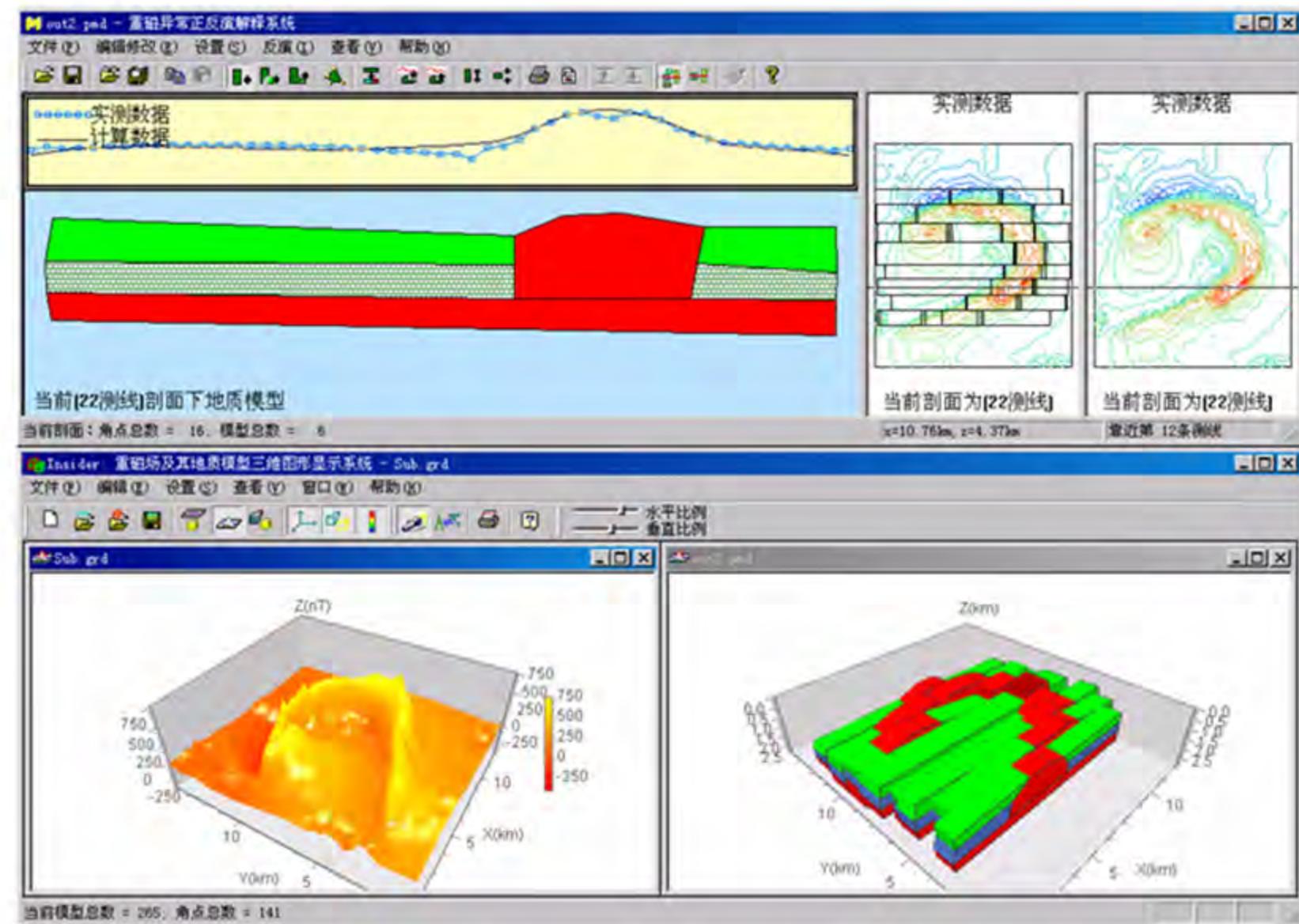
## 4.人机交互法

实测重力资料、地质模型及其正演计算的重力数据在计算机屏幕上始终以图形实体出现，可以直接对地质模型进行操作（修改、反演），实时计算修改后的地质模型所产生的重力值并与实测重力值进行比较；通过地质模型形态、物性的不断修改，使得重力正演计算值与实测值逐步拟合以达到反演目的。



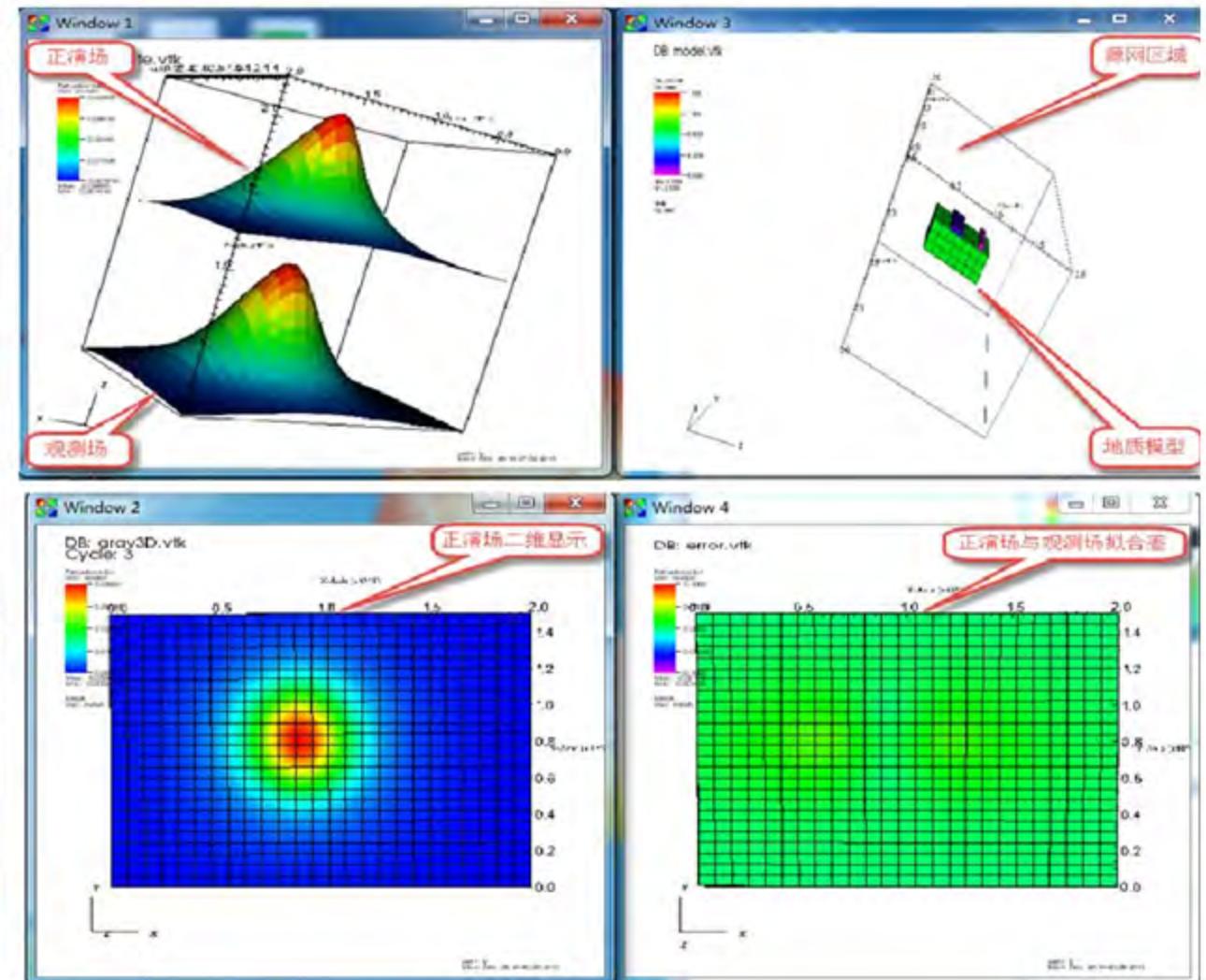
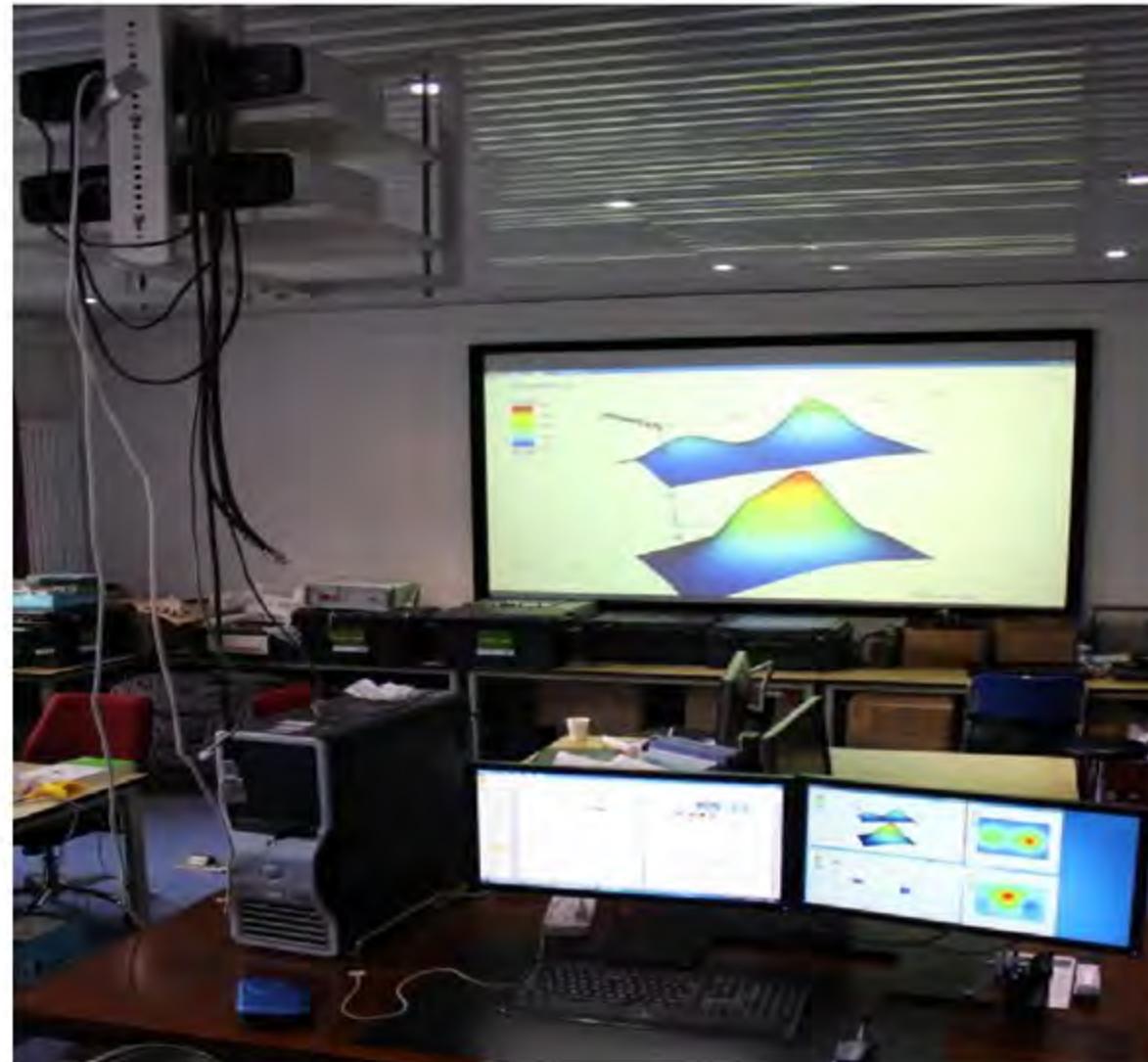
(据姚长利，重磁异常正反演解释系统)

## 4.人机交互法



(据姚长利, 重磁异常正反演解释系统)

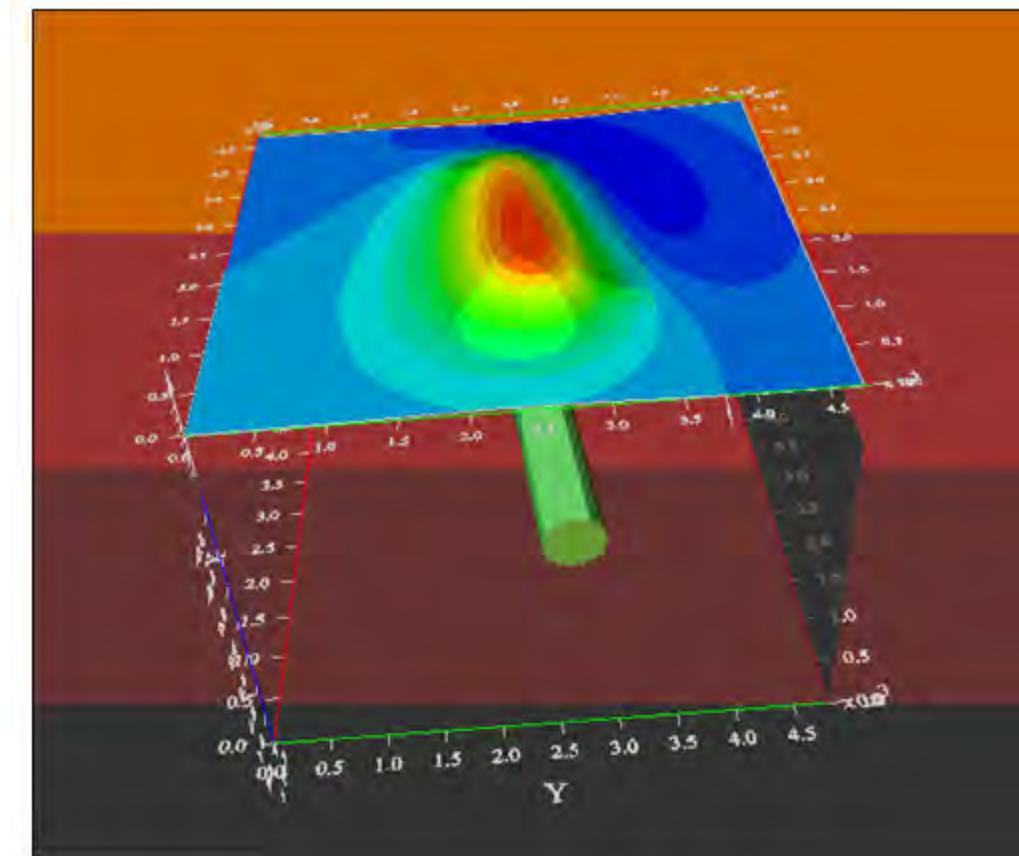
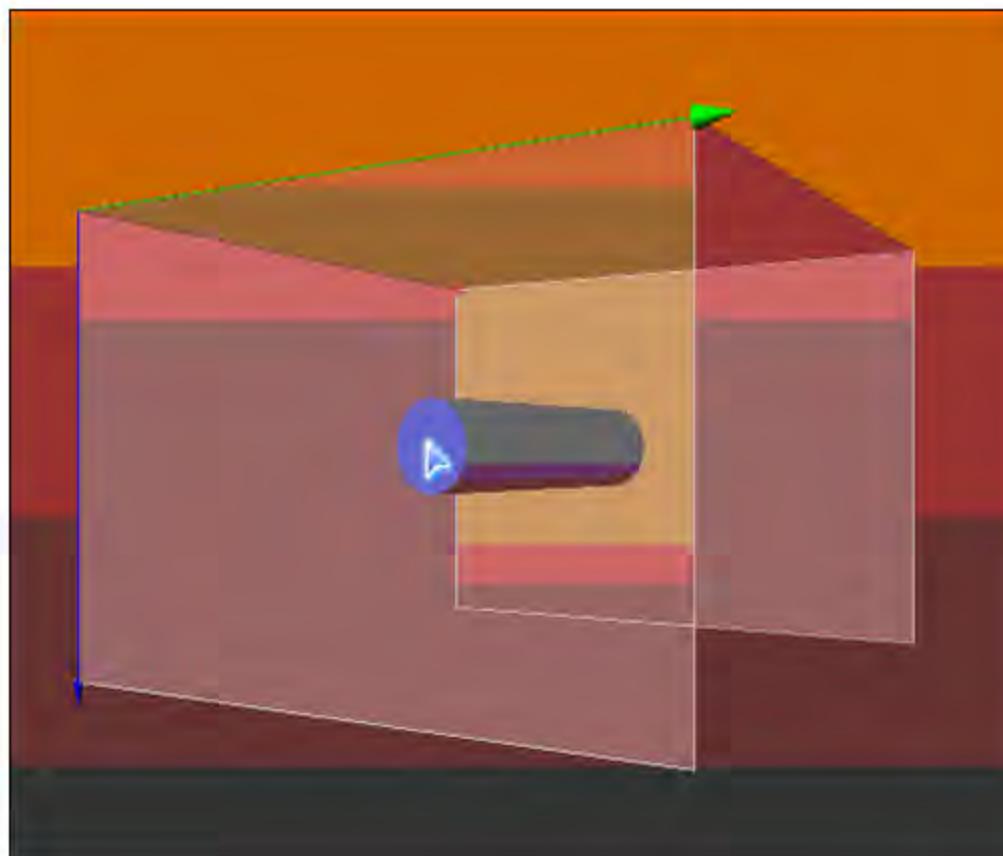
## 4.人机交互法



(据马朝阳, 真三维人机交互系统)

## 4.人机交互法

三维交互操作的简单动态示例



(据闫浩飞，航遥中心)

## 4.人机交互法

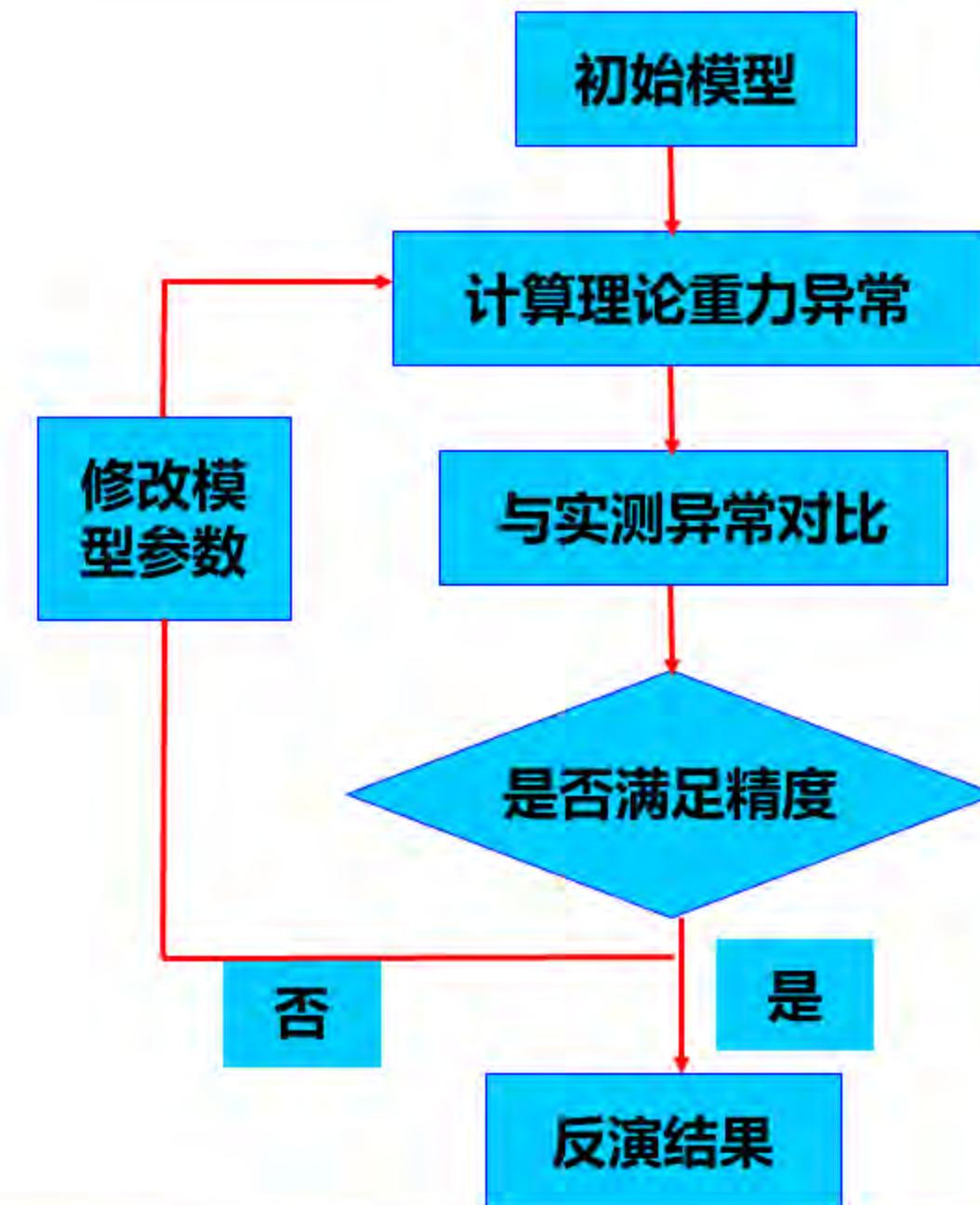


BRAINSTORM

人机交互法可以在电磁、地震中  
应用吗？

## 4.人机交互法

半自动人机交互  
(选择法)



## 4. 人机交互法

关键点：

a) 直立长方体组合的剖分规则：

- 水平 $x, y$ 方向等间隔剖分， $\Delta x, \Delta y$
- 垂直 $z$ 方向也以等间隔剖分， $\Delta z$ ，通常小于水平间隔

b) 单个长方体重力异常的计算

直立长方体在  $(x_p, y_p, z_p)$  点的重力异常

$$f_p(X) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K F_p(\xi, \eta, \zeta) \left|_{\substack{x_a + j \Delta x \\ x_a + (j-1) \Delta x}}^{x_a + j \Delta x} \right|_{z_1 \bar{y}}^{z_2 \bar{y}}$$

$$F_p(\xi, \eta, \zeta) = G \sigma \left[ \xi \ln(\eta + r) + \eta \ln(\xi + r) + \zeta \arctan \frac{\zeta r}{\xi \eta} \right]$$

$$r = \left[ (\xi - x_p)^2 + (\eta - y_p)^2 + (\zeta - z_p)^2 \right]^{1/2}$$

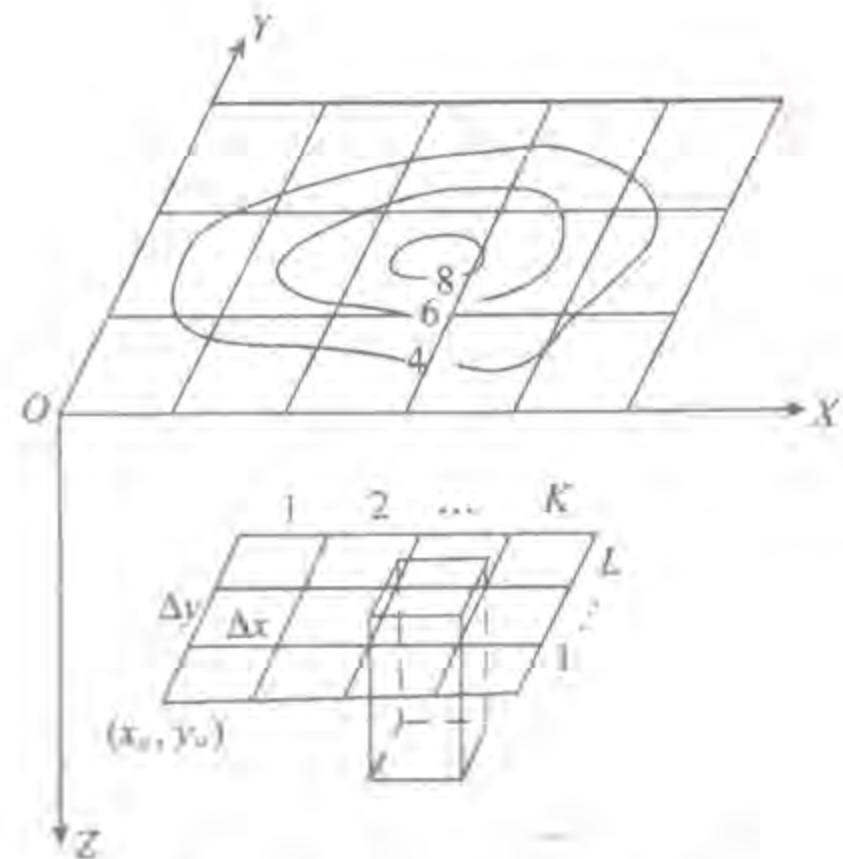


图 8-6 长方体组合模型

## 4. 人机交互法

关键点： c) 迭代计算公式的构造

$$\Phi(X) = \sum_{p=1}^M [\Delta g_p - f_p(X)]^2 = \min$$
$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi(X)}{\partial z_{111}} = 2 \sum_{p=1}^M [\Delta g_p - f_p(X)] \frac{\partial f_p(X)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi(X)}{\partial z_{211}} = 2 \sum_{p=1}^M [\Delta g_p - f_p(X)] \frac{\partial f_p(X)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_N} = \frac{\partial \Phi(X)}{\partial \sigma} = 2 \sum_{p=1}^M [\Delta g_p - f_p(X)] \frac{\partial f_p(X)}{\partial x_N} = 0 \end{array} \right]$$

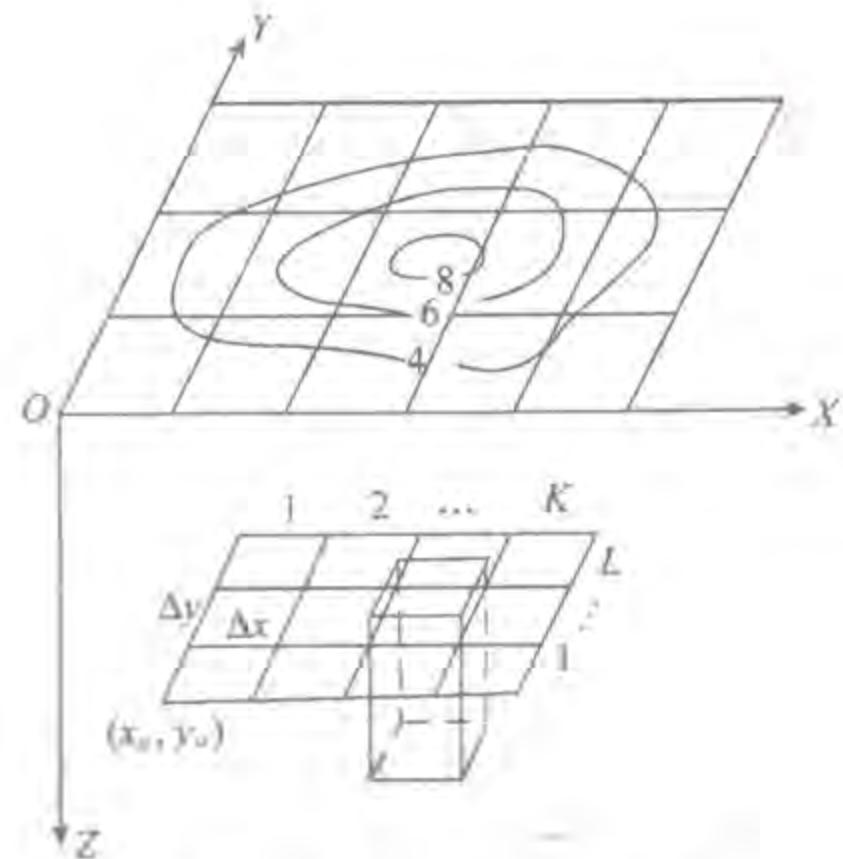


图 8-6 长方体组合模型

## 4. 人机交互法

关键点： d) 线性化处理

$$f_p(X) \approx f_p(X^{(0)}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_i} \delta_i$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_i} \delta_i$$

$$= \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \cdots + \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_N} \delta_N$$

$$\tilde{\Phi}(X) = \sum_{p=1}^M \left[ \Delta g_p - f_p(X^{(0)}) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_i} \delta_i \right]^2 = \min$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(X)}{\partial \delta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

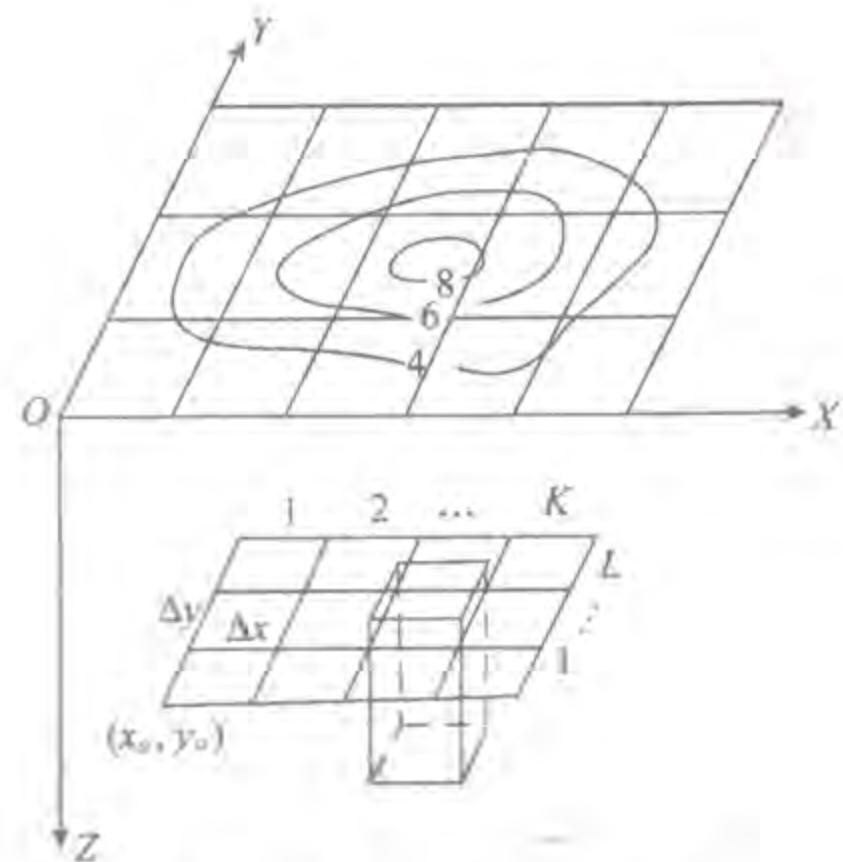


图 8-6 长方体组合模型

## 4.人机交互法

关键点： d)线性化处理

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^M \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N;$$

$$b_i = \sum_{p=1}^M (\Delta g_p - f_p(X^{(0)})) \frac{\partial f_p(X^{(0)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$A\delta = B$$

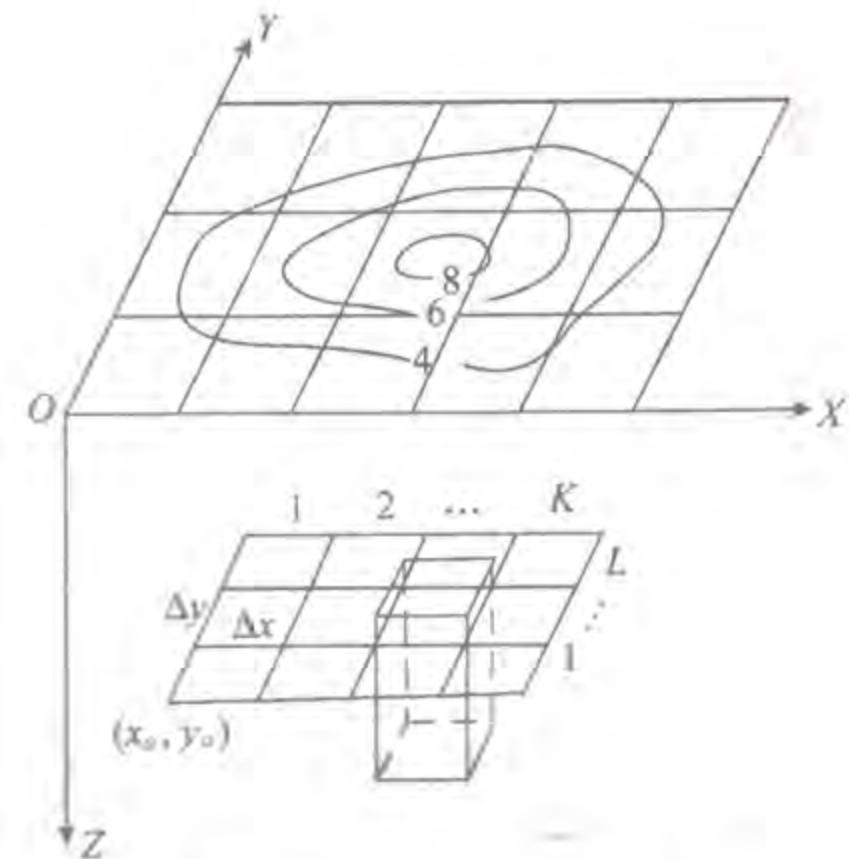


图 8-6 长方体组合模型

# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

第三节 特征点法

第四节 人机交互法

第五节 欧拉反褶积

## 5. 欧拉反褶积

### ■ 欧拉反演特点

1. 方法简明、快速
2. 对平面数据自动解释
3. 比特定反演方法所需要的场源信息少

## 5. 欧拉反褶积

### ■ 欧拉方程

- 欧拉方程：

$$(x - x_0) \frac{\partial T}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial T}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial T}{\partial z} = -NT$$

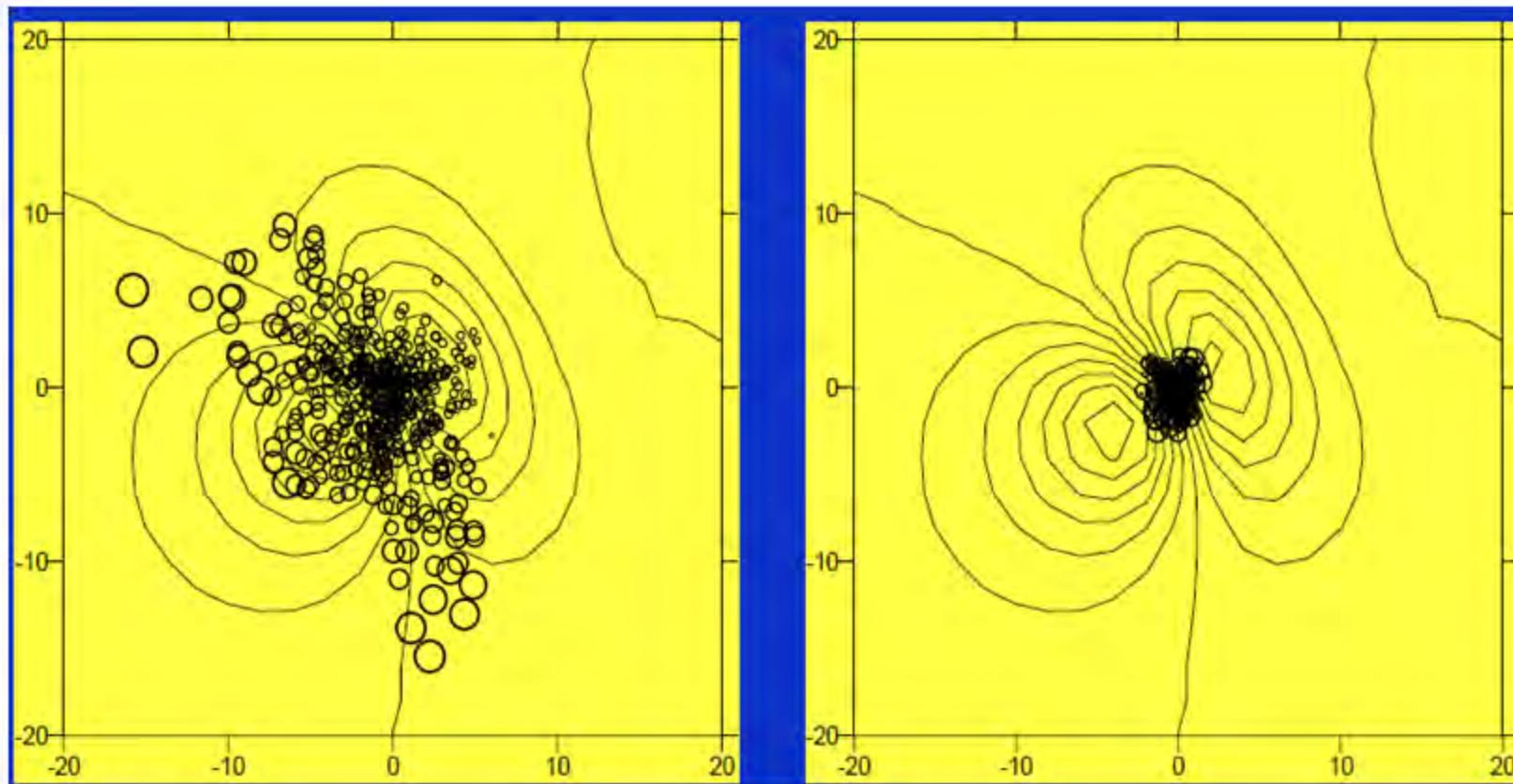
的一个解是： $T = \frac{k}{r^N}$

与分形几何中分维集定义： $N_n = \frac{C}{r_n^D}$

形式相同！

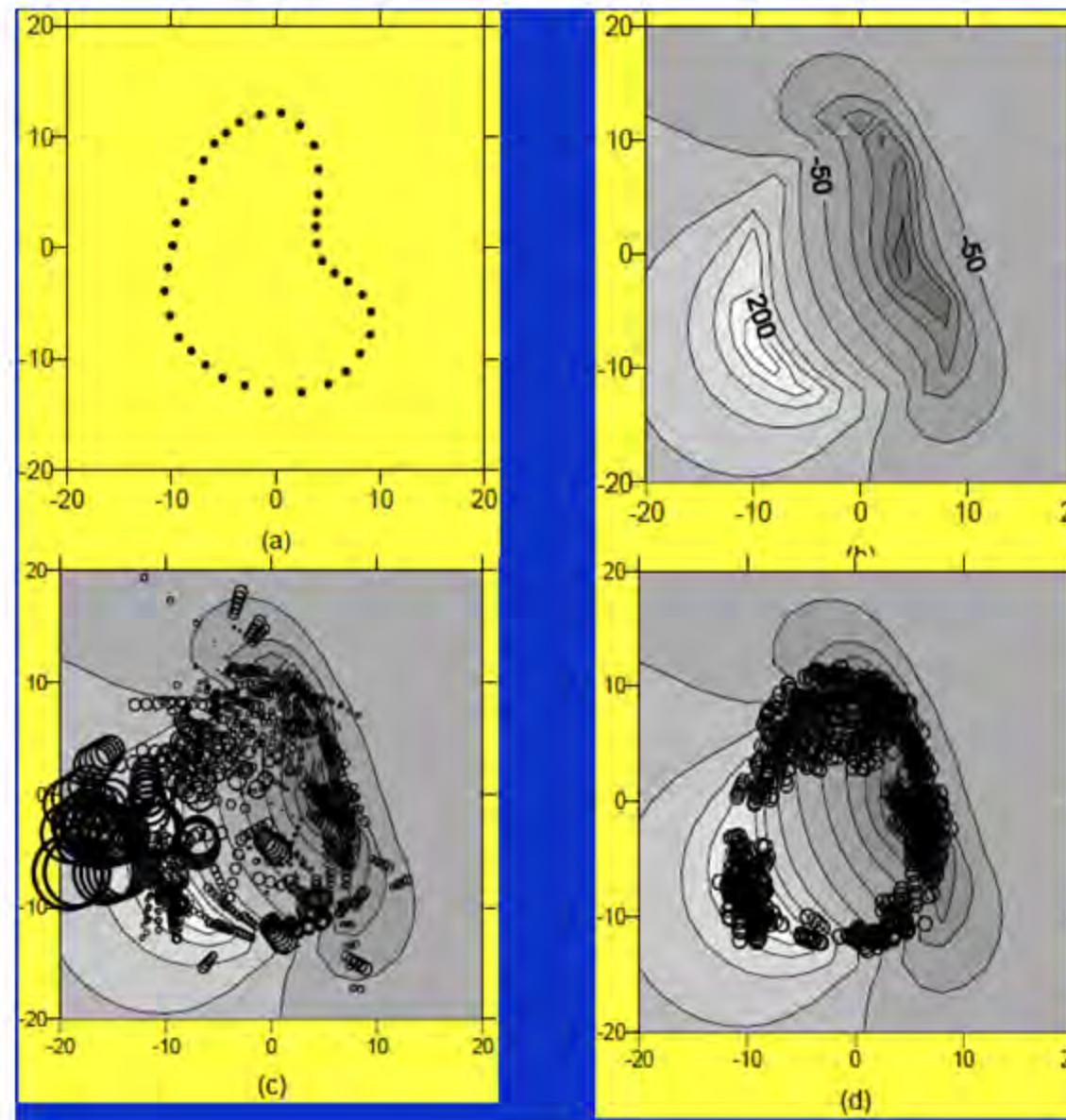
# 5. 欧拉反褶积

## ■ 欧拉方程



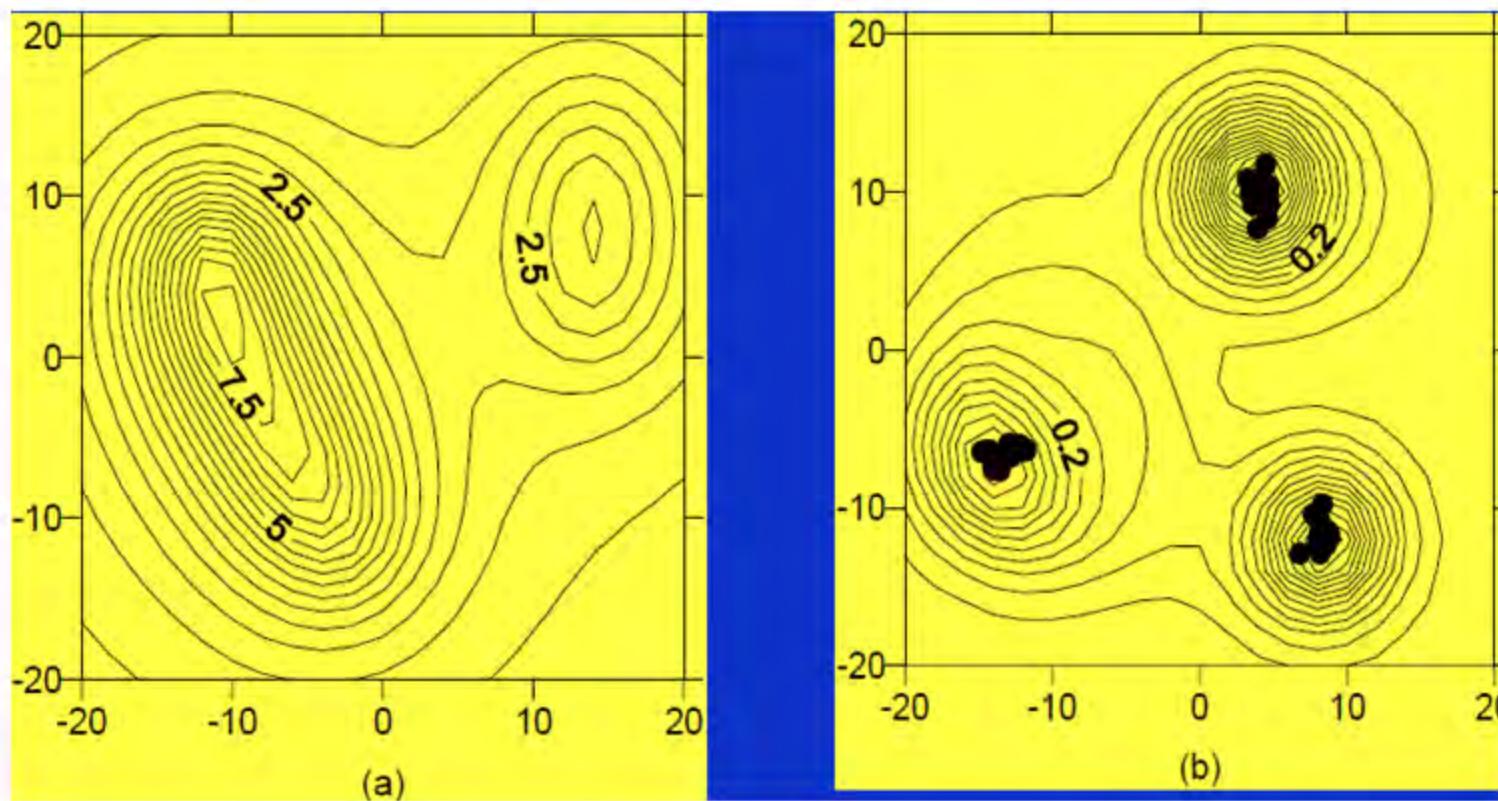
# 5. 欧拉反褶积

## ■ 欧拉方程



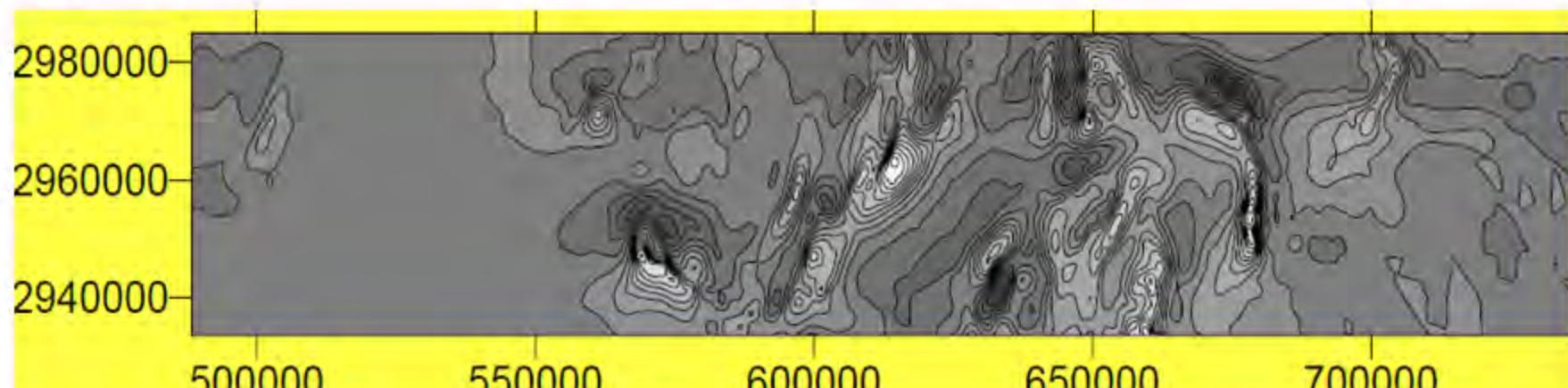
# 5. 欧拉反褶积

## ■ 欧拉方程

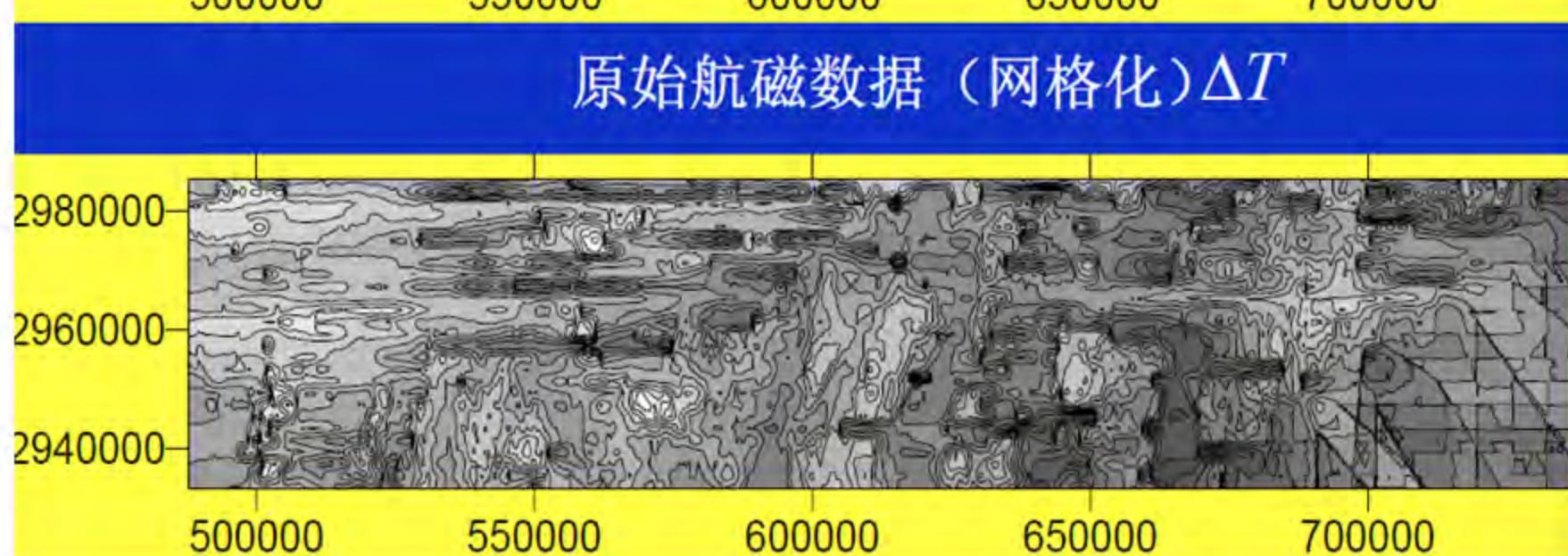


## 5. 欧拉反褶积

### ■ 欧拉方程



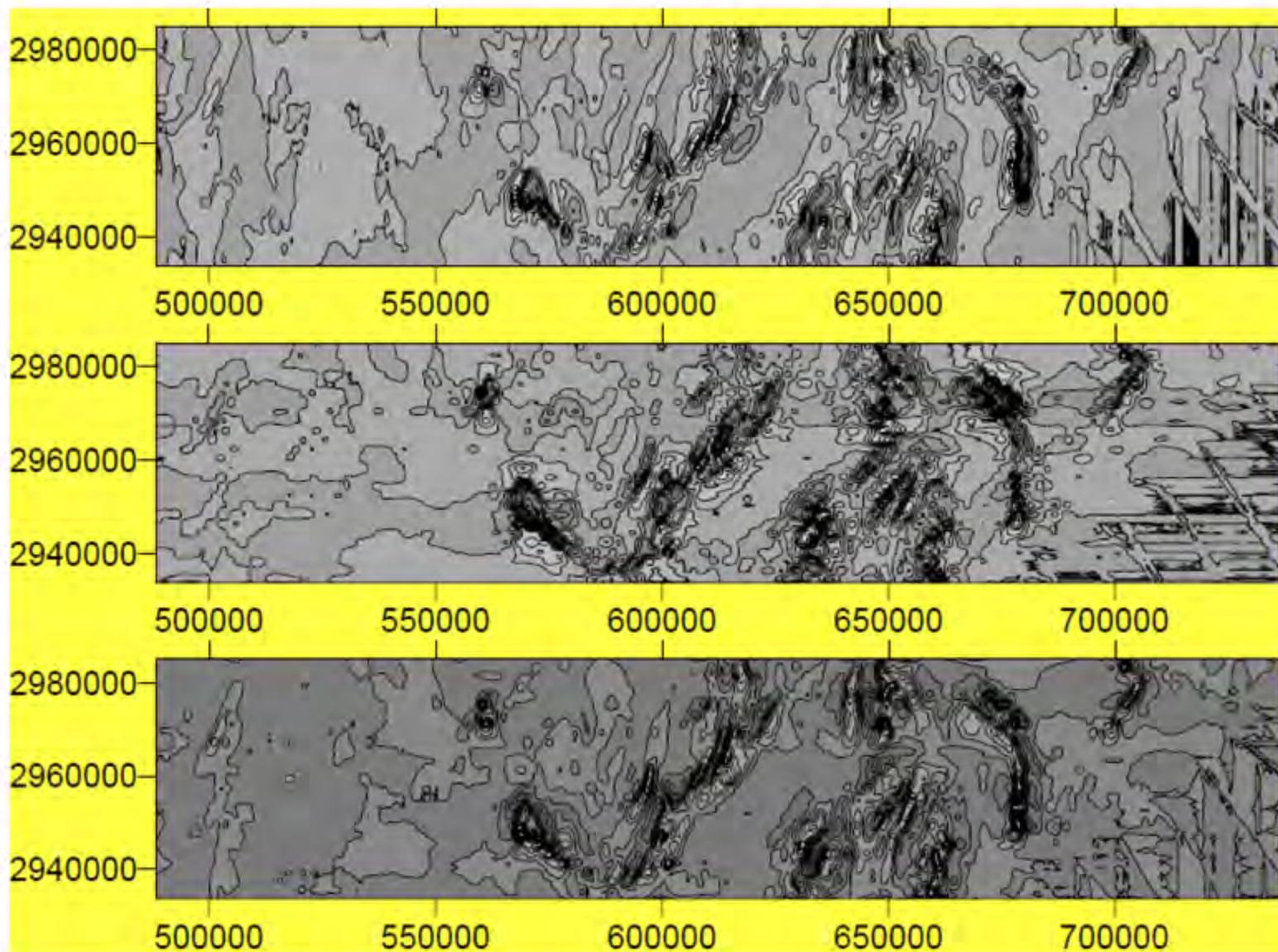
原始航磁数据（网格化） $\Delta T$



起伏观测面

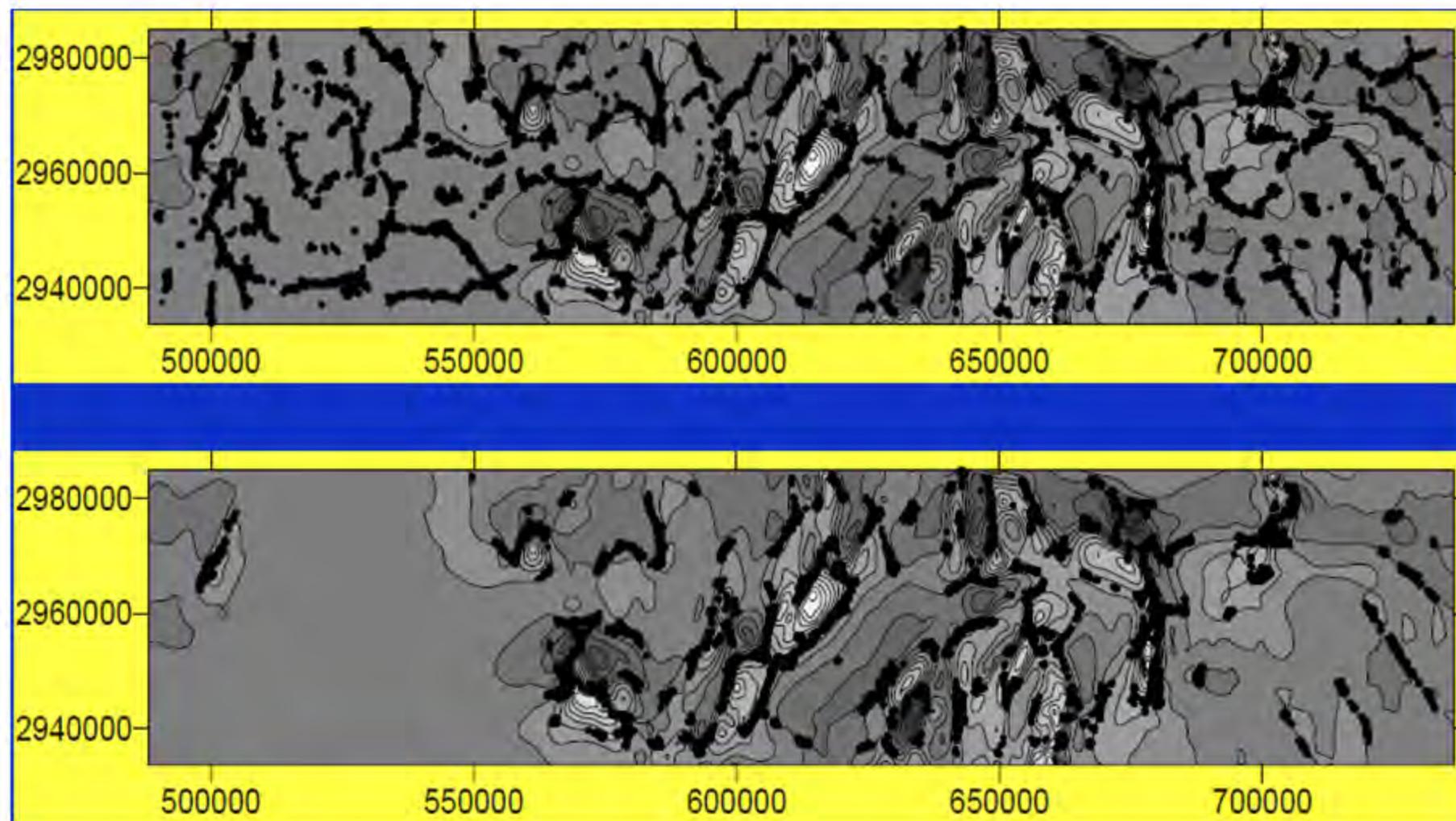
# 5. 欧拉反褶积

## ■ 欧拉方程



## 5. 欧拉反褶积

### ■ 欧拉方程



# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

第三节 特征点法

第四节 选择法

第五节 欧拉反褶积

第六节 密度成像

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像

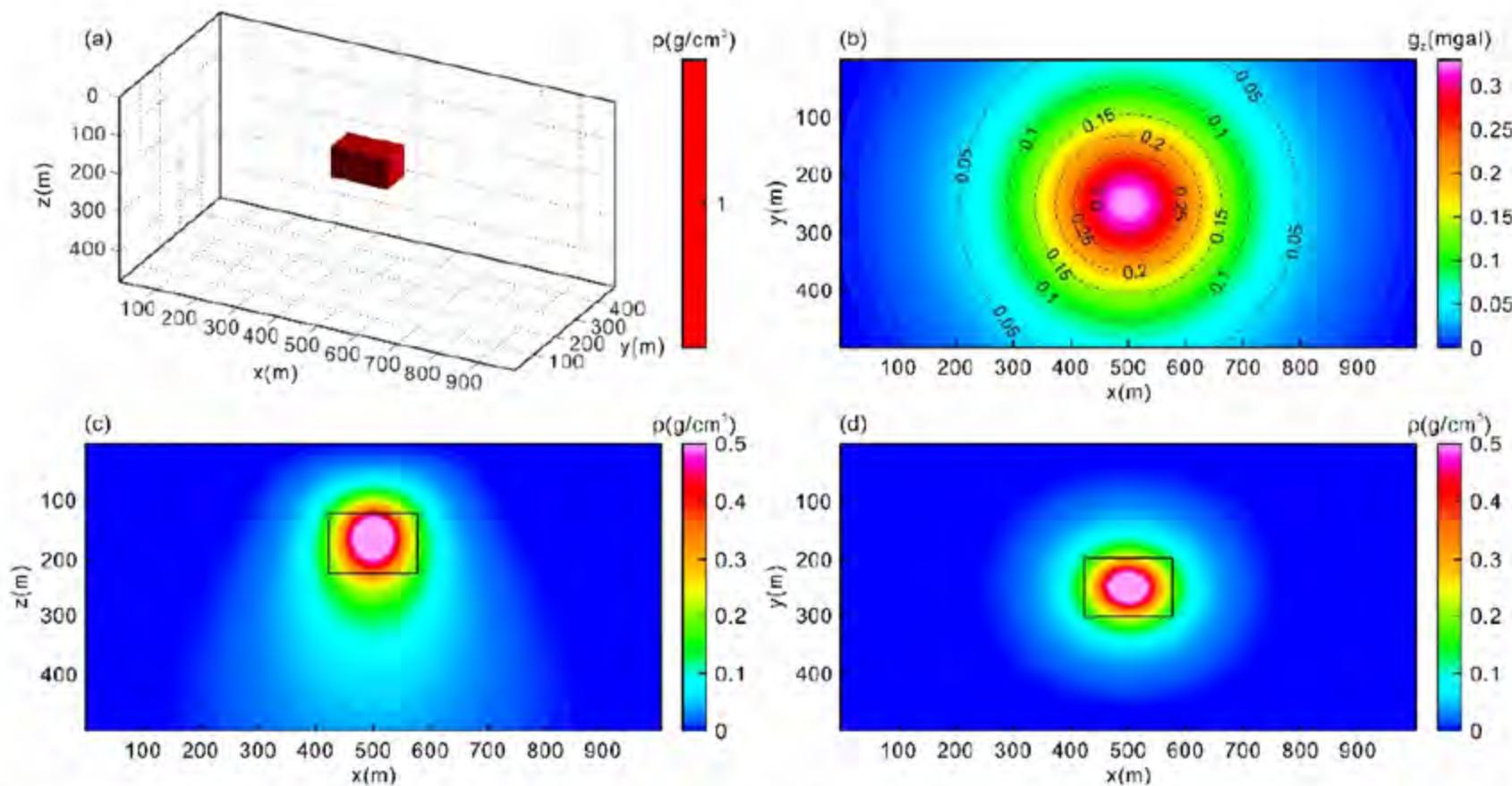


图 3.4 (a) 单体模型三维示意图; (b) 由模型产生的地面重力异常; (c) 三维正则化聚焦偏移结果在  $y=250\text{m}$  切片; (d) 三维正则化聚焦偏移在  $z=150\text{m}$  切片.

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像

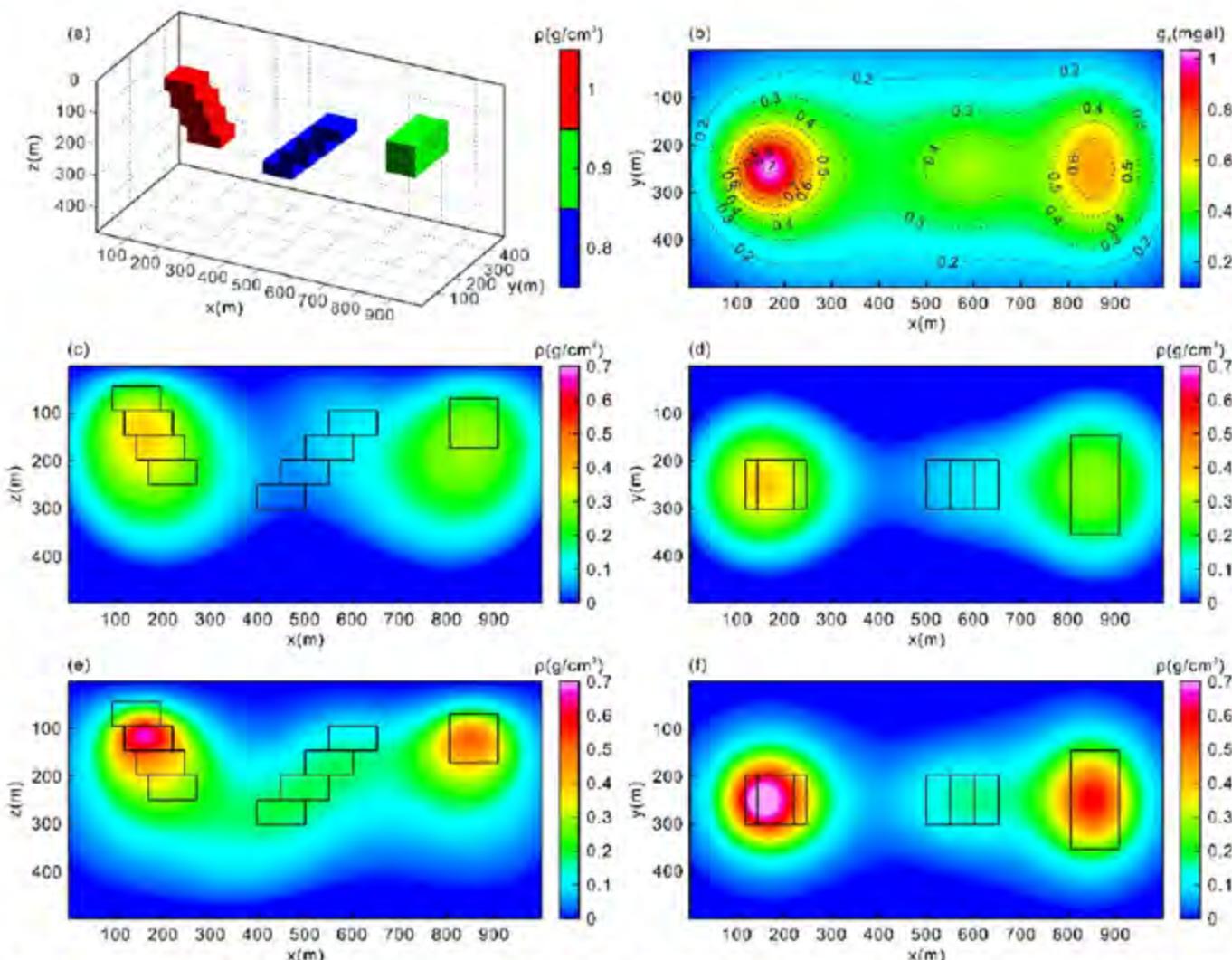


图 3.5 (a)地下模型三维示意图; (b)由模型产生的地面重力异常; (c)常规迭代偏移结果在  $y=250\text{m}$  切片; (d)常规迭代偏移在  $z=150\text{m}$  切片; (e)三维正则化聚焦偏移结果在  $y=250\text{m}$  切片; (f)三维正则化聚焦偏移结果在  $z=150\text{m}$  切片.

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像

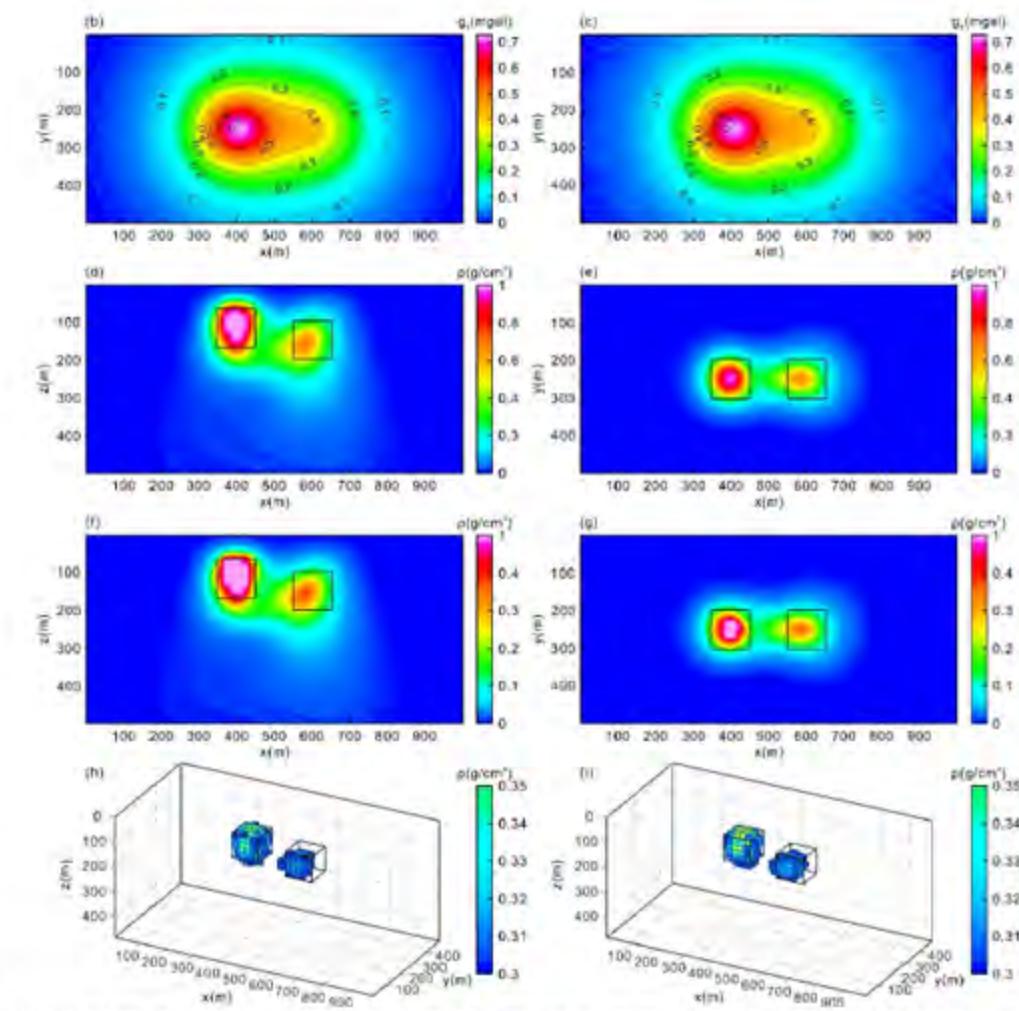
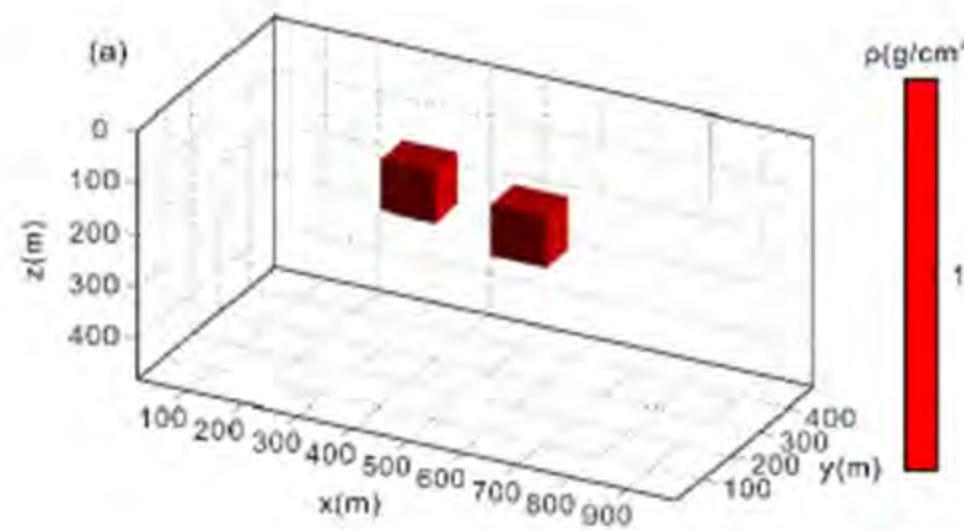


图 3.6 (a)地下模型的三维图; (b)由模型产生的地面重力异常; (c)含噪声地面重力异常;  
(d)无噪声重力数据成像结果在  $y=250\text{m}$  的切片; (e)无噪声重力数据成像结果在  $z=150\text{m}$   
的切片; (f)含噪声数据结果在  $y=250\text{m}$  的切片; (g)含噪声数据结果在  $z=150\text{m}$  的切片; (h)  
无噪声数据结果中密度大于  $0.3 \text{ g/cm}^3$  的块体图; (i)含噪声数据结果中密度大于  $0.3$   
 $\text{g/cm}^3$  的块体图.

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像

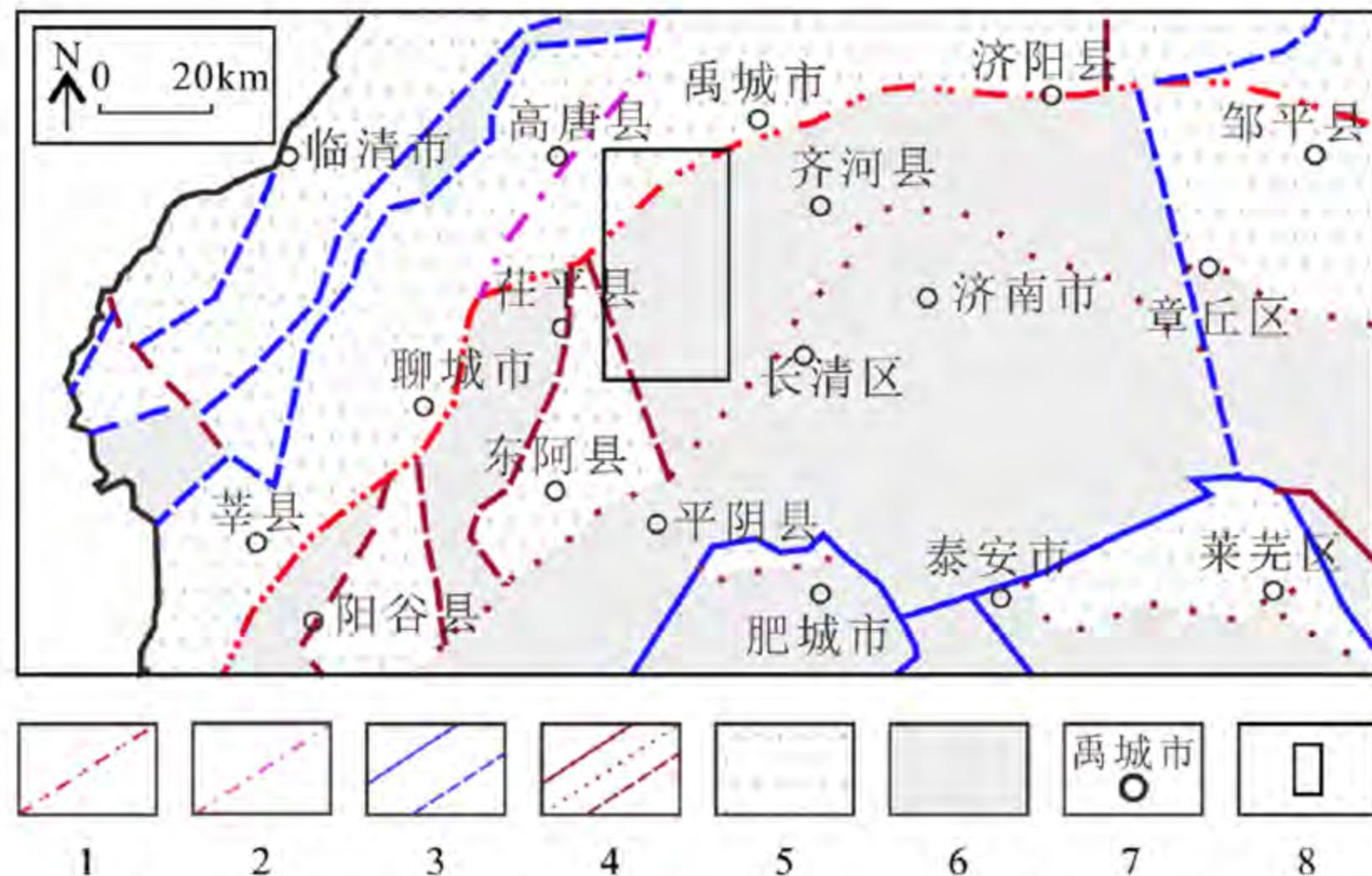


图 3.9 该地区构造背景图<sup>[61]</sup>调查区域被黑色矩形圈出。1-二级结构单元; 2-三级构造单元; 3-四级构造单元; 4-五级构造单元; 5-(潜在)凹陷区; 6-潜在凸起区; 7-地名; 8 -调查区域  
(据丁一丹, 2021)

## 6. 密度成像

### ■ 密度成像



(据丁一丹, 2021)

该地区重力测线分布。黑色矩形显示了我们进行正则化聚焦偏移的区域。

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像

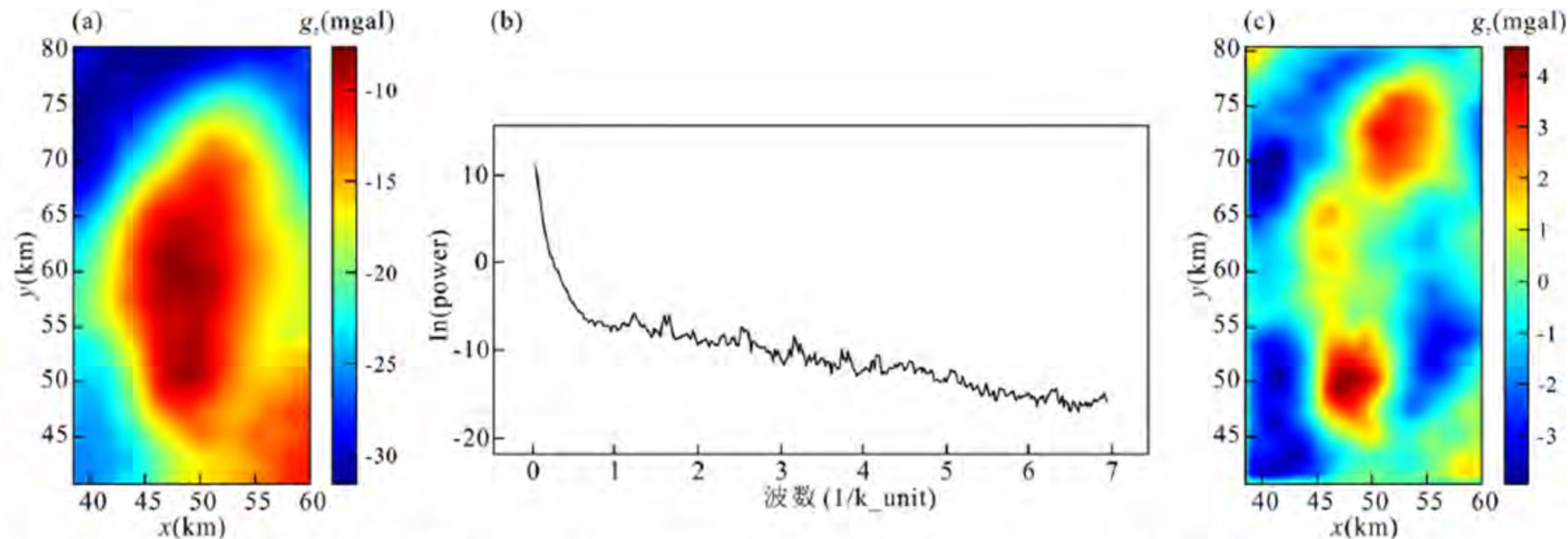


图 3.11 重力异常及其处理. (a)区域重力异常; (b)径向对数功率谱; (c)局部重力异常.

(据丁一丹, 2021)

## 6. 密度成像

### ■ 密度成像

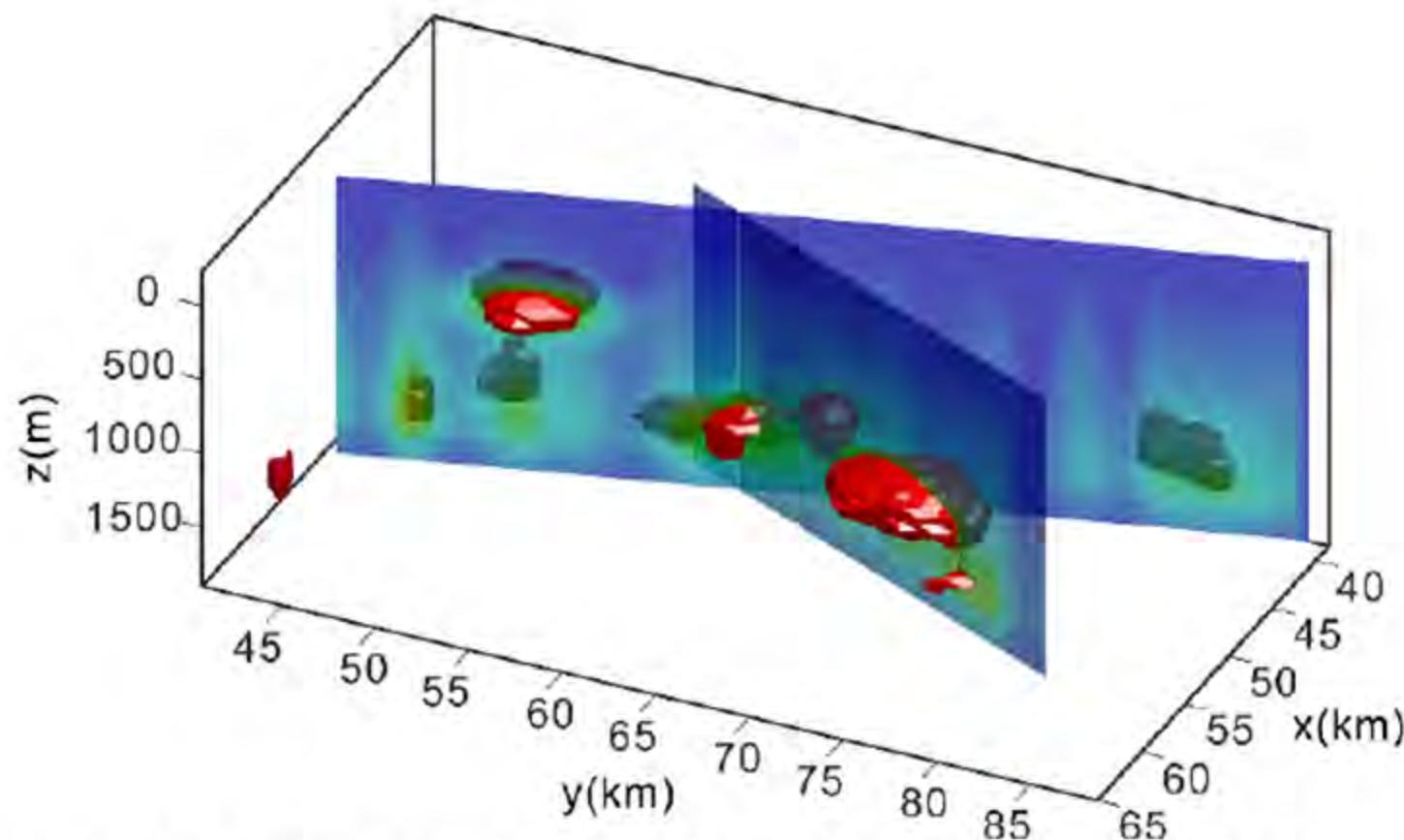
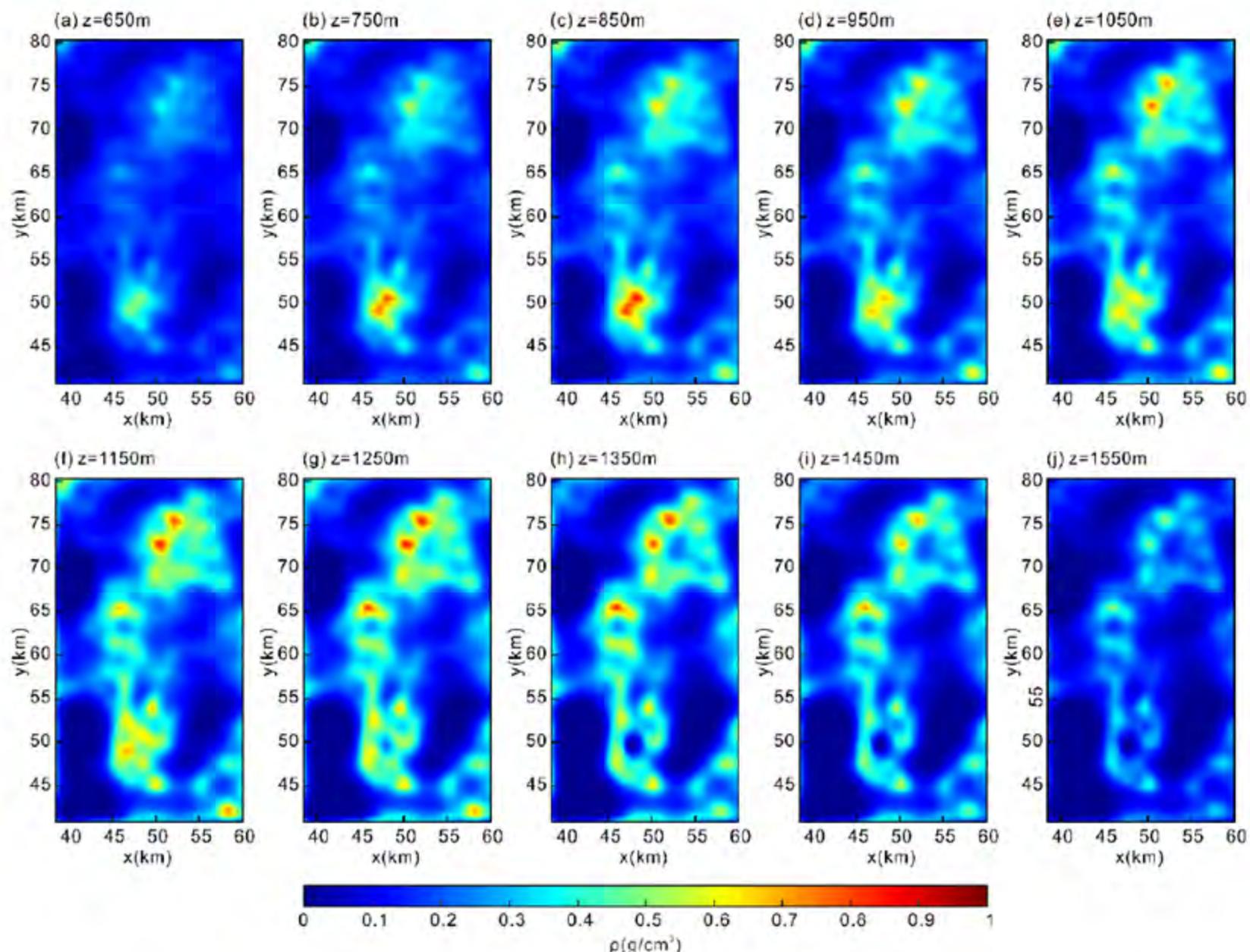


图 3.12 偏移密度模型的 3D 透视视图。红色异常体密度分布大于  $0.7 \text{ g/cm}^3$   
(据丁一丹, 2021)

# 6. 密度成像

## ■ 密度成像



(据丁一丹, 2021)

图 3.13 偏移成像结果在不同高度的水平切片.

# 目 录

第一节 重力异常反问题

第二节 直接法

第三节 特征点法

第四节 选择法

第五节 欧拉反褶积

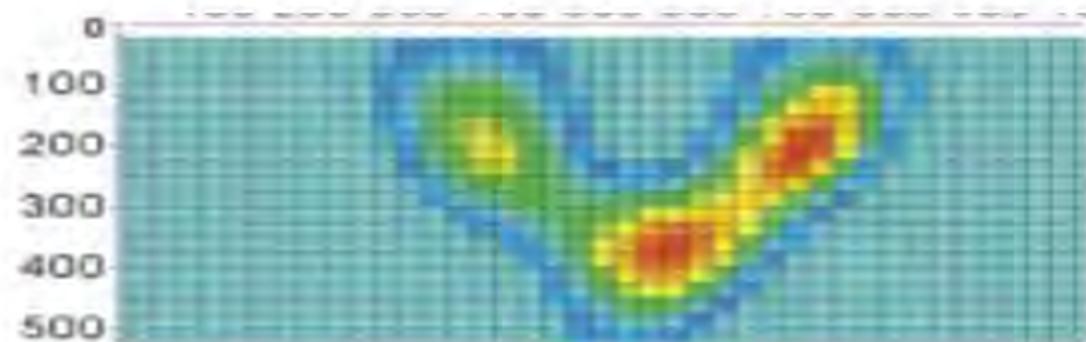
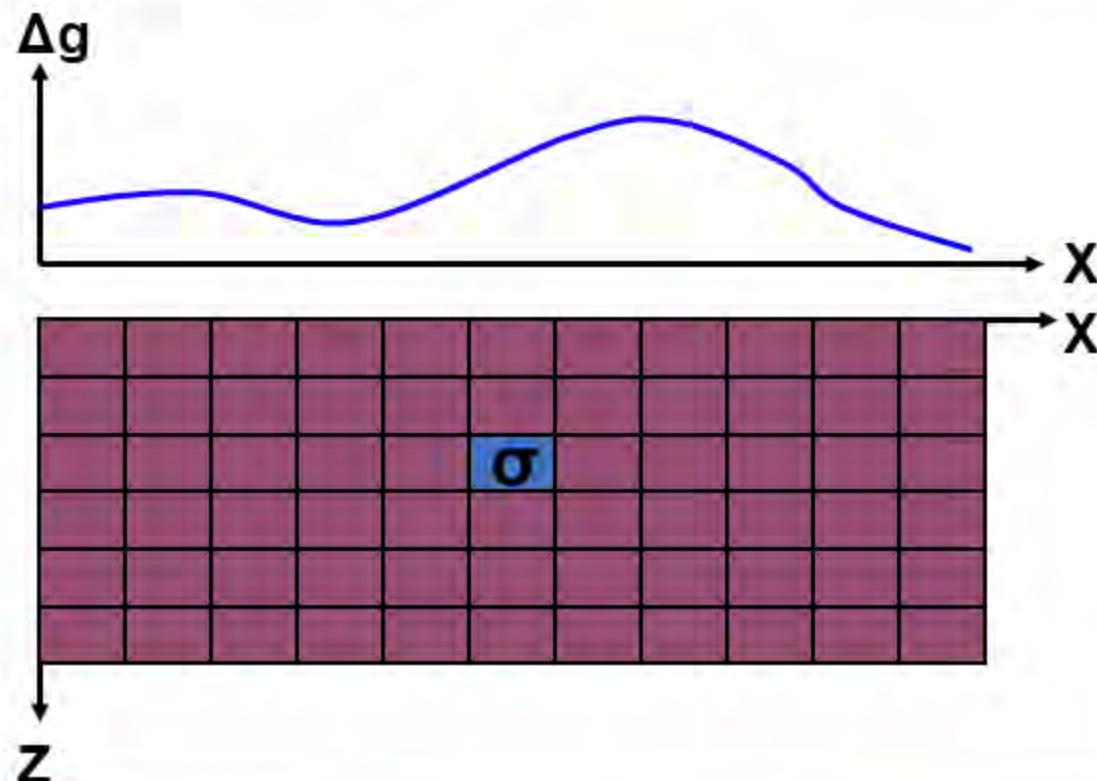
第六节 密度成像

第七节 反演

## 7. 反演

根据重力异常反演地下密度的不均匀分布。

根据密度分布图，就可以判断是否存在高(低)密度体及其大小、位置，或发现密度的分界面，再结合地质资料就可以作出地质上的结论。



# 7. 反演

## ■ 二维反演

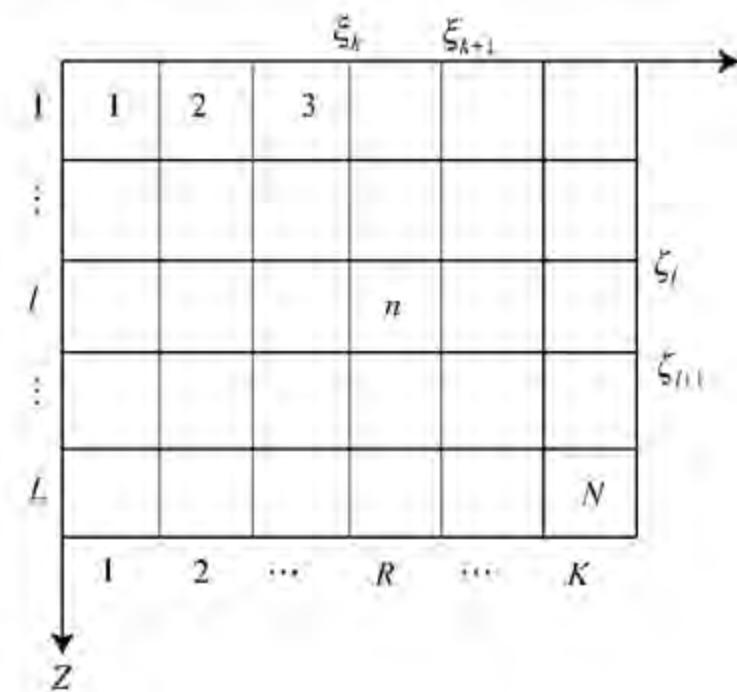
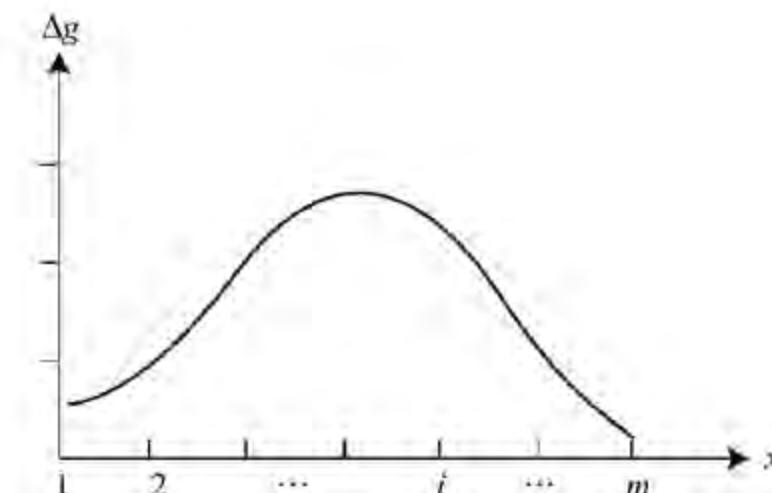
$$\Delta g_m = -2G\sigma_n \left[ x \ln(x^2 + z^2) + 2ztg^{-1} \frac{x}{z} \right]$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{k+1} \\ \xi_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \zeta_{l+1} \\ \zeta_l \end{vmatrix} = a_m \sigma_n$$

$$g_i = \sum_{n=1}^N a_m \sigma_n, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

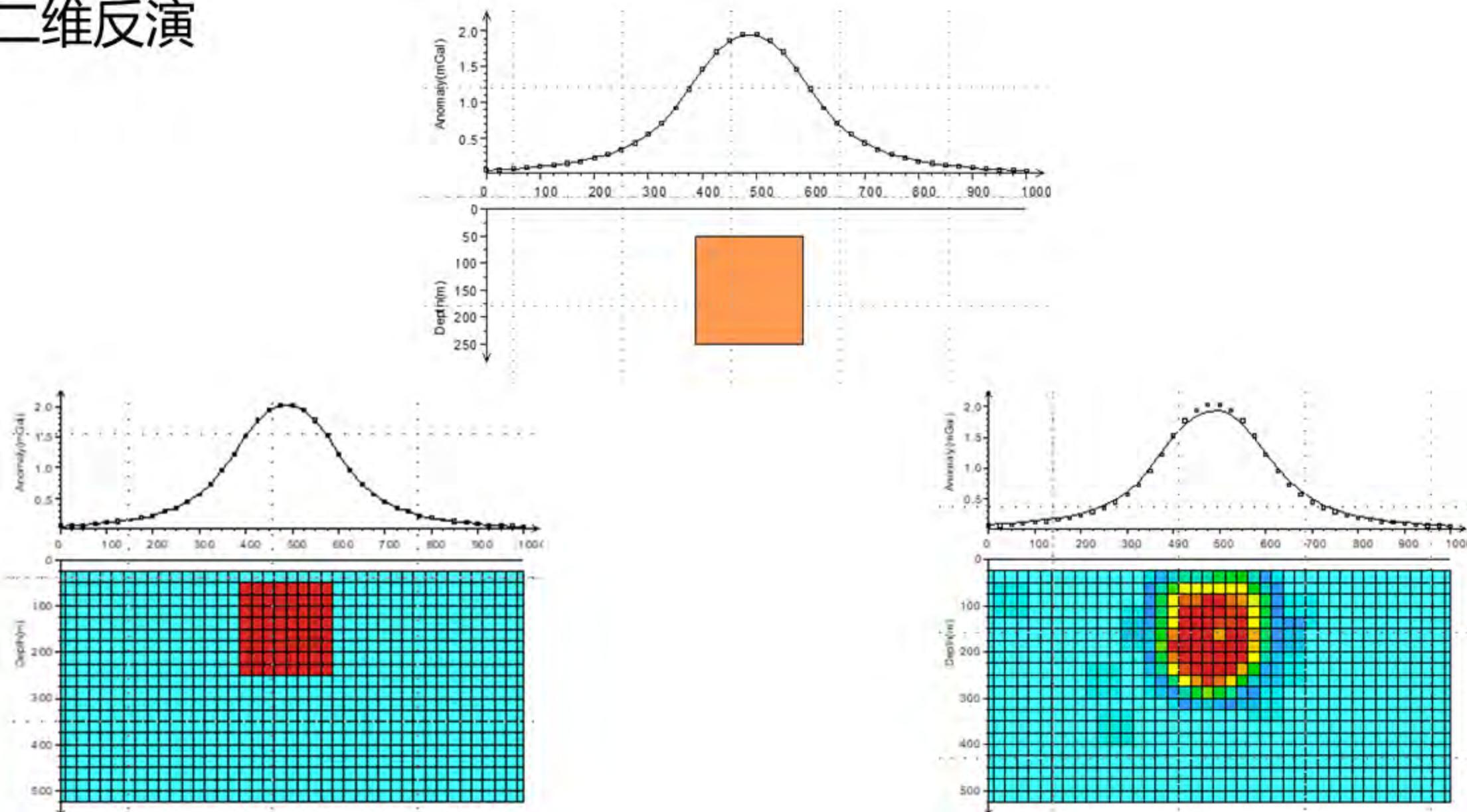
$$\begin{cases} a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_1 + \dots + a_{1N}\sigma_N = \Delta g_1 \\ a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_1 + \dots + a_{2N}\sigma_N = \Delta g_2 \\ \dots \dots \\ a_{m1}\sigma_1 + a_{m2}\sigma_1 + \dots + a_{mN}\sigma_N = \Delta g_m \end{cases}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{G}$$



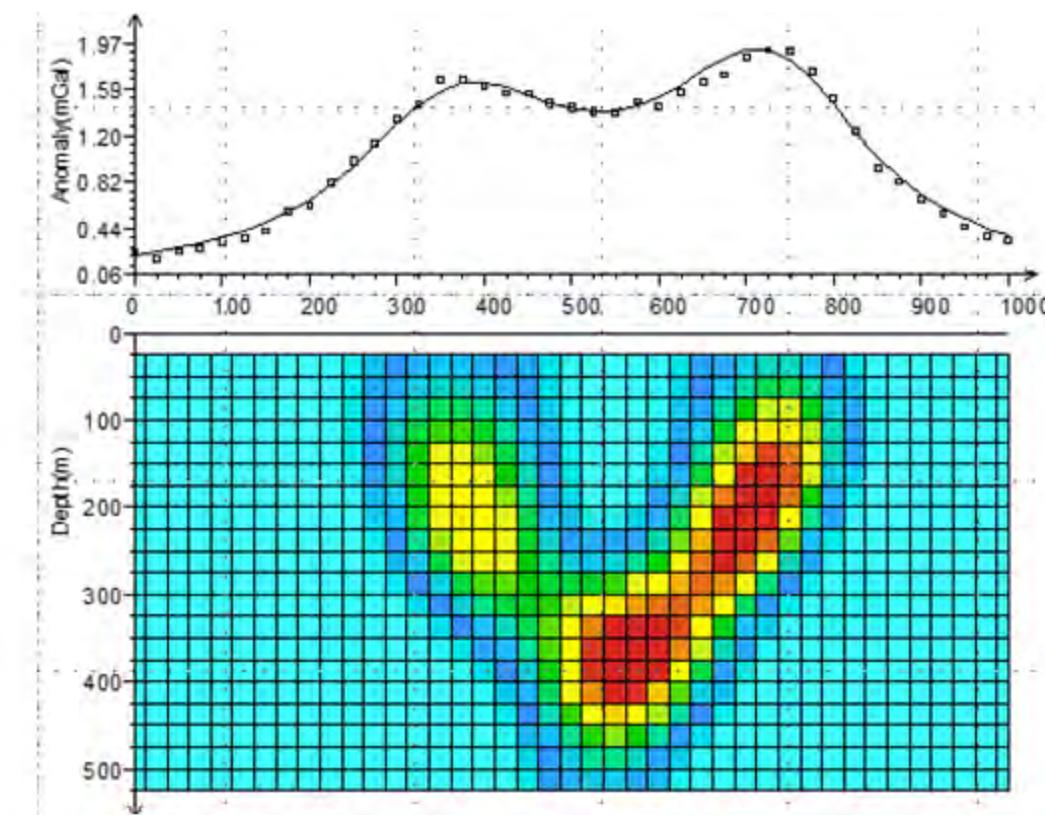
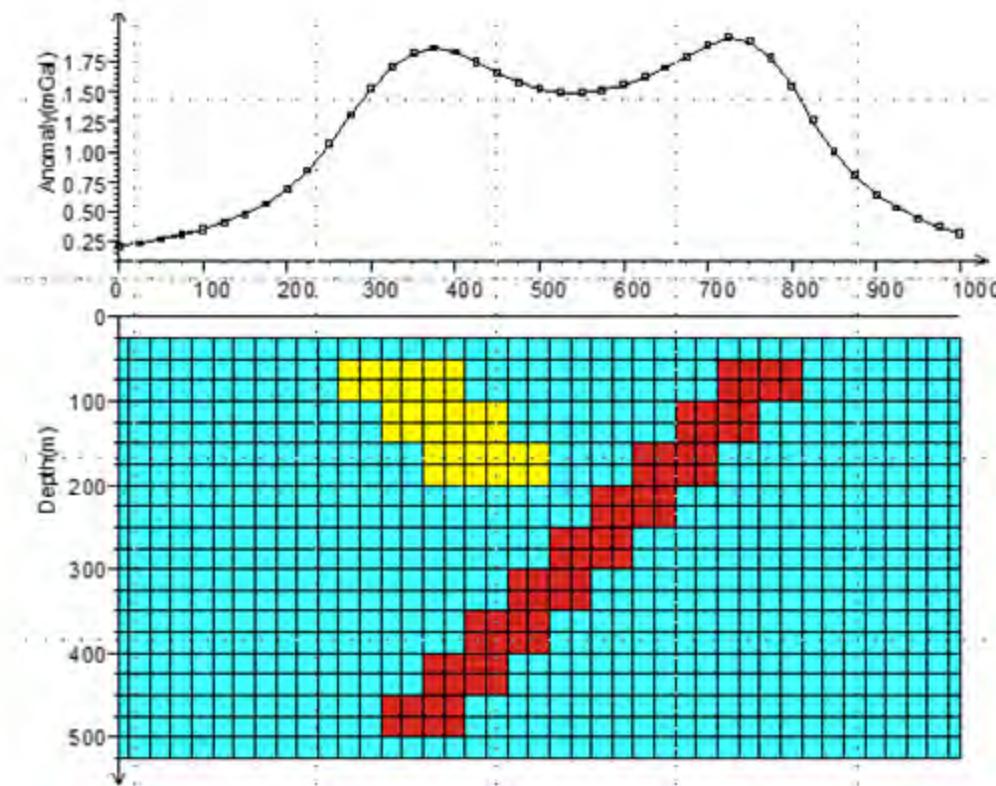
# 7. 反演

## ■ 二维反演



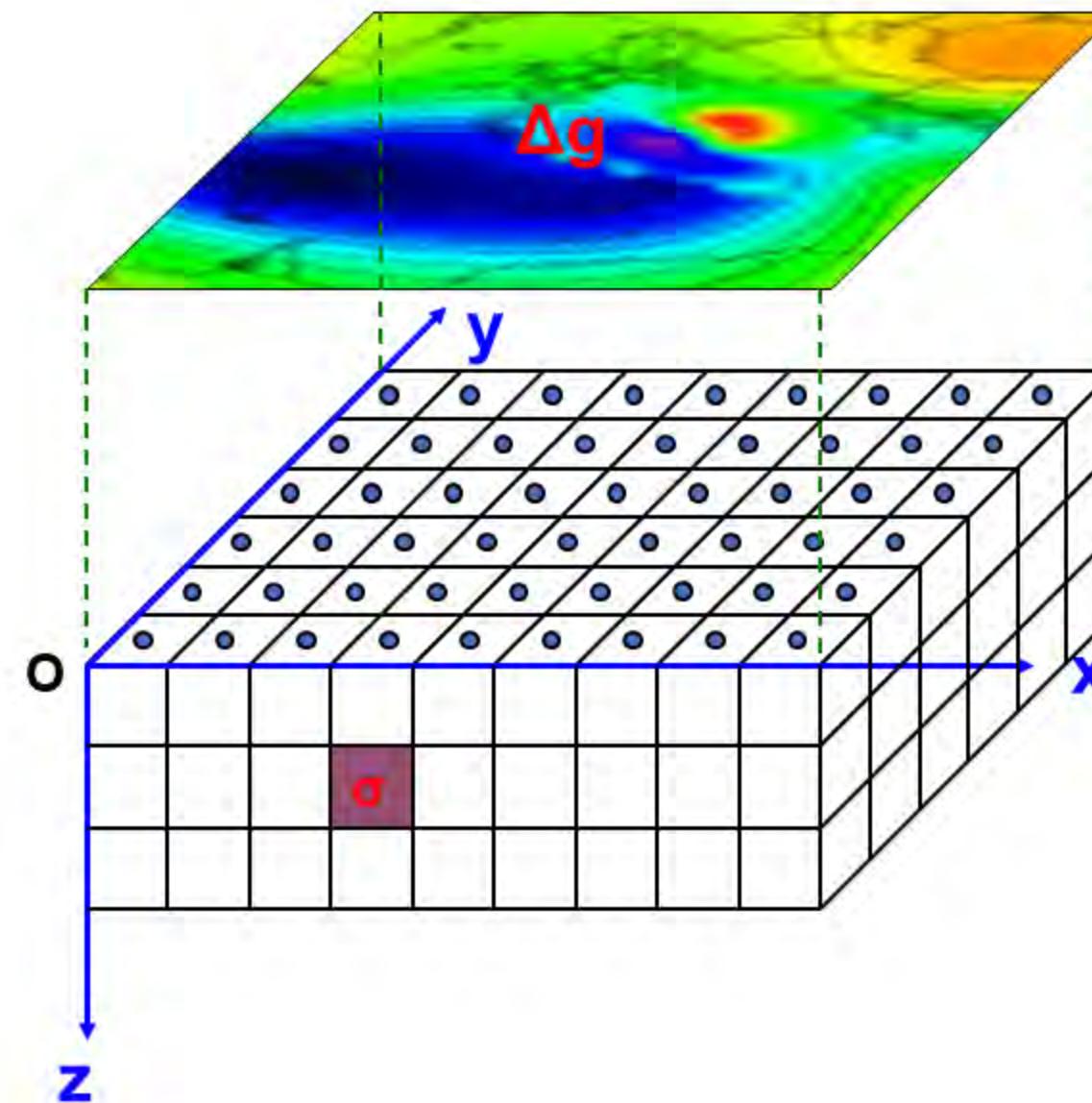
# 7. 反演

## ■ 二维反演



## 7. 反演

### ■ 三维反演



# 7. 反演

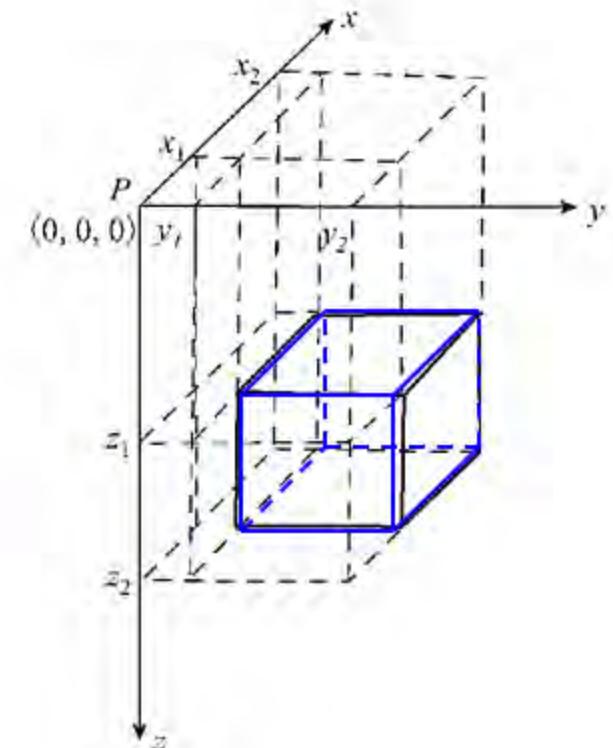
## ■ 三维反演

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

$$\Delta g = -G\sigma \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \left[ \xi \ln(\eta + \rho) + \eta \ln(\xi + \rho) - \zeta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi\eta}{\zeta\rho} \right] \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \\ z_1 \end{array} \right.$$

$$\frac{\Delta g}{\sigma} = -G \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \left[ \xi \ln(\eta + \rho) + \eta \ln(\xi + \rho) - \zeta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi\eta}{\zeta\rho} \right] \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \\ z_1 \end{array} \right.$$
  
$$= F$$

$$\Delta g = F\sigma$$



## 7. 反演

### ■ 三维反演

下半空间剖分为 $M$ 个长方体，观测面上有 $N$ 个观测点

$$\Delta g_{ij} = F_{ij} \sigma_j$$

$$\Delta g_i = \sum_{j=1}^M F_{ij} \sigma_j, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \vdots \\ \Delta g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1M} \\ F_{21} & F_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & \cdots & \cdots & F_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$$

## 7. 反演

### ■ 三维反演

下半空间剖分为 $M$ 个长方体，观测面上有 $N$ 个观测点

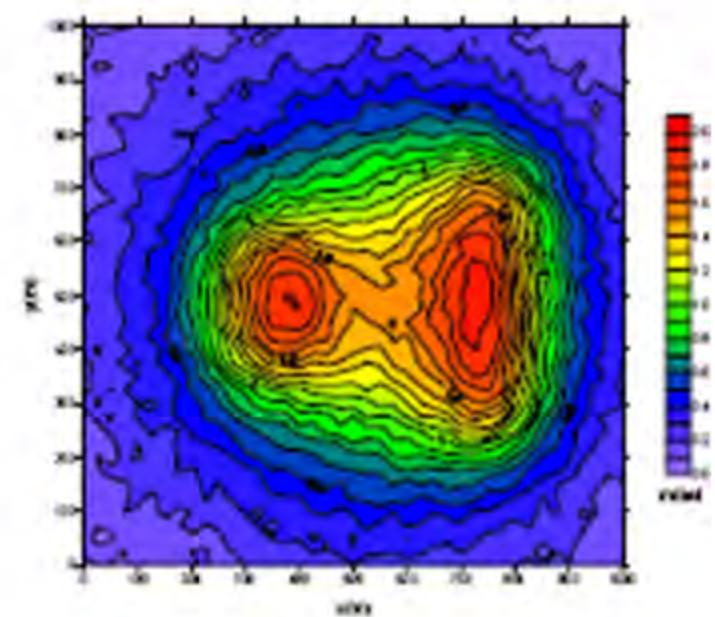
$$\mathbf{F}\mathbf{P} = \Delta\mathbf{G}$$

$$\text{当 } M = N \text{ 时, } \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\Delta\mathbf{G}$$

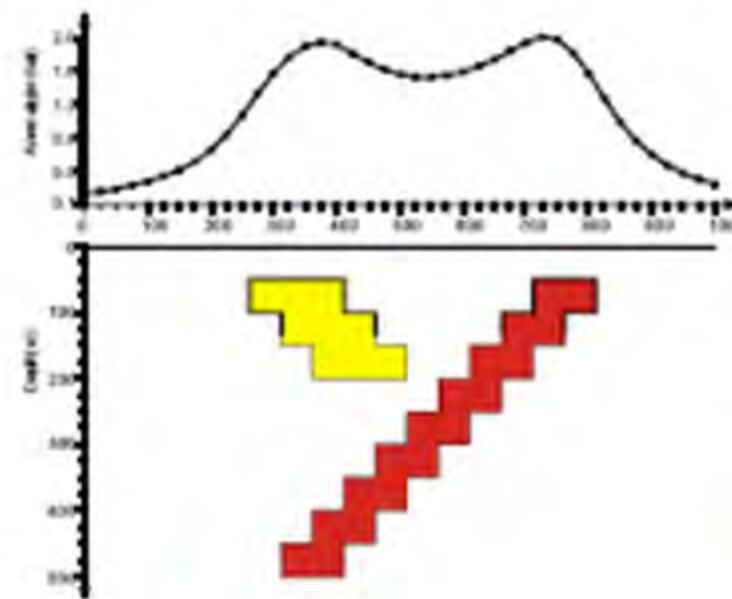
$$\text{当 } M > N \text{ 时, } \mathbf{P} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^{-1} \Delta\mathbf{G}$$

# 7. 反演

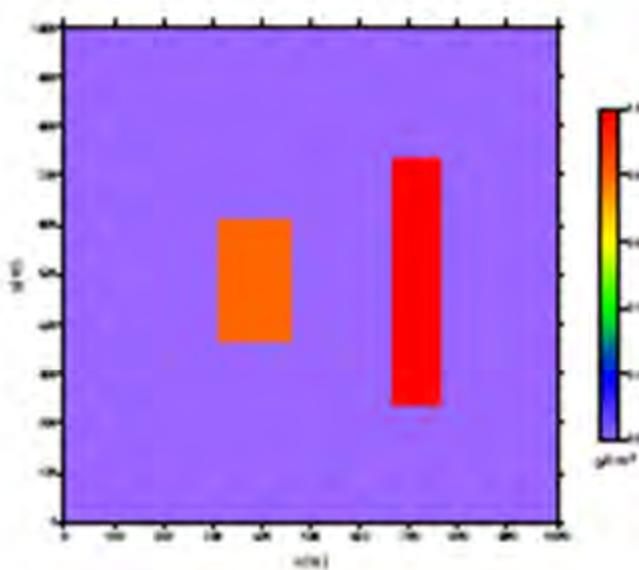
## ■ 三维反演



(a)



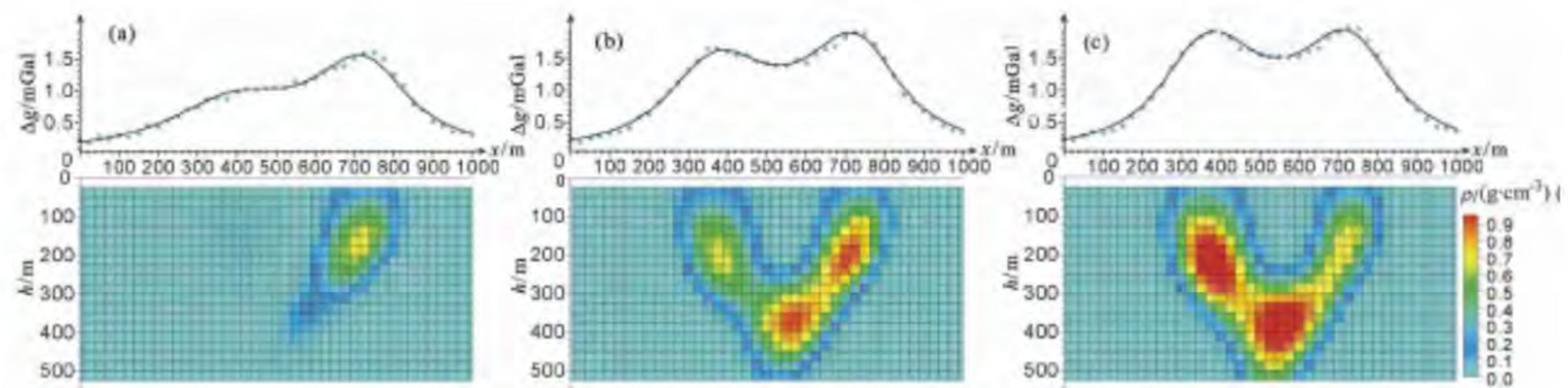
(b)



(c)

## 7. 反演

### ■ 三维反演



(据姚长利, 2007)

## 7. 反演

### ■ 三维反演

(据刘天佑, 2007)

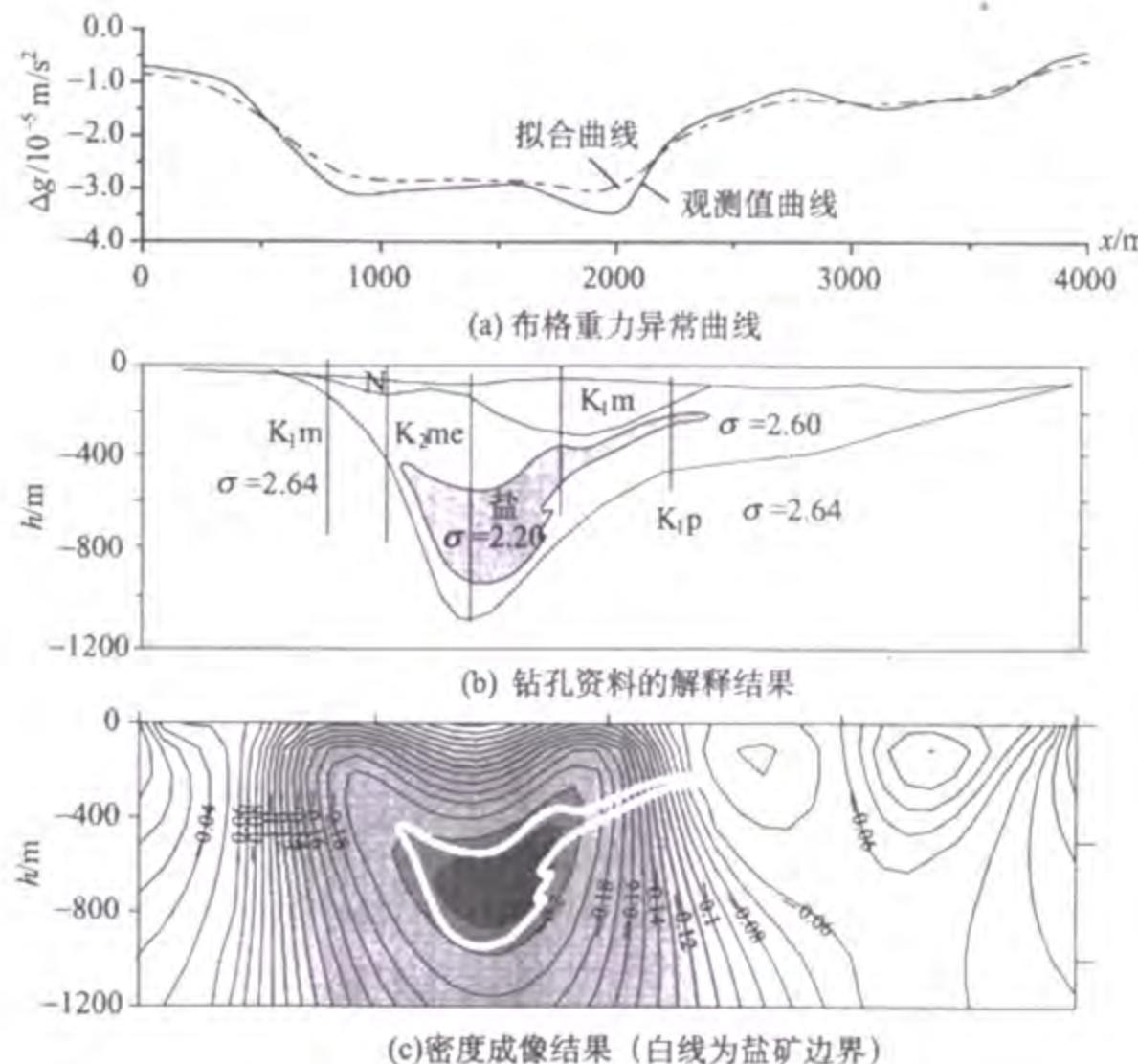


图 3.6 滇南某盐矿密度成像结果与钻孔资料解释结果对比图

## 7. 反演

### ■ 三维反演

(据刘天佑, 2007)

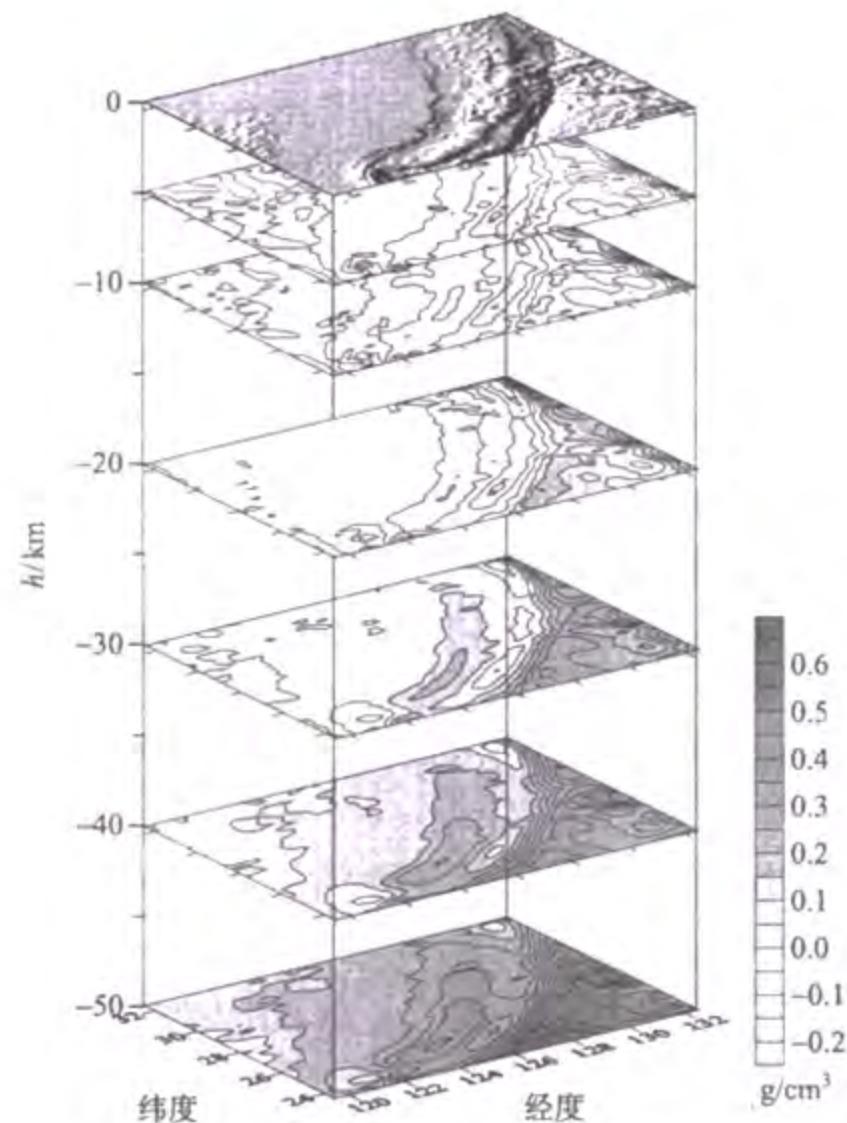


图 3.7 冲绳海槽三维密度成像水平切片图

## 7. 反演

### ■ 三维反演

(据刘天佑, 2007)

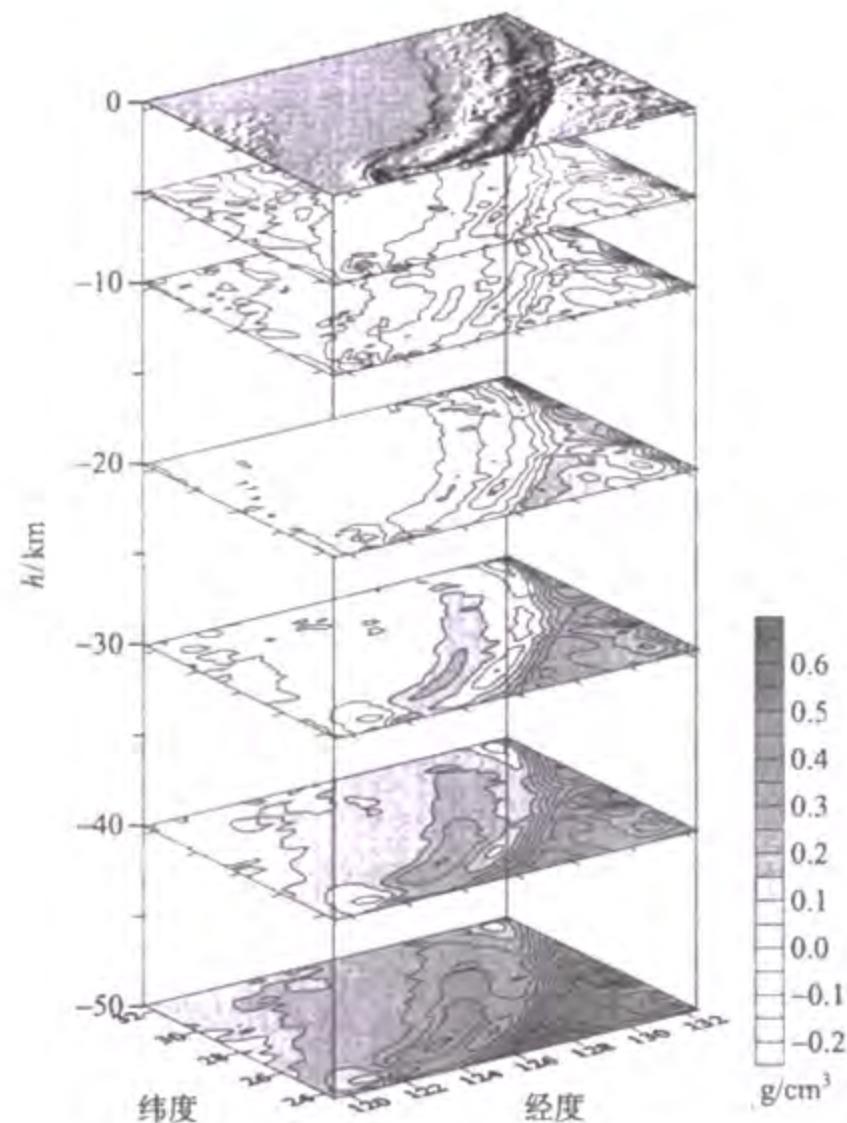
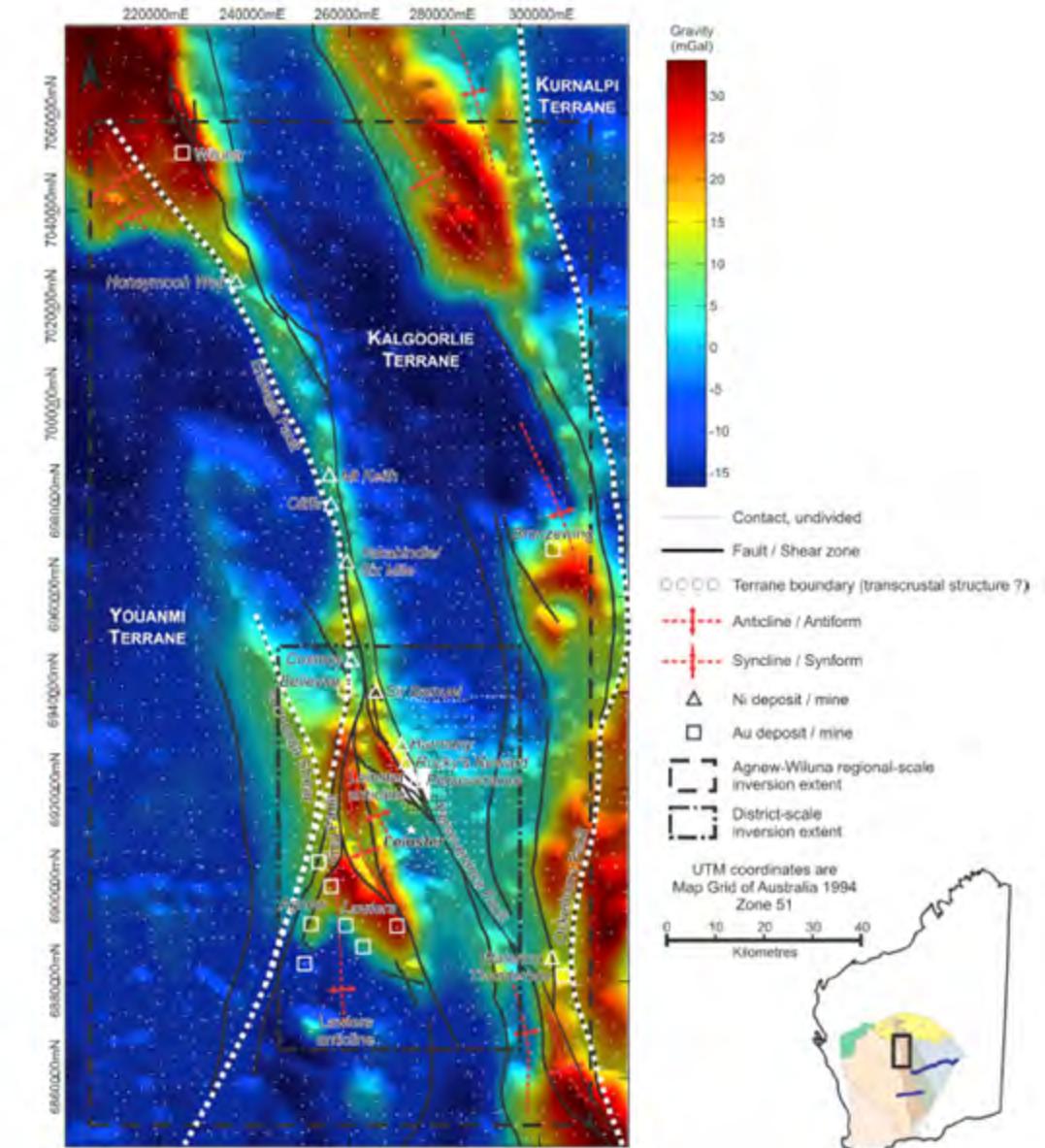
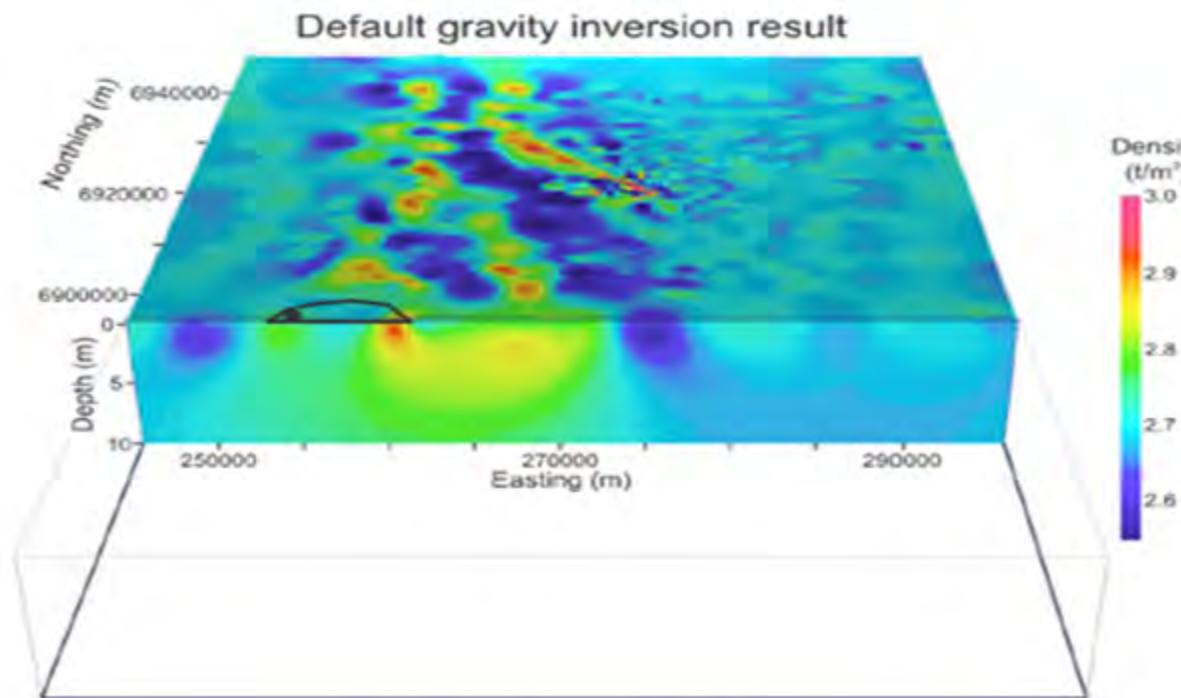


图 3.7 冲绳海槽三维密度成像水平切片图

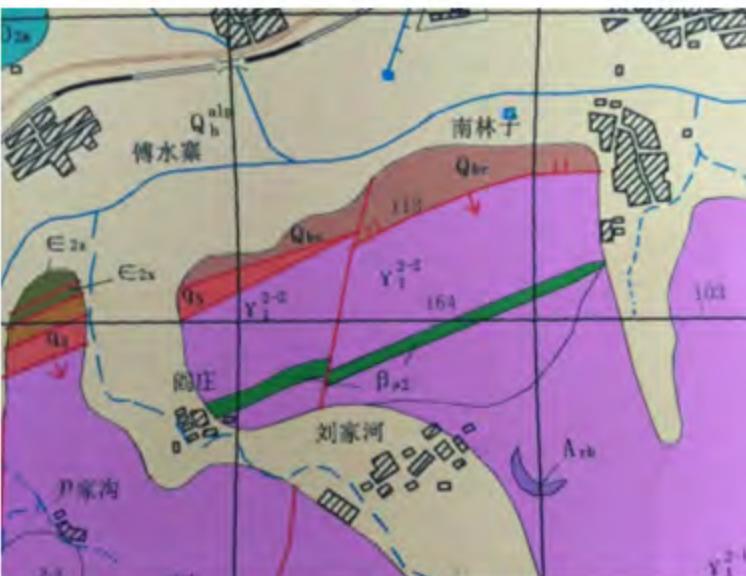
# 7. 反演

## ■ 三维反演

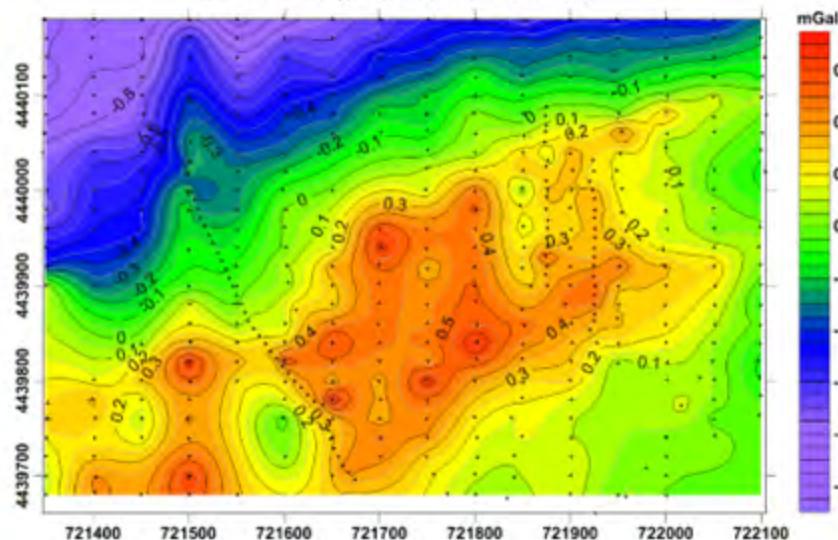


# 7. 反演

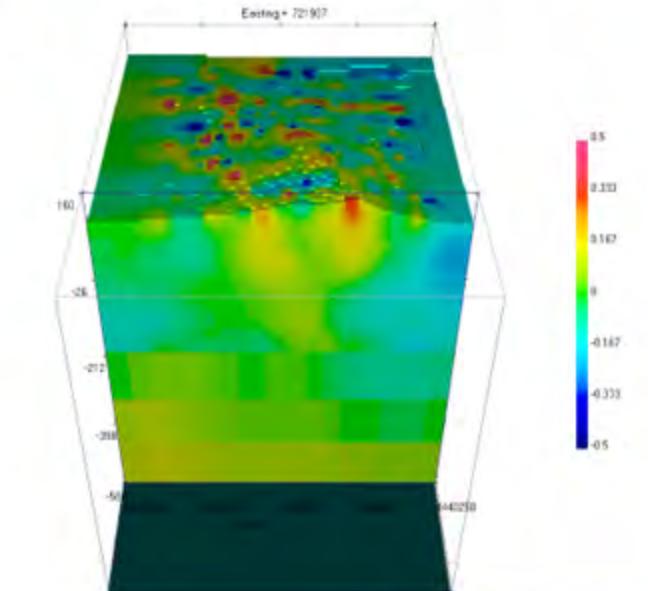
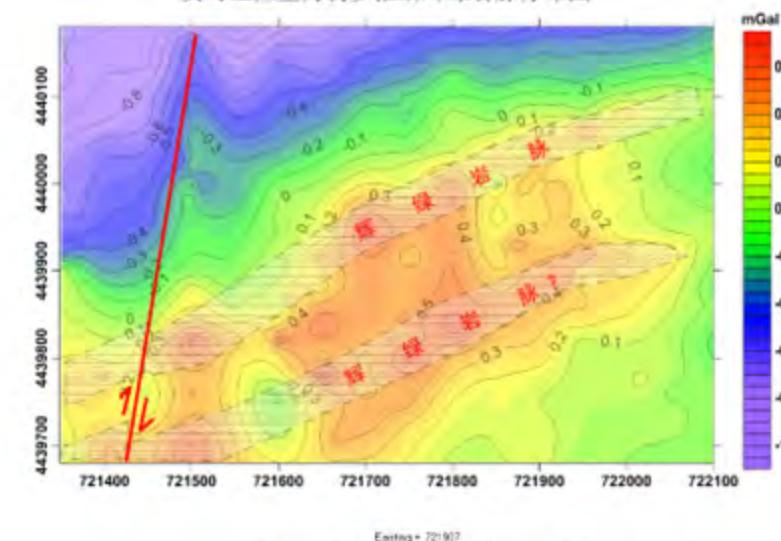
## ■ 三维反演



实习工区布格重力异常图(1:5000)



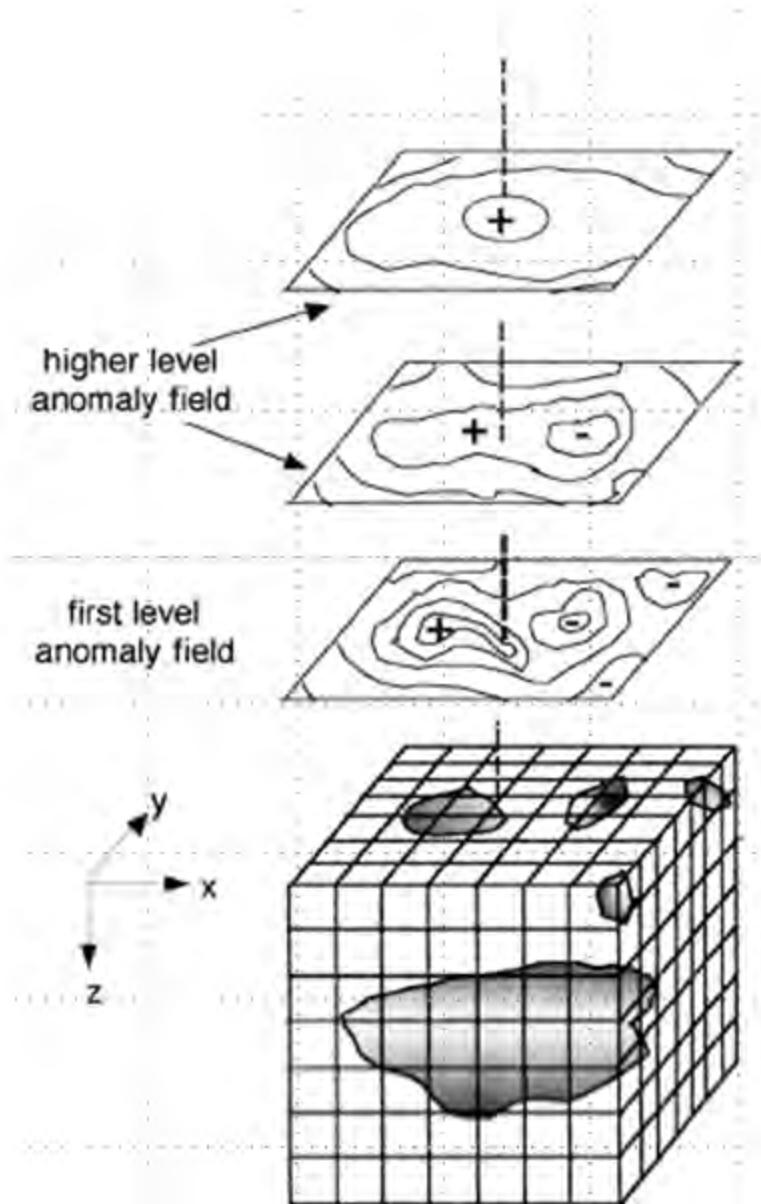
实习工区重力初步推断辉绿岩脉分布图



## 7. 反演

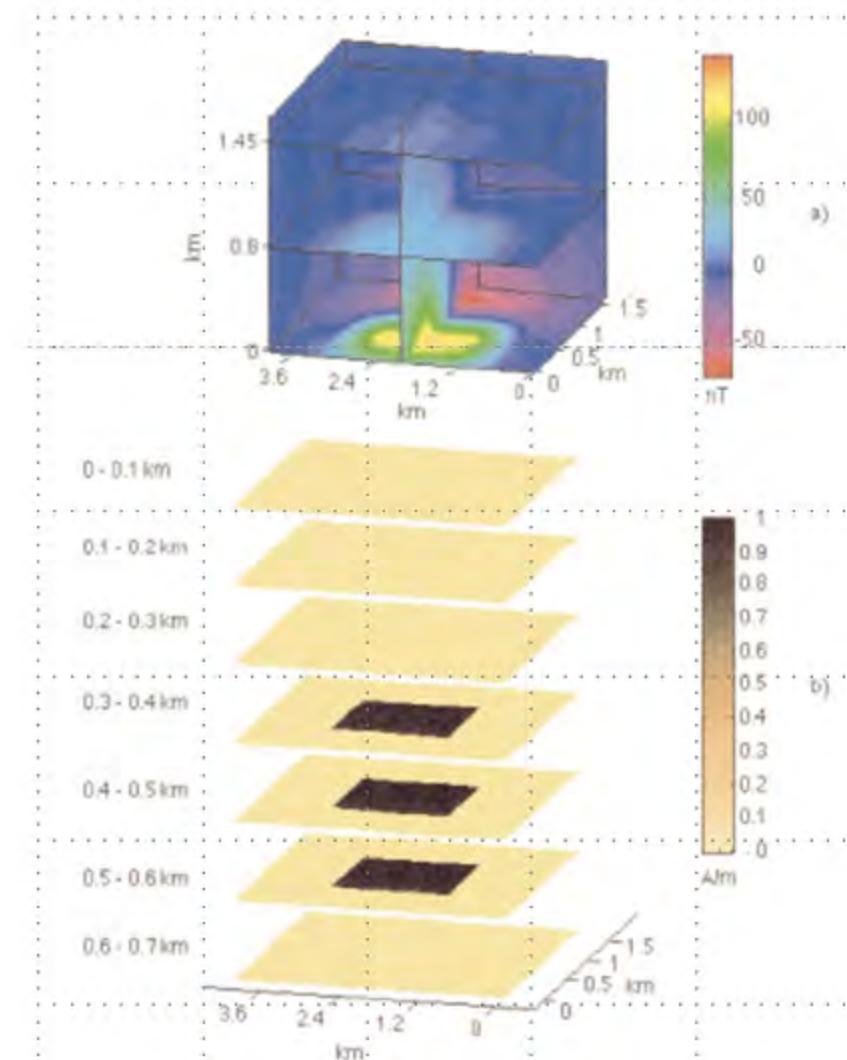
### ■ 三维反演

等维反演

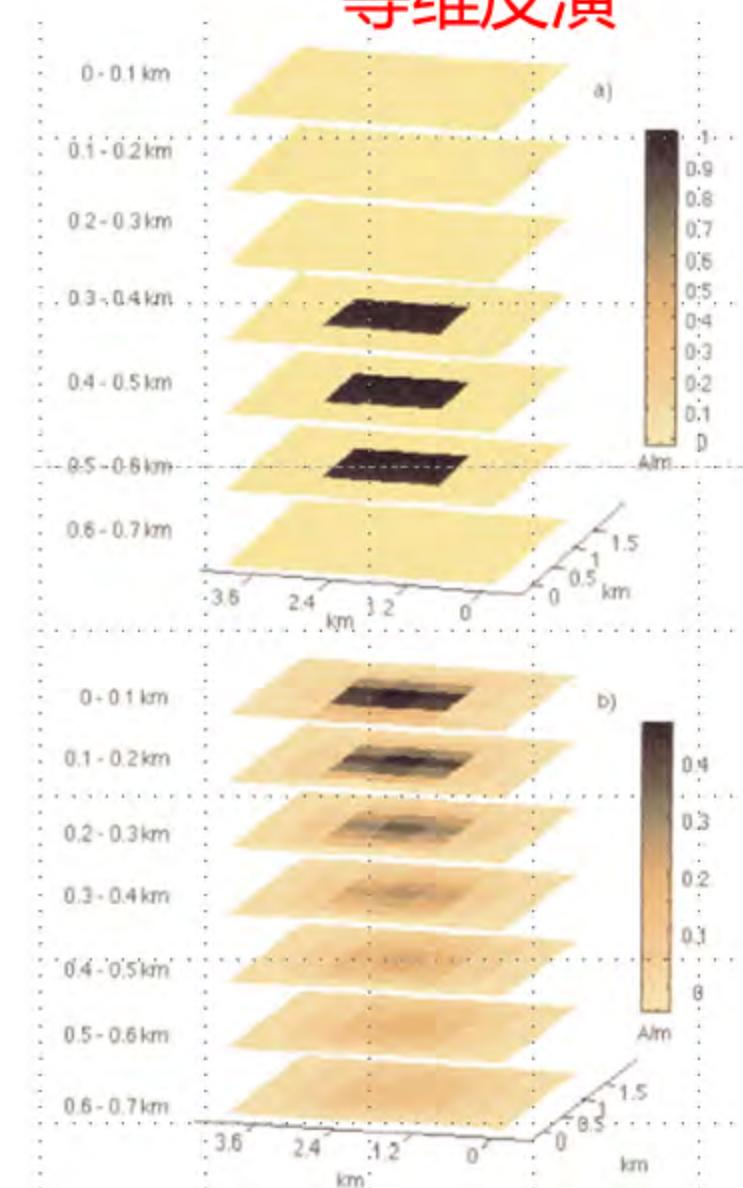


# 7. 反演

## ■ 三维反演



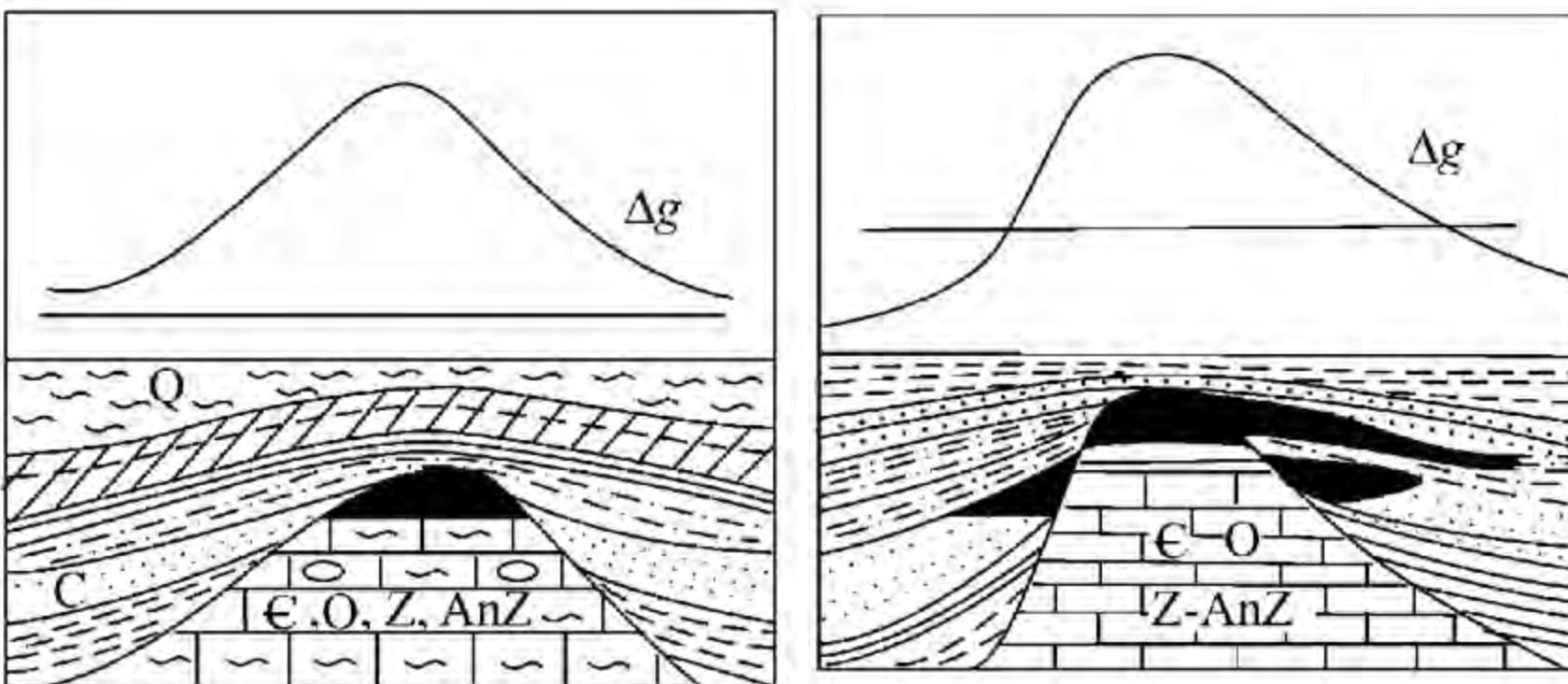
## 等维反演



## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

密度分界面与区域构造和储油构造有密切的关系，因此计算密度分界面的起伏或深度的变化在区域构造研究和石油勘探中具有重要的意义。



## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

线性回归法

如果界面起伏平缓，可以认为重力变化与界面的起伏近似呈线性关系。

$$h = a + b \cdot \Delta g$$

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (h_i - \tilde{h}_i)^2 = \min$$

令  $\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0$ , 则

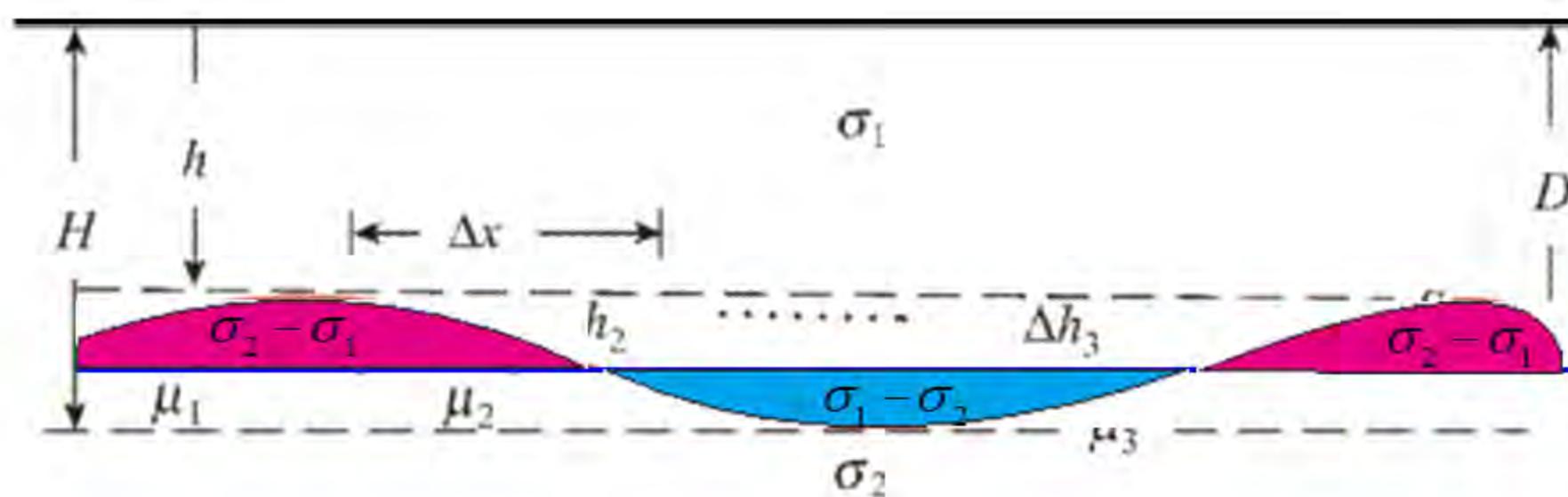
$$a = \frac{\sum \Delta g_i^2 \sum h_i - \sum \Delta g_i \sum \Delta g_i h_i}{n \sum \Delta g_i^2 - (\sum \Delta g_i)^2}, \quad b = \frac{n \sum \Delta g_i h_i - \sum h_i \sum \Delta g_i}{n \sum \Delta g_i^2 - (\sum \Delta g_i)^2}$$

## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

压缩质面法

条件：界面起伏较小，埋藏深度较大。



## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

压缩质面法

#### 基本原理

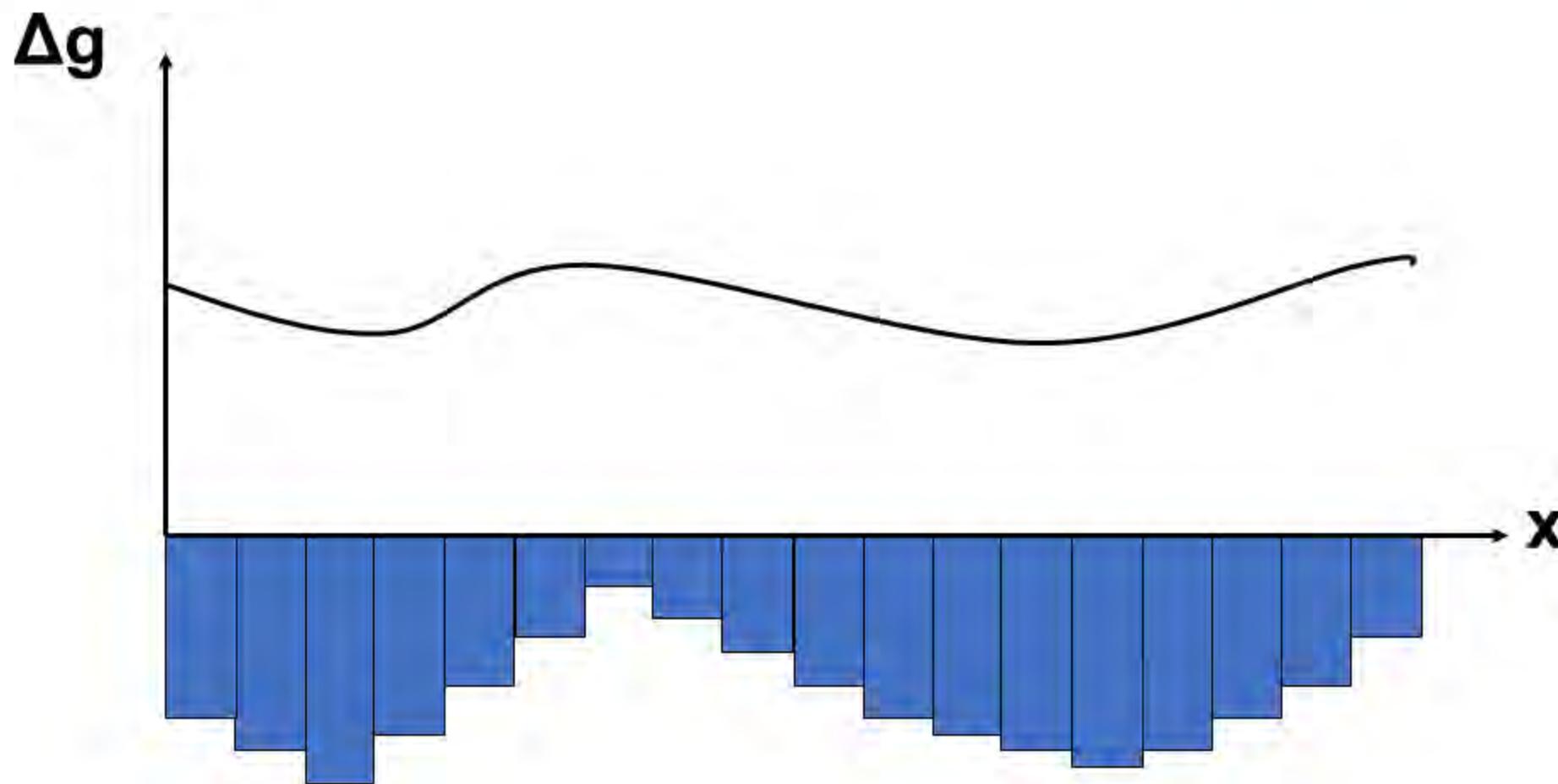
- 将界面从最小深度 $h$ 和最大深度 $H$ 处向中间挤压，使之在界面平均深度 $D=(h+H)/2$ 上压缩成一个面密度不均匀分布的物质面，
- 将该物质面剖分成局部面密度均匀分布的水平物质带(二维)或物质片，  
面密度  $\mu_j = \sigma \cdot \Delta h_j$
- 计算物质带或物质片的正演，或迭代反演物质带或物质片的面密度，进而求出界面深度。

$$\Delta g(i) = \sum_{j=1}^n 2G \left[ \operatorname{tg}^{-1} \frac{2(j-1)-i}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2(j-2)-1}{2} \right] \mu_j$$

## 7. 反演

■ 密度界面反演

迭代法



## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

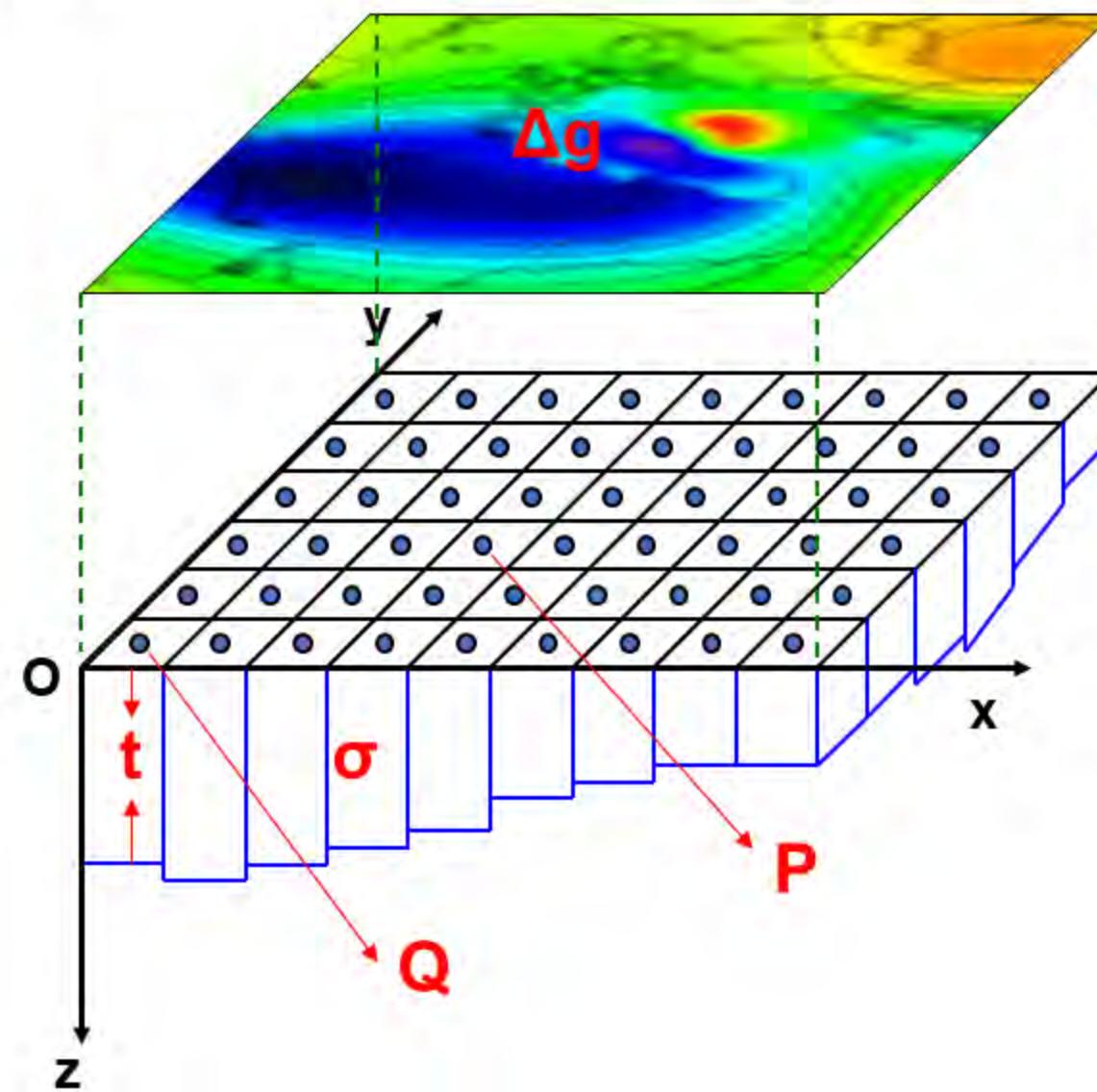
迭代法

- 1、由无限平板异常公式给出t初值       $t_i^0 = \frac{(g_{obs})_i}{2\pi G\sigma}$
- 2、计算模型剩余重力异常       $(g_{obs})_i - (g_{calc})_i$
- 3、计算t的下一个修改值       $\delta_i = [(g_{obs})_i - (g_{calc})_i] / 2\pi G\sigma$
- 4、计算条带厚度的修正值       $t_i^{(l+1)} = t_i^l + \delta_i$
- 5、判断剩余异常是否小于观测误差 (2) , 满足则停止计算。  
否则转到第 (3) 步继续计算

## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

迭代法



## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

迭代法

- 由无限平板重力异常公式给出t初值

$$t_{1,q} = \frac{g_{obs(q)}}{2\pi G\sigma}$$

- 计算模型初值的重力异常

$$g_{calc,n,p} = \sum_{q=1}^M Gf(P, Q, t_{n,q}, \sigma, D)$$

- 计算t的下一个修改值

$$t_{n+1,q} = t_{n,q} \left( \frac{g_{obs,q}}{g_{calc,n,q}} \right)$$

- 目标函数

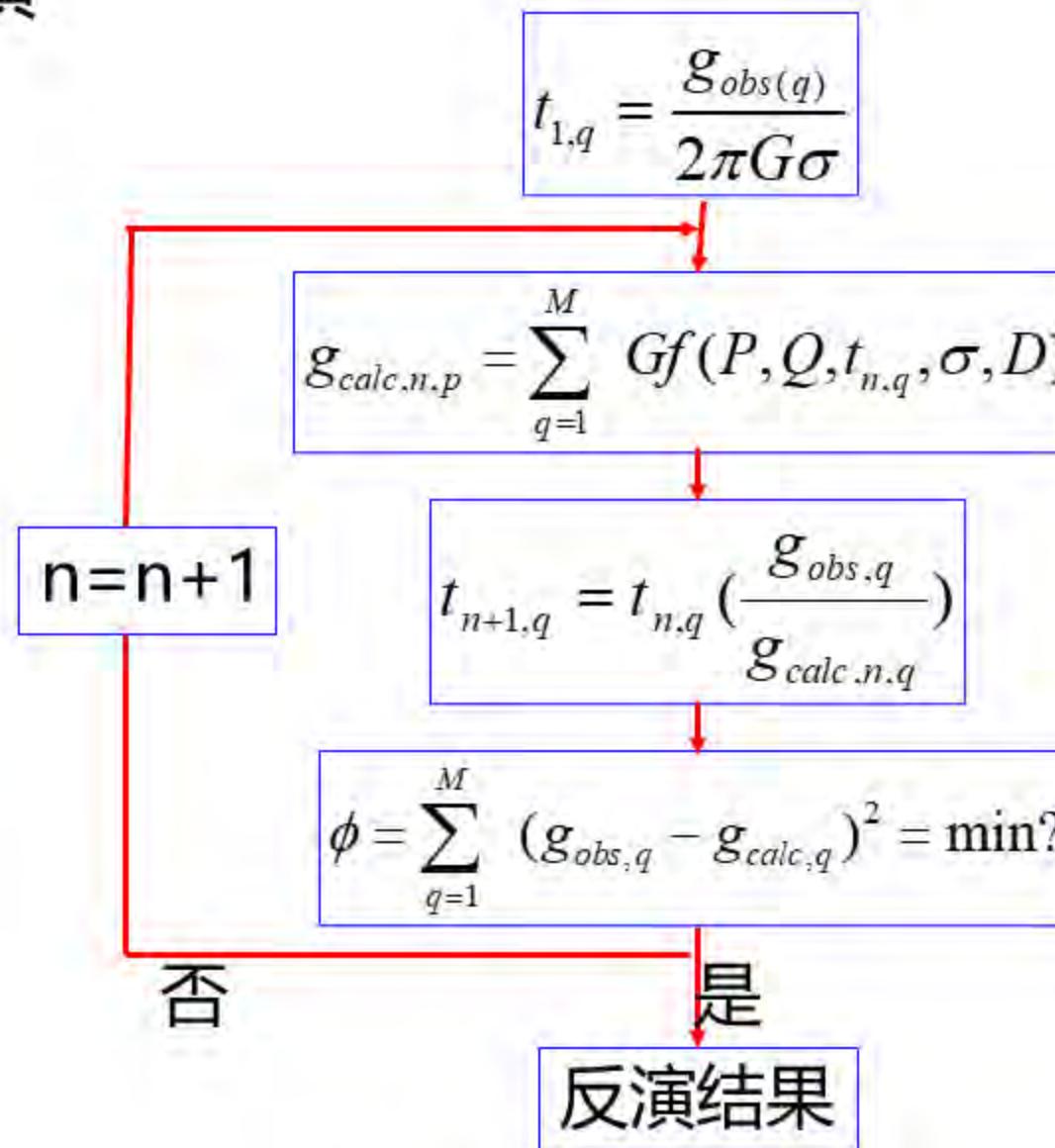
$$\phi = \sum_{q=1}^M (g_{obs,q} - g_{calc,q})^2 = \min$$

- 判断计算结果满足要求否，不合要求则转到第2步继续计算；否则停止计算。

## 7. 反演

### ■ 密度界面反演

迭代法

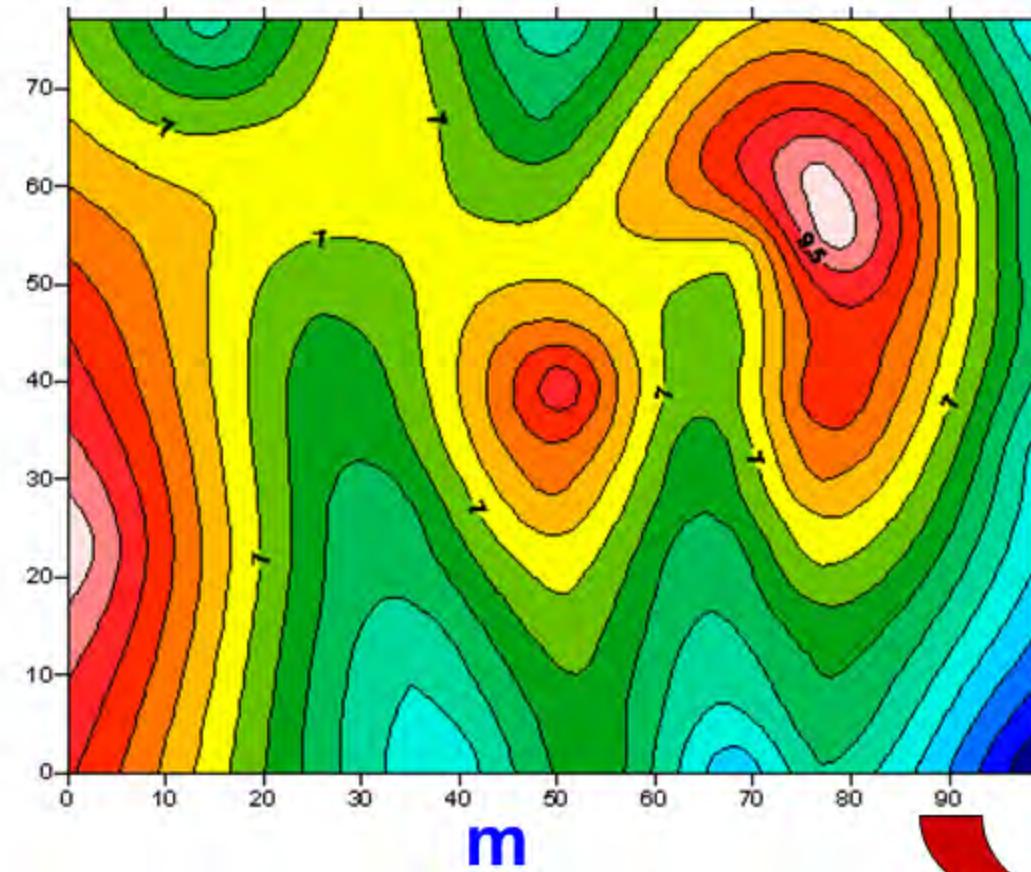


# 7. 反演

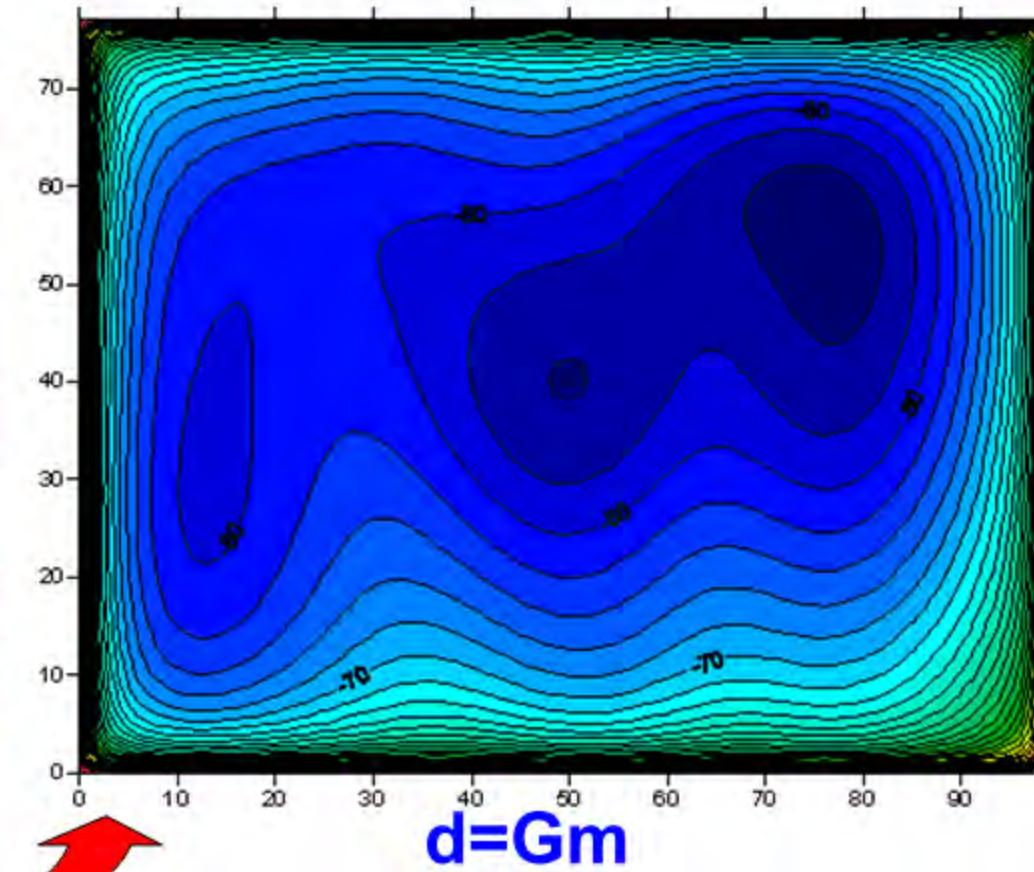
## ■ 密度界面反演

迭代法

理论界面深度



正演的重力异常

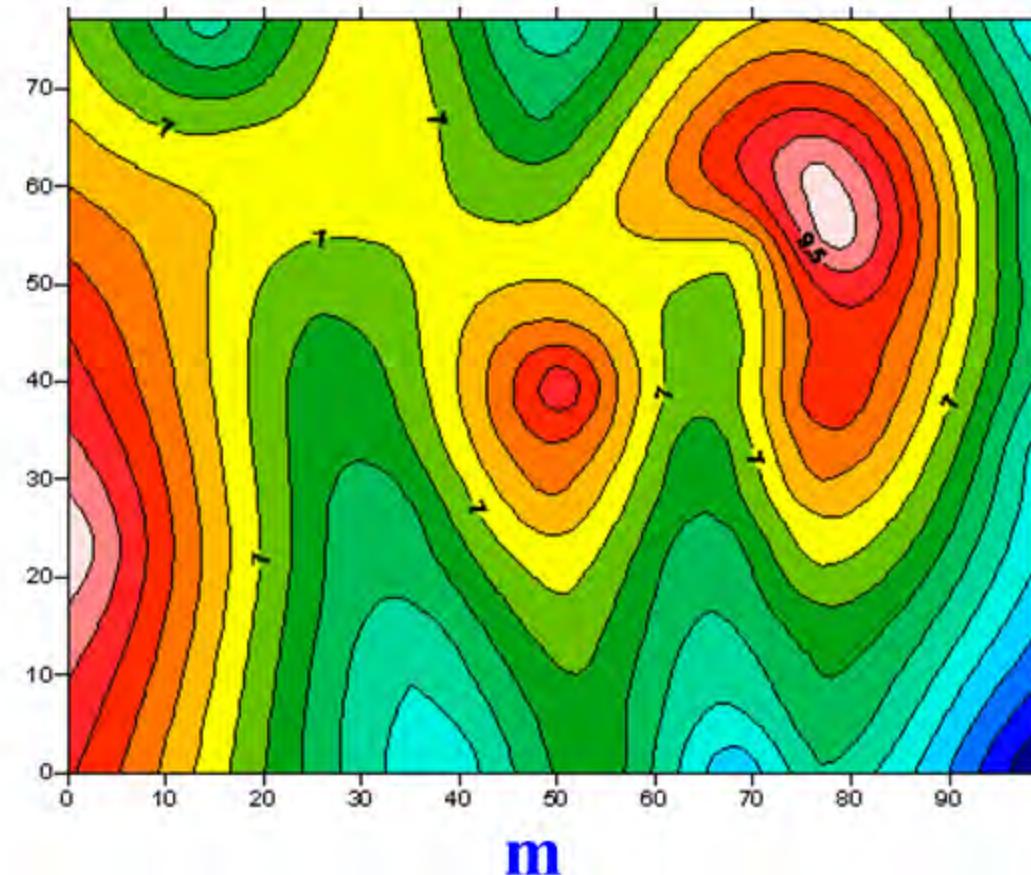


## 7. 反演

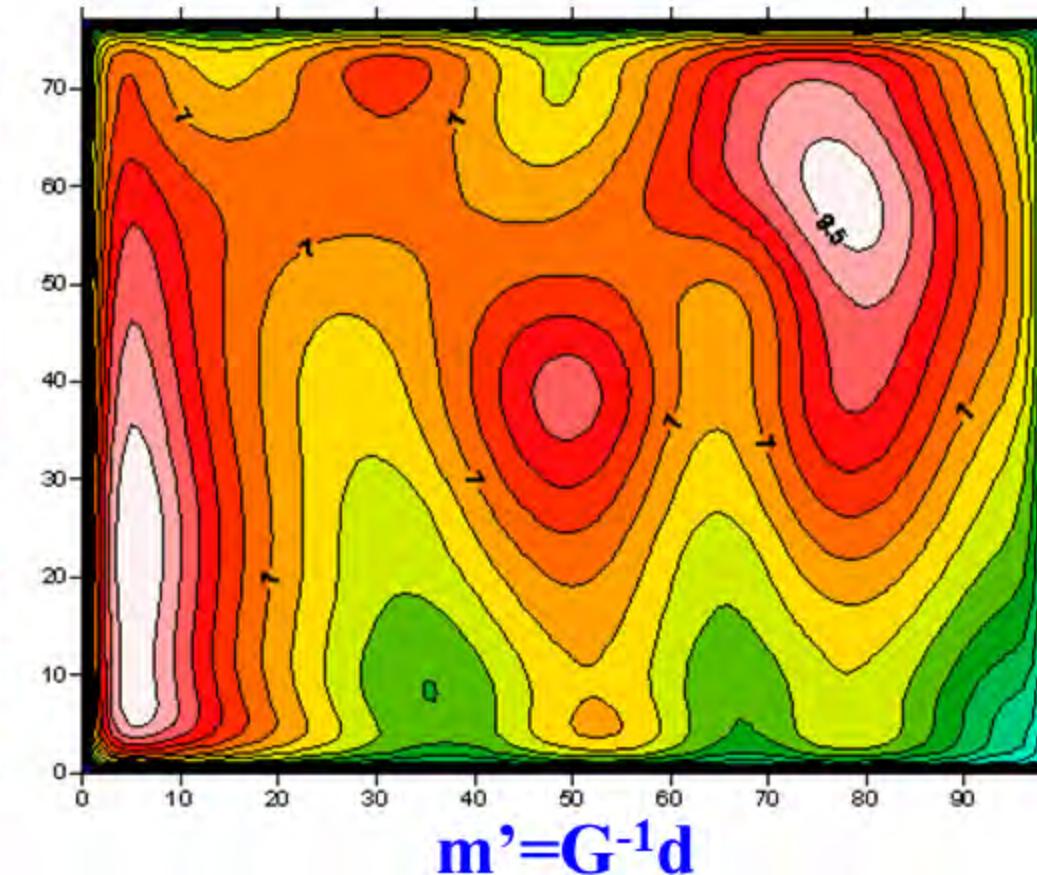
### ■ 密度界面反演

迭代法

理论界面深度



反演界面深度(迭代5次)

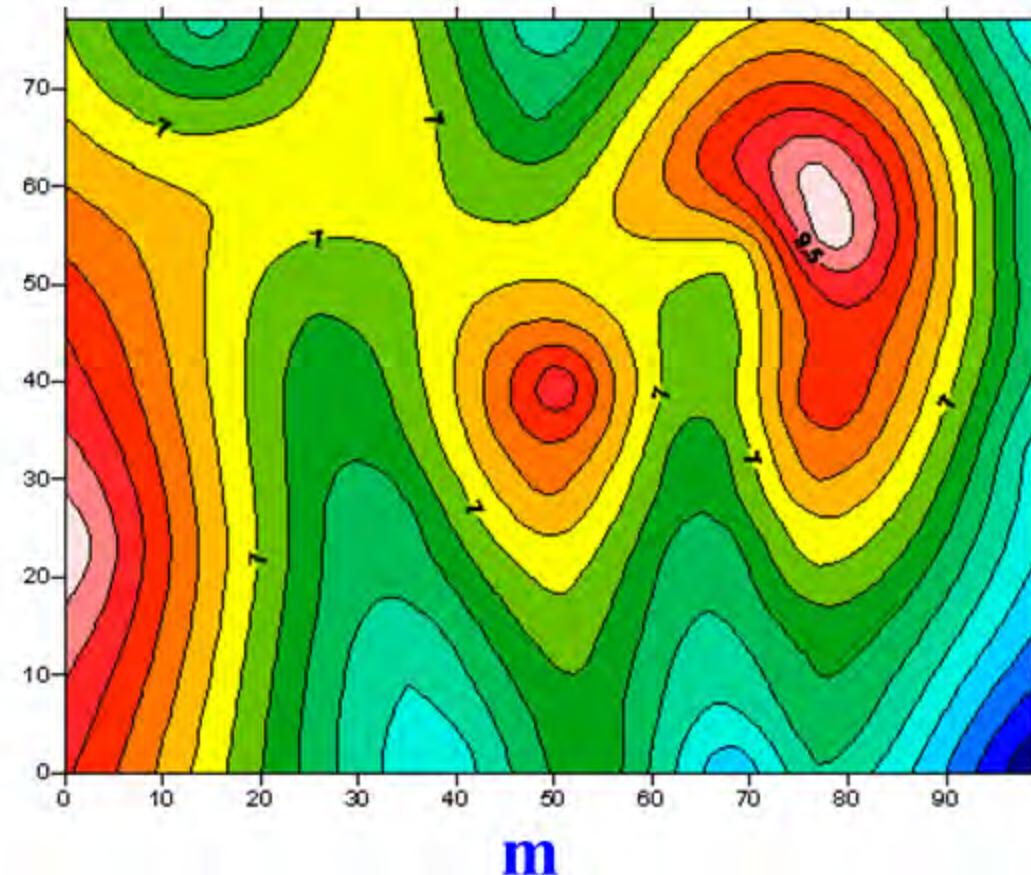


## 7. 反演

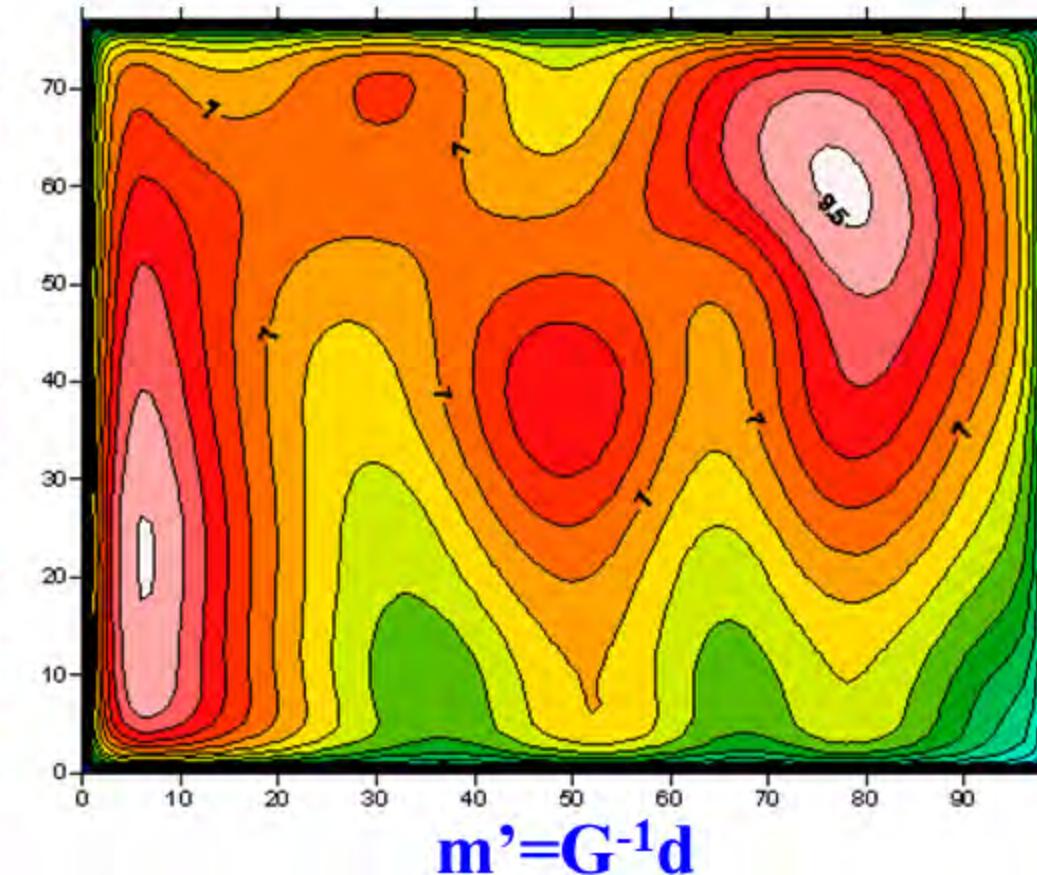
### ■ 密度界面反演

迭代法

理论界面深度



反演界面深度(迭代10次)

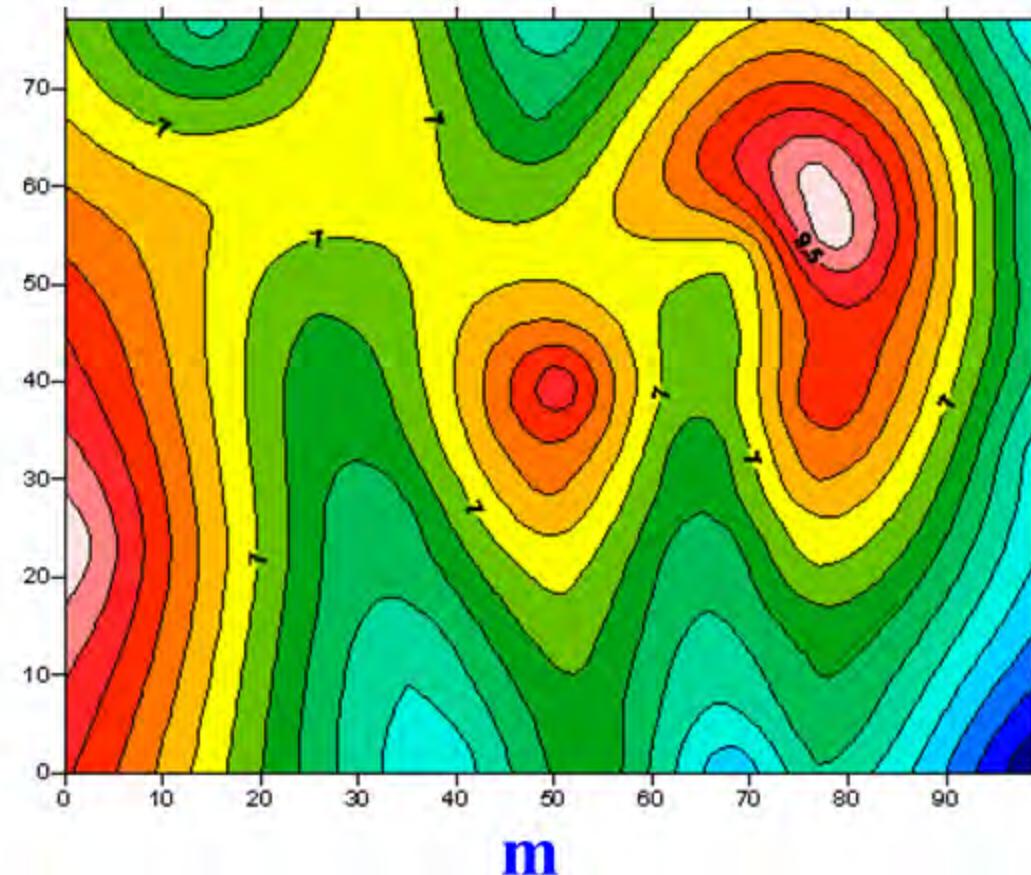


## 7. 反演

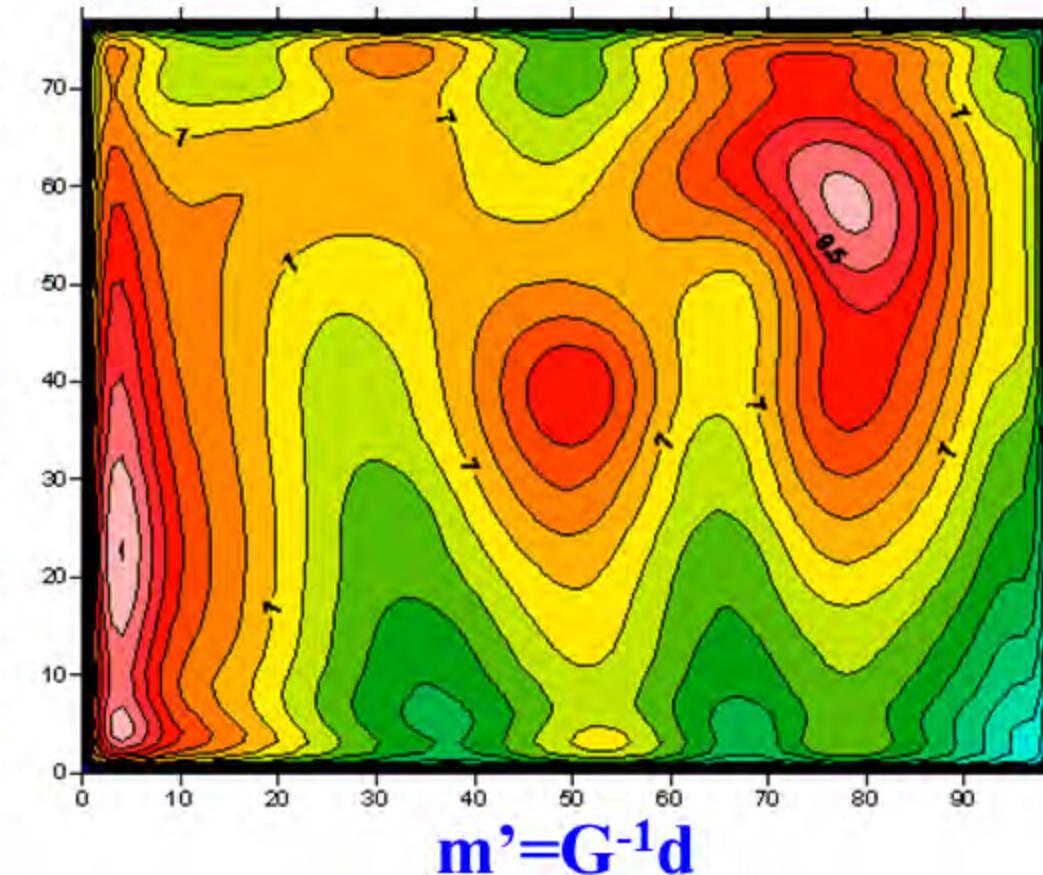
### ■ 密度界面反演

迭代法

理论界面深度

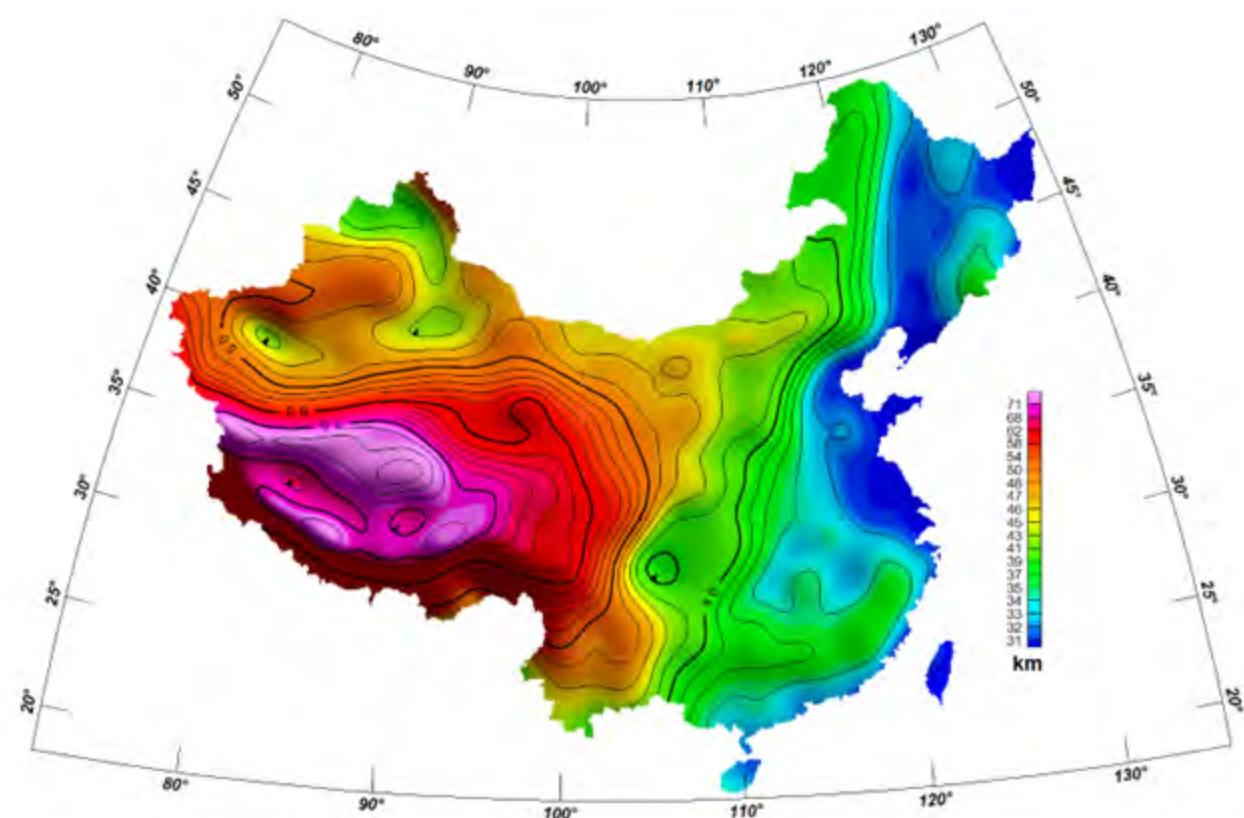
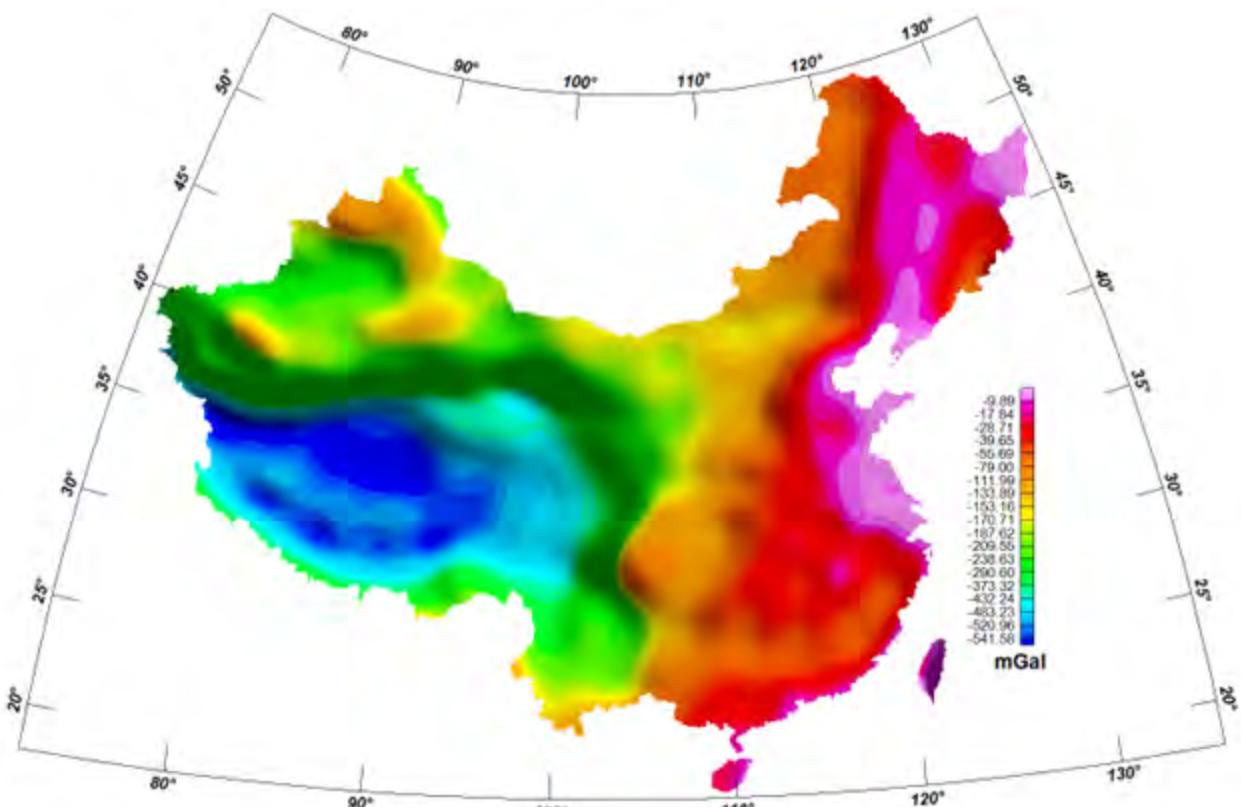


反演界面深度(迭代50次)



# 7. 反演

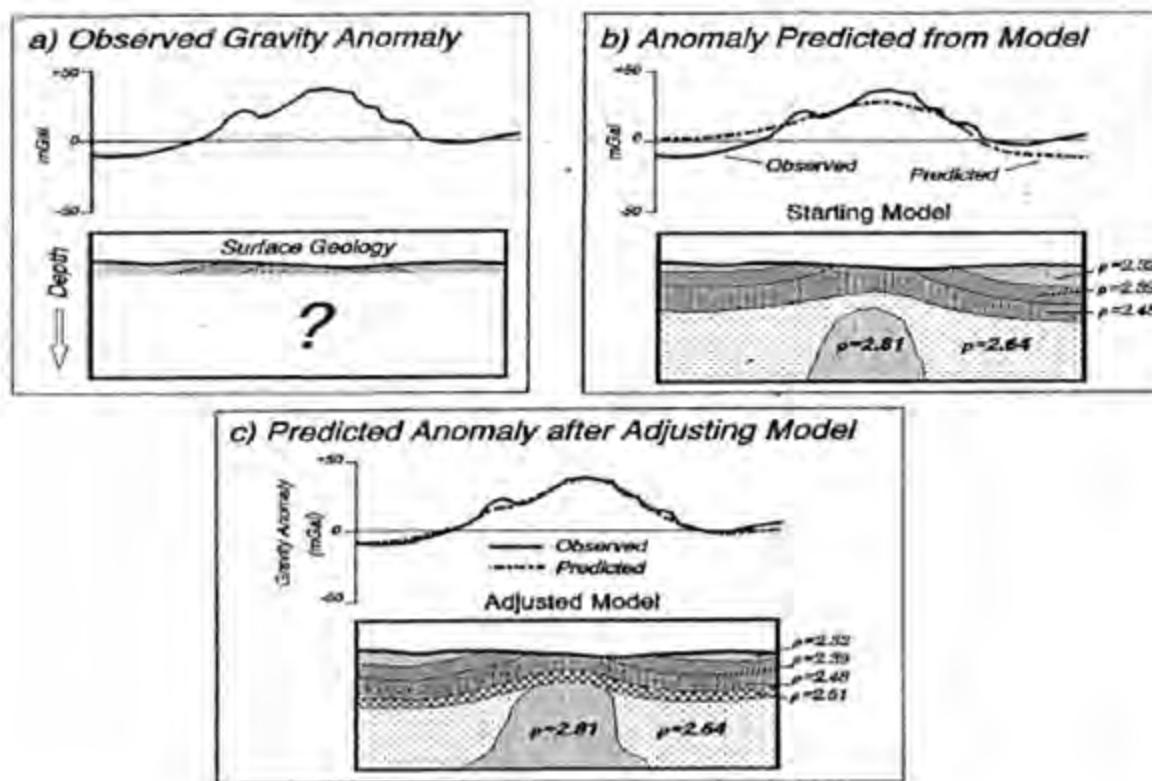
## ■ 密度界面反演



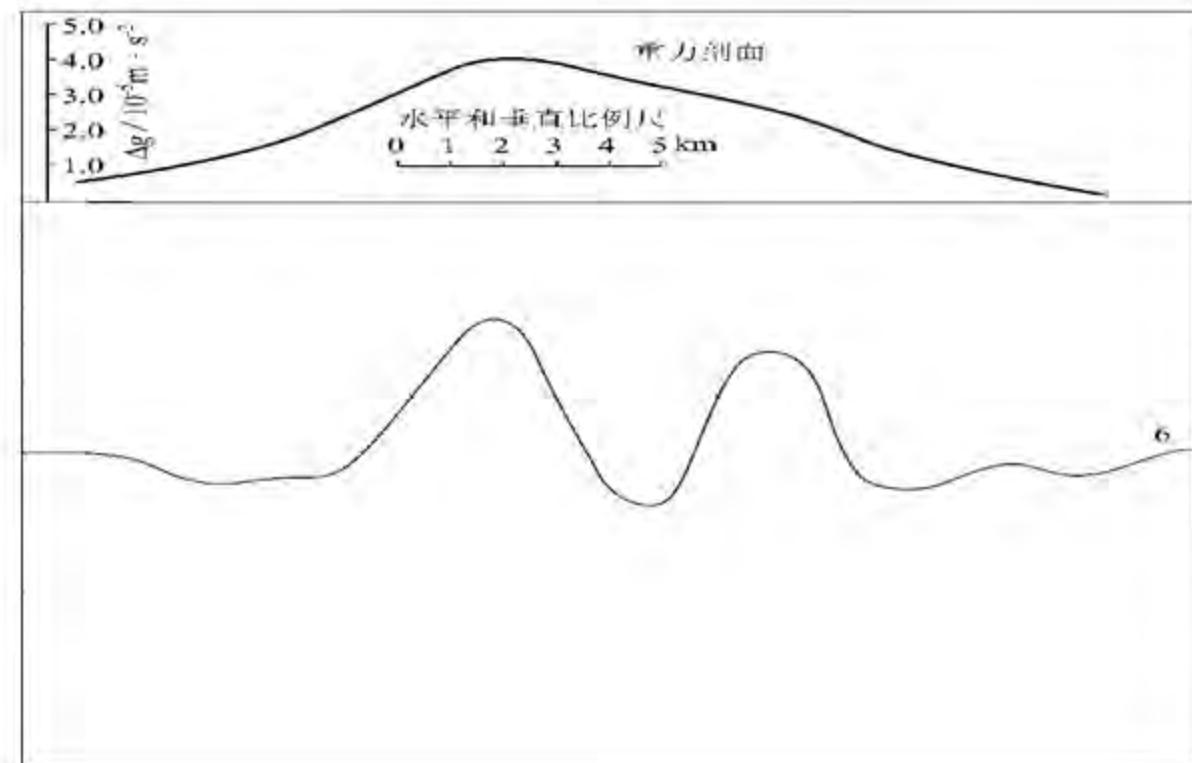
# 7. 反演

## ■ 密度界面反演

中国大陆莫霍面重力异常

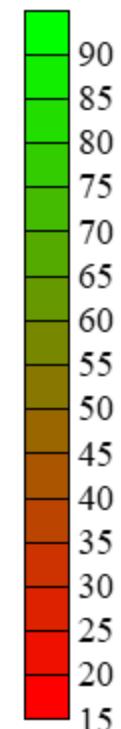
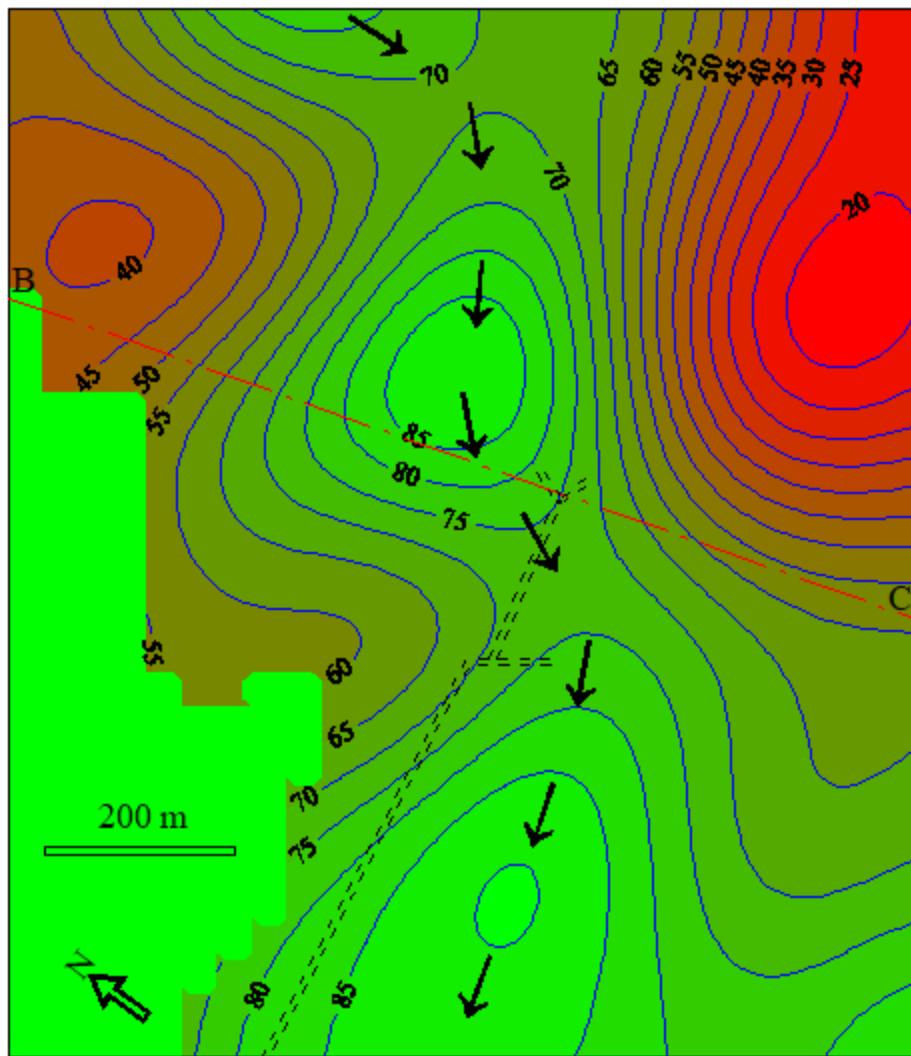


莫霍面深度反演

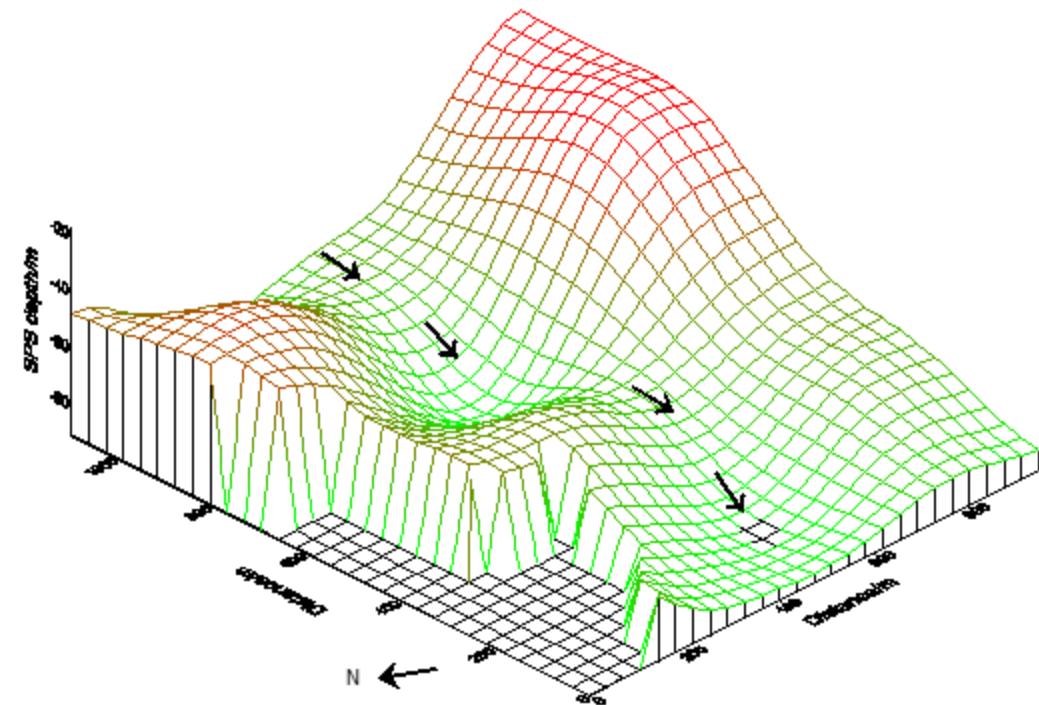


# 7. 反演

## ■ 密度界面反演

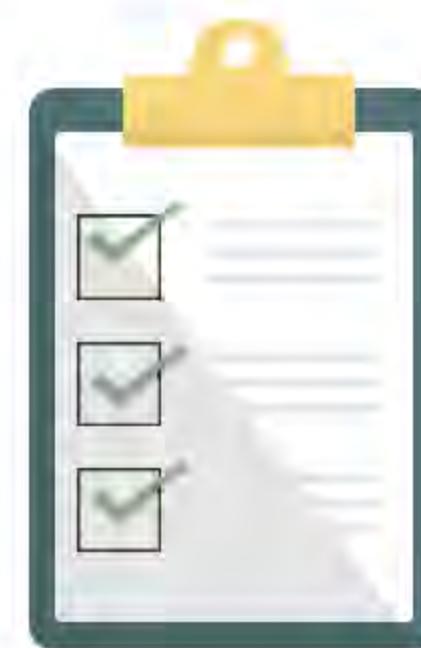


卢夏迪埃区SPS界面立体图



# 小结

- 重力异常的识别
- 重力学在地学中的应用



# 课后习题

- 识别断裂构造标志
- 古地磁如何验证大陆漂移假说



# 课程结束

陈涛

