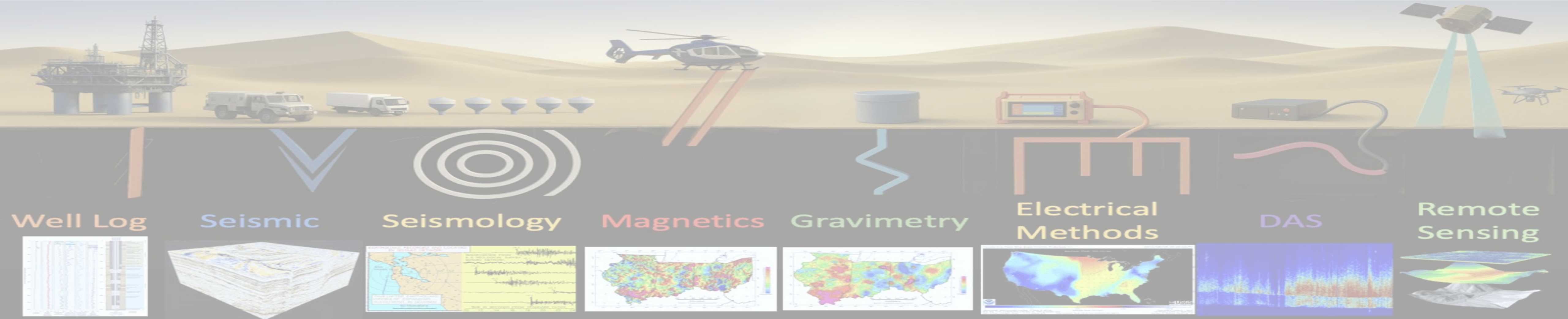
重磁电数据处理与解释

上机实验一　重磁异常处理

中国石油大学（北京）地球物理学院
陈 涛

GeoGoku

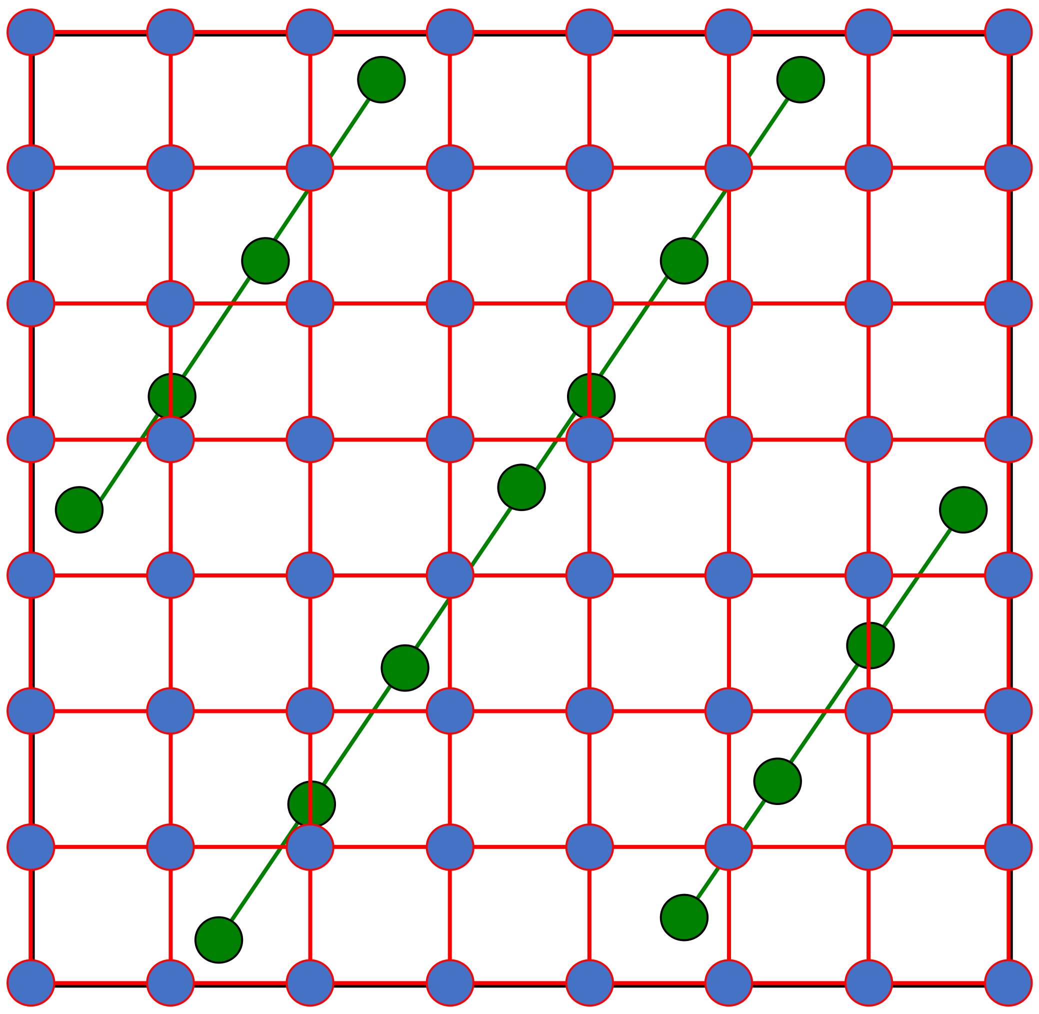


实验1

GeoGoku

将不规则的实测数据或数字化的数据换算成规则网格节点上的数据，这个过程就是数据的网格化

数据网格化的作用？



实验1

1、利用二度长方体公式生成测点为不规则散点分布的重力异常

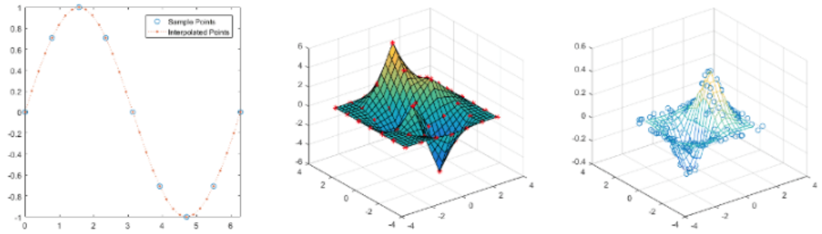
2、利用matlab自带的函数完成插值

3、多项式拟合法插值（线性平滑公式、二次平滑公式）

插值

网格和散点数据插值、数据网格化、分段多项式

插值是在一组已知数据点的范围内添加新数据点的技术。您可以使用插值来填充缺失的数据、对现有数据进行平滑处理以及进行预测等。MATLAB® 中的插值技术可分为适用于网格上的数据点和散点数据点。



函数

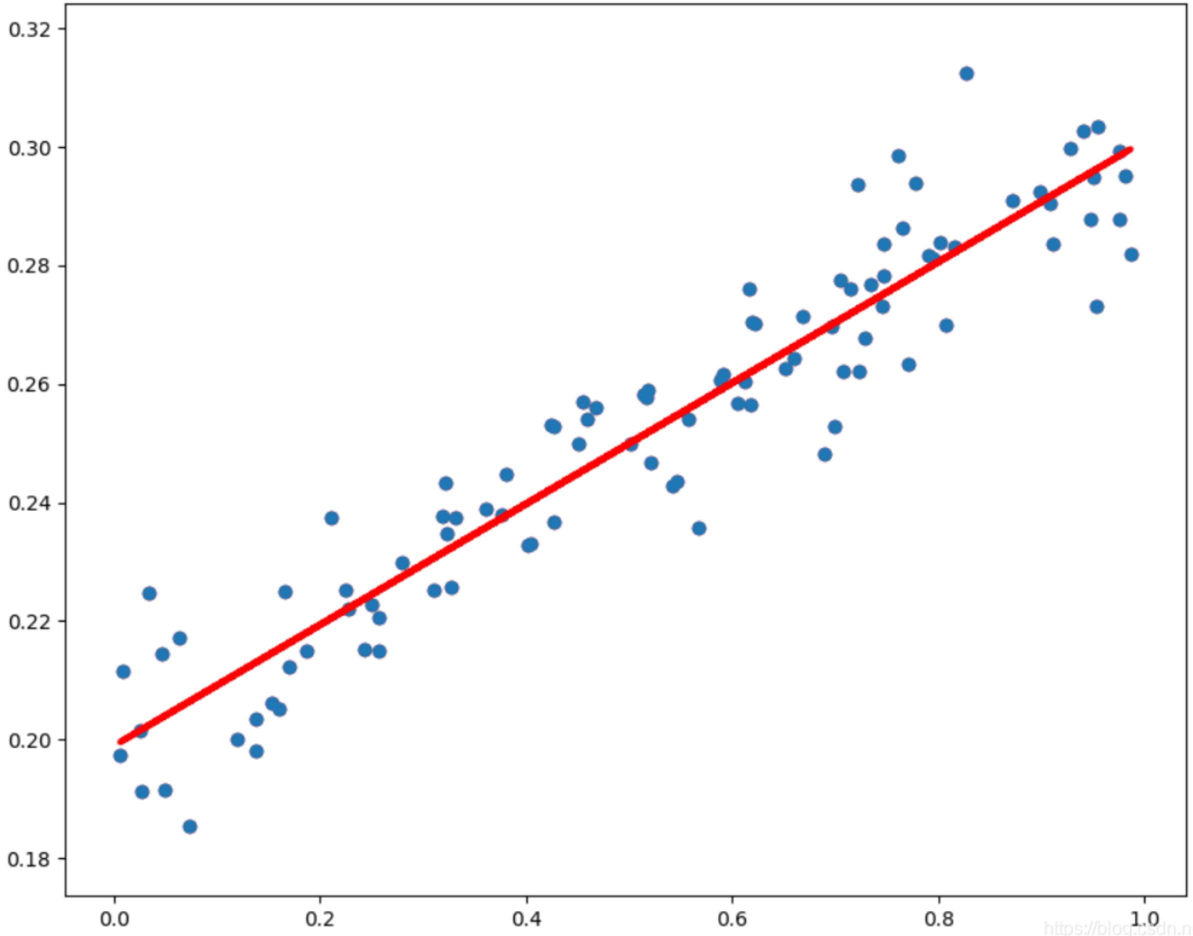
一维插值和网格插值

interp1	一维数据插值（表查找）
interp2	meshgrid 格式的二维网格数据的插值
interp3	meshgrid 格式的三维网格数据的插值
interpn	ndgrid 格式的一维、二维、三维和 N 维网格数据的插值
griddedInterpolant	网格数据插值
pchip	分段三次 Hermite 插值多项式 (PCHIP)
makima	修正 Akima 分段三次 Hermite 插值
spline	三次样条数据插值
ppval	计算分段多项式
mkpp	生成分段多项式
unmkpp	提取分段多项式详细信息
padecoef	时滞的 Padé 逼近
interpft	一维插值（FFT 方法）

3.平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



https://blog.csdn.net/codedz

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x$

目标函数 $\delta = \sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小。

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] x_i = 0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]=0$$

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]x_i=0$$

$$\left(2m+1\right)a_0+a_1\sum_{i=-m}^{m}x_i=\sum_{i=-m}^{m}g(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=-m}^{m}x_i+a_1\sum_{i=-m}^{m}x_i^2=\sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i)$$

线性平滑公式

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m}x_i \\ \sum_{i=-m}^{m}x_i & \sum_{i=-m}^{m}x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m}g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i) \end{bmatrix}$$

一般性求解公式

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

$$\begin{cases} a_0\left(2m+1\right)=\sum_{i=-m}^{m} g(x_i)-a_1\sum_{i=-m}^{m} x_i \\ a_0\sum_{i=-m}^{m} x_i=\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)-a_1\sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \end{cases}$$

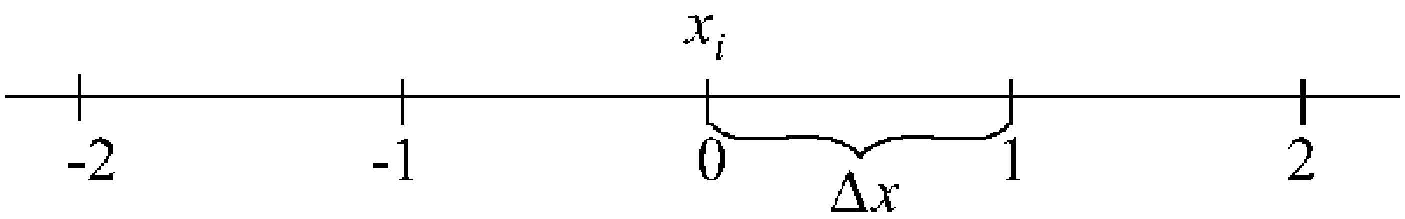
$$\frac{\left(2m+1\right)\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)-\sum_{i=-m}^{m} x_i\sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{\left(2m+1\right)\sum_{i=-m}^{m} x_i^2-\sum_{i=-m}^{m} x_i\sum_{i=-m}^{m} x_i}=a_1$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

线性平滑公式



若x_i以剖面上的点距为单位，即 $\Delta x=1$取点的方式，则上式中的 $x_i=0$，±1， ±2， ± 3、……，± m，代入式可解出系数 a_0 和 a_1:

$$a_0=\frac{\sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{2m+1},\qquad a_1=\frac{\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m} x_i^2}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $$\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x$$

目标函数 $$\delta = \sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$$

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

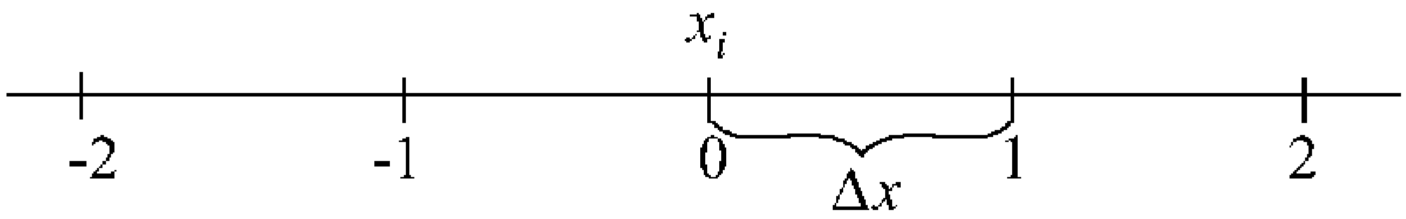
$$a_0 = \frac{\sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{2m+1}, \qquad a_1 = \frac{\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m} x_i^2}$$

x=0时，$\overline{g}(0) = a_0$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式



由此可见，某一点的平滑值，实际上就是在剖面上以该点为中心取奇数点的算术平均值，当 $m=\pm1$时，将得到三点平滑公式：

三点平滑公式为: $\overline{g}(0) = 1/3[g(-1) + g(0) + g(1)]$

3.平滑（去噪）

作业：**推导五点平滑公式**

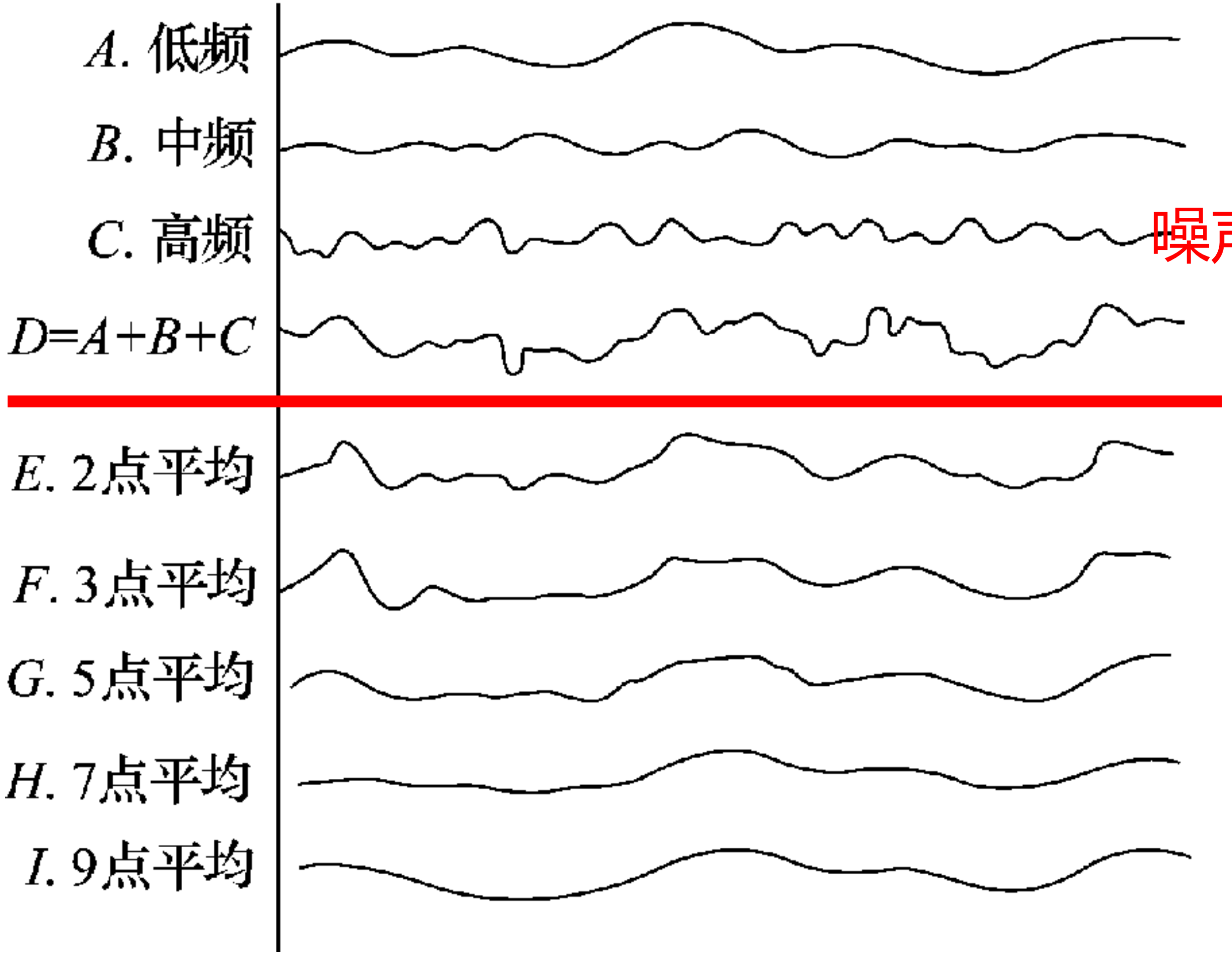
提交时间： 10.23之前

提交形式： 纸质版

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式



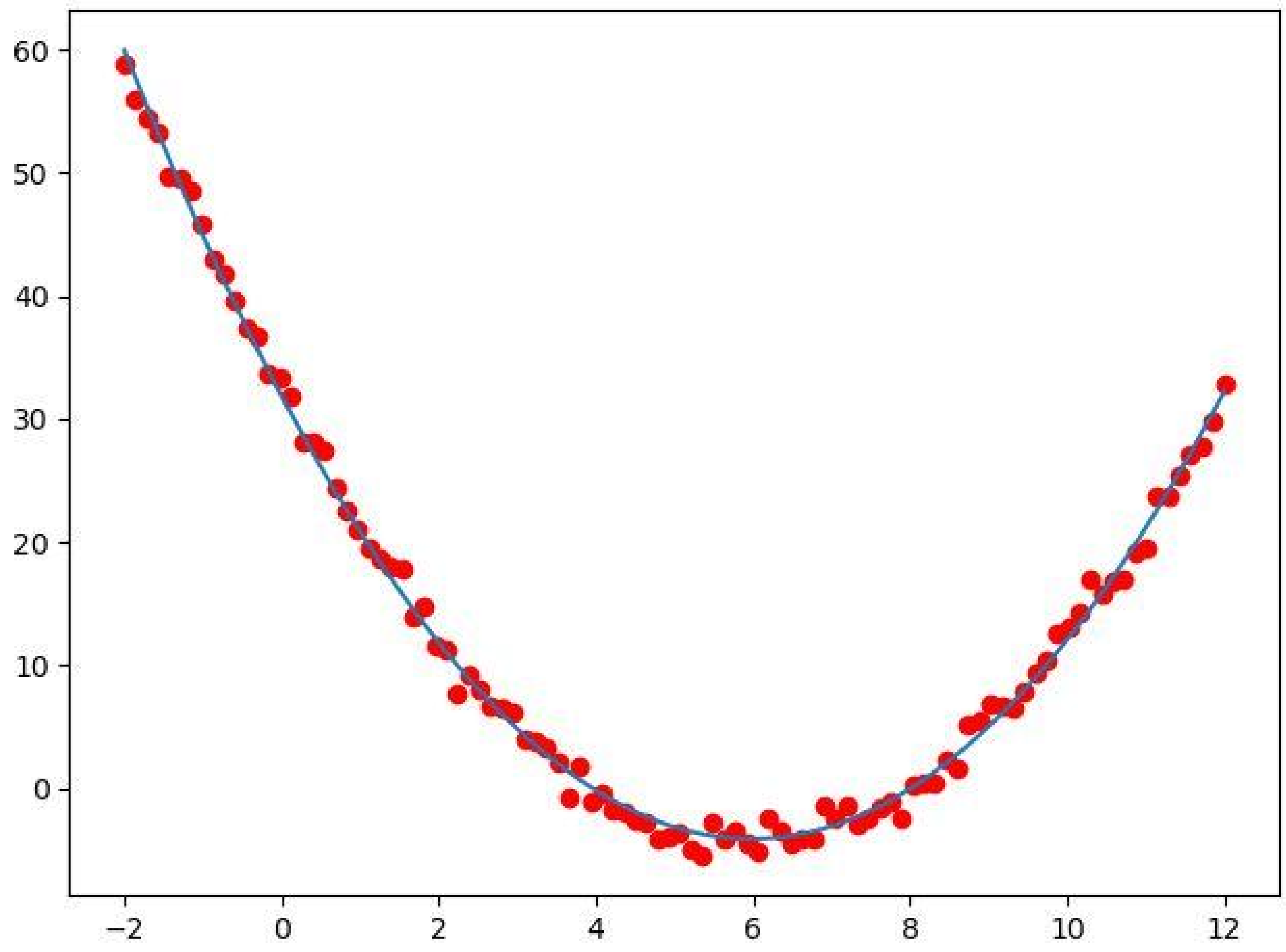
噪声

结论?

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式



3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

若异常曲线在一定范围内可视为二次曲线时，则在这个范围内，平滑后的异常曲线可以用二次曲线方程来表示:

$$\overline{g}(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2$$

分别对a_0、a_1、a_2求偏导数，并令其等于零可求系数a_0、a_1、a_2

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\delta = \sum_{i=-m}^{m} \left[\bar{g}(x_i) - g(x_i)\right]^2 = \sum_{i=-m}^{m} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - g(x_i)\right]^2$$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_0}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_2}=0$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g(x_i) \end{bmatrix}$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

$$\overline{g}(0) = a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

取$m=2$,得到5点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{35}\left[17g(0)+12(g(-1)+g(1))-3(g(-2)+g(2))\right]$$

取$m=3$,得到7点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{21}\left[\begin{array}{l}7g(0)+6(g(-1)+g(1))+3(g(-2)+g(2))\\-2(g(-3)+g(3))\end{array}\right]$$

取$m=4$,得到9点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{231}\left[\begin{array}{l}59g(0)+54(g(-1)+g(1))+39(g(-2)+g(2))\\+14(g(-3)+g(3))-21(g(-4)+g(4))\end{array}\right]$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

n次平滑公式

$$\bar{g}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

$$\delta=\sum_{i=1}^{M}\left[\bar{g}(x_i)-g(x_i)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\left[a_0+a_1x_i+a_2x^2+\cdots+a_nx^n-g(x_i)\right]^2$$

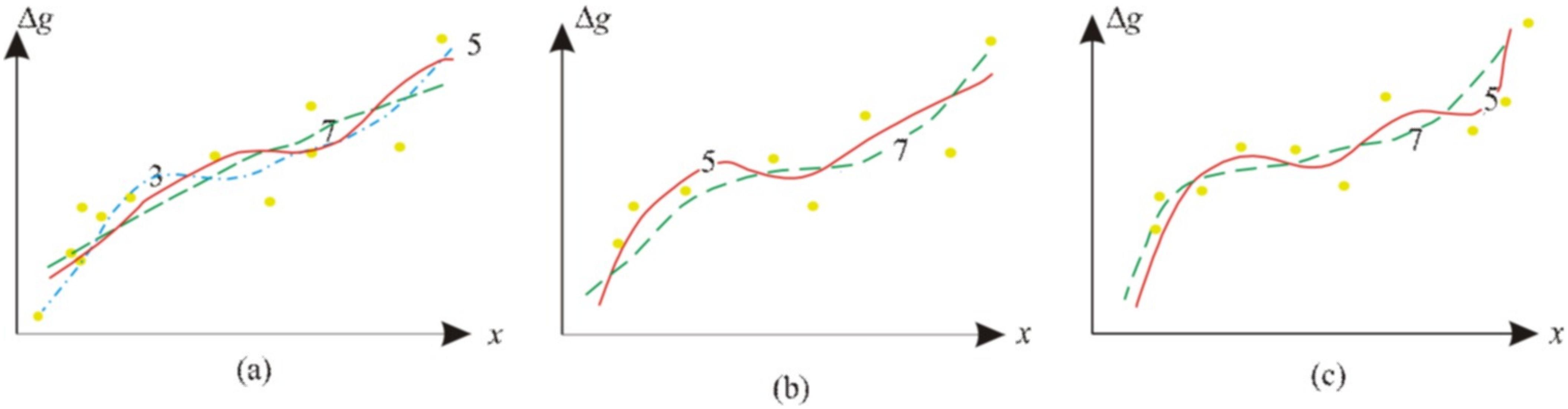
$$\frac{\partial\delta}{\partial a_0}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_2}=0,\cdots,\frac{\partial\delta}{\partial a_n}=0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■ 剖面异常平滑

区分曲线是几点平滑结果



不同点数的线性平滑　　不同点数的二次平滑　　不同点数的三次平滑

3.平滑（去噪）

■平面异常平滑

线性平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

■平面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_3} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_4} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_5} = 0$$

3.平滑（去噪）

■平面异常平滑

作业：**推导线性五点平滑公式**

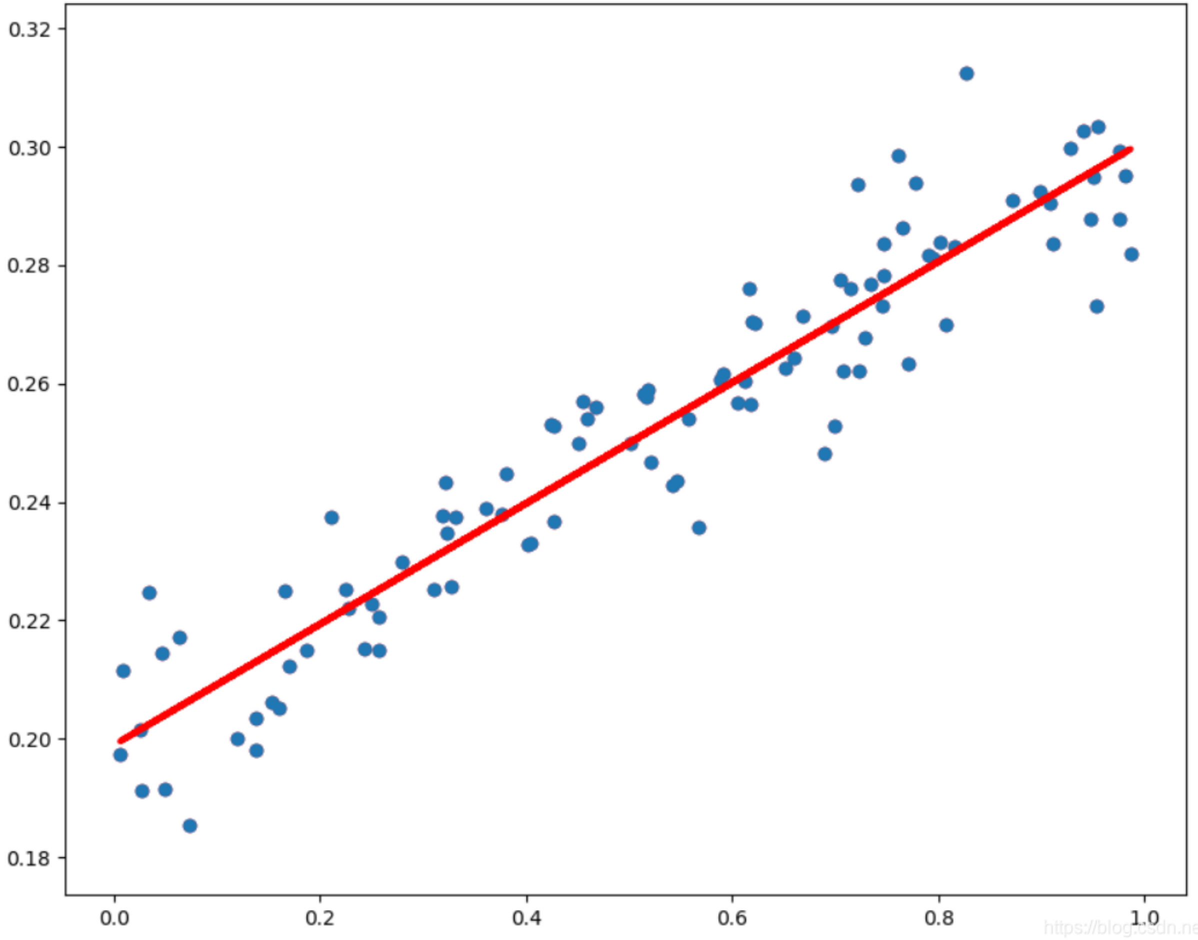
提交时间：10.23之前

提交形式：纸质版

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式



3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x$

目标函数 $\delta = \sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小。

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] x_i = 0$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]x_i = 0$$

$$(2m+1)a_0 + a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i = \sum_{i=-m}^{m} g(x_i)$$

$$a_0 \sum_{i=-m}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 = \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m} x_i \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) \end{bmatrix}$$

一般性求解公式

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

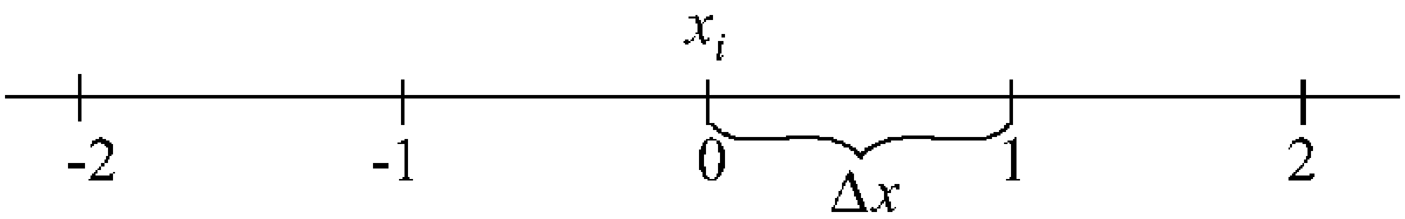
$$\begin{cases} a_0(2m+1) = \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i \\ a_0 \sum_{i=-m}^{m} x_i = \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \end{cases}$$

$$\frac{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) - \sum_{i=-m}^{m} x_i \sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^2 - \sum_{i=-m}^{m} x_i \sum_{i=-m}^{m} x_i} = a_1$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式



若x_i以剖面上的点距为单位，即 $\Delta x=1$取点的方式，则上式中的 $x_i=0$，±1，±2，±3、……，±m，代入式可解出系数 a_0 和 a_1:

$$a_0=\frac{\sum\limits_{i=-m}^{m} g(x_i)}{2m+1},\qquad a_1=\frac{\sum\limits_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)}{\sum\limits_{i=-m}^{m} x_i^2}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $$\overline{g}(x)=a_0+a_1x$$

目标函数 $$\delta=\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]^2=\min$$

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

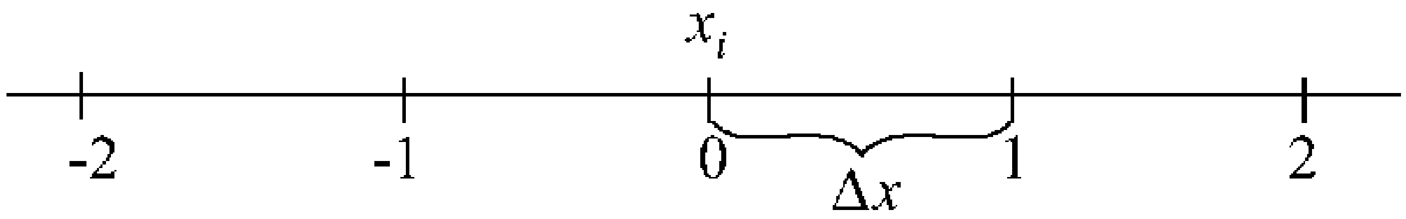
$$a_0=\frac{\sum_{i=-m}^{m}g(x_i)}{2m+1},\qquad a_1=\frac{\sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m}x_i^2}$$

x=0时，$\overline{g}(0)=a_0$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式



由此可见，某一点的平滑值，实际上就是在剖面上以该点为中心取奇数点的算术平均值，当 $m=\pm1$时，将得到三点平滑公式：

三点平滑公式为: $\overline{g}(0) = 1/3[g(-1) + g(0) + g(1)]$

3.平滑（去噪）

作业：**推导五点平滑公式**

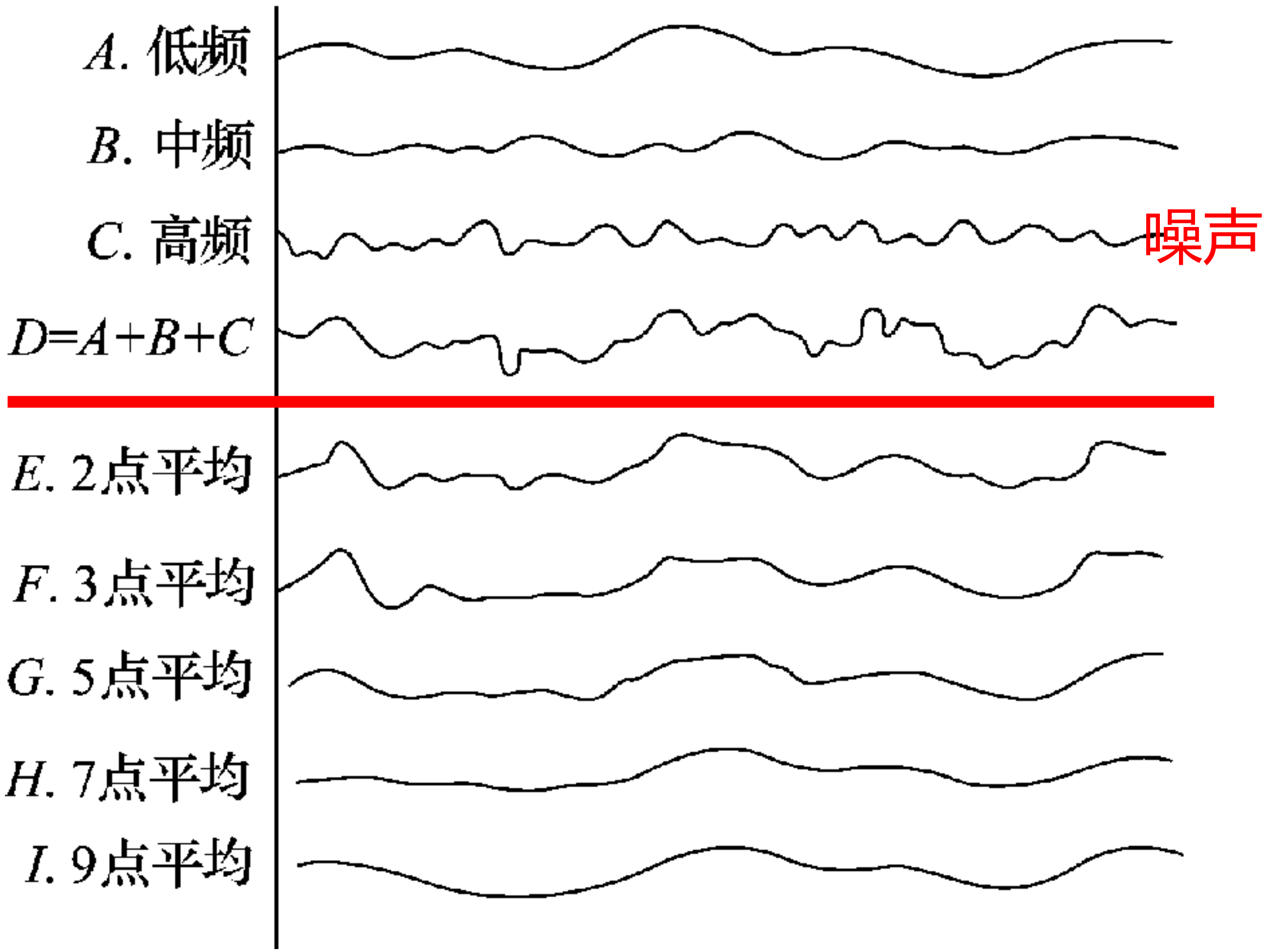
提交时间： 10.23之前

提交形式： 纸质版

3.平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式

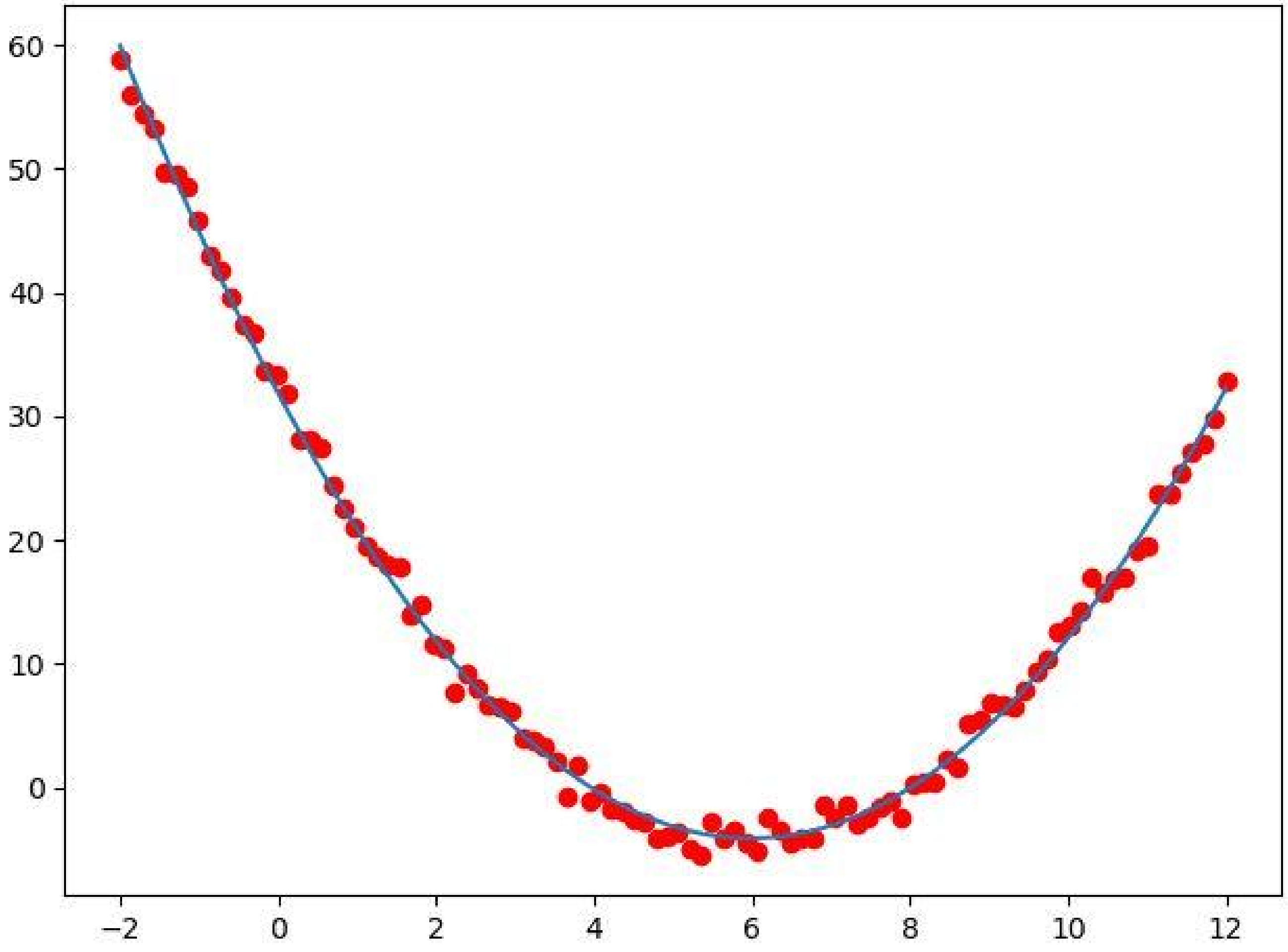


结论?

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式



3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

若异常曲线在一定范围内可视为二次曲线时，则在这个范围内，平滑后的异常曲线可以用二次曲线方程来表示:

$$\overline{g}(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2$$

分别对a_0、a_1、a_2求偏导数，并令其等于零可求系数a_0、a_1、a_2

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\delta = \sum_{i=-m}^{m} [\bar{g}(x_i) - g(x_i)]^2 = \sum_{i=-m}^{m} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - g(x_i) \right]^2$$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_0}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\delta}{\partial a_2}=0$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g(x_i) \end{bmatrix}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

$$\overline{g}(0) = a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

取$m=2$,得到5点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{35}[17g(0)+12(g(-1)+g(1))-3(g(-2)+g(2))]$$

取$m=3$,得到7点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}7g(0)+6(g(-1)+g(1))+3(g(-2)+g(2)) \\ -2(g(-3)+g(3))\end{bmatrix}$$

取$m=4$,得到9点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{231}\begin{bmatrix}59g(0)+54(g(-1)+g(1))+39(g(-2)+g(2)) \\ +14(g(-3)+g(3))-21(g(-4)+g(4)\end{bmatrix}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

*n*次平滑公式

$$\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\overline{g}(x_i) - g(x_i) \right]^2$$

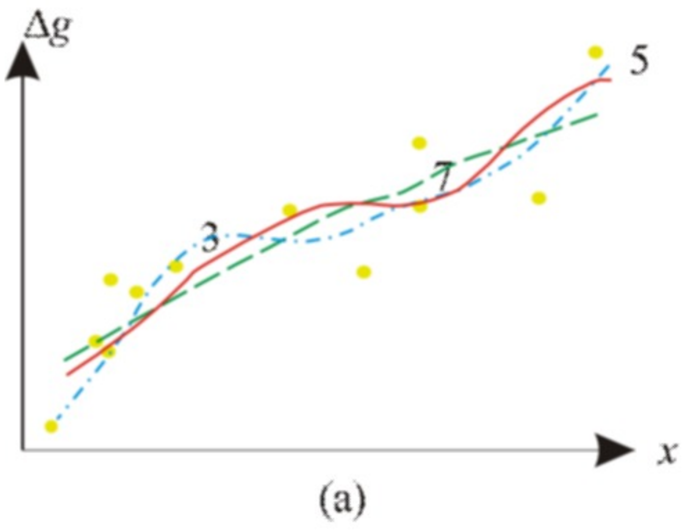
$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n - g(x_i) \right]^2$$

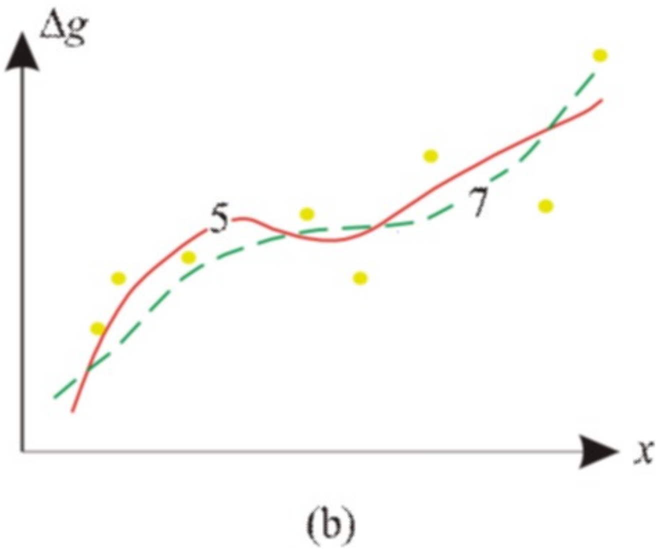
$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \cdots, \frac{\partial \delta}{\partial a_n} = 0$$

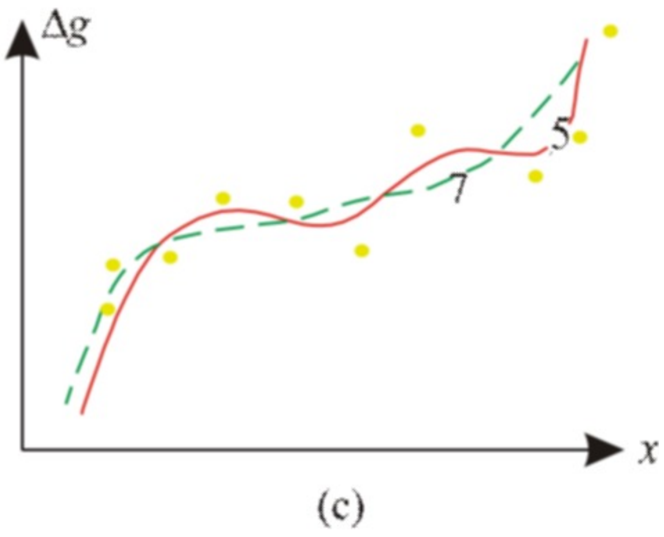
3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

区分曲线是几点平滑结果







不同点数的线性平滑　不同点数的二次平滑　不同点数的三次平滑

3.平滑（去噪）

■平面异常平滑

线性平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■平面异常平滑

二次平滑公式

$$\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\overline{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_3} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_4} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_5} = 0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■平面异常平滑

作业：**推导线性五点平滑公式**

提交时间： 10.23之前

提交形式： 纸质版

2.网格化

GeoGoku

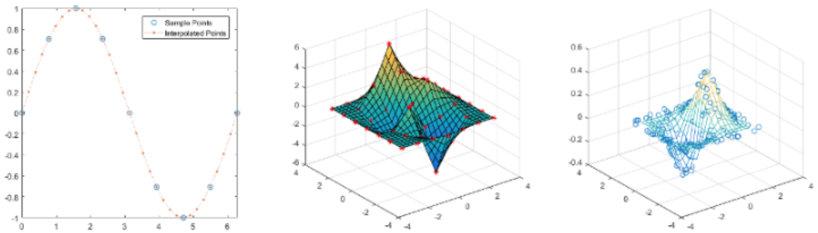
插值的方法包括：

拉格朗日多项式插值、克里格（克里金）插值、最小二乘拟合（多项式回归）和加权平均（邻近值法）等。

插值

网格和散点数据插值、数据网格化、分段多项式

插值是在一组已知数据点的范围内添加新数据点的技术。您可以使用插值来填充缺失的数据、对现有数据进行平滑处理以及进行预测等。MATLAB® 中的插值技术可分为适用于网格上的数据点和散点数据点。



函数

一维插值和网格插值

interp1	一维数据插值（表查找）
interp2	meshgrid 格式的二维网格数据的插值
interp3	meshgrid 格式的三维网格数据的插值
interpn	ndgrid 格式的一维、二维、三维和 N 维网格数据的插值
griddedInterpolant	网格数据插值
pchip	分段三次 Hermite 插值多项式 (PCHIP)
makima	修正 Akima 分段三次 Hermite 插值
spline	三次样条数据插值
ppval	计算分段多项式
mkpp	生成分段多项式
unmkpp	提取分段多项式详细信息
padecoef	时滞的 Padé 逼近
interpft	一维插值（FFT 方法）

2.网格化

■2.1 拉格朗日插值法

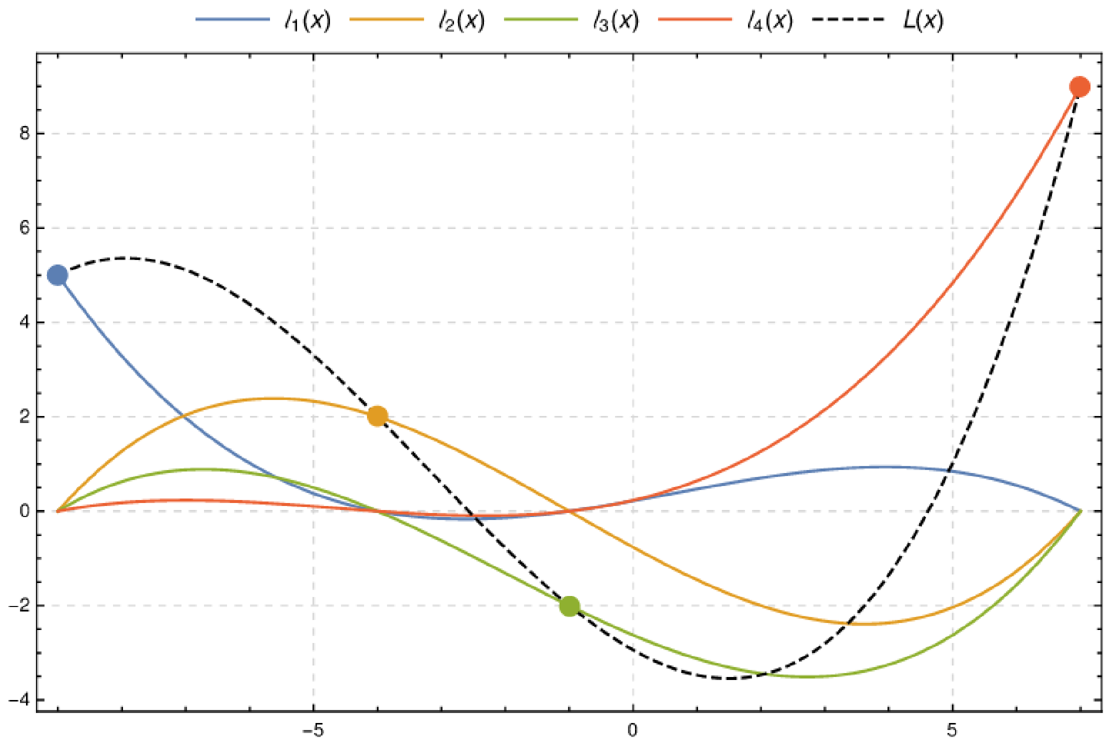
在数值分析中，拉格朗日插值法是以法国十八世纪数学家约瑟夫·拉格朗日命名的一种多项式插值方法。

许多实际问题中都用函数来表示某种内在联系或规律，而不少函数都只能通过实验和观测来了解。如对实践中的某个物理量进行观测，在若干个不同的地方得到相应的观测值，拉格朗日插值法可以找到一个多项式，其恰好在各个观测的点取到观测到的值。这样的多项式称为拉格朗日（插值）多项式。数学上，拉格朗日插值法可以给出一个恰好穿过二维平面上若干个已知点的多项式函数。

2.网格化

■2.1 拉格朗日插值法

对于给定的若$n+1$个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$, 对应于它们的次数不超过 n 的拉格朗日多项式 L 只有一个。如果计入次数更高的多项式，则有无穷个，因为所有与 L 相差 $\lambda(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ 的多项式都满足条件。例子：



2.网格化

GeoGoku

■2.1 拉格朗日插值法

定义
对某个多项式函数，已知有给定的k + 1个取值点：

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

其中 x_j 对应着自变量的位置，而 y_j 对应着函数在这个位置的取值。
假设任意两个 x_j 都互不相同，那么应用拉格朗日插值公式所得到的拉格朗日插值多项式为：

$$L(x) := \sum_{j=0}^{k} y_j \ell_j(x)$$

其中,每个 $\ell_j(x)$ 为拉格朗日基本多项式（或称插值基函数），其表达式为：

$$\ell_j(x) := \prod_{i=0,\, i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}.$$

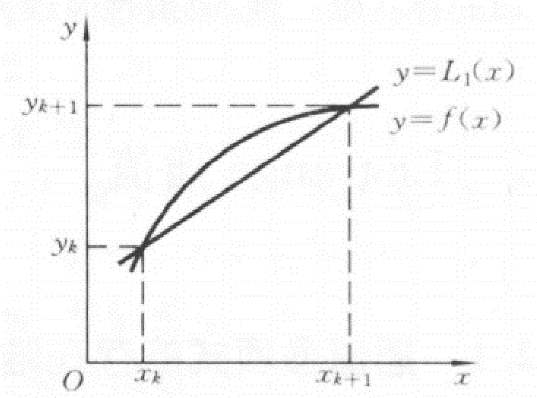
拉格朗日基本多项式 $\ell_j(x)$ 的特点是在 x_j上取值为1，在其它的点 x_i, $i \neq j$上取值为0。

2.网格化

■2.1 拉格朗日插值法

推导思路是：由给定的$M+1$个结点上的函数值，求得一个关于x的M次多项式，用以逼近函数$g(x)$，并要求由该多项式在给定结点上的计算值等于结点上给定的函数值。

■2.1 拉格朗日插值法



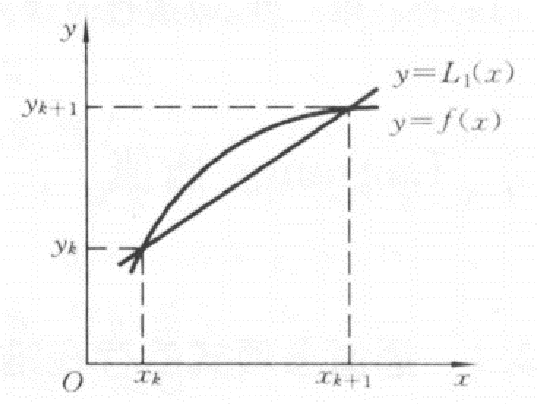
一维拉格朗日插值公式

假设已知区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 端点处的函数值，要求在两点之间进行线性插值，线性插值为经过两个端点的一条直线。我们知道有两种方式来描述这条直线对应的函数：**点斜式**、**两点式**。

- **点斜式**： $L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$
- **两点式**： $L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$

将两个端点坐标代入上述直线方程，可以很轻易地验证点斜式和两点式所代表的直线确实经过这两个端点。

■2.1 拉格朗日插值法



一维拉格朗日插值公式

我们重点关注 $L_1(x)$ 两点式的直线方程，如果将纵坐标 y_k, y_{k+1} 视作常系数， $L_1(x)$ 可以看作两个线性函数的线性组合：

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

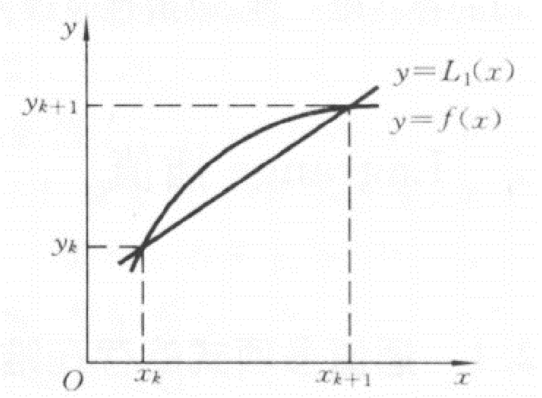
$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

也就是说，我们可以将线性插值的函数分解成两个**一次插值基函数**的叠加，这是拉格朗日插值法的核心思想。

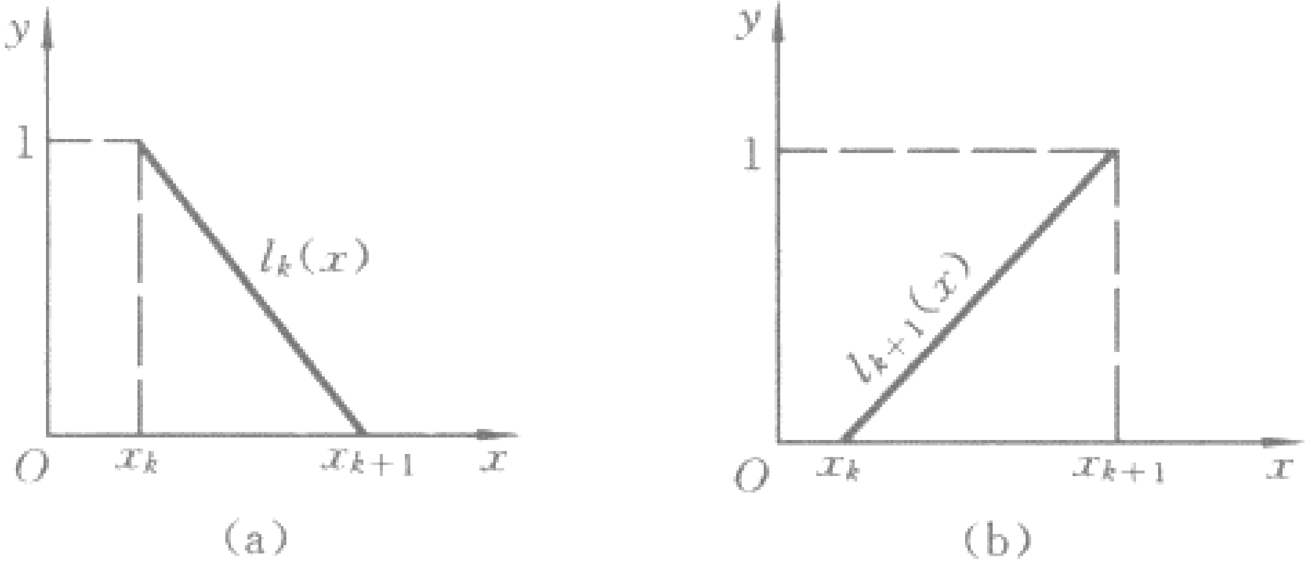
2.网格化

GeoGoku

■2.1 拉格朗日插值法



一维拉格朗日插值公式



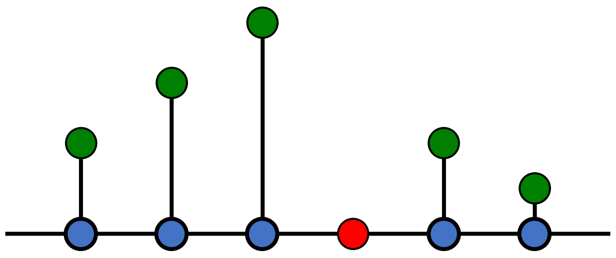
一次插值基函数

2.网格化

GeoGoku

■2.1 拉格朗日插值法

一维拉格朗日插值公式



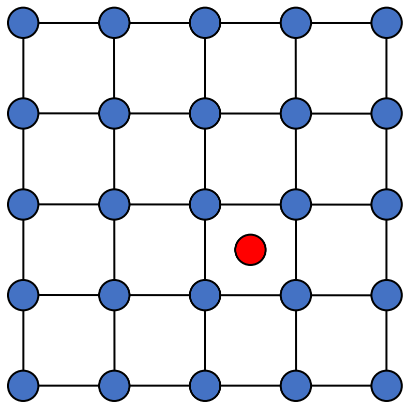
$$g(x)=\sum_{i=0}^{M}g(x_i)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_M)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_M)}$$

$g(x)$计算点上的重磁场值；$g(x_i)$实测点上的重磁场值；

x_k，x_i为插值点的剖面坐标；M为总插值点数。

2.网格化

■2.1 拉格朗日插值法



二维拉格朗日插值公式

$$g(x,y)=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{M}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{N}\left(\frac{y-y_l}{y_j-y_l}\right)g(x_i,y_j)$$

$g(x,y)$计算点上的重力场值；

$g(x_i,y_j)$实测点上的重力场值；

x_k，x_i，y_l，y_j为插值点的坐标；

■2.2 函数的多项式拟合法

设在平面M个结点上给定了函数值$g(x_i, y_i)$ (i=1, 2, …, M)。

假设函数$g(x, y)$可以用 x 和 y 坐标的 N 次多项式近似表示。

$$\overline{g}(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \cdots + a_{N-1} y^n$$

由M个结点上的值，采用最小二乘法，求得N次多项式的系数，则该函数在结点分布区内或附近计算点上的值，可由所求得的N次插值多项式来确定。

GeoGoku

■2.2 函数的多项式拟合法

二次拟合多项式

设函数 $g(x,y)$ 的二次拟合多项式为 $\overline{g}(x,y)$，则

$$\overline{g}(x,y)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 x^2+\alpha_4 xy+\alpha_5 y^2$$

定义目标函数

$$\Phi\left(\alpha^*\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(g_i-\overline{g}_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{g_i-\left(\alpha_0+\alpha_1 x_i+\alpha_2 y_i+\alpha_3 x_i^2+\alpha_4 x_i y_i+\alpha_5 y_i^2\right)\right\}^2$$

$$=\min\Phi\left(\alpha\right)$$

■2.2 函数的多项式拟合法

二次拟合多项式

$$\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[A_i\alpha - g_i\right] A_{ik} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i A_{ik} \alpha = \sum_{k=1}^{N} g_i A_{ik}$$

$$\left(A^T A\right)\alpha = A^T g$$

采用稳定的数值解法求解方程，得到最佳系数。把计算点的坐标代入二次多项式，即可求得函数值。

2.网格化

■2.3 等效源法

PERGAMON

Computers & Geosciences 26 (2000) 227–233

COMPUTERS & GEOSCIENCES

Gridding gravity data using an equivalent layer ☆

G.R.J. Cooper*

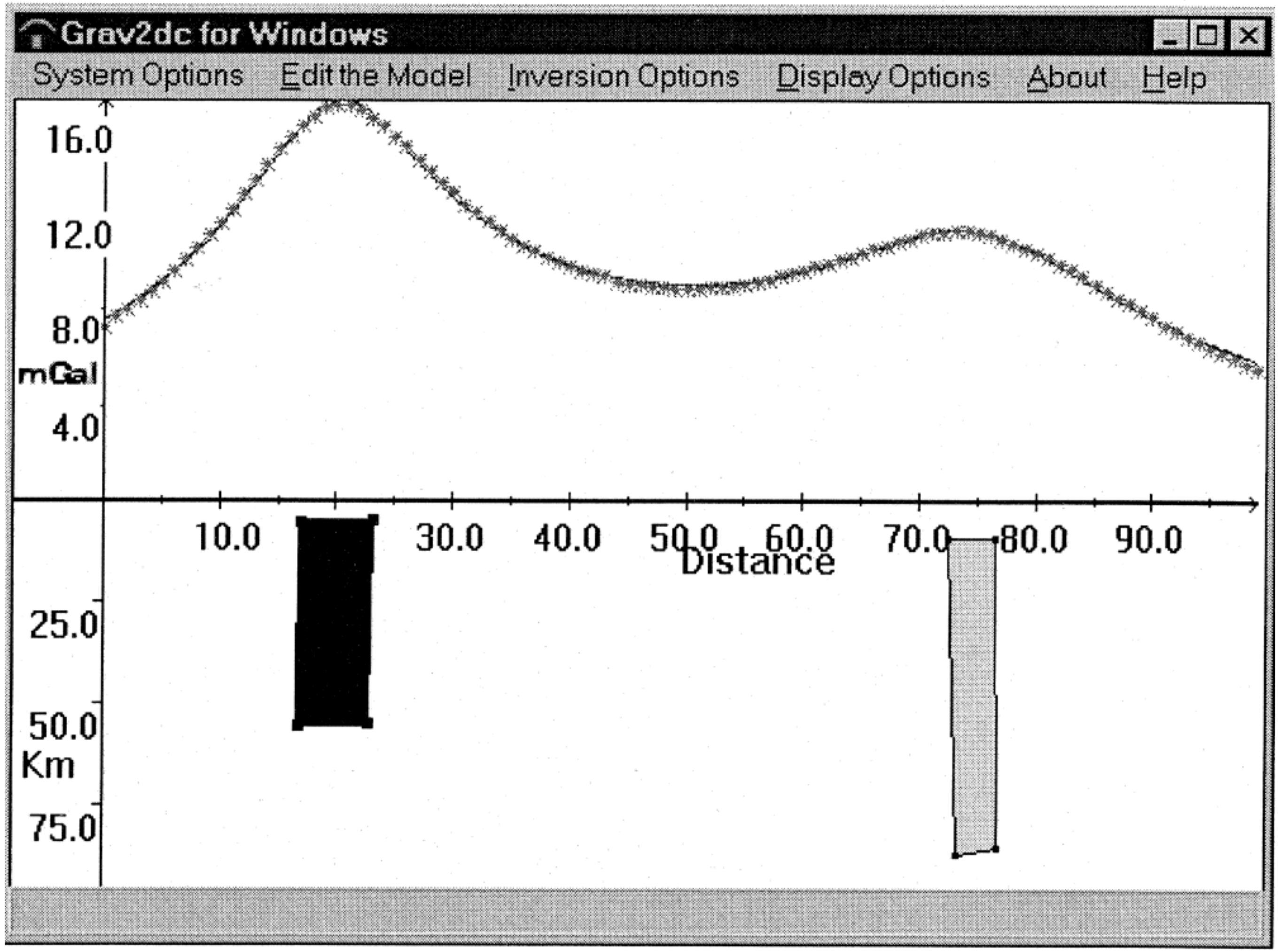
Departments of Geophysics and Geology, University of the Witwatersrand, Johannesburg 2050, South Africa

Received 16 April 1999; received in revised form 9 August 1999; accepted 9 August 1999

2.网格化

GeoGoku

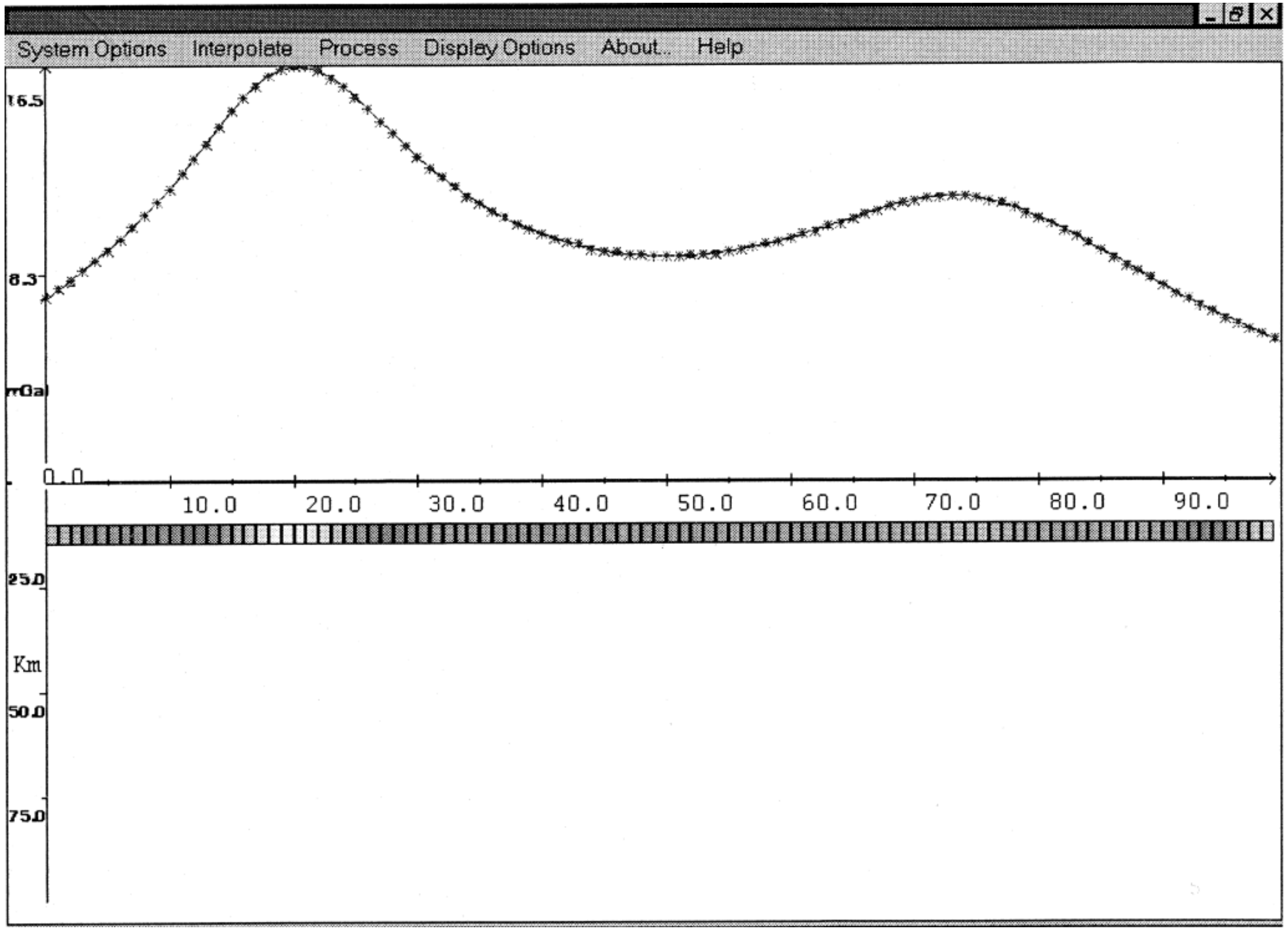
■2.3 等效源法



2.网格化

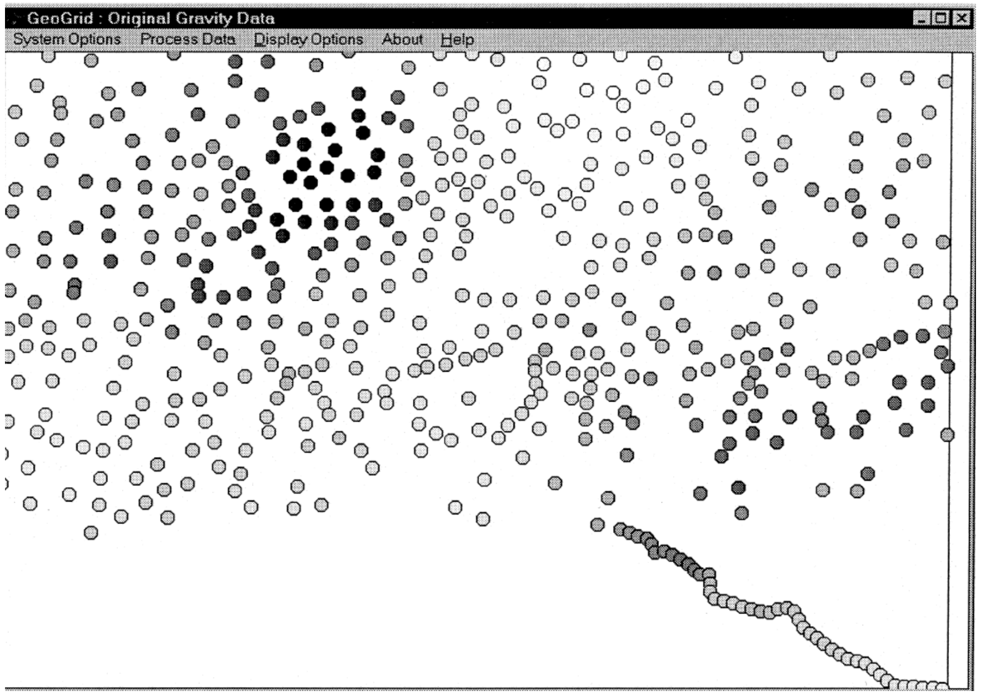
■2.3 等效源法

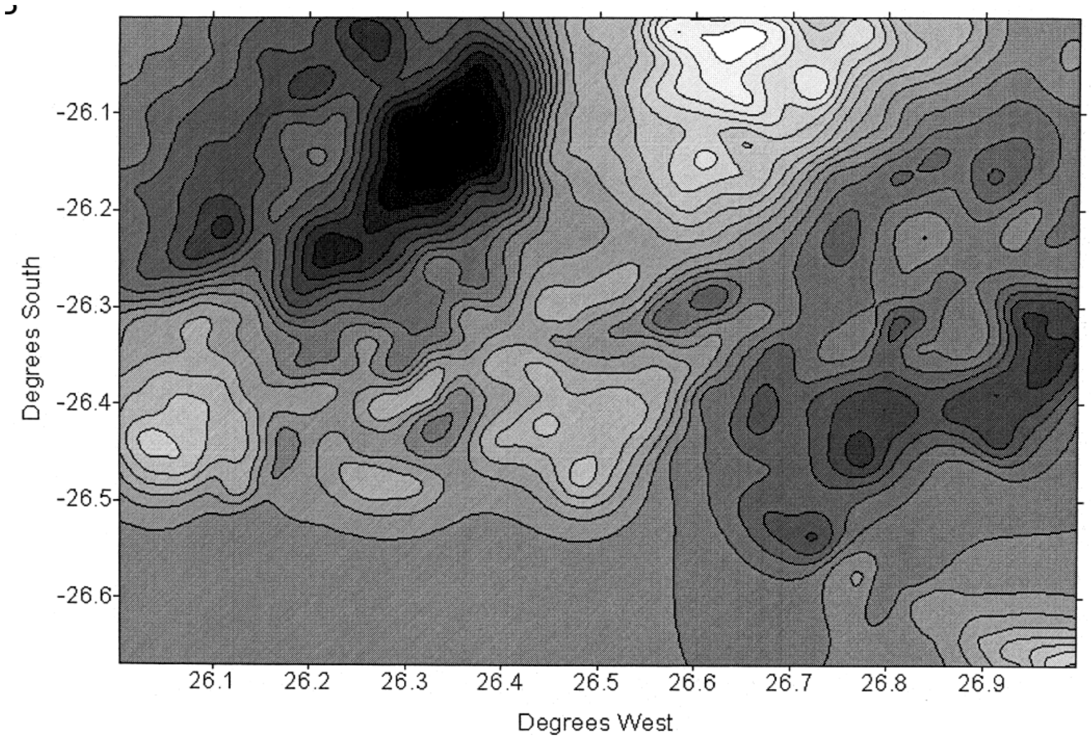
$$\Delta g_v = \frac{GM\Delta z}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



2.网格化

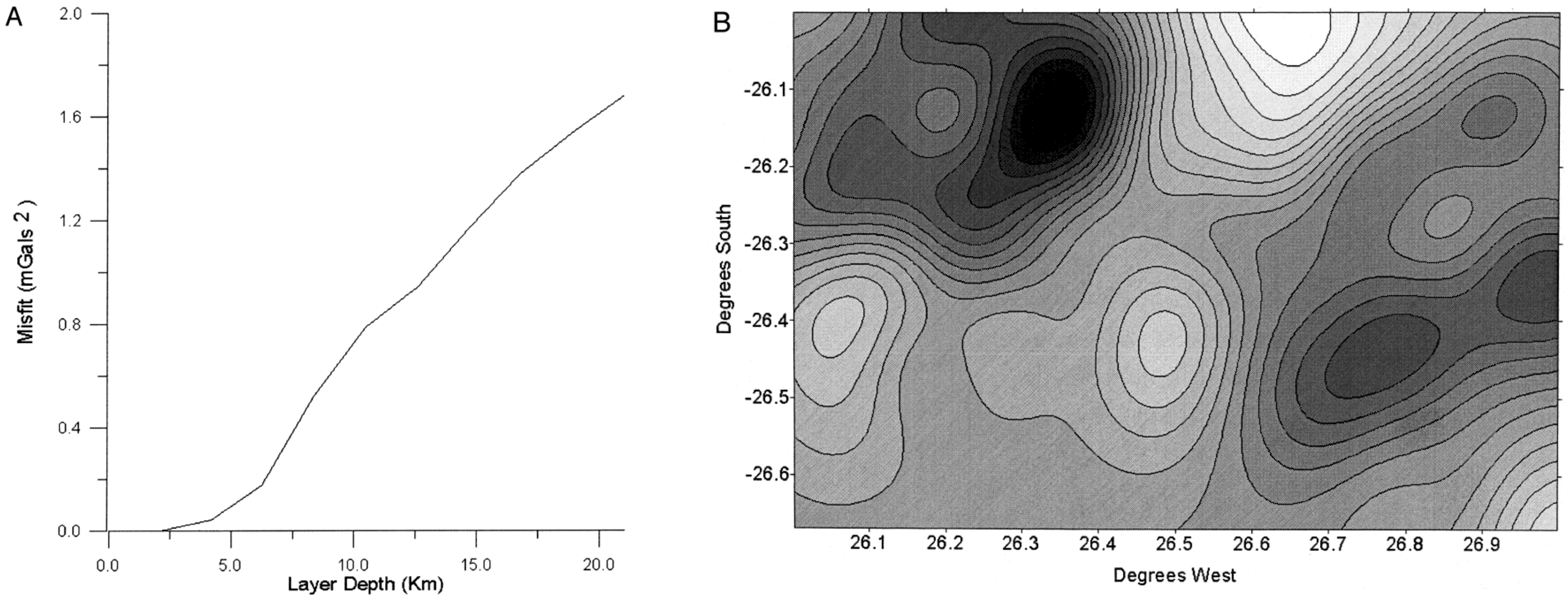
■2.3 等效源法


GeoGrid : Original Gravity Data
System Options
Process Data
Display Options
About
Help


-26.1
-26.2
-26.3
-26.4
-26.5
-26.6
Degrees South
26.1
26.2
26.3
26.4
26.5
26.6
26.7
26.8
26.9
Degrees West

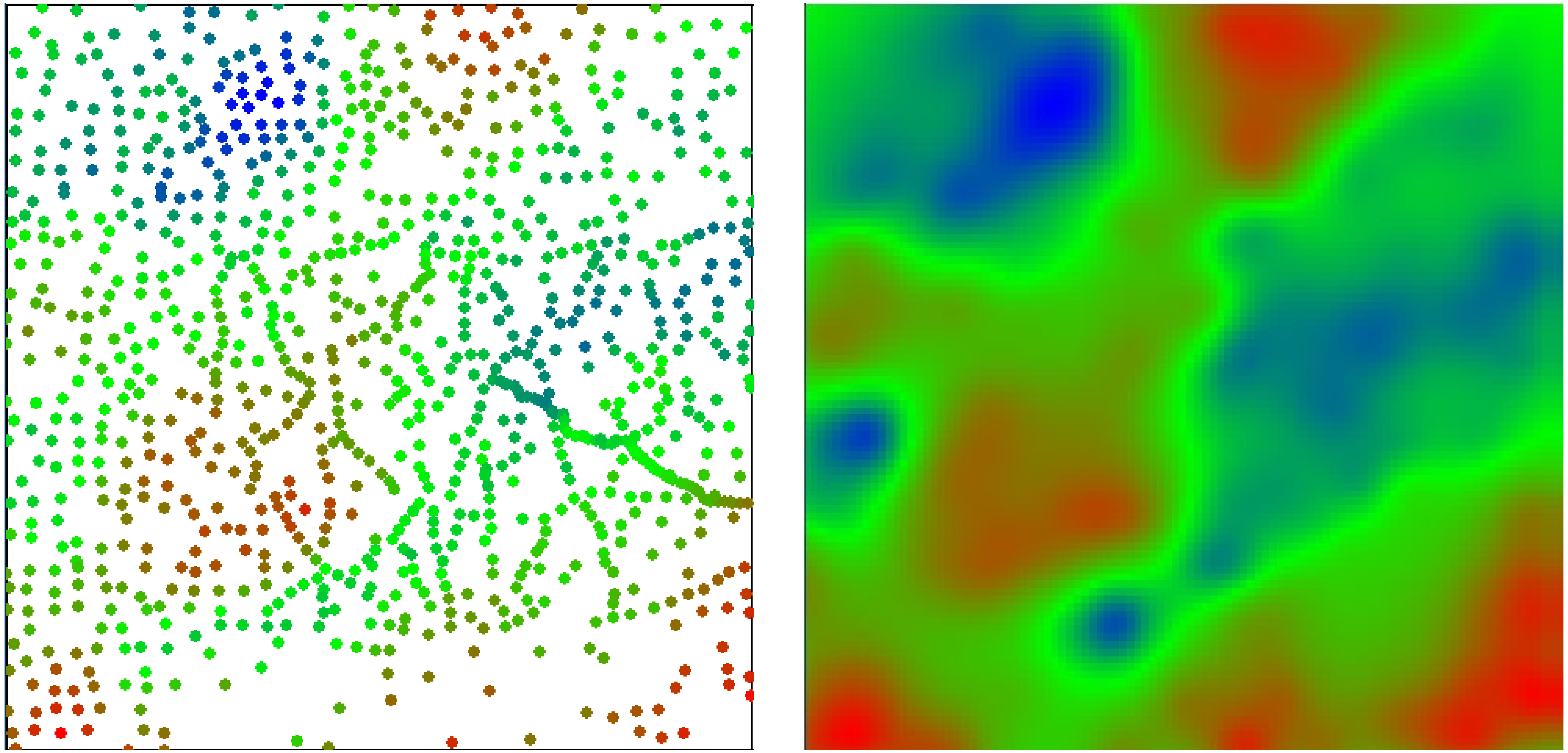
2.网格化

■2.3 等效源法


A
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0.0
Misfit (mGals 2)
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
Layer Depth (Km)
B
-26.1
-26.2
-26.3
-26.4
-26.5
-26.6
Degrees South
26.1
26.2
26.3
26.4
26.5
26.6
26.7
26.8
26.9
Degrees West

2.网格化

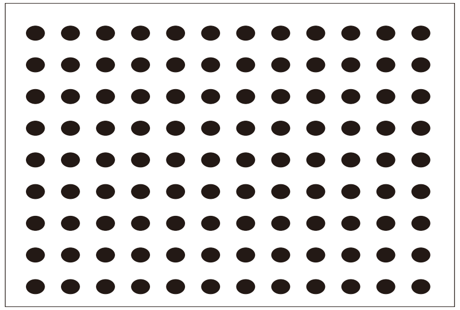
■2.3 等效源法



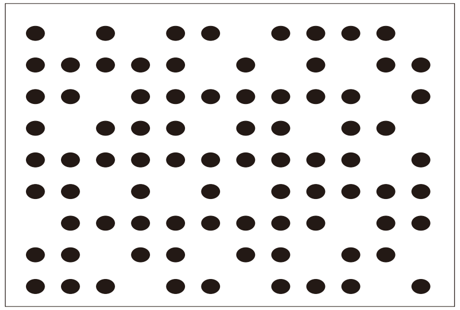
等效源法网格化（据Cooper，2000 ）

2.网格化

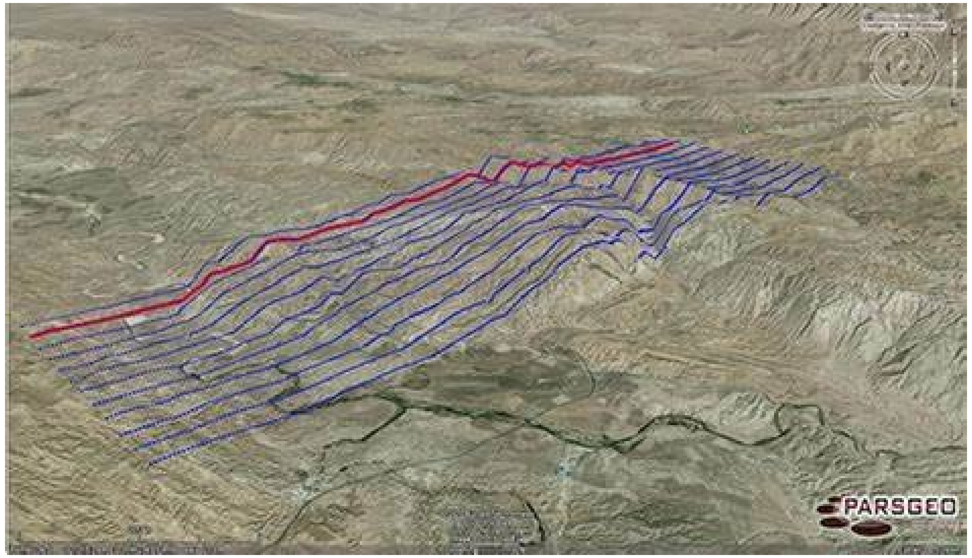
■2.4 泰勒定理法



idea data sets
- equal space
- high resolution



real data sets
- irregular



No Access | GEOPHYSICS | Volume 87, Issue 2

Potential field data interpolation by Taylor series expansion

Check for updates

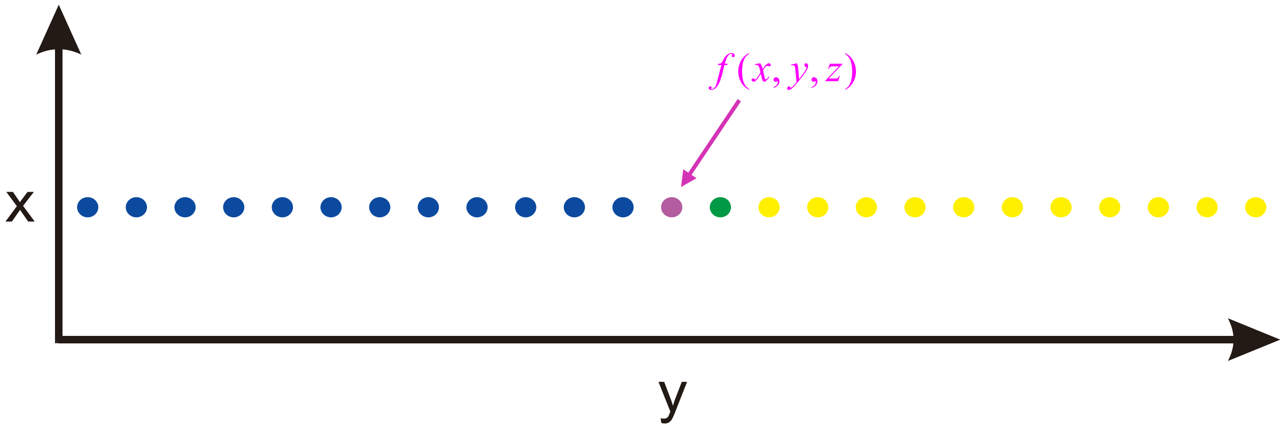
Authors:
Tao Chen and Dikun Yang

https://doi.org/10.1190/geo2021-0032.1

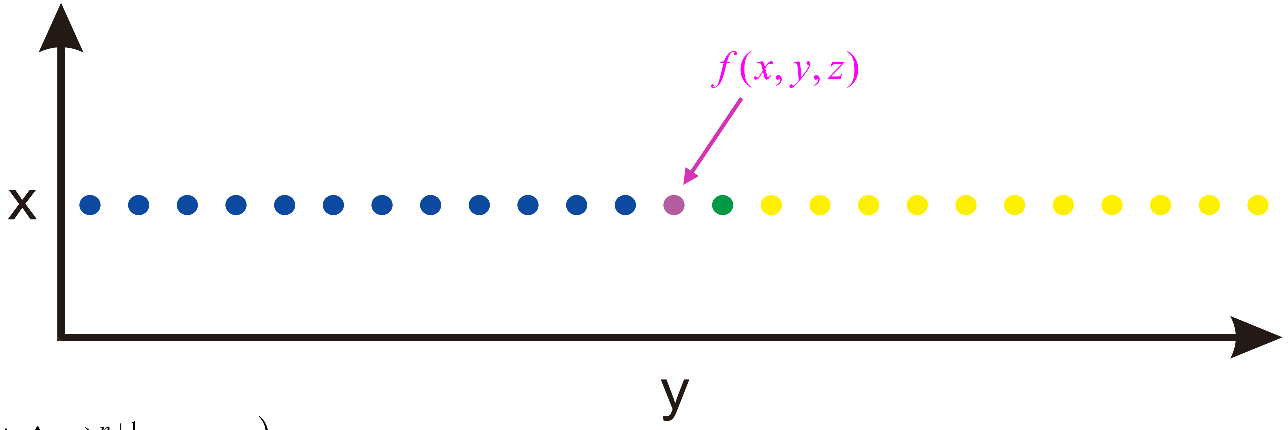
GeoGoku

■2.4 泰勒定理法

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)$$



■2.4 泰勒定理法

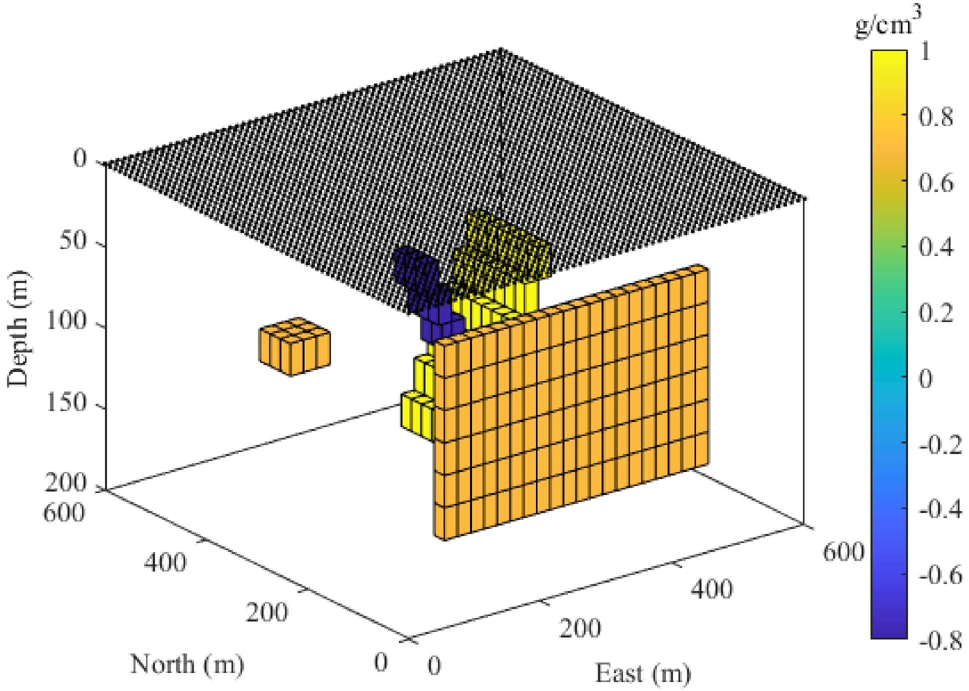


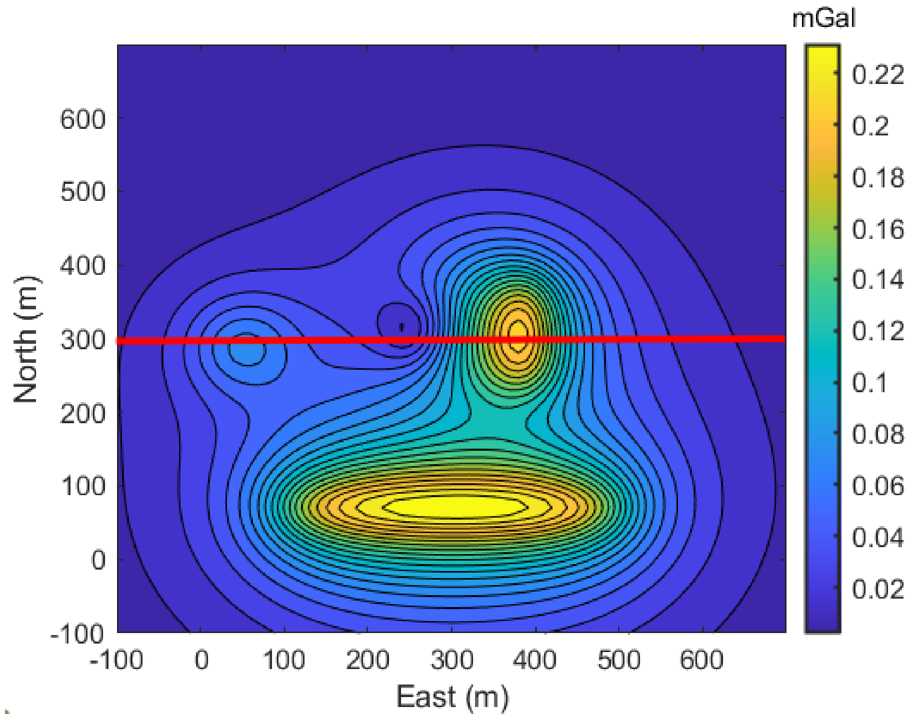
$$
\begin{pmatrix}
\frac{\pm\Delta y_1}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\pm\Delta y_1)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
\frac{\pm\Delta y_2}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\pm\Delta y_2)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^{n+1}}{(n+1)!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\pm\Delta y_n}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_n)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\pm\Delta y_n)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_n)^{n+1}}{(n+1)!} \\
\frac{\pm\Delta y_{n+1}}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^2}{2!} & \cdots & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
f_y'(x,y,z) \\
f_y''(x,y,z) \\
\vdots \\
f_y^{n}(x,y,z) \\
f_y^{n+1}(x,\xi,z)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f(x,y\pm\Delta y_1,z)-f(x,y,z) \\
f(x,y\pm\Delta y_2,z)-f(x,y,z) \\
\vdots \\
f(x,y\pm\Delta y_n,z)-f(x,y,z) \\
f(x,y\pm\Delta y_{n+1},z)-f(x,y,z)
\end{pmatrix}
$$

$$
f(x,y\pm\Delta y,z)=f(x,y,z)+(\pm\Delta y)f_y'(x,y,z)+\frac{(\pm\Delta y)^2}{2!}f_y''(x,y,z)+\ldots+\frac{(\pm\Delta y)^n}{n!}f_y^{n}(x,y,z)
$$

2.网格化

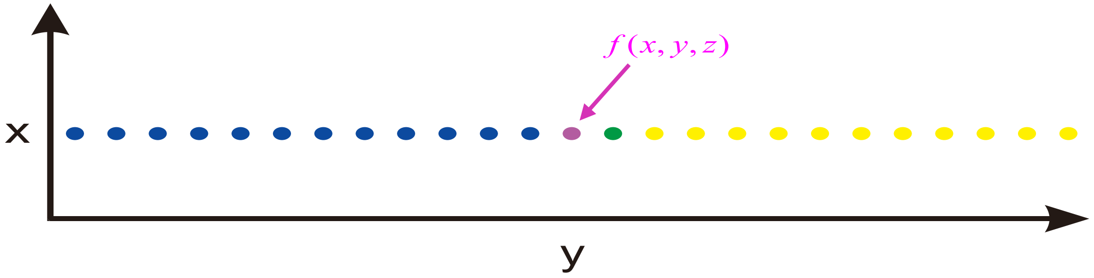
■ 2.4 泰勒定理法

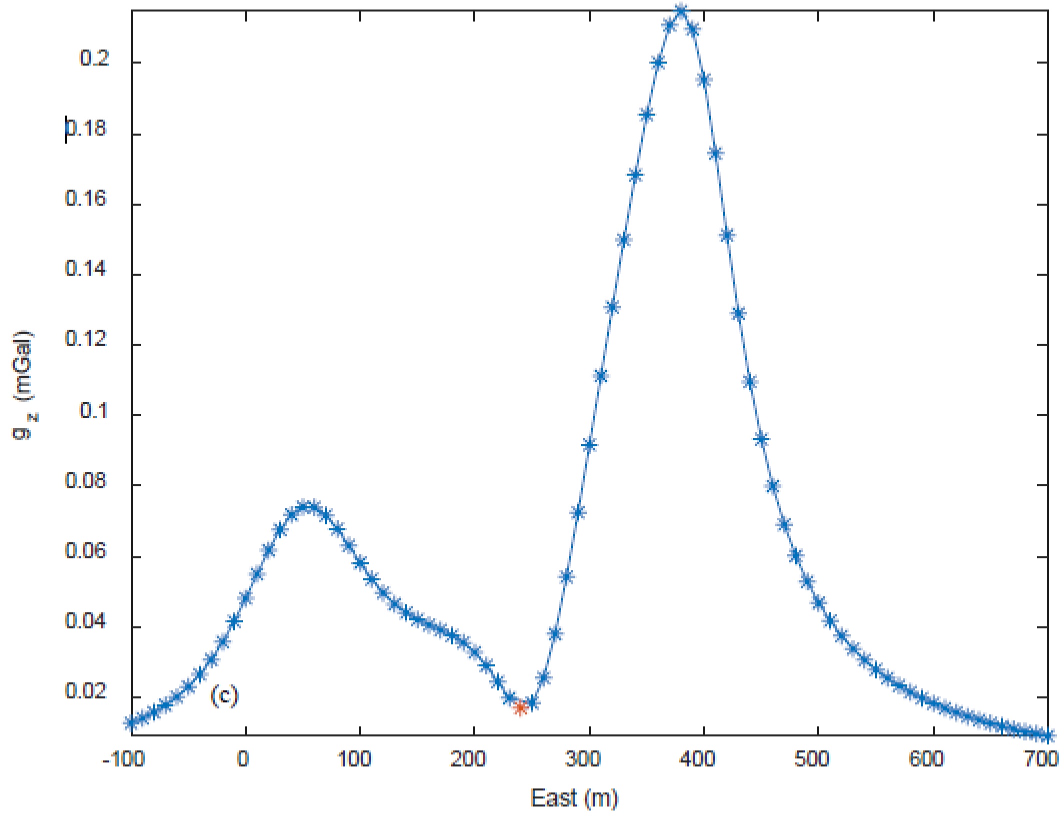


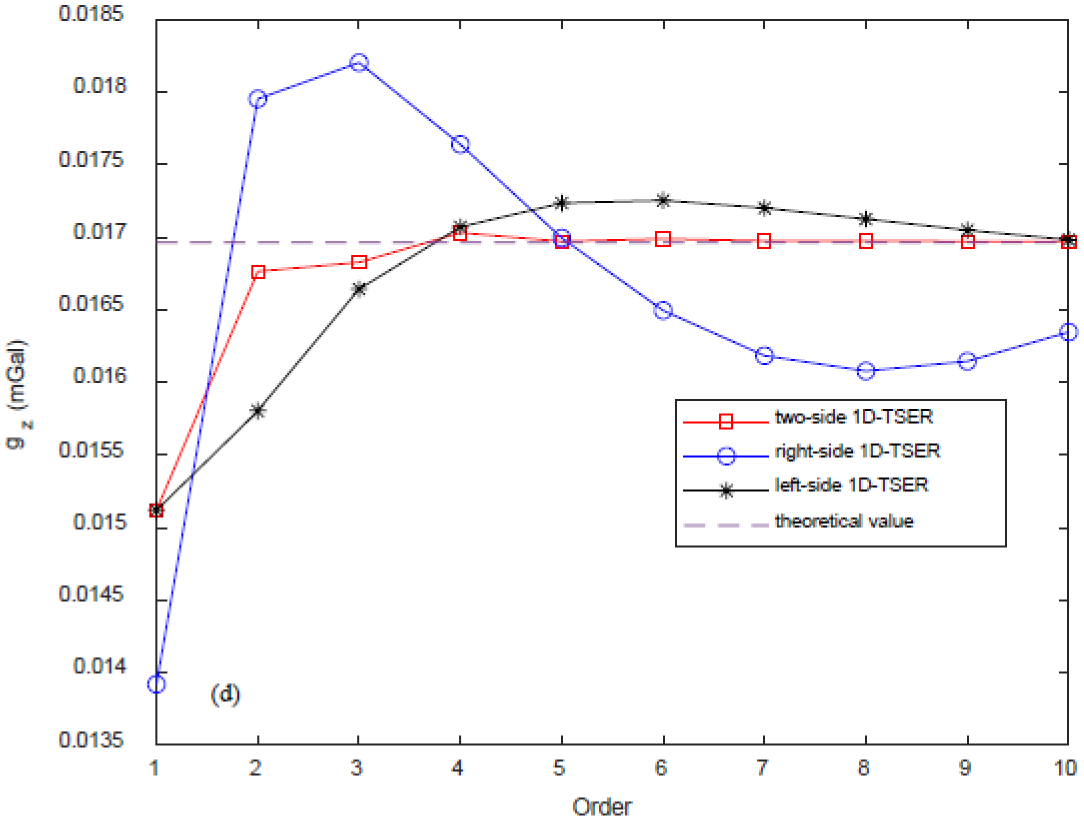


2.网格化

■2.4 泰勒定理法

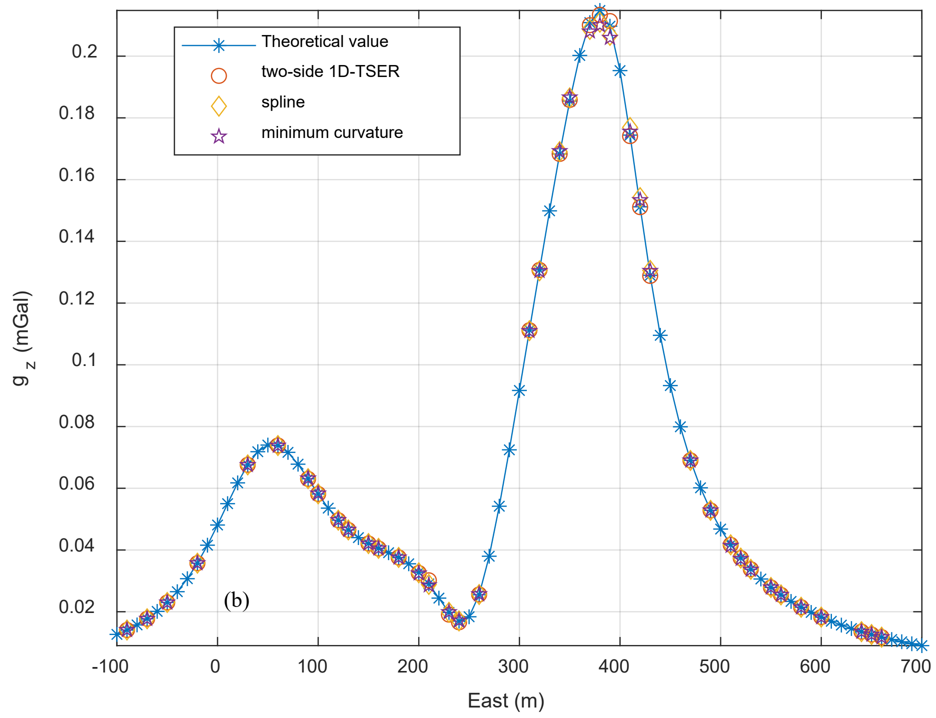


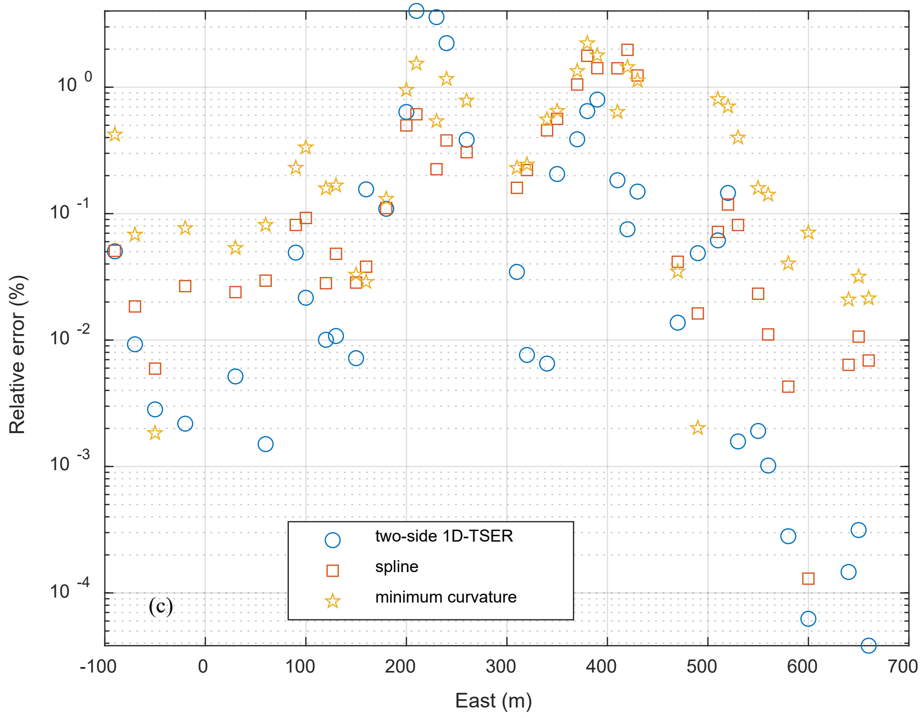




2.网格化

■2.4 泰勒定理法



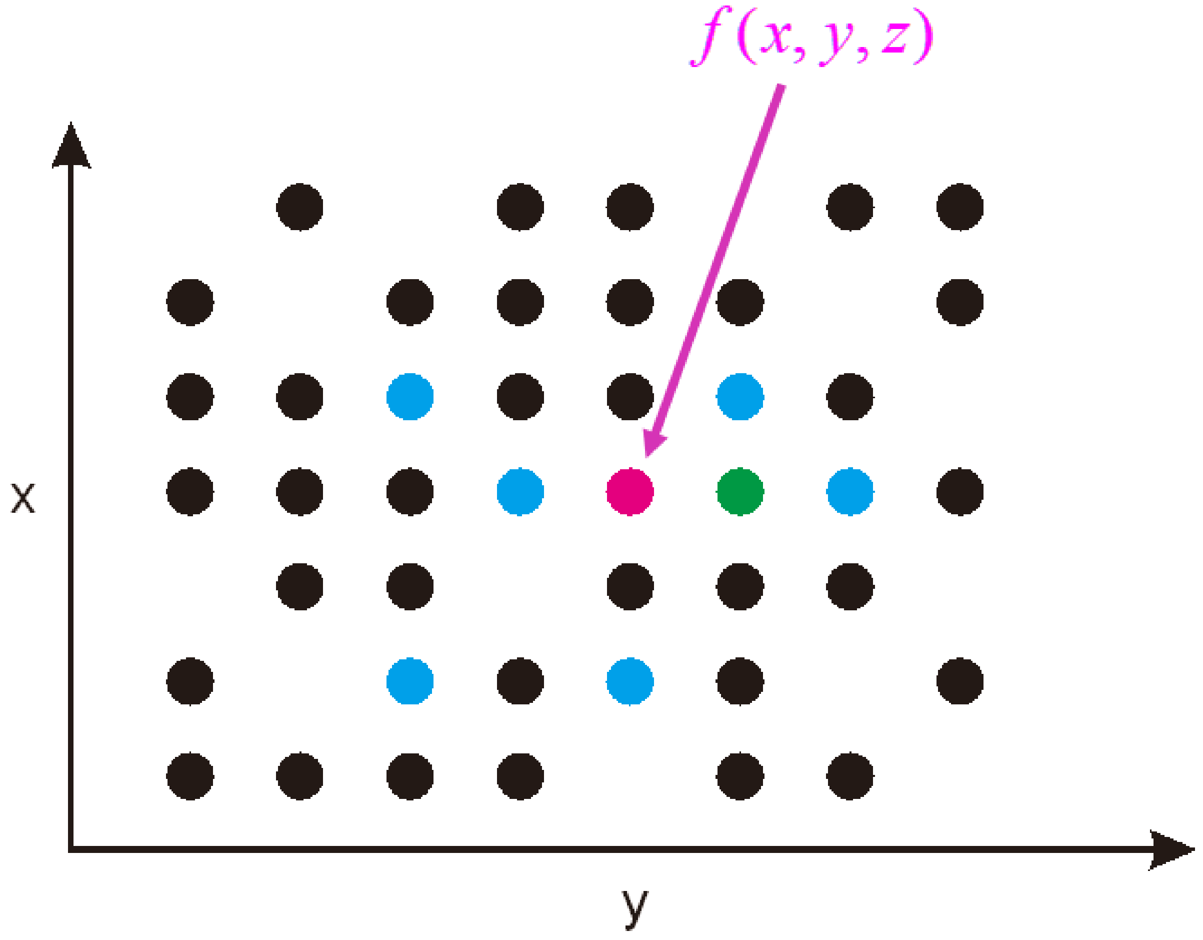


RMS：

Two-side TSE	4.41×10^{-4}
Spline	1.09×10^{-3}
MC	1.19×10^{-3}

2.网格化

■2.4 泰勒定理法



GeoGoku

■2.4 泰勒定理法

$$\begin{pmatrix} \pm\Delta x_1 & \pm\Delta y_1 & \frac{(\pm\Delta x_1)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_1)(\pm\Delta y_1)}{2!} & \cdots \\ \pm\Delta x_2 & \pm\Delta y_2 & \frac{(\pm\Delta x_2)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_2)(\pm\Delta y_2)}{2!} & \cdots \\ \pm\Delta x_3 & \pm\Delta y_3 & \frac{(\pm\Delta x_3)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_3)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_3)(\pm\Delta y_3)}{2!} & \cdots \\ \pm\Delta x_4 & \pm\Delta y_4 & \frac{(\pm\Delta x_4)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_4)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_4)(\pm\Delta y_4)}{2!} & \cdots \\ \pm\Delta x_5 & \pm\Delta y_5 & \frac{(\pm\Delta x_5)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_5)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_5)(\pm\Delta y_5)}{2!} & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x^1(x,y,z) \\ f_y^1(x,y,z) \\ f_{xx}^2(x,y,z) \\ f_{yy}^2(x,y,z) \\ f_{xy}^2(x,y,z) \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x\pm\Delta x_1, y\pm\Delta y_1, z) - f(x,y,z) \\ f(x\pm\Delta x_2, y\pm\Delta y_2, z) - f(x,y,z) \\ f(x\pm\Delta x_3, y\pm\Delta y_3, z) - f(x,y,z) \\ f(x\pm\Delta x_4, y\pm\Delta y_4, z) - f(x,y,z) \\ f(x\pm\Delta x_5, y\pm\Delta y_5, z) - f(x,y,z) \\ \cdots \end{pmatrix}$$

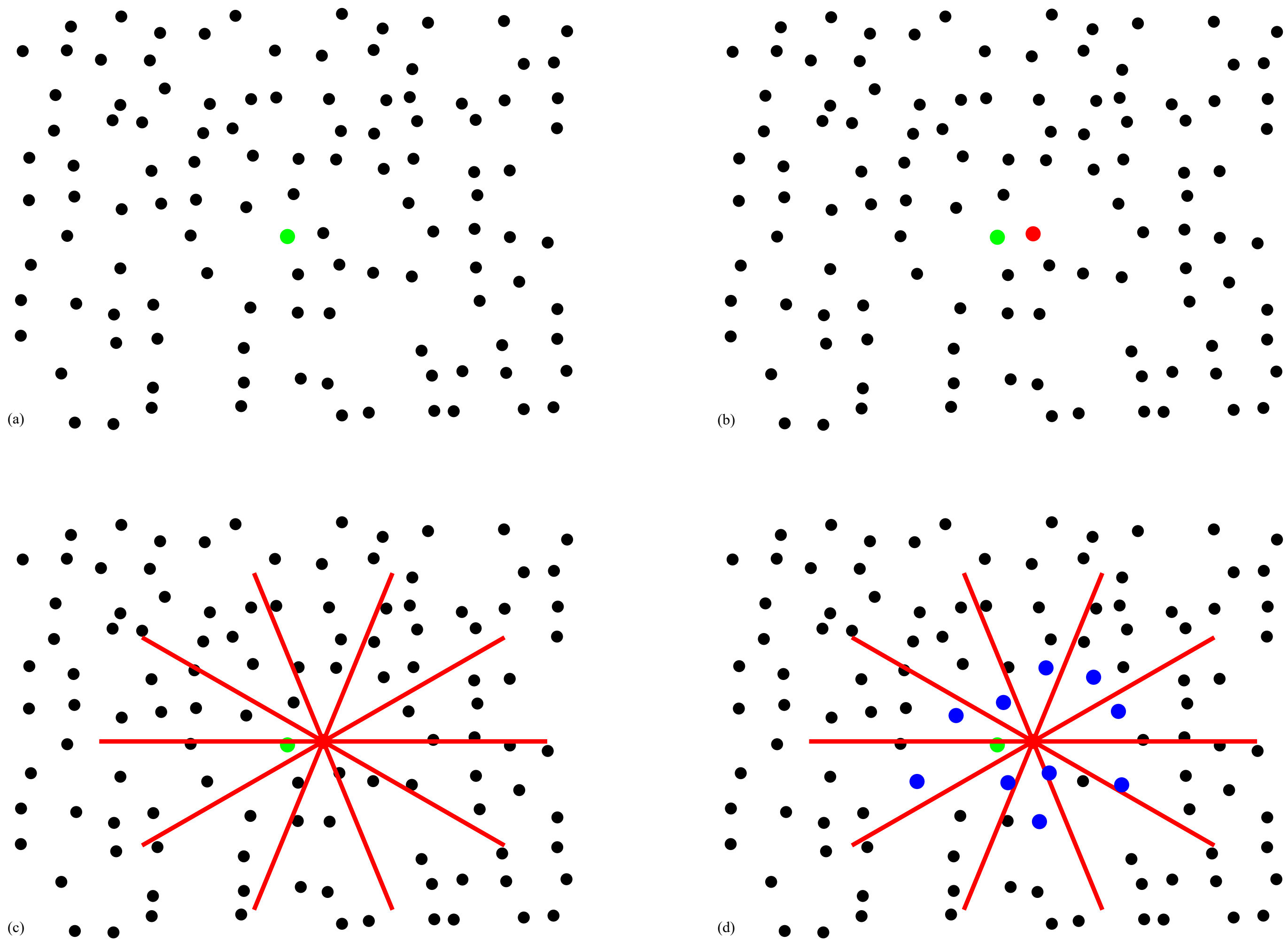
2.网格化

■2.4 泰勒定理法

$$
\begin{aligned}
f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z) \approx\ & f(x,y,z) + (\pm\Delta x) f_x^1(x,y,z) + (\pm\Delta y) f_y^1(x,y,z) \\
& + \frac{(\pm\Delta x)^2}{2!} f_{xx}^2(x,y,z) + \frac{(\pm\Delta y)^2}{2!} f_{yy}^2(x,y,z) + \frac{2(\pm\Delta x)(\pm\Delta y)}{2!} f_{xy}^2(x,y,z) \\
& + \frac{(\pm\Delta x)^3}{3!} f_{xxx}^3(x,y,z) + \frac{(\pm\Delta y)^3}{3!} f_{yyy}^3(x,y,z) \\
& + \frac{3(\pm\Delta x)^2(\pm\Delta y)}{3!} f_{xxy}^3(x,y,z) + \frac{3(\pm\Delta x)(\pm\Delta y)^2}{3!} f_{xyy}^3(x,y,z) + H.O.T.
\end{aligned}
$$

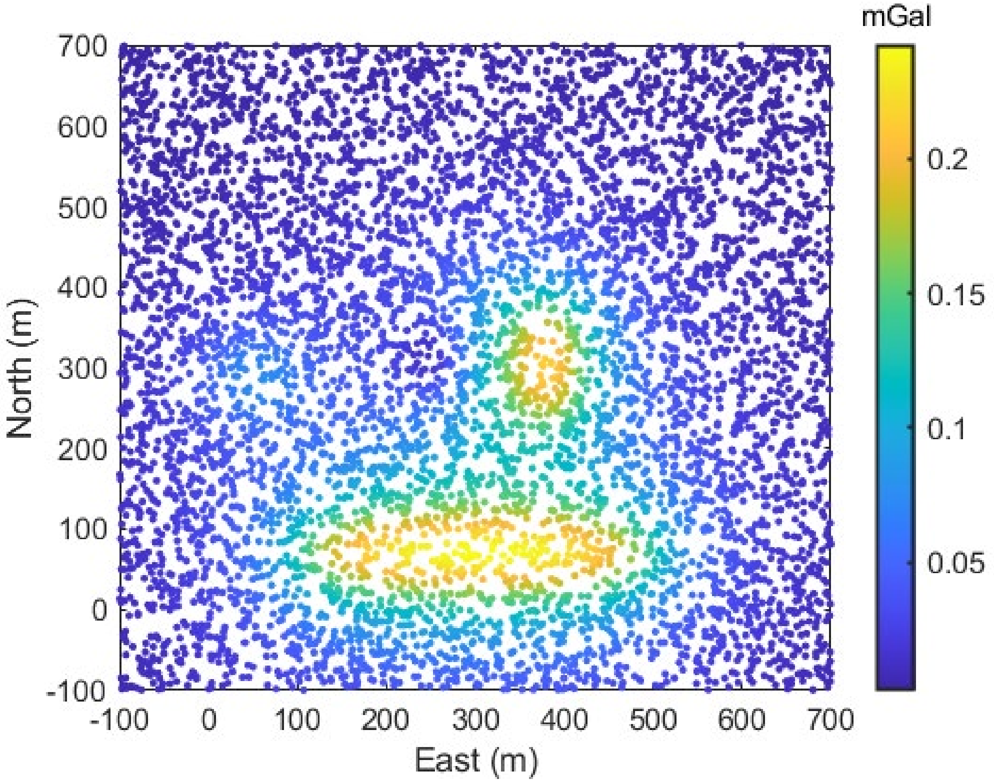
2.网格化

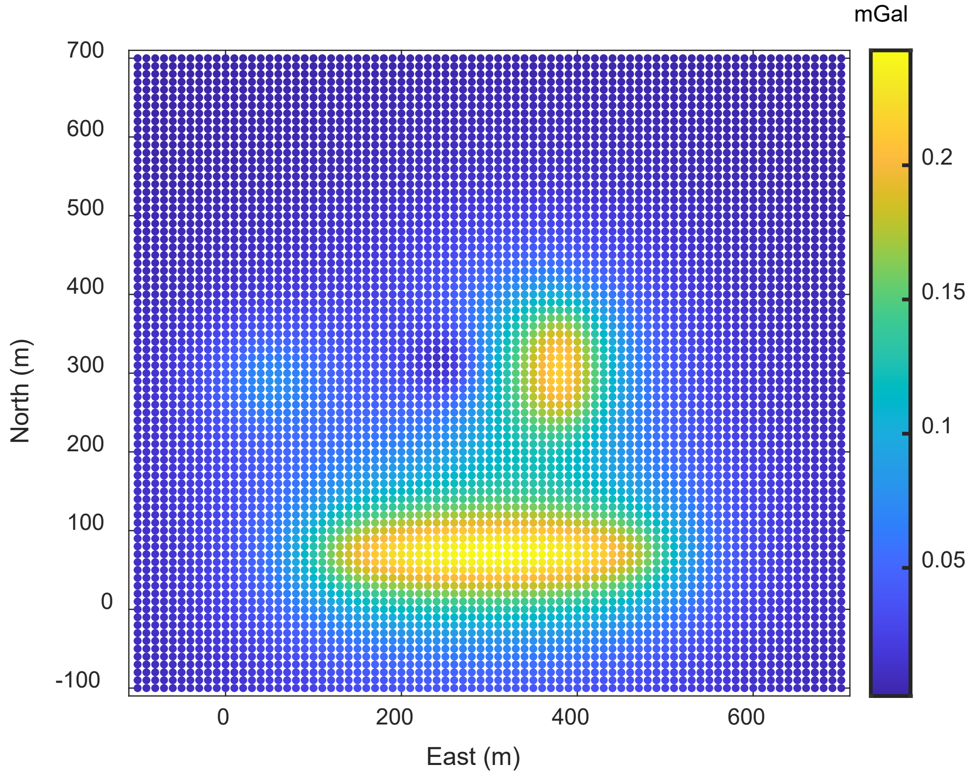
■2.4 泰勒定理法



2.网格化

■2.4 泰勒定理法

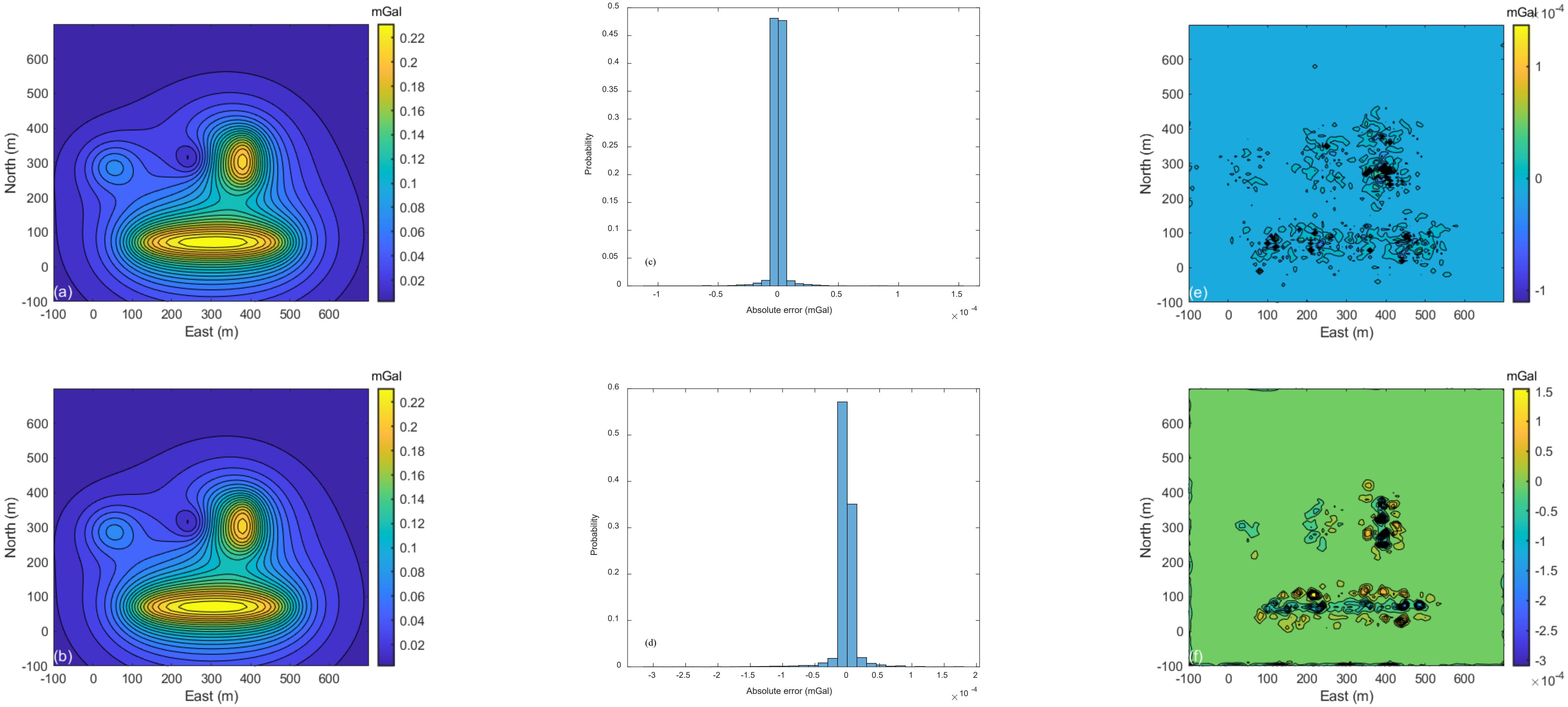




2.网格化

GeoGoku

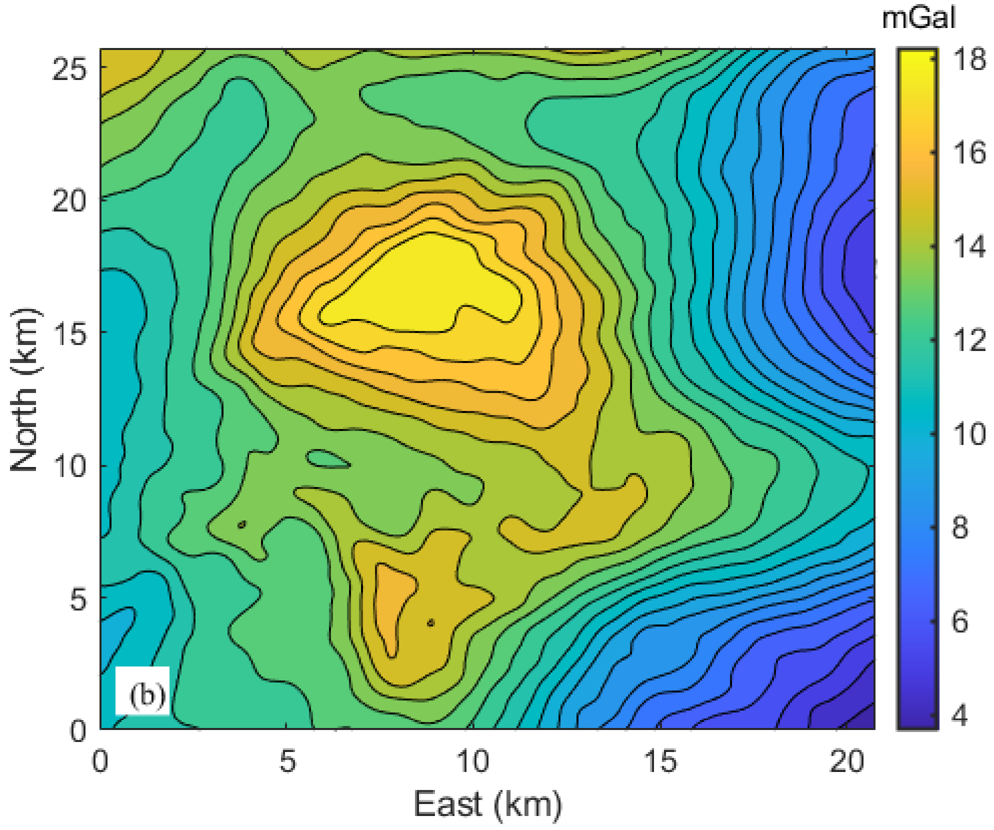
■2.4 泰勒定理法



2.网格化

GeoGoku

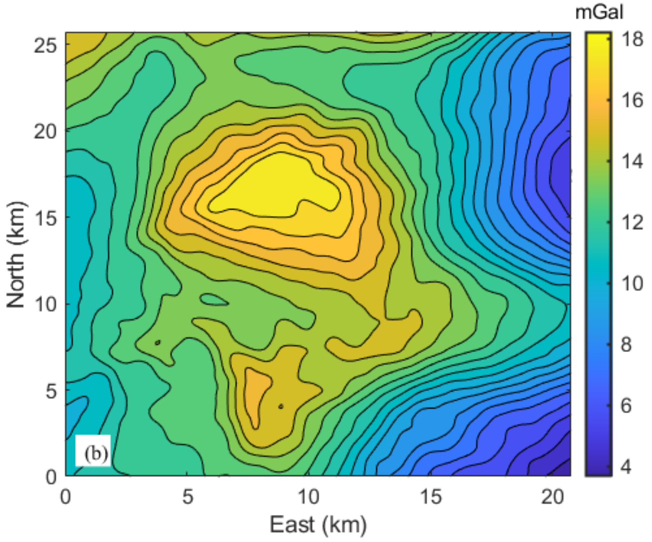
■2.4 泰勒定理法

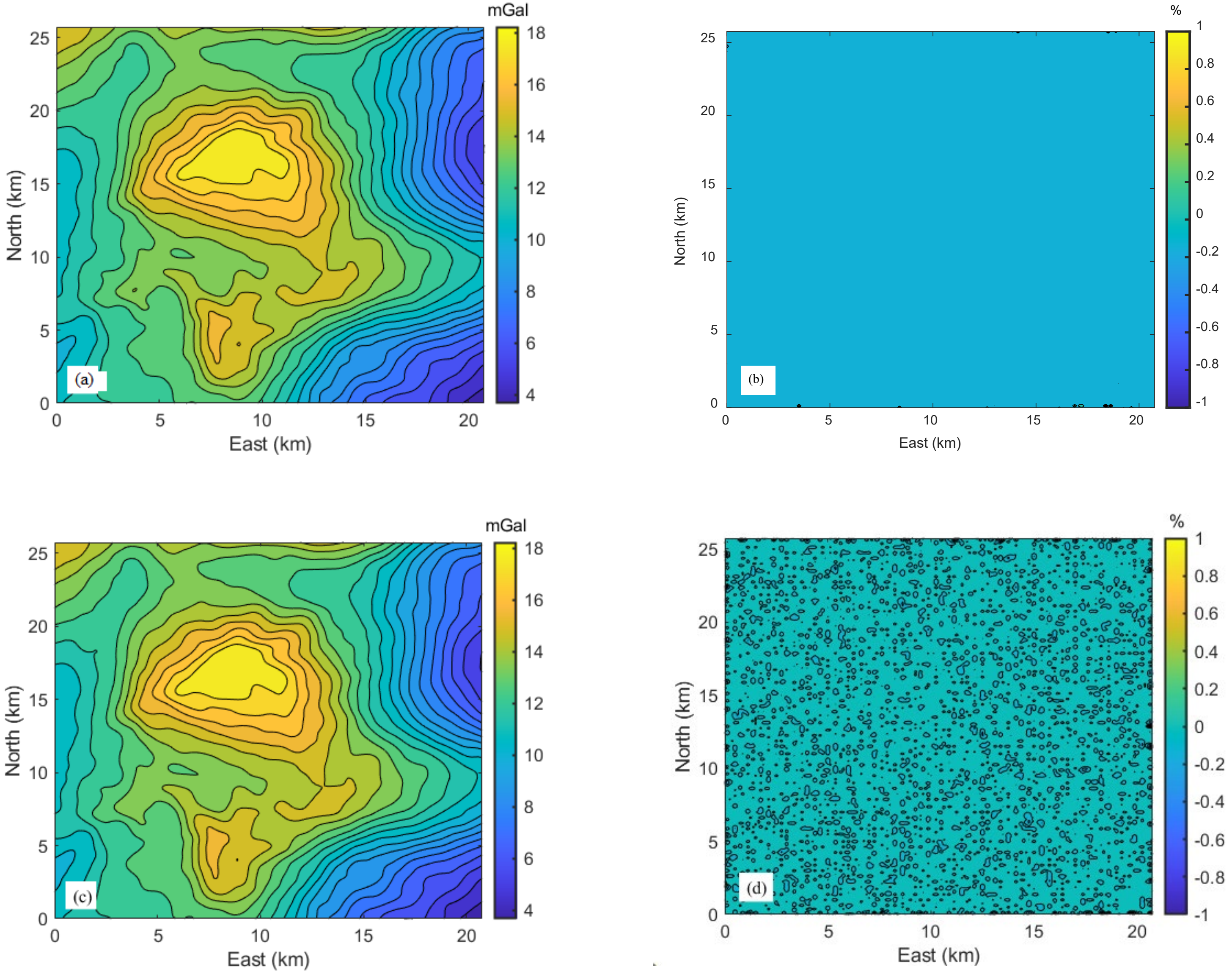


2.网格化

GeoGoku

■2.4 泰勒定理法





2.网格化

平面数据其它常用网格化方法

- ✓ 最小曲率法
- ✓ 克里金法
- ✓ 径向基函数法
- ✓ 基于三角网的线性插值法
- ✓ 广义等效源法
- ✓ 函数逼近法
- ✓ 双三次样条内插法
- ✓ 改进的泰勒插值法
- ✓ ……

Golden Software Products | Surfer | Grapher | Golden Software

目 录

GeoGoku

3.平滑（去噪）

位场满足的物理方程

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = -4\pi G\sigma$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}V = \nabla V$$

$$\nabla \bullet \nabla V = \nabla^2 V = -4\pi G\sigma$$

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} = -\nabla U$$

$$\nabla^2 U = 0$$

3.平滑（去噪）

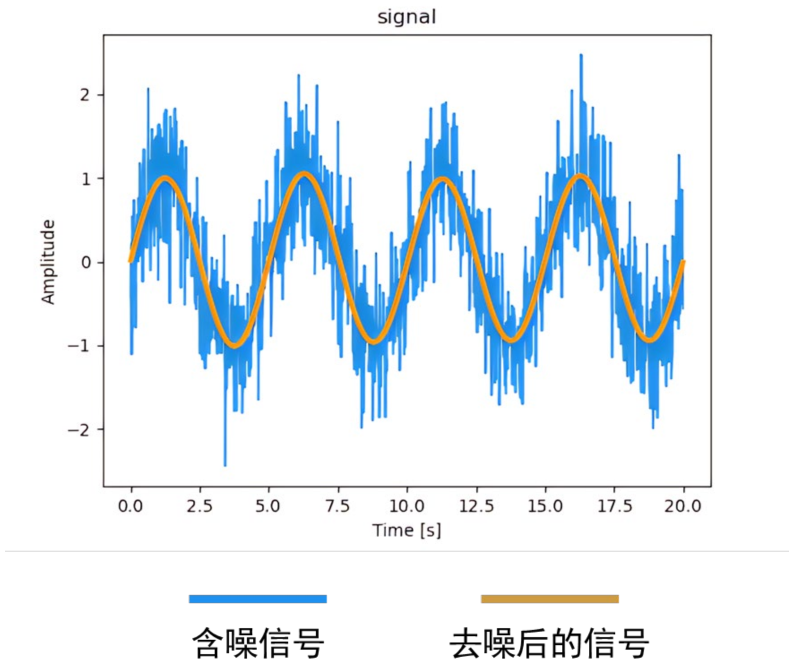
GeoGoku

为了消除重力野外观测误差相对测量结果进行各种校正时引进的误差，在进行重力异常解释前，首先要对异常曲线进行平滑，平滑还可以消去浅部的干扰。

a) 背景干扰等造成的突跳点；

b) 校正计算的误差造成的突跳点；

c) 局部的随机干扰造成的畸变点；



3.平滑（去噪）

磁测误差	理论误差	理论误差	观测误差	观测误差	
	磁测误差	计算误差	计算误差		
原始磁测数据	**正常场校正**	**高度校正**	**日变校正**	**背景场校正**	磁异常

≠

实测磁异常和磁异常满足的物理方程不吻合

$$\nabla^2 U = 0$$

3.平滑（去噪）

尽管重磁测量和测量结果的各项校正误差对异常曲线产生影响，但是，并不改变重磁异常曲线变化的基本趋势。在一般情况下，这个趋势可以用一个多项式来表示。由这个多项式所求得的异常应尽可能反映实测异常的变化趋势，而且，公式所计算的异常和原始异常不应该出现较大的偏差。异常平滑公式就是基于这种思想导出的。

3.平滑（去噪）

■徒手平滑

3.平滑（去噪）

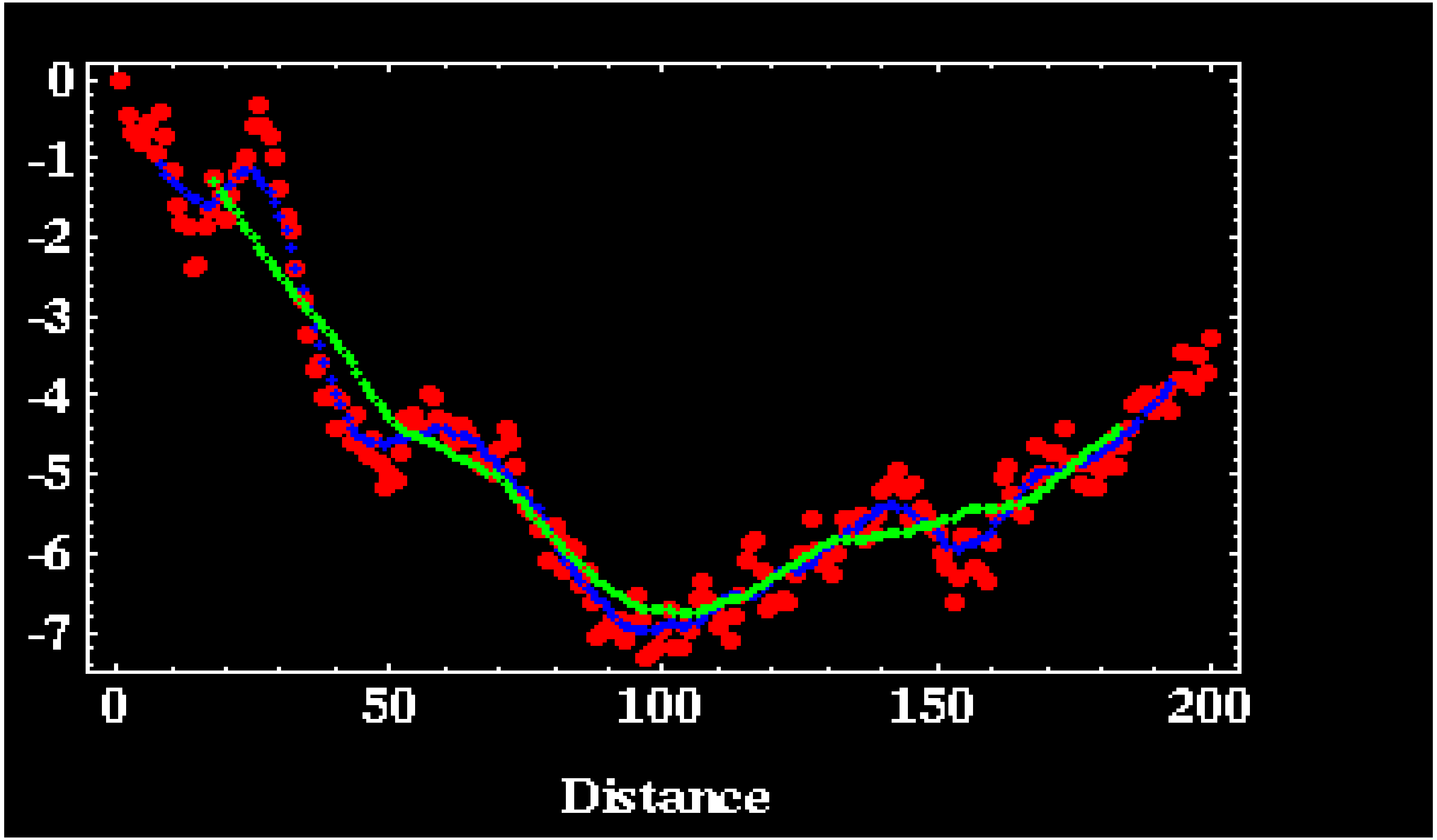
GeoGoku

■徒手平滑

- ✓ 依据重力异常在剖面上的变化具有一定的连续、渐变的规律，徒手平滑某些明显的突变点。
- ✓ 要求是平滑前后各点的重力异常值的偏差不应超过实测异常的均方误差，即被平滑掉的只应该是误差；尽可能使平滑前后剖面曲线所围成的面积相等，重心不变。

3.平滑（去噪）

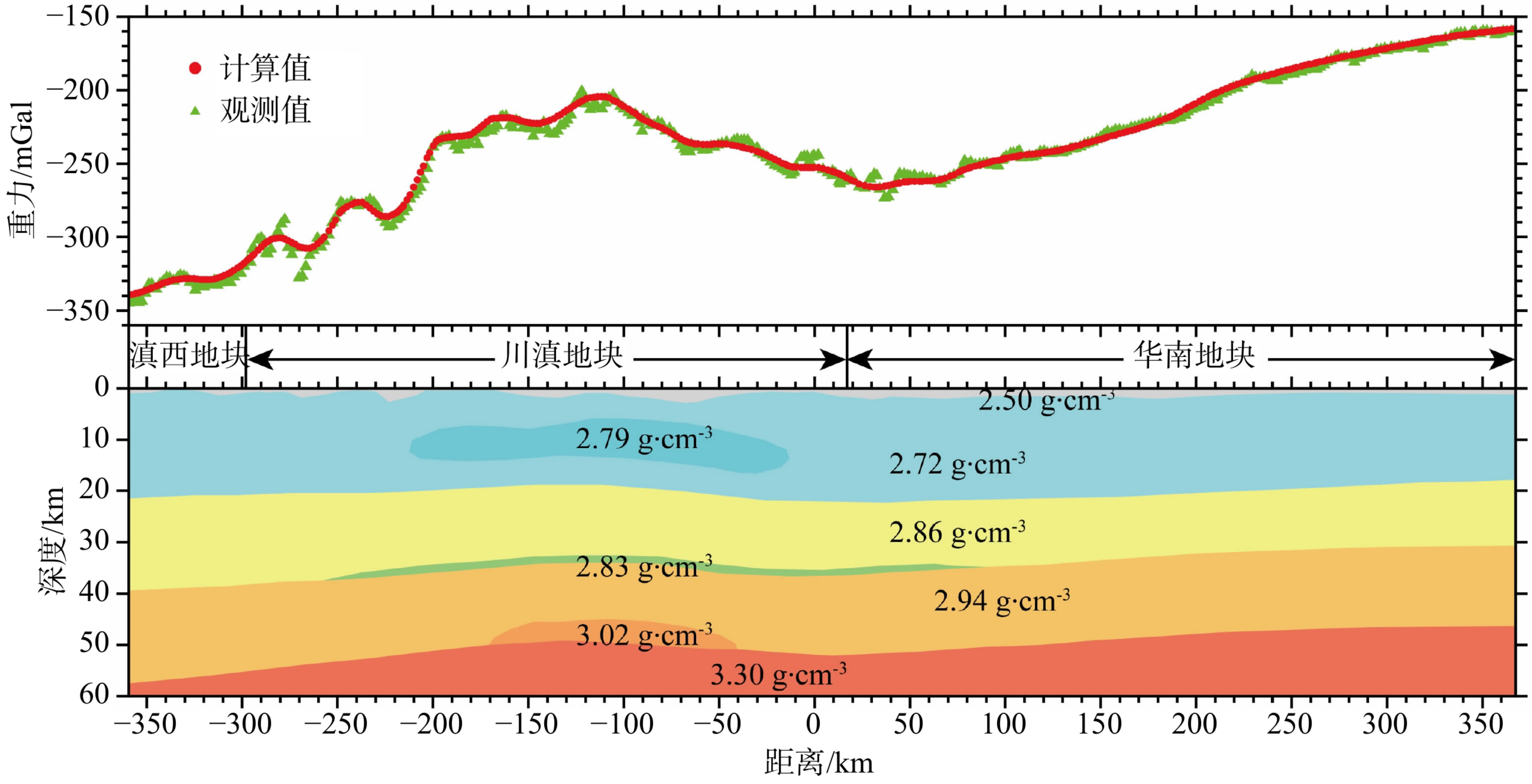
■徒手平滑



3.平滑（去噪）

GeoGoku

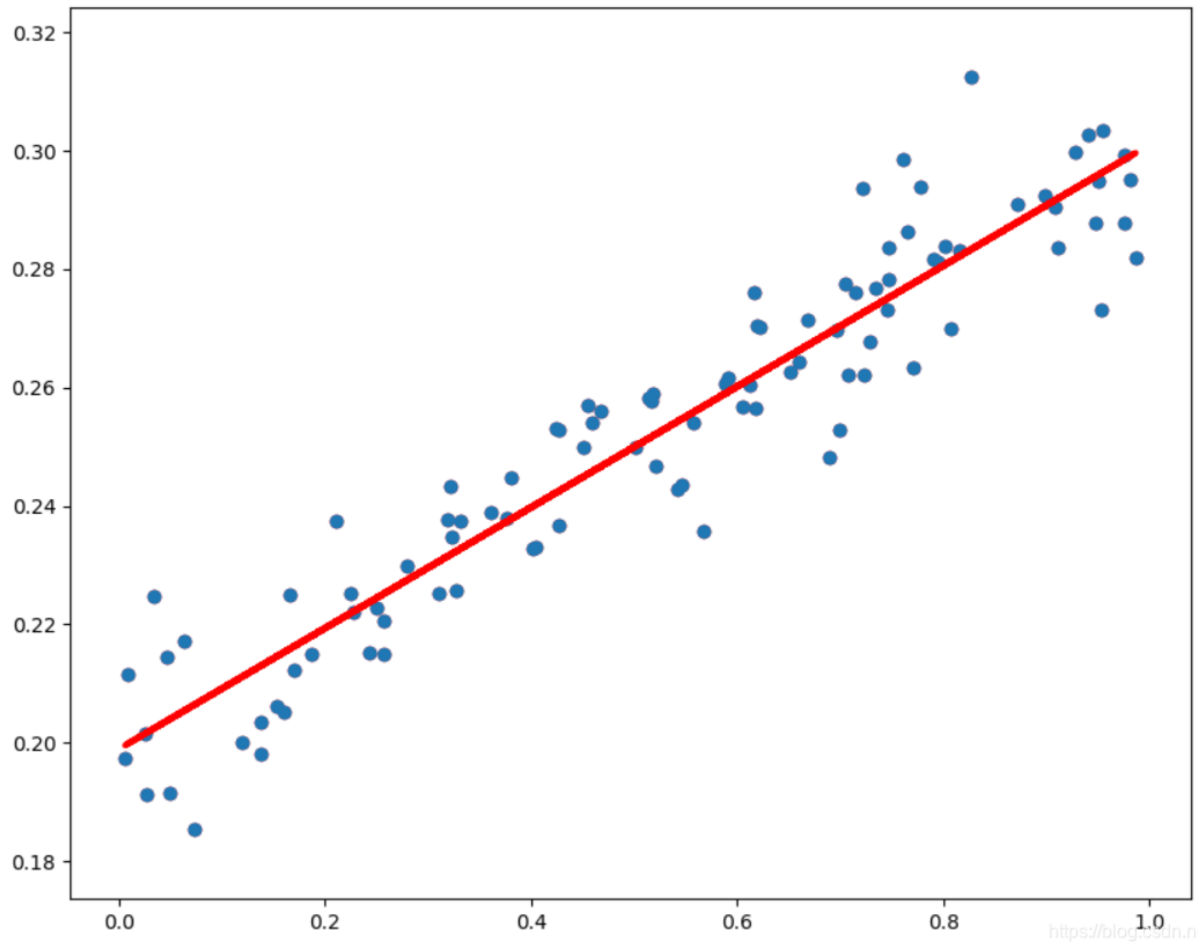
■徒手平滑



3.平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



https://blog.csdn.net/codedz

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $$\overline{g}(x) = a_0 + a_1 x$$

目标函数 $$\delta = \sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小。

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 2\sum_{i=-m}^{m} [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] x_i = 0$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]=0$$

$$\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]x_i=0$$

$$(2m+1)a_0+a_1\sum_{i=-m}^{m}x_i=\sum_{i=-m}^{m}g(x_i)$$

$$a_0\sum_{i=-m}^{m}x_i+a_1\sum_{i=-m}^{m}x_i^2=\sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m}x_i \\ \sum_{i=-m}^{m}x_i & \sum_{i=-m}^{m}x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m}g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i) \end{bmatrix}$$

一般性求解公式

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

$$\begin{cases} a_0(2m+1) = \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i \\ a_0 \sum_{i=-m}^{m} x_i = \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \end{cases}$$

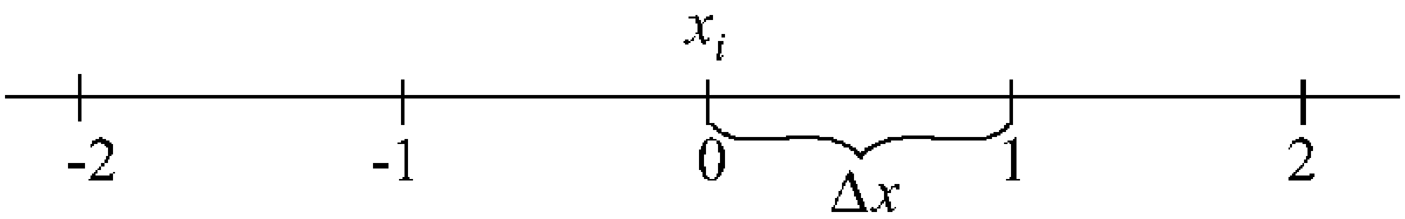
$$\frac{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) - \sum_{i=-m}^{m} x_i \sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^2 - \sum_{i=-m}^{m} x_i \sum_{i=-m}^{m} x_i} = a_1$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

线性平滑公式



若x_i以剖面上的点距为单位，即 $\Delta x=1$取点的方式，则上式中的 $x_i=0$，±1，±2，±3、……，±m，代入式可解出系数 a_0 和 a_1:

$$a_0=\frac{\sum_{i=-m}^{m} g(x_i)}{2m+1},\qquad a_1=\frac{\sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m} x_i^2}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值 $$\overline{g}(x)=a_0+a_1x$$

目标函数 $$\delta=\sum_{i=-m}^{m}[a_0+a_1x_i-g(x_i)]^2=\min$$

对a_0和a_1求导，然后令其为0，得a_0和a_1

$$a_0=\frac{\sum_{i=-m}^{m}g(x_i)}{2m+1},\qquad a_1=\frac{\sum_{i=-m}^{m}x_ig(x_i)}{\sum_{i=-m}^{m}x_i^2}$$

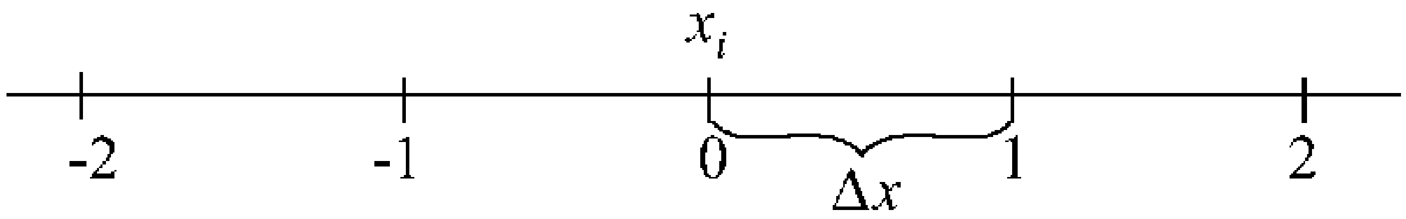
x=0时，$\overline{g}(0)=a_0$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

线性平滑公式



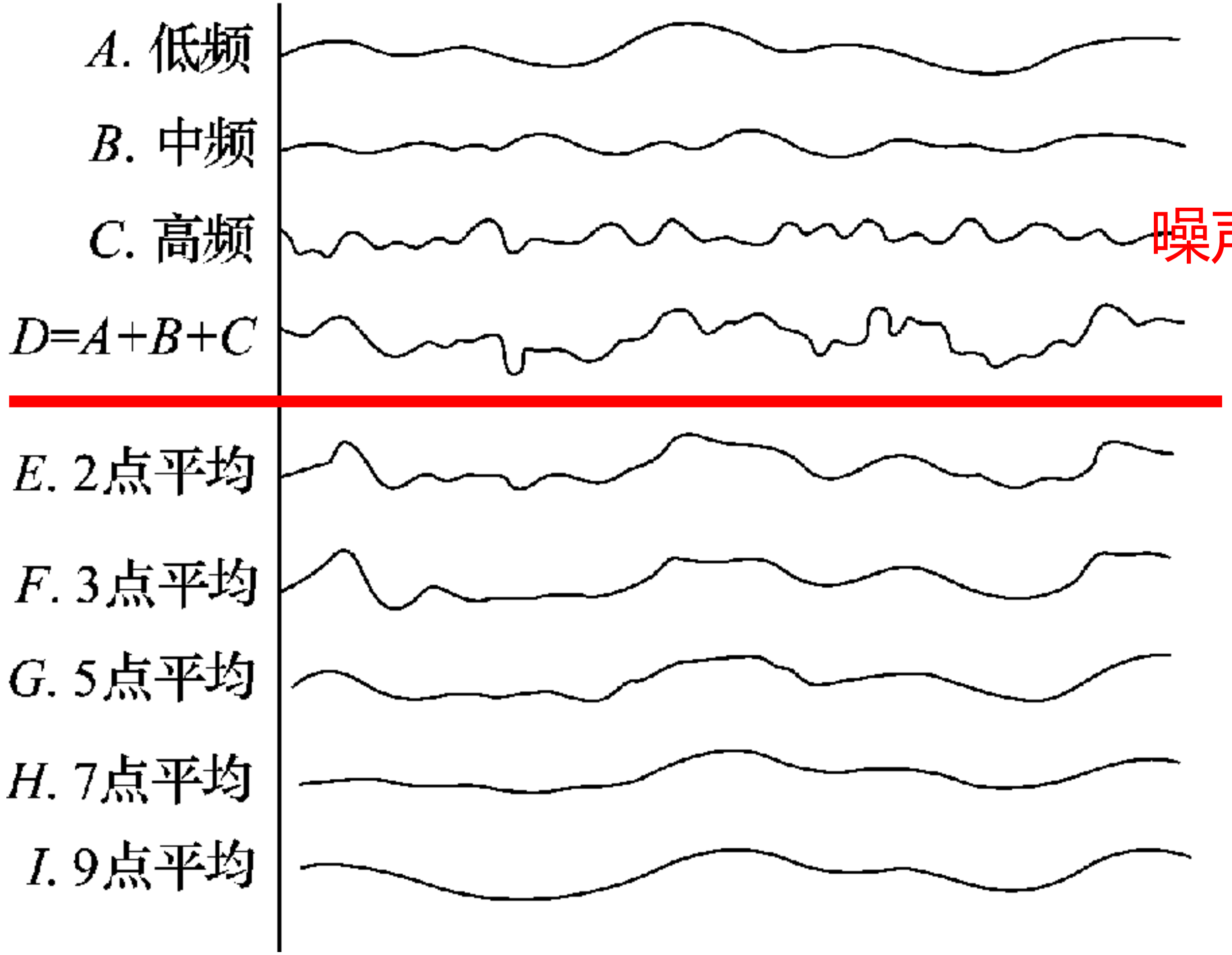
由此可见，某一点的平滑值，实际上就是在剖面上以该点为中心取奇数点的算术平均值，当 $m=\pm1$时，将得到三点平滑公式：

三点平滑公式为: $\overline{g}(0) = 1/3[g(-1) + g(0) + g(1)]$

3.平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



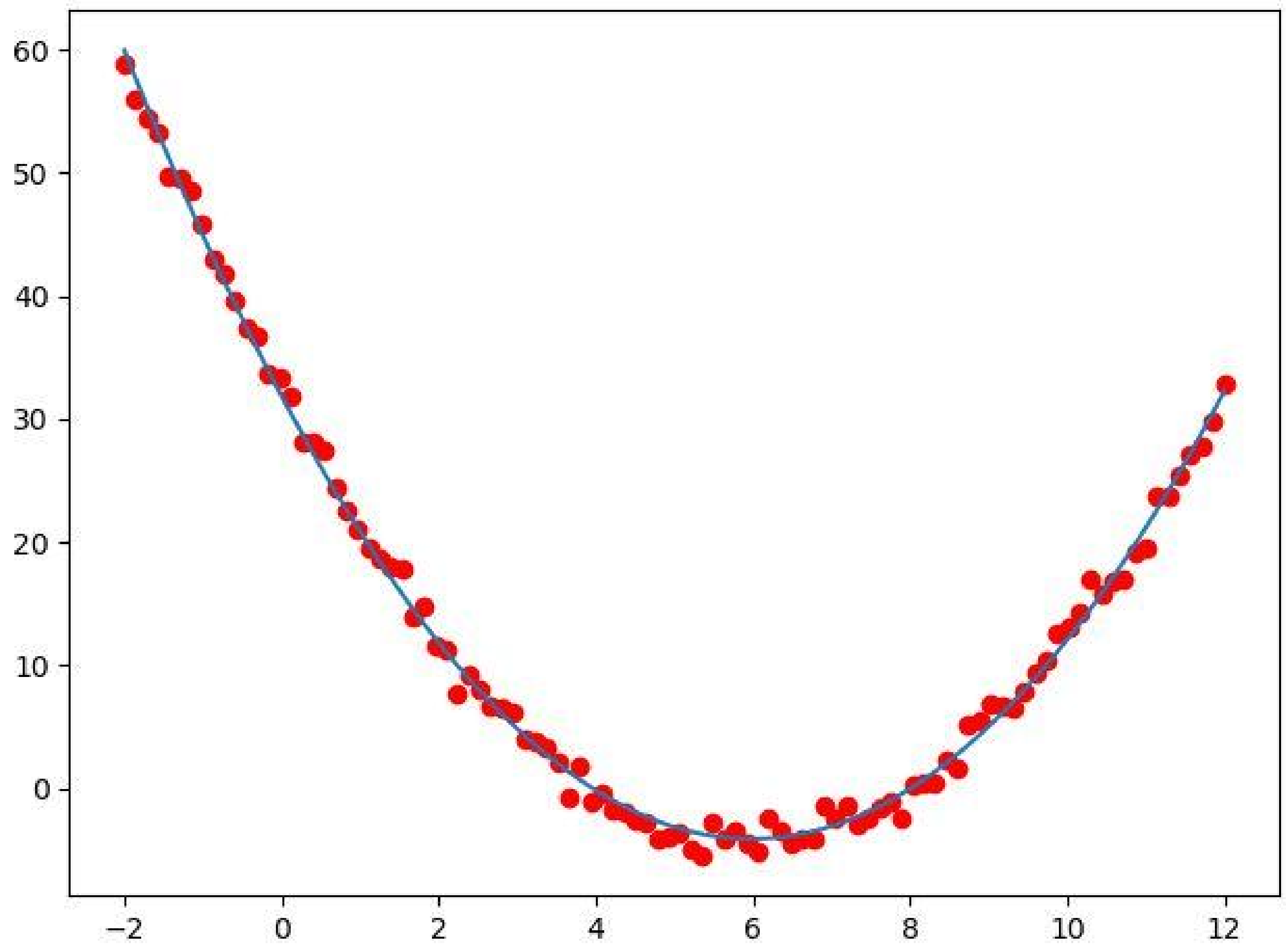
噪声

结论?

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式



3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

若异常曲线在一定范围内可视为二次曲线时，则在这个范围内，平滑后的异常曲线可以用二次曲线方程来表示:

$$\overline{g}(x_i)=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2$$

分别对a_0、a_1、a_2求偏导数，并令其等于零可求系数a_0、a_1、a_2

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\delta = \sum_{i=-m}^{m} \left[\bar{g}(x_i) - g(x_i)\right]^2 = \sum_{i=-m}^{m} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - g(x_i)\right]^2$$

最小二乘的核心思想是误差平方和最小

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0}=0,\frac{\partial \delta}{\partial a_1}=0,\frac{\partial \delta}{\partial a_2}=0$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i & \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^3 & \sum_{i=-m}^{m} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^{m} g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g(x_i) \end{bmatrix}$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

二次平滑公式

$$a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

$$\overline{g}(0) = a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^{m} x_j^4 \sum_{i=-m}^{m} g_i - \sum_{j=-m}^{m} x_j^2 \sum_{i=-m}^{m} x_i^2 g_i}{(2m+1)\sum_{i=-m}^{m} x_i^4 - 2\left(\sum_{i=-m}^{m} x_i^2\right)^2}$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

二次平滑公式

取$m=2$,得到5点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{35}\left[17g(0)+12(g(-1)+g(1))-3(g(-2)+g(2))\right]$$

取$m=3$,得到7点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{21}\left[\begin{array}{l}7g(0)+6(g(-1)+g(1))+3(g(-2)+g(2))\\-2(g(-3)+g(3))\end{array}\right]$$

取$m=4$,得到9点平滑公式

$$\overline{g}(0)=\frac{1}{231}\left[\begin{array}{l}59g(0)+54(g(-1)+g(1))+39(g(-2)+g(2))\\+14(g(-3)+g(3))-21(g(-4)+g(4))\end{array}\right]$$

3.平滑（去噪）

■剖面异常平滑

n次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i) - g(x_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n - g(x_i)\right]^2$$

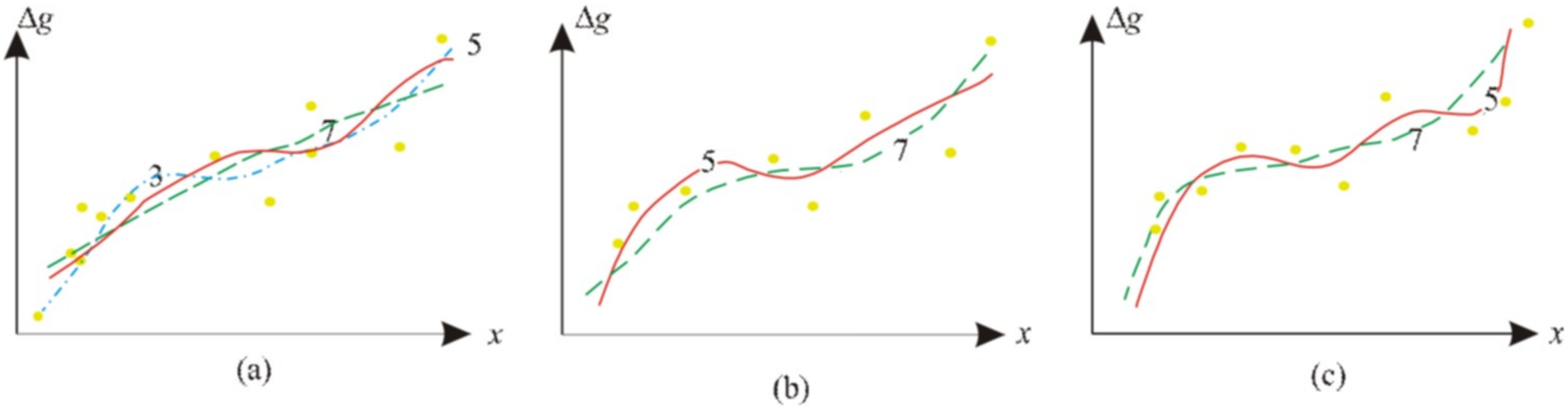
$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \cdots, \frac{\partial \delta}{\partial a_n} = 0$$

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■剖面异常平滑

区分曲线是几点平滑结果



不同点数的线性平滑　不同点数的二次平滑　不同点数的三次平滑

3.平滑（去噪）

GeoGoku

■平面异常平滑

线性平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - g(x_i, y_i) \right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3.平滑（去噪）

■平面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{M} \left[\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left[a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 - g(x_i, y_i)\right]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_3} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_4} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_5} = 0$$

3.平滑（去噪）

■ 平面异常平滑

作业：**推导二维线性平滑公式**

提交时间：下次上机之前

提交形式：纸质版


课程结束
陈涛
图片来自沈金松