

重力与固体潮

第八讲 重力异常处理

陈涛

地球物理学院
中国石油大学（北京）



课堂纪律

最后4排不坐

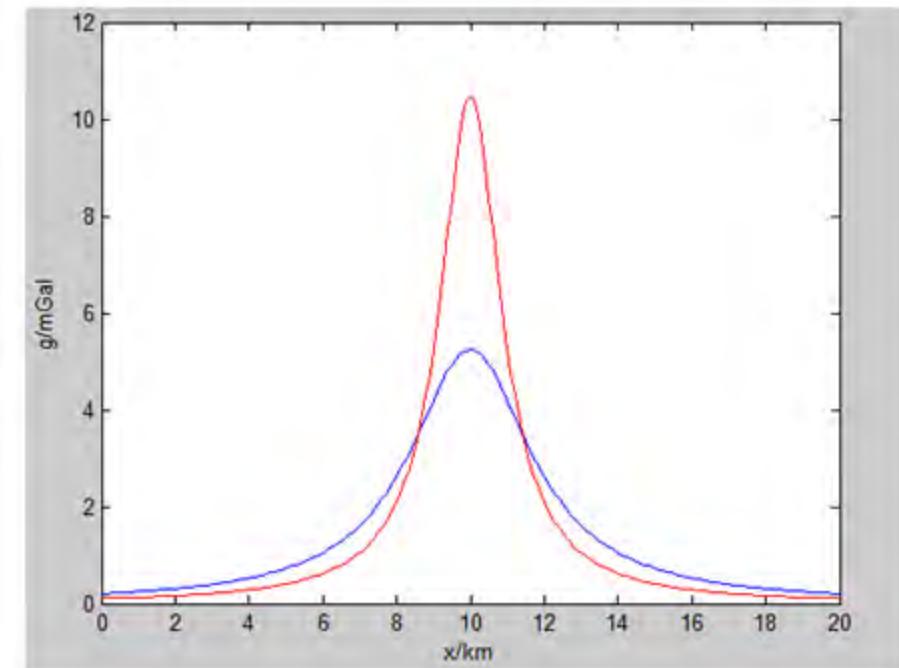
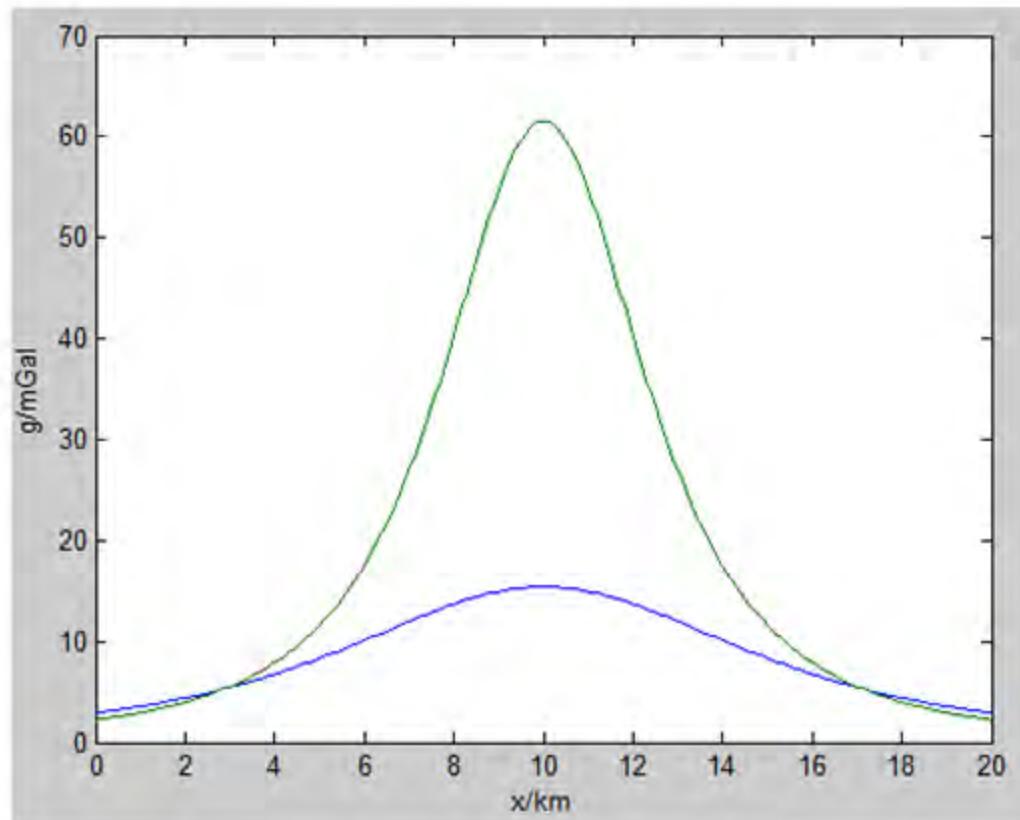
课前测试

□ 球体重力异常的特征

□ 球体重力异常导数的特征



课前测试



课前知识

- ✓ 地球的结构
- ✓ 《地震数据处理与解释》常用的数据处理方法
- ✓ 《地磁与地电》所学的数据处理方法

课前知识



为什么要做数据处理？

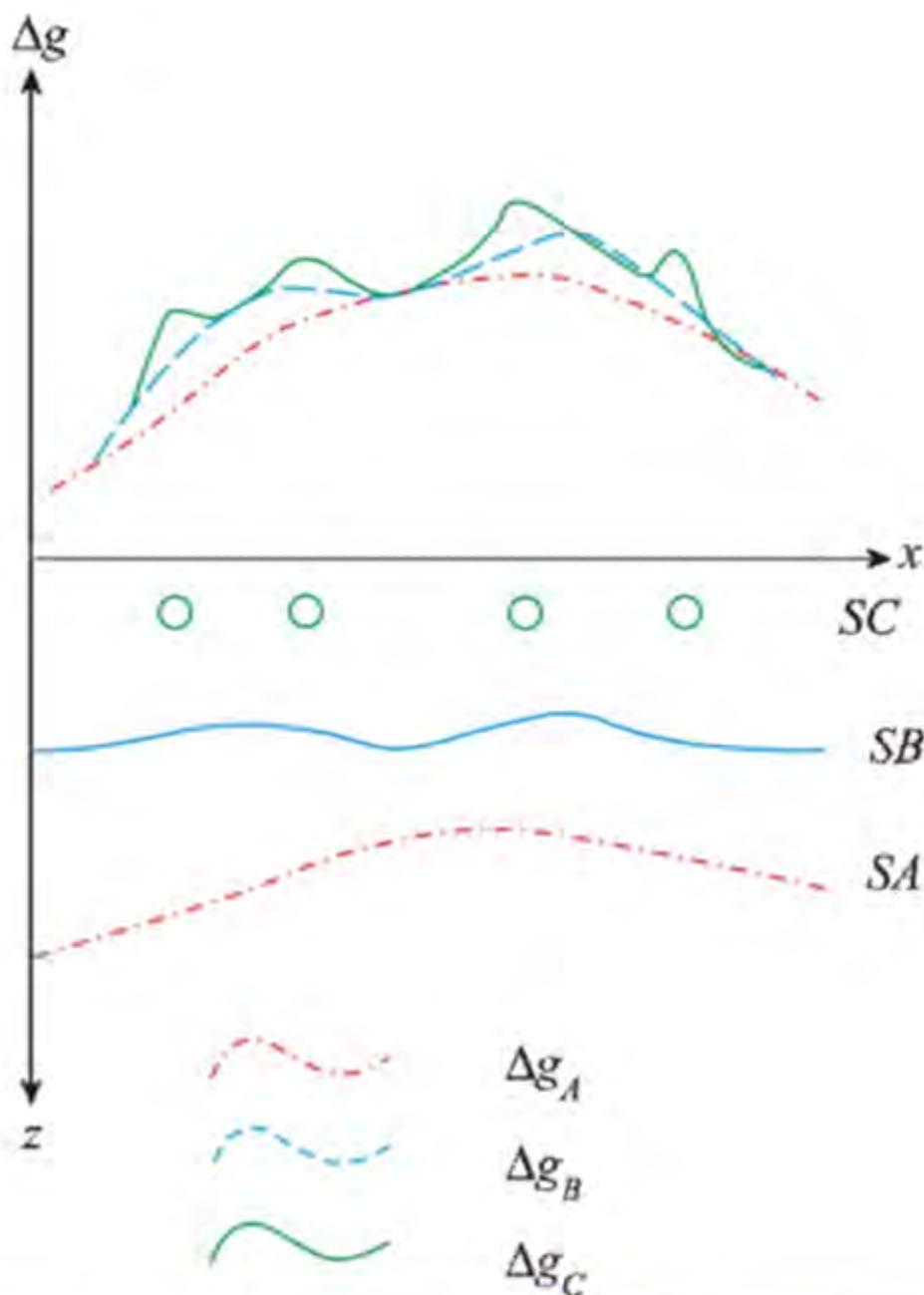
课前知识

■重力异常的叠加

- ✓ 根据观测重力值得到的重力异常包含了从地表到深部所有密度不均匀引起的重力效应，信息非常丰富。
- ✓ 重力异常是所有这些重力效应的总和或叠加。

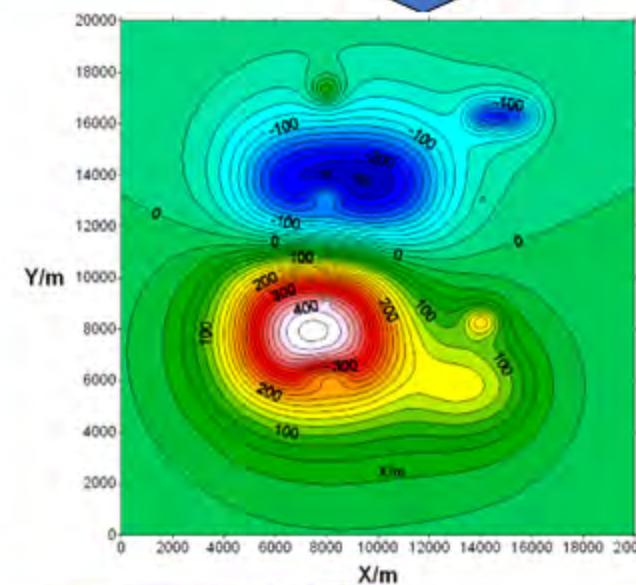
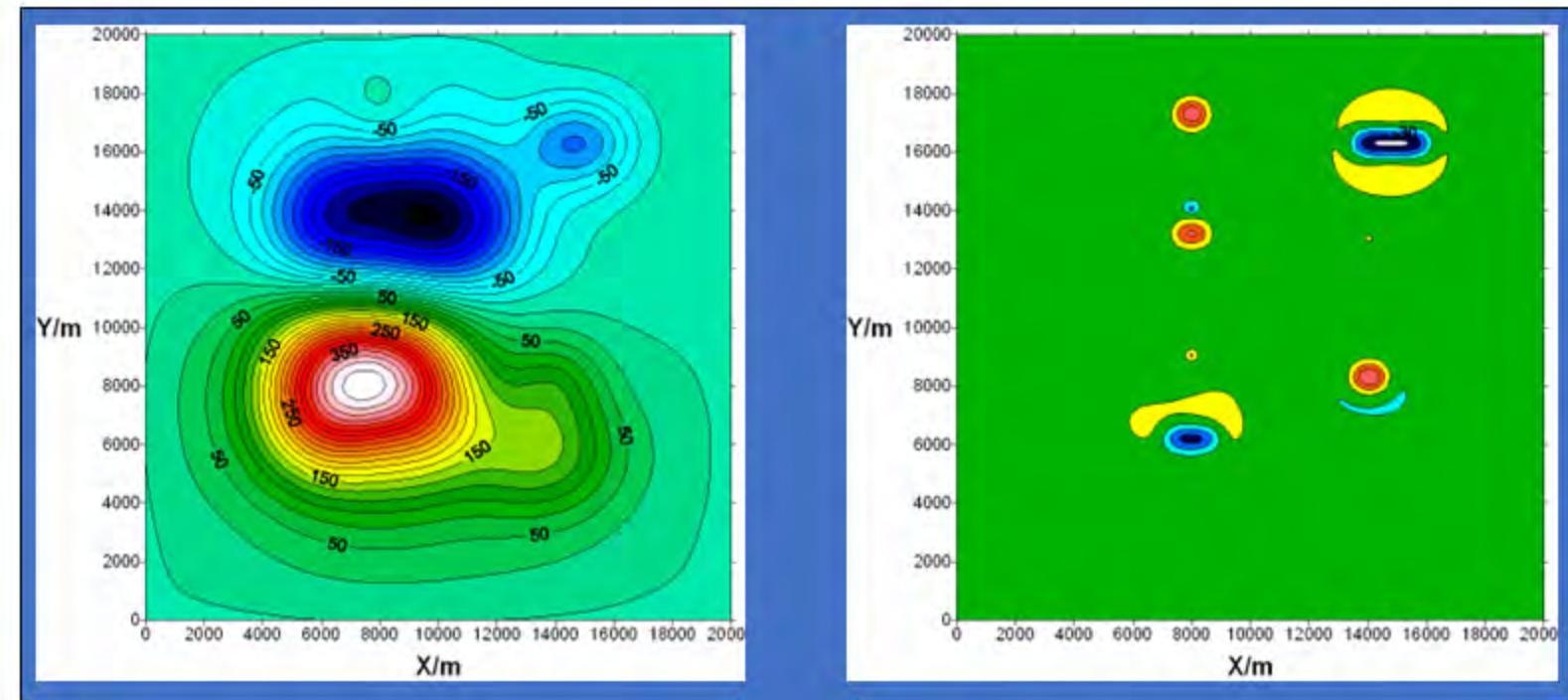
课前知识

■ 重力异常的叠加



课前知识

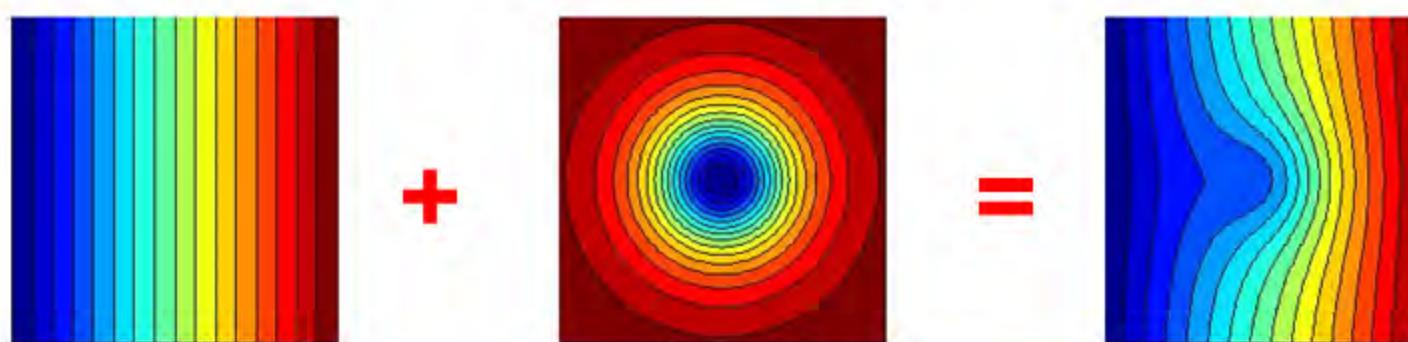
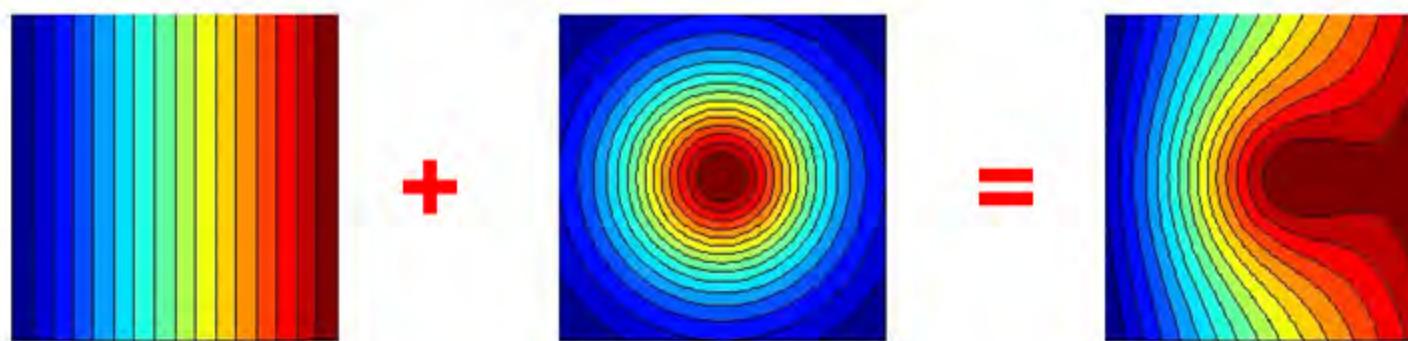
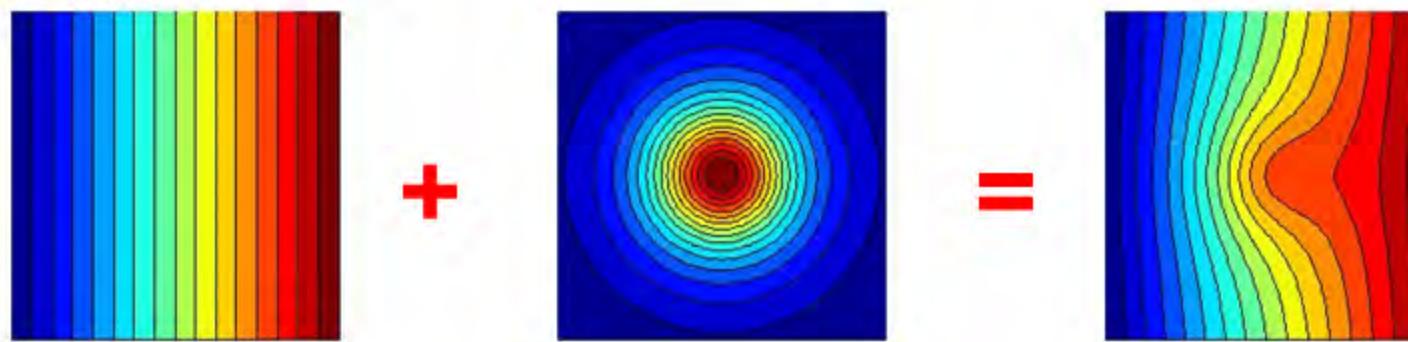
■ 重力异常的叠加





课前知识

■ 重力异常的叠加



课前知识

■重力异常的叠加

重力异常可分为区域异常和局部异常。

区域异常：

场源：大而深的岩体或地质构造

异常特征：幅值大，异常范围大，变化平缓。

局部异常：

场源：小而浅的岩体、矿体或地质构造

异常特征：幅值小，异常范围小，变化大。

剩余异常：从布格异常中去掉区域异常后的剩余部分，习惯上看作局部异常。

课前知识

数据处理就是利用计算机对重力异常进行有关的数学计算和图象处理，以得到用于进一步深化重力解释的异常资料。

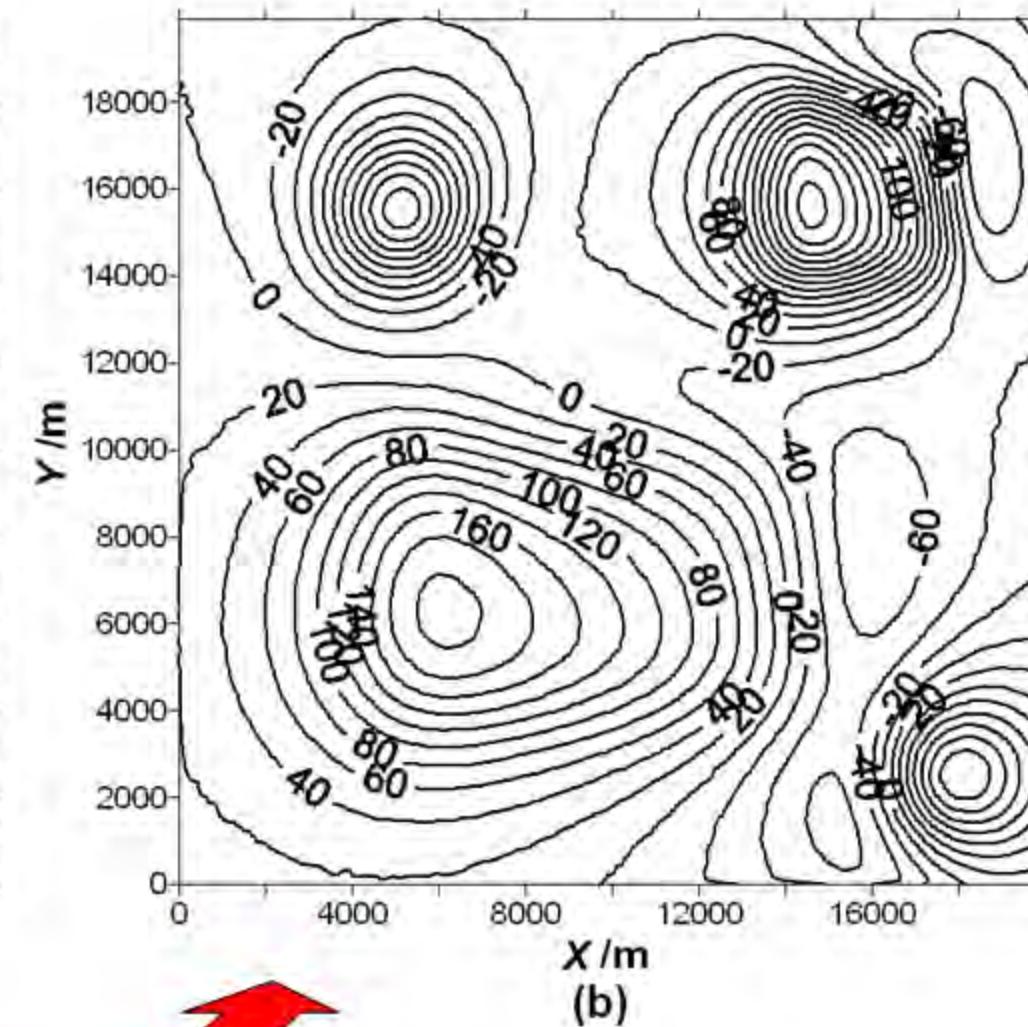
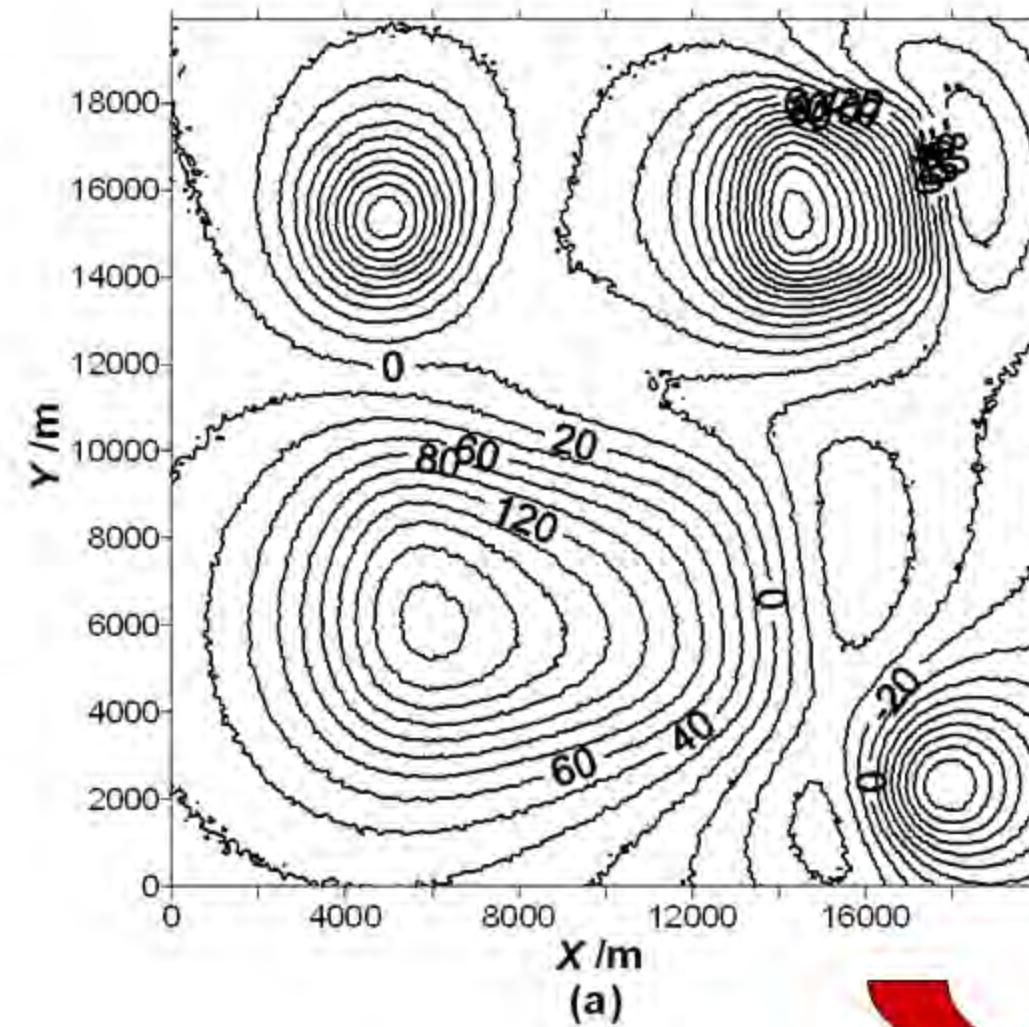
- ✓ 消除各项校正的一些偶然误差或与勘探目标无关的密度不均匀体干扰；
- ✓ 从叠加异常中分离出由研究目标引起的异常；
- ✓ 重力异常转换。

重力异常分离是最重要的，也是最困难的问题，至今尚无完美的方案。

课前知识

■ 平滑处理

消除观测误差、各项校正误差和地表干扰等。



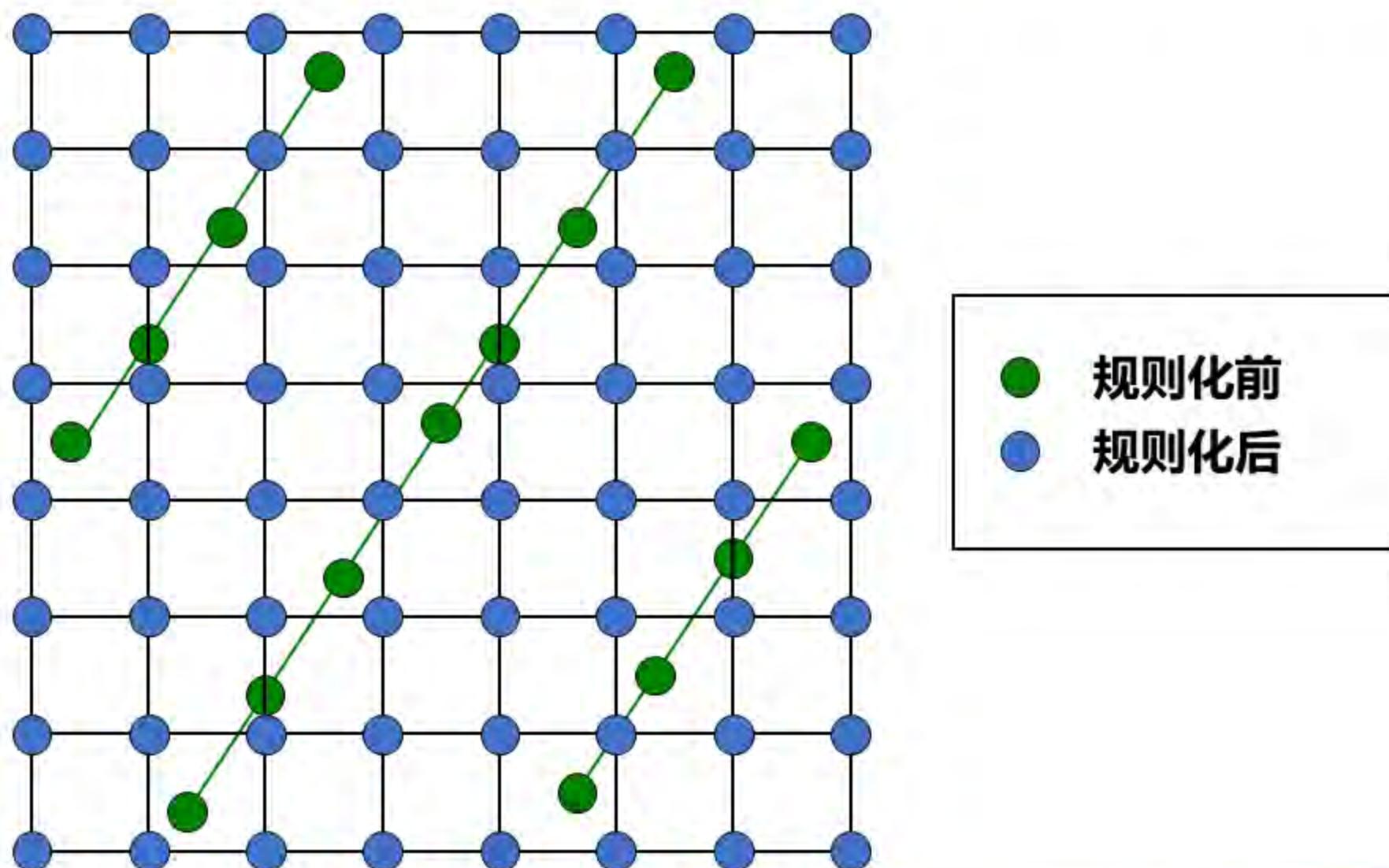
(a)

(b)

课前知识

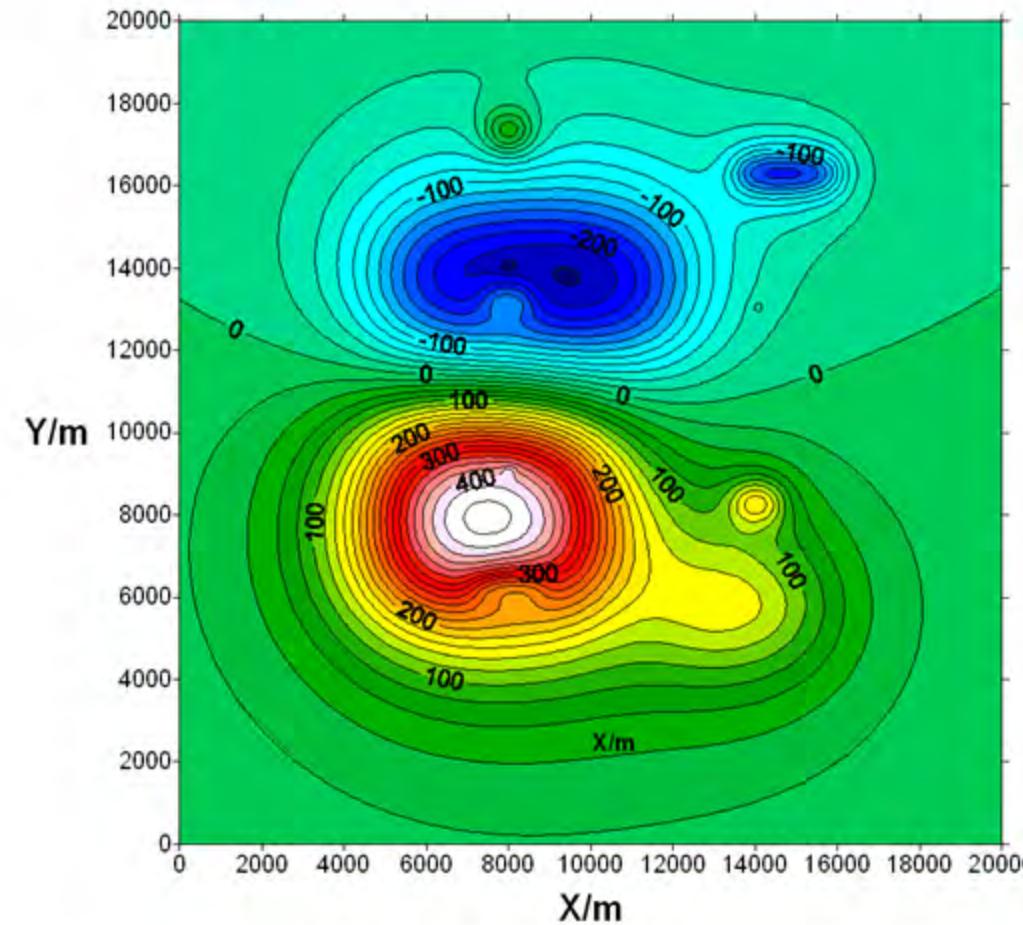
■ 网格化

非规则测网异常数据→矩形或正方形规则网异常数据。

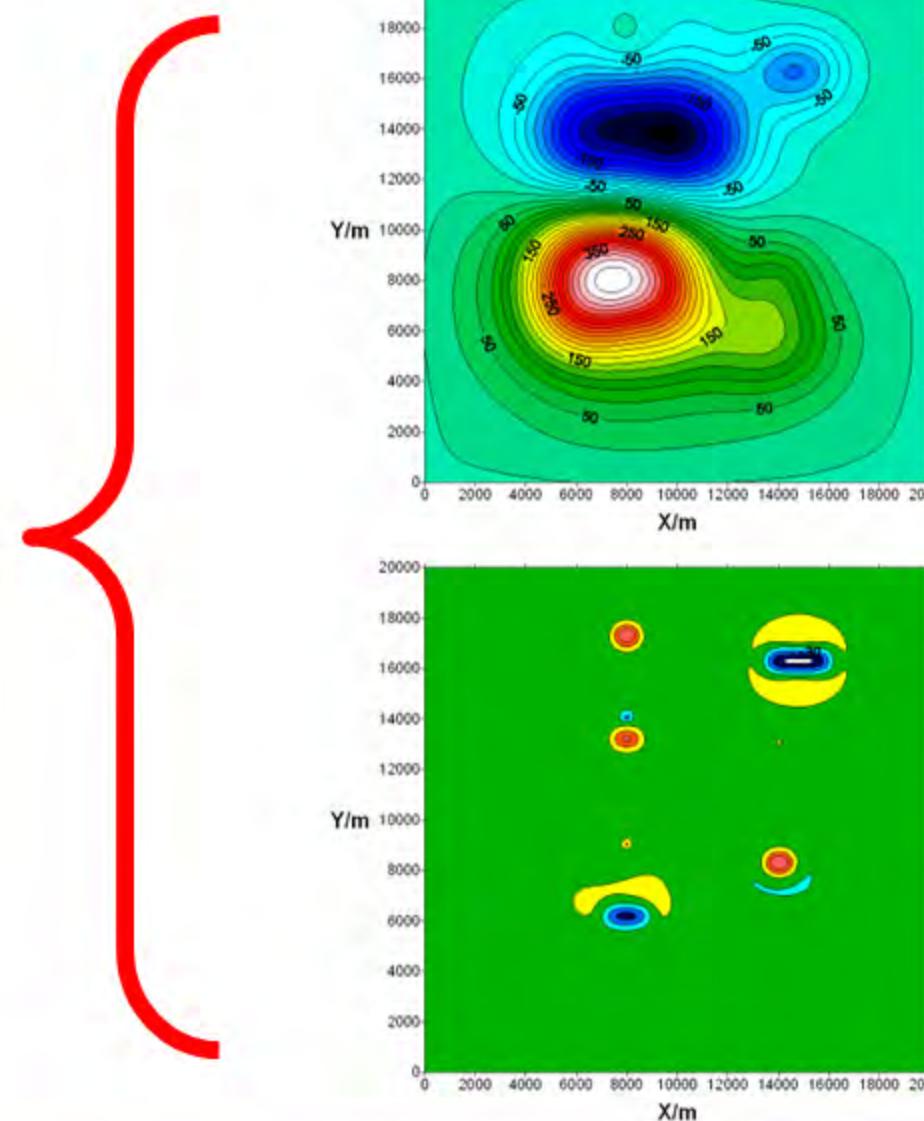


课前知识

■ 异常分离



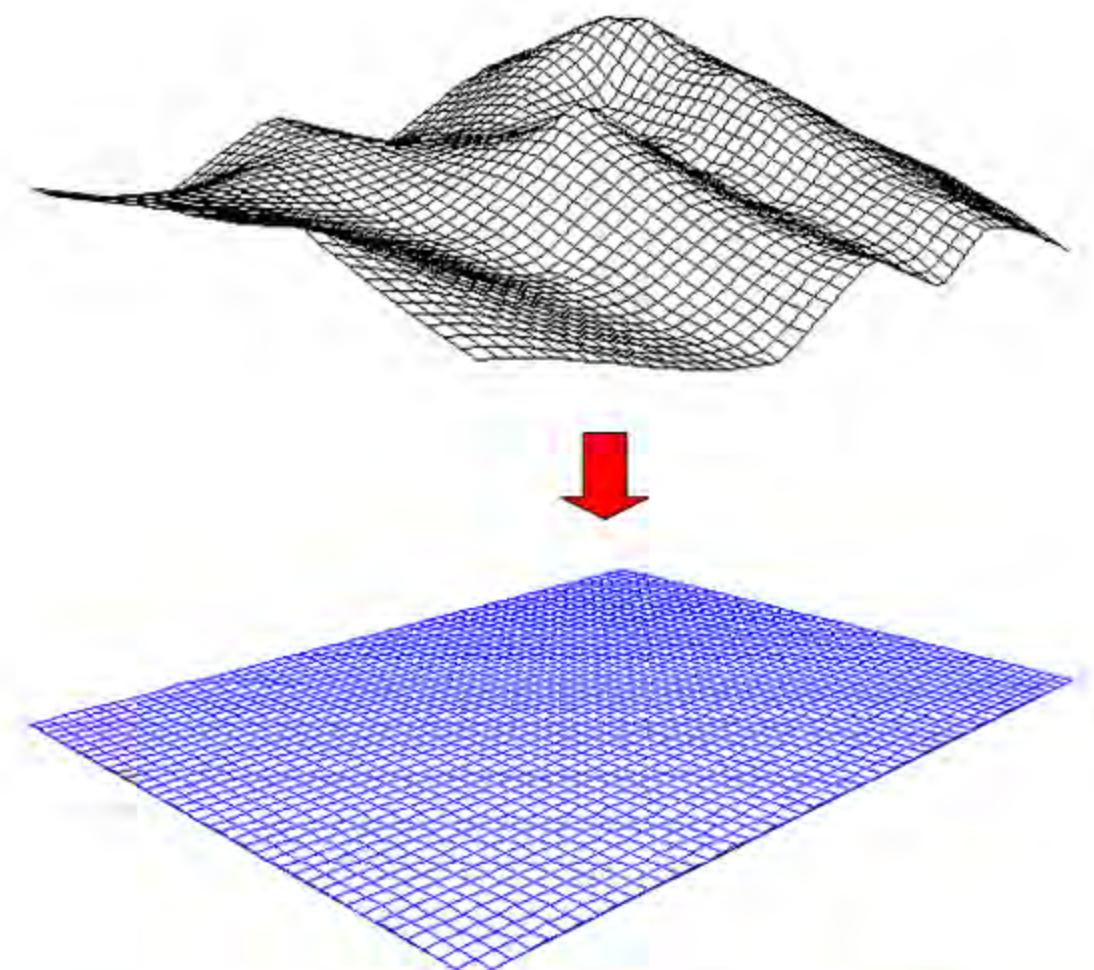
分离出区域异常与局部异常。



课前知识

■曲化平

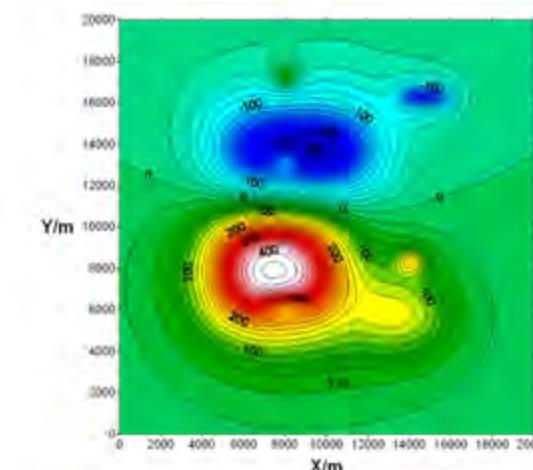
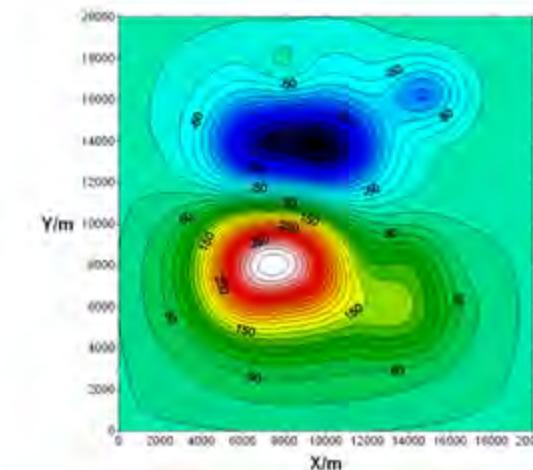
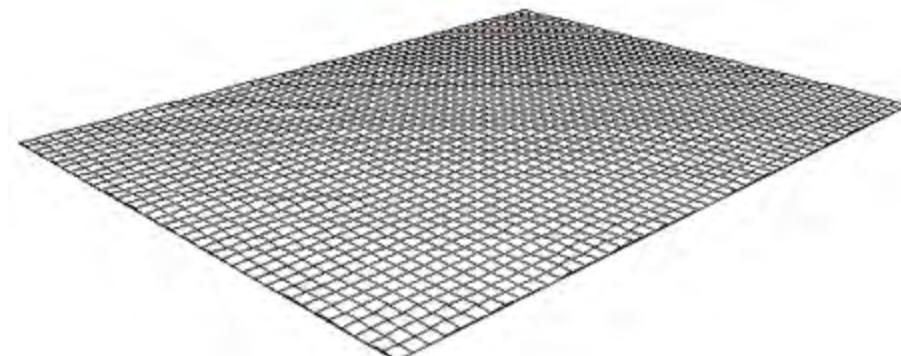
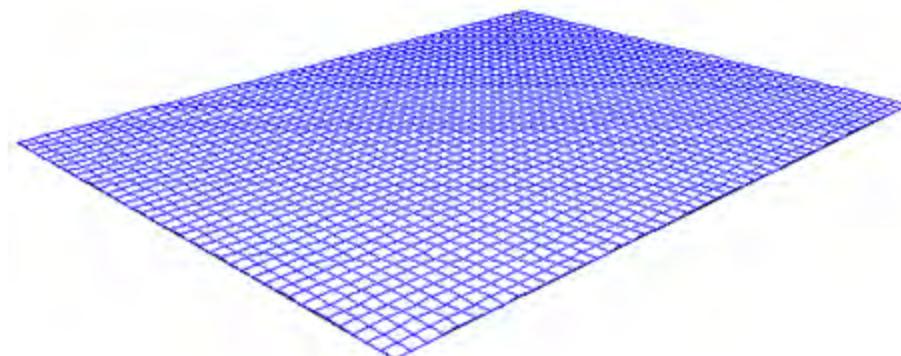
位于起伏地表面上的剖面异常或面积性异常→水平剖面或水平面上异常。



课前知识

■ 向上延拓

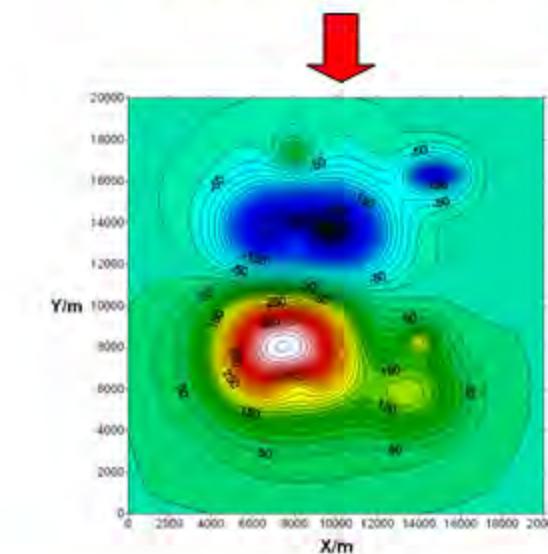
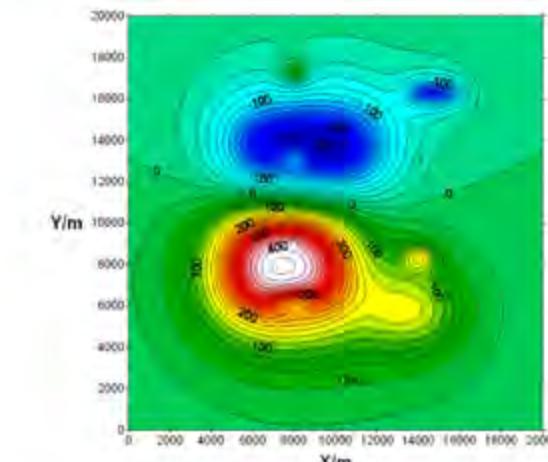
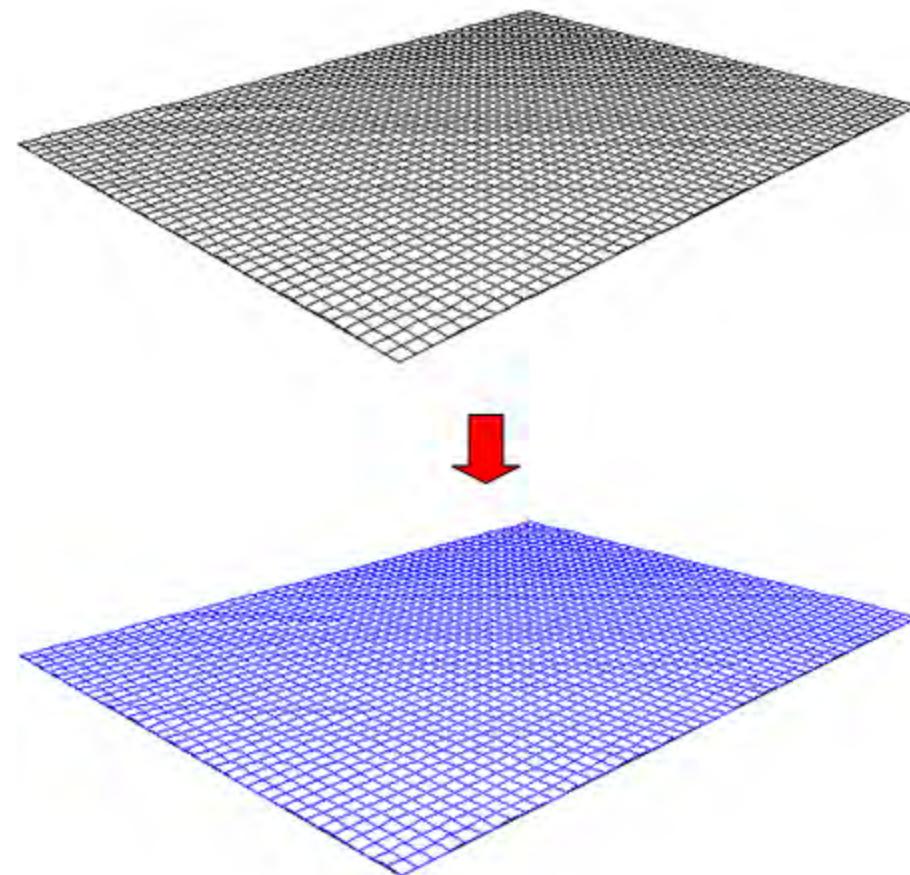
低平面或曲面上异常 → 高平面上异常；
压制浅层局部异常，突出深部区域异常。



课前知识

■ 向下延拓

高平面或曲面上异常 → 低平面上异常
突出浅部局部异常，压制深部区域异常。



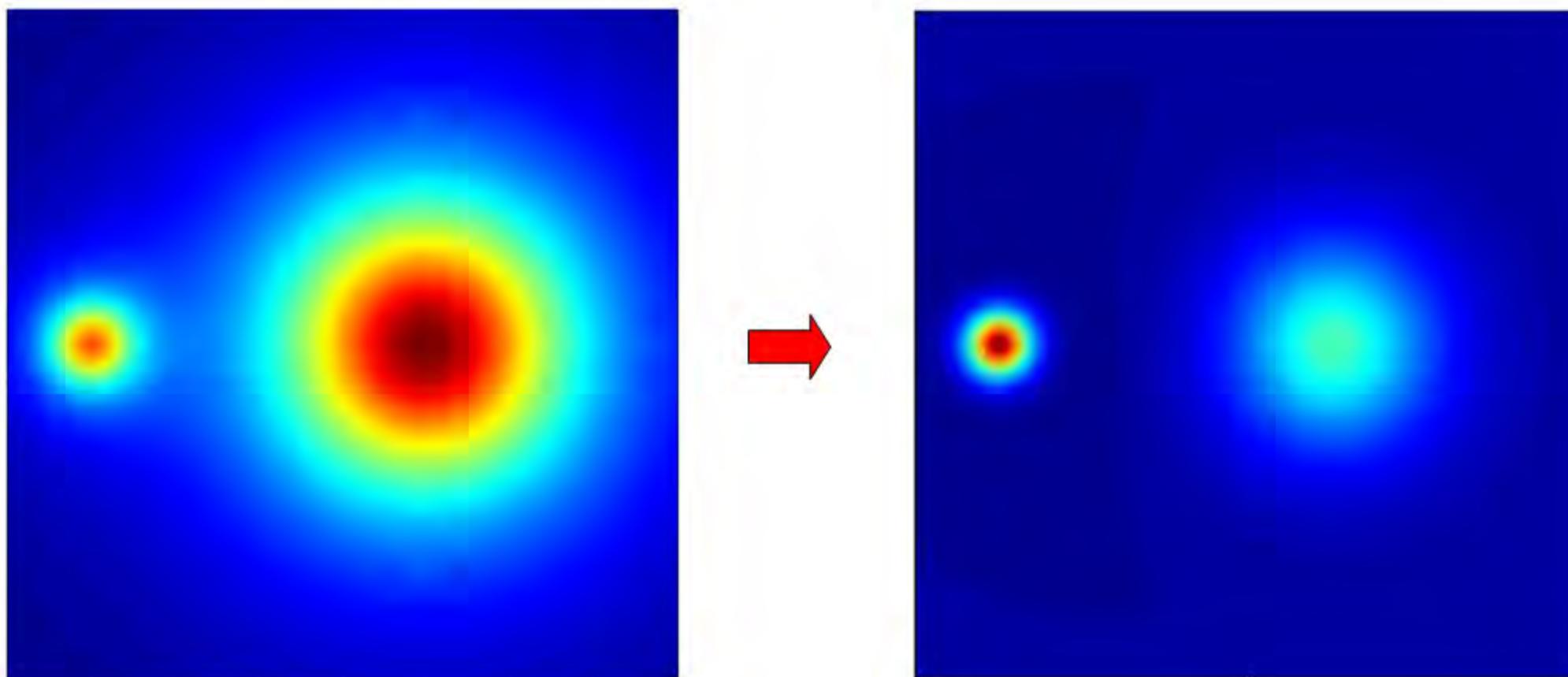


课前知识

■ 导数换算

$\Delta g \rightarrow V_{xz}$ 、 V_{yz} 、 V_{zz} 和 V_{xxx} 。

消除测量常差，压制区域背景，突出局部异常。



课前知识

■ 数据处理的目的

- ✓ 消除因重力测量和对测量结果进行各项校正时引进的一些偶然误差或与勘探目的无关的某些近地表小型密度不均匀体的干扰；
- ✓ 从叠加的异常中划分出与勘探目标有关的异常；
- ✓ 进行位场转换以满足解异常反问题的需要，例如将 Δg 转换成 V_{xz} 、 V_{zz} 或 V_{zzz} 等。

目 录

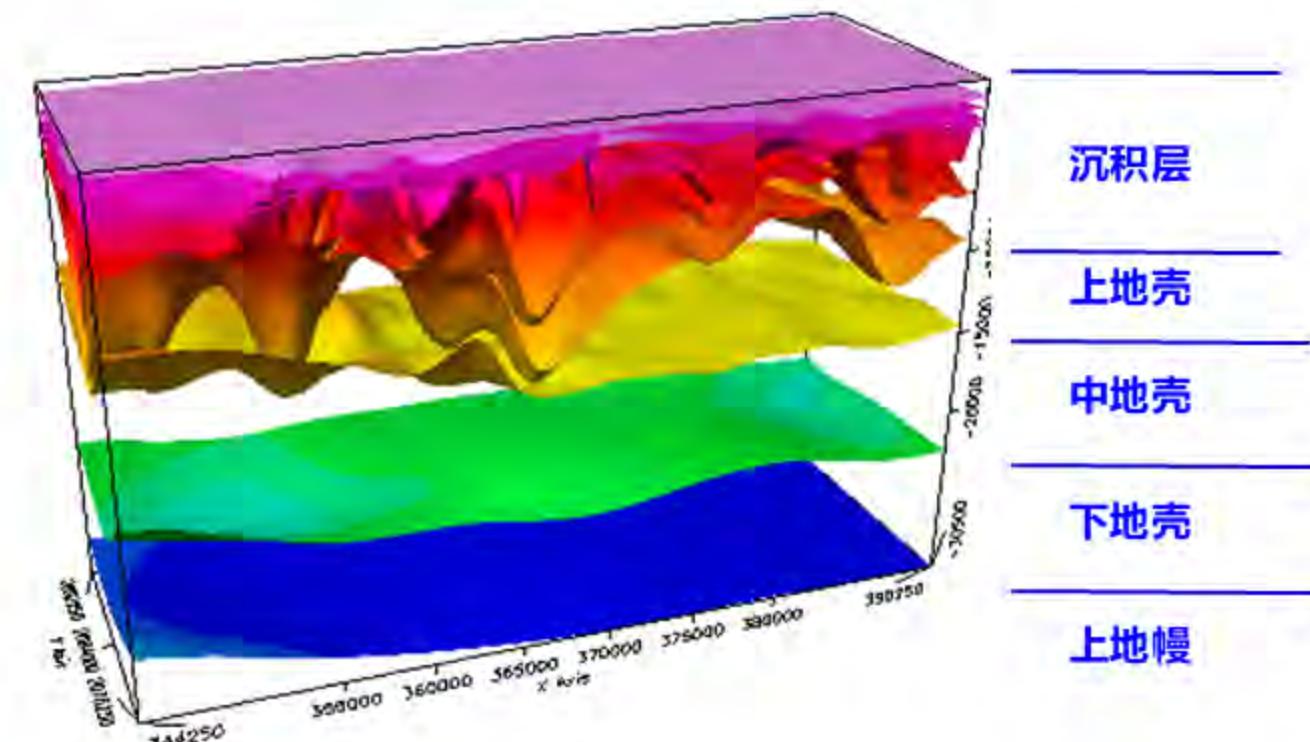
第一节 引起重力异常的主要地质因素

1.引起重力异常的主要地质因素

重力异常包含了从地表到深部所有密度不均匀引起的重力效应，是所有这些重力效应的总和或叠加。

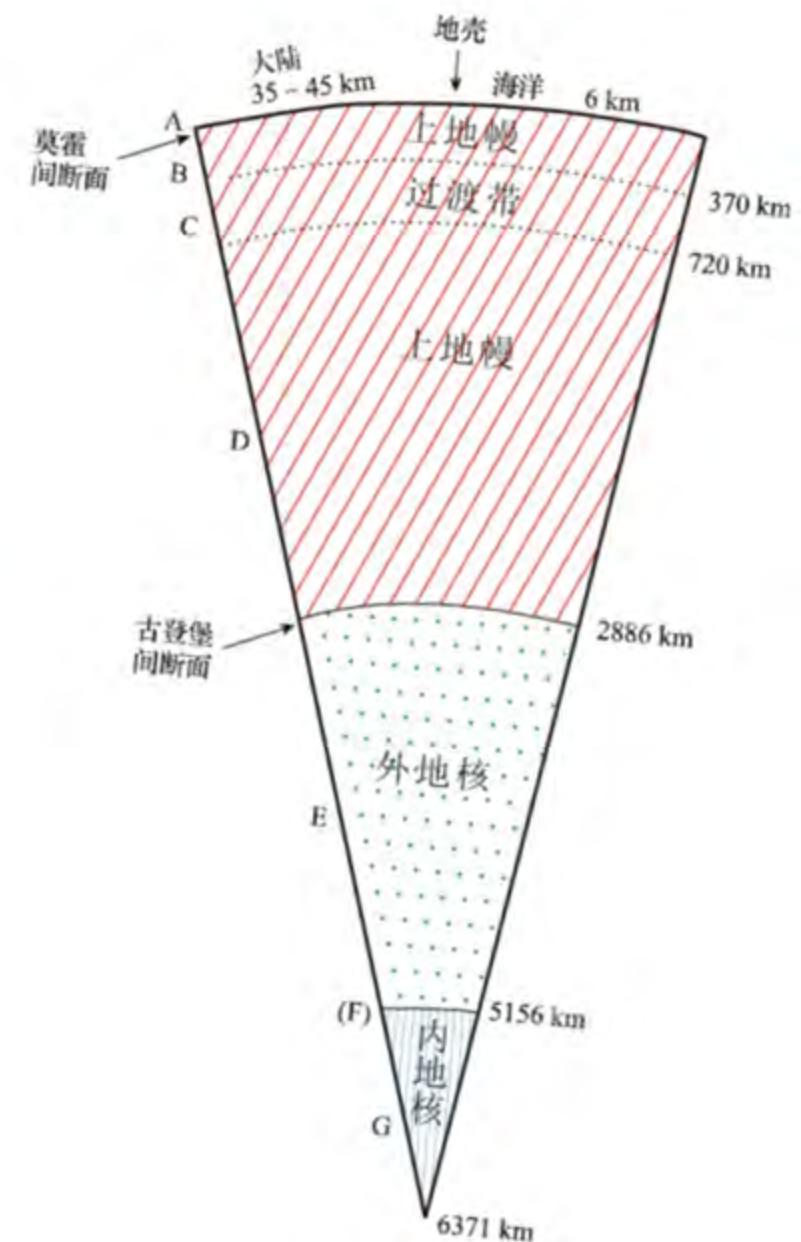
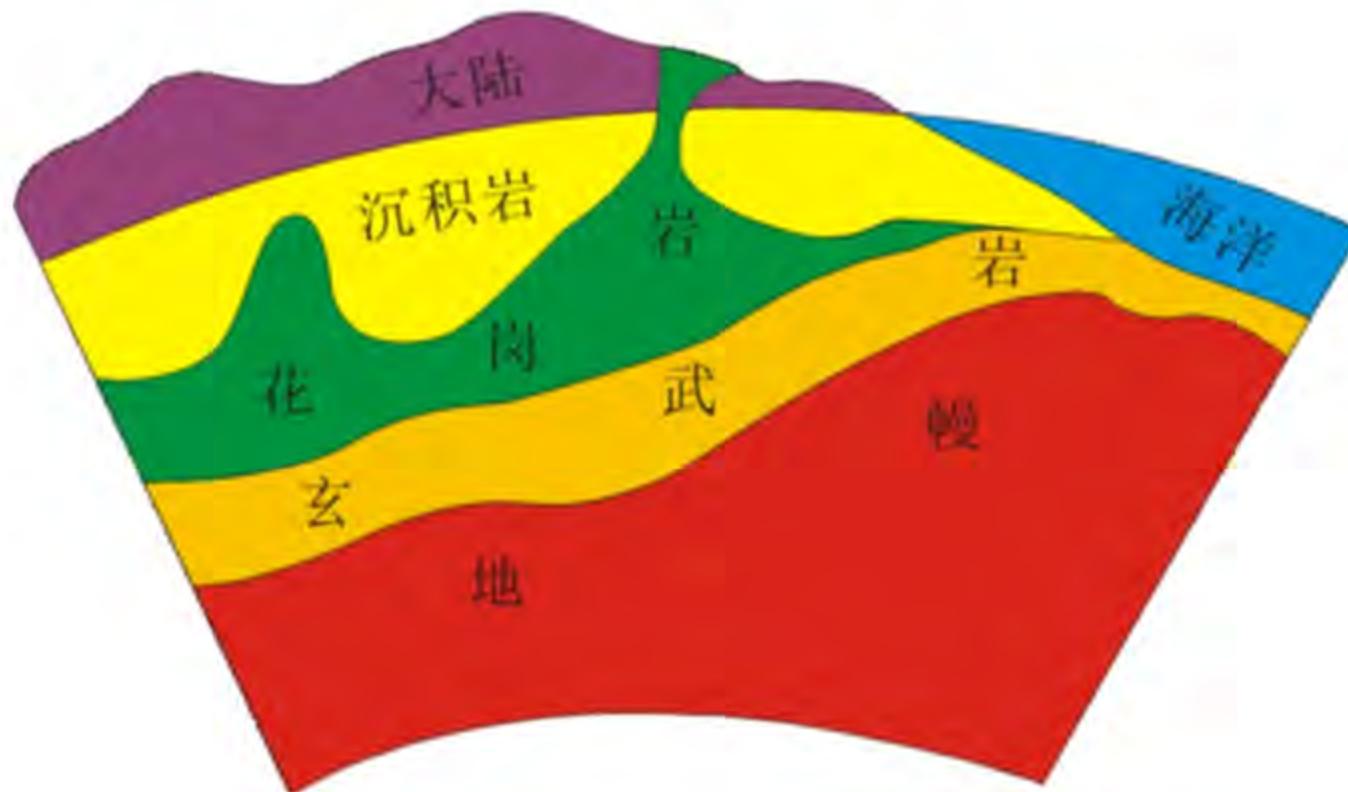
其主要地质因素由深到浅包括：

- ✓ 地球深部的因素
- ✓ 地壳深部的因素
- ✓ 结晶基岩内部的密度变化
- ✓ 结晶基底顶面的起伏
- ✓ 沉积岩的构造和成分变化等。



1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地球深部因素



1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地球深部因素

- ✓ 在大陆区从地表直至前震旦系结晶基底的顶面，是厚度从零到十几公里的沉积岩层（也有缺失区），密度在 $2.0\text{-}2.7\text{ g/cm}^3$ 左右。
- ✓ 结晶基底下几十公里范围内，是花岗岩类和玄武岩类的物质层，其密度约在 $2.8\text{-}3.0\text{ g/cm}^3$ 。
- ✓ 再往下是橄榄岩类，其密度约为 $3.3\text{-}3.5\text{ g/cm}^3$ 。

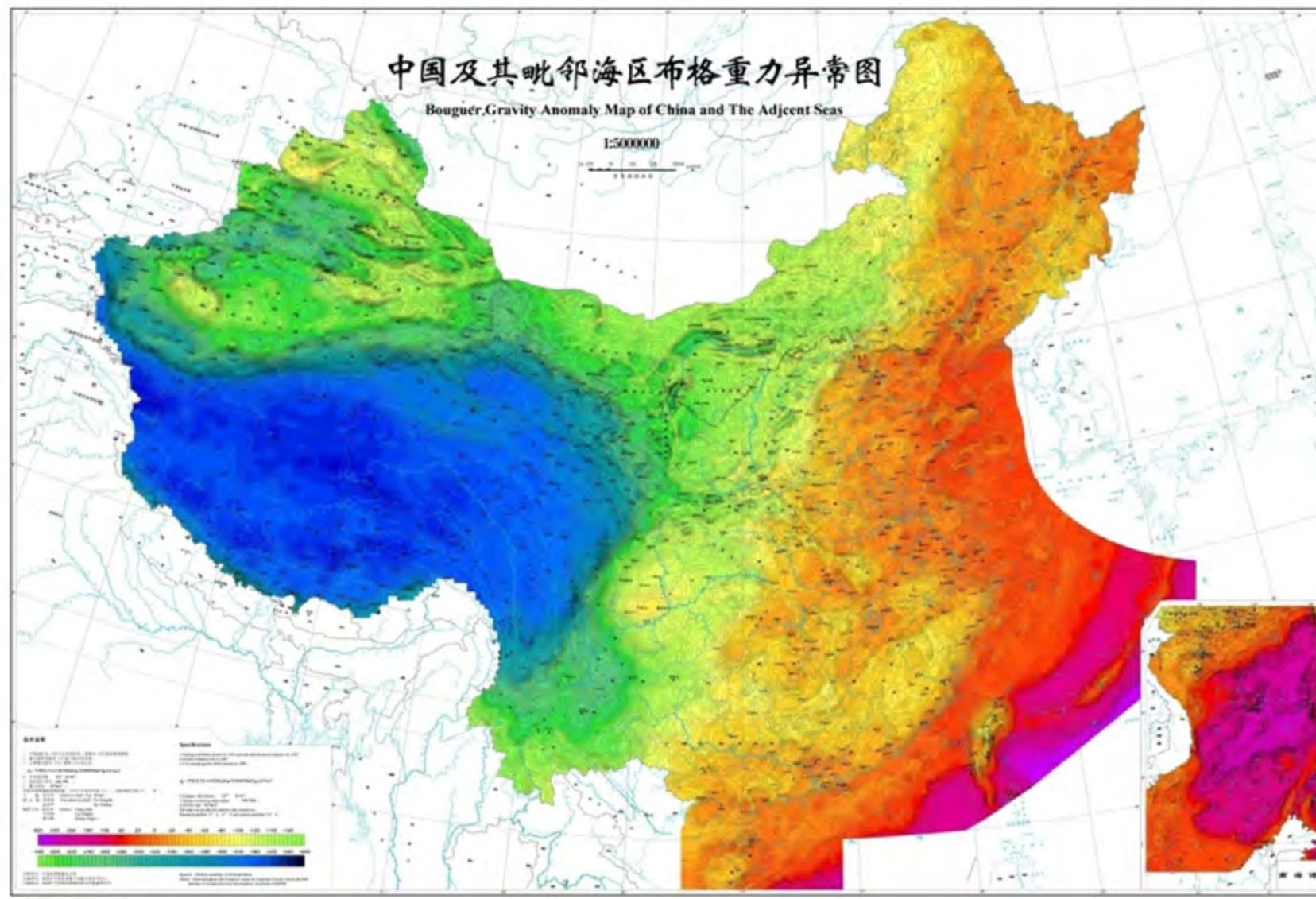
莫霍面作为地壳下界面，是玄武岩类与橄榄岩类之间的界面，在全球范围内基本上可连续追踪。

康纳面是花岗岩类与玄武岩类之间的界面，密度差约为 0.2 g/cm^3 。但该面在大陆区不能连续追踪，在大洋区，随花岗岩类的消失而消失。



1.引起重力异常的主要地质因素

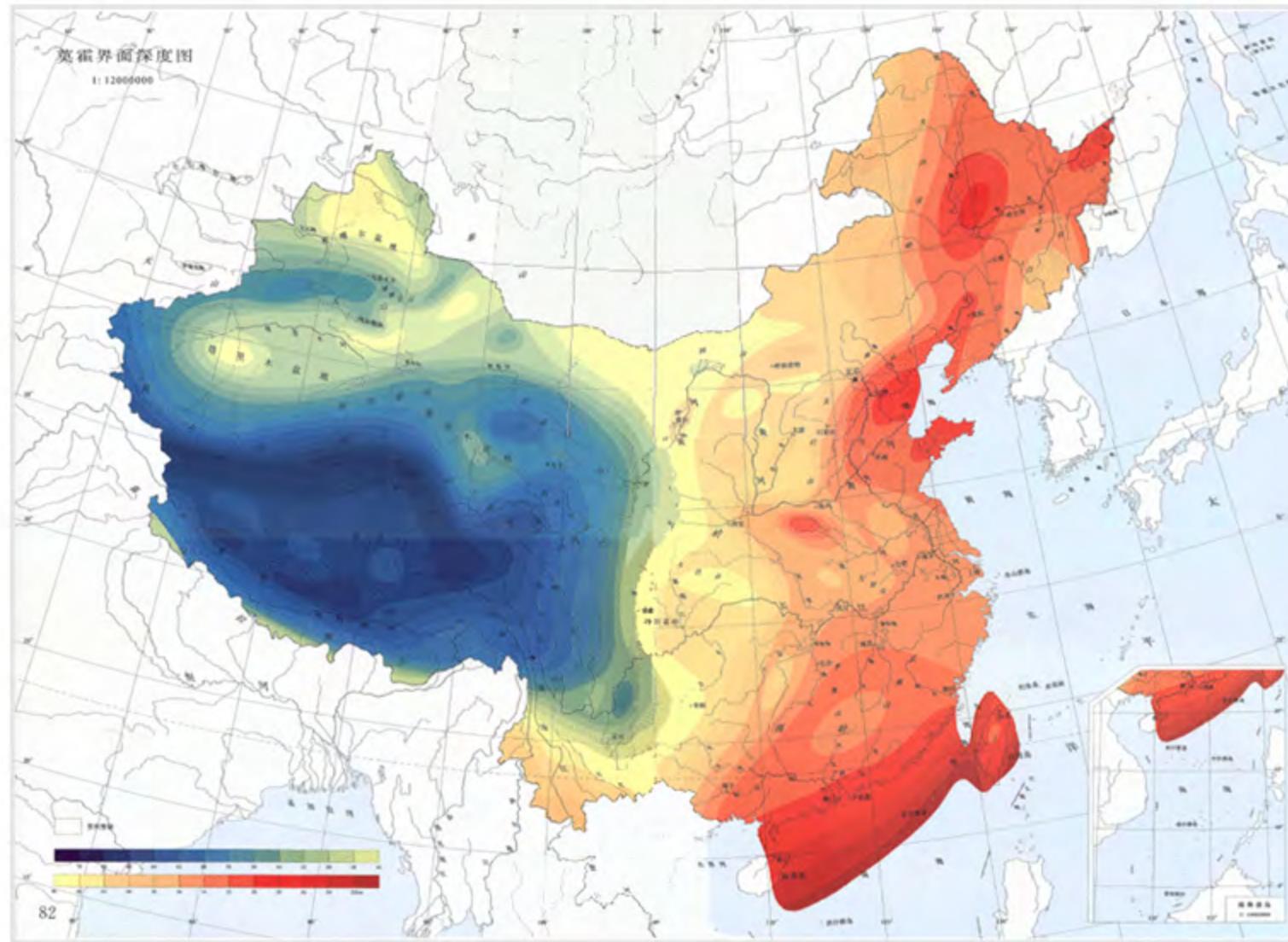
■ 地球深部因素



1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地球深部因素

莫霍面深度图



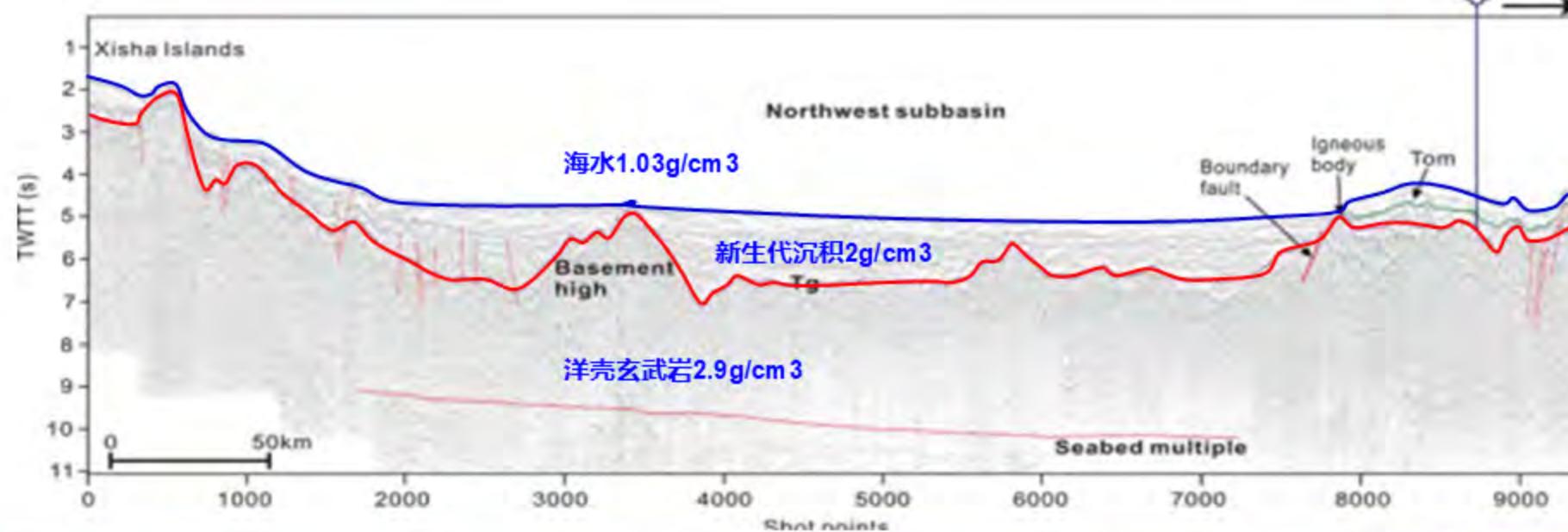
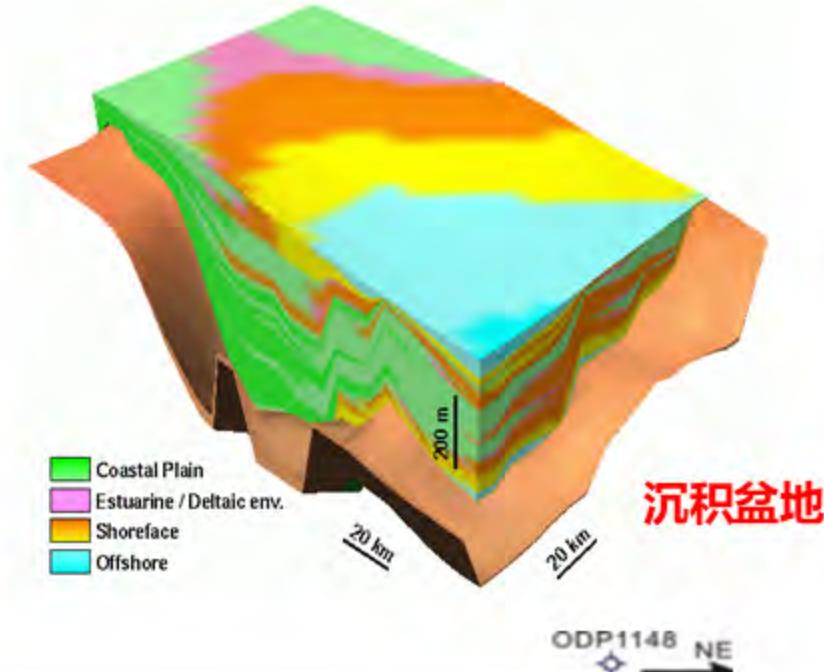
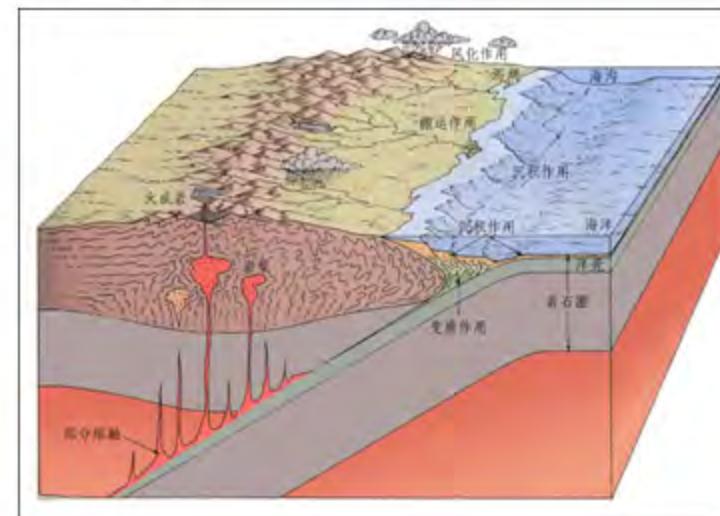
1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地壳深部因素

- 地壳厚度的变化（即莫霍面的起伏）、壳内各层物质密度和上地幔物质密度的横向变化，是引起地表重力分布的深部因素。
- 上地幔密度横向不均匀的影响是十分缓慢和大范围的，平均的布格异常特征主要是对应着莫霍面起伏（即地壳厚度变化）的。

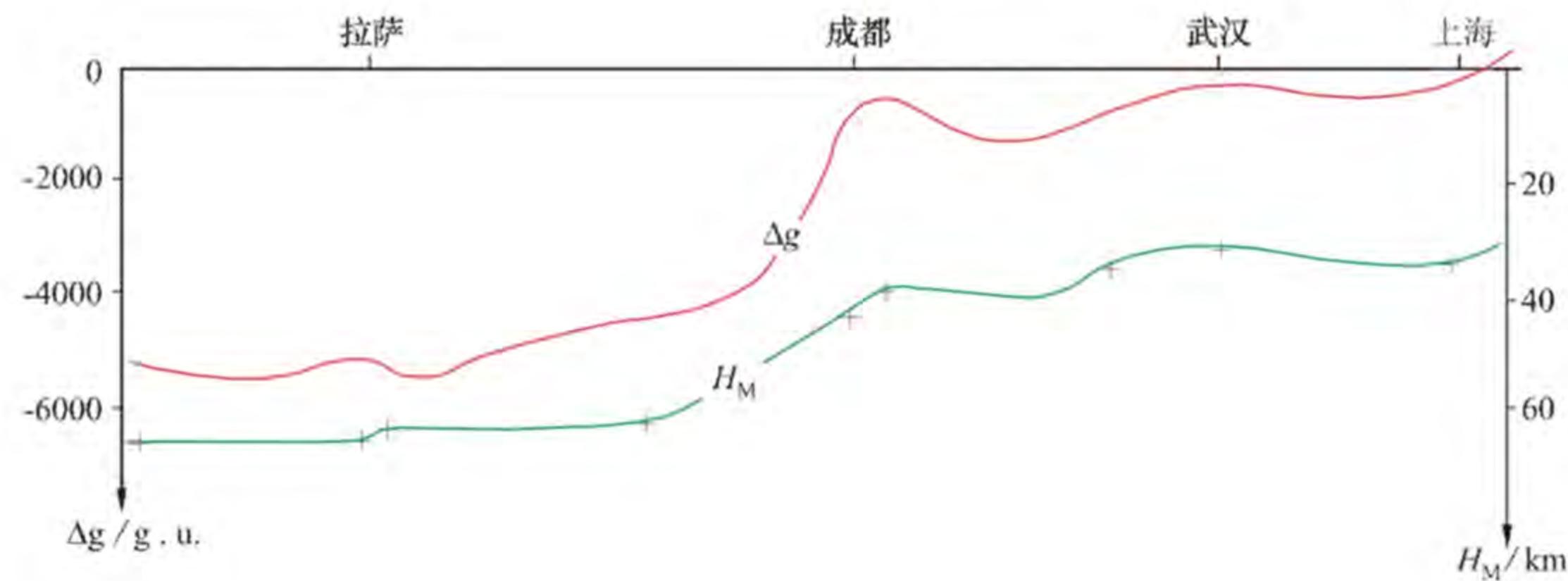
1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地壳深部因素



1.引起重力异常的主要地质因素

■ 地壳深部因素



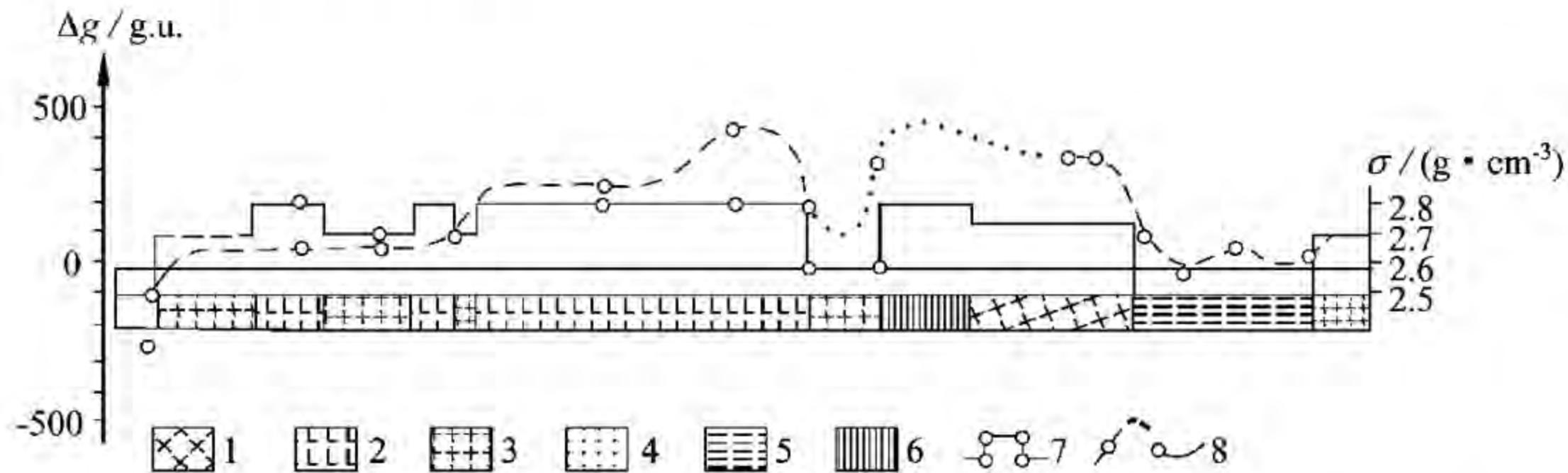
1.引起重力异常的主要地质因素

■ 结晶基岩内部的密度变化

- 由于经历长期地壳运动及岩浆作用，使沉积岩层的结晶基底内部的物质成分和内部构造变得十分复杂，因而其密度在横向和纵向上的变化都很大。
- 在基底出露区或沉积盖层不太厚的地区，这种密度的变化，会使地表的重力产生相应的变化，其幅度可达数百g.u.。

1.引起重力异常的主要地质因素

■ 结晶基岩内部的密度变化



1-太古代花岗片麻岩，2-混合岩，3-博特金后期花岗岩，4-石英岩和砂岩，
5-页岩、白云岩、辉绿岩，6-千枚岩，7-岩石密度曲线，8-重力异常 Δg 曲线

1.引起重力异常的主要地质因素

■ 结晶基底顶面的起伏

- ✓ 结晶基底与上覆沉积岩系通常都存在一定的密度差，在基底内部岩性较均匀的情况下，基岩顶面的起伏能形成较大范围内的重力高低变化。
- ✓ 据此可以成功地圈定那些范围较大的有较大幅度的隆起或凹陷构造单元。

1.引起重力异常的主要地质因素

■沉积岩的构造和成分变化

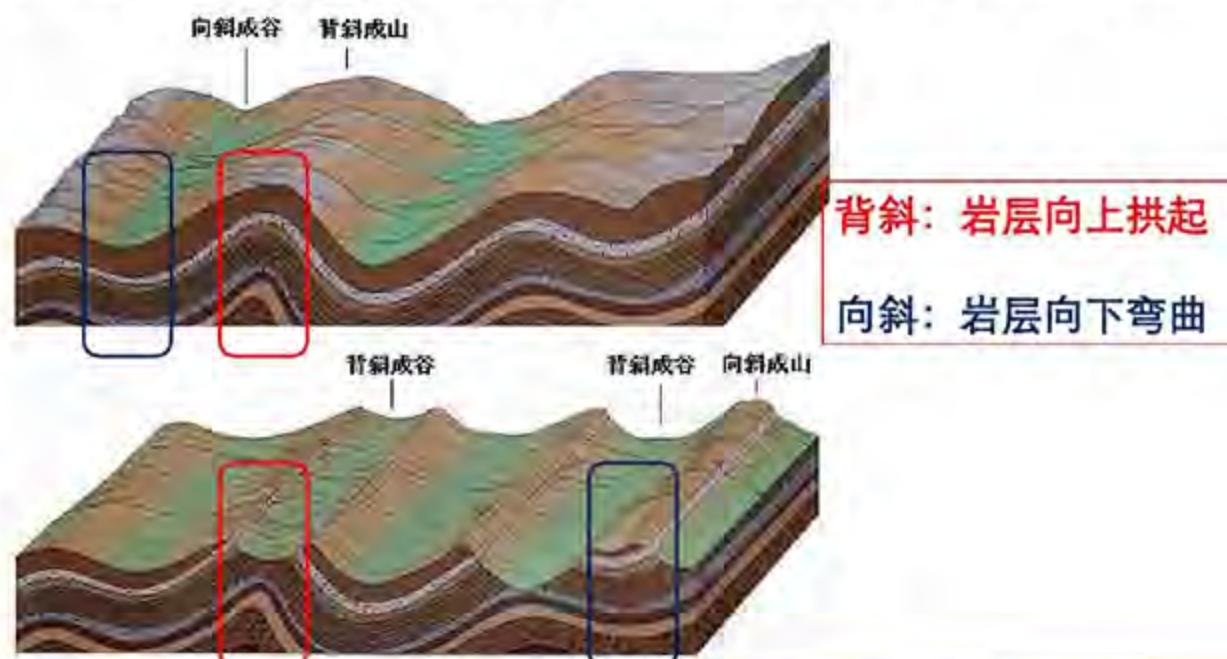
- ✓ 在沉积岩系比较发育的地区，沉积岩系的内部往往存在多个密度分界面，
 - a) 新生代的疏松沉积物与下伏老地层之间
 - b) 中新生代的陆相地层与古生代的海相地层之间
 - c) 古生代上部砂页岩和下部碳酸岩之间
- ✓ 当这些界面受地壳运动影响而产生褶皱、断裂时，在具备足够大的剩余质量时，将产生明显的重力异常。

这为应用重力法研究寻找局部构造奠定了基础。

1.引起重力异常的主要地质因素

■ 沉积岩的构造和成分变化

- ✓ 此外，沉积岩内的岩性或岩相变化也可能产生明显的重力变化。
- ✓ 例如某盆地内在向斜部位堆积了密度较下伏岩层为大的砾石层，出现了在按正常密度序列时向斜部位应是重力低处，反而出现了重力高，而背斜构造部位出现了重力低，这一点在对重力资料作解释时应特别注意。



1.引起重力异常的主要地质因素

■其它密度不均匀因素

- ✓ 大多数金属矿床(如铁矿、铜矿、铬铁矿等), 特别是致密状的, 其密度都比围岩大, 密度差通常超过 0.5 g/cm^3 ,
- ✓ 某些非金属矿(如岩盐、煤炭等)或侵入体, 则情况相反, 其密度一般比围岩要小。

当这些矿体或地质体具有一定的规模和埋深又不大时, 都能在地表形成可观测到的局部异常。

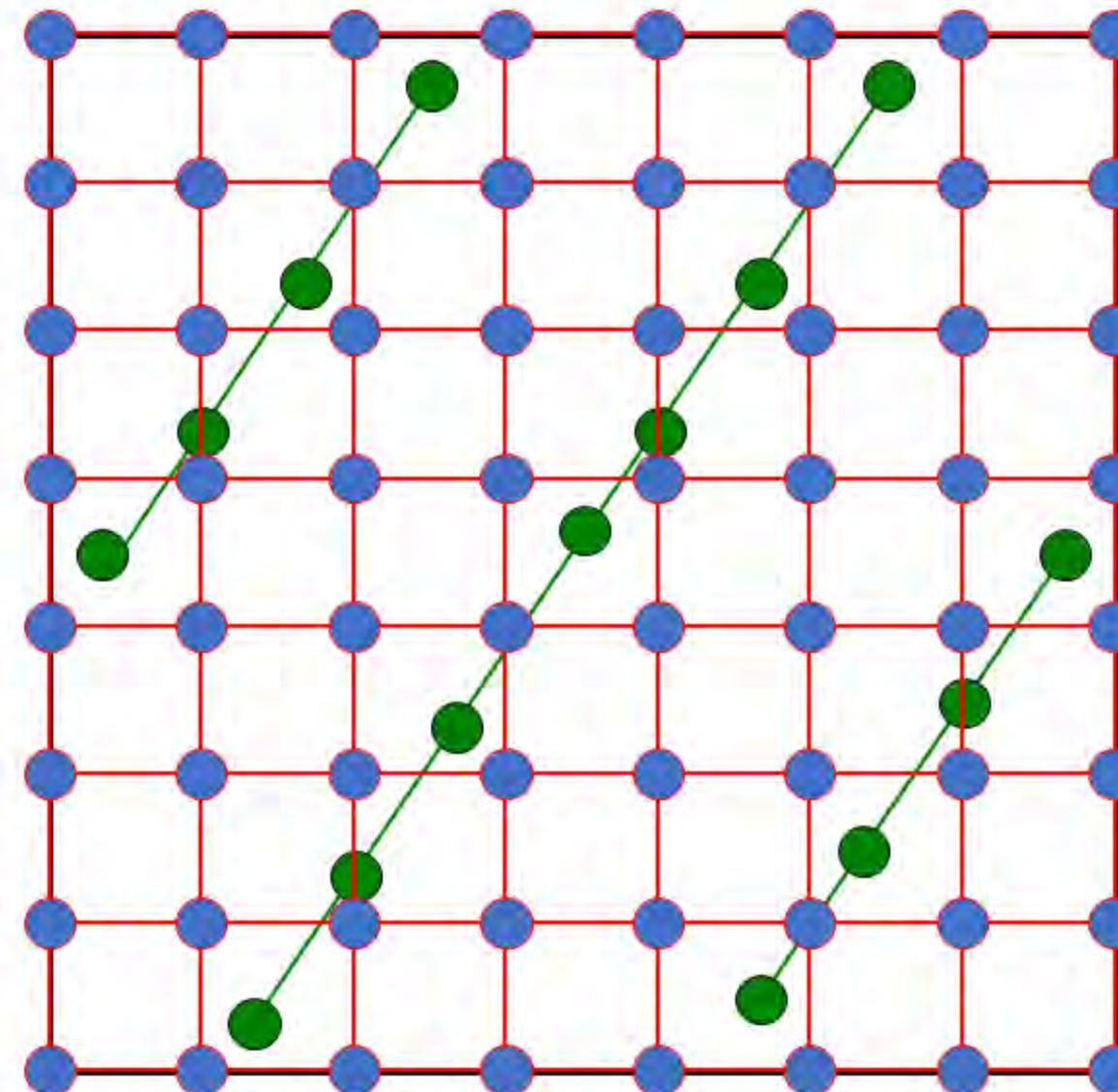
目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

2. 网格化

将不规则的实测
数据或数字化的
数据换算成规则
网格节点上的数
据，这个过程就
是数据的网格化



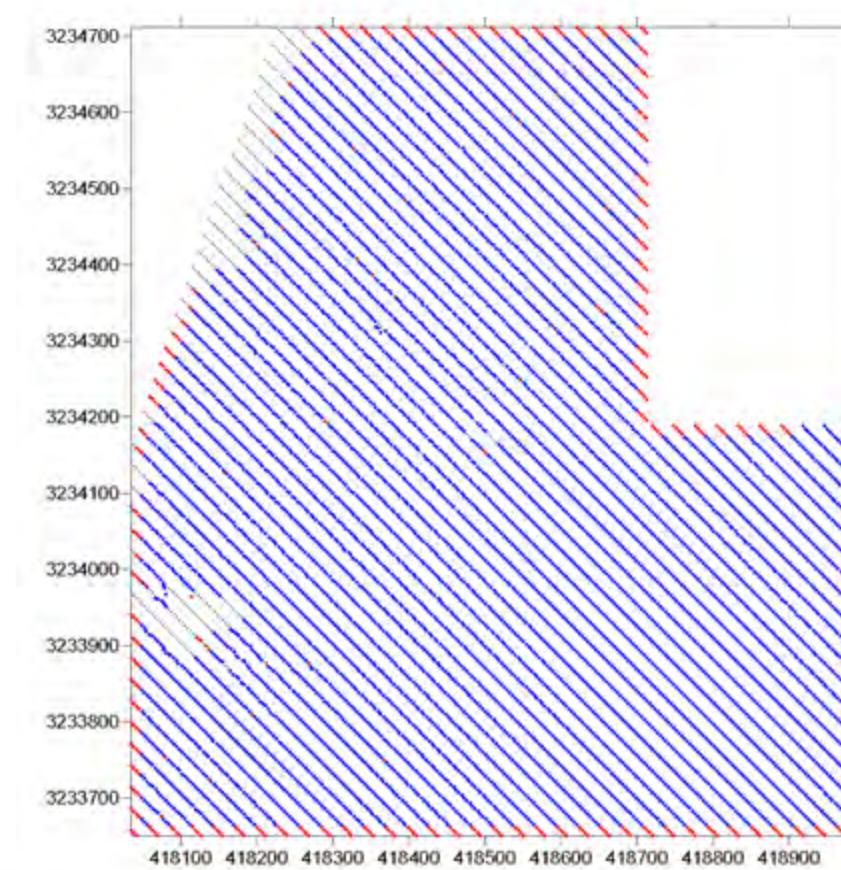
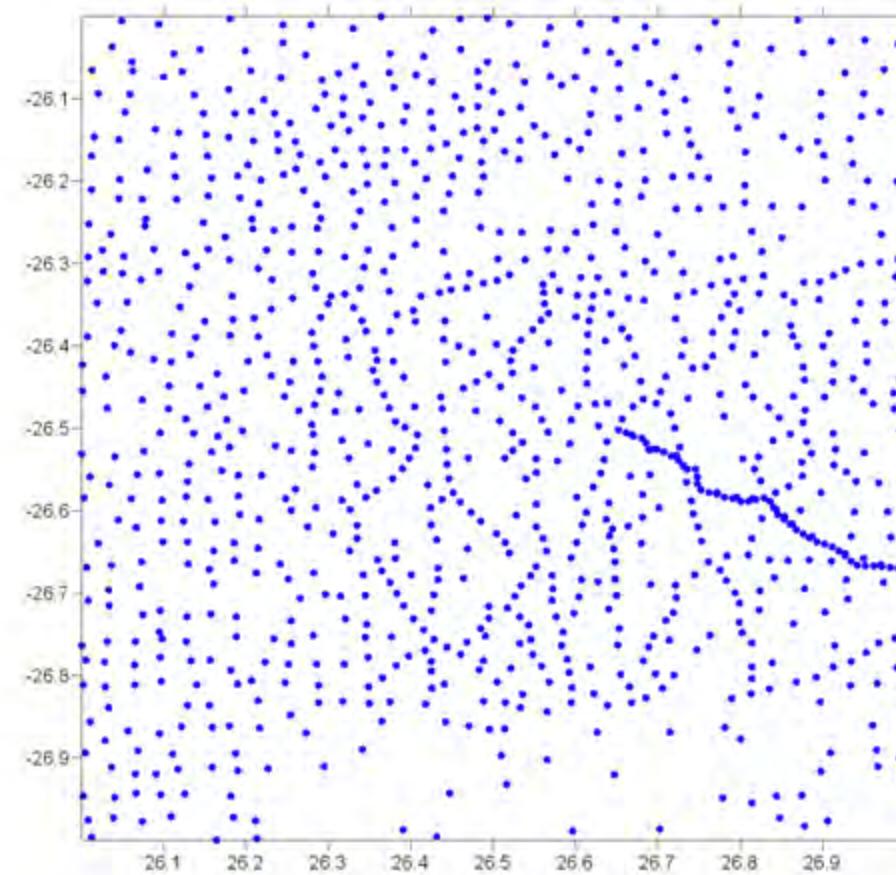
2. 网格化

- 1) 进行重磁数据实际测量时，由于某些客观原因，有时某些点位上无法进行测量，结果会出现漏点或造成实测数据点分布不均。
- 2) 利用某些原始重磁异常图件进行有用信息再开发，必要时进行数字化，这样的取样可能不规则。
- 3) 重磁数据反演计算时，通常需要均匀或规则分布的数据。

2. 网格化

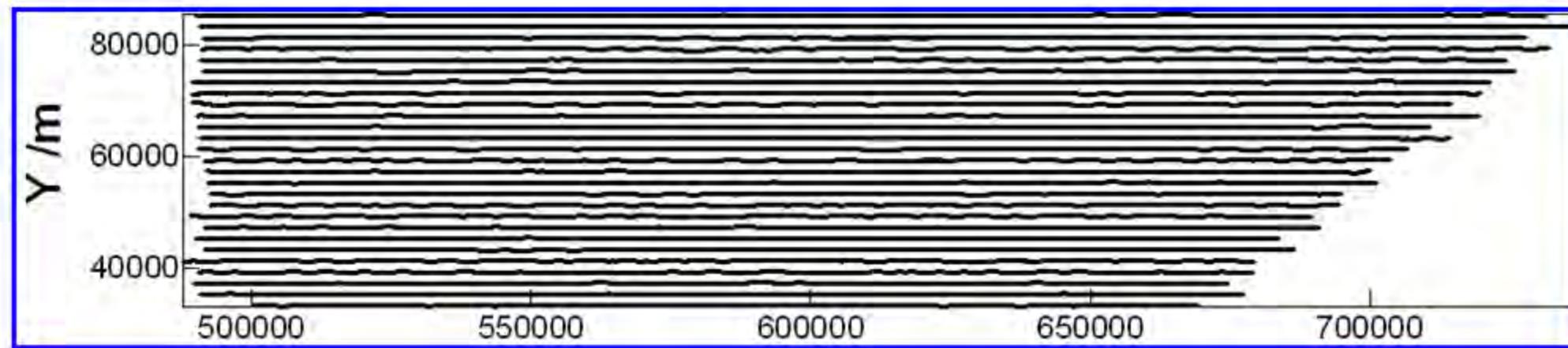
数据网格化的实质是对**不规则的数据点**进行**插值**。

2. 网格化

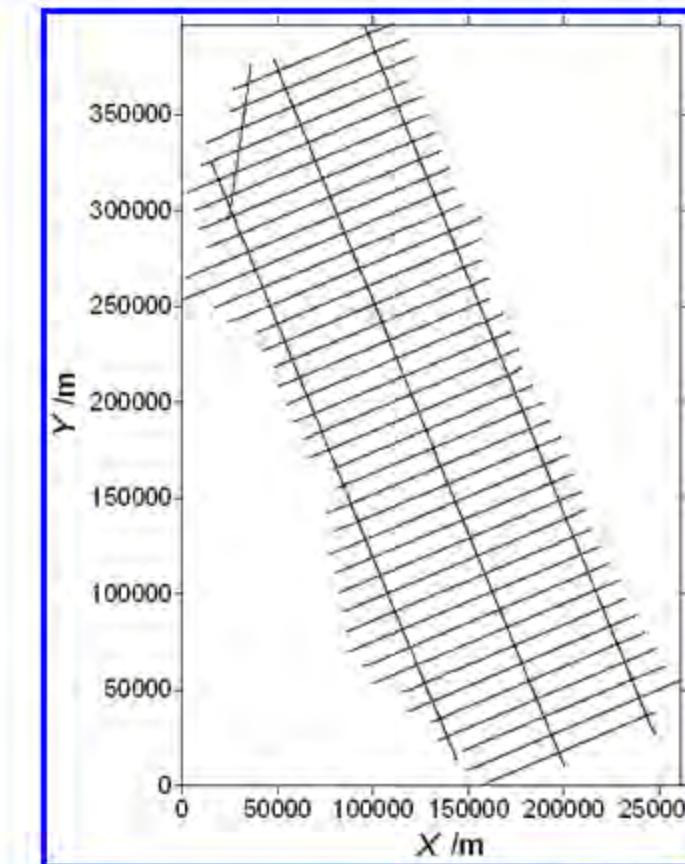
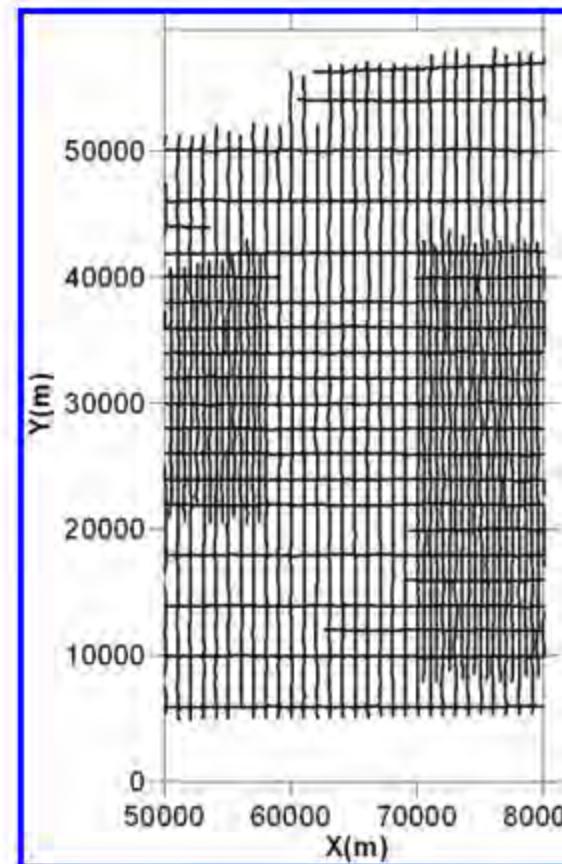


地面不同比例尺的重力测点分布

2. 网格化



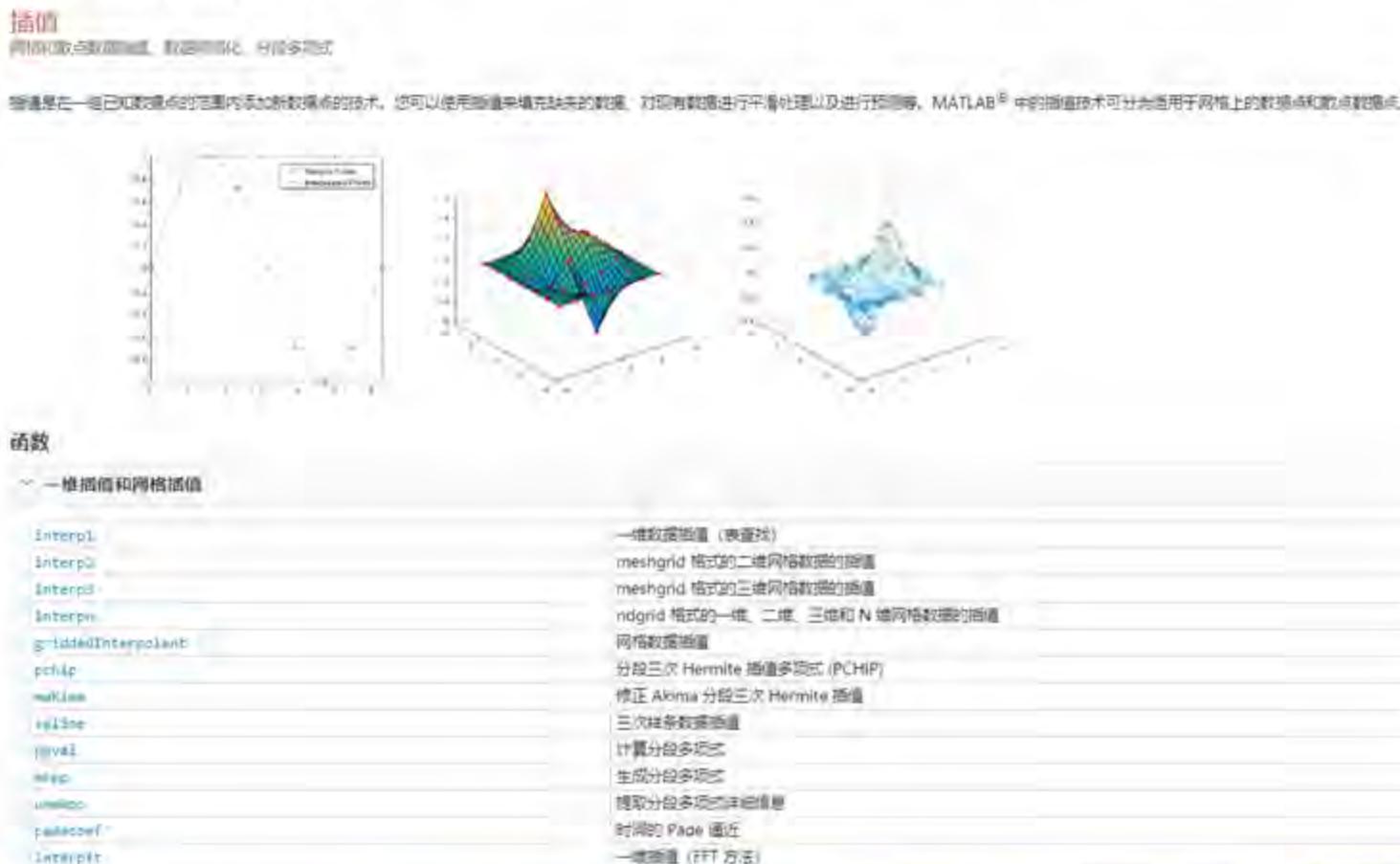
航空飞行测网分布图



2. 网格化

插值的方法包括：

拉格朗日多项式插值、克里格（克里金）插值、最小二乘拟合（多项式回归）和加权平均（邻近值法）等。



2.网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

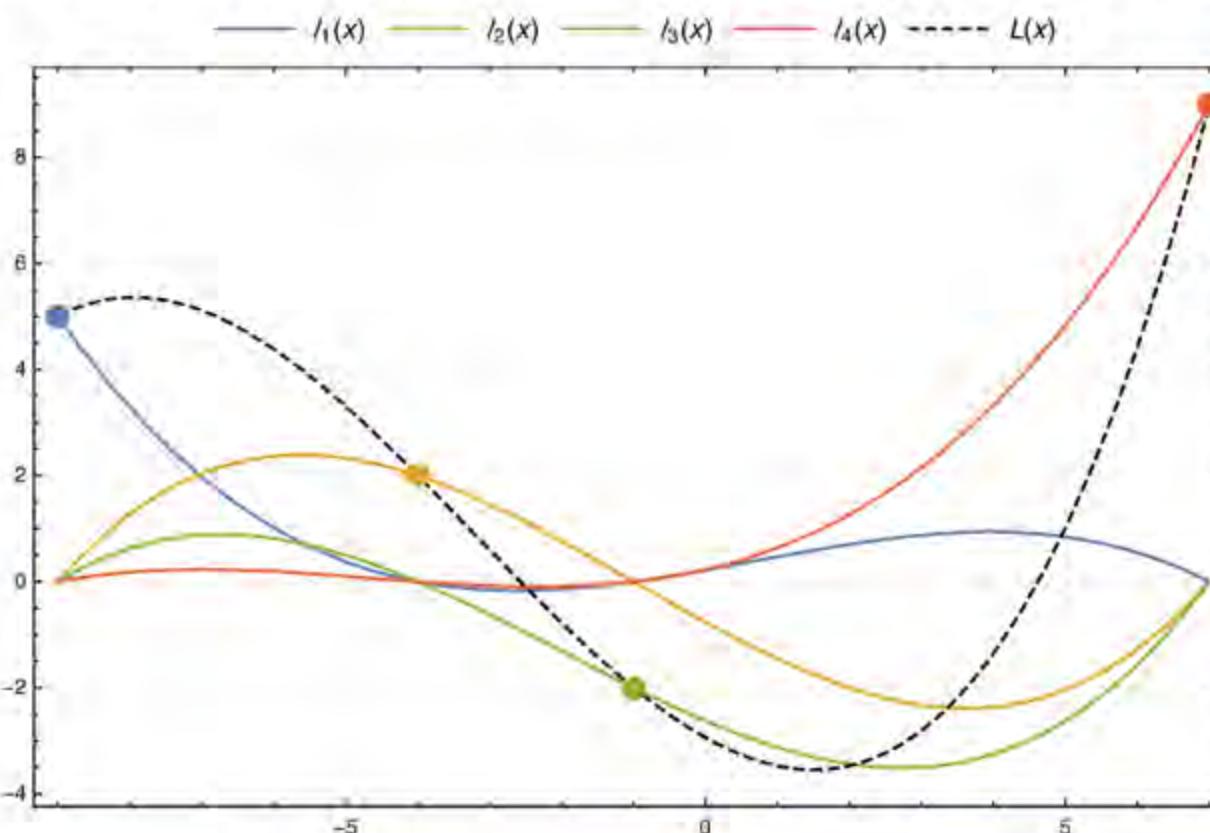
在数值分析中，**拉格朗日插值**法是以法国十八世纪数学家约瑟夫·拉格朗日命名的一种多项式插值方法。

许多实际问题中都用函数来表示某种内在联系或规律，而不少函数都只能通过实验和观测来了解。如对实践中的某个物理量进行观测，在若干个不同的地方得到相应的观测值，拉格朗日插值法可以找到一个多项式，其恰好在各个观测的点取到观测到的值。这样的多项式称为拉格朗日（插值）多项式。数学上，**拉格朗日插值法可以给出一个恰好穿过二维平面上若干个已知点的多项式函数。**

2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

对于给定的若 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, 对应于它们的次数不超过 n 的拉格朗日多项式 L 只有一个。如果计入次数更高的多项式，则有无穷个，因为所有与 L 相差 $\lambda(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 的多项式都满足条件。例子：



2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

定义

对某个多项式函数，已知有给定的 $k + 1$ 个取值点：

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

其中 x_j 对应着自变量的位置，而 y_j 对应着函数在这个位置的取值。

假设任意两个 x_j 都互不相同，那么应用拉格朗日插值公式所得到的拉格朗日插值多项式为：

$$L(x) := \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x)$$

其中，每个 $\ell_j(x)$ 为拉格朗日基本多项式（或称插值基函数），其表达式为：

$$\ell_j(x) := \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}.$$

拉格朗日基本多项式 $\ell_j(x)$ 的特点是在 x_j 上取值为 1，在其它的点 $x_i, i \neq j$ 上取值为 0。

2.网格化

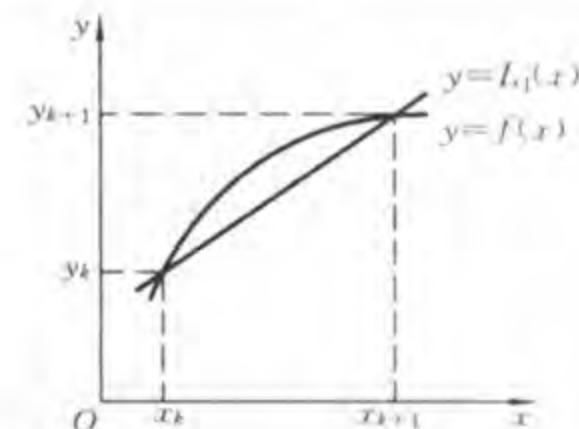
■ 2.1 拉格朗日插值法

推导思路是：由给定的 $M+1$ 个结点上的函数值，求得一个关于 x 的 M 次多项式，用以逼近函数 $g(x)$ ，并要求由该多项式在给定结点上的计算值等于结点上给定的函数值。

2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

一维拉格朗日插值公式



假设已知区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 端点处的函数值，要求在两点之间进行线性插值，线性插值为经过两个端点的一条直线。我们知道有两种方式来描述这条直线对应的函数：**点斜式、两点式**。

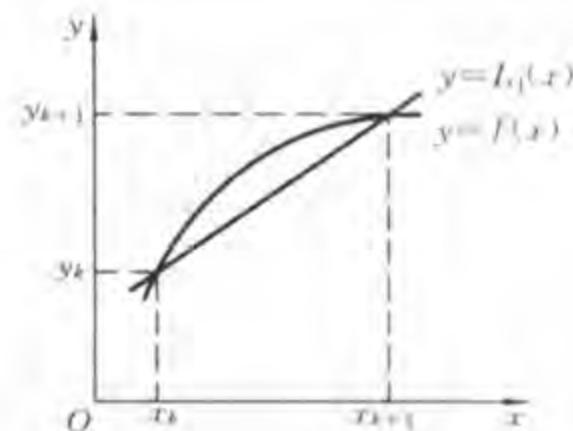
- **点斜式：** $L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$
- **两点式：** $L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}y_{k+1}$

将两个端点坐标代入上述直线方程，可以很轻易地验证点斜式和两点式所代表的直线确实经过这两个端点。

2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

一维拉格朗日插值公式



我们重点关注 $L_1(x)$ 两点式的直线方程，如果将纵坐标 y_k, y_{k+1} 视作常系数， $L_1(x)$ 可以看作两个线性函数的线性组合：

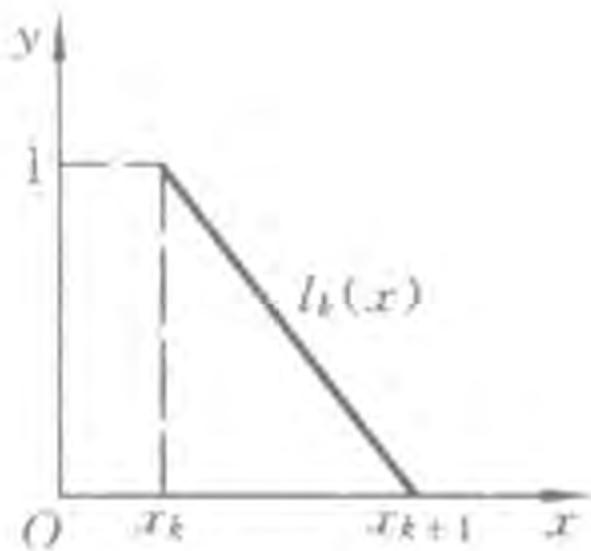
$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$
$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

也就是说，我们可以将线性插值的函数分解成两个一次插值基函数的叠加，这是拉格朗日插值法的核心思想。

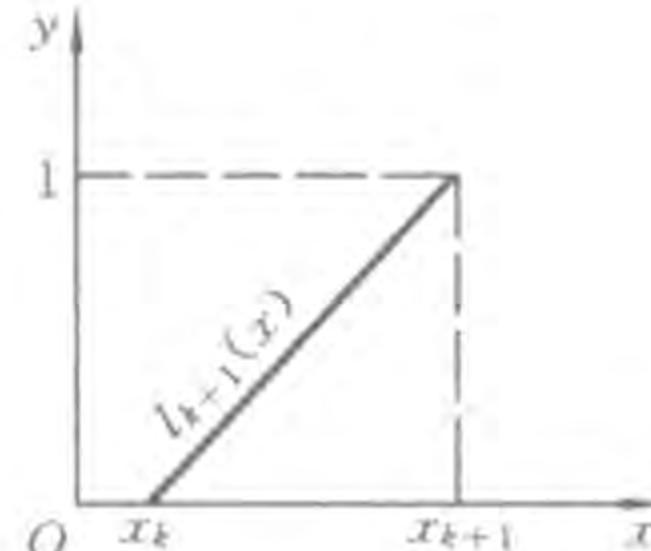
2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

一维拉格朗日插值公式



(a)



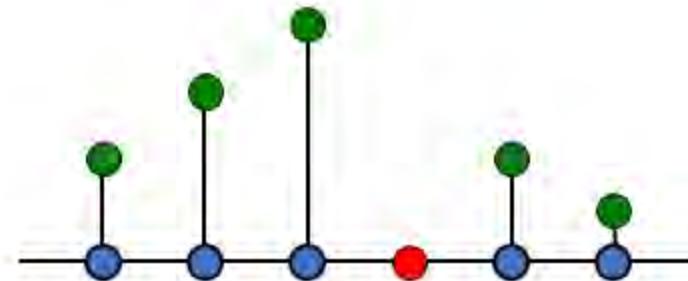
(b)

一次插值基函数

2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

一维拉格朗日插值公式



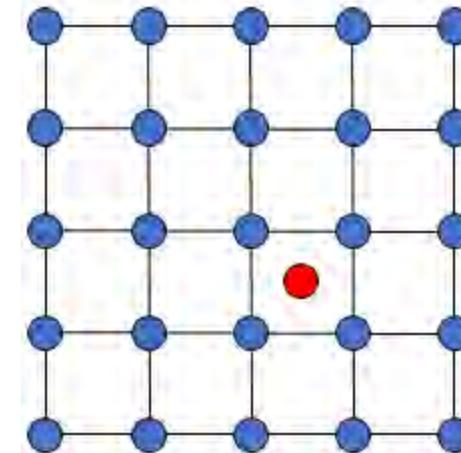
$$g(x) = \sum_{i=0}^M g(x_i) \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_M)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_M)}$$

$g(x)$ 计算点上的重磁场值； $g(x_i)$ 实测点上的重磁场值；
 x_k, x_i 为插值点的剖面坐标； M 为总插值点数。

2. 网格化

■ 2.1 拉格朗日插值法

二维拉格朗日插值公式



$$g(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^M \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^N \left(\frac{y - y_l}{y_j - y_l} \right) g(x_i, y_j)$$

$g(x, y)$ 计算点上的重力场值；

$g(x_i, y_j)$ 实测点上的重力场值；

x_k, x_i, y_l, y_j 为插值点的坐标；

2.网格化

■ 2.2 函数的多项式拟合法

设在平面 M 个结点上给定了函数值 $g(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, M$)。

假设函数 $g(x, y)$ 可以用 x 和 y 坐标的 N 次多项式近似表示。

$$\bar{g}(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \cdots + a_{N-1}y^n$$

由 M 个结点上的值，采用最小二乘法，求得 N 次多项式的系数，则该函数在结点分布区内或附近计算点上的值，可由所求得的 N 次插值多项式来确定。

2. 网格化

■ 2.2 函数的多项式拟合法

二次拟合多项式

设函数 $g(x, y)$ 的二次拟合多项式为 $\bar{g}(x, y)$, 则

$$\bar{g}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2$$

定义目标函数

$$\Phi(\alpha^*) = \sum_{i=1}^N (g_i - \bar{g}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ g_i - \left(\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 x_i^2 + \alpha_4 x_i y_i + \alpha_5 y_i^2 \right) \right\}^2$$

$$= \min \Phi(\alpha)$$

2.网格化

■ 2.2 函数的多项式拟合法

二次拟合多项式

$$\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^N 2[A_i\alpha - g_i]A_{ik} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N A_i A_{ik} \alpha = \sum_{k=1}^N g_i A_{ik}$$

$$(A^T A)\alpha = A^T g$$

采用稳定的数值解法求解方程，得到最佳系数。把计算点的坐标代入二次多项式，即可求得函数值。

2. 网格化

平面数据其它常用网格化方法

- ✓ 最小曲率法
- ✓ 克里金法
- ✓ 径向基函数法
- ✓ 基于三角网的线性插值法
- ✓ 广义等效源法
- ✓ 函数逼近法
- ✓ 双三次样条内插法
- ✓ 泰勒定理法
- ✓



Surfer

[Golden Software Products](#) | [Surfer](#) | [Grapher](#) | [Golden Software](#)

2.网格化

■ 2.3 等效源法



PERGAMON

Computers & Geosciences 26 (2000) 227–233

**COMPUTERS &
GEOSCIENCES**

Gridding gravity data using an equivalent layer[☆]

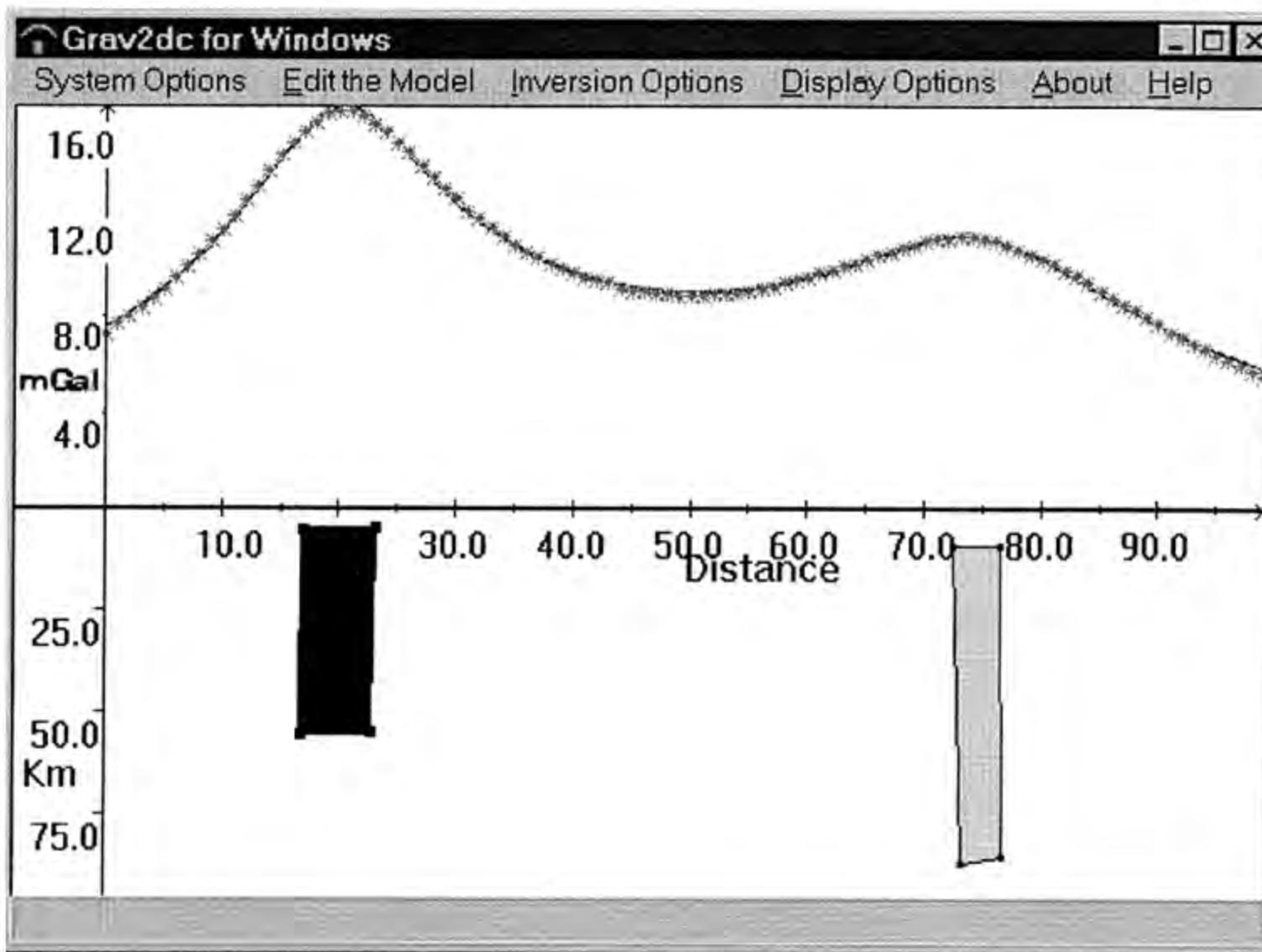
G.R.J. Cooper*

Departments of Geophysics and Geology, University of the Witwatersrand, Johannesburg 2050, South Africa

Received 16 April 1999; received in revised form 9 August 1999; accepted 9 August 1999

2.网格化

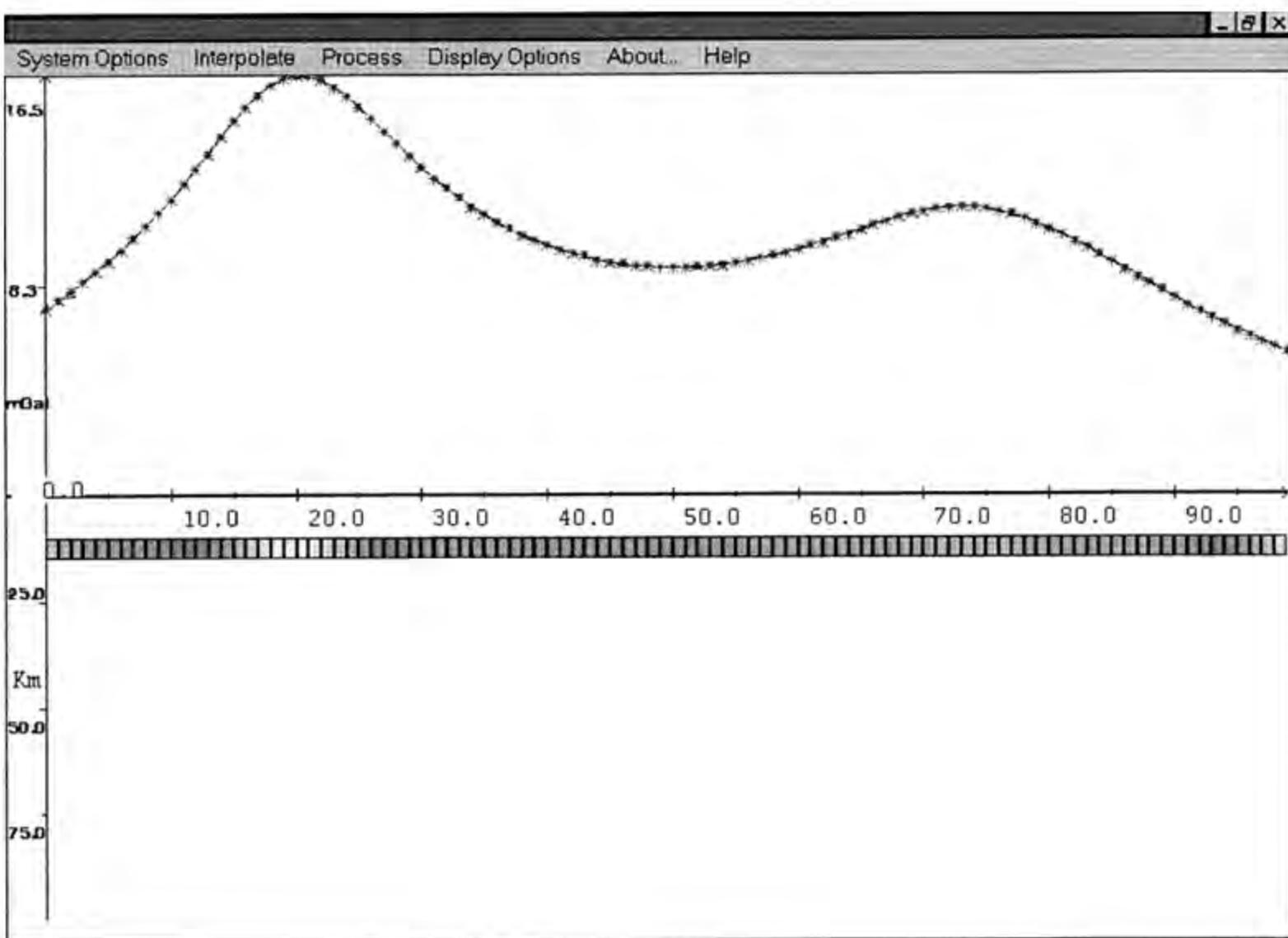
■ 2.3 等效源法



2.网格化

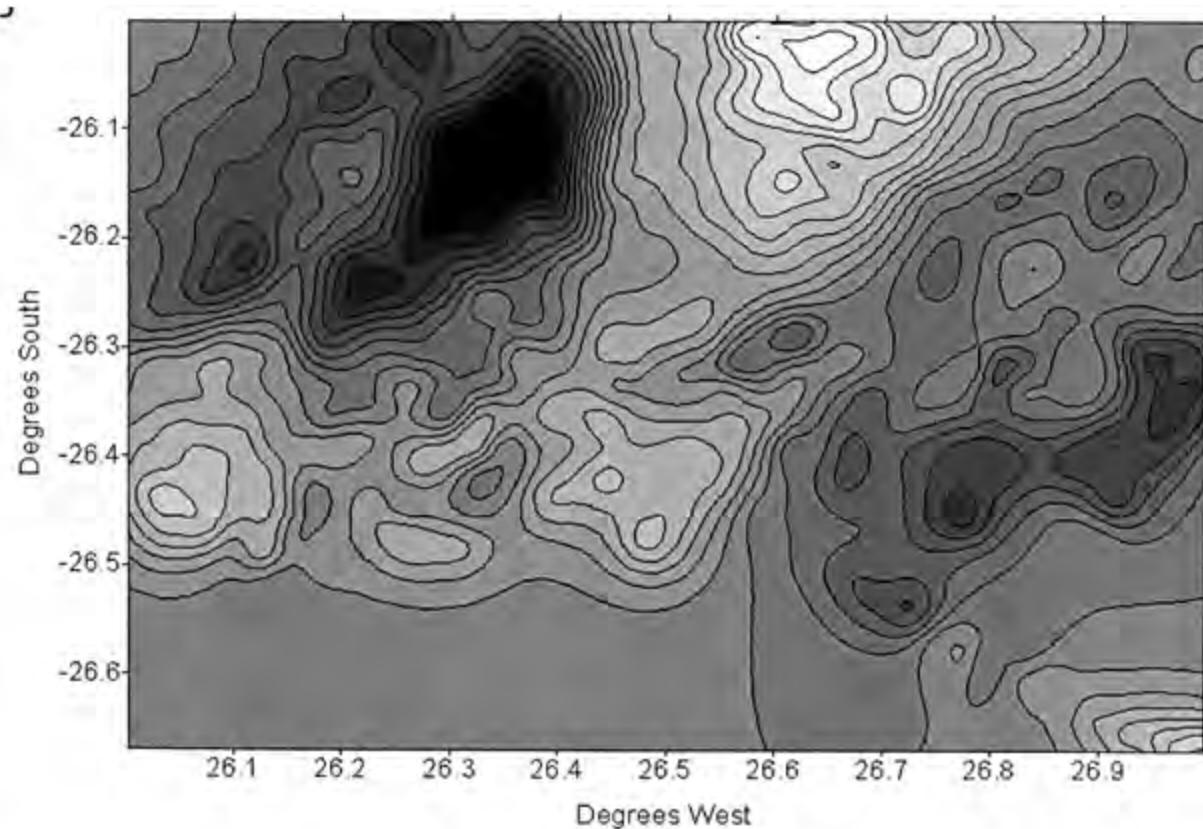
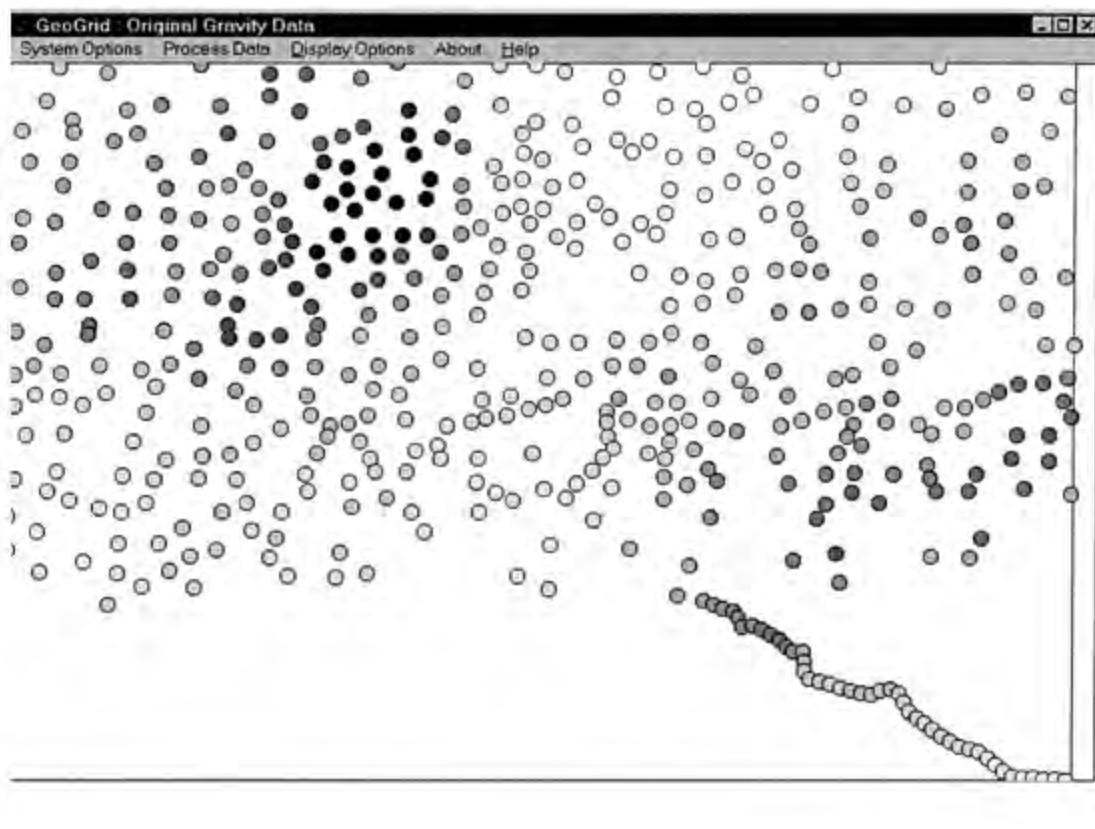
■ 2.3 等效源法

$$\Delta g_v = \frac{GM\Delta z}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



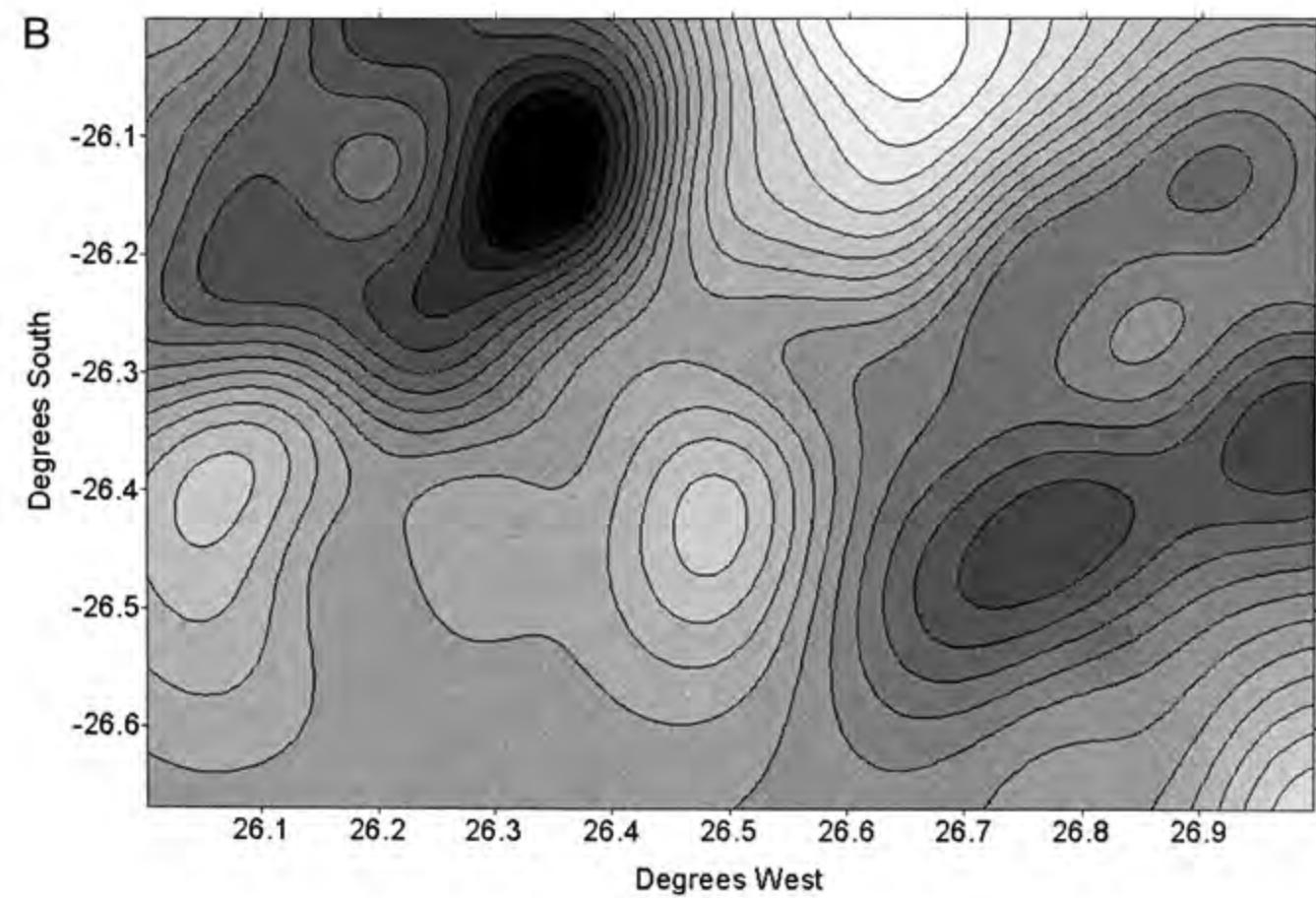
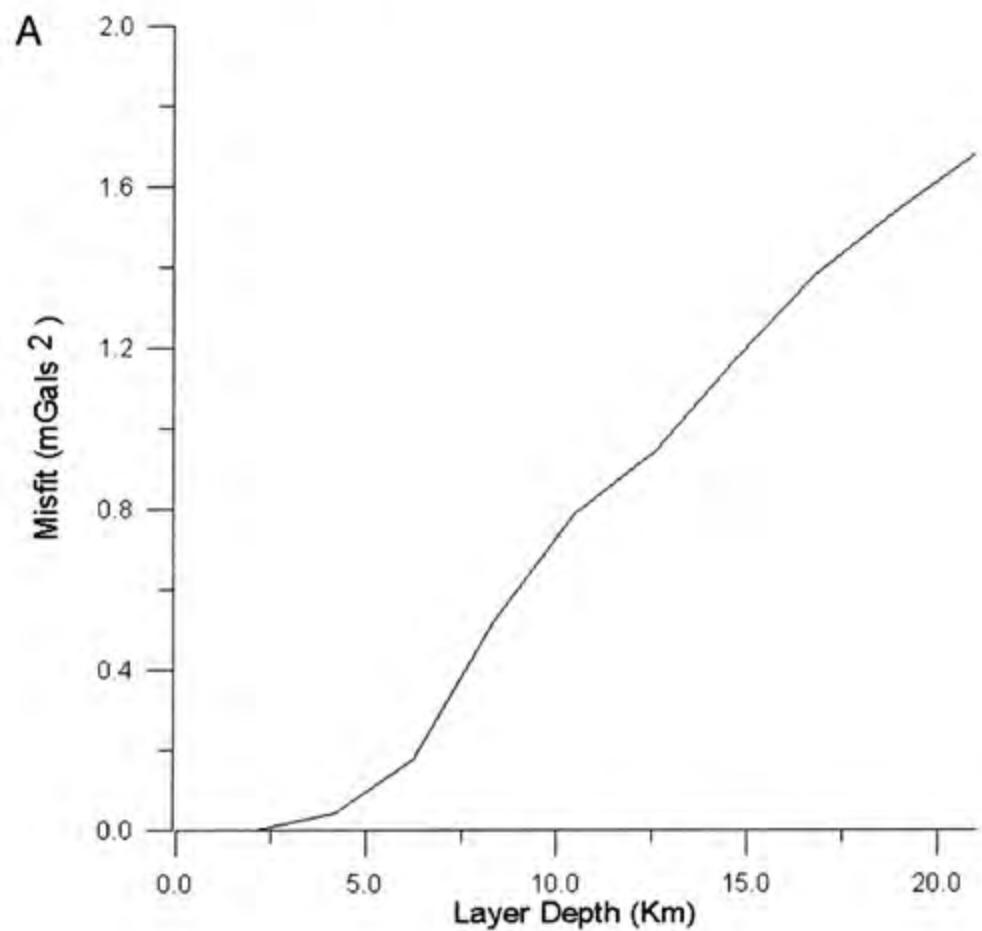
2. 网格化

■ 2.3 等效源法



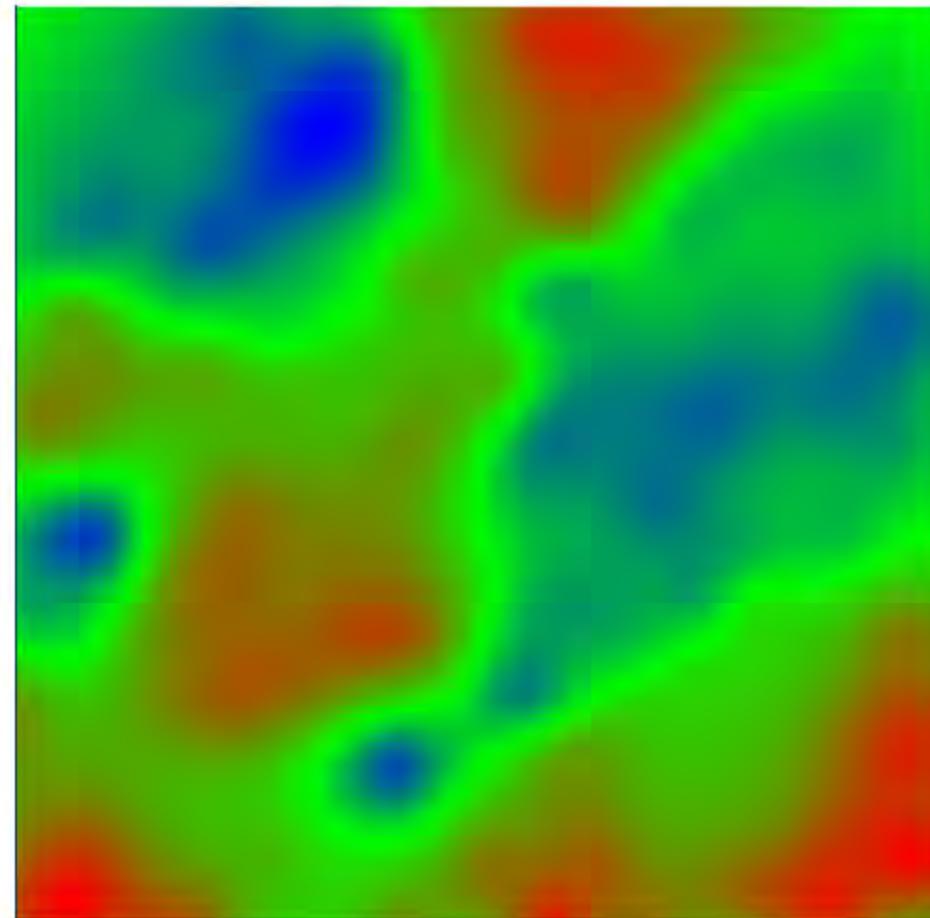
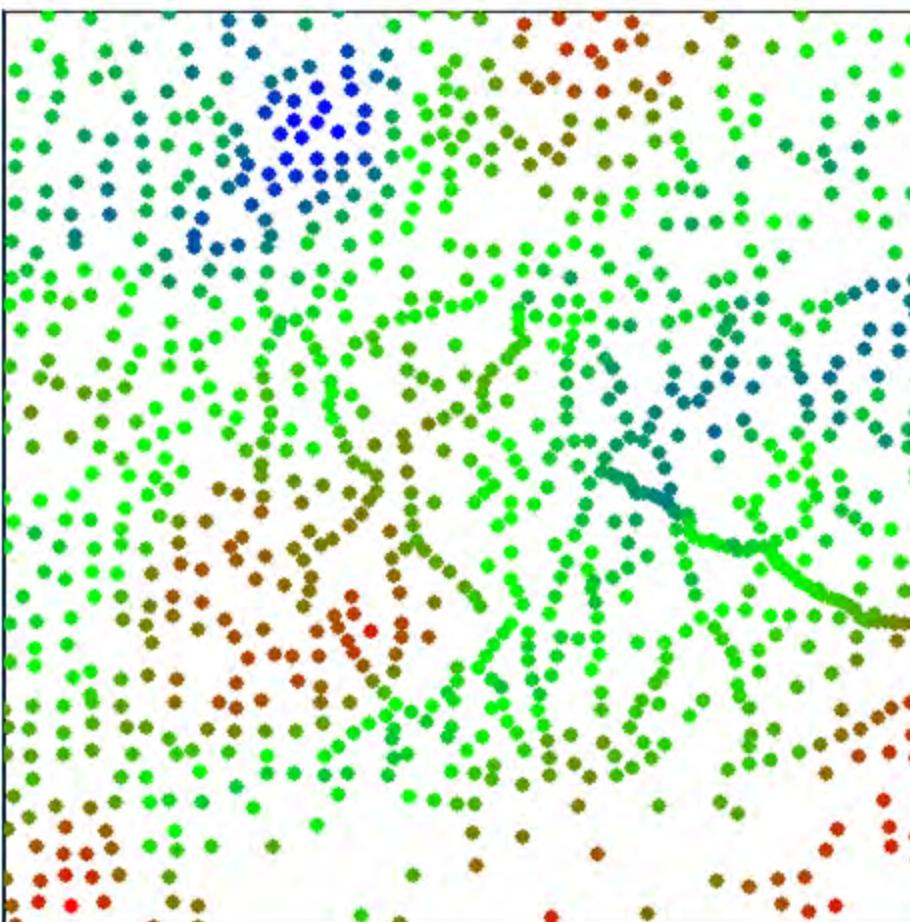
2. 网格化

■ 2.3 等效源法



2.网格化

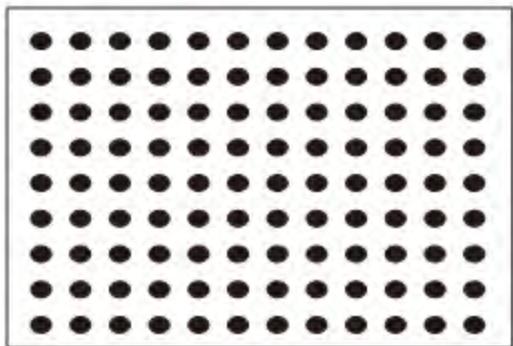
■ 2.3 等效源法



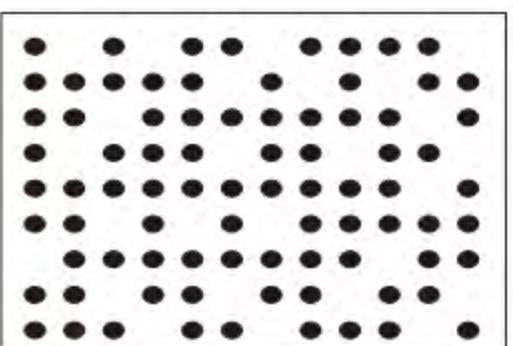
等效源法网格化 (据Cooper, 2000)

2.网格化

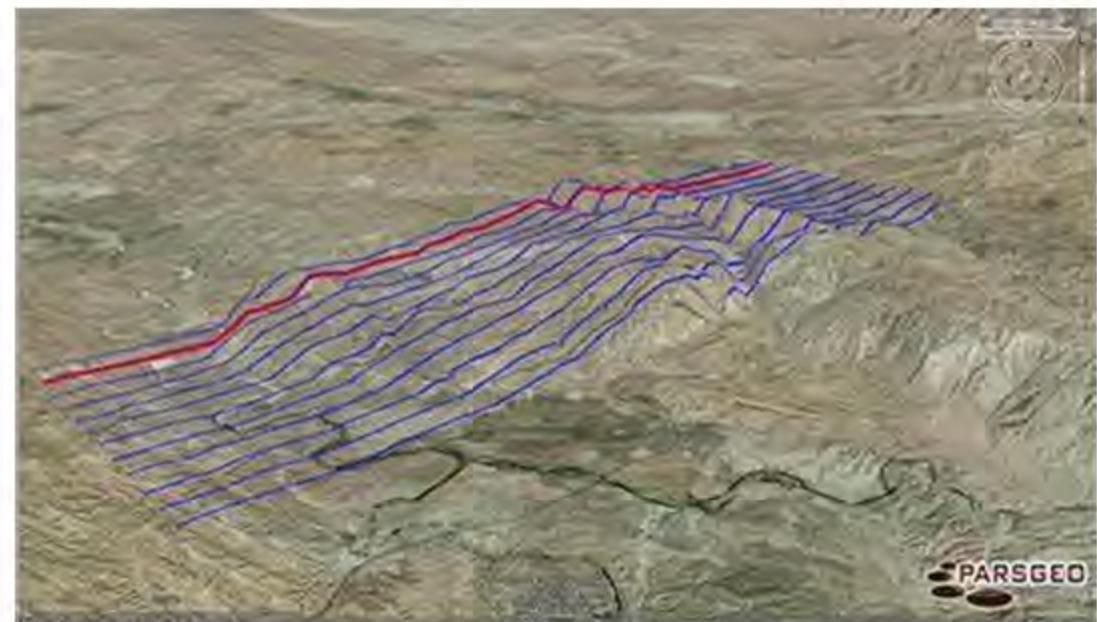
■ 2.4 泰勒定理法



idea data sets
• equal space
• high resolution



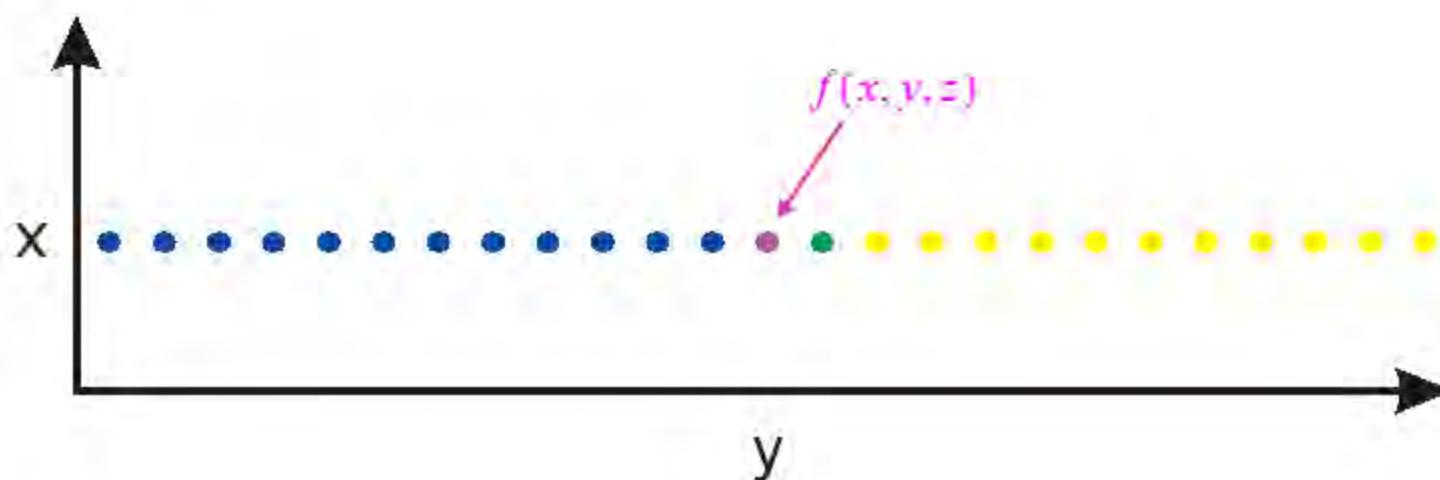
real data sets
• irregular



2.网格化

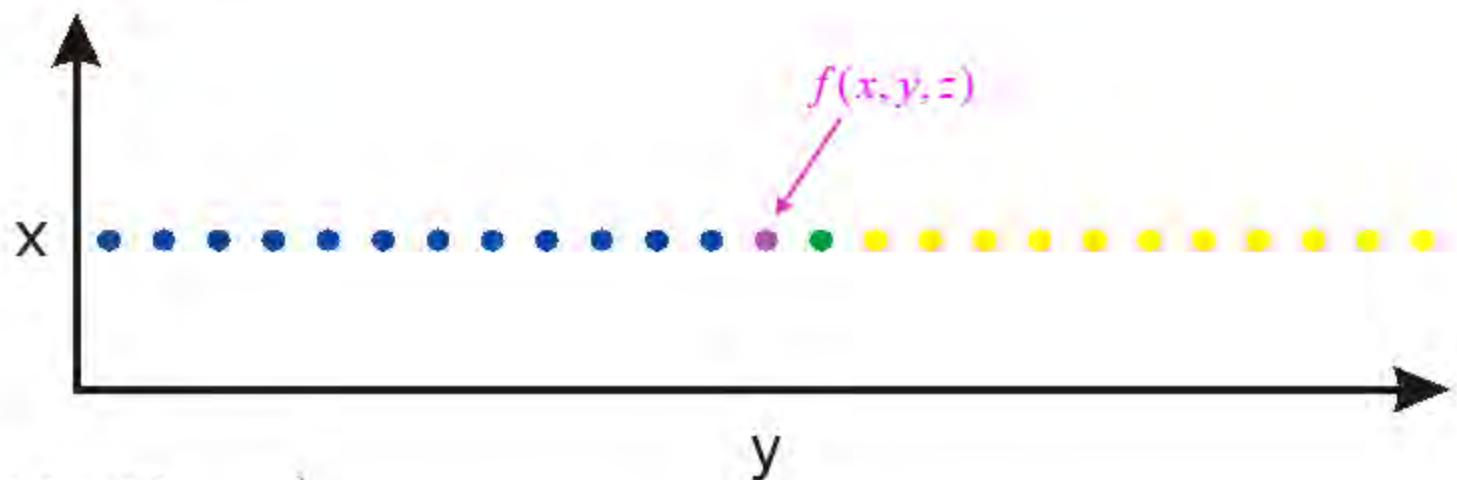
■ 2.4 泰勒定理法

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$



2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法

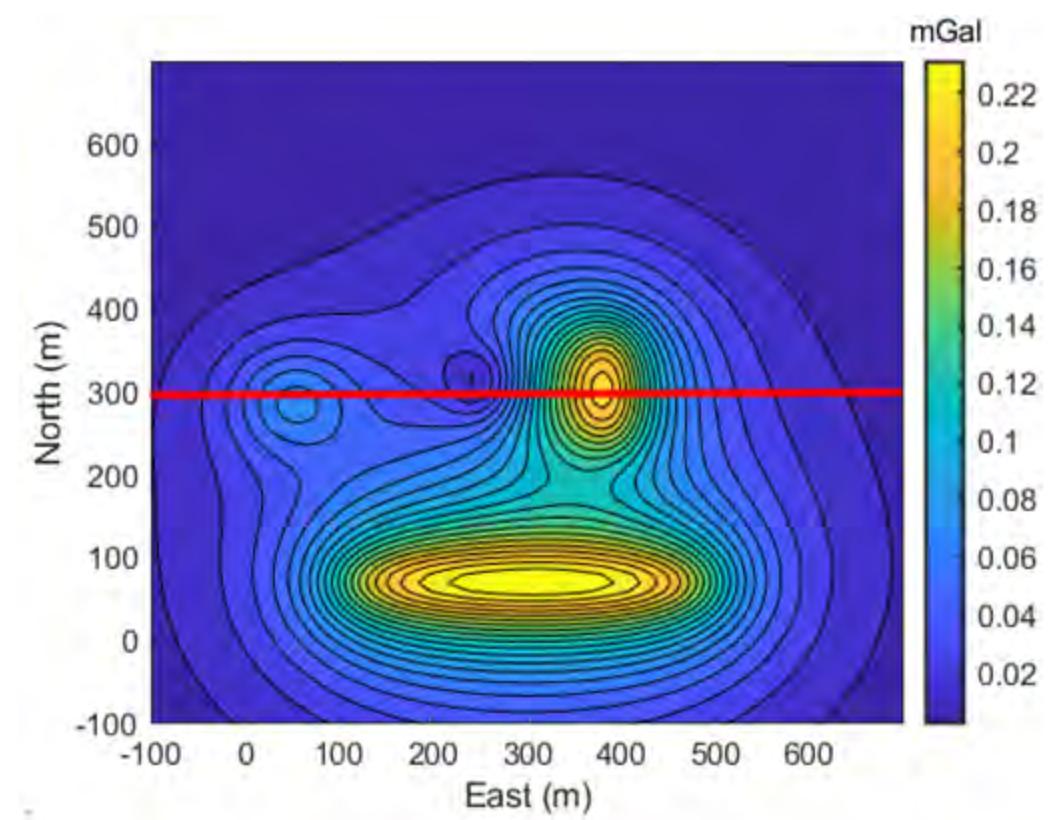
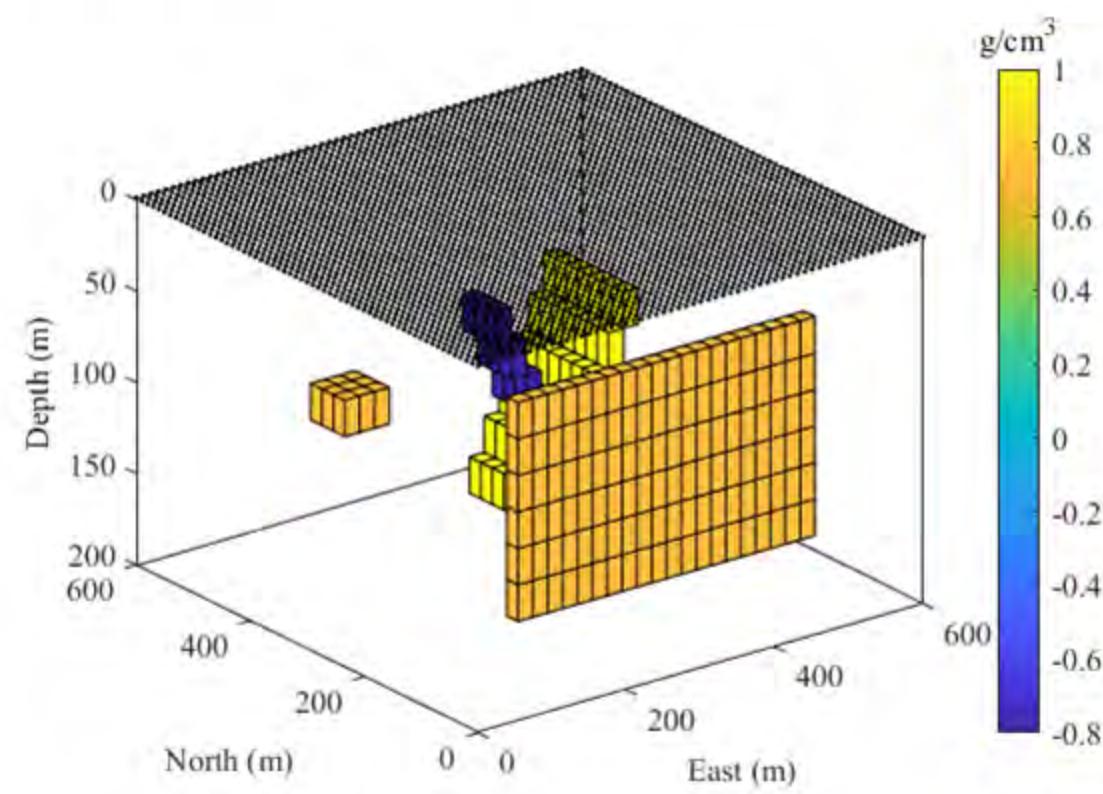


$$\begin{bmatrix} \frac{\pm\Delta y_1}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^2}{2!} & \dots & \frac{(\pm\Delta y_1)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \frac{\pm\Delta y_2}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^2}{2!} & \dots & \frac{(\pm\Delta y_2)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\pm\Delta y_n}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_n)^2}{2!} & \dots & \frac{(\pm\Delta y_n)^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_n)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \frac{\pm\Delta y_{n+1}}{1!} & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^2}{2!} & \dots & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^n}{n!} & \frac{(\pm\Delta y_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y'(x, y, z) \\ f_y''(x, y, z) \\ \vdots \\ f_y^n(x, y, z) \\ f_y^{n+1}(x, \xi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y \pm \Delta y_1, z) - f(x, y, z) \\ f(x, y \pm \Delta y_2, z) - f(x, y, z) \\ \vdots \\ f(x, y \pm \Delta y_n, z) - f(x, y, z) \\ f(x, y \pm \Delta y_{n+1}, z) - f(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$f(x, y \pm \Delta y, z) = f(x, y, z) + (\pm\Delta y) f_y'(x, y, z) + \frac{(\pm\Delta y)^2}{2!} f_y''(x, y, z) + \dots + \frac{(\pm\Delta y)^n}{n!} f_y^n(x, y, z)$$

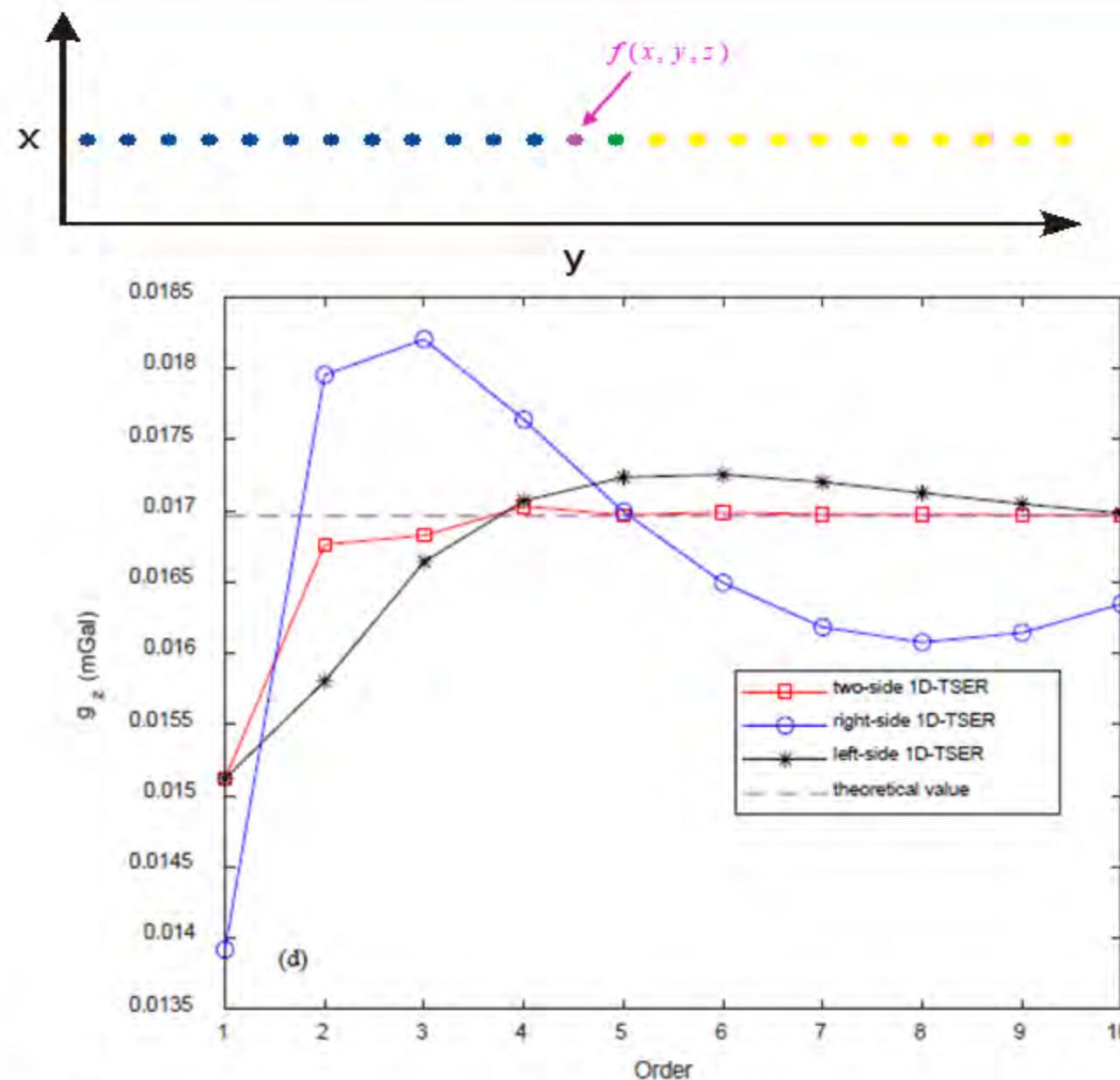
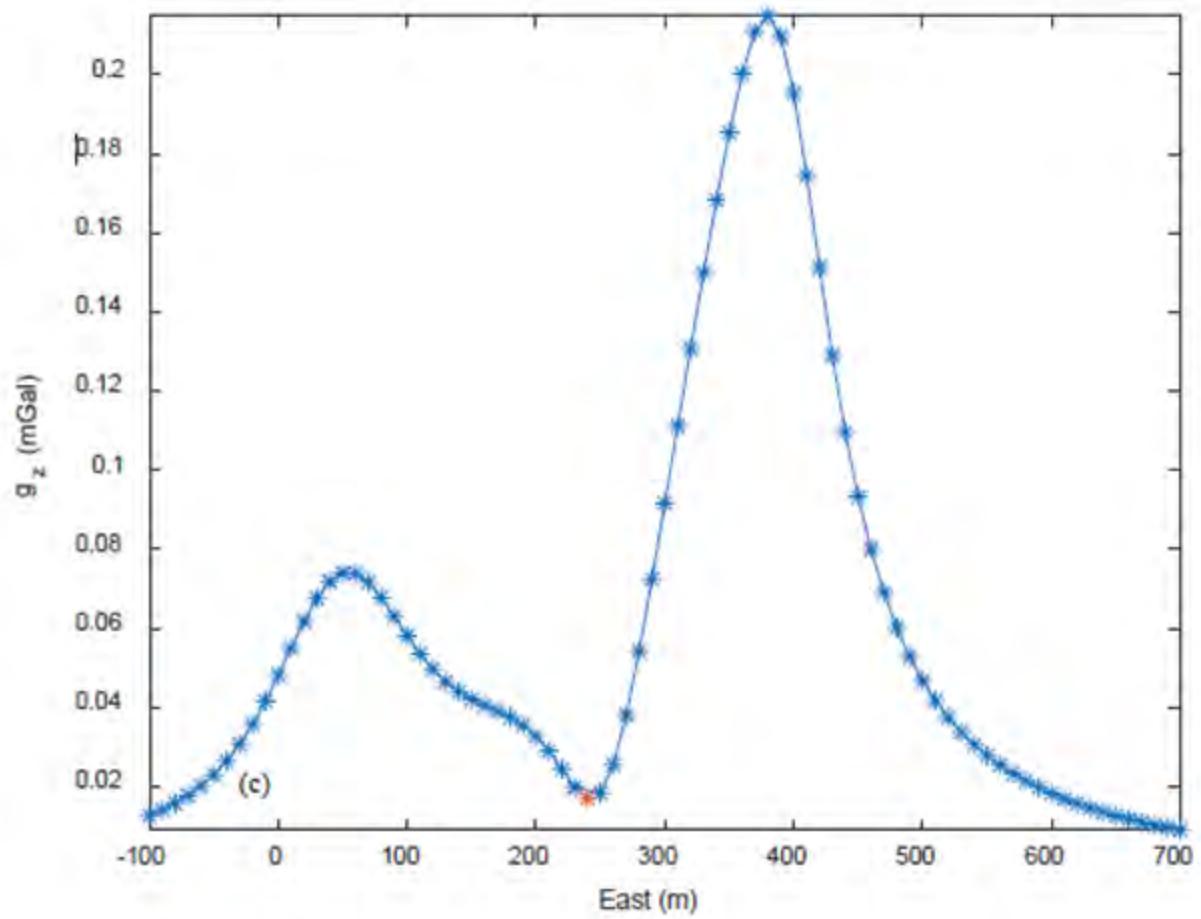
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法



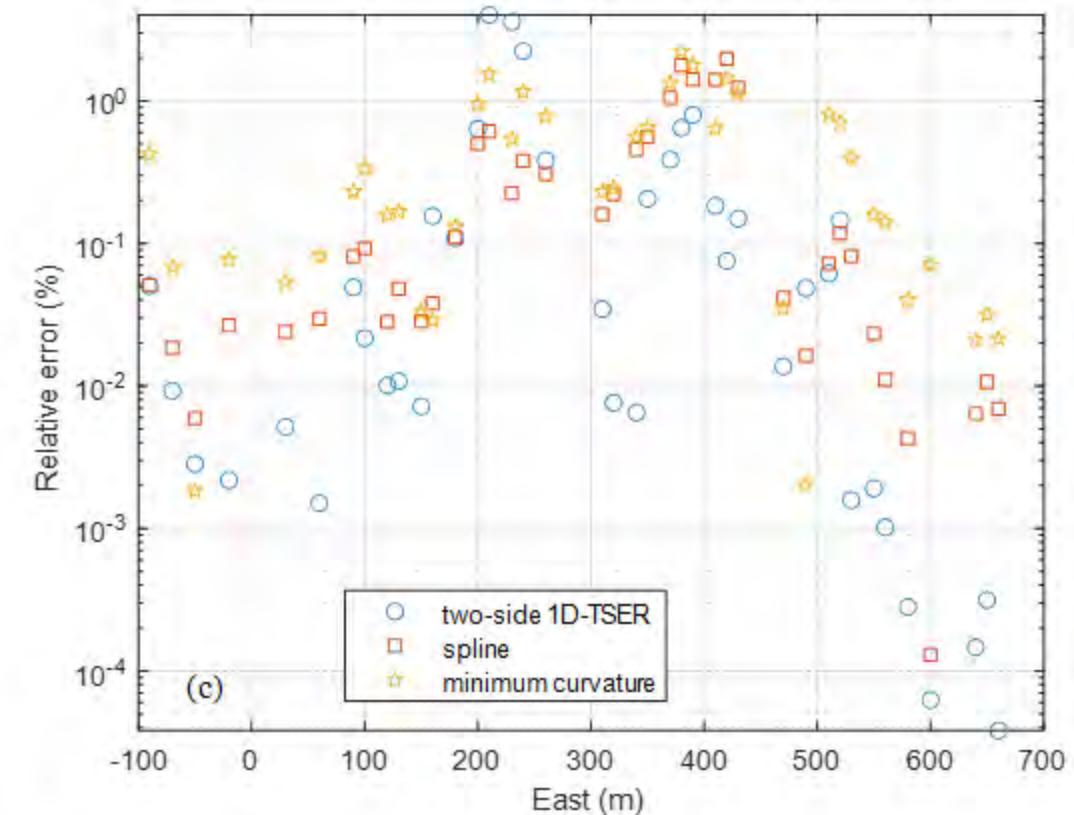
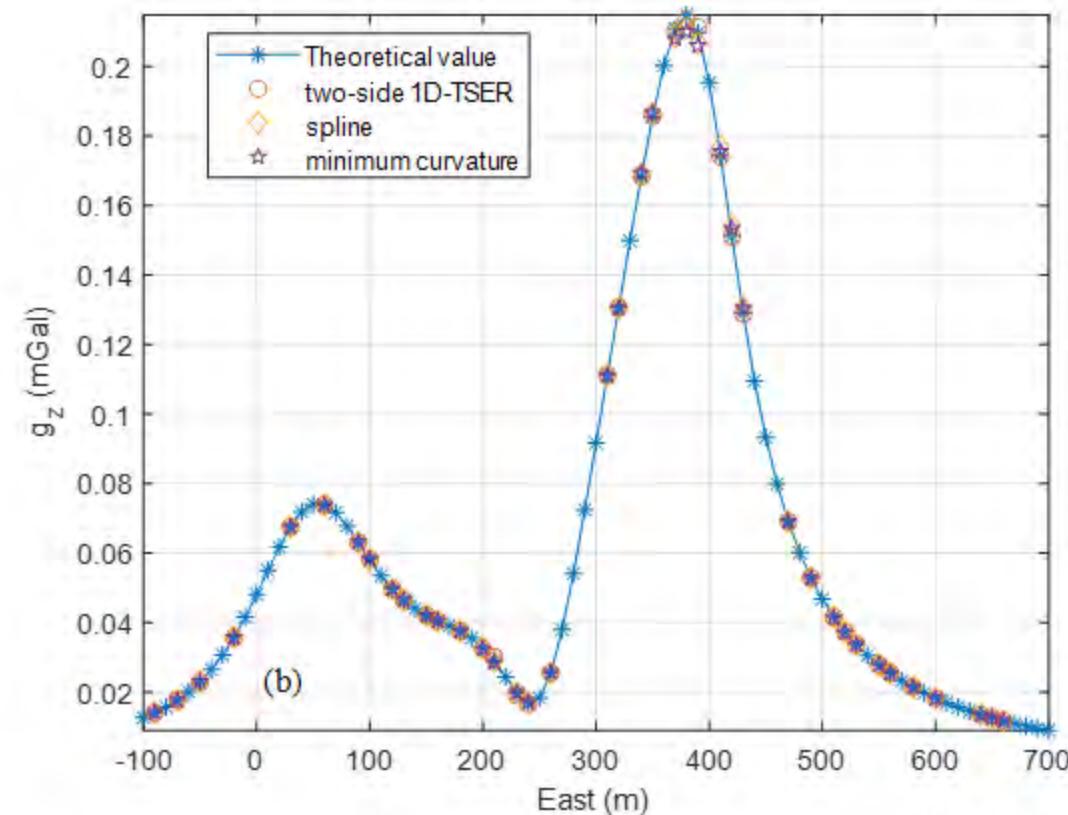
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法



2.网格化

■ 2.4 泰勒定理法



RMS:

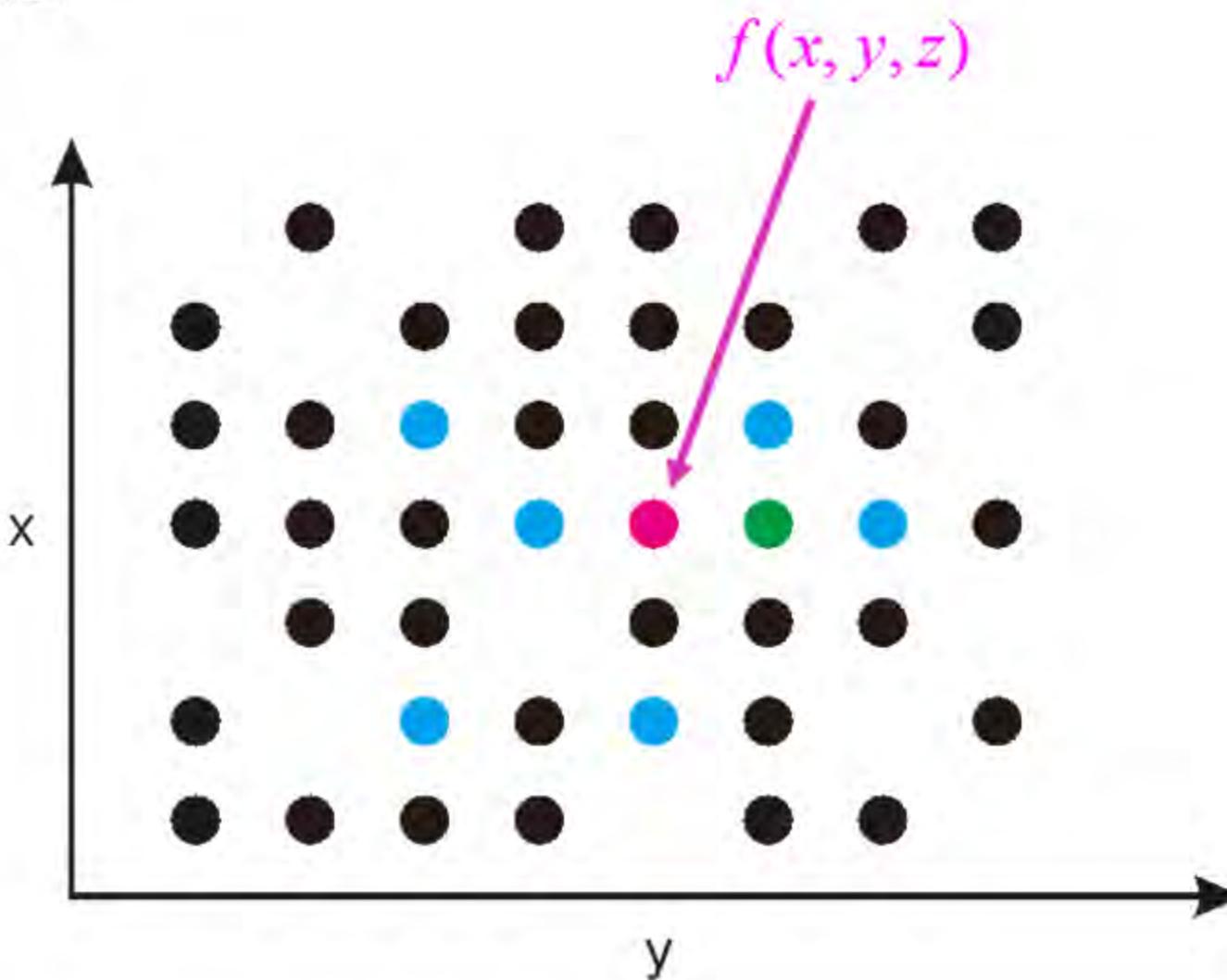
Two-side TSE 4.41×10^{-4}

Spline 1.09×10^{-3}

MC 1.19×10^{-3}

2.网格化

■ 2.4 泰勒定理法



2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法

$$\begin{pmatrix} \pm\Delta x_1 & \pm\Delta y_1 & \frac{(\pm\Delta x_1)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_1)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_1)(\pm\Delta y_1)}{2!} & \dots \\ \pm\Delta x_2 & \pm\Delta y_2 & \frac{(\pm\Delta x_2)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_2)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_2)(\pm\Delta y_2)}{2!} & \dots \\ \pm\Delta x_3 & \pm\Delta y_3 & \frac{(\pm\Delta x_3)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_3)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_3)(\pm\Delta y_3)}{2!} & \dots \\ \pm\Delta x_4 & \pm\Delta y_4 & \frac{(\pm\Delta x_4)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_4)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_4)(\pm\Delta y_4)}{2!} & \dots \\ \pm\Delta x_5 & \pm\Delta y_5 & \frac{(\pm\Delta x_5)^2}{2!} & \frac{(\pm\Delta y_5)^2}{2!} & \frac{2(\pm\Delta x_5)(\pm\Delta y_5)}{2!} & \dots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^4(x, y, z) \\ f_y^4(x, y, z) \\ f_{xx}^2(x, y, z) \\ f_{yy}^2(x, y, z) \\ f_{xy}^2(x, y, z) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x \pm \Delta x_1, y \pm \Delta y_1, z) - f(x, y, z) \\ f(x \pm \Delta x_2, y \pm \Delta y_2, z) - f(x, y, z) \\ f(x \pm \Delta x_3, y \pm \Delta y_3, z) - f(x, y, z) \\ f(x \pm \Delta x_4, y \pm \Delta y_4, z) - f(x, y, z) \\ f(x \pm \Delta x_5, y \pm \Delta y_5, z) - f(x, y, z) \\ \dots \end{pmatrix}$$

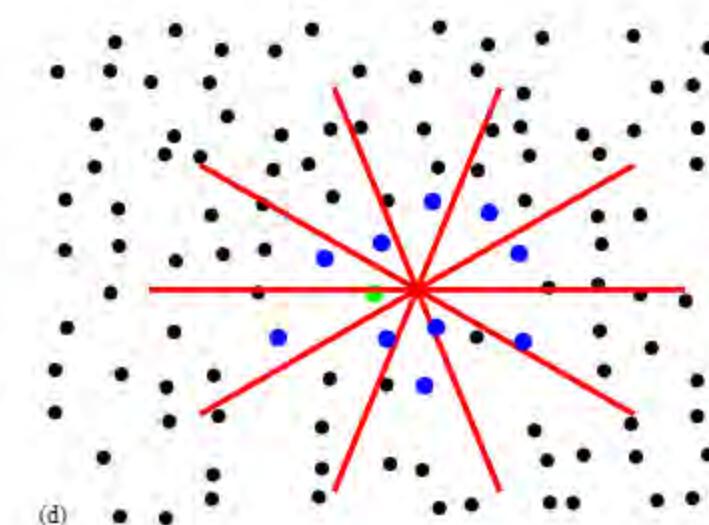
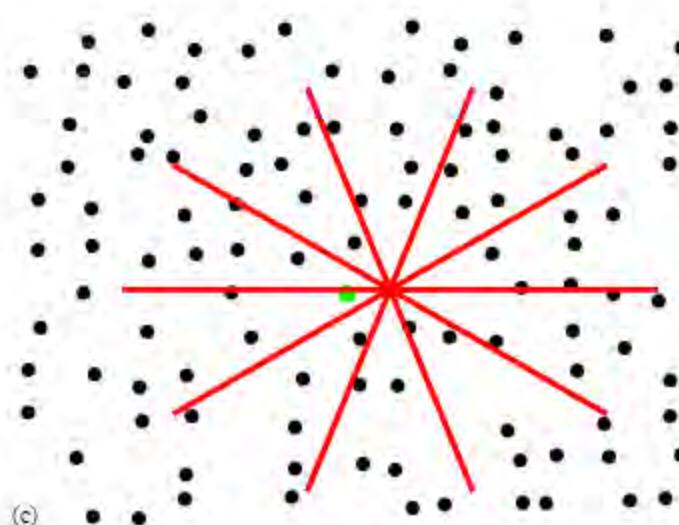
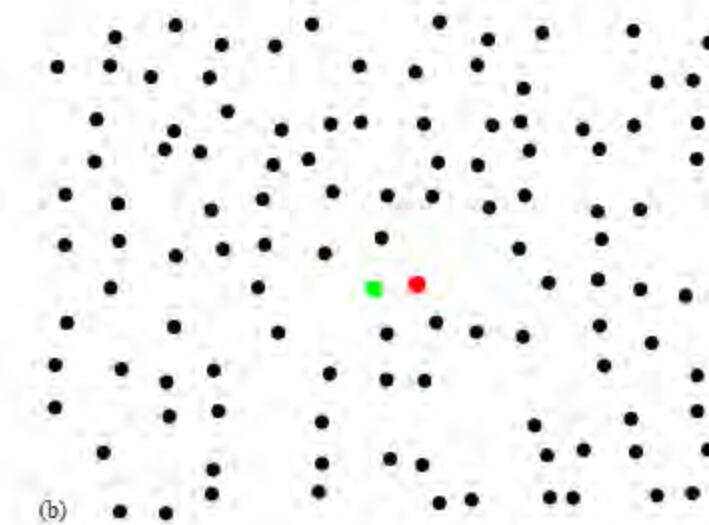
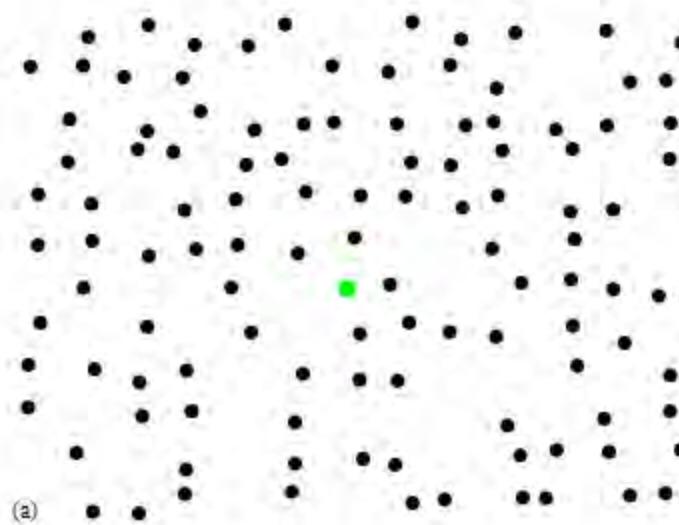
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法

$$\begin{aligned}f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z) &\approx f(x, y, z) + (\pm \Delta x) f_x^1(x, y, z) + (\pm \Delta y) f_y^1(x, y, z) \\&+ \frac{(\pm \Delta x)^2}{2!} f_{xx}^2(x, y, z) + \frac{(\pm \Delta y)^2}{2!} f_{yy}^2(x, y, z) + \frac{2(\pm \Delta x)(\pm \Delta y)}{2!} f_{xy}^2(x, y, z) \\&+ \frac{(\pm \Delta x)^3}{3!} f_{xxx}^3(x, y, z) + \frac{(\pm \Delta y)^3}{3!} f_{yyy}^3(x, y, z) \\&+ \frac{3(\pm \Delta x)^2(\pm \Delta y)}{3!} f_{xxy}^3(x, y, z) + \frac{3(\pm \Delta x)(\pm \Delta y)^2}{3!} f_{xyy}^3(x, y, z) + H.O.T.\end{aligned}$$

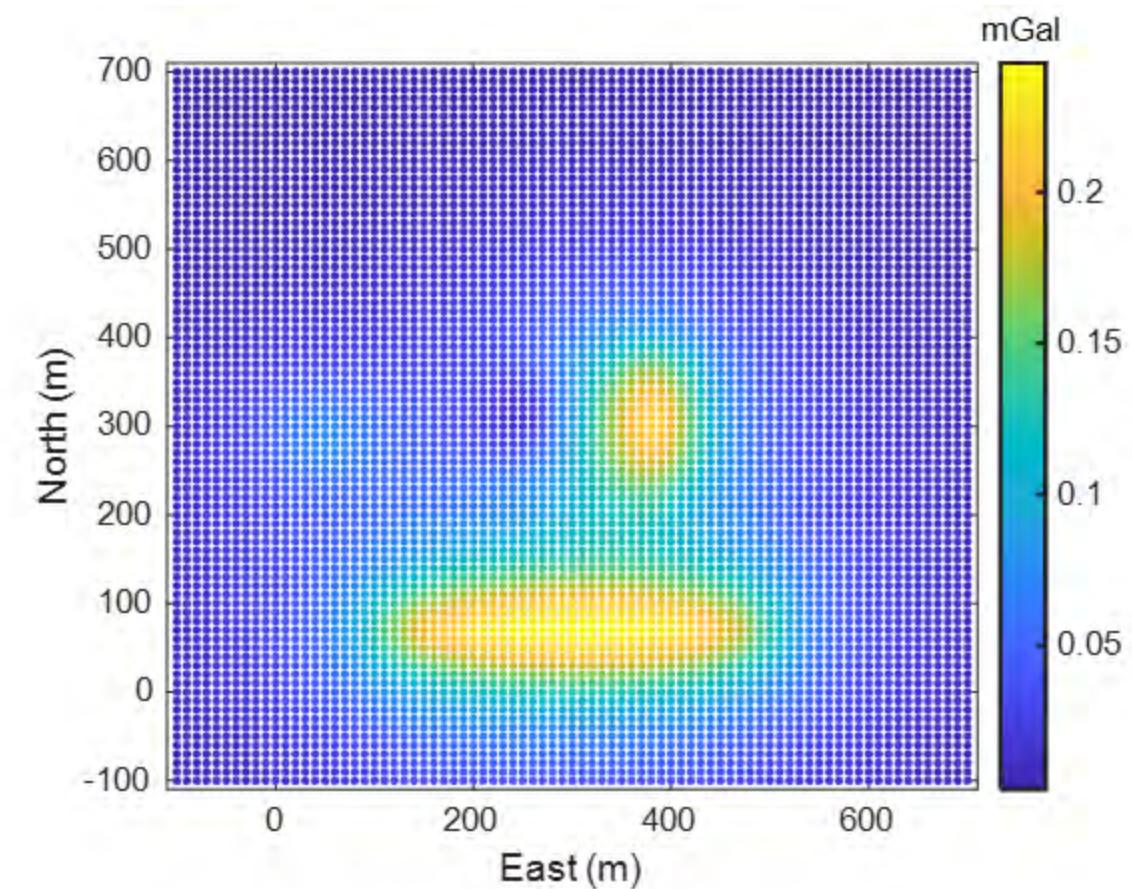
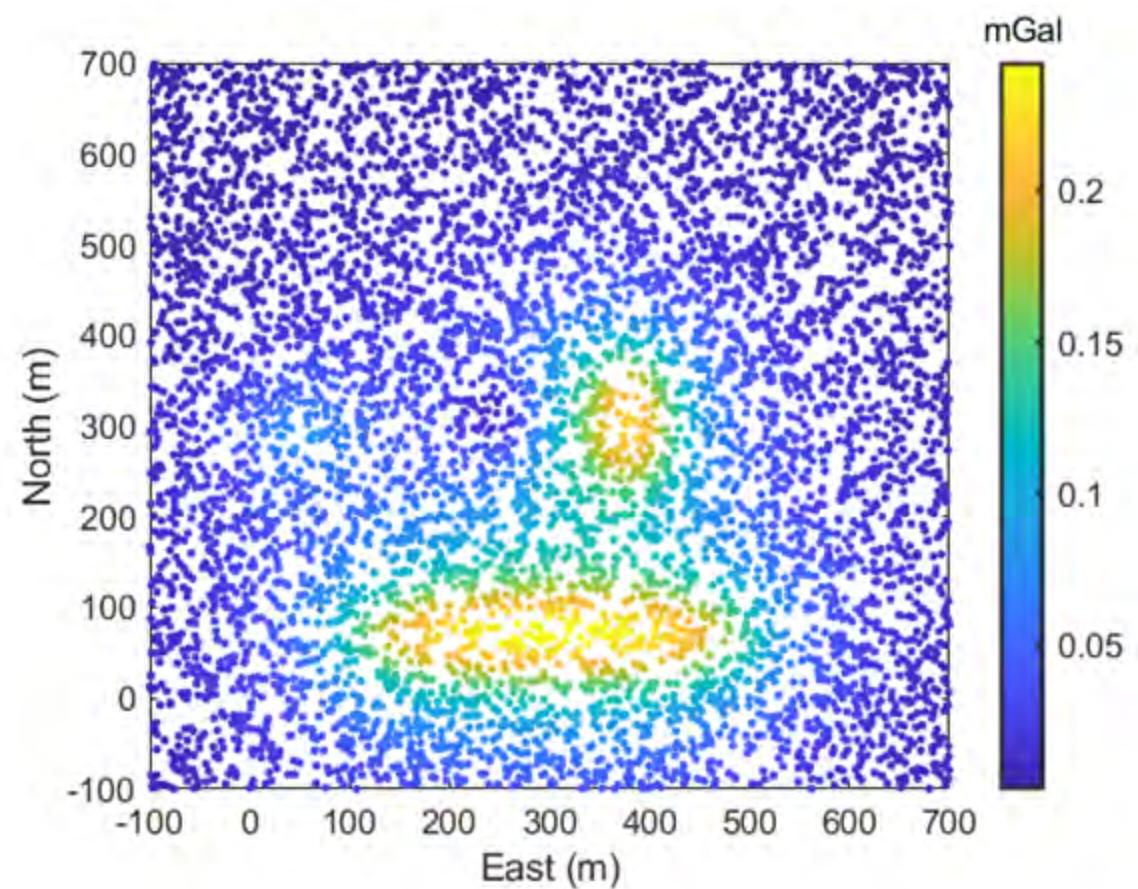
2.网格化

■ 2.4 泰勒定理法



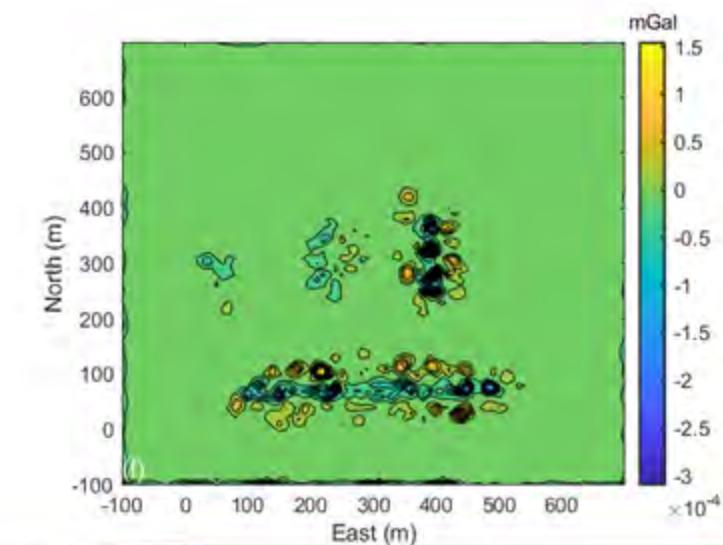
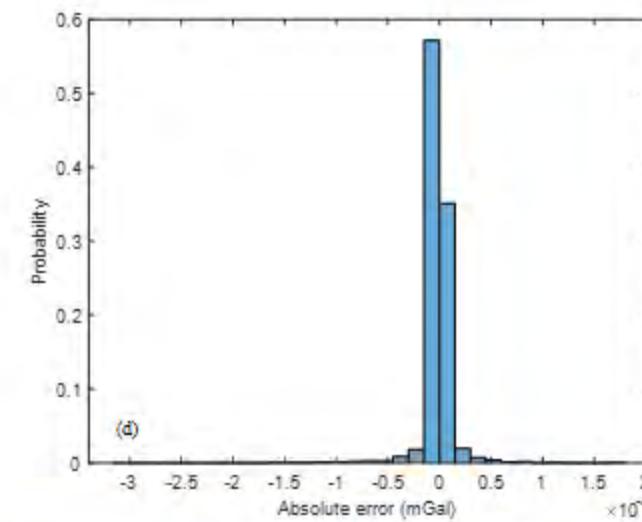
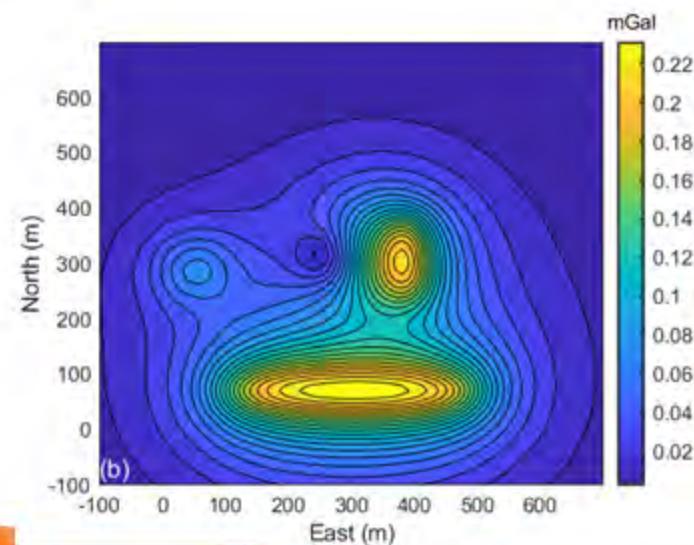
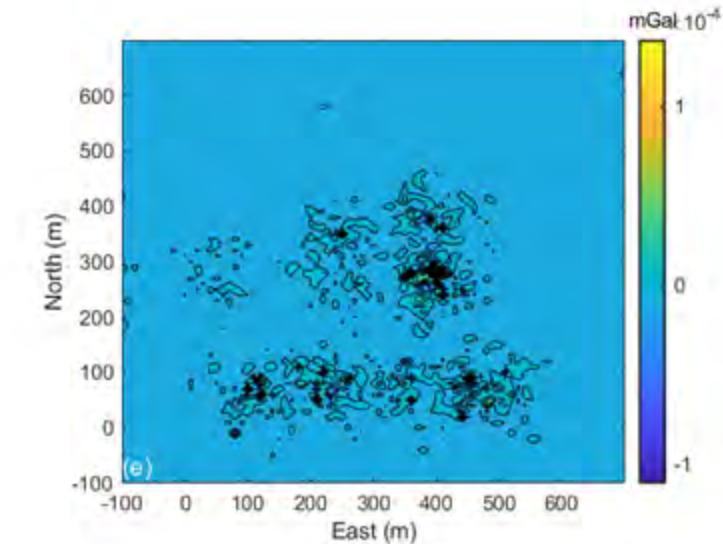
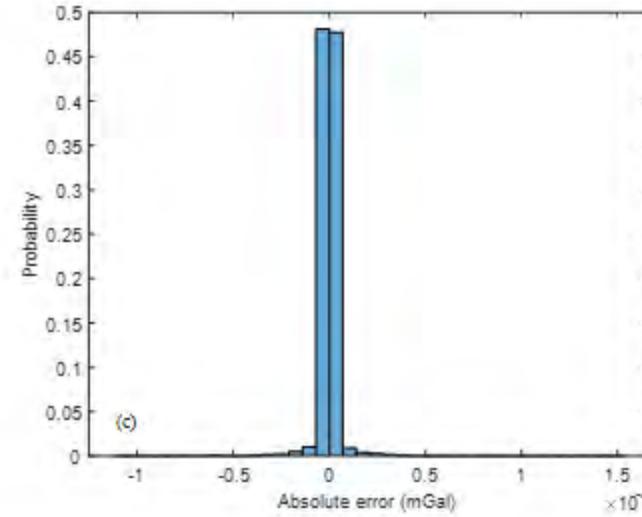
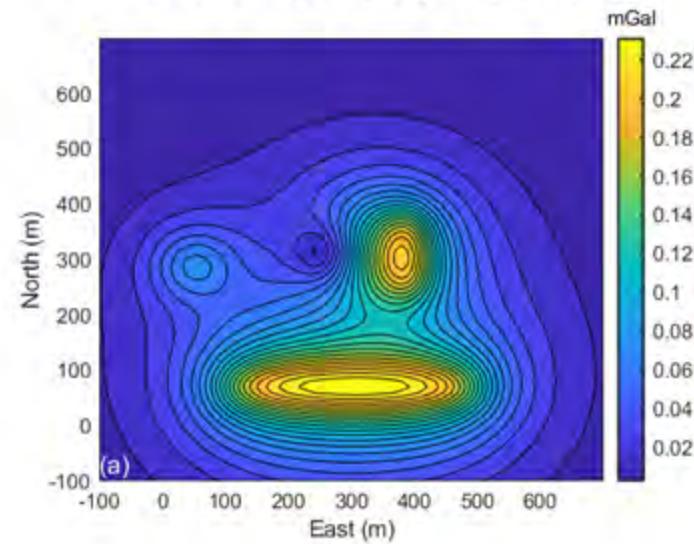
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法



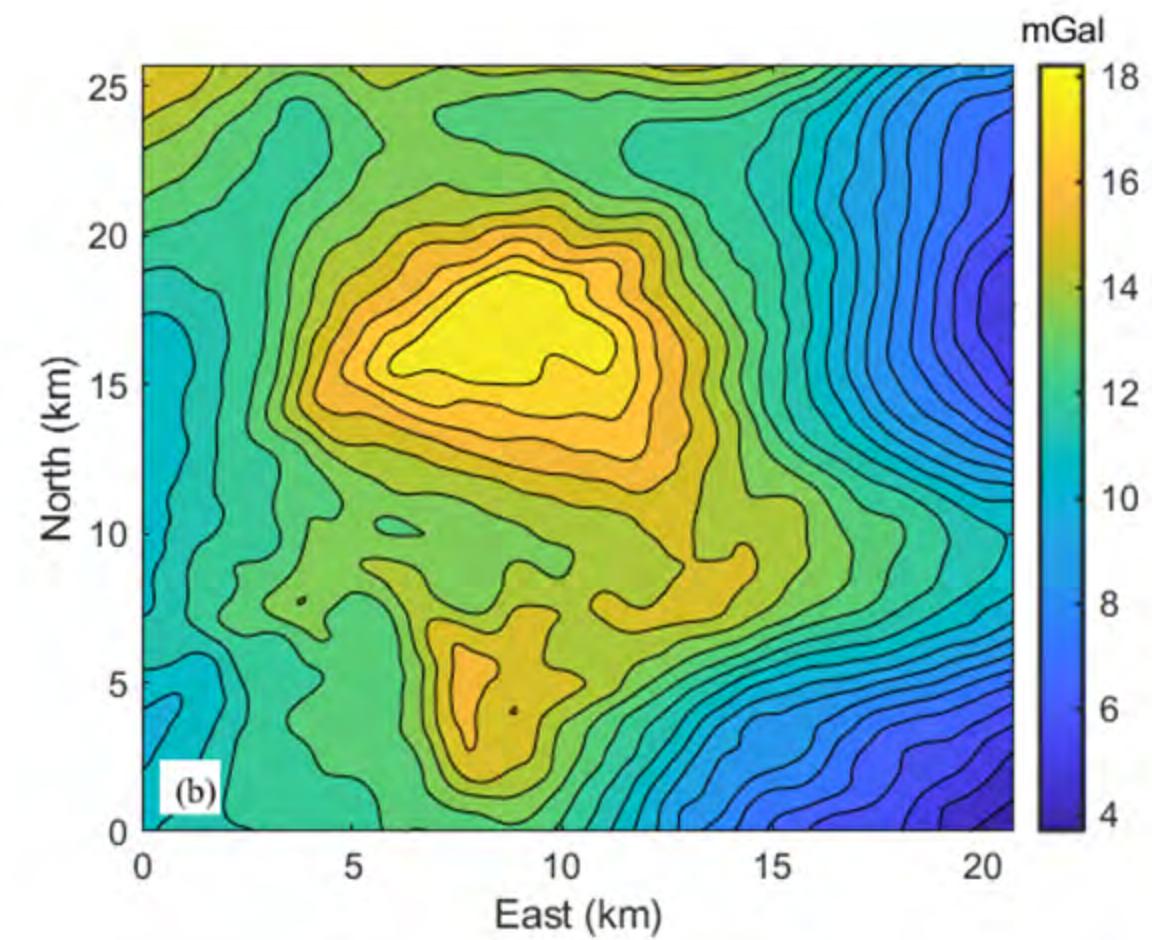
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法



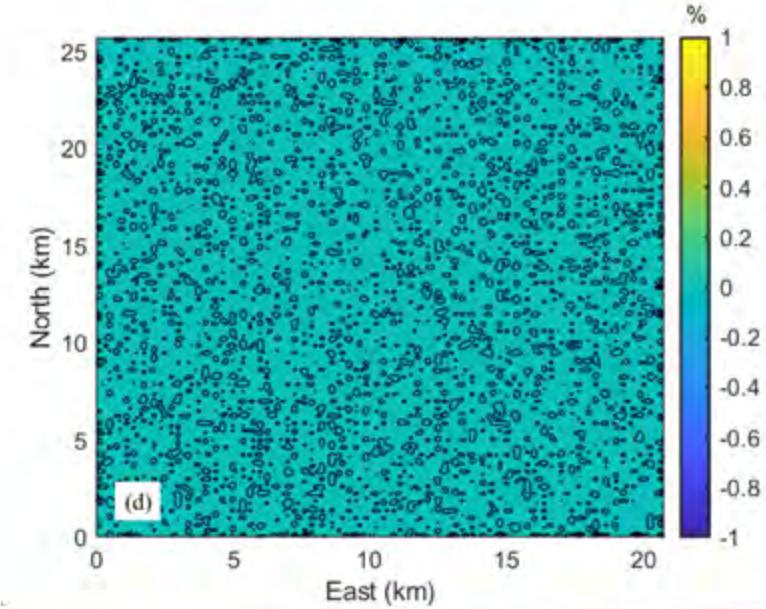
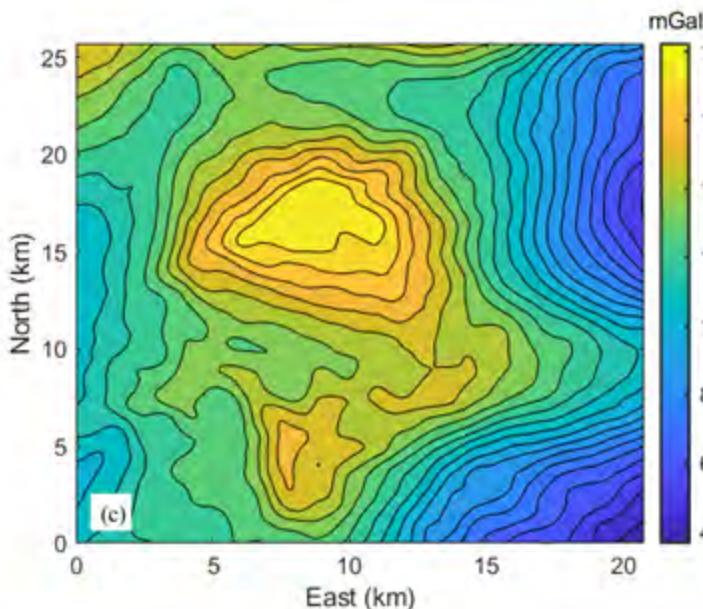
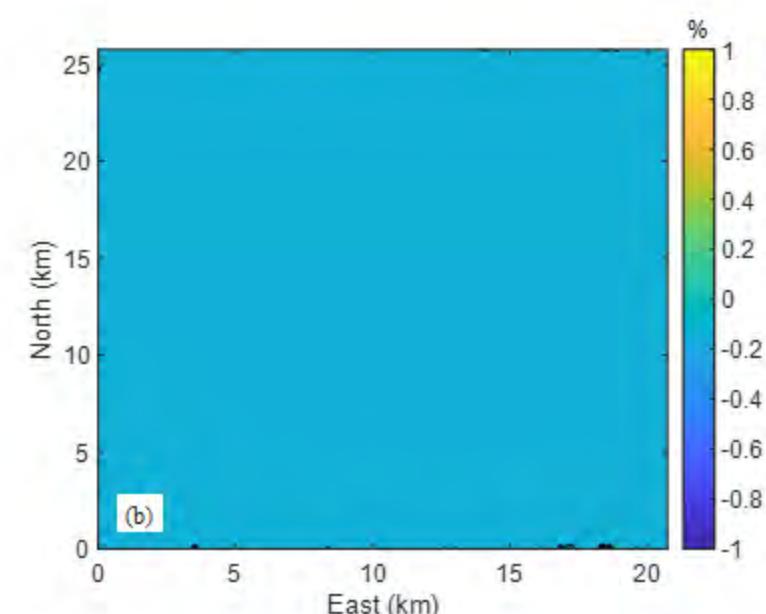
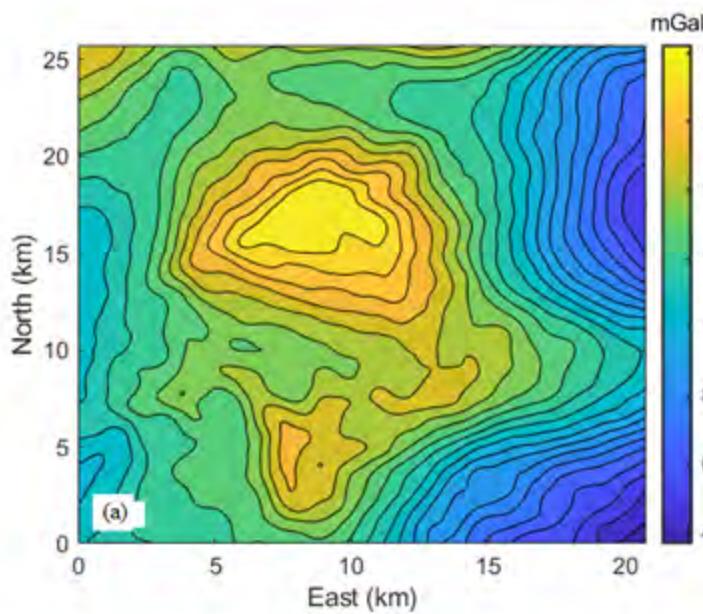
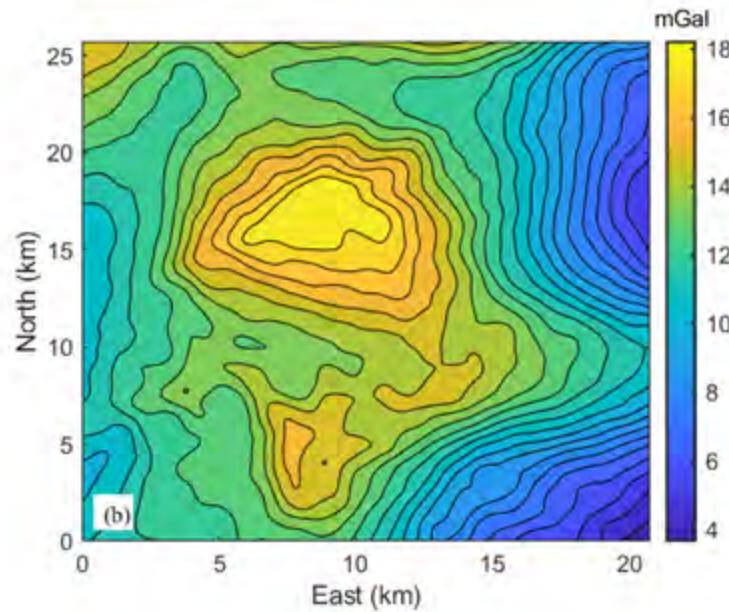
2. 网格化

■ 2.4 泰勒定理法



2.网格化

■ 2.4 泰勒定理法



目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

3. 平滑（去噪）

为了消除重力野外观测误差相对测量结果进行各种校正时引进的误差，在进行重力异常解释前，首先要对异常曲线进行平滑，平滑还可以消去浅部的干扰。

- a) 背景干扰等造成的突跳点；
- b) 校正计算的误差造成的突跳点；
- c) 局部的随机干扰造成的畸变点；

3. 平滑（去噪）

尽管重力测量和测量结果的各项校正误差对异常曲线产生影响，但是，并不改变重力异常曲线变化的基本趋势。在一般情况下，这个趋势可以用一个多项式来表示。由这个多项式所求得的异常应尽可能反映实测异常的变化趋势，而且，公式所计算的异常和原始异常不应该出现较大的偏差。重力异常平滑公式就是基于这种思想导出的。

3. 平滑（去噪）

■ 徒手平滑



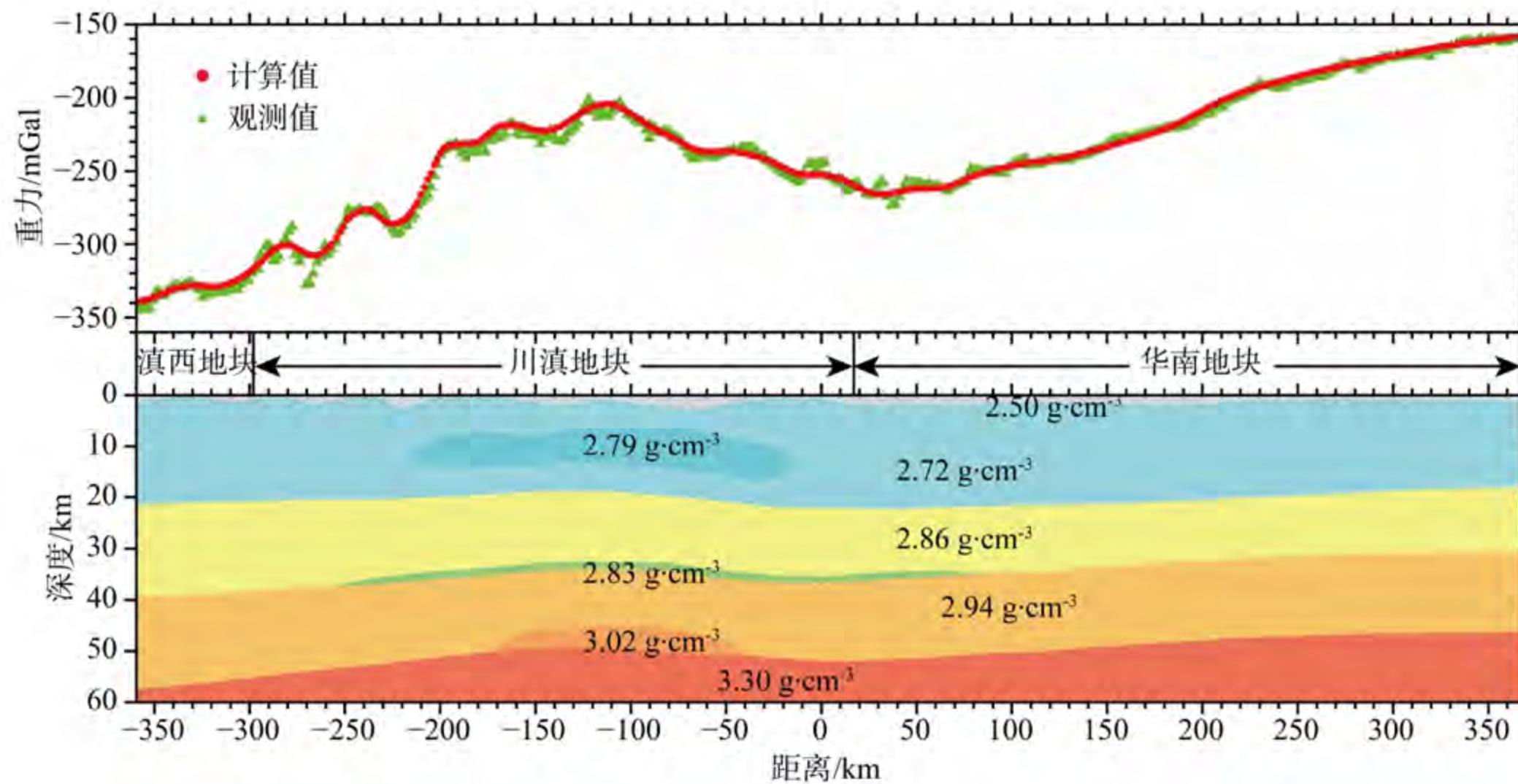
3. 平滑（去噪）

■ 徒手平滑

- ✓ 依据重力异常在剖面上的变化具有一定的连续、渐变的规律，徒手平滑某些明显的突变点。
- ✓ 要求是平滑前后各点的重力异常值的偏差不应超过实测异常的均方误差，即被平滑掉的只应该是误差。

3. 平滑 (去噪)

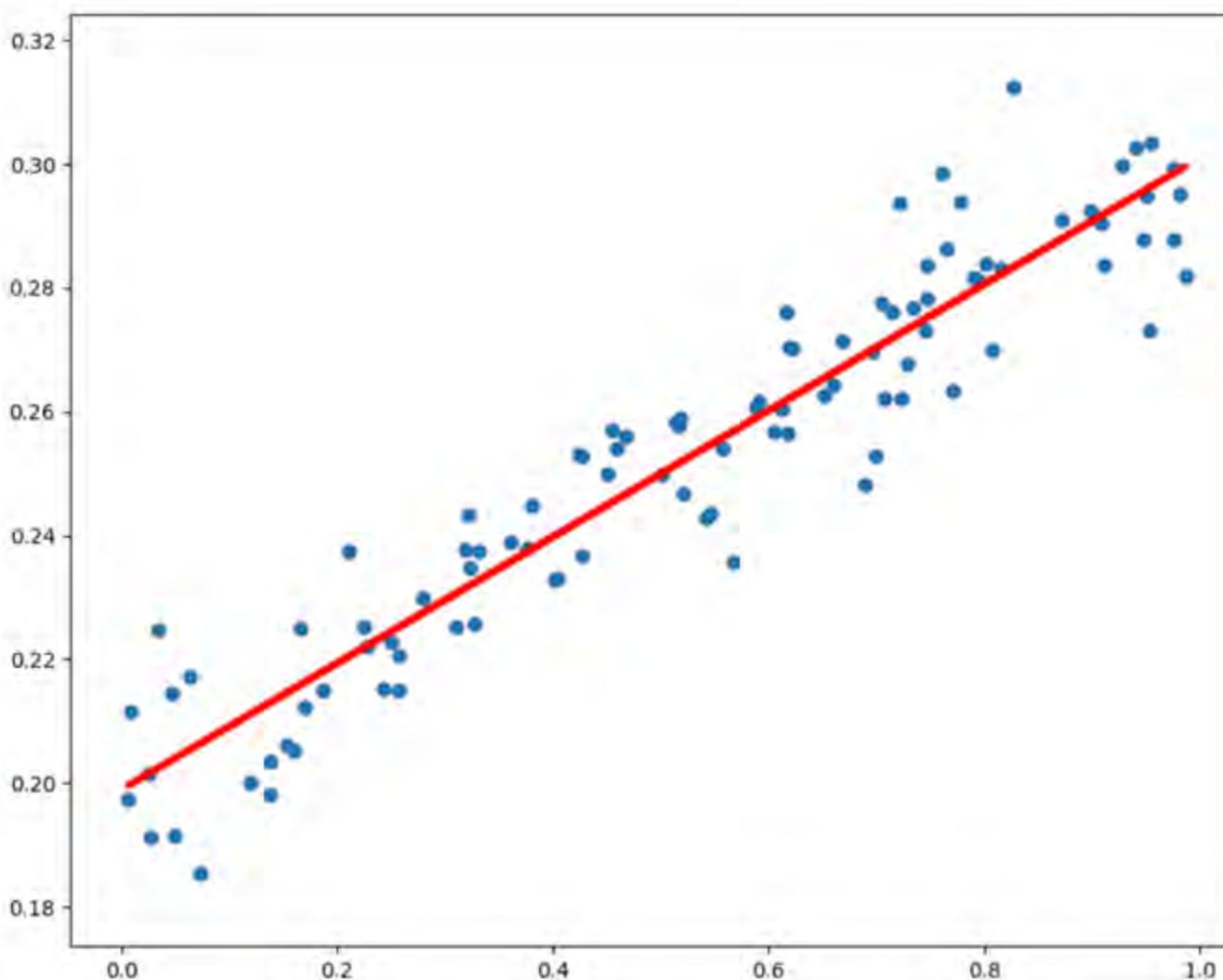
■ 徒手平滑



3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x$$

目标函数

$$\delta = \sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$$

对 a_0 和 a_1 求导，然后令其为 0，得 a_0 和 a_1

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] x_i = 0$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式

$$\sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)] x_i = 0$$



$$(2m+1)a_0 + a_1 \sum_{i=-m}^m x_i = \sum_{i=-m}^m g(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^m x_i \\ \sum_{i=-m}^m x_i & \sum_{i=-m}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^m g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^m x_i g(x_i) \end{bmatrix}$$

一般性求解公式

$$a_0 \sum_{i=-m}^m x_i + a_1 \sum_{i=-m}^m x_i^2 = \sum_{i=-m}^m x_i g(x_i)$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式

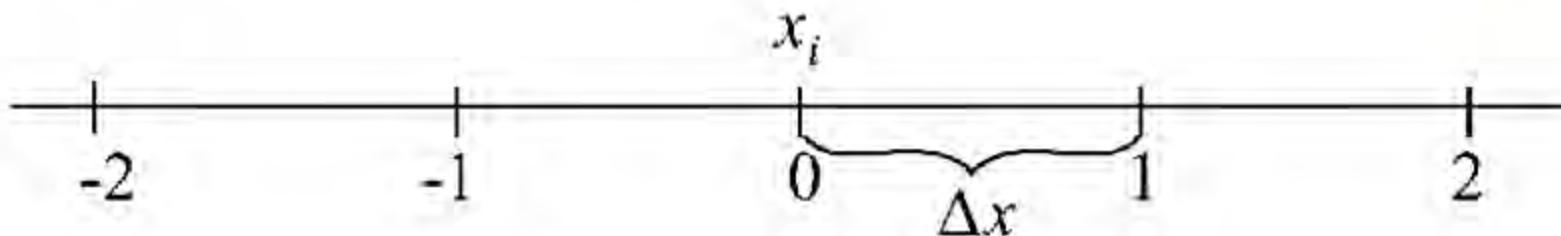
$$\begin{cases} a_0(2m+1) = \sum_{i=-m}^m g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^m x_i \\ a_0 \sum_{i=-m}^m x_i = \sum_{i=-m}^m x_i g(x_i) - a_1 \sum_{i=-m}^m x_i^2 \end{cases}$$

$$\frac{(2m+1) \sum_{i=-m}^m x_i g(x_i) - \sum_{i=-m}^m x_i \sum_{i=-m}^m g(x_i)}{(2m+1) \sum_{i=-m}^m x_i^2 - \sum_{i=-m}^m x_i \sum_{i=-m}^m x_i} = a_1$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



若 x_i 以剖面上的点距为单位，即 $\Delta x=1$ 取点的方式，则上式中的 $x_i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm m$ ，代入式可解出系数 a_0 和 a_1 ：

$$a_0 = \frac{\sum_{i=-m}^m g(x_i)}{2m+1}, \quad a_1 = \frac{\sum_{i=-m}^m x_i g(x_i)}{\sum_{i=-m}^m x_i^2}$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式

平滑值

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x$$

目标函数

$$\delta = \sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i - g(x_i)]^2 = \min$$

对 a_0 和 a_1 求导，然后令其为0，得 a_0 和 a_1

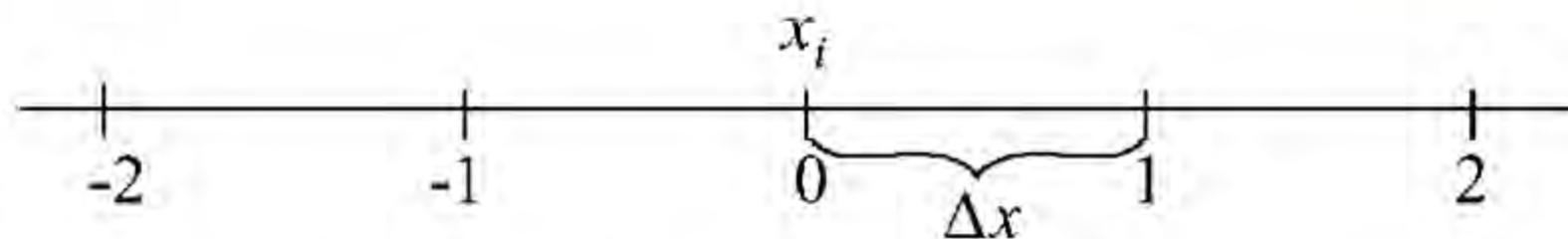
$$a_0 = \frac{\sum_{i=-m}^m g(x_i)}{2m+1}, \quad a_1 = \frac{\sum_{i=-m}^m x_i g(x_i)}{\sum_{i=-m}^m x_i^2}$$

$x=0$ 时， $\bar{g}(0) = a_0$

3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

线性平滑公式



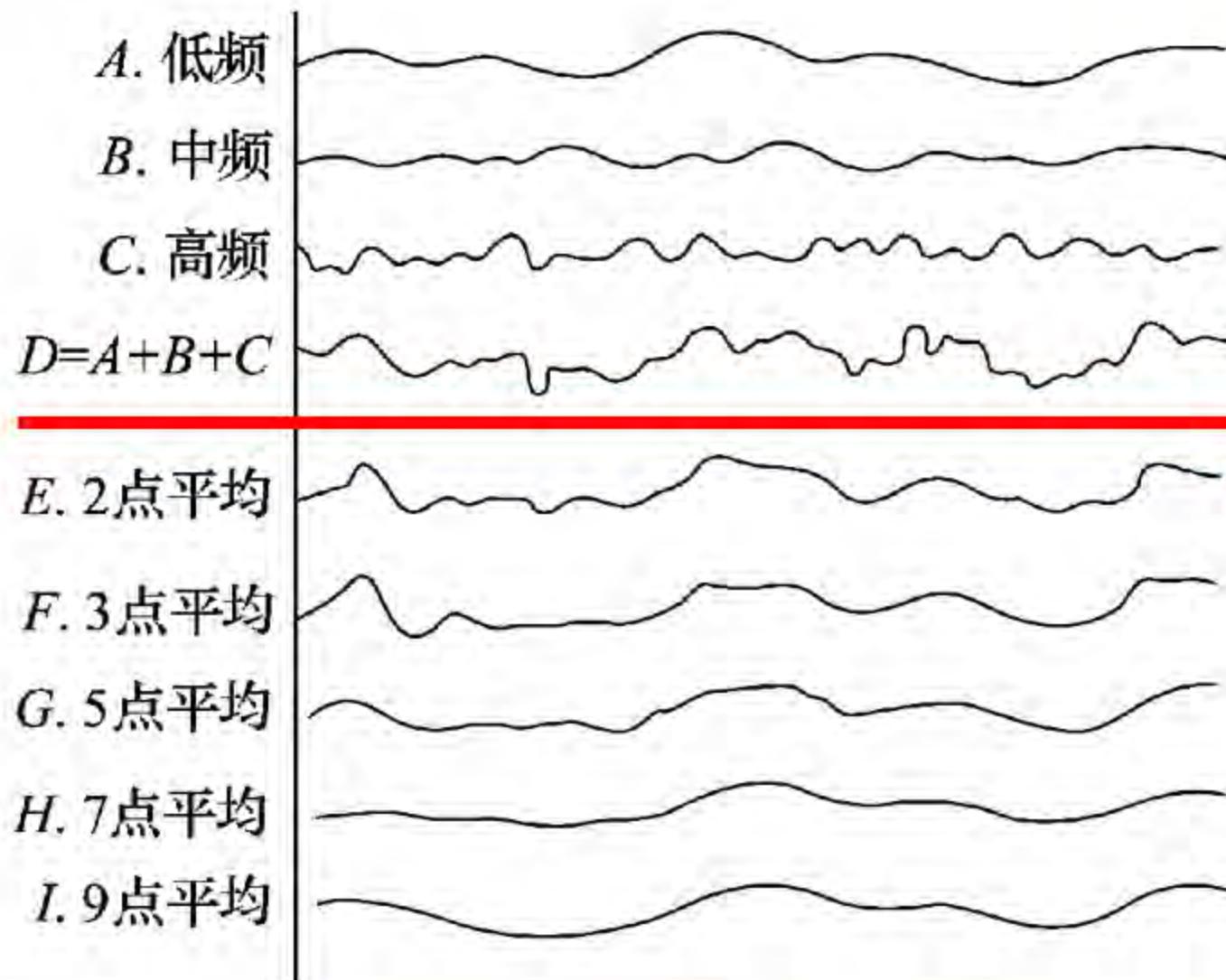
由此可见，某一点的平滑值，实际上就是在剖面上以该点为中心取奇数点的算术平均值，当 $m=\pm 1$ 时，将得到**三点平滑公式**：

三点平滑公式为： $\bar{g}(0) = 1/3[g(-1) + g(0) + g(1)]$

3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

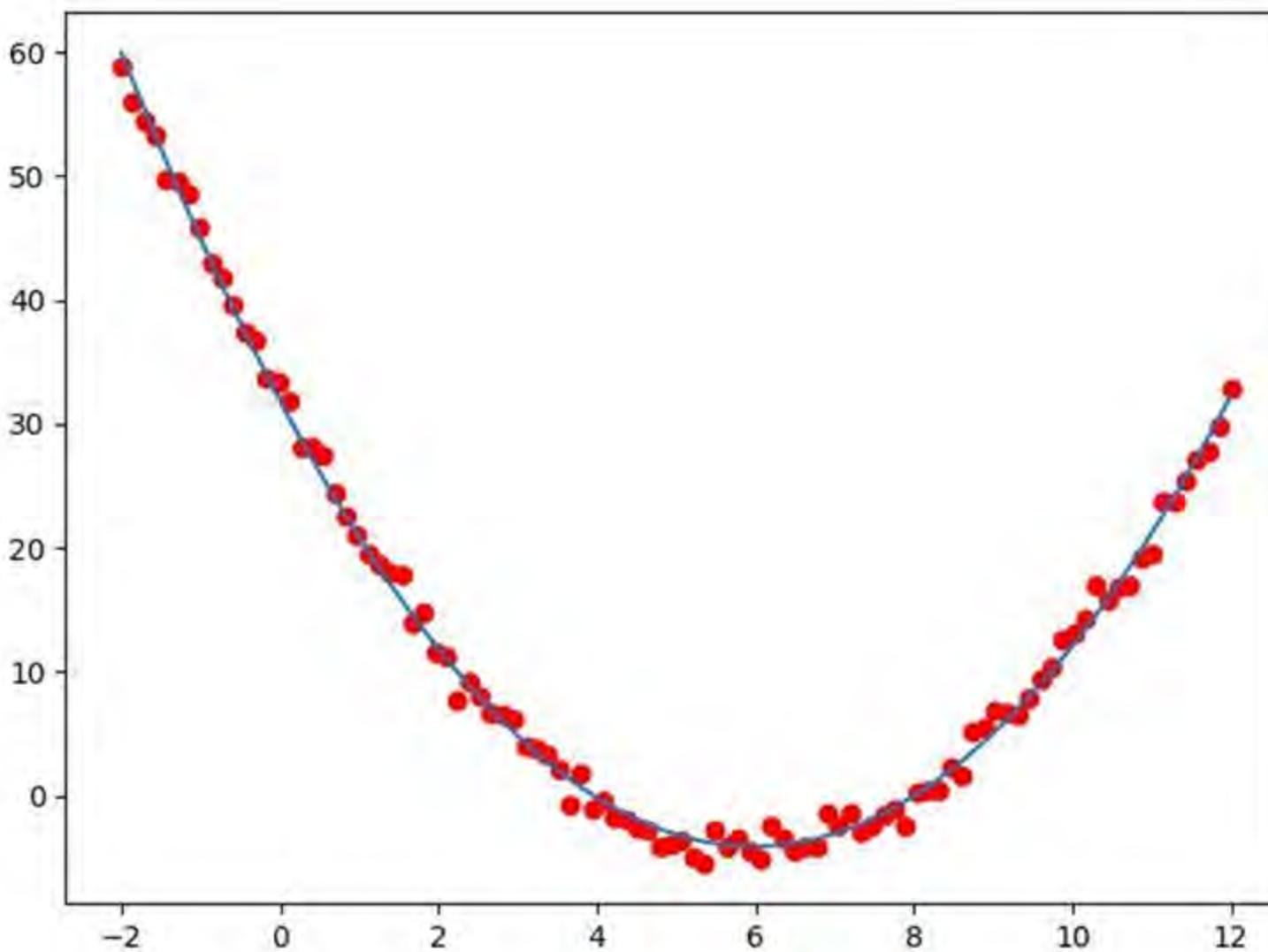
线性平滑公式



3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式



3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式

若异常曲线在一定范围内可视为二次曲线时，则在这个范围内，平滑后的异常曲线可以用二次曲线方程来表示：

$$\bar{g}(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$$

分别对 a_0 、 a_1 、 a_2 求偏导数，并令其等于零可求系数 a_0 、 a_1 、 a_2

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\delta = \sum_{i=-m}^m [\bar{g}(x_i) - g(x_i)]^2 = \sum_{i=-m}^m [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - g(x_i)]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & \sum_{i=-m}^m x_i & \sum_{i=-m}^m x_i^2 \\ \sum_{i=-m}^m x_i & \sum_{i=-m}^m x_i^2 & \sum_{i=-m}^m x_i^3 \\ \sum_{i=-m}^m x_i^2 & \sum_{i=-m}^m x_i^3 & \sum_{i=-m}^m x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=-m}^m g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^m x_i g(x_i) \\ \sum_{i=-m}^m x_i^2 g(x_i) \end{bmatrix}$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式

$$a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^m x_j^4 \sum_{i=-m}^m g_i - \sum_{j=-m}^m x_j^2 \sum_{i=-m}^m x_i^2 g_i}{(2m+1) \sum_{i=-m}^m x_i^4 - 2 \left(\sum_{i=-m}^m x_i^2 \right)^2}$$

$$\bar{g}(0) = a_0 = \frac{\sum_{j=-m}^m x_j^4 \sum_{i=-m}^m g_i - \sum_{j=-m}^m x_j^2 \sum_{i=-m}^m x_i^2 g_i}{(2m+1) \sum_{i=-m}^m x_i^4 - 2 \left(\sum_{i=-m}^m x_i^2 \right)^2}$$

3. 平滑（去噪）

■ 剖面异常平滑

二次平滑公式

取 $m = 2$, 得到5点平滑公式

$$\bar{g}(0) = \frac{1}{35} [17g(0) + 12(g(-1) + g(1)) - 3(g(-2) + g(2))]$$

取 $m = 3$, 得到7点平滑公式

$$\bar{g}(0) = \frac{1}{21} \left[7g(0) + 6(g(-1) + g(1)) + 3(g(-2) + g(2)) \right. \\ \left. - 2(g(-3) + g(3)) \right]$$

取 $m = 4$, 得到9点平滑公式

$$\bar{g}(0) = \frac{1}{231} \left[59g(0) + 54(g(-1) + g(1)) + 39(g(-2) + g(2)) \right. \\ \left. + 14(g(-3) + g(3)) - 21(g(-4) + g(4)) \right]$$

3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

n次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\delta = \sum_{i=1}^M [\bar{g}(x_i) - g(x_i)]^2$$

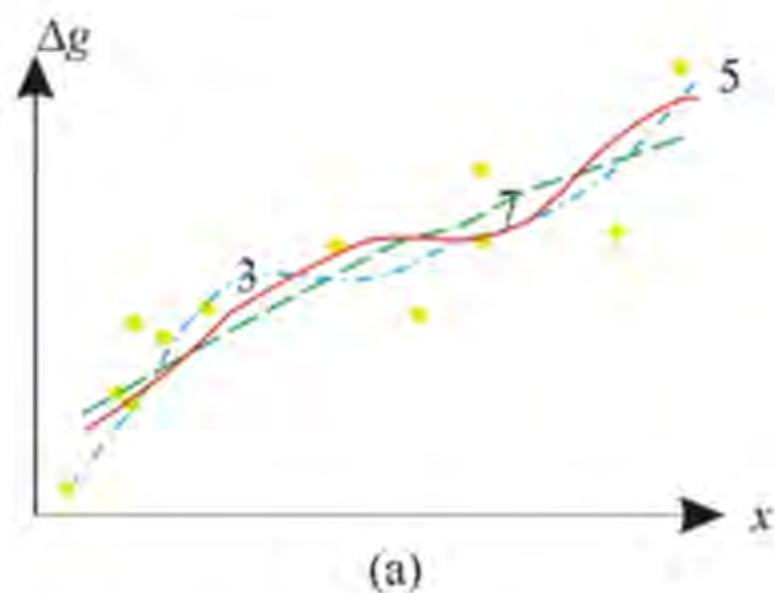
$$= \sum_{i=1}^M [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - g(x_i)]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial \delta}{\partial a_n} = 0$$

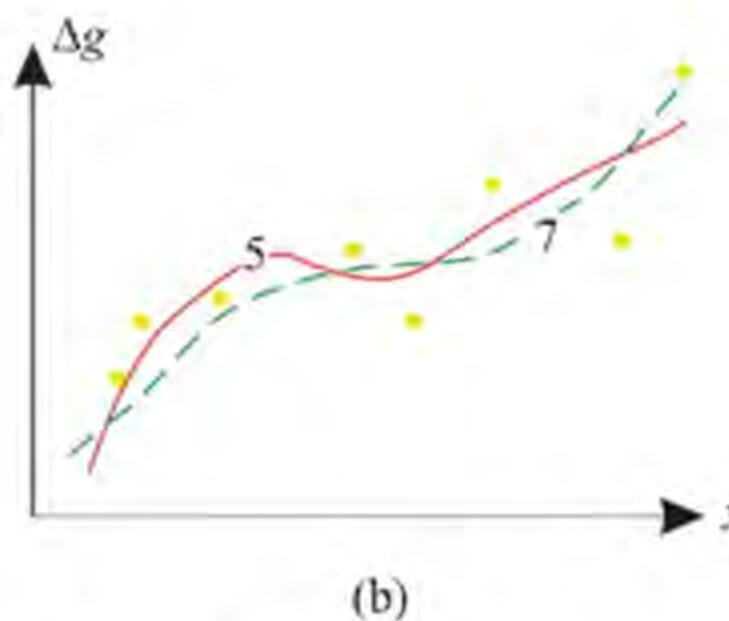
3. 平滑 (去噪)

■ 剖面异常平滑

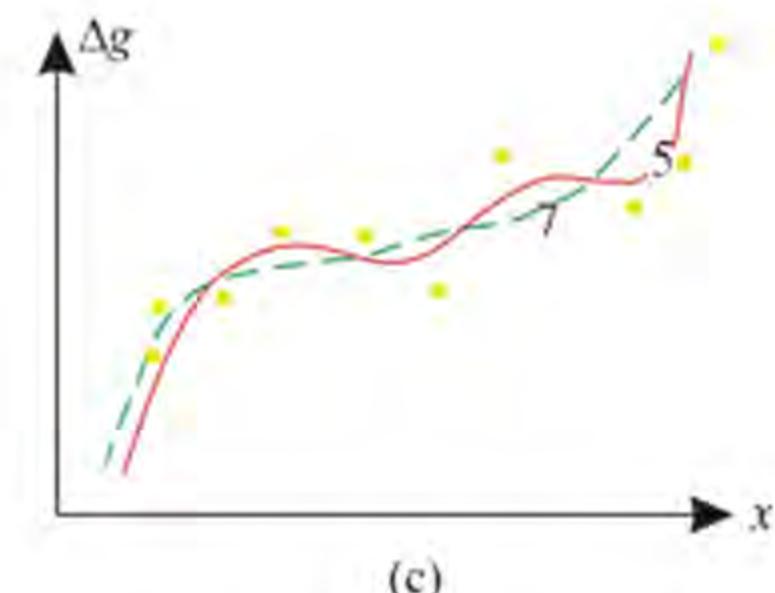
区分曲线是几点平滑结果



不同点数的线性平滑



不同点数的二次平滑



不同点数的三次平滑

3. 平滑 (去噪)

■ 平面异常平滑

线性平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$\delta = \sum_{i=1}^M [\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^M [a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - g(x_i, y_i)]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0$$

3. 平滑 (去噪)

■ 平面异常平滑

二次平滑公式

$$\bar{g}(x) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

$$\delta = \sum_{i=1}^M [\bar{g}(x_i, y_i) - g(x_i, y_i)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^M [a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 - g(x_i, y_i)]^2$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_2} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_3} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_4} = 0, \frac{\partial \delta}{\partial a_5} = 0$$

3. 平滑 (去噪)

■平面异常平滑

然后将(1.82)式代入(1.83)式，分别对(1.83)式的 $a_{k=0,1,\dots}$ 求导数，并令其为零，这样可以得6个方程式，最后将 $x=y=-2, -1, 0, 1, 2$ 依次代入6个方程中，可得下面结果。

$$25 a_0 + 50 a_4 + 50 a_5 = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)$$

$$50 \mathbf{a}_1 = \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y}$$

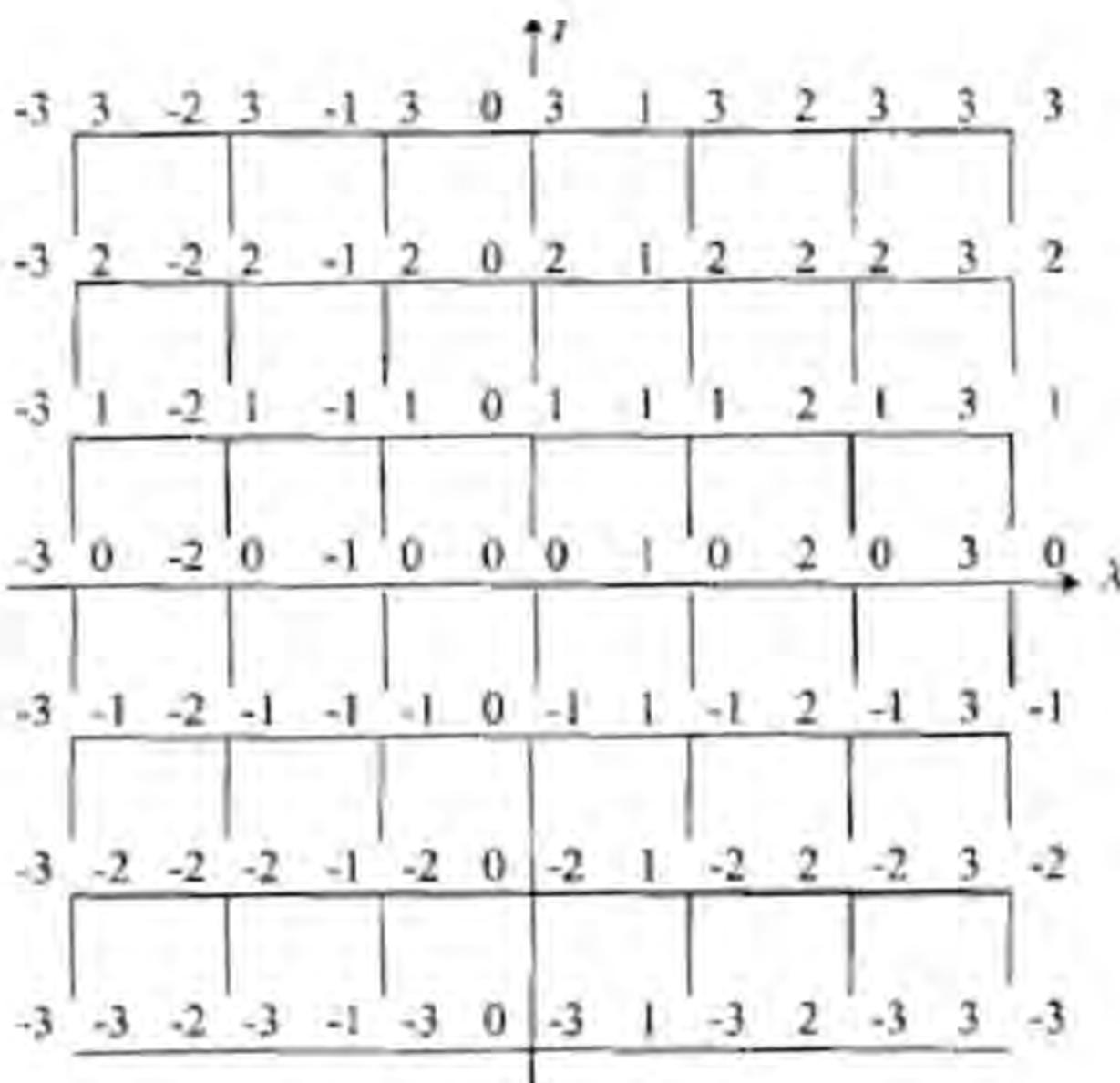
$$50 a_2 = \sum_{x_i} \sum_{y_j} g(x_i, y_j) x_i$$

$$100 \text{ } s_y = \sum_{\bar{x}_i} \sum_{\bar{y}_j} g(\bar{x}, \bar{y}) \bar{x}\bar{y}$$

$$50 a_0 + 17 a_1 + 100 a_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} g(x_i, y_j) x_i^j$$

$$50 a_3 + 100 a_4 + 170 a_5 = \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^{x-1} g(x, y) y^4$$

(1.84)



3. 平滑 (去噪)

■ 平面异常平滑

解上式的联立方程得：

$$35 a_0 = \sum_{-2}^2 \sum_{-2}^2 \left[\frac{27}{5} - x^2 - y^2 \right] g(x, y)$$

故 $(0, 0)$ 点的圆滑值为：

$$a_0 = \frac{1}{35} \cdot \sum_{-2}^2 \sum_{-2}^2 \left[\frac{27}{5} - x^2 - y^2 \right] g(x, y)$$

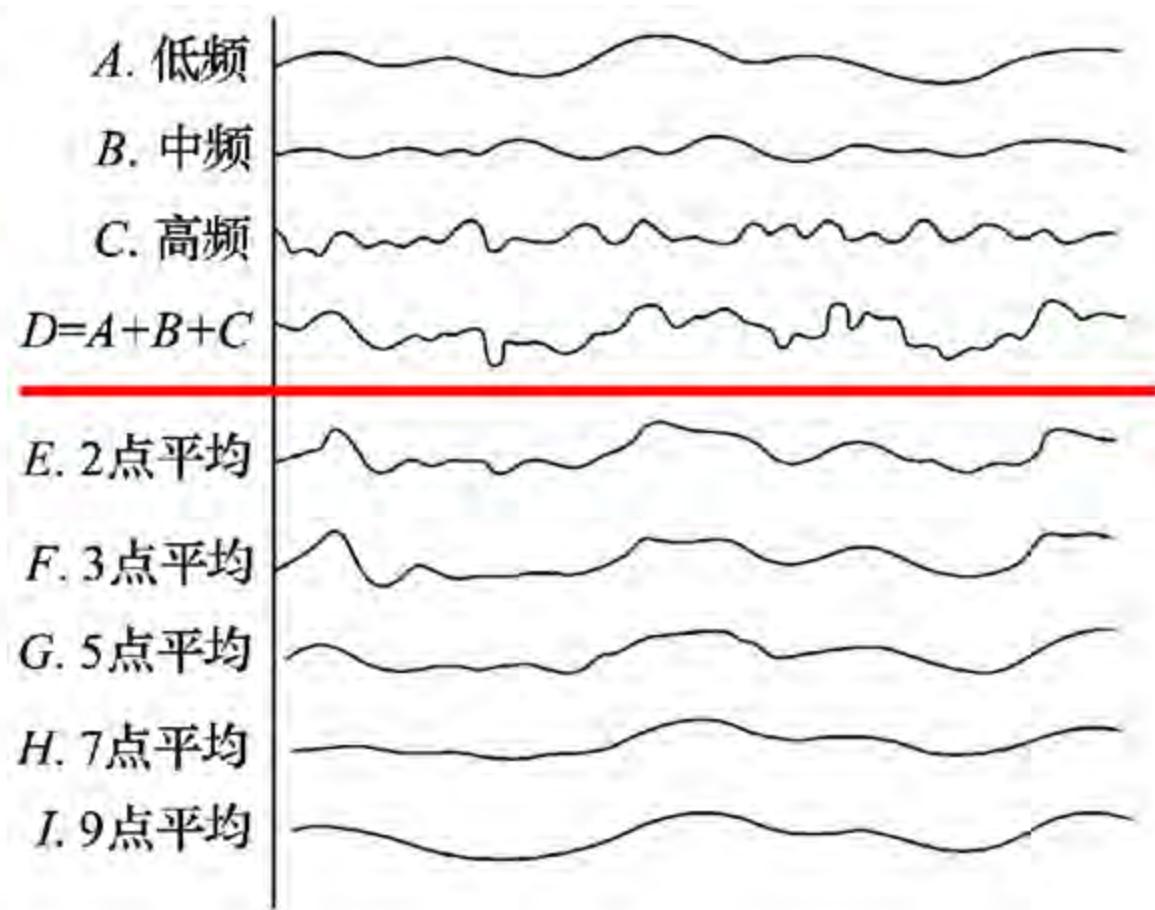
将等式右面的 x, y 的相应值代入，整理得：

$$\begin{aligned} \bar{g}(0, 0) = & \frac{1}{35} \left\{ \left(\frac{27}{5} - 8 \right) [g(2, 2) + g(2, -2) + g(-2, 2) + g(-2, -2)] \right. \\ & + \left(\frac{27}{5} - 5 \right) [g(2, 1) + g(2, -1) + g(-2, 1) + g(1, 2) \\ & + g(-1, 2) + g(1, -2) + g(-2, -1) + g(-1, -2)] \\ & + \left(\frac{27}{5} - 2 \right) [g(1, 1) + g(-1, 1) + g(1, -1) + g(-1, -1)] \\ & + \left(\frac{27}{5} - 4 \right) [g(2, 0) + g(-2, 0) + g(0, 2) + g(0, -2)] \\ & + \left(\frac{27}{5} - 1 \right) [g(1, 0) + g(0, 1) + g(-1, 0) + g(0, -1)] \\ & \left. + \left(\frac{27}{5} \right) g(0, 0) \right\} \end{aligned} \quad (1.85)$$

3. 平滑（去噪）

■ 影响平滑效果的因素

- ✓ 工作中采用几点平均最为合适，需要根据平滑目的而定。
- ✓ 一般说来，参加平均的点数越多，得出的曲线越平滑。
- ✓ 左图是线性平滑效果对比的例子。其中曲线D由低频、中频和高频曲线A、B、C合成，在此可把D看成实测异常，它由各种周期变化成分组成。E、F、G、H、J分别为取2、3、5、7、9个点作平滑后的曲线。
- ✓ 随着参加平均的点数增加，高频成分逐渐减弱，即短周期干扰逐渐消失。至7点平均时，D、C两种异常基本被平滑掉了，只保留了原来的“低频”成分。在9点平滑后，甚至比原始的“低频”成分显得还要平滑。

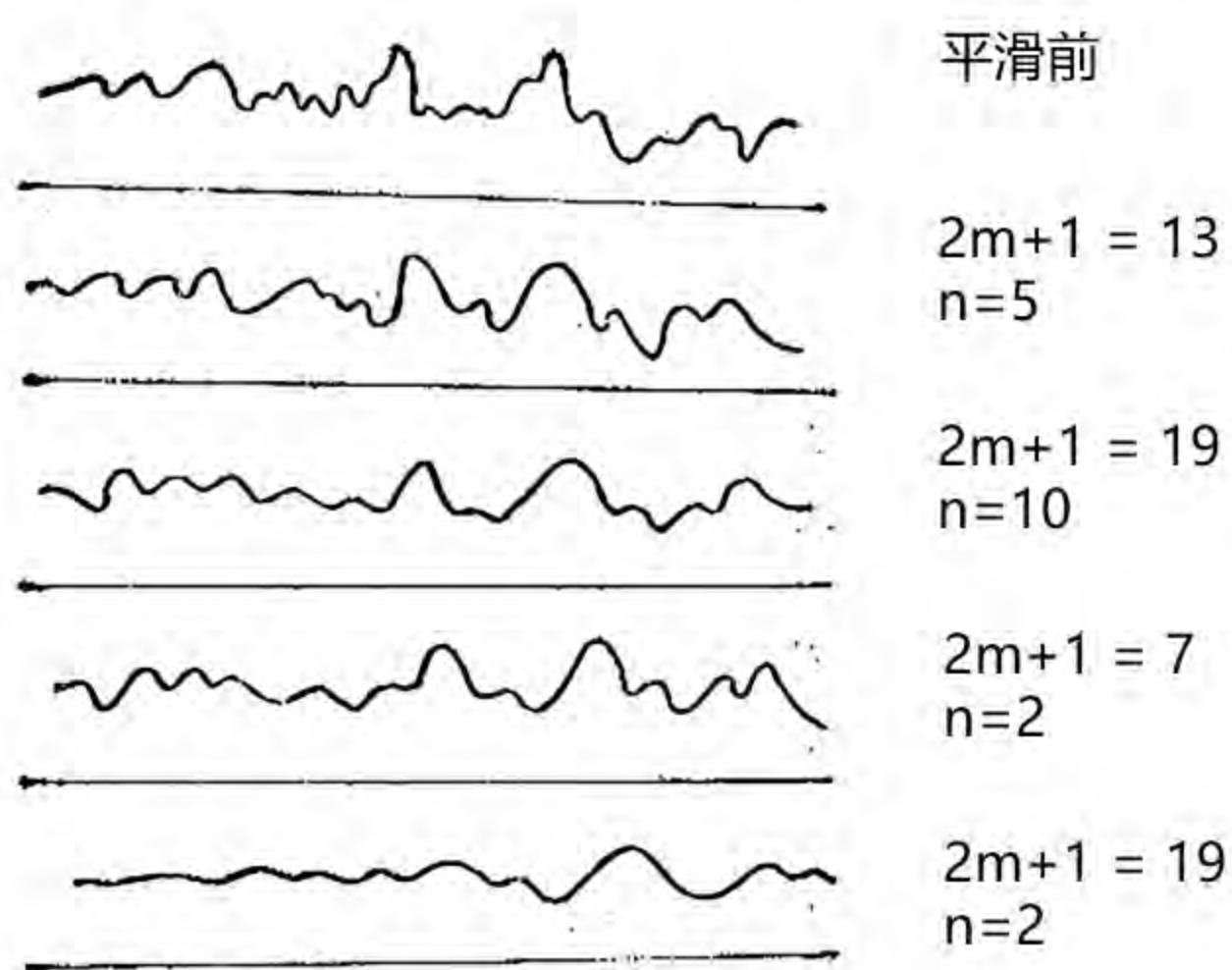


3. 平滑（去噪）

■ 影响平滑效果的因素

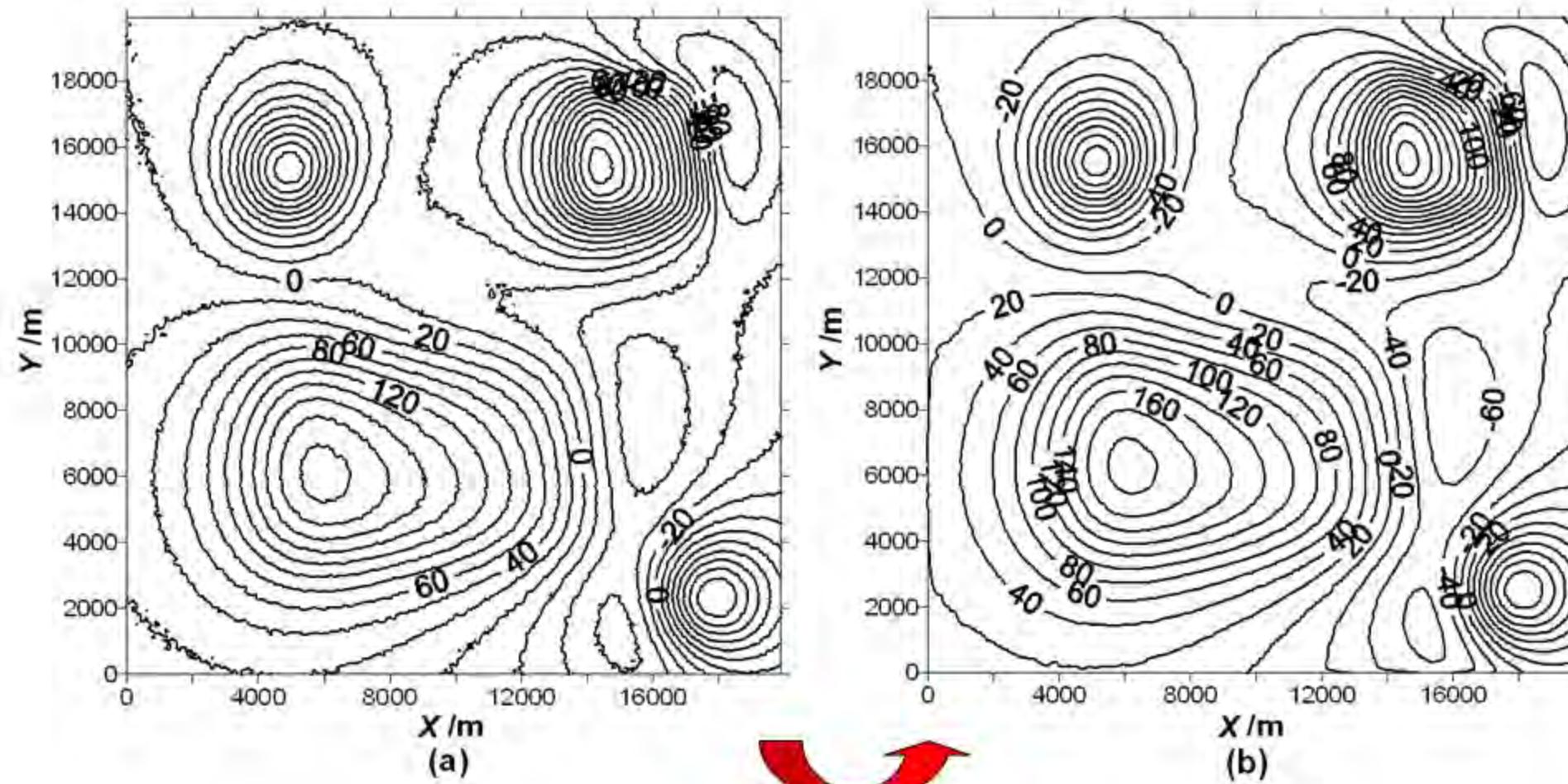
不同阶次，不同点数的平滑公式其平滑的效果

- ✓ 当点数一定，阶次越低结果越平滑；
- ✓ 阶次一定，点数越多结果越平滑；
- ✓ 不同阶次和不同点数的结合有时能得到相似的平滑效果。



3. 平滑 (去噪)

■ 其它平滑方法



高斯平滑法

3. 平滑 (去噪)

■ 其它平滑方法

滤波法

泰勒多项式法

.....

目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

第四节 场分离

4. 场分离

■ 地球结构的复杂性

重力异常是地球内部所有密度不均匀体引起的，是一种**体积效应**。

叠加在一起的重力异常包括了分布较广的中深部地质因素，以及浅层和局部密度体的重力效应。



4. 场分离

■ 地球结构的复杂性

区域异常：

场源：大而深的岩体或地质构造

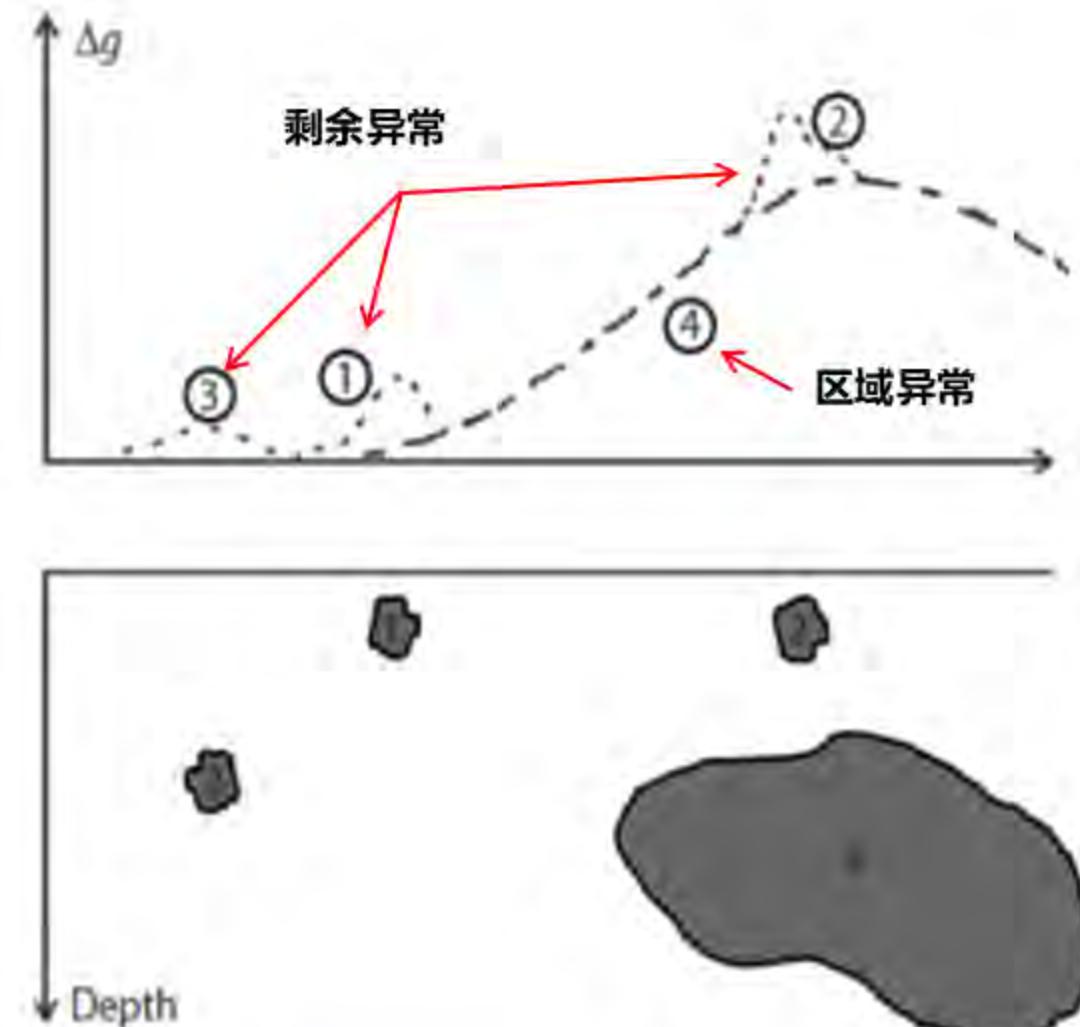
异常特征：幅值大，异常范围大，变化平缓。

局部异常：

场源：小而浅的岩体、矿体或地质构造

异常特征：幅值小，异常范围小，变化大。

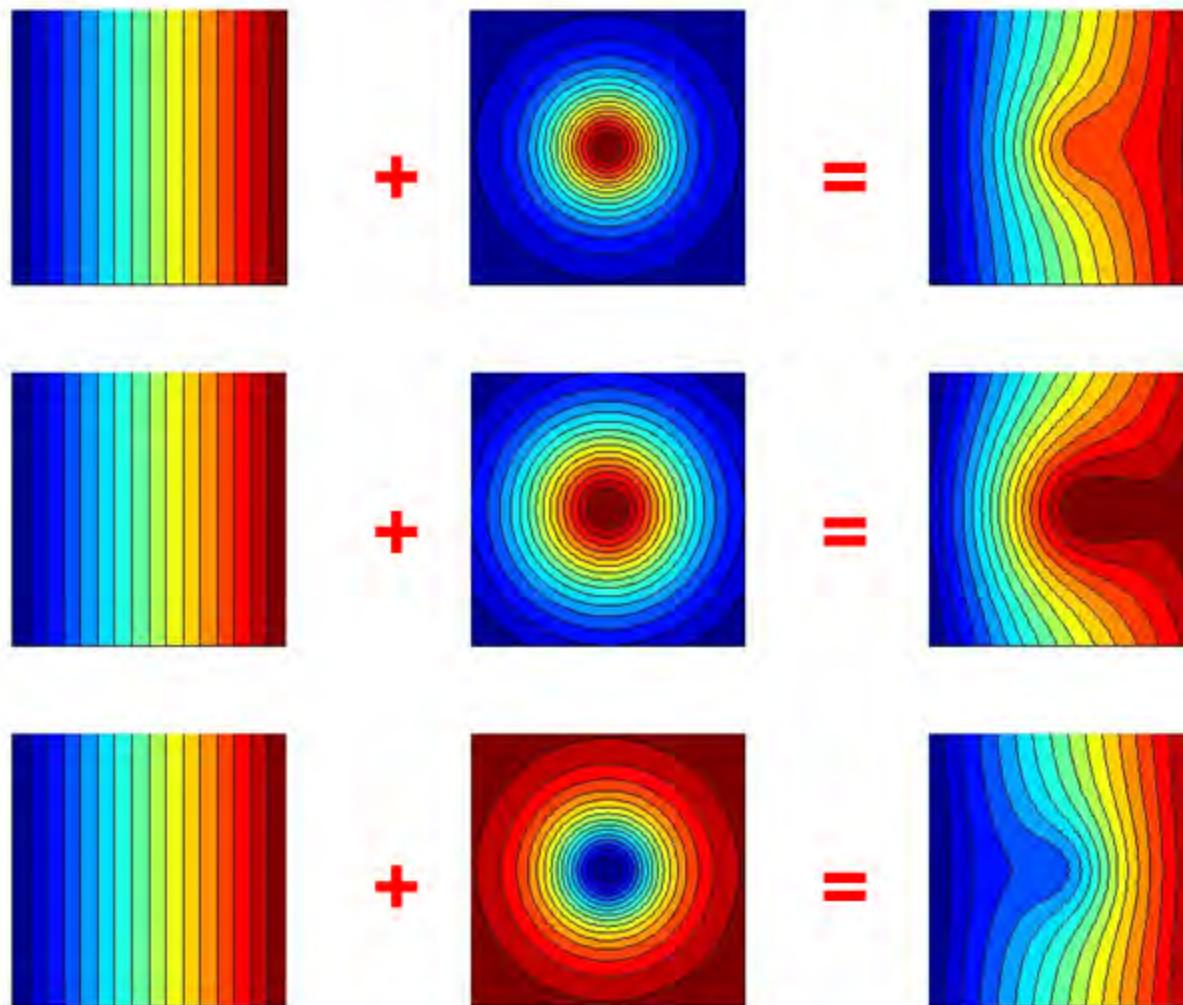
剩余异常：从布格异常中去掉区域异常后的剩余部分，习惯上看作局部异常。



区域异常与局部异常的概念是相对而言的。

4. 场分离

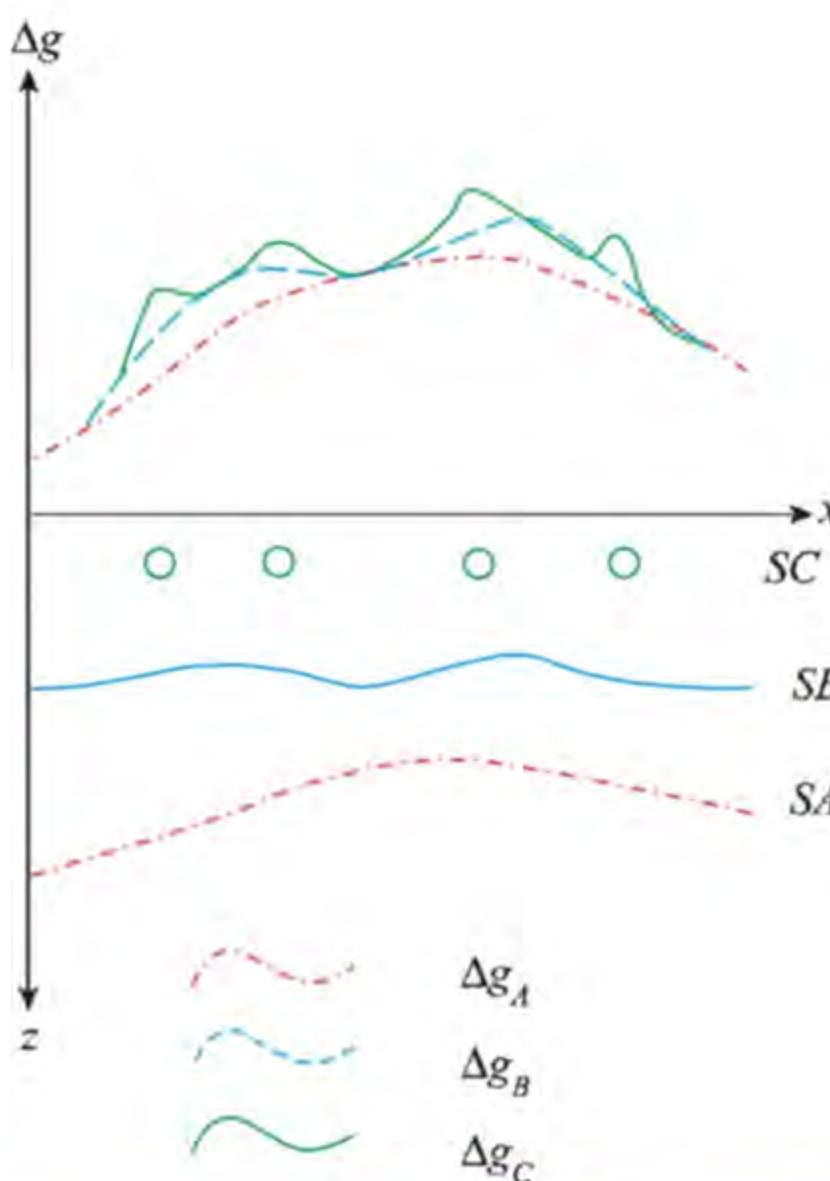
■ 地球结构的复杂性



单斜异常与球体异常的叠加

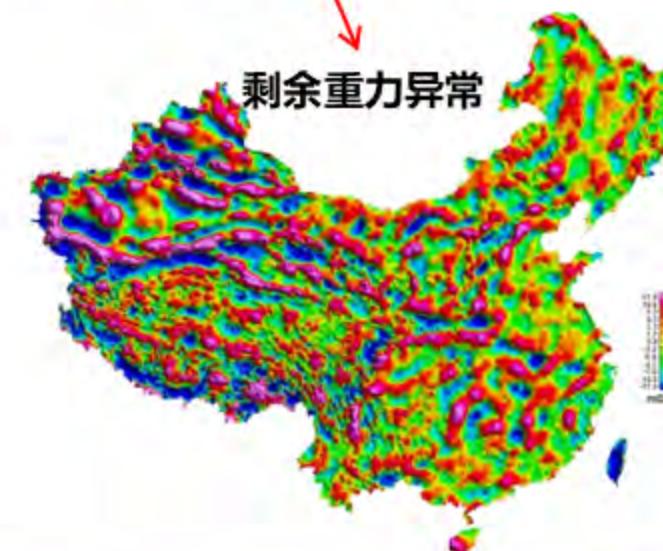
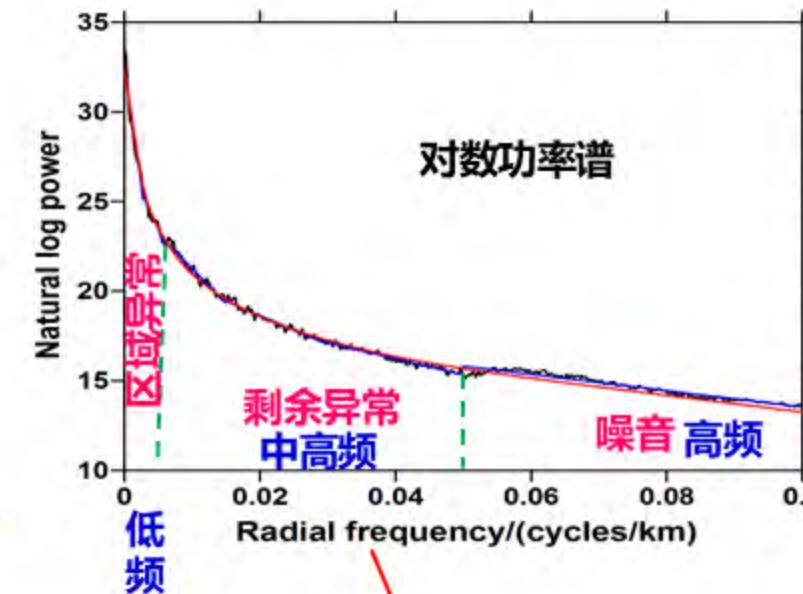
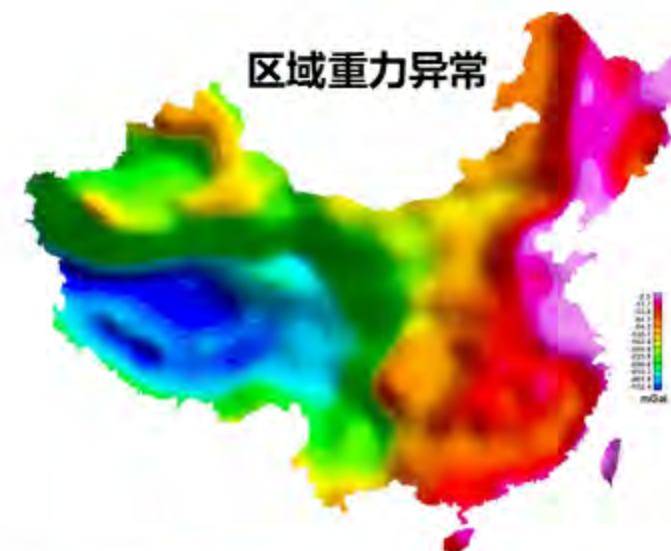
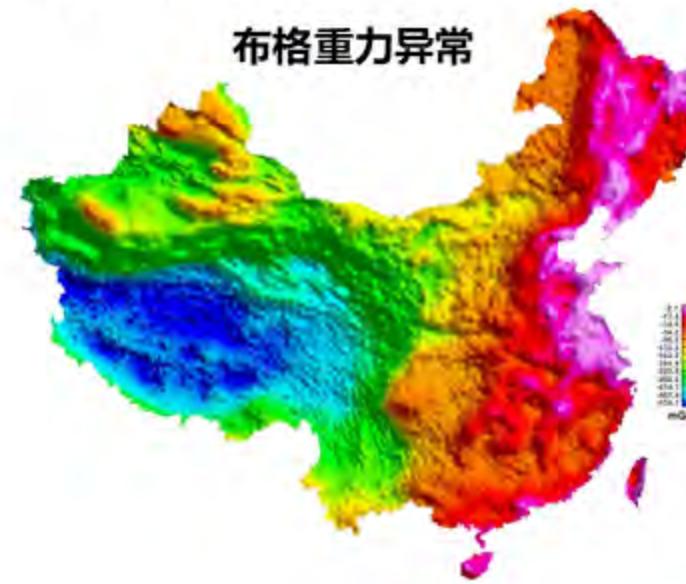
4. 场分离

■ 地球结构的复杂性



4. 场分离

■ 地球结构的复杂性





4.场分离

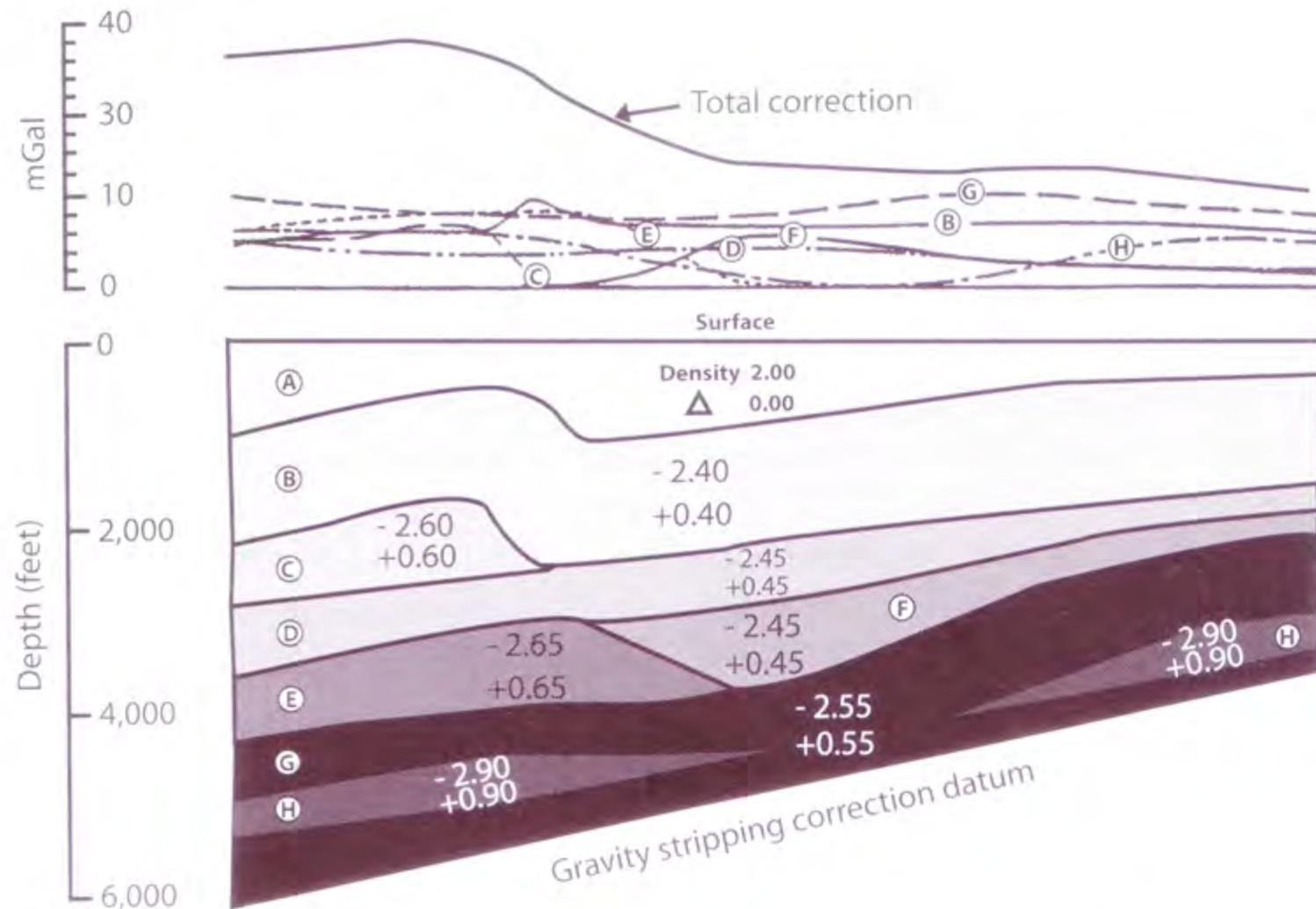
■ 地球结构的复杂性

- 从叠加异常中分离出某个地质体引起的异常，或者把叠加异常分解为几个地质体引起的单一的异常，是比较困难的。

- 实际上，由多个密度分界面引起的重力异常的分离，是目前重力资料数据处理及解释中没有很好解决的一个难题。

4. 场分离

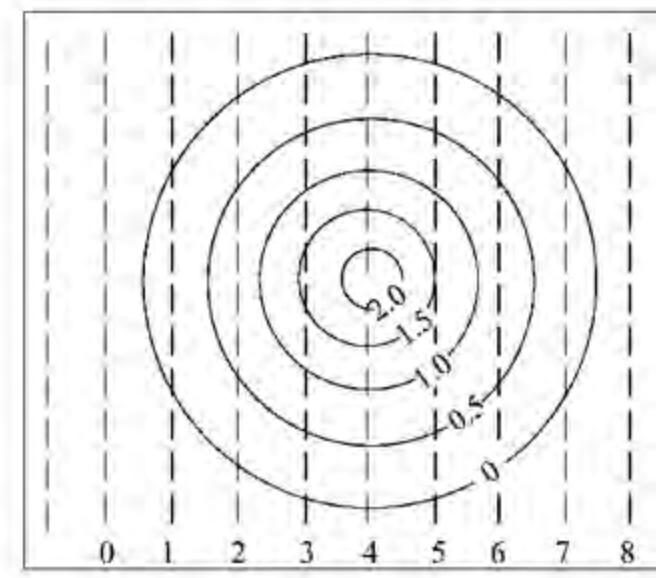
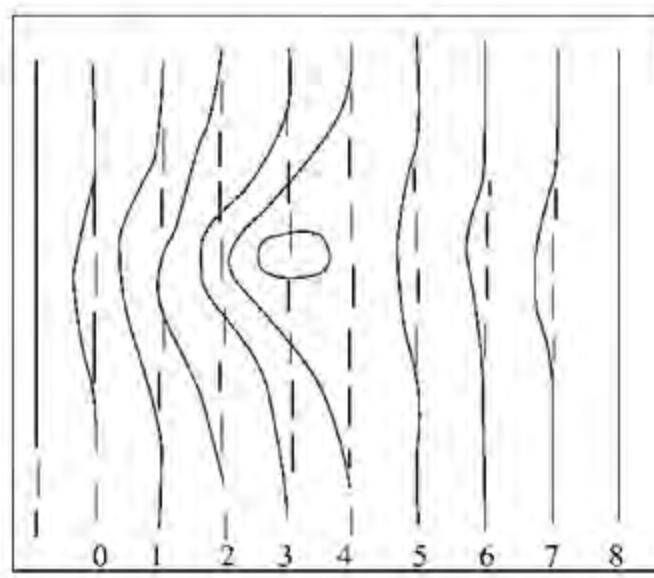
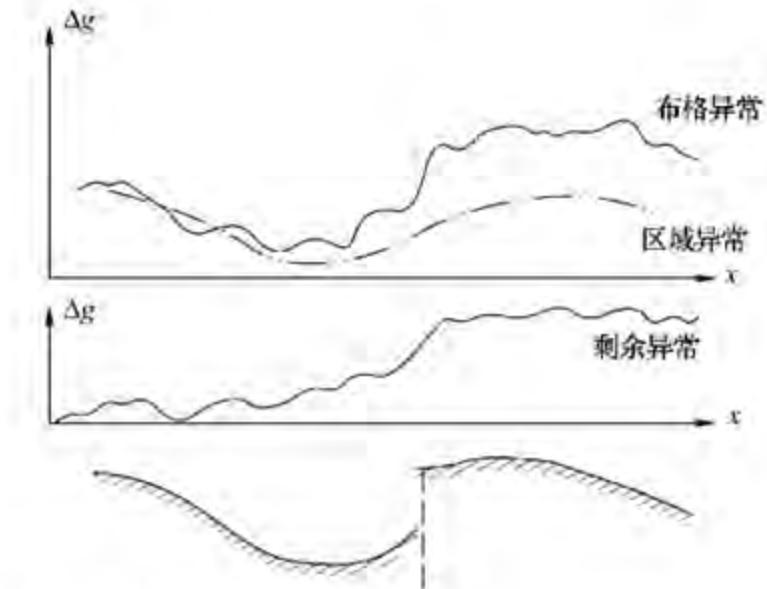
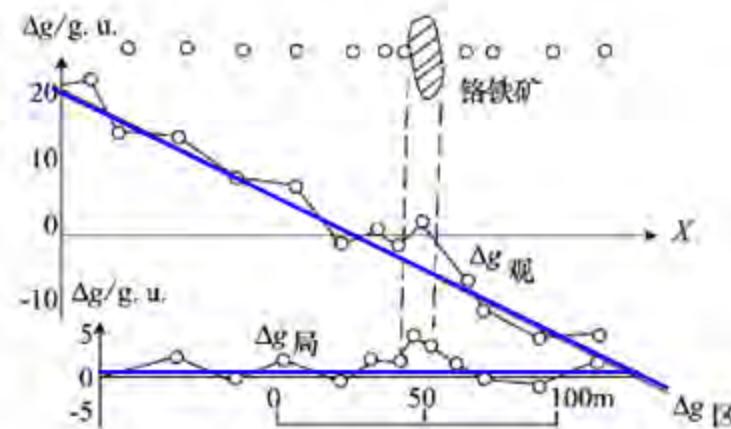
■ 地质分析法



单个地质单元的重力剥皮法计算校正量

4. 场分离

■ 图解法

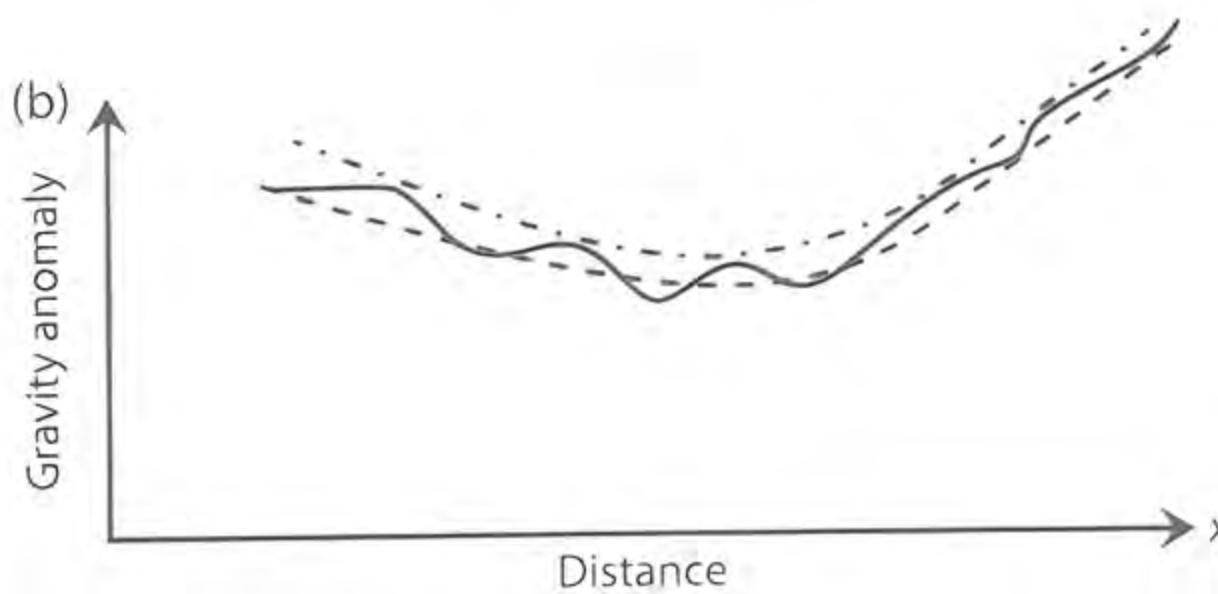
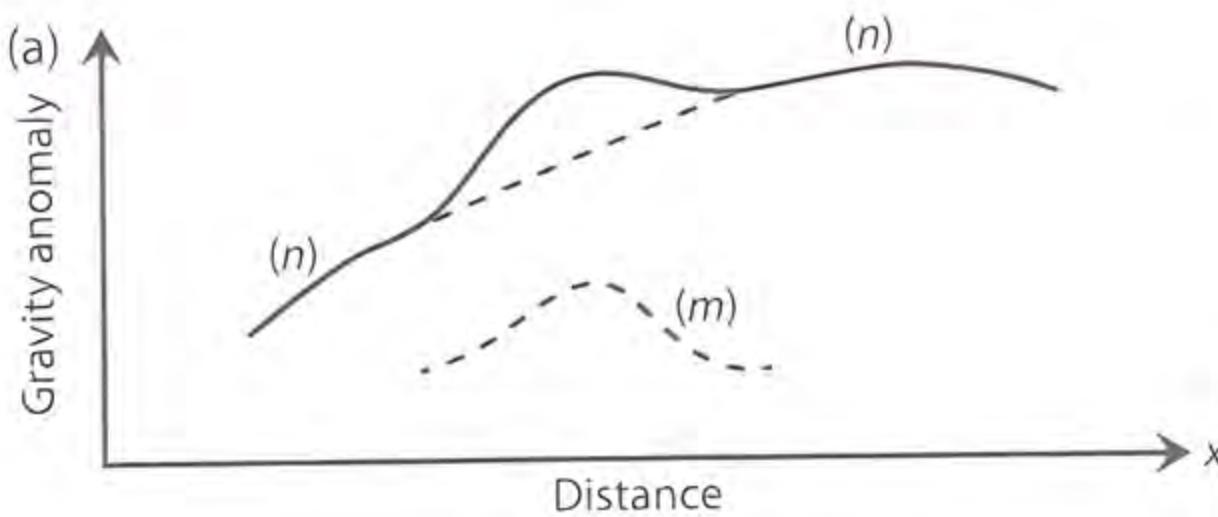


(a)

(b)

4. 场分离

■ 图解法



4. 场分离

■ 图解法

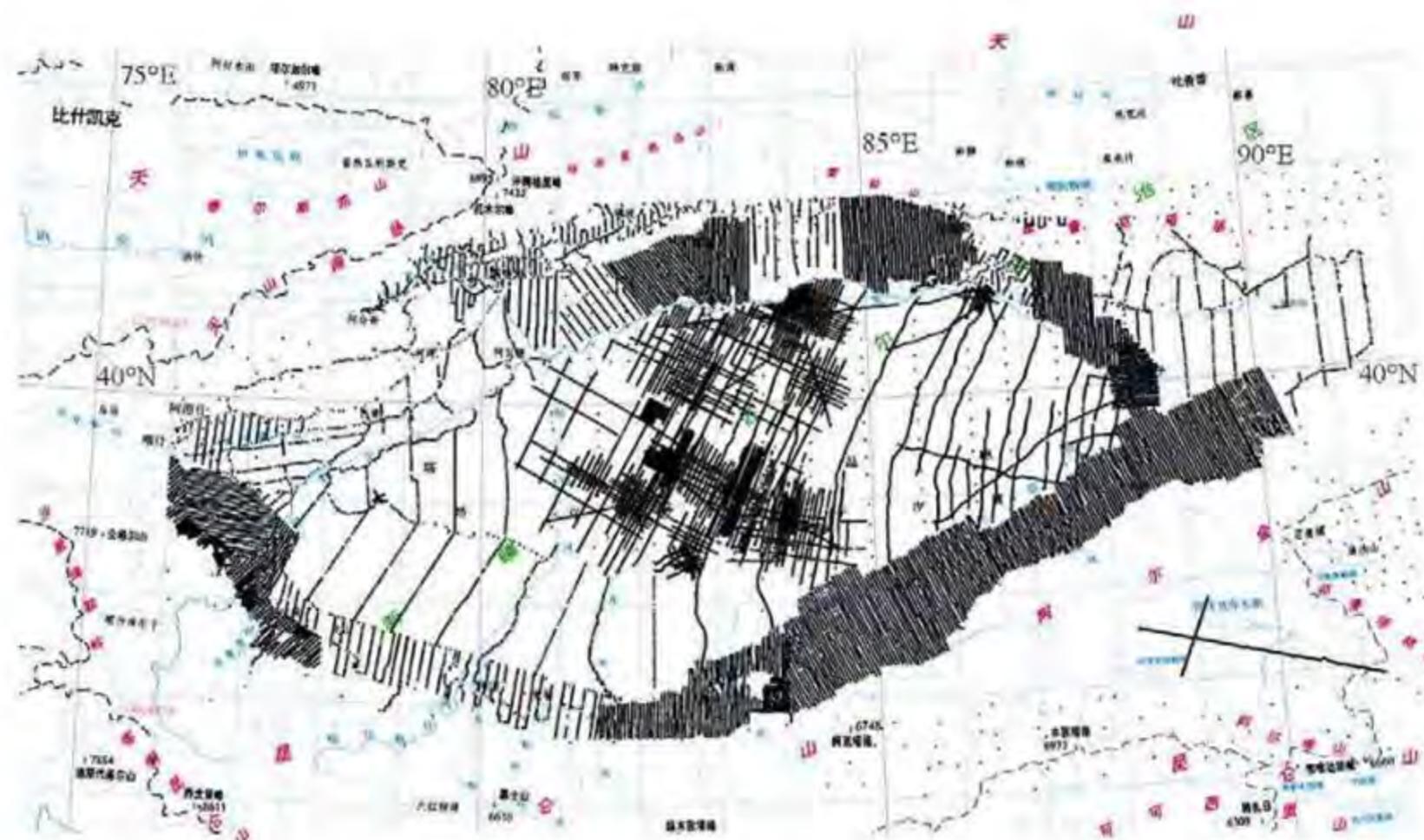
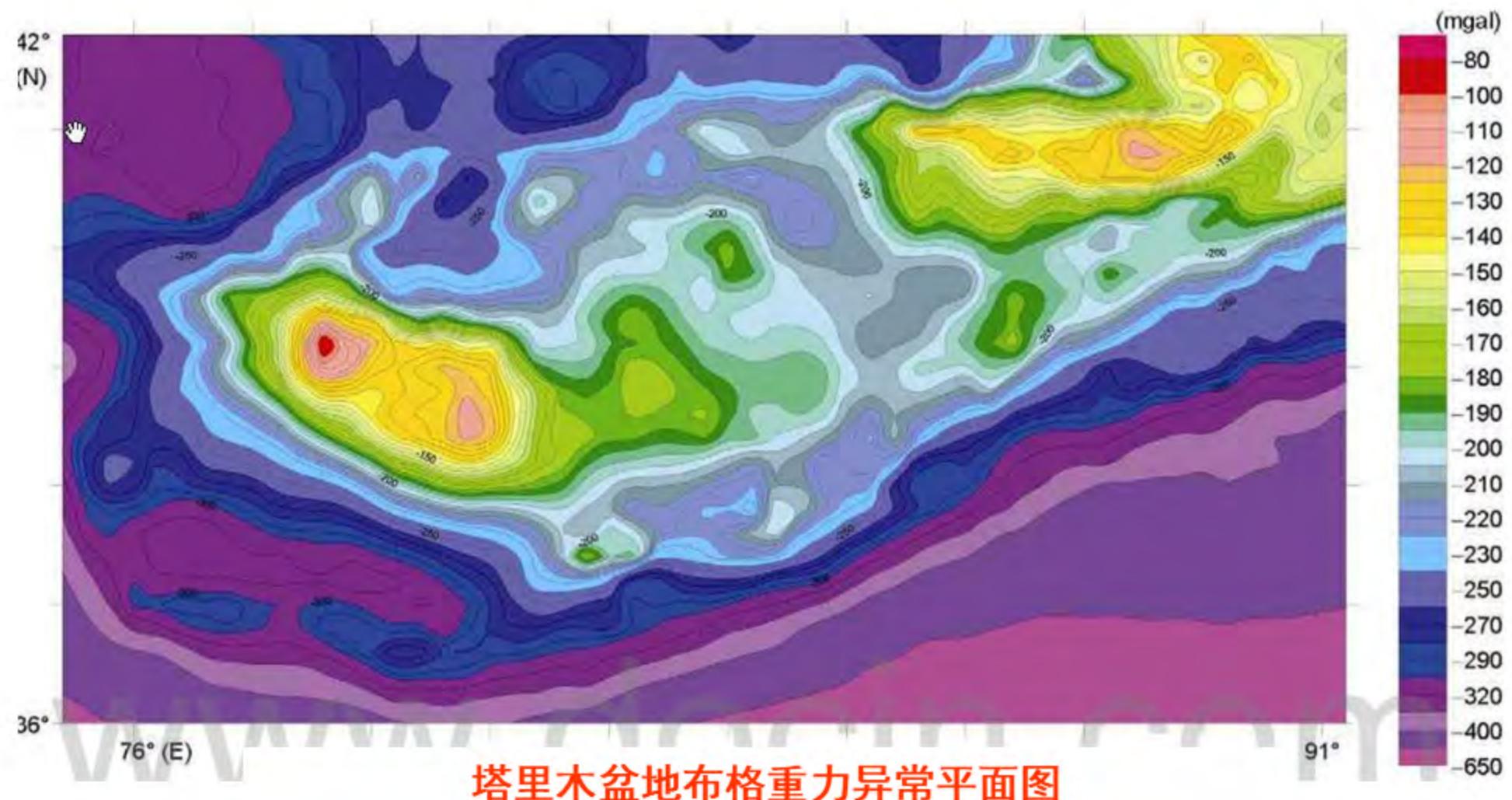


图 2 塔里木盆地不同比例尺的重力测量数据分布平面图

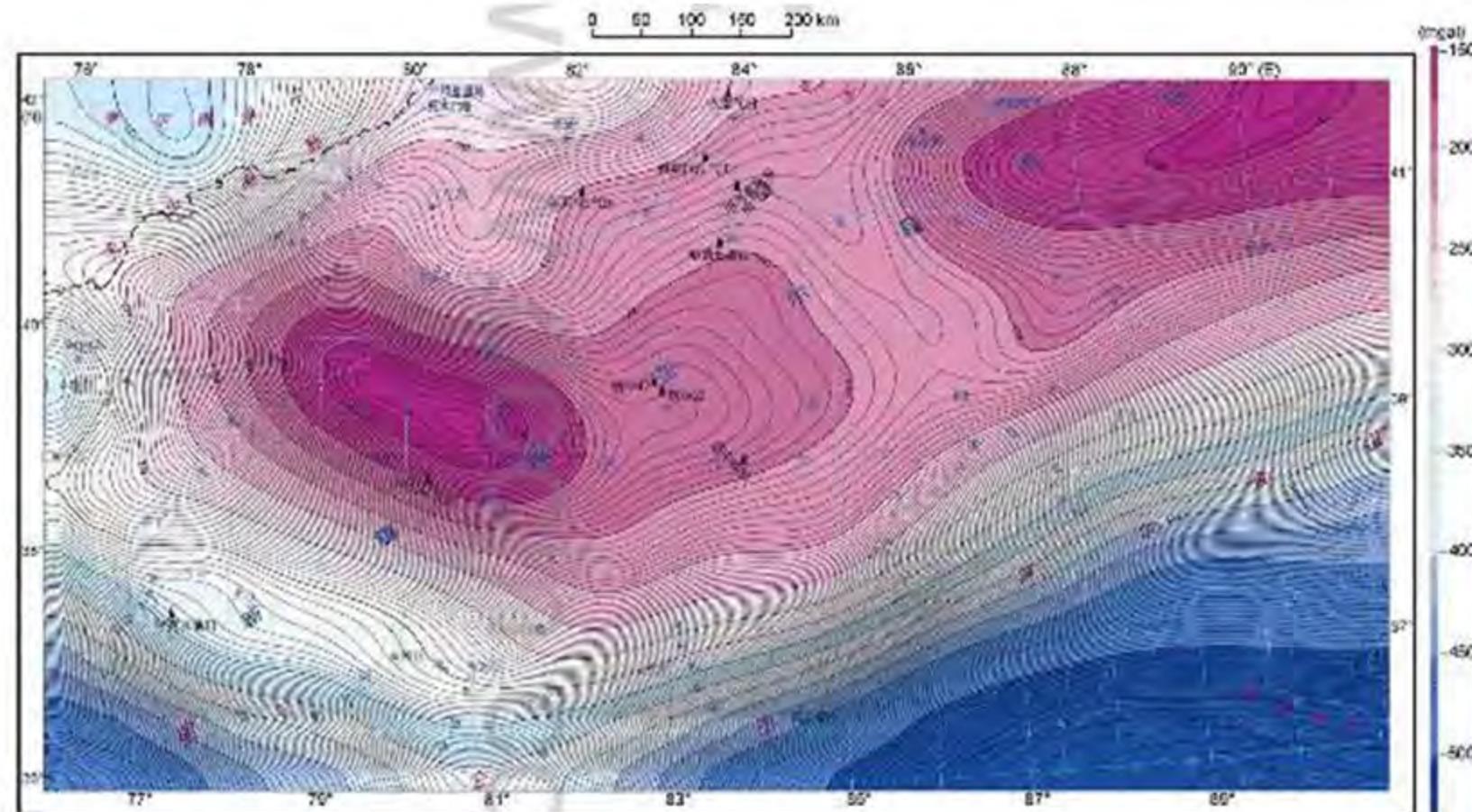
4. 场分离

■ 图解法



4. 场分离

■ 图解法



塔里木盆地基岩重力异常平面图 ($H=8.75\text{Km}$)

4. 场分离

■ 图解法

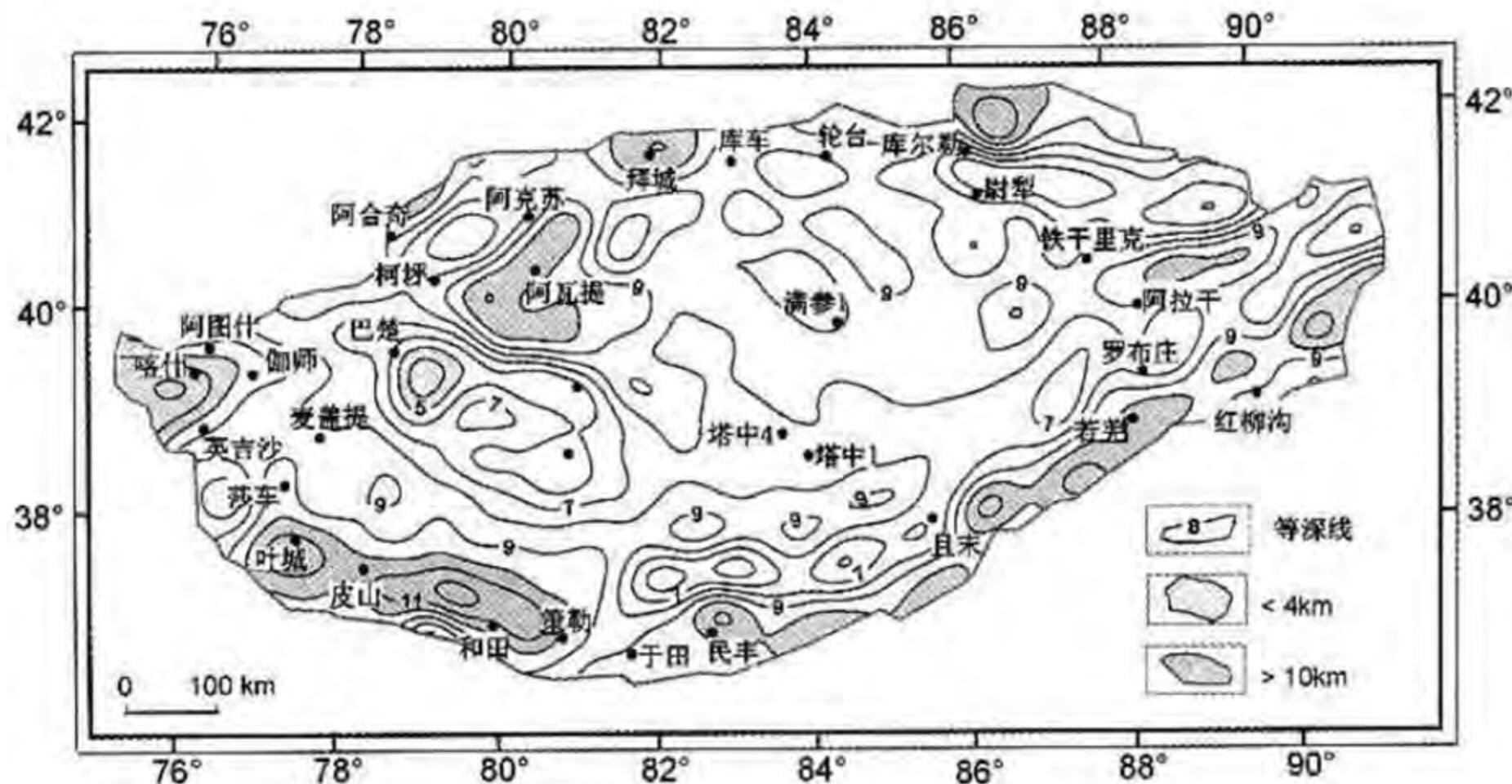
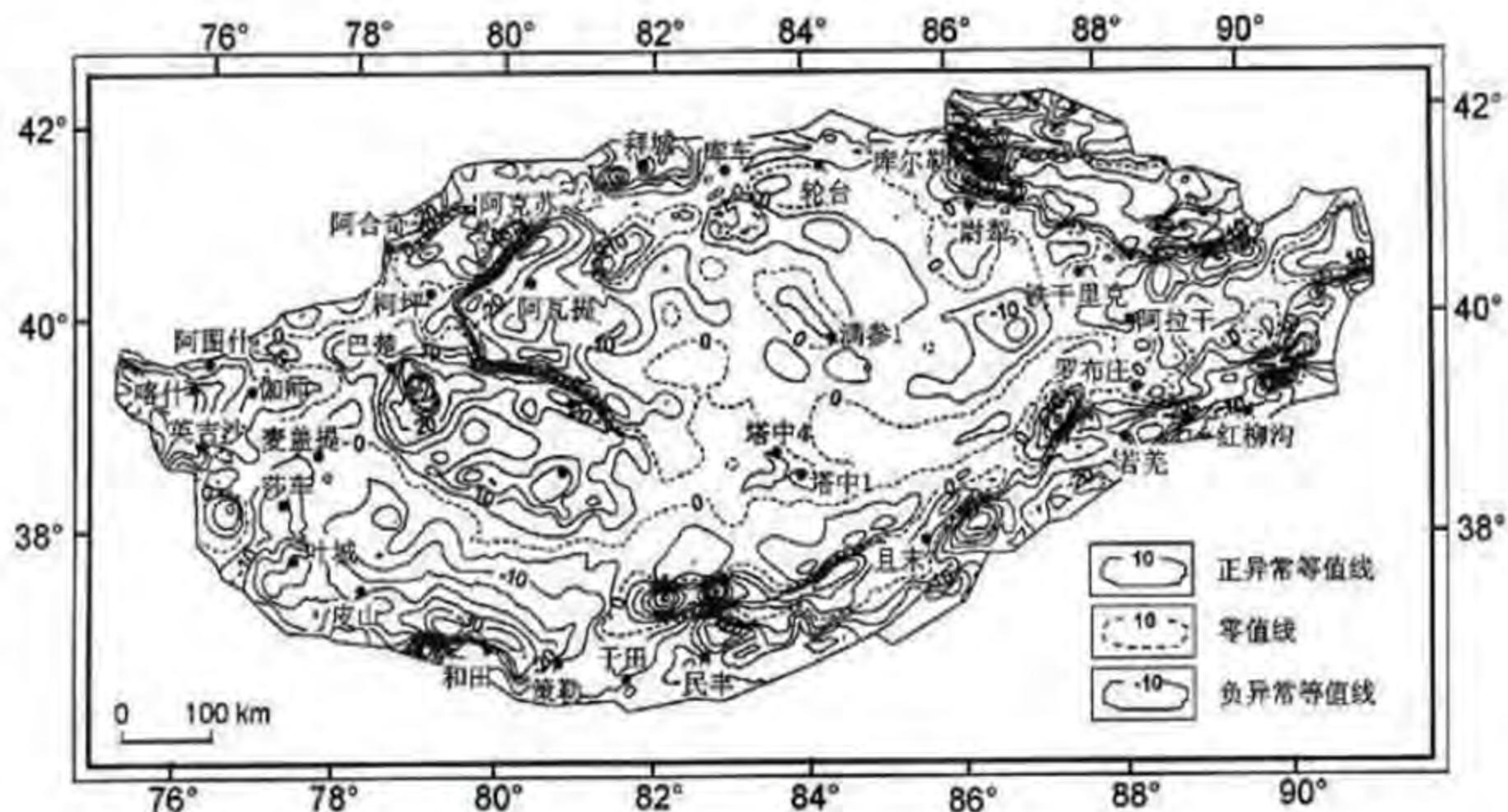


图 6 塔里木盆地基底深度图(单位: km)

4.场分离

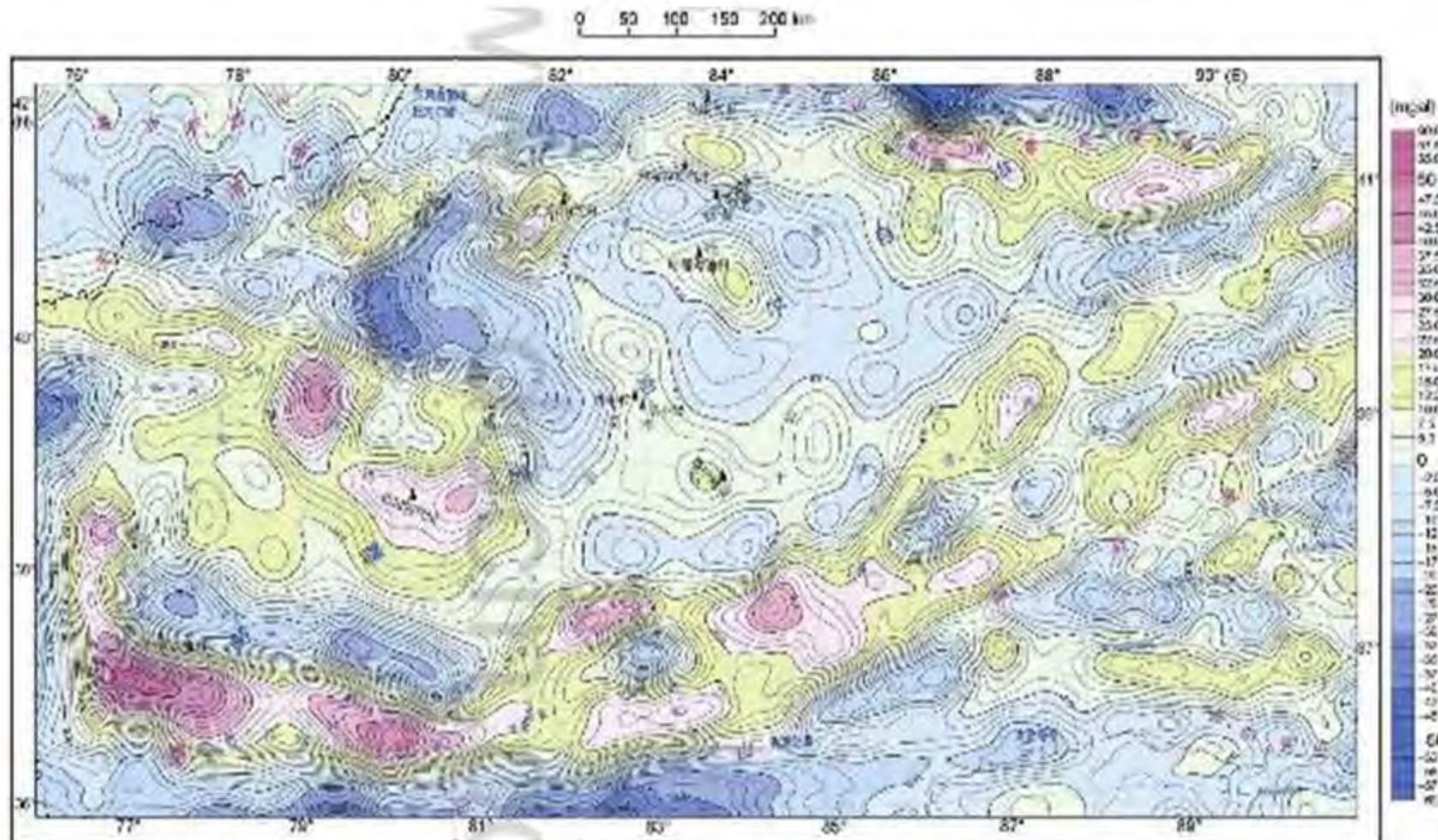
■ 图解法



塔里木盆地剩余重力异常平面图

4. 场分离

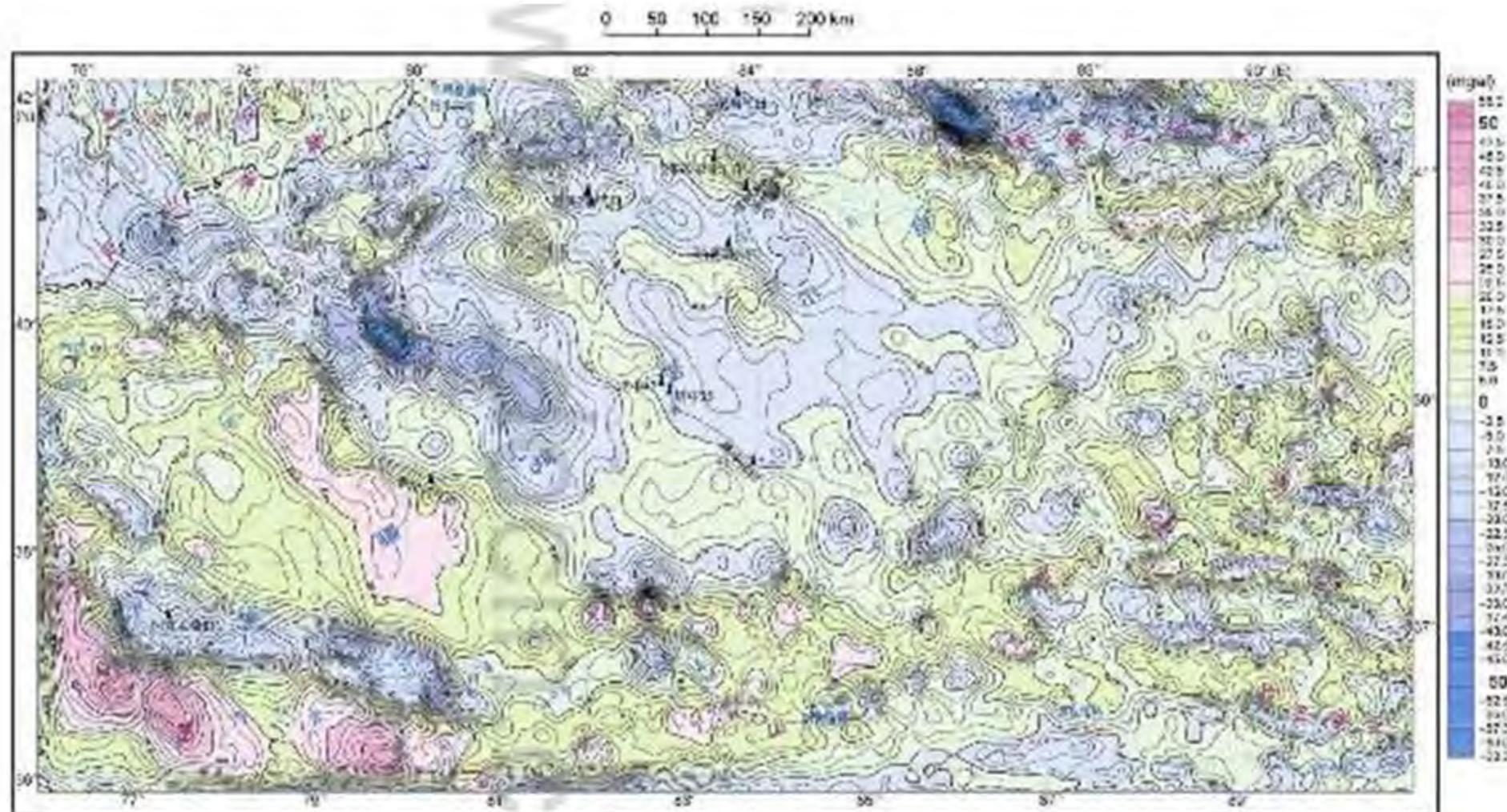
■ 图解法



塔里木盆地深层重力异常平面图 ($H=4.13\text{Km}$)

4. 场分离

■ 图解法



塔里木盆地浅层重力异常平面图 ($H=2.59\text{Km}$)

4. 场分离

■ 图解法

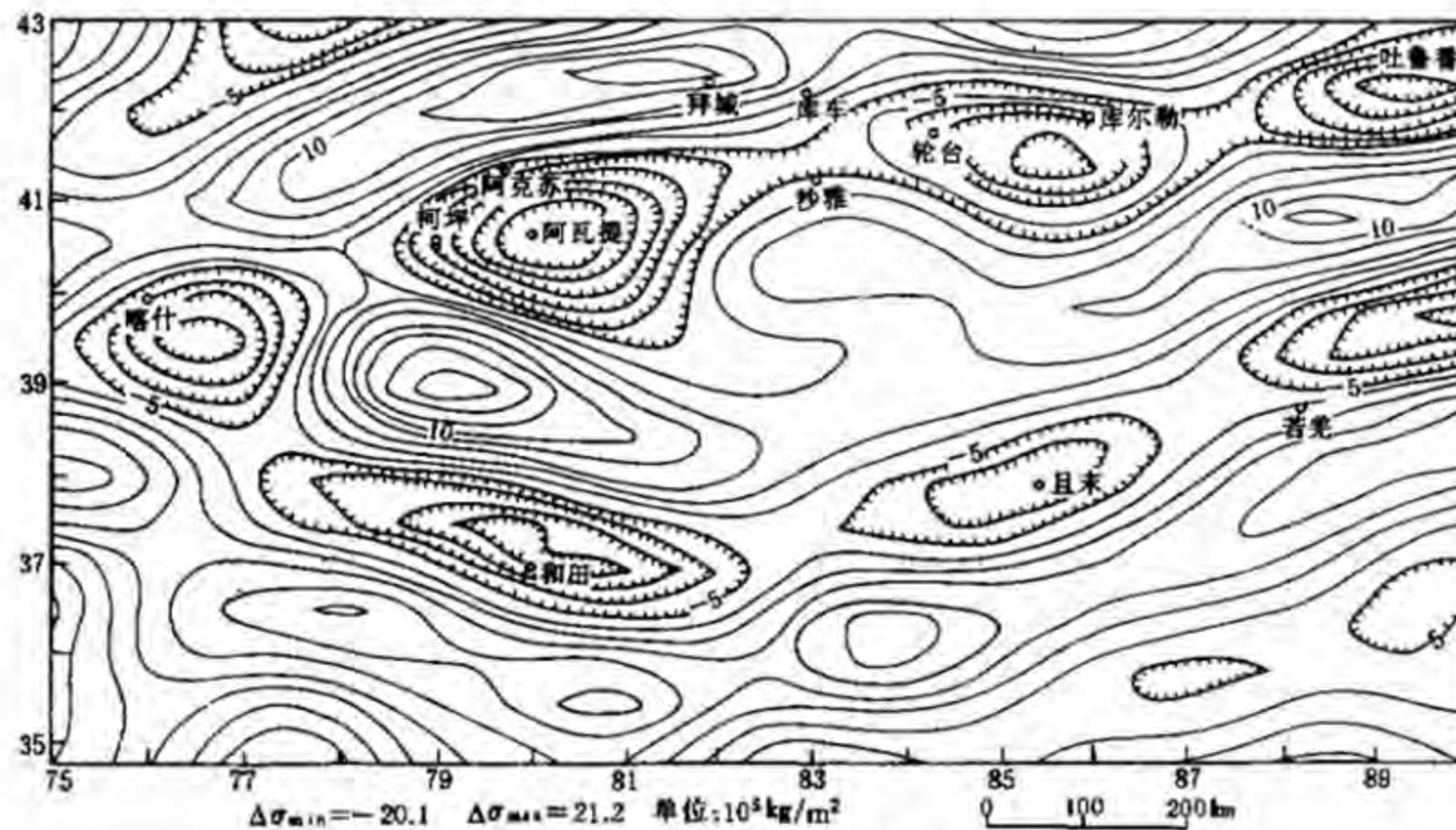


图1 塔里木盆地(IGG93E)101-180阶卫重分层面密度异常图

4. 场分离

■ 图解法

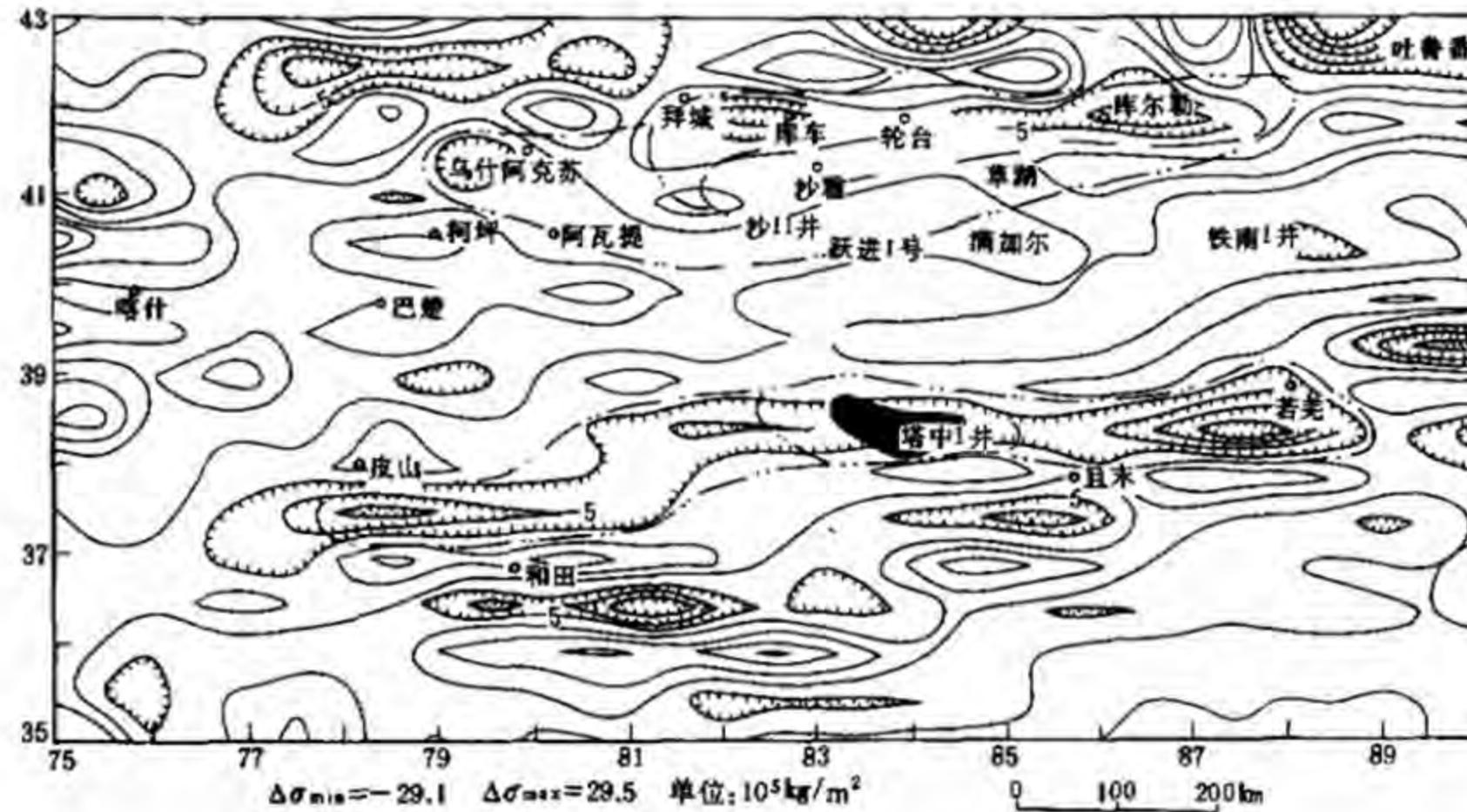
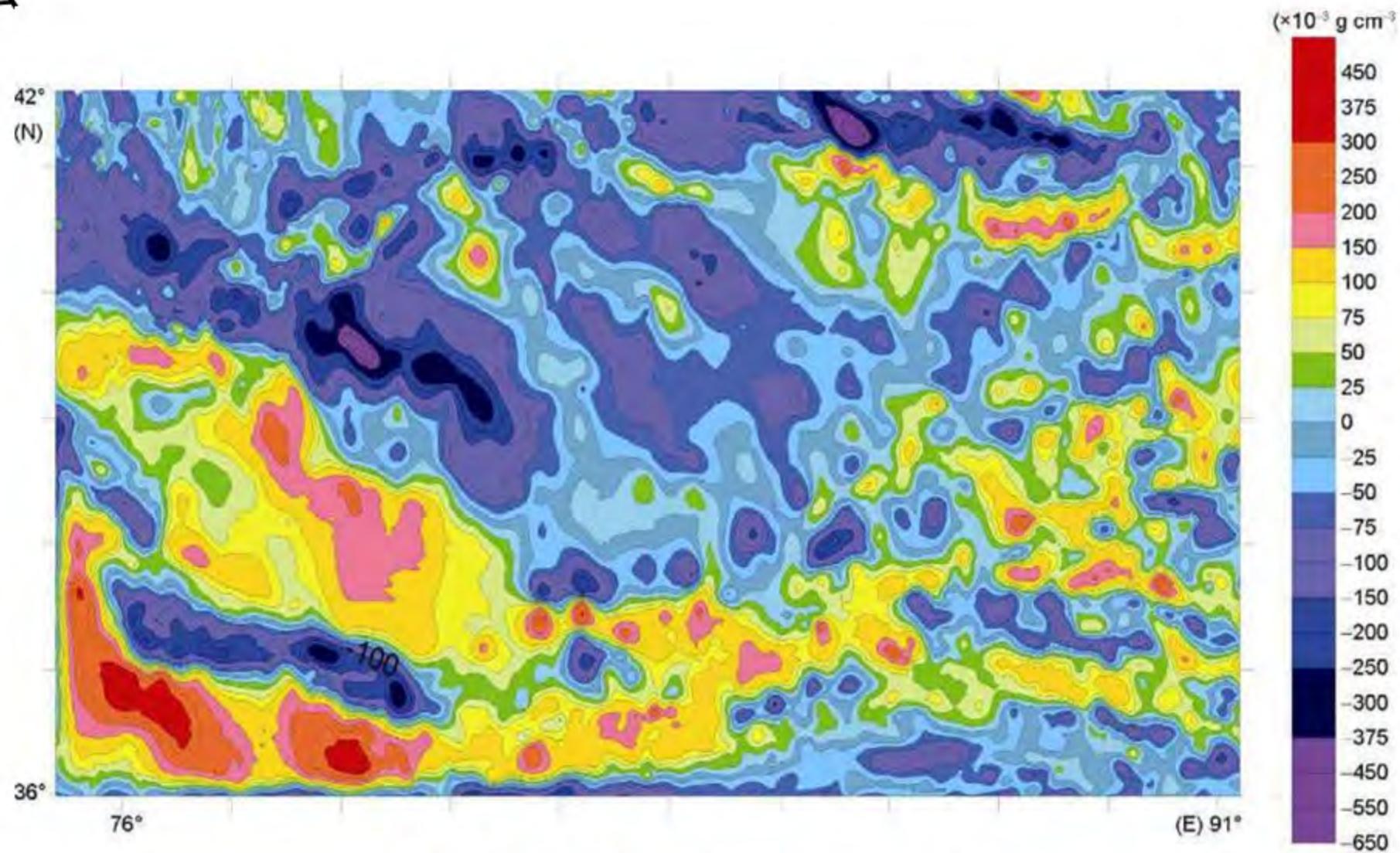


图 2 塔里木盆地(IGG93E)181—360 阶卫重分层面密度异常图

4. 场分离

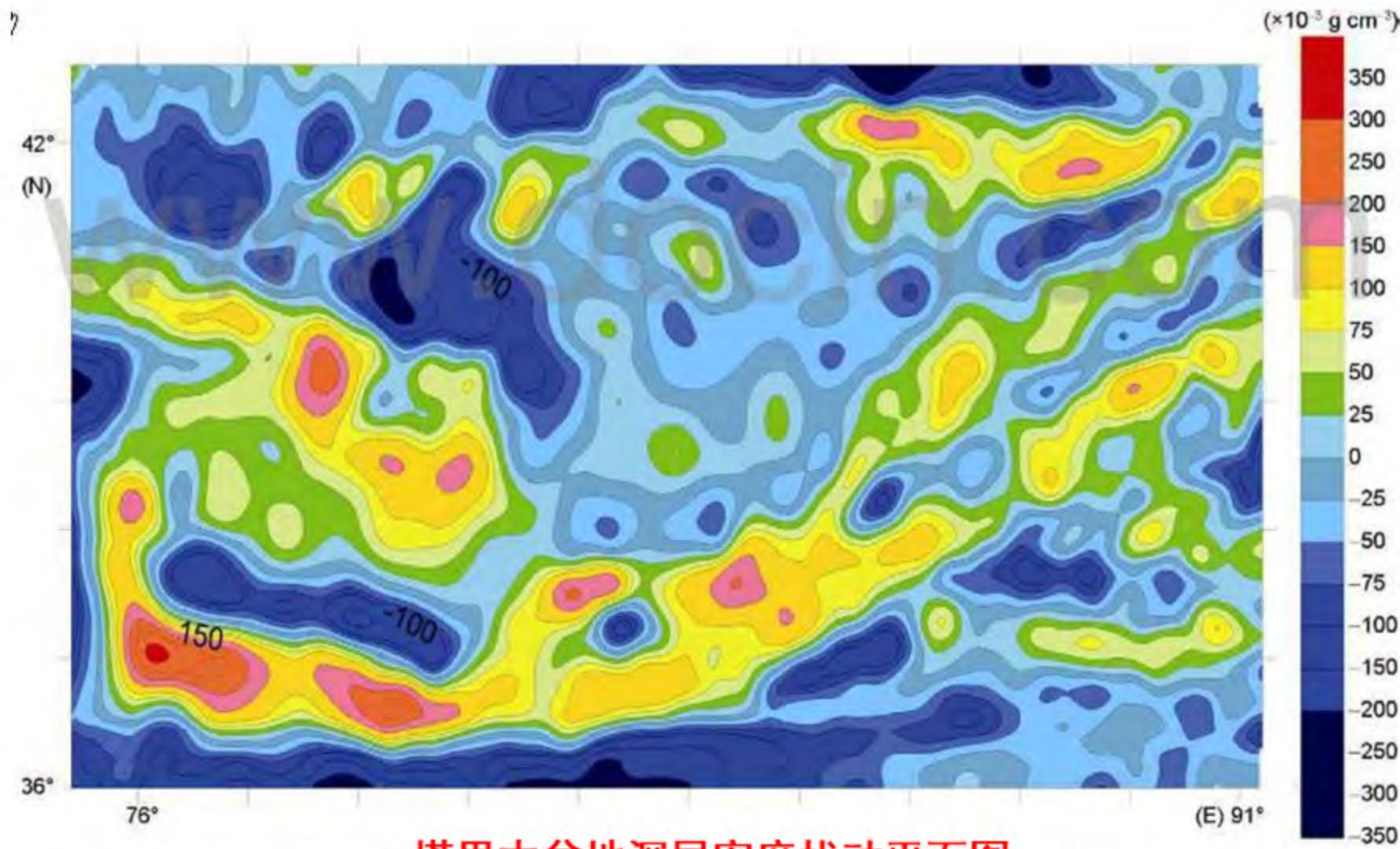
■ 图解法



塔里木盆地浅层密度扰动平面图

4. 场分离

■ 图解法



4.场分离

■ 图解法

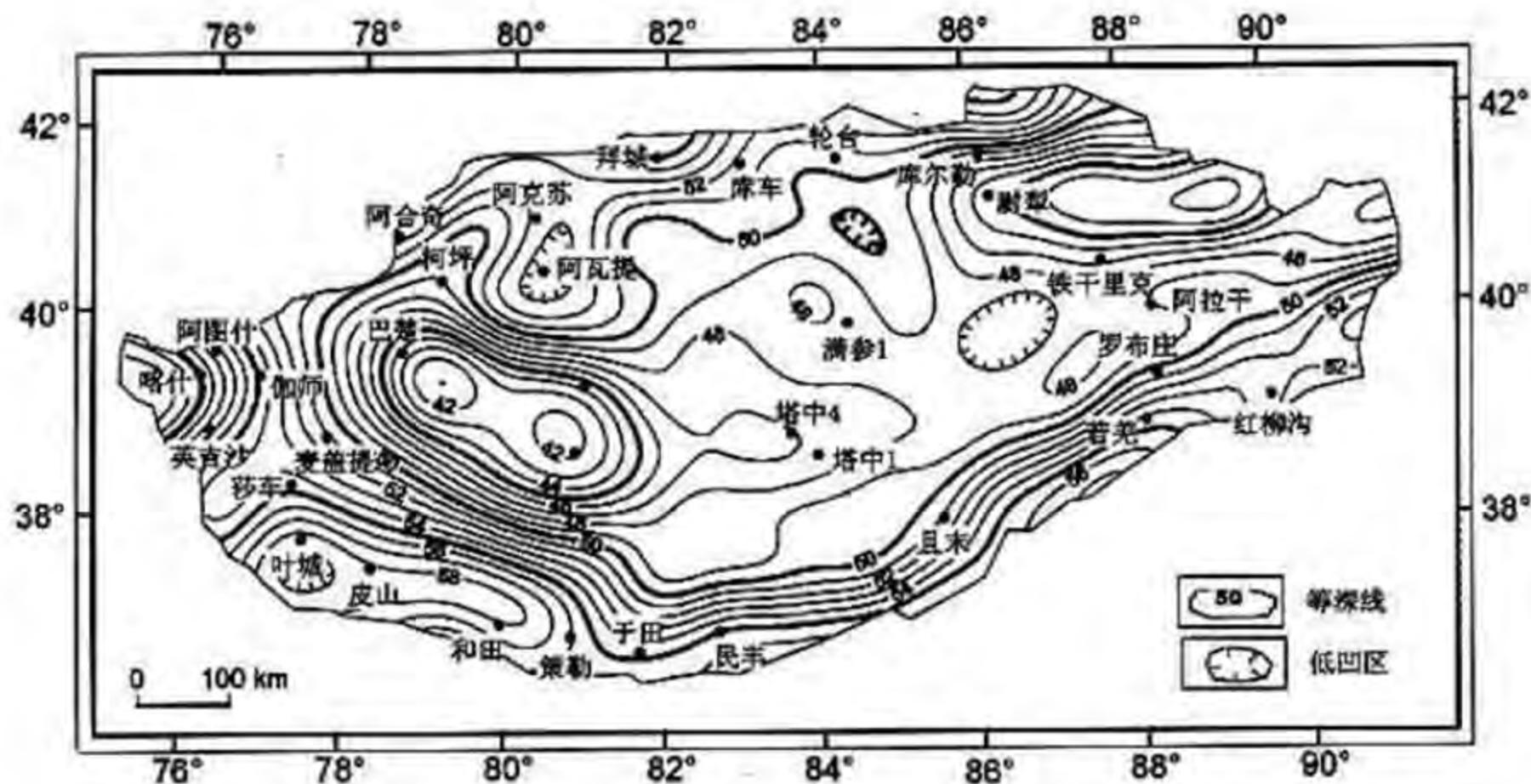


图7 塔里木盆地莫霍面深度图(单位:km)

4. 场分离

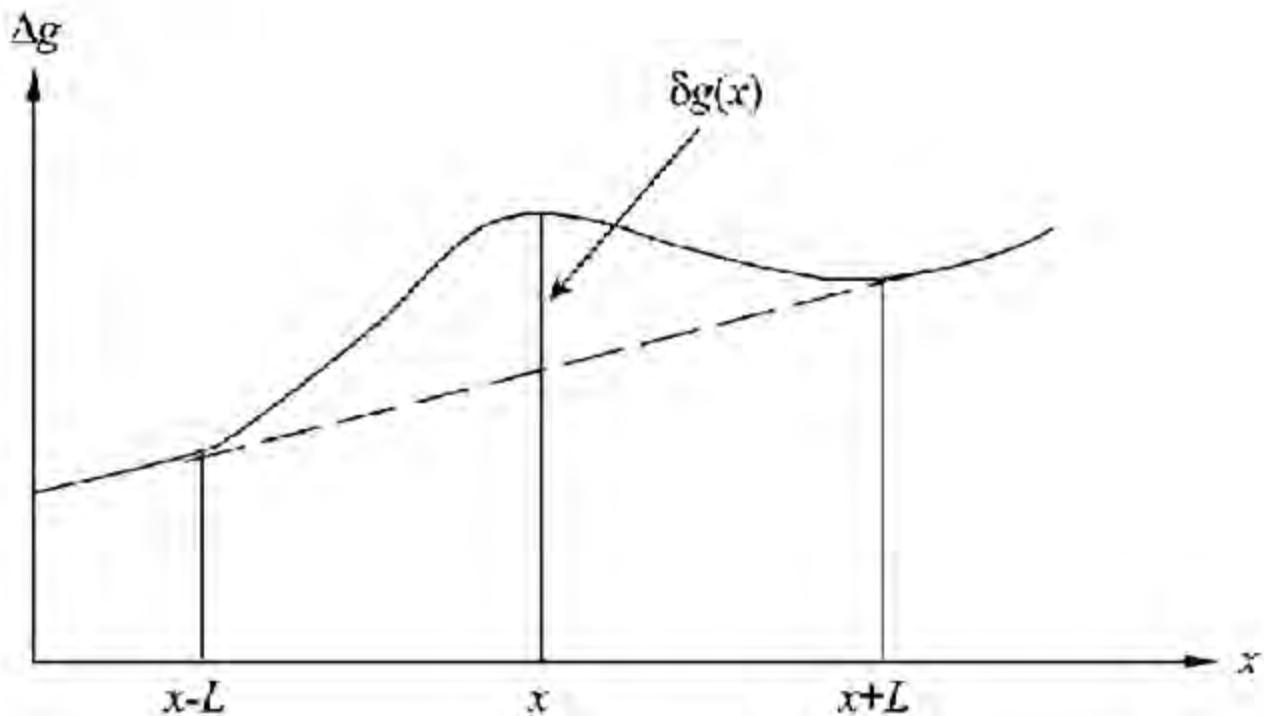
■ 平均场法

- ✓ 在一定范围内（剖面上）或一定面积内（平面上）的区域异常可视为线性变化的，因而其平均重力异常值可视为该范围或该面积的中心点处的区域异常值。
- ✓ 求平均异常时所选用的范围应当大于局部异常的范围。

4. 场分离

■ 平均场法

偏差值法



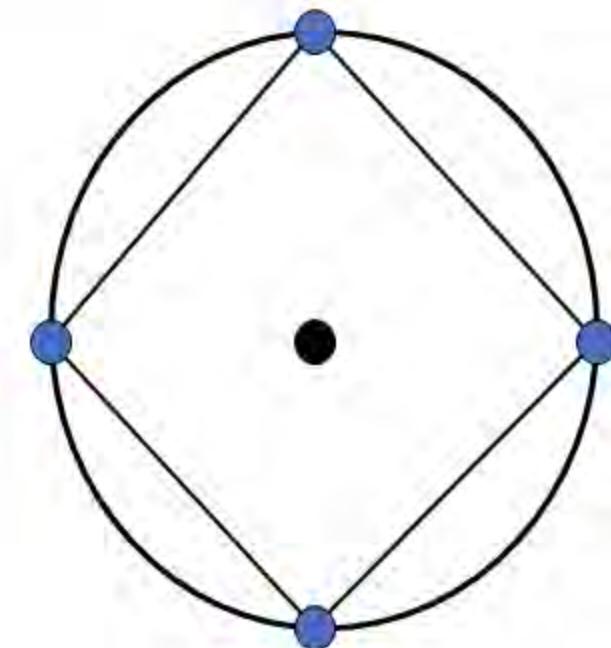
$$g_{\text{区}} = \frac{g(x+L) + g(x-L)}{2}$$

$$g_{\text{局}} = g_{\text{实测}} - g_{\text{区}}$$

适用于剖面数据

4. 场分离

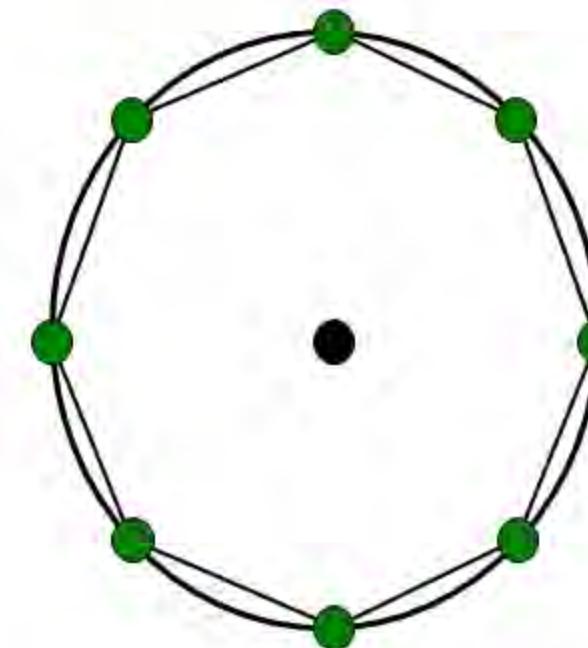
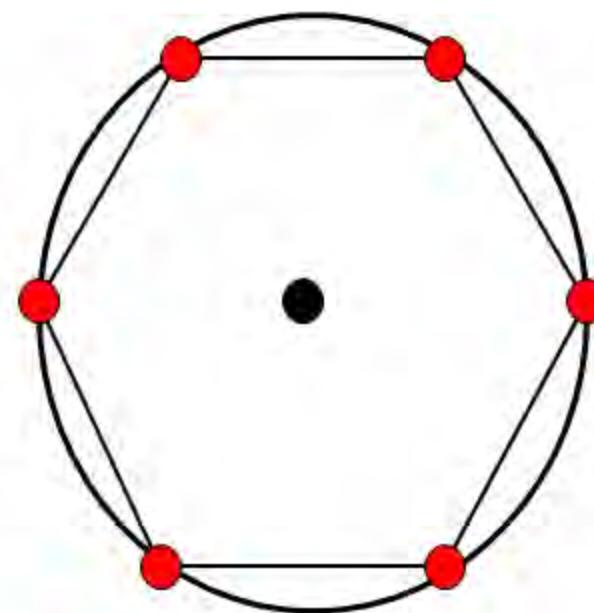
■ 平均场法



$$g_{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i$$

$$g_{\text{局}} = g_{\text{实测}} - g_{\bar{x}}$$

圆周平均法



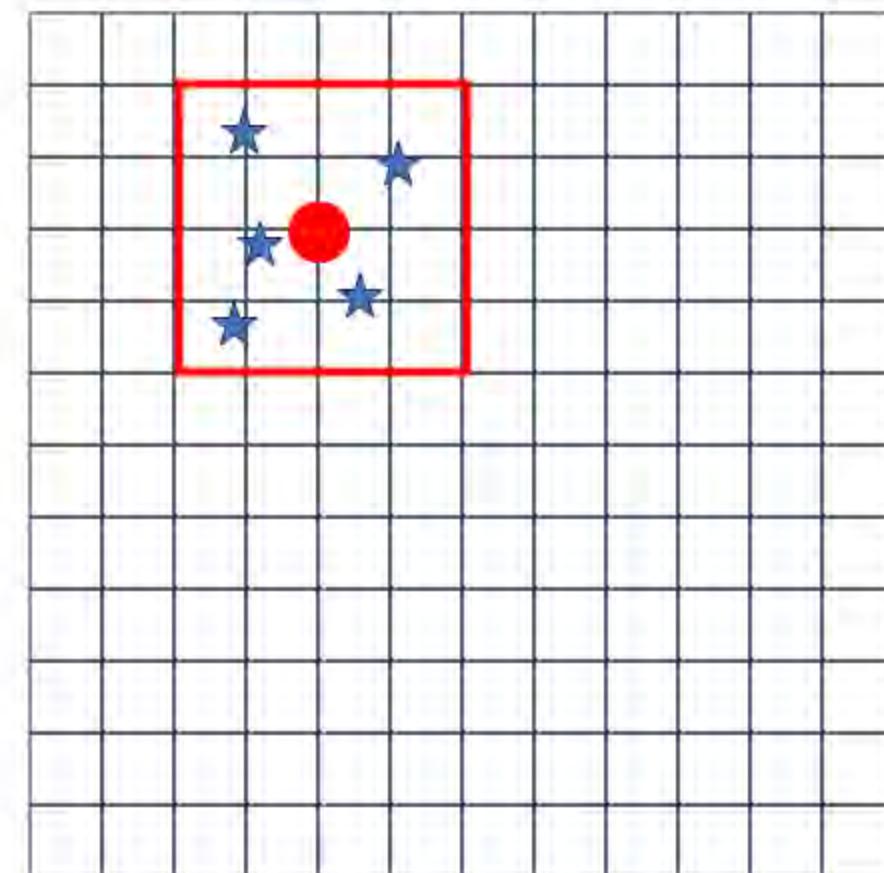
适用于平面数据

4. 场分离

■ 平均场法

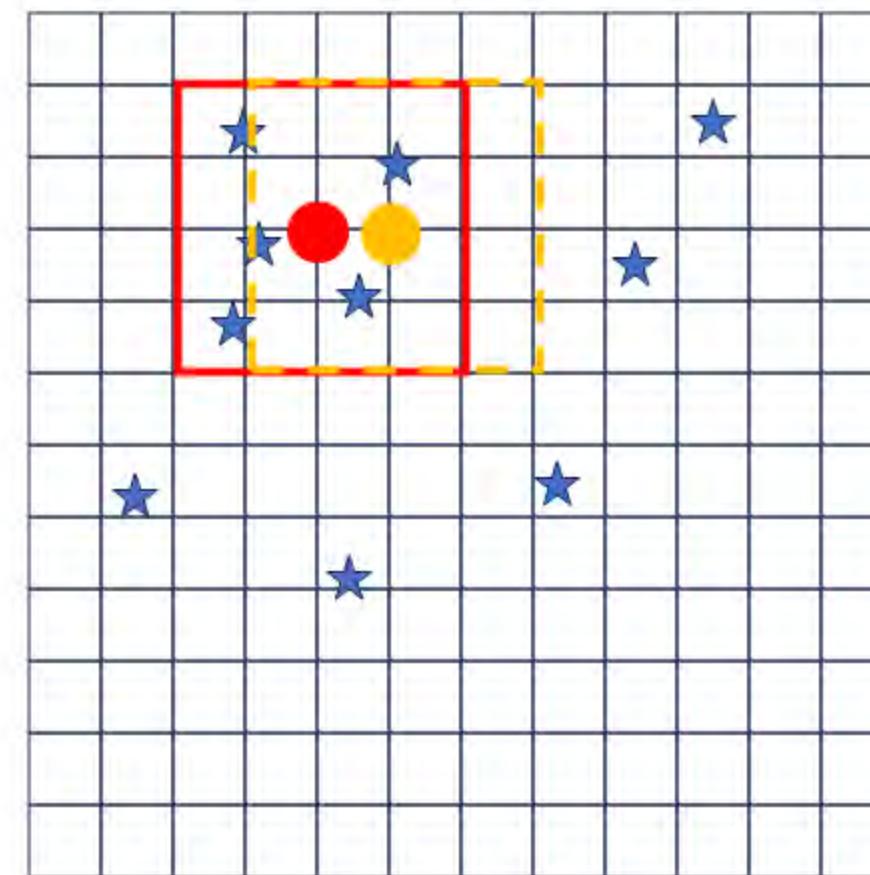
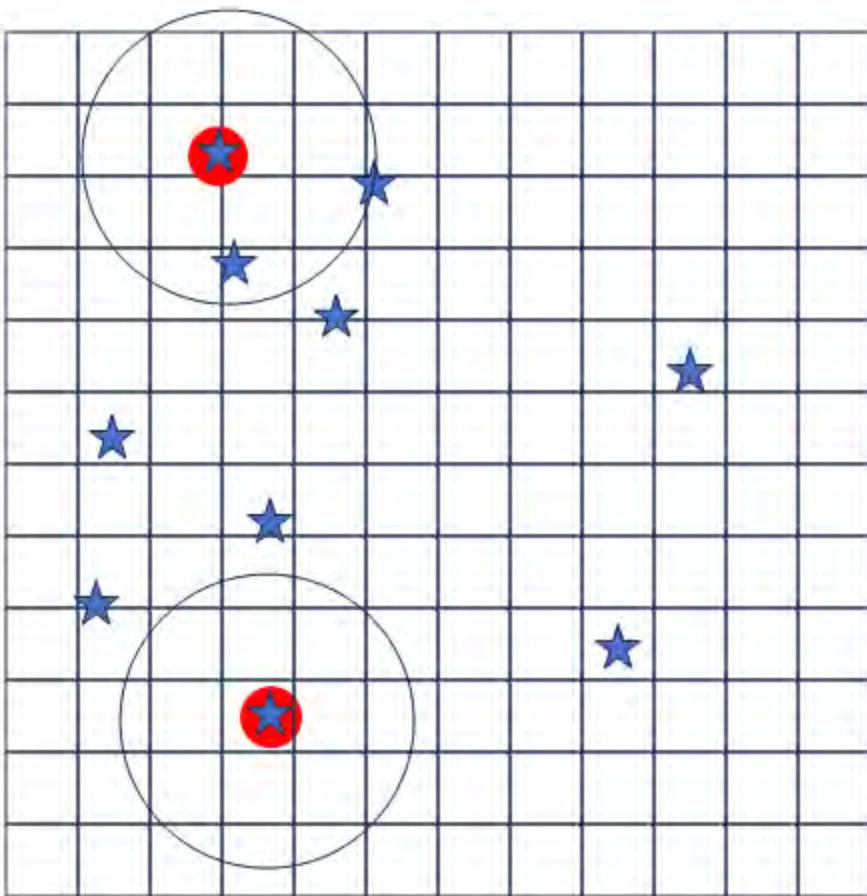
- ✓ 在布格重力异常平面上以一定的网度把它分成网格状，网格的大小一般要大于重力测网3-5倍，甚至十几倍，然后以网格中重力异常的平均值，作为网格中心的区域异常值，并构制区域异常等值线图。
- ✓ 在计算各点的剩余异常时，就可以根据这个图，用线性内插的方法，得到各点的区域异常场，然后将它从布格重力异常中减掉，所得之差，即为该点的剩余异常。

滑动平均法



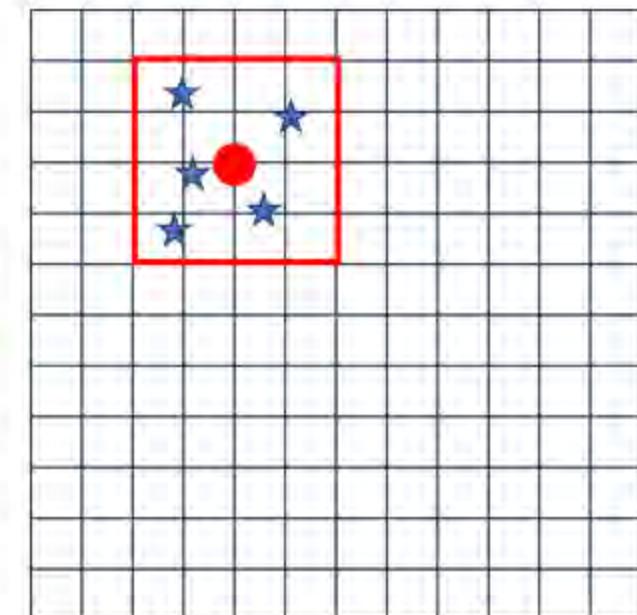
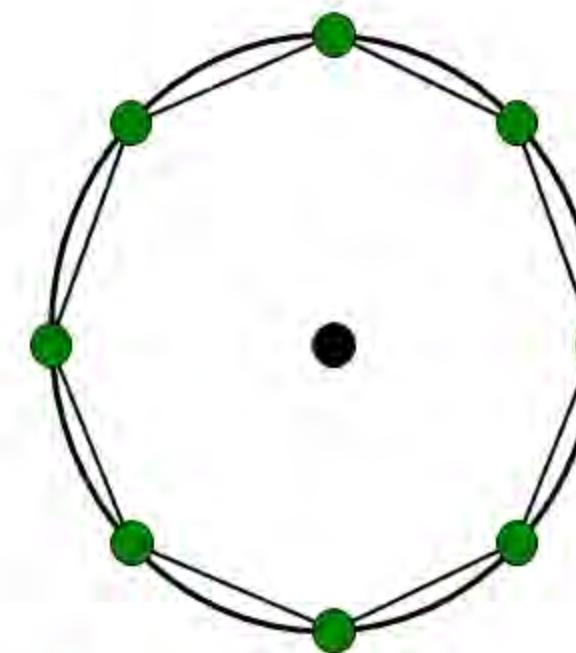
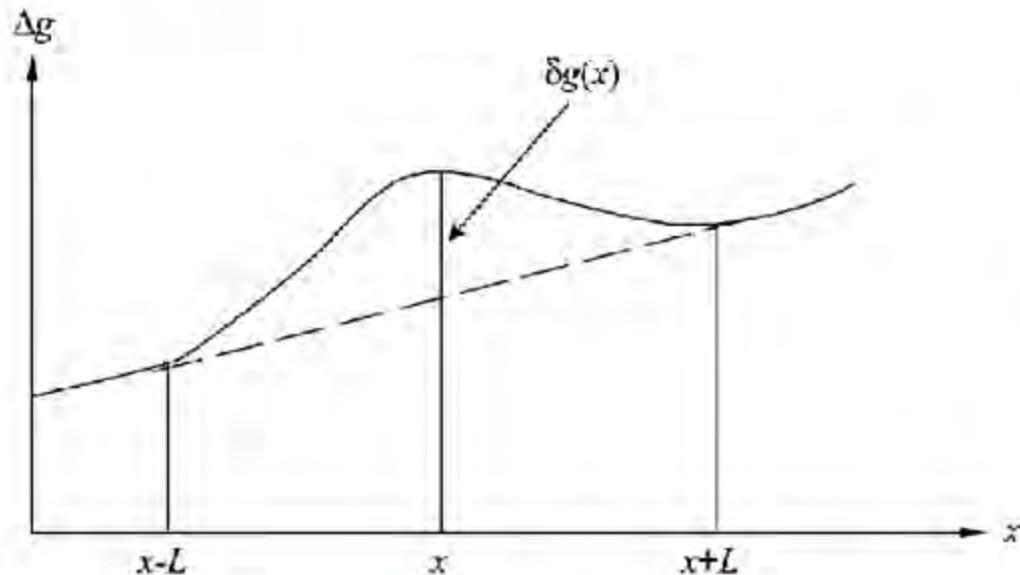
4.场分离

■ 平均场法



4. 场分离

■ 平均场法



平均法半径（边长）选取也是采用试验法。

- ✓ R 选择的过小，局部异常的大部分作为区域异常被减掉，在剩余重力异常图上，局部异常得不到正确的反映。
- ✓ 当 R 选的过大时，则经过区域改正后的剩余重力异常与布格重力异常没有太大的差别。局部异常得不到明显的显示。

4. 场分离

■ 趋势面分析法

用 n 阶多项式来描述整个测区的区域异常。

✓ n 阶多项式的一般形式为：

$$g_{tre}(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \cdots + a_{N-1}y^n$$

阶数为 n ，则 $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ，显然，一阶方程代表一个平面，二阶方程代表一个二次曲面，高阶方程则表示了一个高阶曲面。

✓ $n=2$ 时，二维二次多项式近似区域异常

$$\Delta g_{tre}(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

4. 场分离

■ 趋势面分析法

在测区中按一定网格共选取 m 个测点，其坐标为 (x_i, y_i) ，相应点布格异常值为 $g_i (i=1, 2, \dots, m)$ 。

定义目标函数：

$$\begin{aligned}\phi(a_j) &= \sum_{i=1}^m (\Delta g_{re} - \Delta g_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 - \Delta g_i)^2 = \min\end{aligned}$$

解出各待定系数 a_j ，然后便可按每个网格点的坐标 (x_i, y_i) 计算出该点的趋势值 $g_{\text{区}}(x_i, y_i)$ 。最后，绘出趋势异常（区域异常）图和剩余异常图。

4. 场分离

■ 趋势面分析法

设有一组 (n个点) 重力数据, 观测点的横坐标为x, 纵坐标为y, 观测值为 Δg_i , 其中*i=1, 2, ..., n*,

现用一次趋势面来拟合其区域场, 令一次趋势面方程为:

$$\hat{\Delta g} = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

据最小二乘法原理, 应使每个观测值与趋势值 (*i=1, 2, ..., n*) 的差的平方和为最小, 即:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\Delta g_i - \hat{\Delta g}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta g_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 y_i)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (\Delta g_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 y_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n (\Delta g_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 y_i)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b_2} = 2 \sum_{i=1}^n (\Delta g_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 y_i)(-y_i) = 0 \end{array} \right.$$

4. 场分离

■ 趋势面分析法

将上式整理以后，得出以下方程组：

$$\left\{ b_0 \sum_{i=1}^n 1 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \Delta g_i \right.$$

$$\left\{ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \Delta g_i x_i \right.$$

$$\left. \left\{ b_0 \sum_{i=1}^n y_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i + b_2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \Delta g_i y_i \right. \right.$$

如将方程写成矩阵的形式，则是：

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \dots & \sum x_i & \dots & \sum y_i \\ \sum x_i & \dots & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \dots & \sum x_i y_i & \dots & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \Delta g_i \\ \sum \Delta g_i x_i \\ \sum \Delta g_i y_i \end{bmatrix}$$

如果要计算二次趋势面，则趋势面方程：

$$\hat{\Delta g} = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2$$

4. 场分离

■ 趋势面分析法

- ✓ 趋势分析是将测区所有异常点均作为结点，所有异常值均参加坐标多项式拟合法计算；如果所求得的拟合多项式最高次项的次数为n，该多项式就称为测区异常的n次趋势；n值越大，拟合多项式对异常细节描述得越详细，甚至把干扰异常也反映出来；反之，拟合多项式对异常描述越粗略，反映的仅是宽缓异常成分；
- ✓ 以不同的n次多项式对异常进行分析，就称为趋势分析，分析结果称为n次趋势面。
- ✓ 就异常圆滑和分离目的来说，趋势分析的次数n应低于充分反映全区异常特征的最佳拟合多项式的次数；趋势分析结果，就是以n次趋势面代表圆滑异常或区域异常。原来异常与趋势面之差值，则代表干扰异常与局部异常。
- ✓ 用于异常分离的趋势分析效果好坏，首先取决于全区区域异常能否用一个坐标多项式来描述；其次取决于多项式次数的选取，次数越高，区域异常中必含有较多的局部异常成分。实用中多根据经验灵活应用。

4. 场分离

■ 趋势面分析法

趋势分析法同异常平滑方法原理是一样的，其区别在于

- ✓ 求区域异常的趋势分析时利用全区测点上的数据，而平滑时只利用计算点附近的一个区间内若干个测点的数据；
- ✓ 趋势分析时坐标原点是固定的，因而所有待定系数均应求出，才能获得各测点上的趋势值。而平滑时，原点是滑动的，即逐点计算，故只需求取系数 a_0 即可。

4. 场分离

■ 趋势面分析法

利用趋势面分析方法应注意：

- a) 效果好坏取决于所选数学模型与实际区域异常的逼近程度，因而经常用不同阶次的方程作试验，从中选取最能代表区域异常成果的阶次。
- b) 当测区范围较大，地质情况又比较复杂时，一般不宜应用此法，因为很难用一个多项式来表示该区的区域异常，或者应分区用不同阶次的多项式来进行划分。

4. 场分离

■ 趋势面分析法

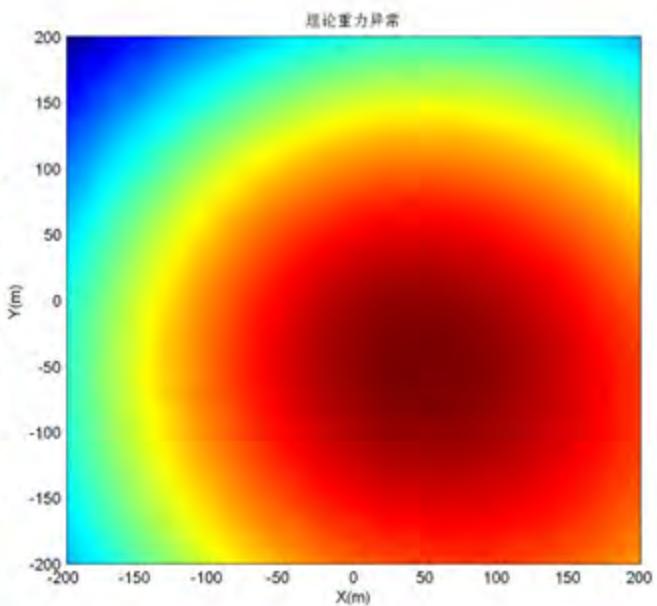
利用趋势分析方法应注意：

- d) 多项式阶次的选择，原则上应视区域异常的复杂程度来决定。
- e) 阶次太高，会造成趋势值受局部异常的影响较大，因而会削弱局部异常的成分。同时，也使趋势面畸变，因为阶次增加时，方程组解的误差会急剧增加，致使趋势面面目全非。一般说选用2-3阶即可，较复杂地区也只取4-5阶。

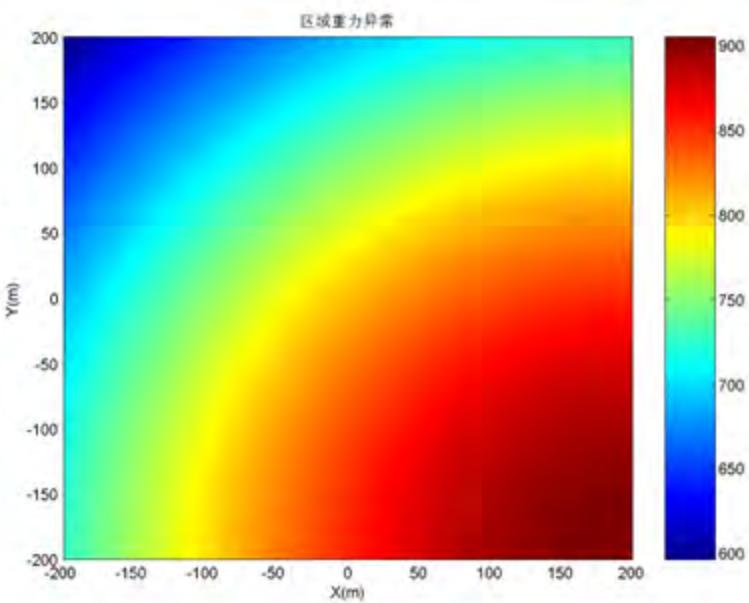
4. 场分离

■ 趋势面分析法

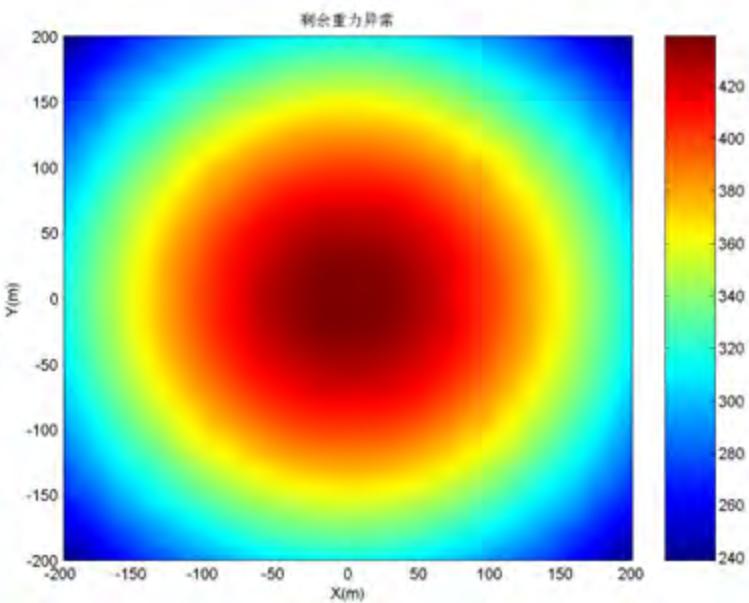
理论重力场



区域场

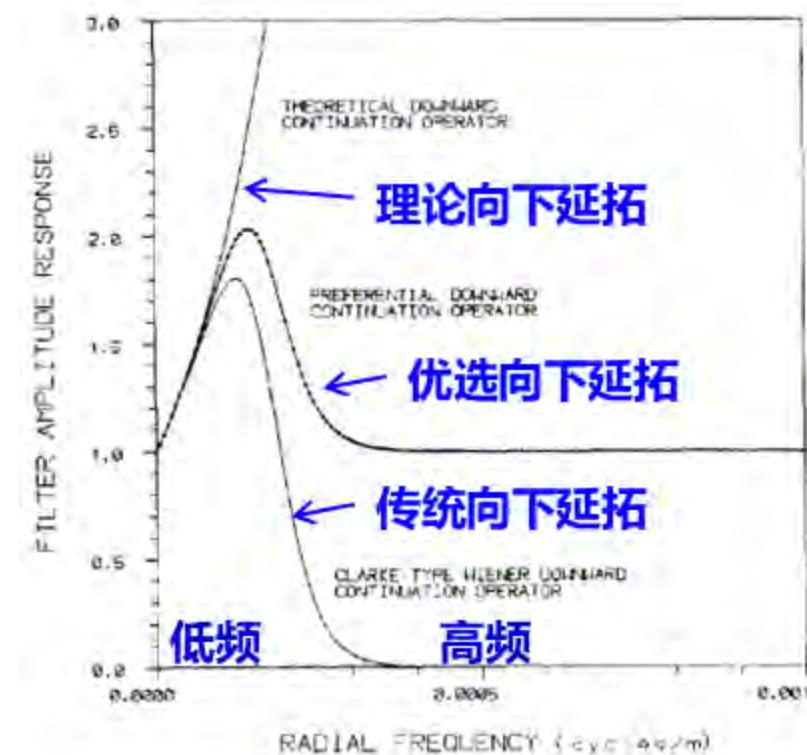
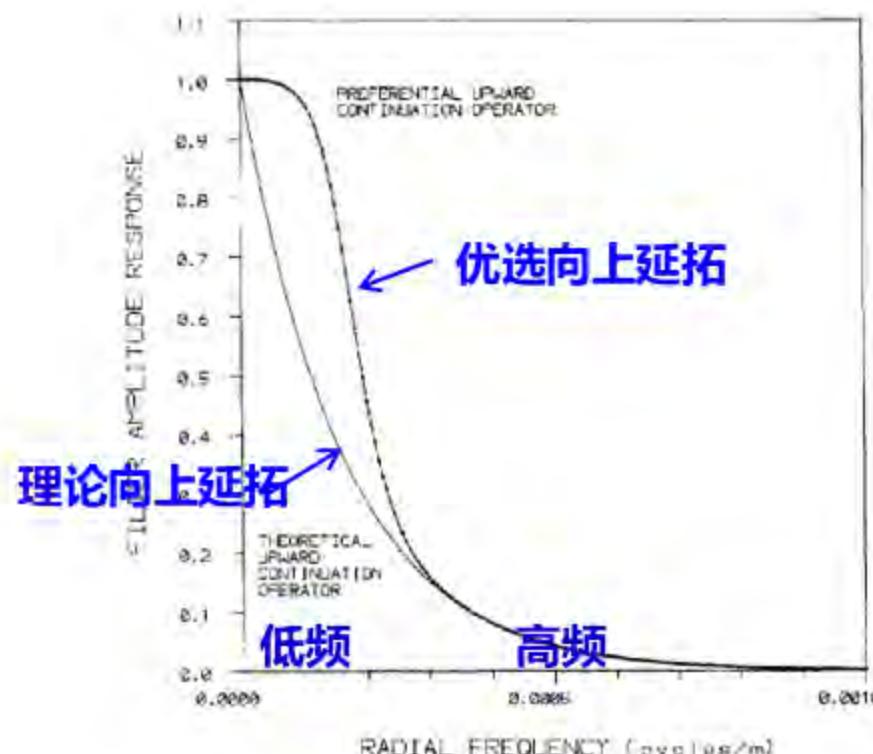


剩余场



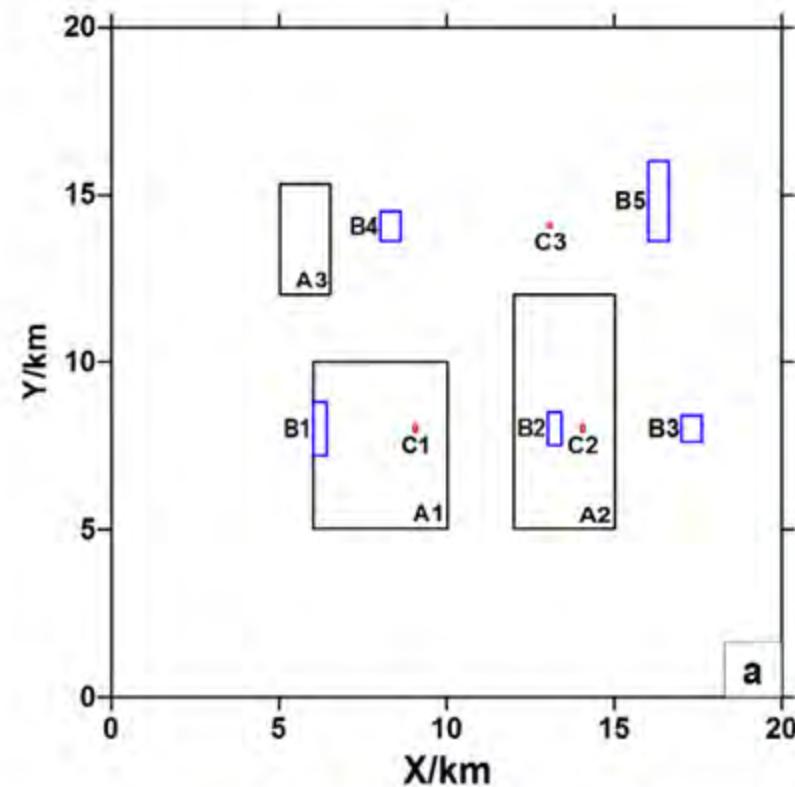
4. 场分离

■ 功率谱分析法

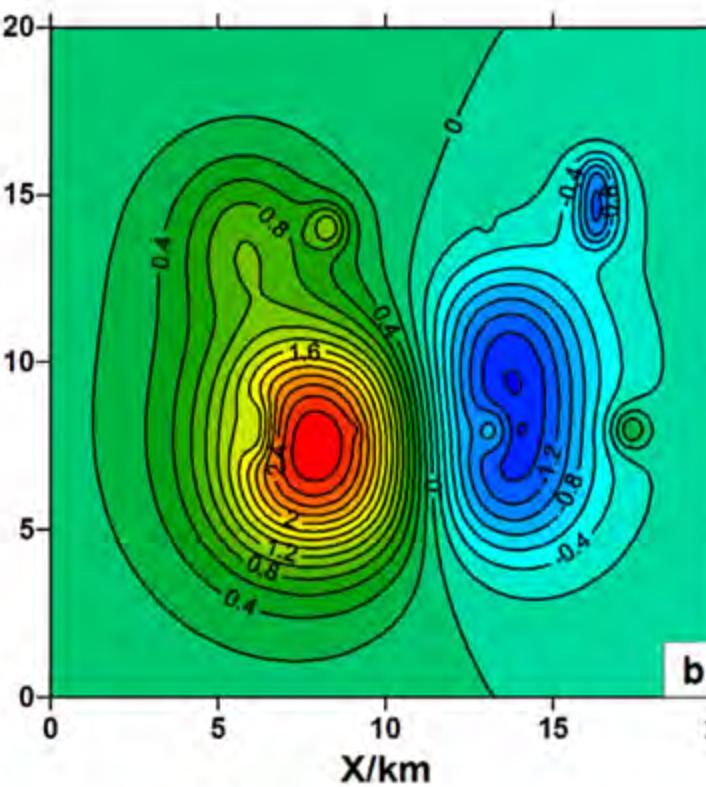


4. 场分离

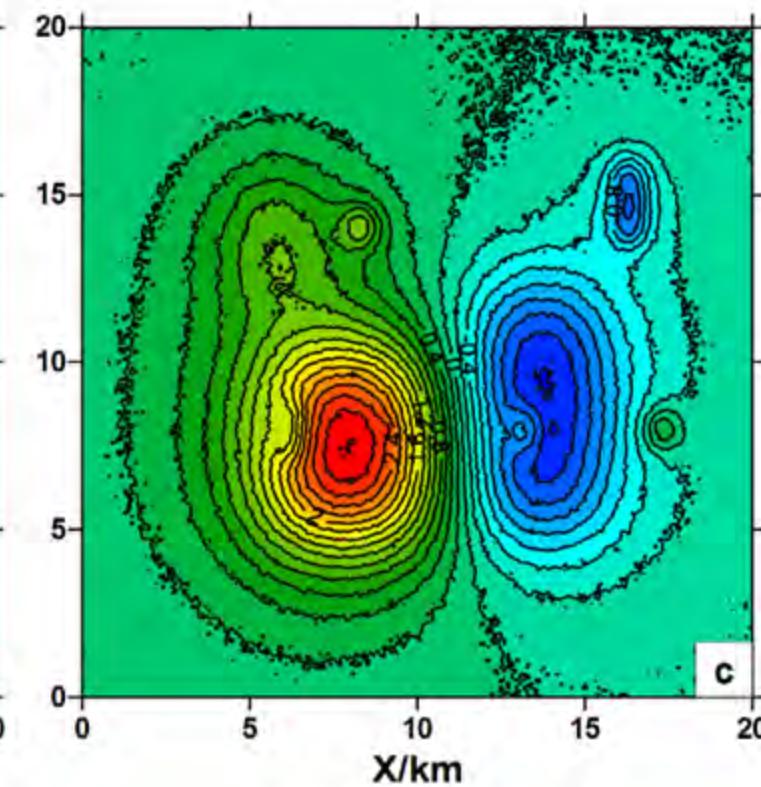
■ 功率谱分析法



模型水平展布



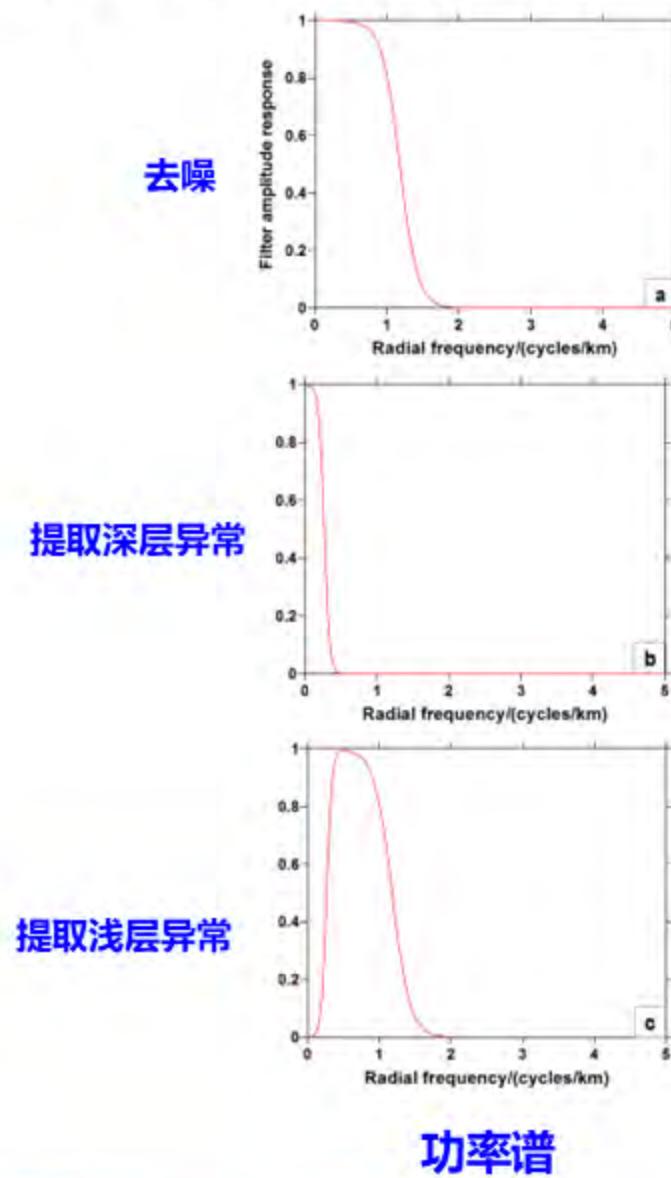
理论重力异常



加噪后的重力异常

4. 场分离

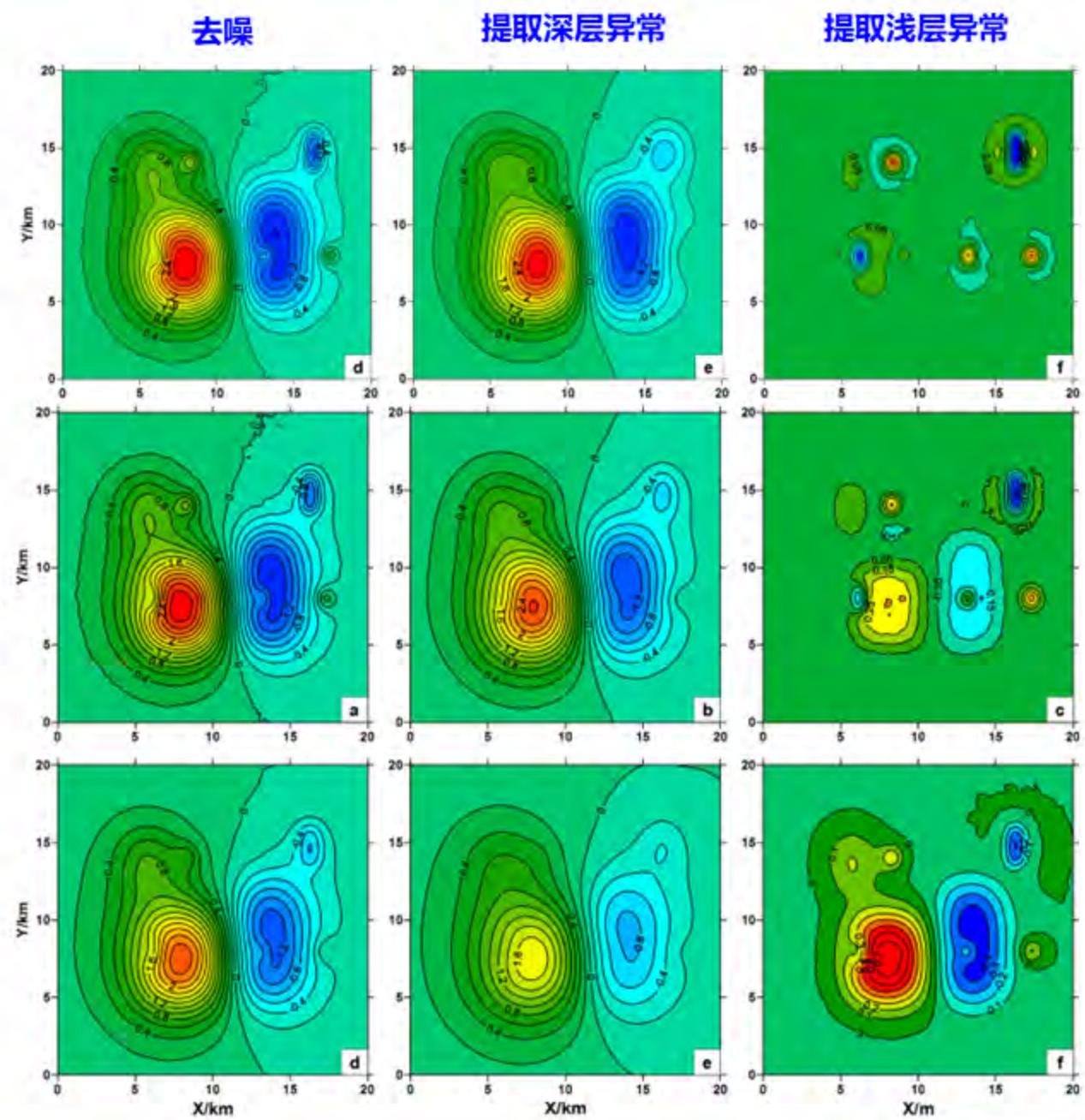
■ 功率谱分析法



优化滤波法

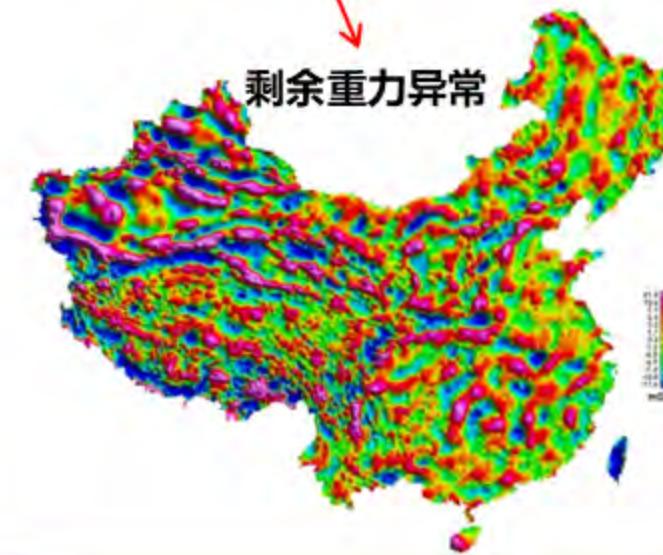
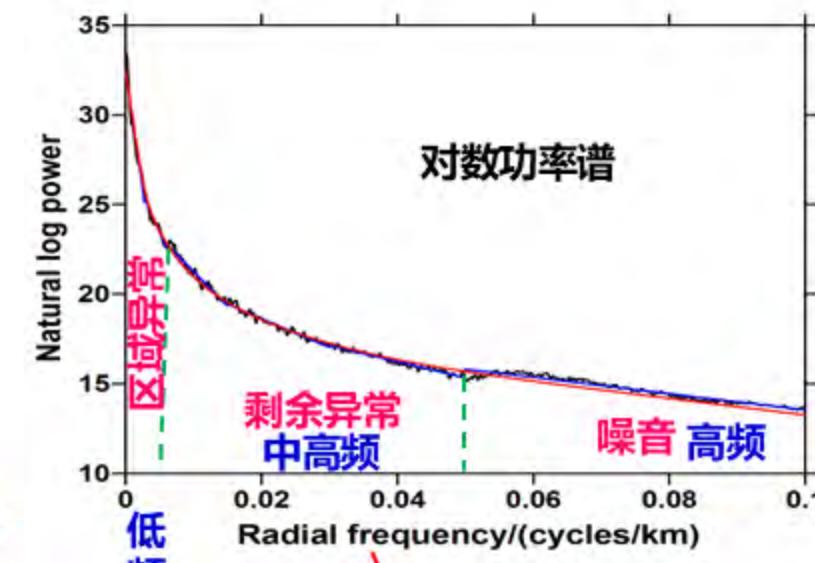
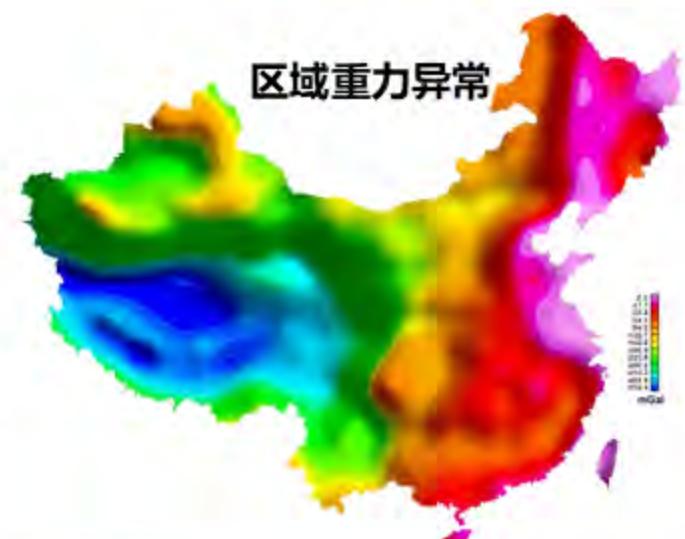
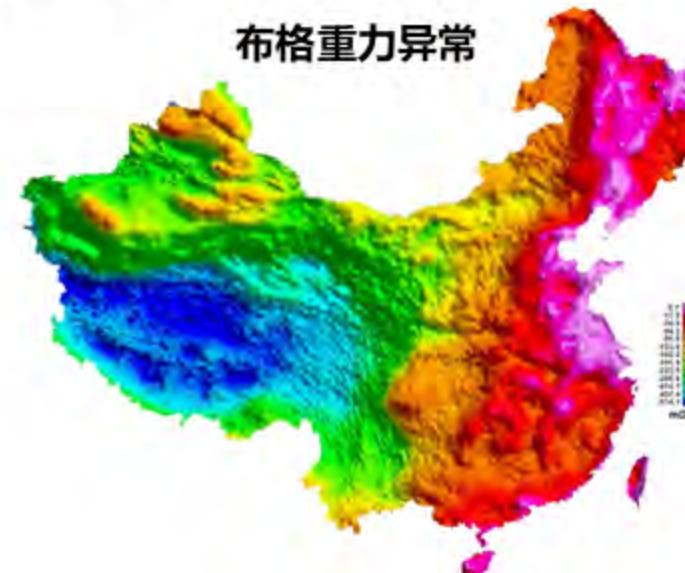
频率域滤波法

向上延拓法



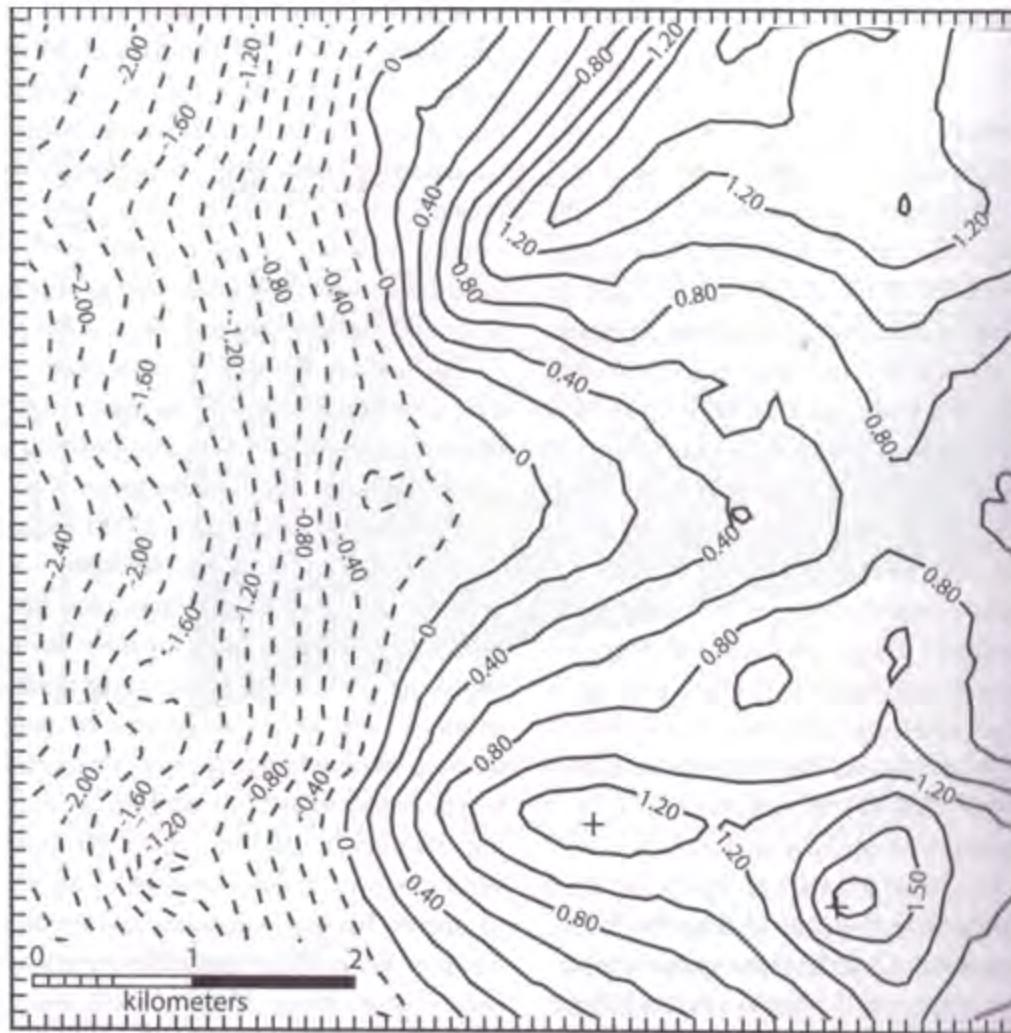
4. 场分离

■ 功率谱分析法



4. 场分离

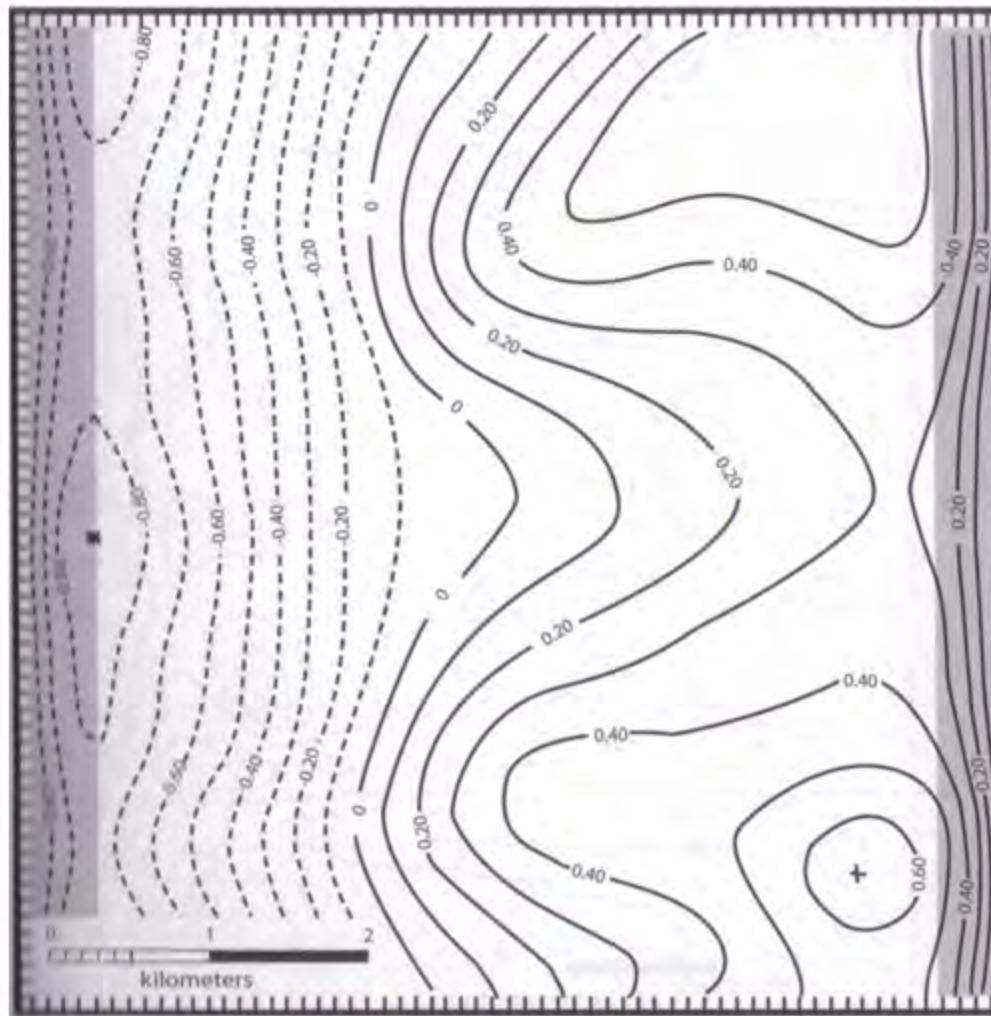
■ 滤波法



观测的重力异常分布（几个剩余重力异常加上区域重力异常和噪声）

4. 场分离

■ 滤波法



带通滤波后的重力异常分布 ($2 < \lambda < 4 \text{ km}$)，灰色阴影部分为边界效应，
异常地质解释时应去除。

4. 场分离

■ 滤波法



带通滤波后的重力异常分布 ($0.3 < \lambda < 1 \text{ km}$) 灰色阴影部分为边界效应，异常地质解释时应去除。

4. 场分离

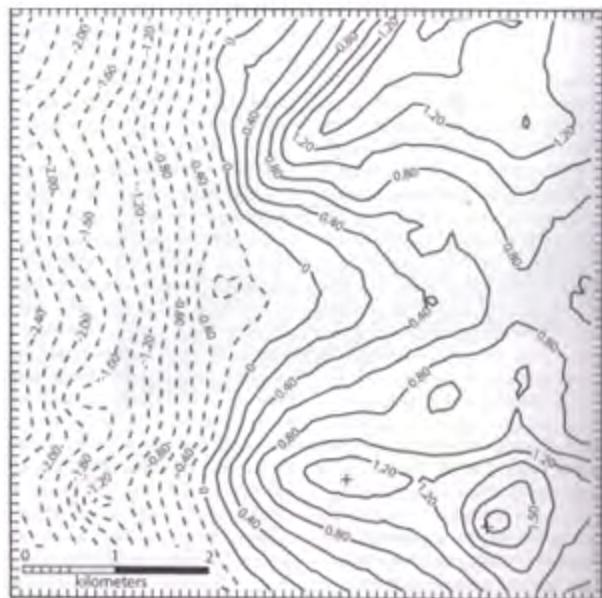
■ 滤波法



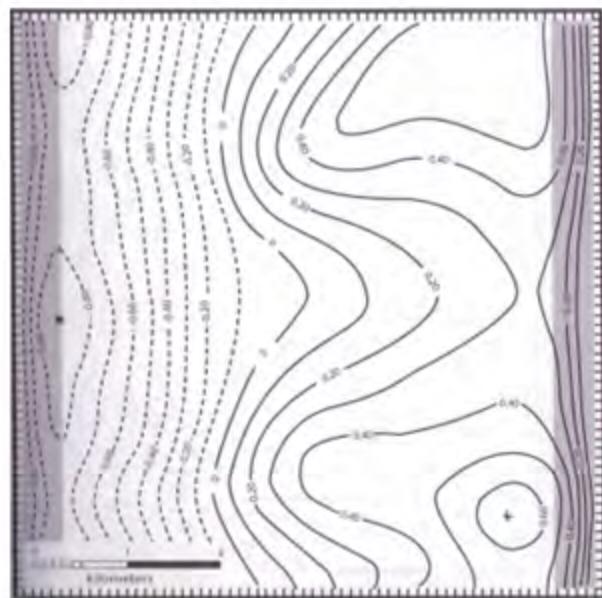
高通滤波后的重力异常分布 ($\lambda < 1 \text{ km}$) 灰色阴影部分为边界效应，
异常地质解释时应去除。

4. 场分离

■ 濾波法



$(2 < \lambda < 4 \text{ km})$



$(\lambda < 1 \text{ km})$

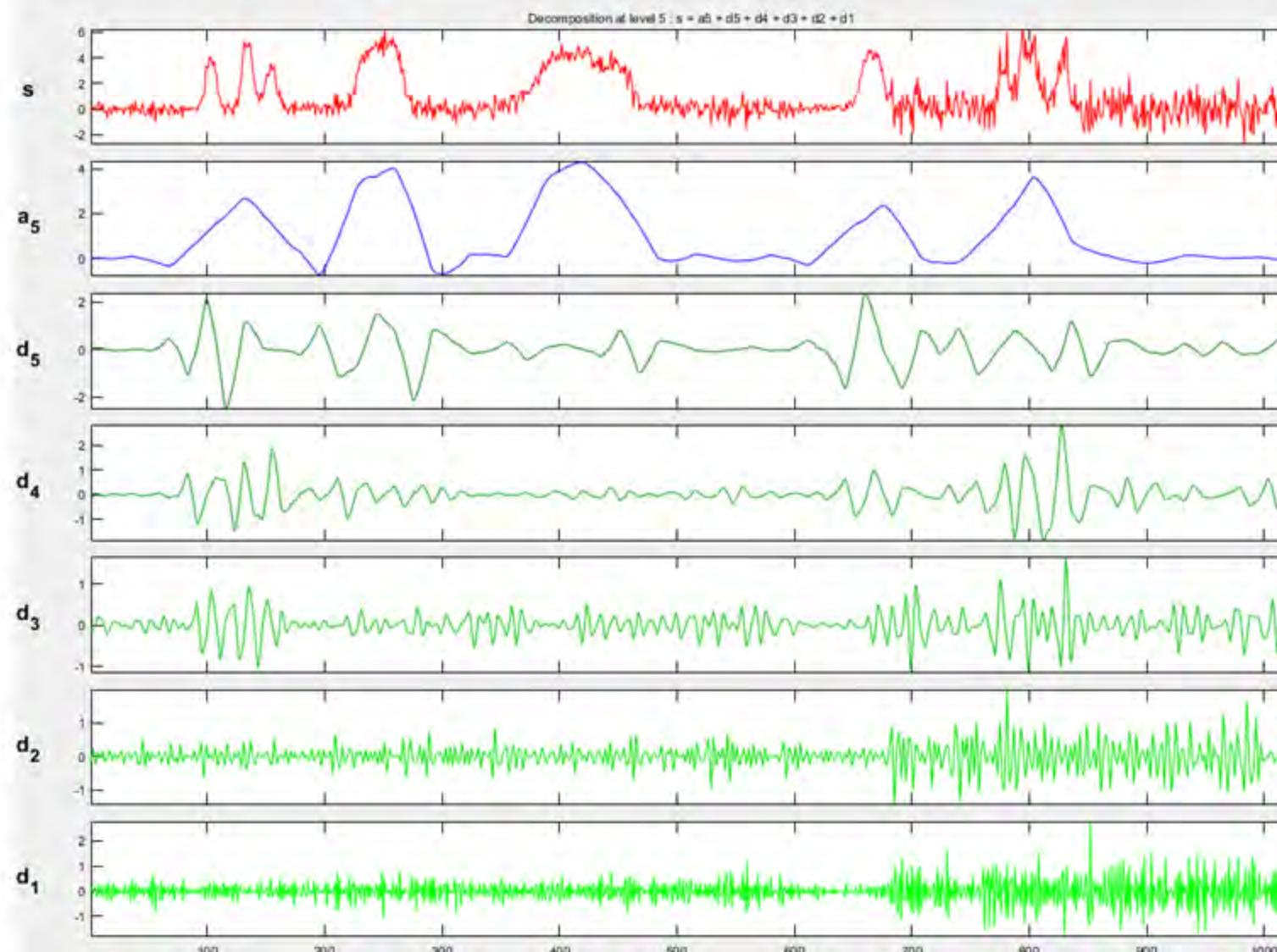


$(0.3 < \lambda < 1 \text{ km})$



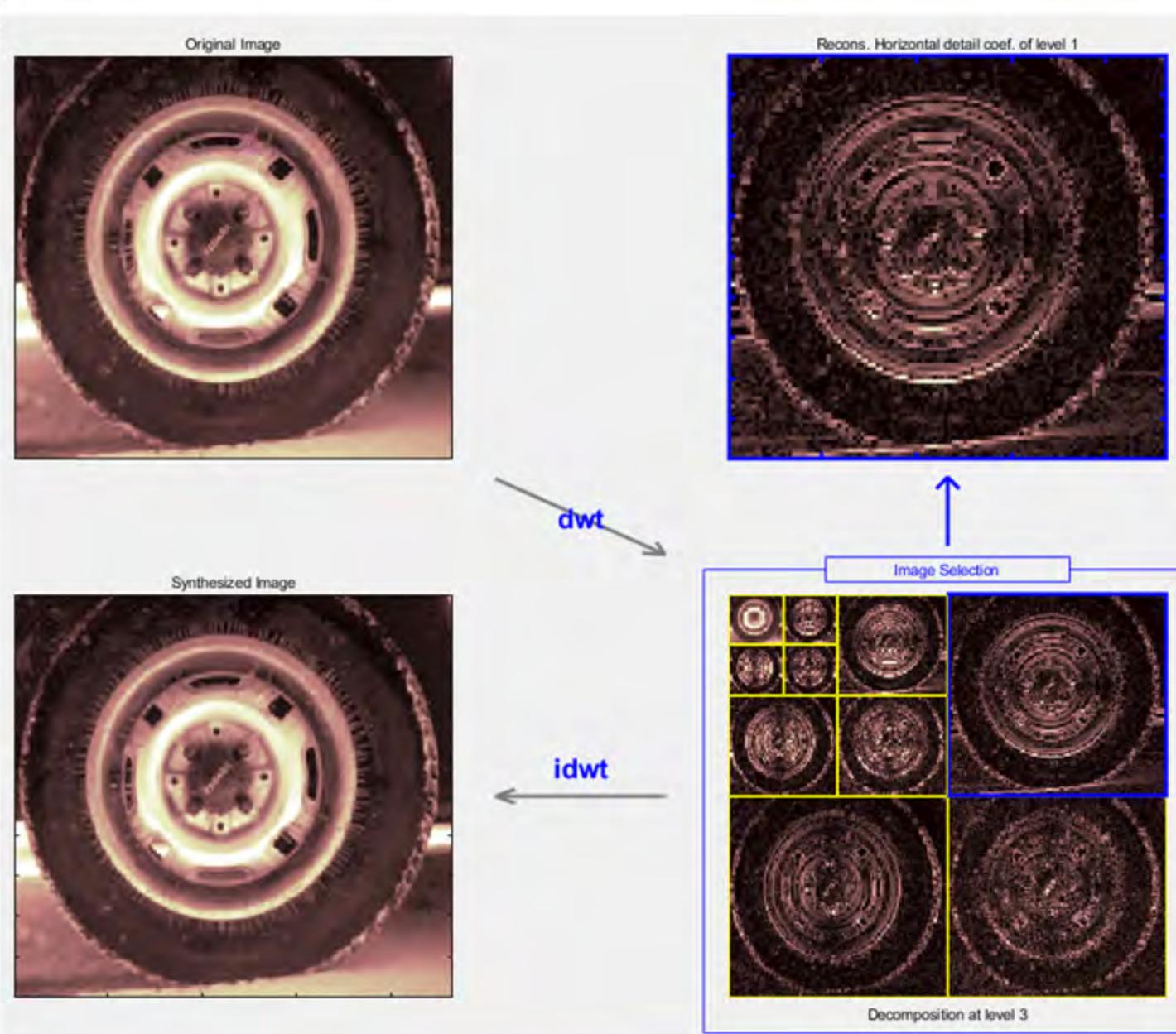
4. 场分离

■ 小波分析法



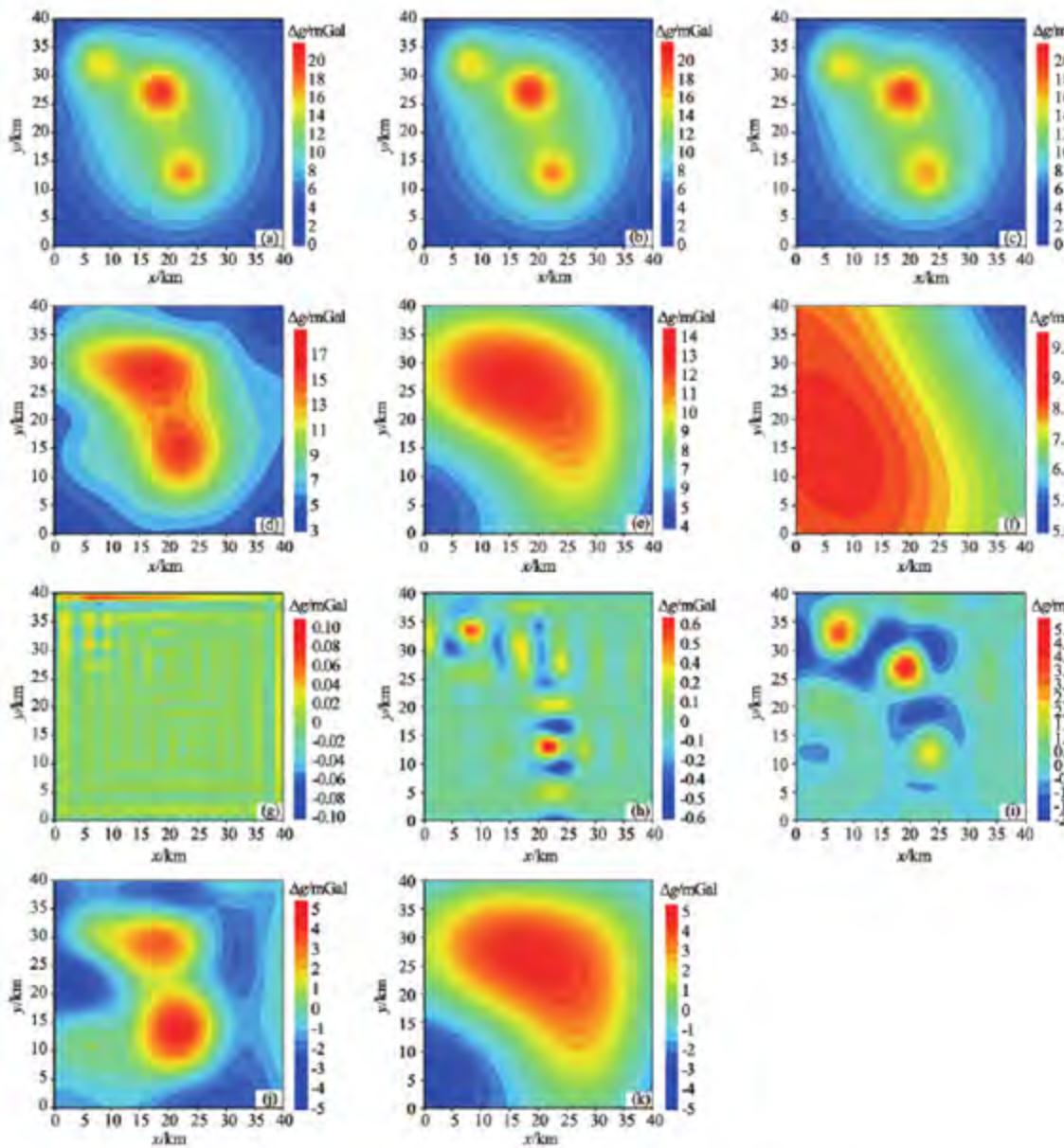
4. 场分离

■ 小波分析法



4. 场分离

■ 小波分析法

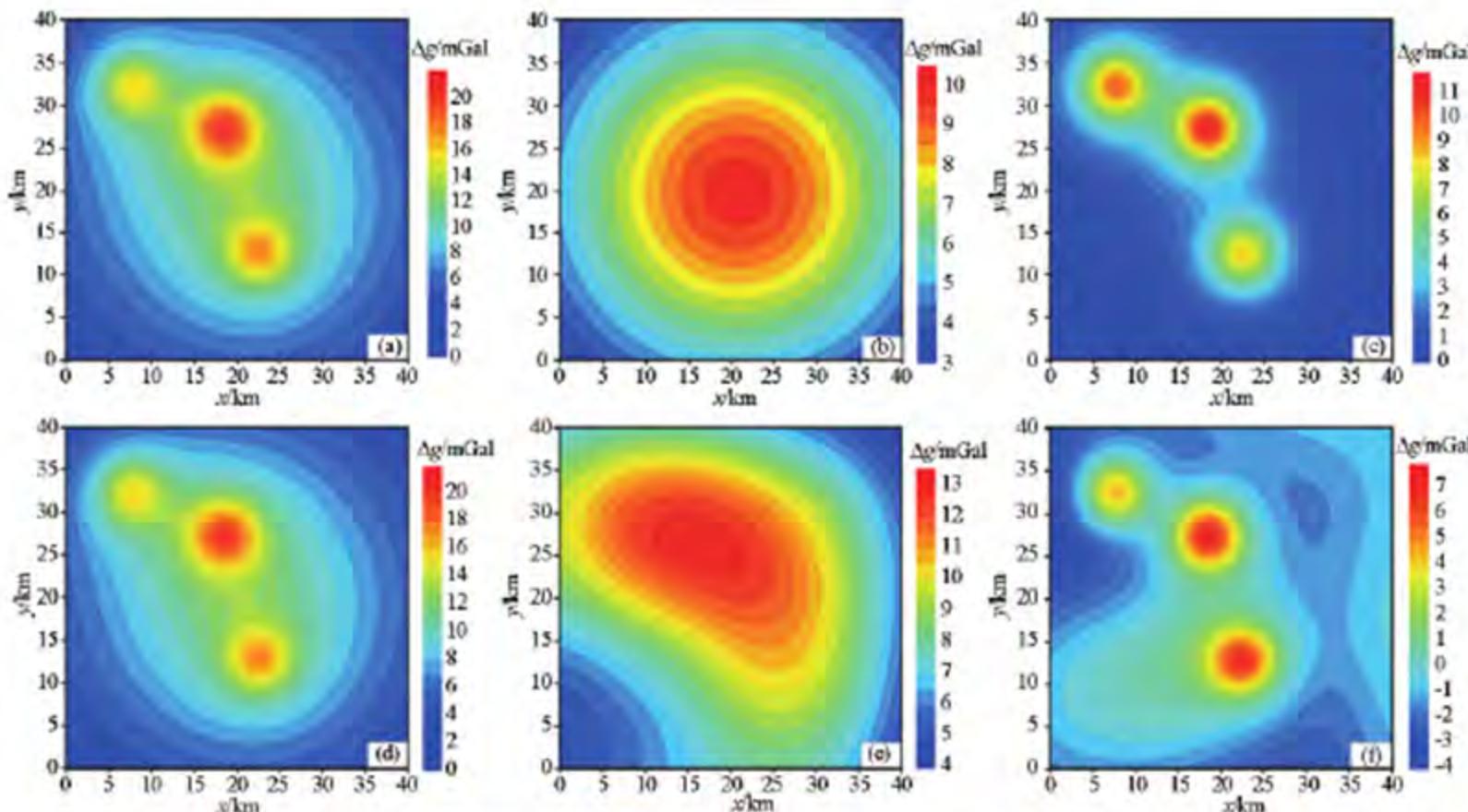


a—理论重力异常; b-f—小波分解 1~5 阶逼近; g-k—小波分解 1~5 阶细节
a—theoretical gravity anomaly; b-f— $1^{\text{st}}\sim 5^{\text{th}}$ order approximation of wavelet decomposition; g-k— $1^{\text{st}}\sim 5^{\text{th}}$ order detail of wavelet decomposition

(据孟庆奎等, 2022)

4. 场分离

■ 小波分析法



a—理论重力异常;b—理论区域异常;c—理论局部异常;d—小波恢复异常;e—小波区域异常;f—小波局部异常

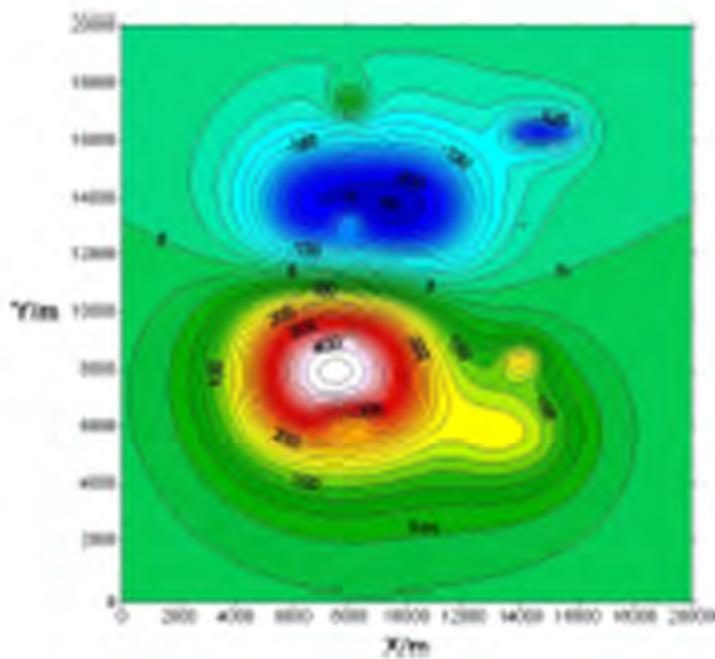
a—theoretical gravity anomaly; b—theoretical regional anomaly; c—theoretical local anomaly; d—wavelet recovery anomaly;

e—wavelet regional anomaly; f—wavelet local anomaly

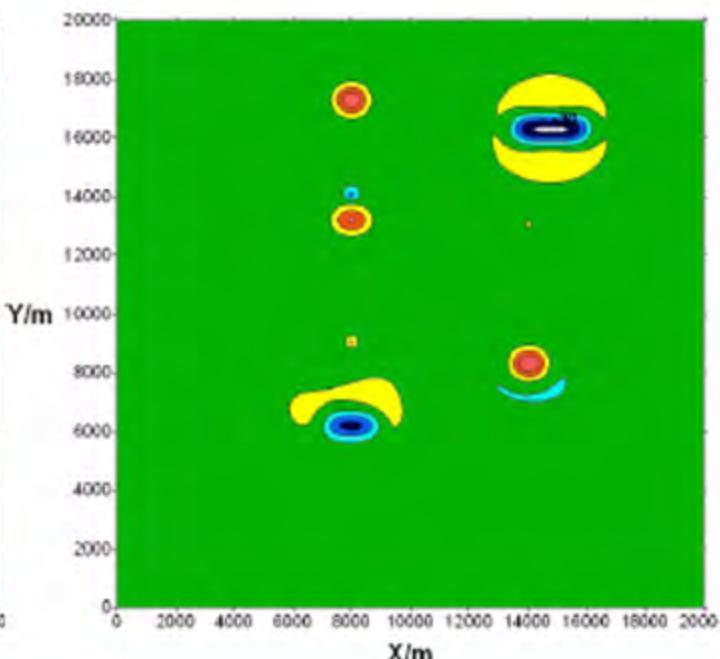
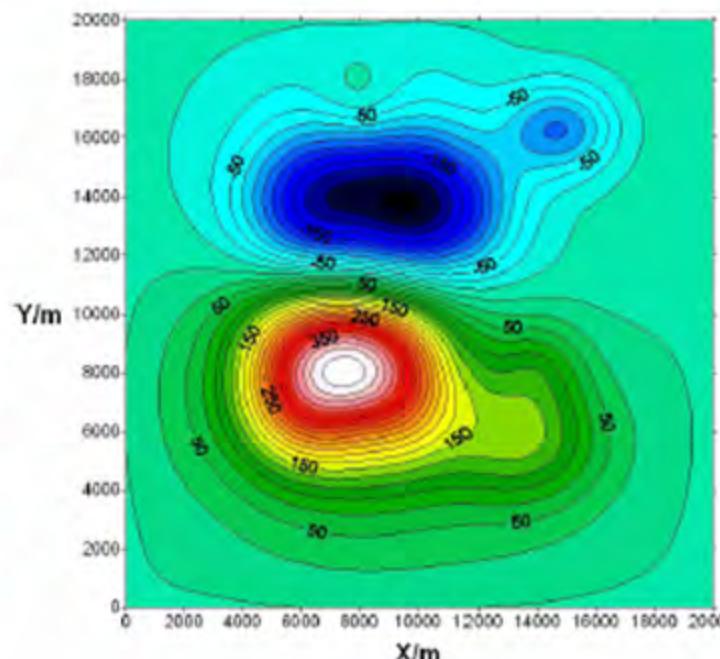
(据孟庆奎等, 2022)

4. 场分离

■ 向上延拓法



向上延拓
得到区域场



向上延拓
剩余场

4.场分离

■低秩分析法

JGR Solid Earth

RESEARCH ARTICLE

10.1029/2022JB024279

Key Points:

- Magnetic data contain superimposed signals from multiple rocks that make extraction of magnetic anomalies for targeted sources challenging
- A novel low-rank framework is proposed to extract target anomalies from superimposed magnetic

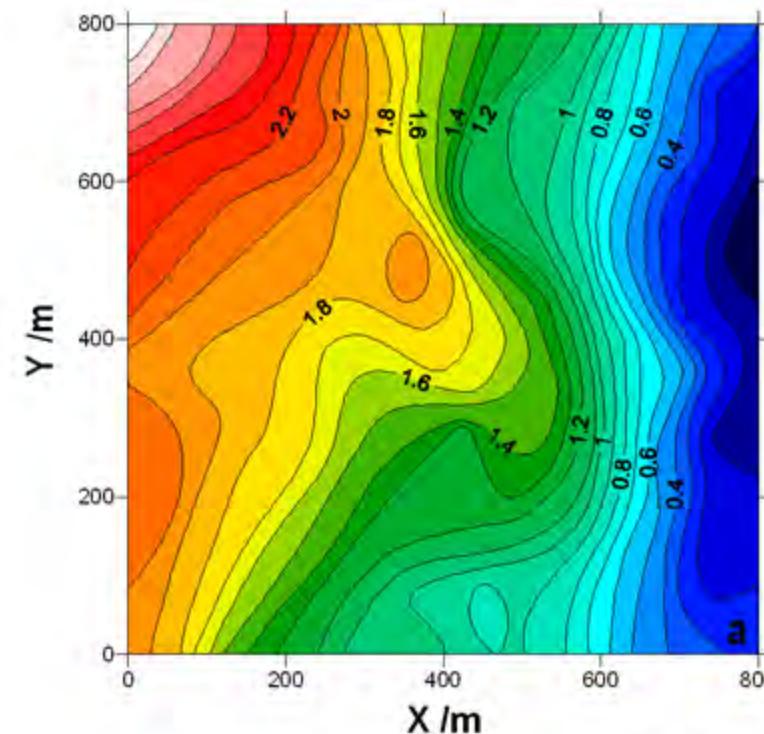
Can Targeted Source Information Be Extracted From Superimposed Magnetic Anomalies?

Dan Zhu¹ , Xiangyun Hu¹ , Shuang Liu¹ , Hongwei Li² , and Boxin Zuo³ 

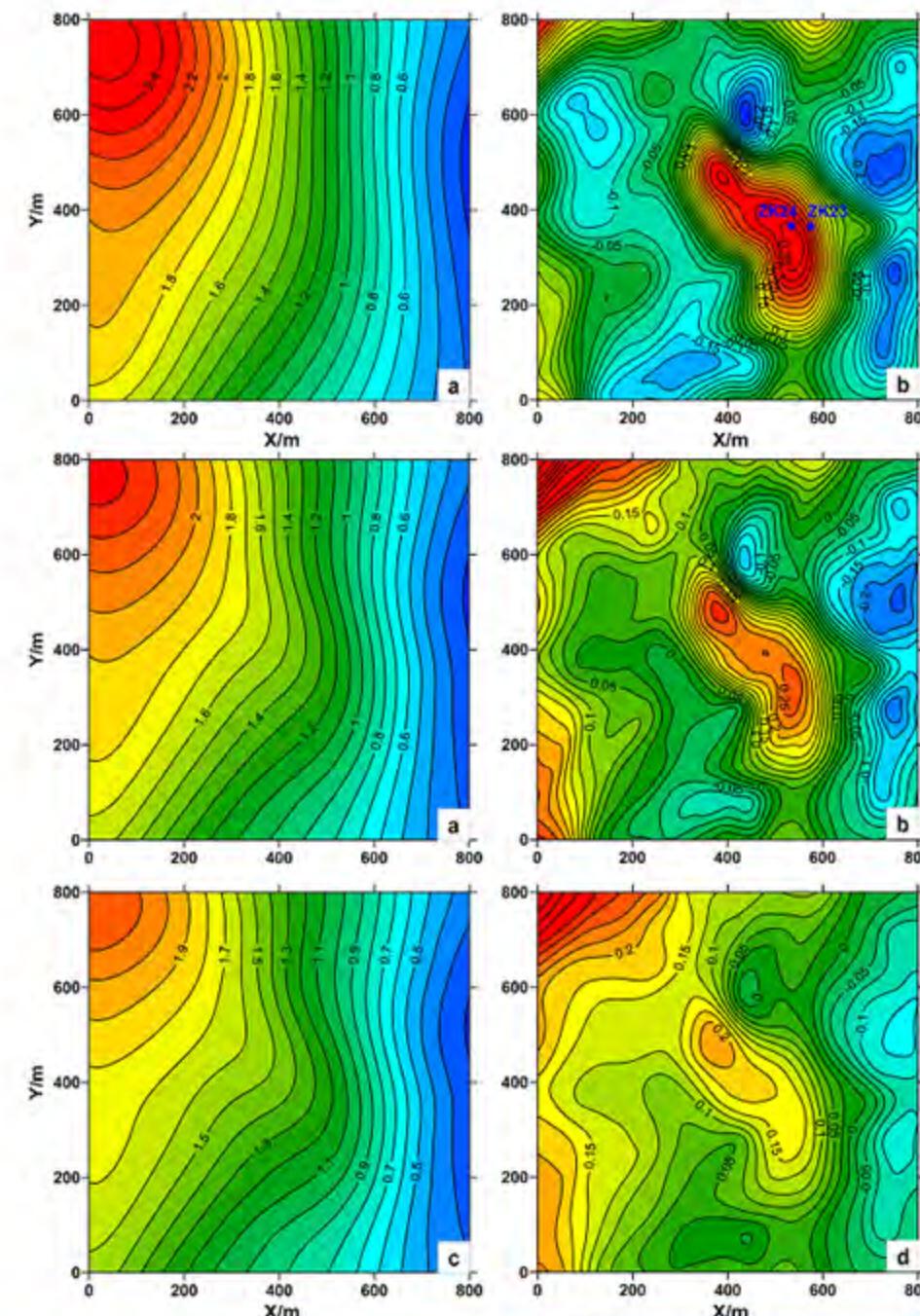
¹Hubei Subsurface Multi-scale Imaging Key Laboratory, Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan, China, ²School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan, China, ³School of Computer Sciences, China University of Geosciences, Wuhan, China

4. 场分离

■ 实例



某矿山实际布格重力异常



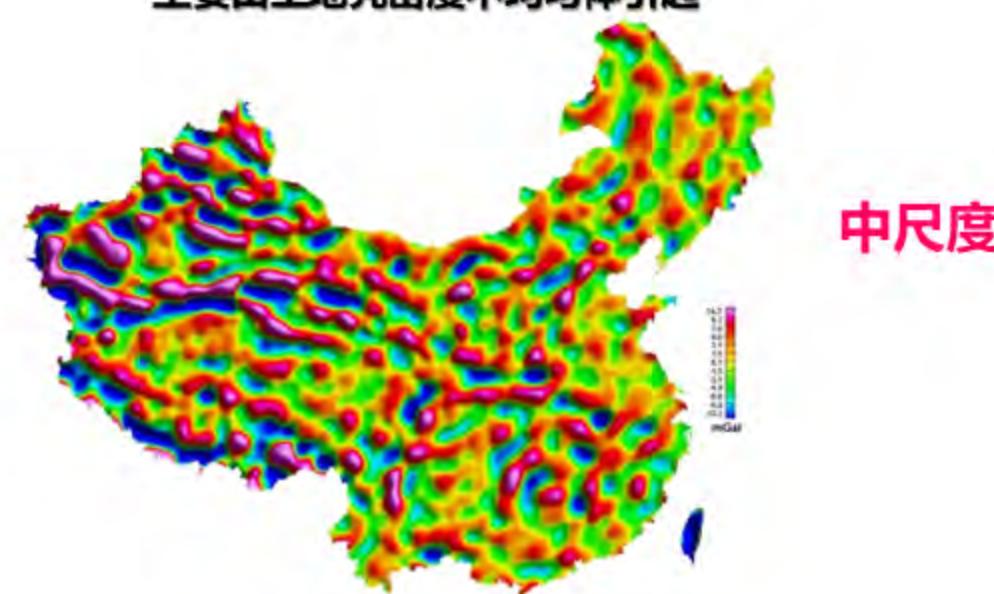
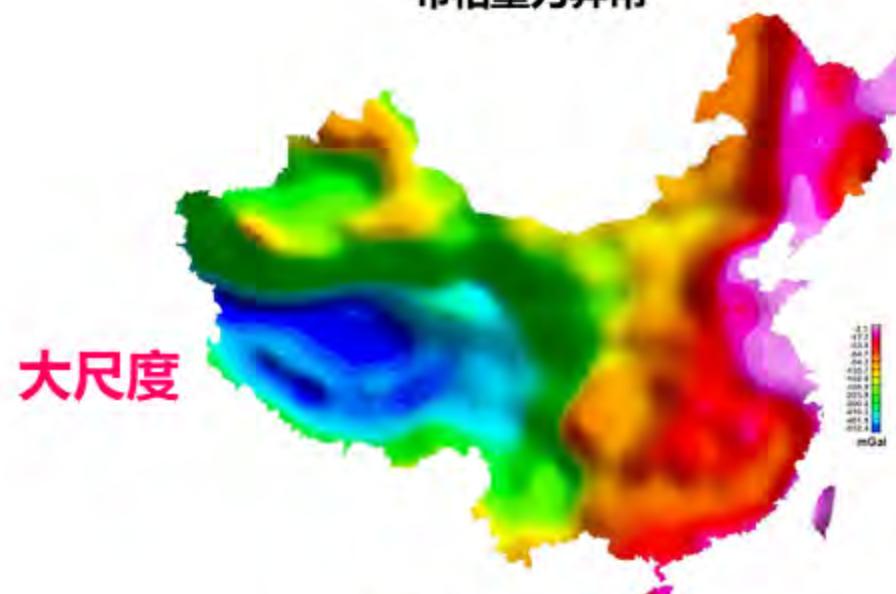
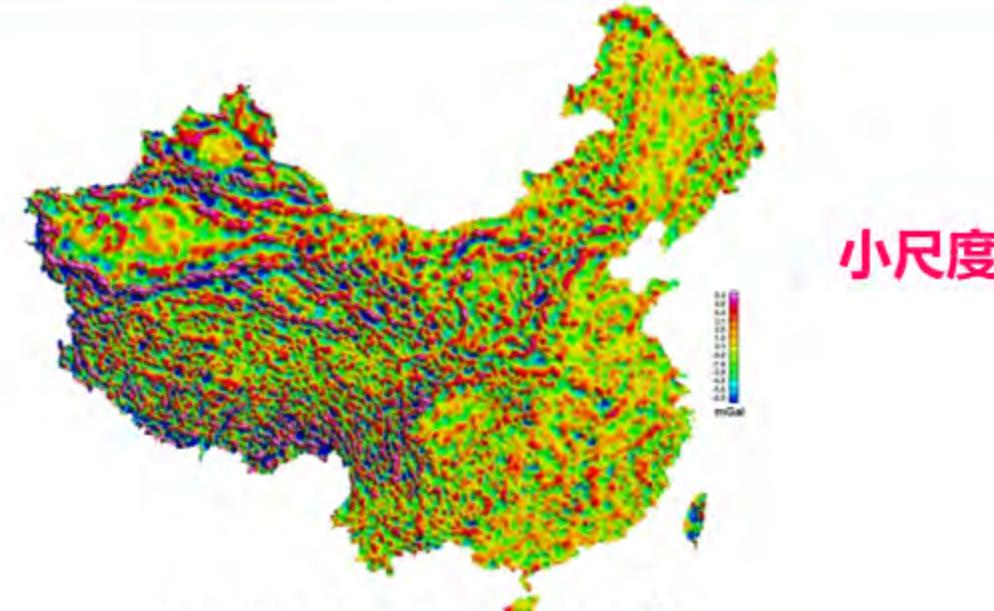
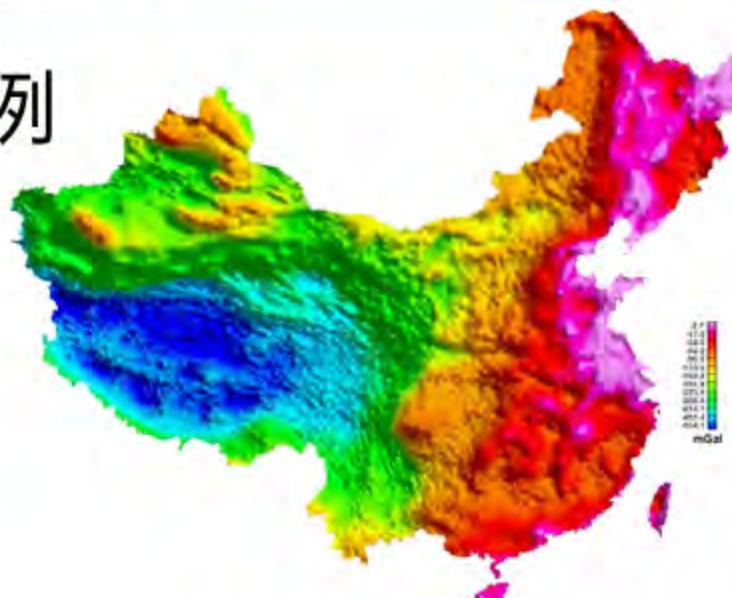
优化滤波

带通滤波

传统延拓

4. 场分离

■ 实例



目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

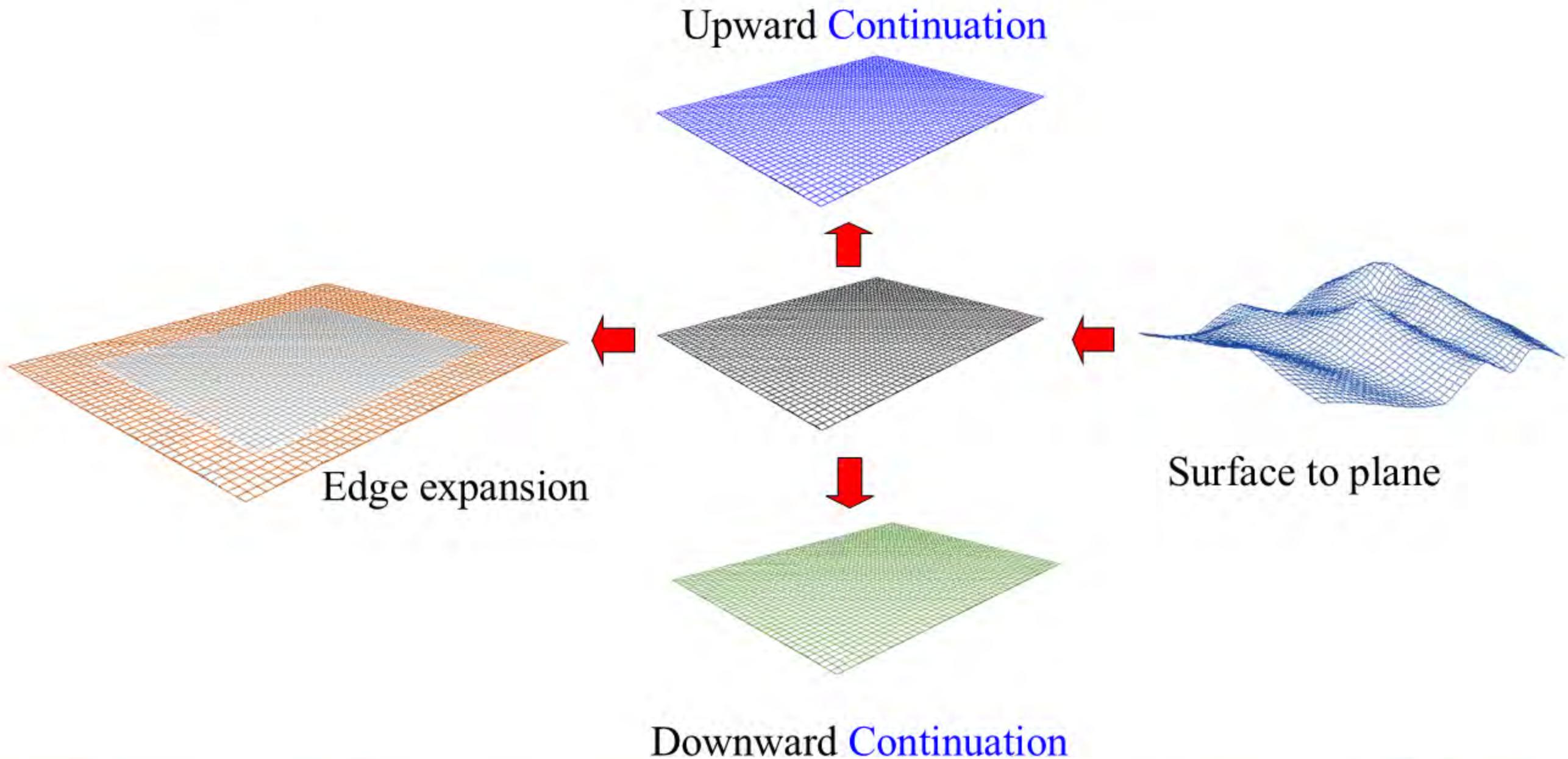
第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

第四节 场分离

第五节 空间延拓

5. 空间延拓



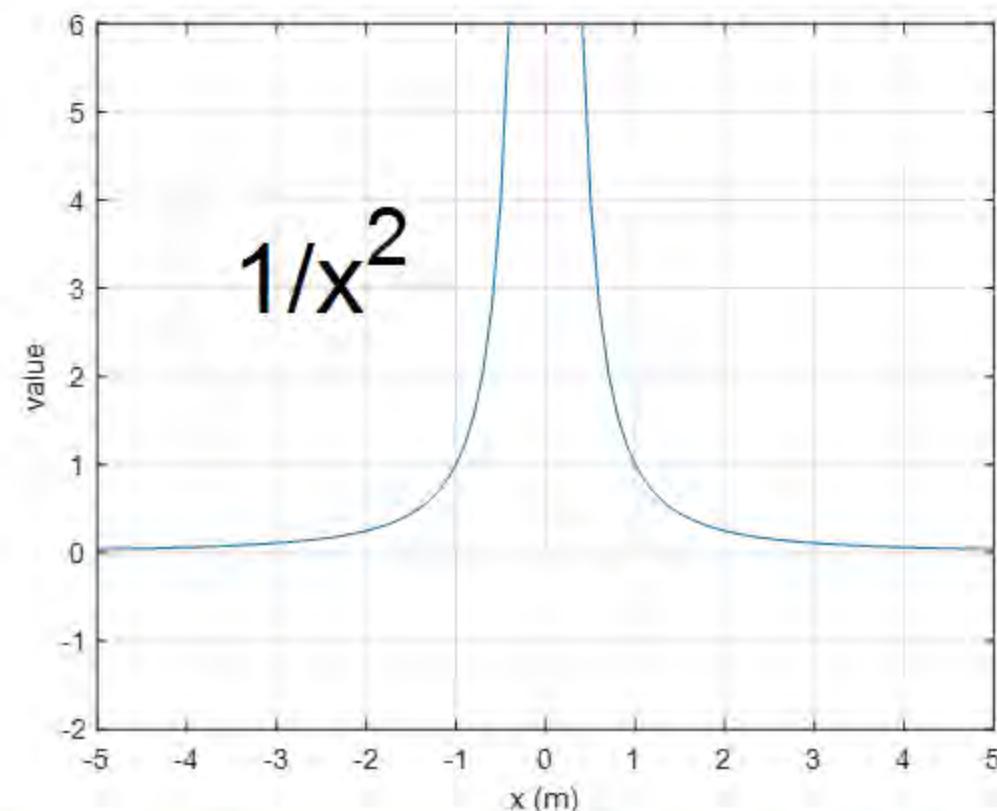
5. 空间延拓

■ 延拓 (Continuation)

$$F_{\text{引}} = G \frac{Mm}{r^2}$$

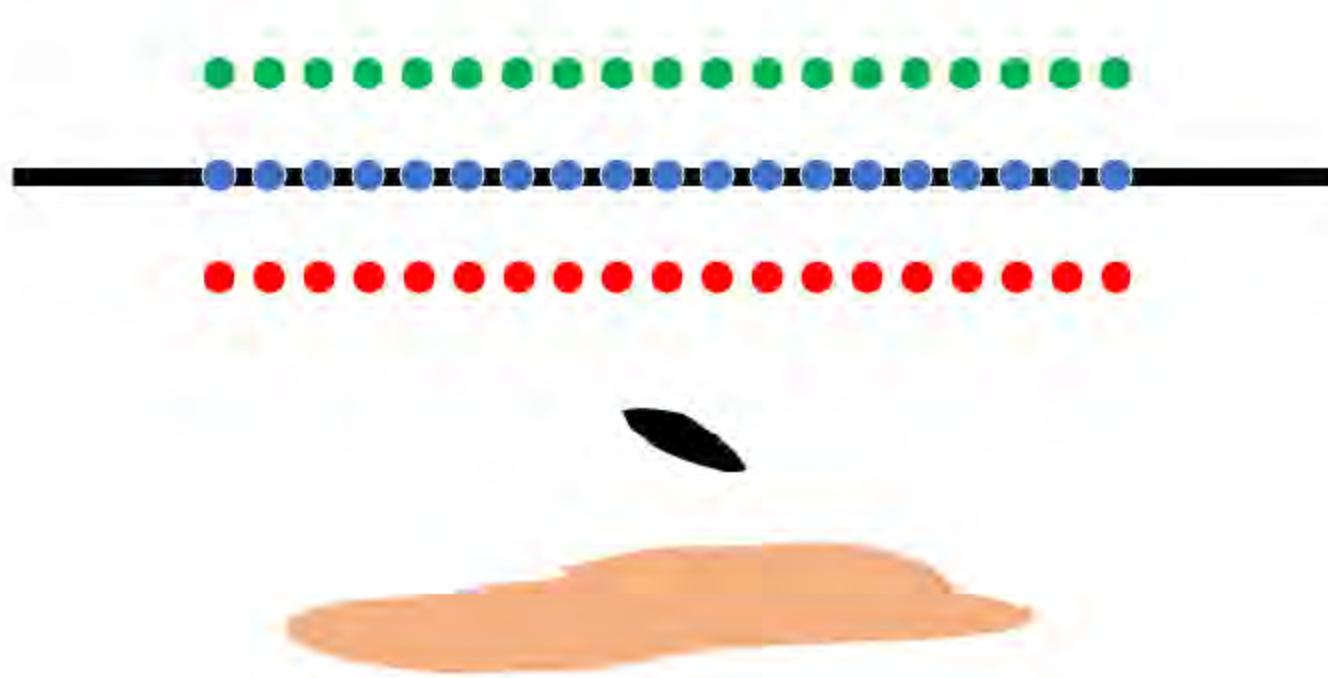
核心思想：

重力异常与场源到测点距离的平方成反比。



5. 空间延拓

■ 延拓 (Continuation)



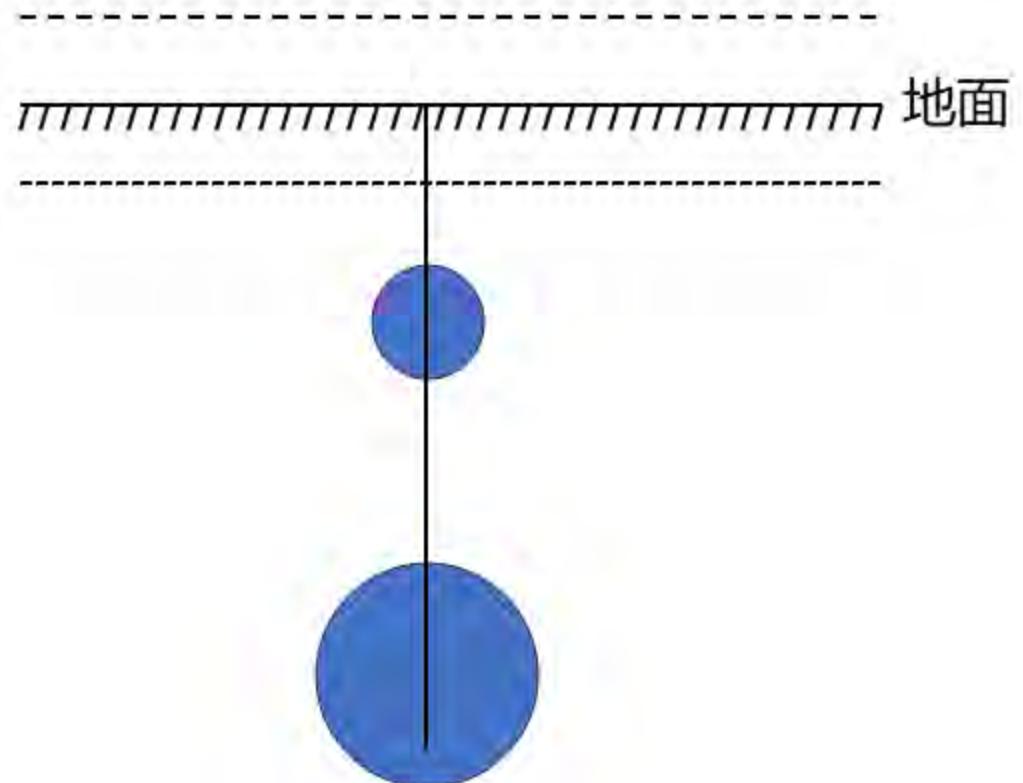
对于深度相差较大的两个场源体来说，进行同一个高（深）度的延拓，它们各自的异常减弱或增大的速度是不同的。

5. 空间延拓

■ 延拓

先看一个简单例子，有两个大小和埋深不同的球体，若大球距地面深度为小球的10倍，两者在地面形成的异常分别为：

$$\Delta g_{\max} = \frac{GM}{D^2}$$



5. 空间延拓

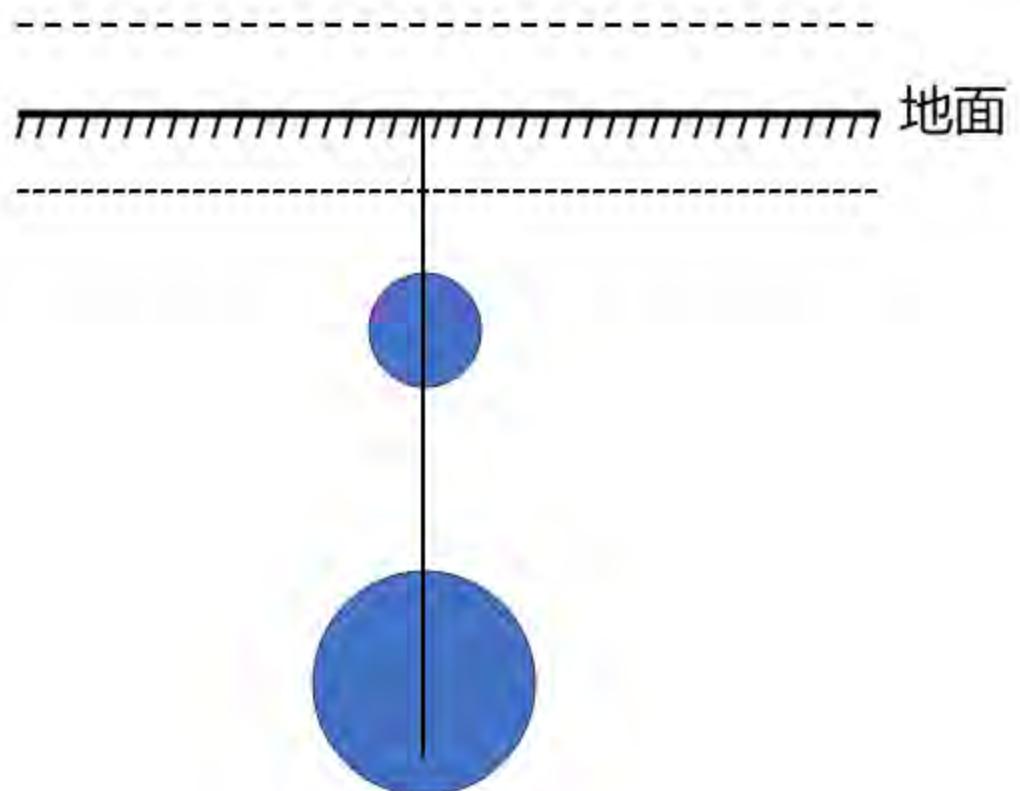
■ 延拓

先看一个简单例子，有两个大小和埋深不同的球体，若大球距地面深度为小球的10倍，两者在地面形成的异常分别为：

$$\Delta g_{\text{大}} = 5 \quad (\text{mGal})$$

$$\Delta g_{\text{小}} = 1 \quad (\text{mGal})$$

$$\Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} = 5:1$$



5. 空间延拓

■ 延拓

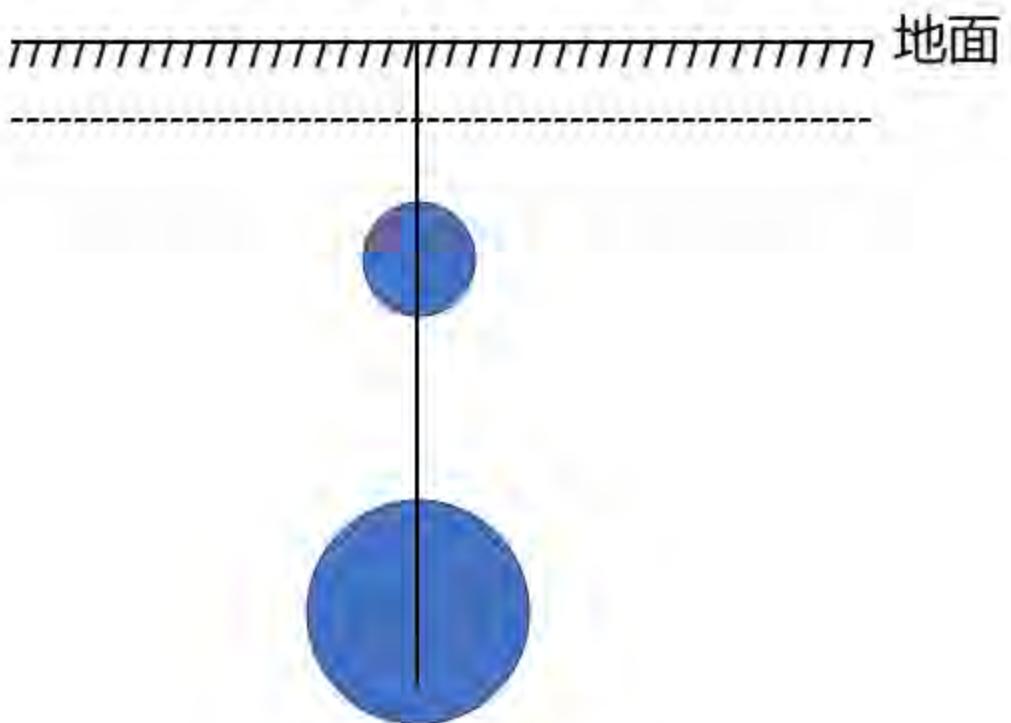
若将观测平面向上抬升，其高度为大球埋深的1/10；而对小球，其中心埋深则变为原来的2倍。在新观测面上，大、小球的重力异常值为：

$$\Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} = 17 : 1 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} = 5 : 1 \quad \text{地面} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\Delta g_{\text{大}} = 5 \times \frac{1}{(1+0.1)^2} = 4.13 \text{ (mGal)}$$

$$\Delta g_{\text{小}} = 1 \times \frac{1}{(1+1)^2} = 0.25 \text{ (mGal)}$$



5. 空间延拓

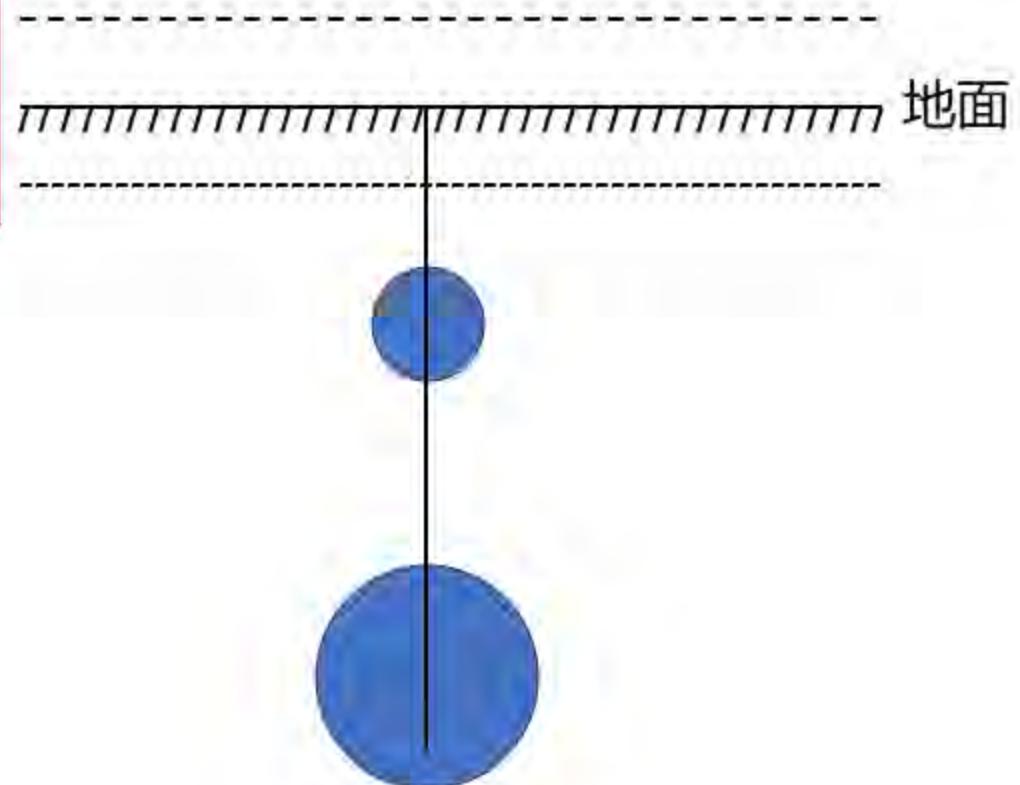
■ 延拓

若将观测面设在地面以下，其深度为小球埋深的一半，则两球的最大重力异常为：

$$\Delta g_{\text{大}} = 5 \times \frac{1}{(1 - 0.5/10)^2} = 5.5 \text{ (mGal)}$$

$$\Delta g_{\text{小}} = 1 \times \frac{1}{(1 - 0.5)^2} = 4 \text{ (mGal)}$$

$$\begin{aligned}\Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 17 : 1 \\ \Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 5 : 1 \\ \Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 5.5 : 4\end{aligned}$$



5. 空间延拓

■ 延拓

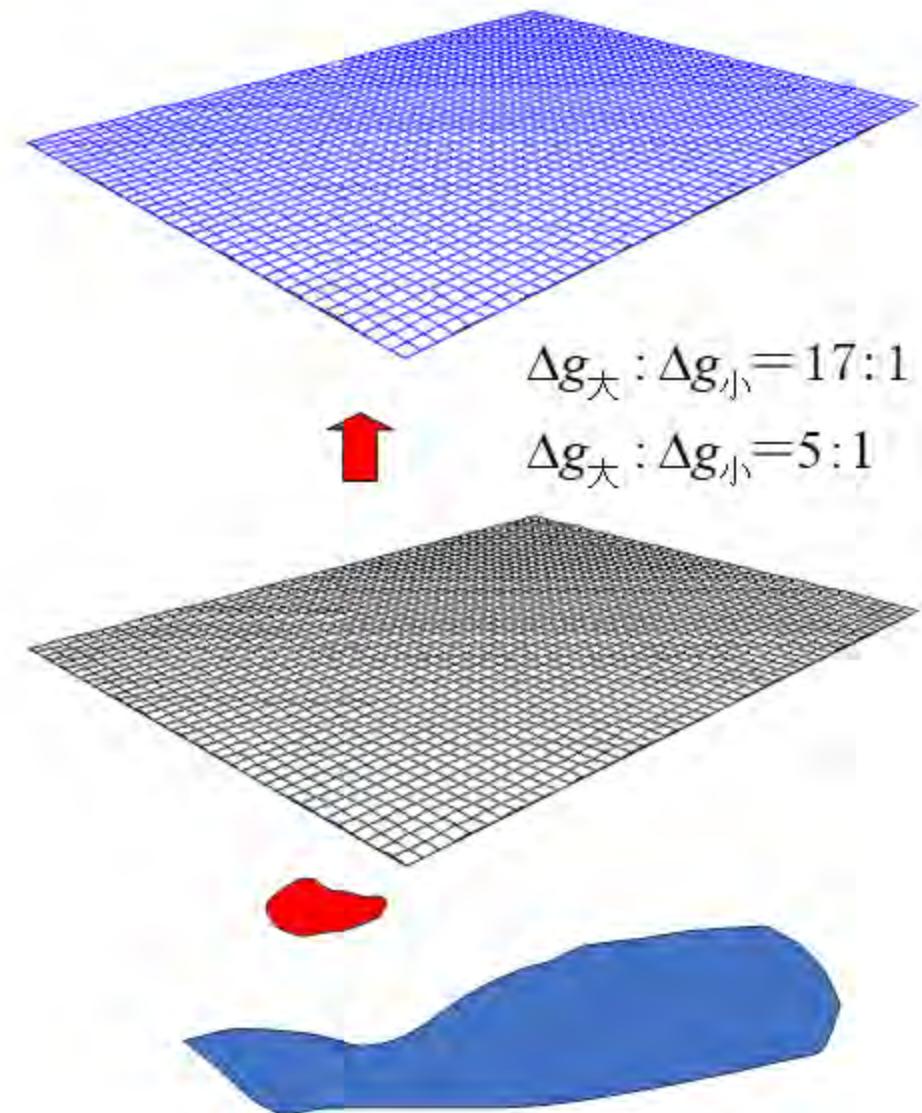
- ✓ 由此可见，抬高观测面的结果是突出深部球体的异常（可以理解为区域异常），压制浅部球体的异常（局部异常）
- ✓ 与此相反，降低观测面，则可以突出浅部异常，压制深部异常。解析延拓正是通过地面测量的重力异常，通过变换到地下（向下延拓）和地面以上某一个高度（向上延拓）研究重力异常的特性和分布。

5. 空间延拓

■ 向上延拓

进行上延计算时，由浅部场源体引起的范围小、比较尖锐的“高频”异常，随高度增加的衰减速度比较快；而由深部场源体引起的范围大、宽缓的“低频”异常，随高度增加的衰减速度比较慢。

因此，**向上延拓有利于相对突出深部异常特征**；



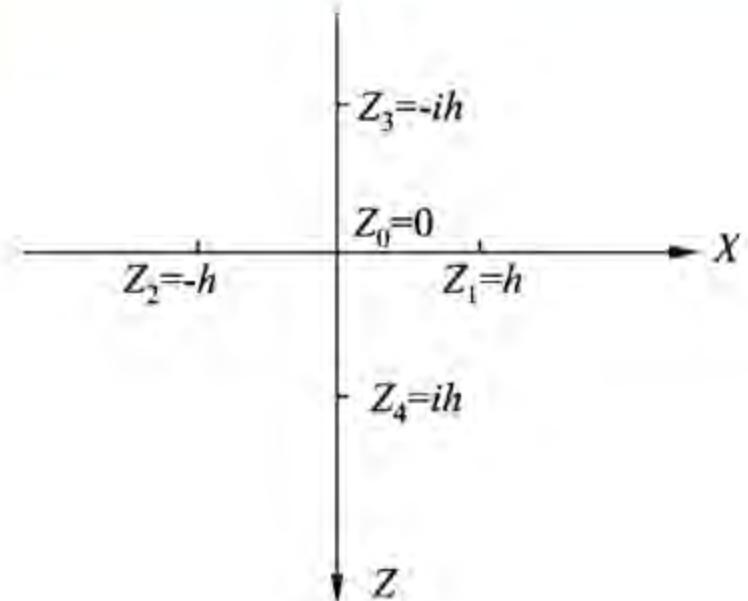
5. 空间延拓

■ 向上延拓

$$\frac{\partial V^2(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2(x, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$\left. \frac{\partial V(x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \Delta g(x, 0)$$

一维向上延拓



$$\Delta g(0, -h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, 0) d\xi}{\xi^2 + h^2}$$

5. 空间延拓

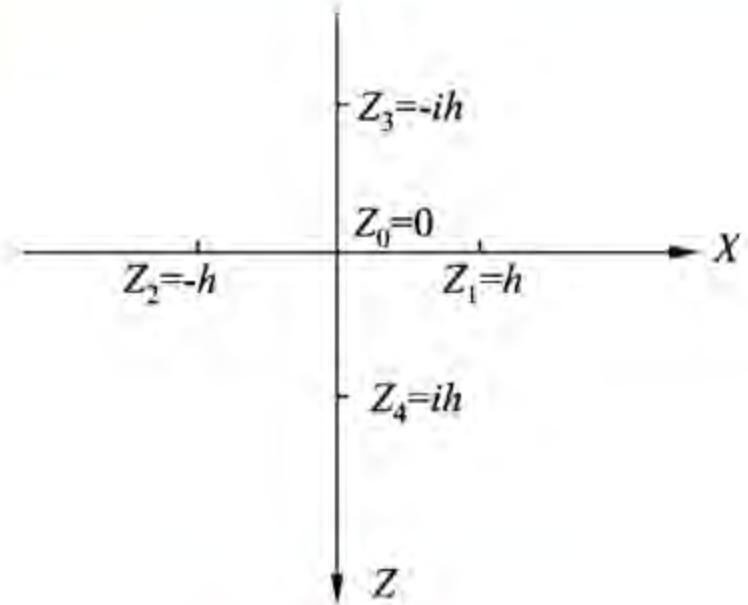
■ 向上延拓

$$\Delta g(0, -h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, 0) d\xi}{\xi^2 + h^2}$$

$$\Delta g(0, -h) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n \Delta g(ih, 0) \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \frac{h}{\xi^2 + h^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n \Delta g(ih, 0) \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{4i^2 + 3}$$

一维向上延拓



$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
$$\operatorname{tg}^{-1} x = \arctan x$$

5. 空间延拓

■ 向上延拓

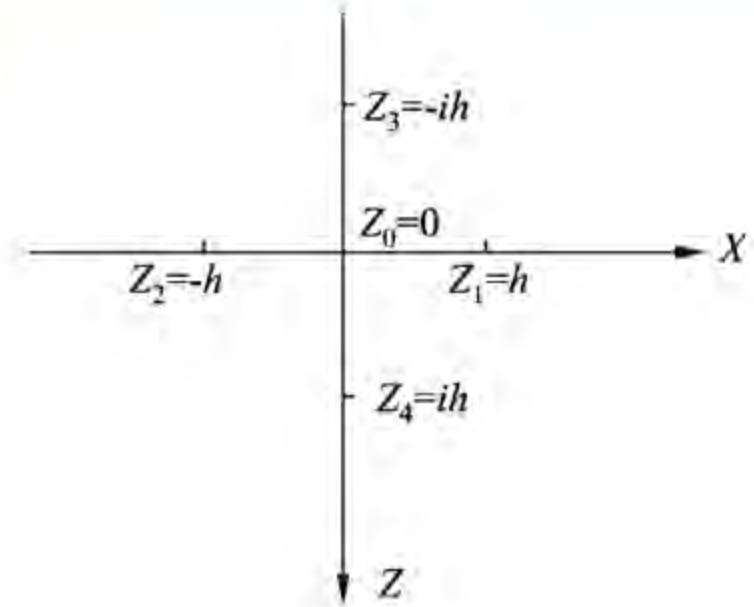
$$\Delta g(0, -h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, 0) d\xi}{\xi^2 + h^2}$$

$$\Delta g(0, -h) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^n \Delta g(ih, 0) \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{4i^2 + 3}$$

$$\Delta g(0, -h) = 0.2951 \Delta g(0)$$

$$\begin{aligned} &+ 0.1653 [\Delta g(h) + \Delta g(-h)] + 0.0660 [\Delta g(2h) + \Delta(-2h)] \\ &+ 0.0326 [\Delta g(3h) + \Delta g(-3h)] + 0.0190 [\Delta g(4h) + \Delta(-4h)] \\ &+ 0.0124 [\Delta g(5h) + \Delta g(-5h)] + 0.0087 [\Delta g(6h) + \Delta(-6h)] \\ &+ 0.0064 [\Delta g(7h) + \Delta g(-7h)] + 0.0049 [\Delta g(8h) + \Delta(-8h)] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

一维向上延拓



5. 空间延拓

■ 向上延拓

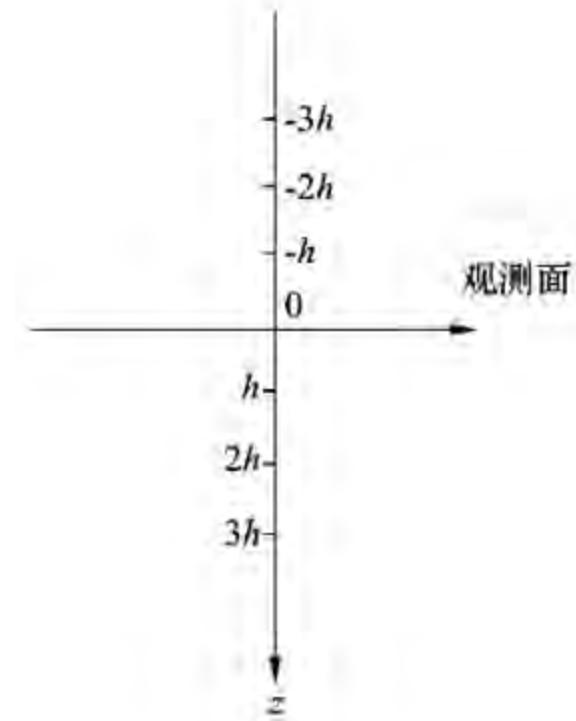
二维向上延拓

$$\frac{\partial V^2(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (z \geq 0)$$

$$\left. \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \Delta g(x, y, 0)$$

$$\Delta g(x, y, -h) = \frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} \Delta g(r, \alpha, 0) d\alpha \right) dr$$

$$\overline{\Delta g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(r, \alpha, 0) d\alpha$$



5. 空间延拓

■ 向上延拓

二维向上延拓

$$\Delta g(x, y, -h) = \frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\Delta g(r, \alpha, 0) r dr d\alpha}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

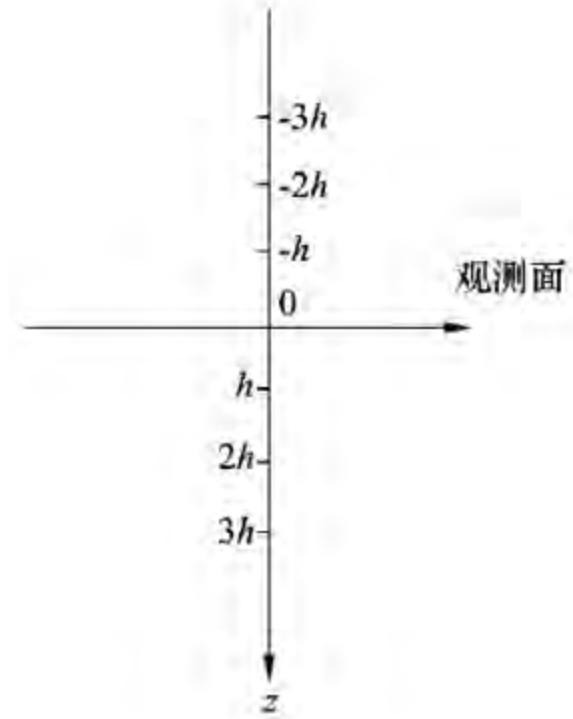
$$\overline{\Delta g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(r, \alpha, 0) d\alpha$$

$$\Delta g(0, 0, -h) \approx \int_0^{r_N} \overline{\Delta g}(r) \frac{hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N-1} h \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\overline{\Delta g}(r) r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N-1} h \cdot \overline{\Delta g(r)} \left[\frac{1}{(r_i^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_{i+1}^2 + h^2)^{1/2}} \right]$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N-1} h \int_{r_i}^{r_{i+1}} \overline{\Delta g}(r) dr \cdot \left(\frac{1}{r_{i+1}^2 + h^2} - \frac{1}{r_i^2 + h^2} \right)$$



5. 空间延拓

■ 向上延拓

二维向上延拓

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \overline{\Delta g}(r) dr = a_i \overline{\Delta g}(r_i) + b_i \overline{\Delta g}(r_{i+1}) + c_i \overline{\Delta g}(r_{i+2})$$

$$\Delta g(0, 0, -h) \approx \sum_{i=1}^{N-1} h \left[a_i \overline{\Delta g}(r_i) + b_i \overline{\Delta g}(r_{i+1}) + c_i \overline{\Delta g}(r_{i+2}) \right] \cdot$$

$$\left(\frac{1}{r_{i+1} - r_i} \right) \left[\frac{1}{(r_i^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_{i+1}^2 + h^2)^{1/2}} \right]$$

$$\approx \sum_{i=1}^N K_i(r_1, r_2, \dots, r_N, h) \overline{\Delta g}(r_i)$$

$$\Delta g(0, 0, -mh) \approx \sum_{i=1}^N K_i(r_1, r_2, \dots, r_N, mh) \overline{\Delta g}(r_i)$$

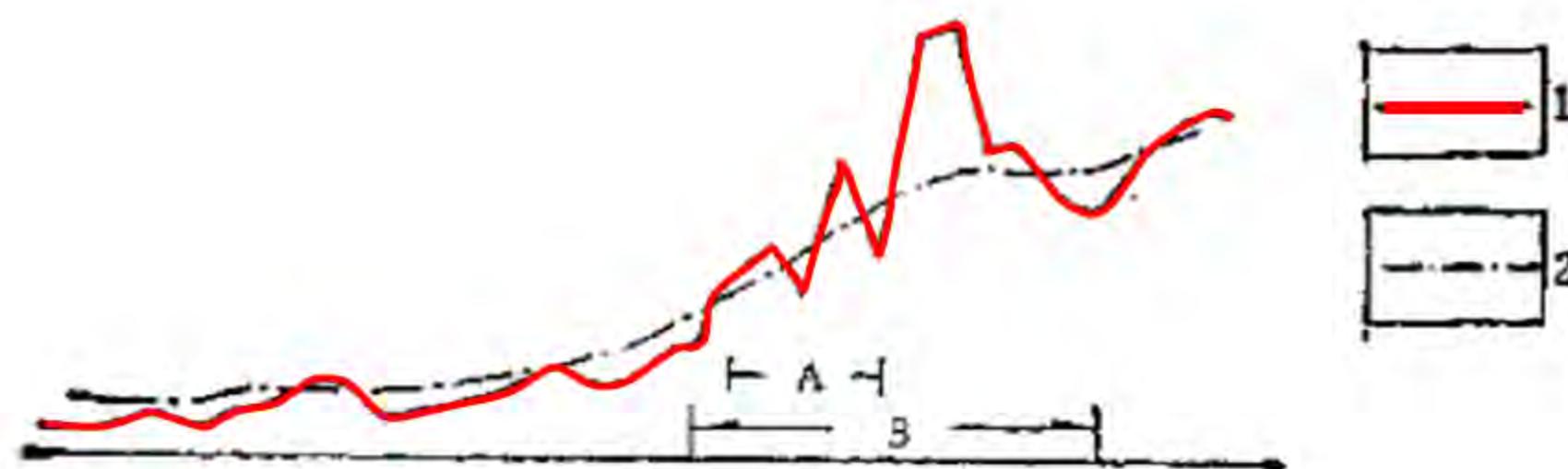
$$a_i = \frac{(r_i - r_{i+1})}{(r_{i+2} - r_i)} \left(\frac{r_i}{3} - \frac{r_{i+2}}{2} + \frac{r_{i+1}}{6} \right)$$

$$b_i = \frac{(r_i - r_{i+1})}{(r_{i+2} - r_{i+1})} \left(\frac{r_{i+1}}{3} - \frac{r_{i+2}}{2} + \frac{r_i}{6} \right)$$

$$c_i = \frac{(r_i - r_{i+1})^3}{6(r_{i+2} - r_i)(r_{i+2} - r_{i+1})}$$

5. 空间延拓

■ 向上延拓

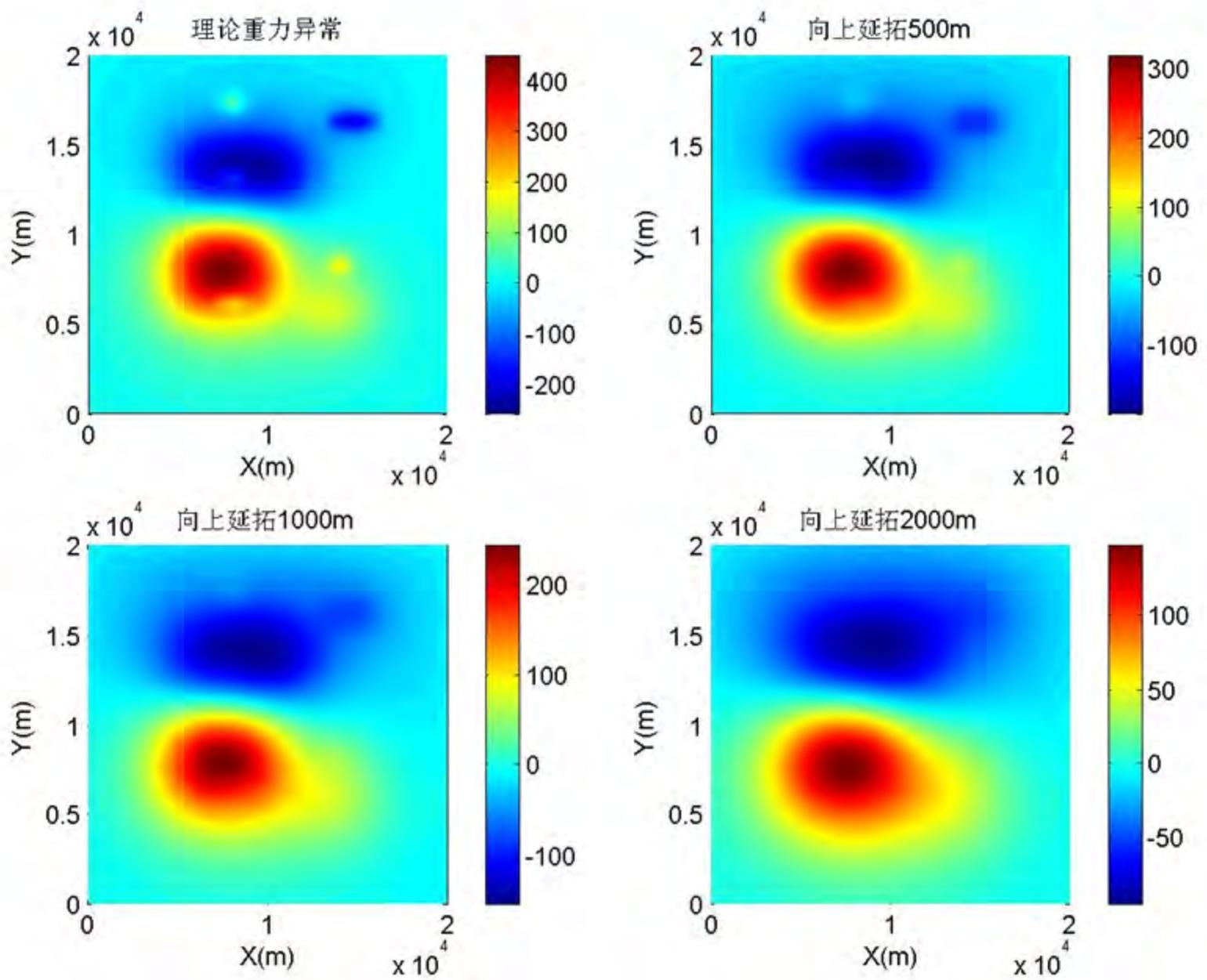


向上延拓的光滑作用

1—实测异常；2—向上延拓 $2\Delta X$ 的异常（ ΔX 测点距）

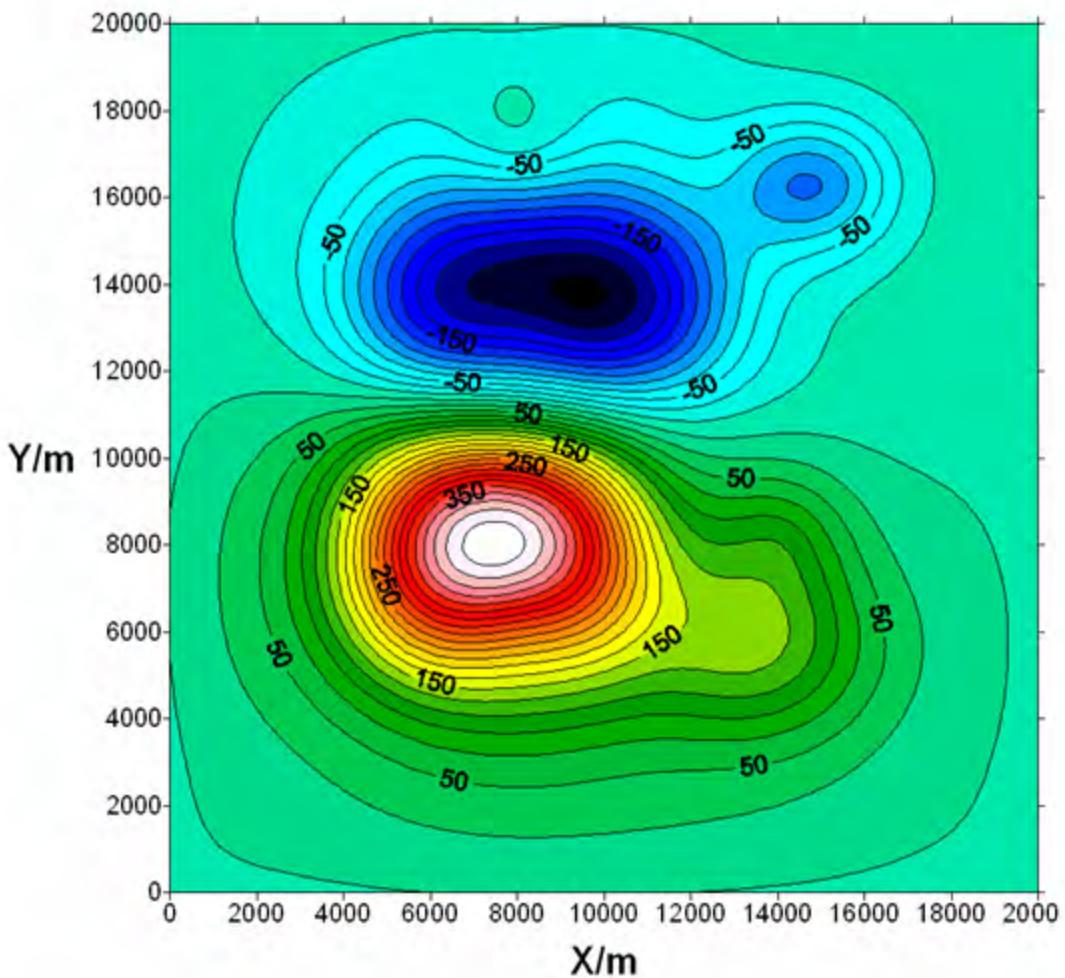
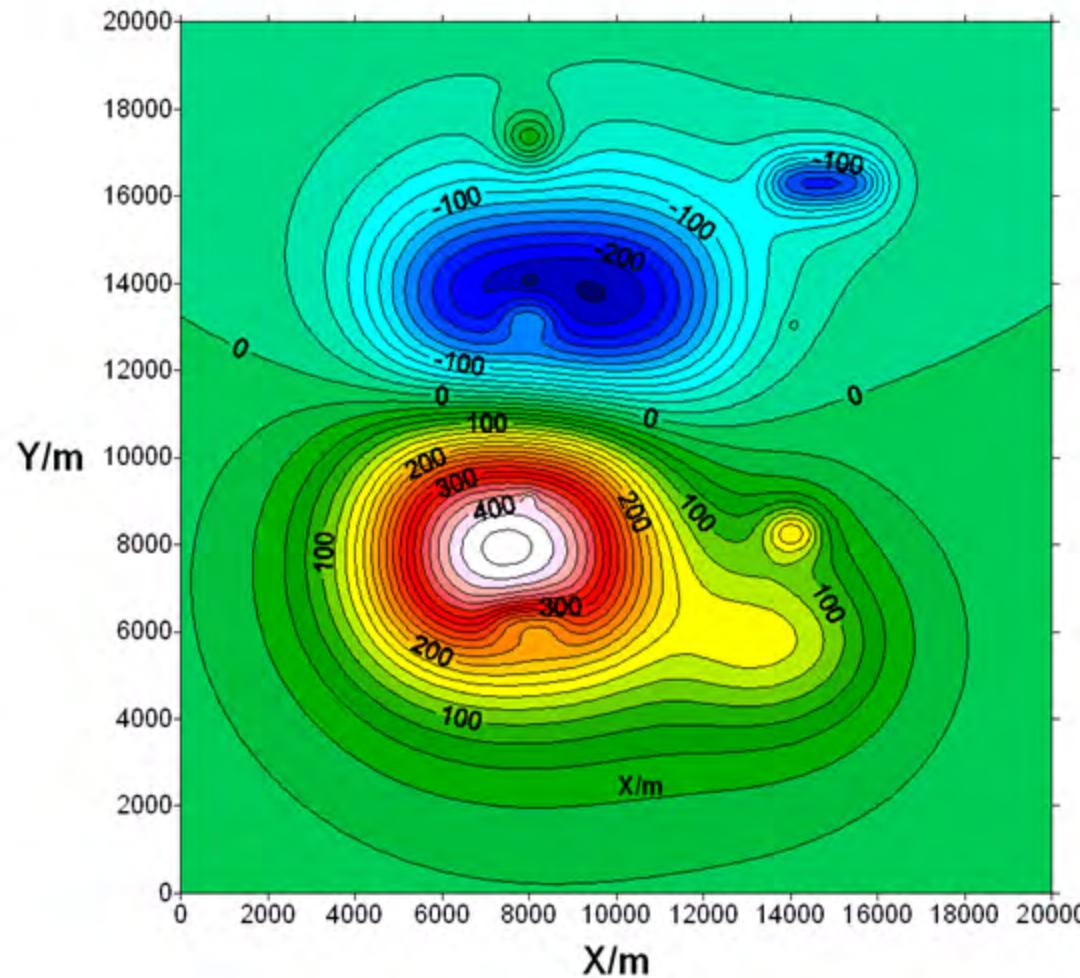
5. 空间延拓

■ 向上延拓



5. 空间延拓

■ 向上延拓



5. 空间延拓

■ 向上延拓

- ✓ 向上延拓可以消除浅部干扰，光滑曲线；
- ✓ 根据向上延拓后的异常，可以了解工作地区有无区域异常。当有区域异常存在时，了解其特征是怎样的。了解了区域异常的特征，将为人们寻找一个更好的划分区域异常与局部异常的方法提供方便；
- ✓ 在合适的条件下，可以将向上延拓某个高度后的异常作为区域异常的某种近似，故可利用这种异常了解一些深部地质的情况；
- ✓ 从实测的异常中减掉向上延拓某一高度的异常，得到的异常可以认为是局部异常的某种近似（即浅部地质体所引起的异常的某种近似），利用这种异常有时能解决一些浅部地质填图及发现有意义的局部异常。

5. 空间延拓

■ 向上延拓

思考题?

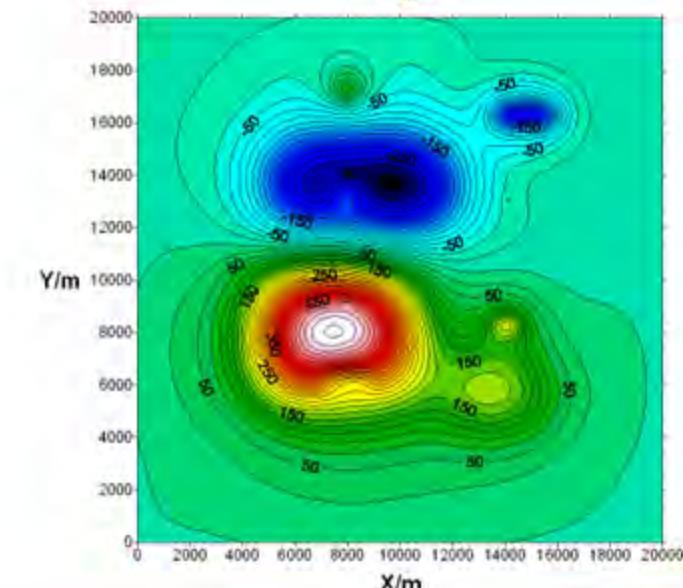
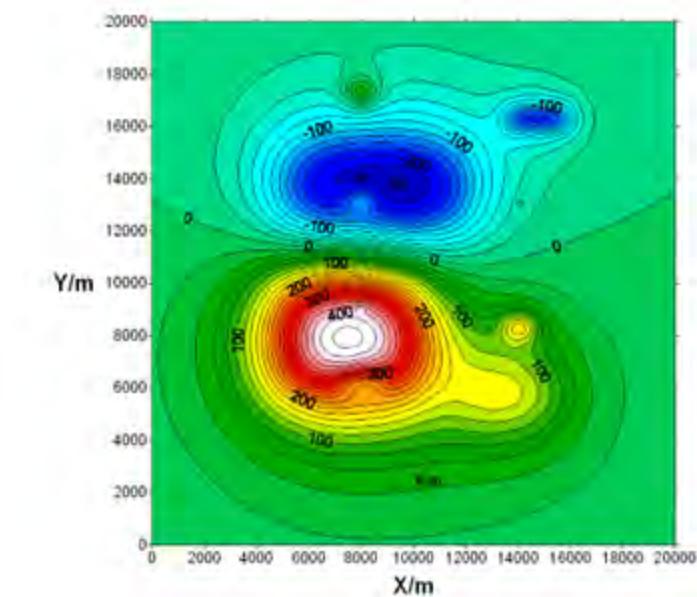
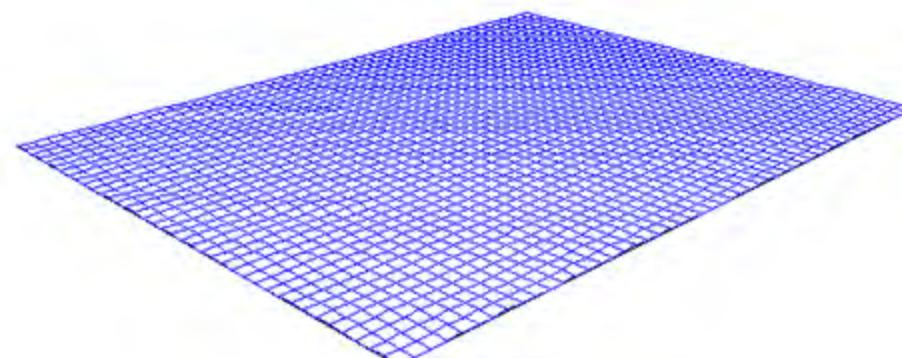
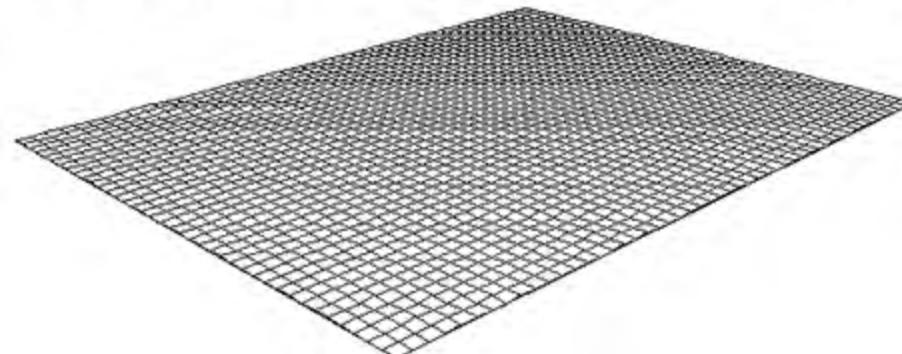


向上延拓后的异常可以当做区域场吗?

5. 空间延拓

■ 向下延拓

- ✓ 高平面或曲面上异常 → 低平面上异常
- ✓ 作用: 突出浅部局部异常, 压制深部区域异常。



5. 空间延拓

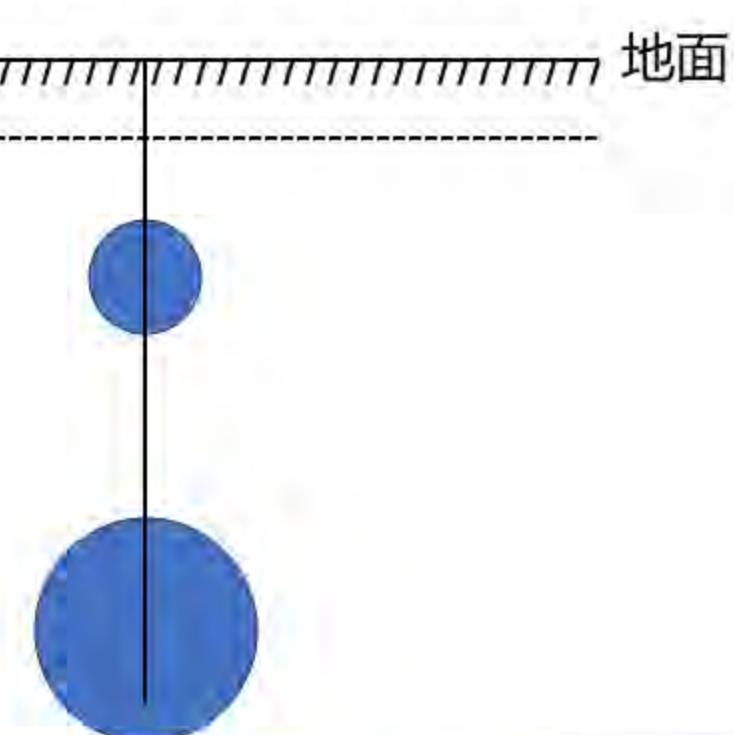
■ 向下延拓

例如上边的例子中，当向下延拓的深度为小球体深度的0.5倍时，在新的平面上，两者最大异常值将为：

$$\Delta g_{\text{大}} = 5 \times \frac{1}{(1 - 0.5/10)^2} = 5.5 \text{ (mGal)}$$

$$\Delta g_{\text{小}} = 1 \times \frac{1}{(1 - 0.5)^2} = 4 \text{ (mGal)}$$

$$\begin{aligned}\Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 17:1 \\ \Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 5:1 \\ \Delta g_{\text{大}} : \Delta g_{\text{小}} &= 5.5:4\end{aligned}$$



小球体的异常相对地加强了

5. 空间延拓

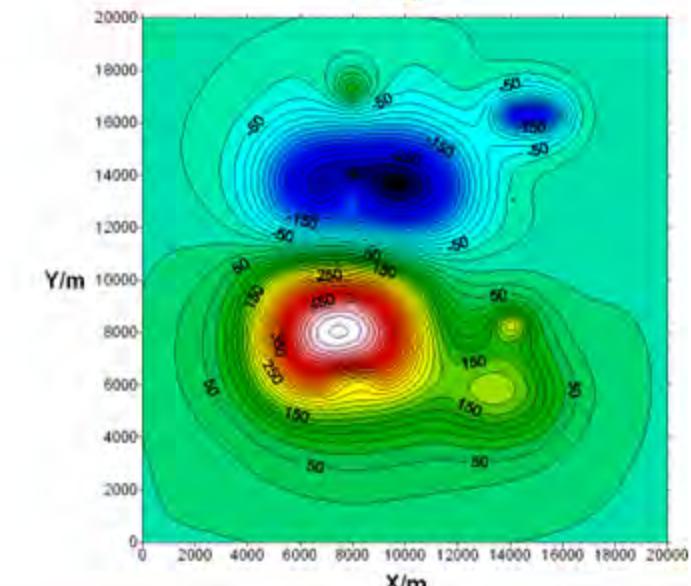
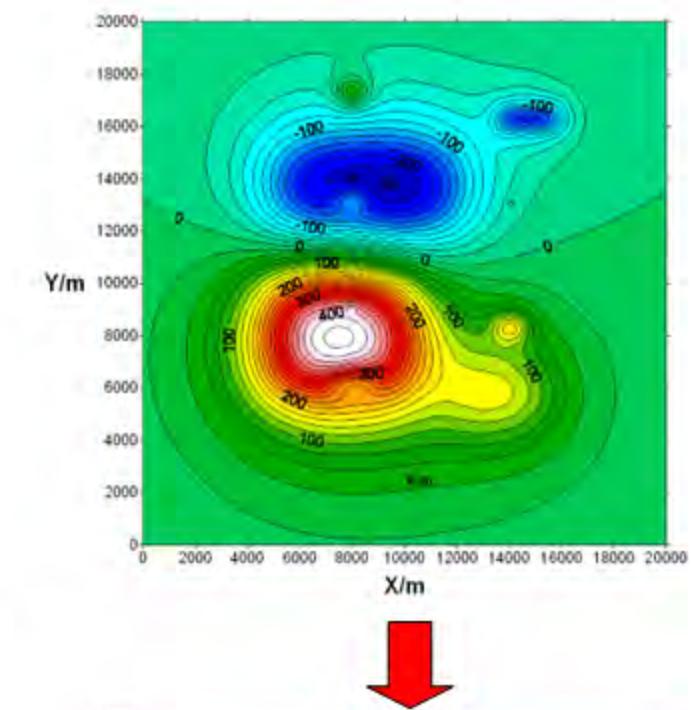
■ 向下延拓

进行下延计算时，由浅部场源体引起的“高频”

异常，随深度增加(高度减小)的增大速度比较快，

而由深部场源体引起的“低频”异常，其增大速

度比较慢，因此向下延拓相对突出了浅部异常。



5. 空间延拓

■ 向下延拓

一维向下延拓

根据向上延拓值及观测面上的重力值，应用拉格朗日插值公式外推向下延拓值。

$$\Delta g(0, h) = 4\Delta g(0, 0) - \Delta g(h, 0) - \Delta g(-h, 0) - \Delta g(0, -h)$$

$$\Delta g(0, h) = 3.7048\Delta g(0)$$

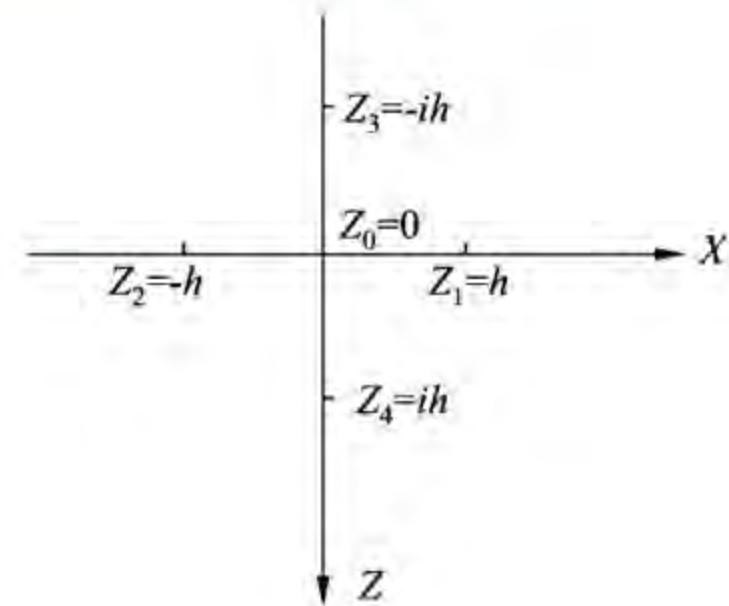
$$-0.1653[\Delta g(h) + \Delta g(-h)] - 0.0660[\Delta g(2h) + \Delta(-2h)]$$

$$-0.0325[\Delta g(3h) + \Delta g(-3h)] - 0.0190[\Delta g(4h) + \Delta(-4h)]$$

$$-0.0124[\Delta g(5h) + \Delta g(-5h)] - 0.0087[\Delta g(6h) + \Delta(-6h)]$$

$$-0.0064[\Delta g(7h) + \Delta g(-7h)] - 0.0049[\Delta g(8h) + \Delta(-8h)]$$

-.....



5. 空间延拓

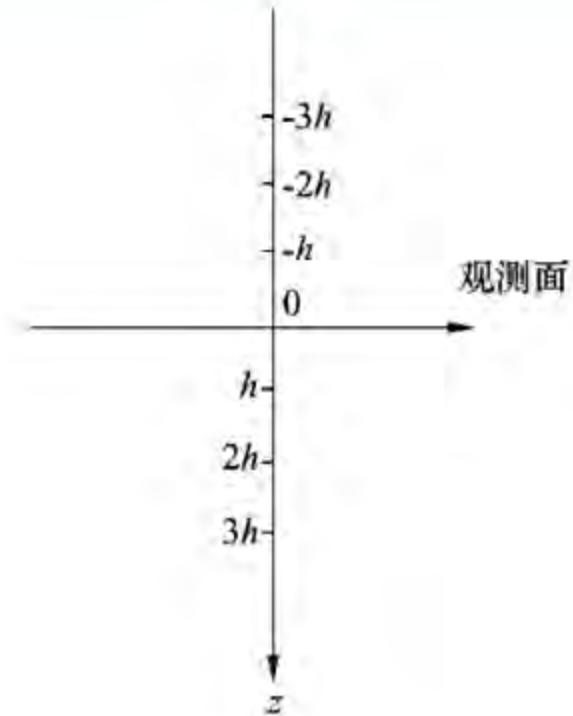
■ 向下延拓

二维向下延拓

根据向上延拓值及观测面上的重力值，应用拉格朗日插值公式外推向下延拓值。

$$\begin{aligned}\Delta g(0, z) &= \frac{(z+a)(z+2a)(z+3a)(z+4a)}{4!a^4} \Delta g(0, 0) \\ &\quad - \frac{z(z+2a)(z+3a)(z+4a)}{1.3!a^4} \Delta g(0, -a) \\ &\quad + \cdots + \frac{z(z+a)(z+2a)(z+3a)}{4!a^4} \Delta g(0, -4a)\end{aligned}$$

$$\Delta g(0, z) \cong \sum_{j=1}^m A(r_j, s) \Delta g(r_j, 0)$$



5. 空间延拓

■ 向下延拓

Geophysical Journal International



Geophys. J. Int. (2020) 220, 1316–1329

doi: 10.1093/gji/ggz524

Advance Access publication 2019 November 20
GJI Marine geosciences and applied geophysics

A novel method for computing the vertical gradients of the potential field: application to downward continuation

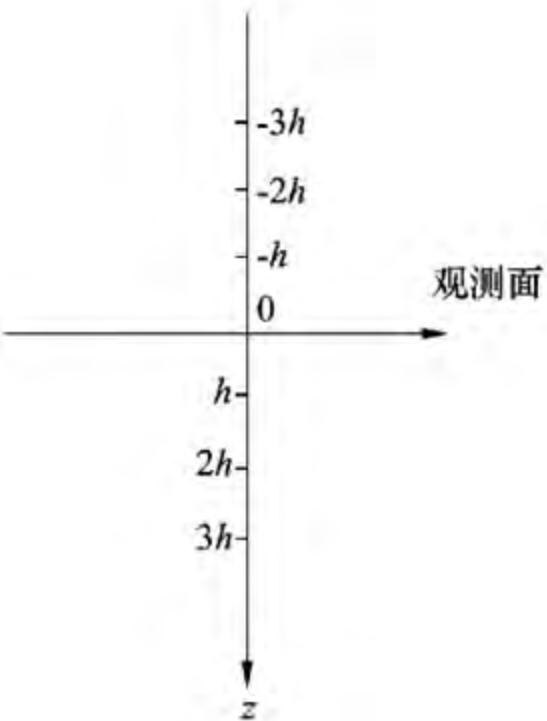
Kha Van Tran¹ and Trung Nhu Nguyen^{1,2}

¹*Institute of Marine Geology and Geophysics, VAST, 18 Hoang Quoc Viet, Hanoi, Vietnam*

²*Graduate University of Science and Technology, VAST. E-mail: nntrung@imgg.vast.vn*

5. 空间延拓

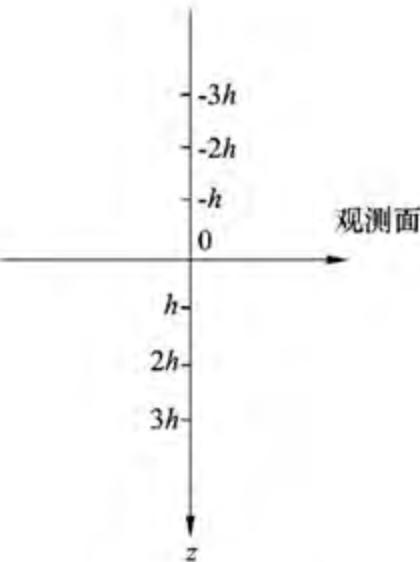
■ 向下延拓



$$f(x, y, z + \Delta h) = f(x, y, z) + \Delta h f'(x, y, z) + \frac{(\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \dots + \frac{(\Delta h)^n}{n!} f^n(x, y, z)$$

5. 空间延拓

■ 向下延拓



$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z - \Delta h) = f(x, y, z) - \Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \dots + \frac{(-\Delta h)^n}{n!} f^n(x, y, z) \\ f(x, y, z - 2\Delta h) = f(x, y, z) - 2\Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-2\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \dots + \frac{(-2\Delta h)^n}{n!} f^n(x, y, z) \\ \vdots \\ f(x, y, z - n\Delta h) = f(x, y, z) - n\Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-n\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \dots + \frac{(-n\Delta h)^n}{n!} f^n(x, y, z) \end{array} \right.$$

5. 空间延拓

■ 向下延拓

$n=3$ 时

$$f(x, y, z + \Delta h) = f(x, y, z) + \Delta h f'(x, y, z) + \frac{(\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \frac{(\Delta h)^3}{3!} f'''(x, y, z)$$

$$\begin{cases} f(x, y, z - \Delta h) = f(x, y, z) - \Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \frac{(-\Delta h)^3}{3!} f'''(x, y, z) \\ f(x, y, z - 2\Delta h) = f(x, y, z) - 2\Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-2\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \frac{(-2\Delta h)^3}{3!} f'''(x, y, z) \\ f(x, y, z - 3\Delta h) = f(x, y, z) - 3\Delta h f'(x, y, z) + \frac{(-3\Delta h)^2}{2!} f''(x, y, z) + \frac{(-3\Delta h)^3}{3!} f'''(x, y, z) \end{cases}$$

5. 空间延拓

■ 向下延拓

$n=3$ 时

$$f'(x, y, z) = \frac{11f(x, y, z) - 18f(x, y, z - \Delta h) + 9f(x, y, z - 2\Delta h) - 2f(x, y, z - 3\Delta h)}{6\Delta h}$$

$$f''(x, y, z) = \frac{2f(x, y, z) - 5f(x, y, z - \Delta h) + 4f(x, y, z - 2\Delta h) - f(x, y, z - 3\Delta h)}{\Delta h^2}$$

$$f'''(x, y, z) = \frac{f(x, y, z) - 3f(x, y, z - \Delta h) + 3f(x, y, z - 2\Delta h) - f(x, y, z - 3\Delta h)}{\Delta h^3}.$$



5. 空间延拓

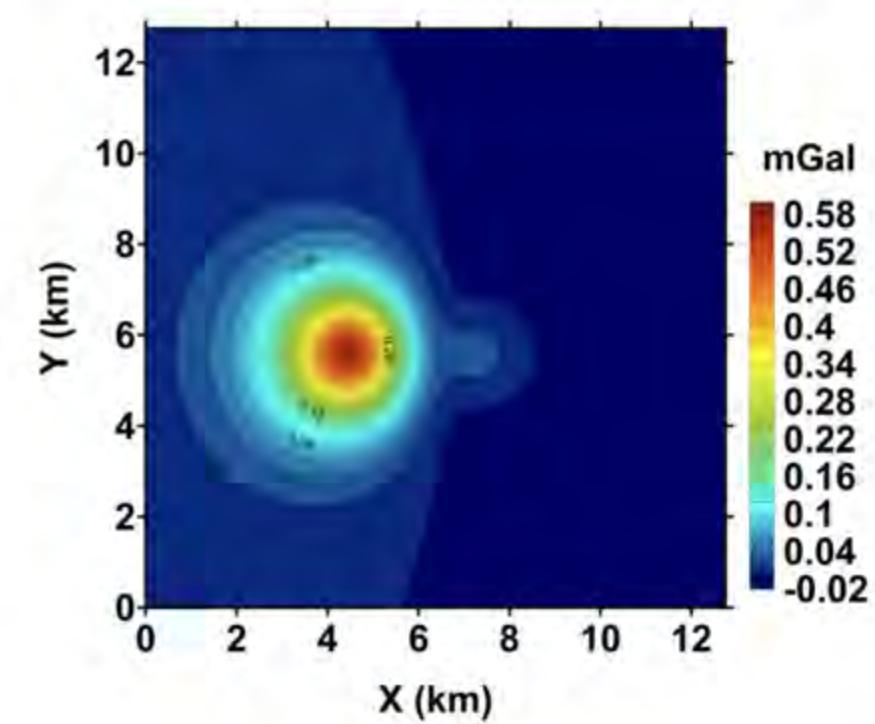
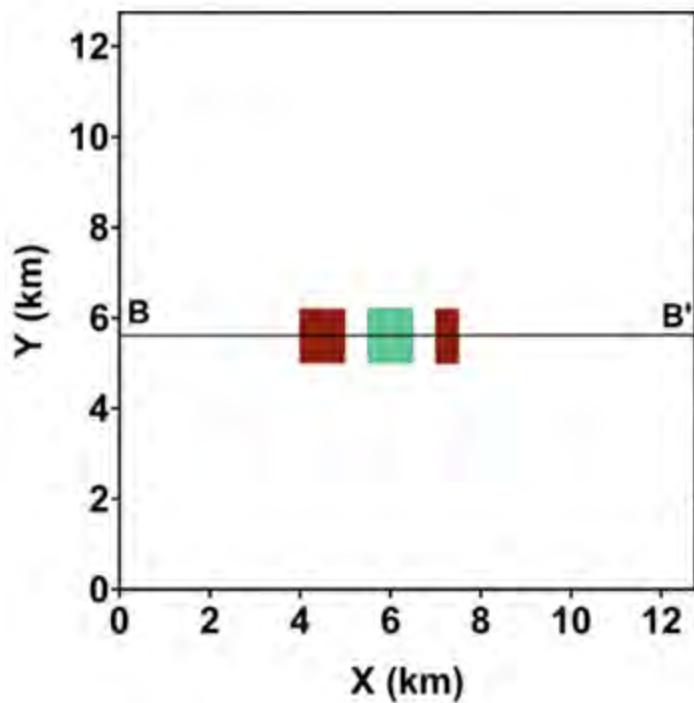
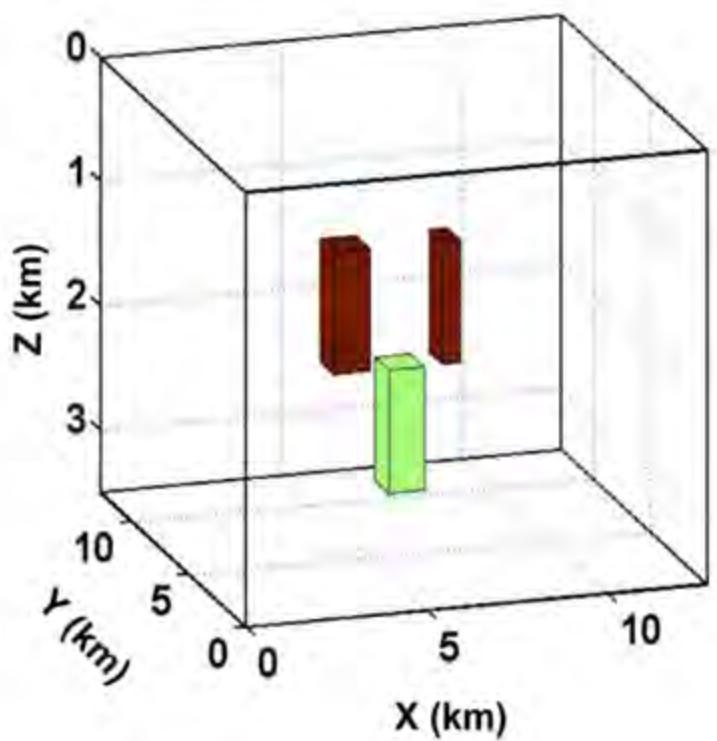
■ 向下延拓

$n=3$ 时

$$\begin{aligned} f(x, y, z + m \Delta h) = & a_0 f(x, y, z - (1 - m) \Delta h) + a_1 f(x, y, z - (2 - m) \Delta h) + a_2 f(x, y, z - (3 - m) \Delta h) \\ & + a_3 f(x, y, z - (4 - m) \Delta h) + \dots + a_n f(x, y, z - (n + 1 - m) \Delta h). \end{aligned}$$

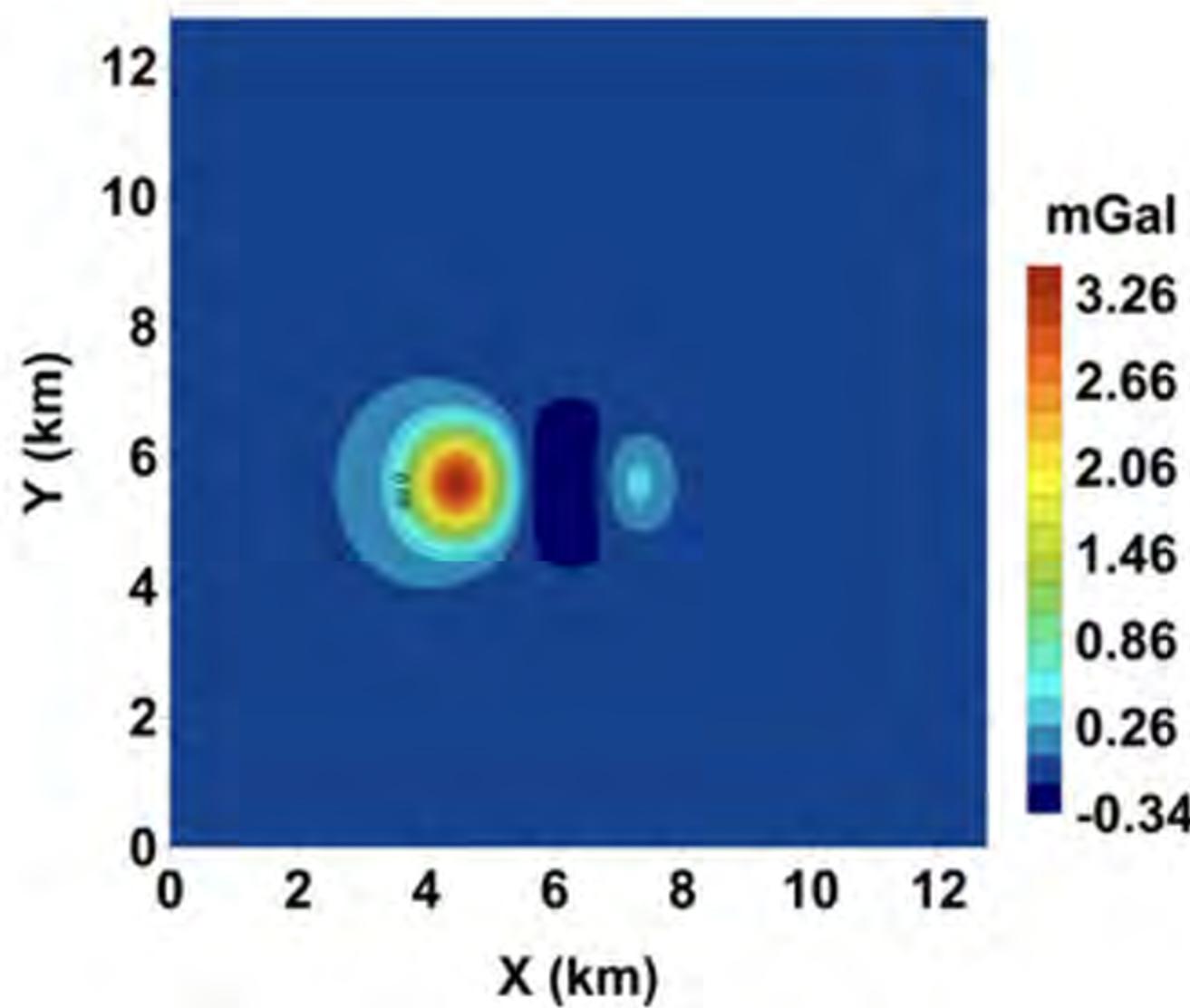
5. 空间延拓

■ 向下延拓



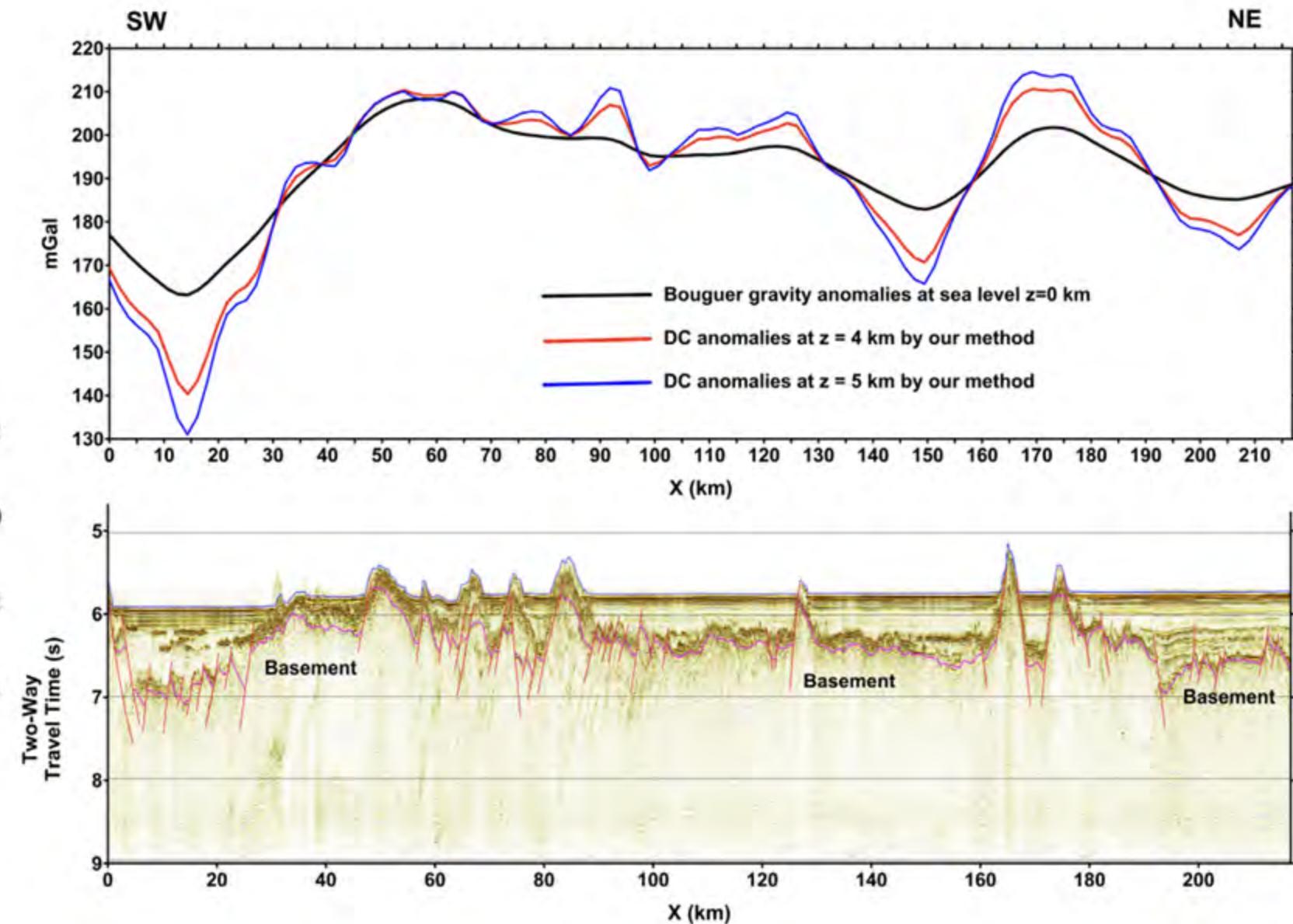
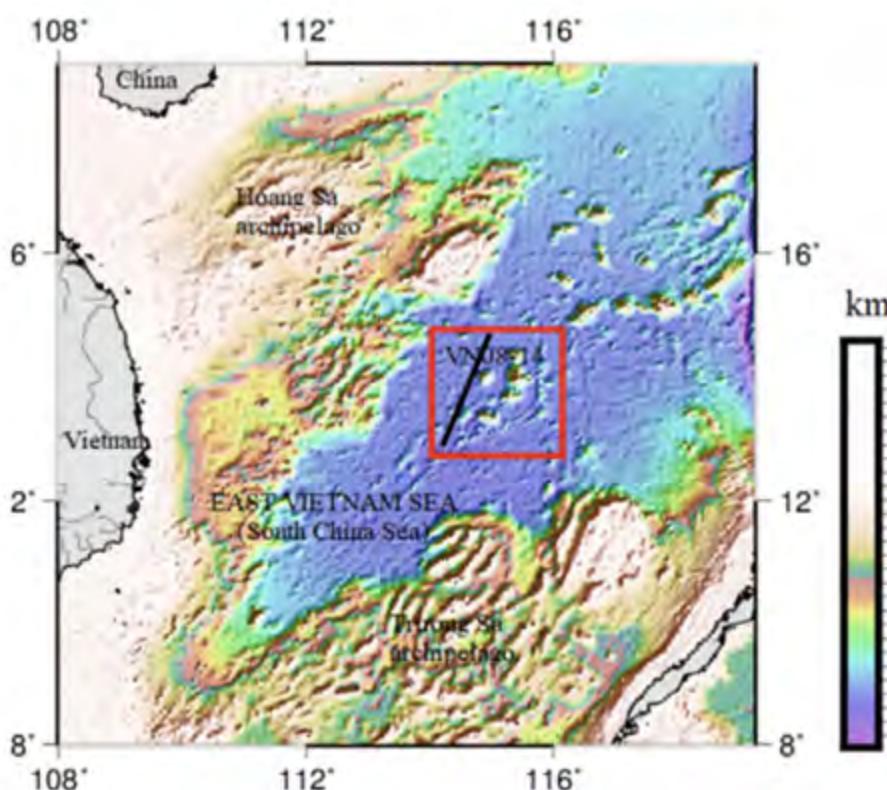
5. 空间延拓

■ 向下延拓



5. 空间延拓

■ 向下延拓



5. 空间延拓

■ 延拓对比

- ✓ 向上延拓属于**低通滤波**，其主要作用是使异常更为光滑，突出区域异常的**基本特征**；
- ✓ 向下延拓则是向上延拓的逆反过程，属于**高通滤波**，其作用是突出局部异常，分解在水平方向叠加的异常，定性确定场源的深度，以及由于下延，使延拓面更接近场源，异常等值线圈闭的形状与场源体水平截面形状更为接近，因而可用来了解复杂异常源的平面轮廓。

5. 空间延拓

■ 延拓对比

- ✓ 上延计算在理论上是严密而且可以实现的，其误差主要是积分范围有限所致。当范围一定时，**延拓高度越高则误差越大**。此外就是取值点密度及插值误差的影响。
- ✓ 下延计算属于不适定问题，理论上未能解决其计算方法，只能近似外推或计算。另外，下延属于高通滤波，局部干扰和误差会被放大，因此，在实际应用中，每次下延要对结果进行平滑处理，而且下延深度不能太大。

5. 空间延拓

思考题?

能否直接利用下面公式计算不同高度上的延拓值，为什么？

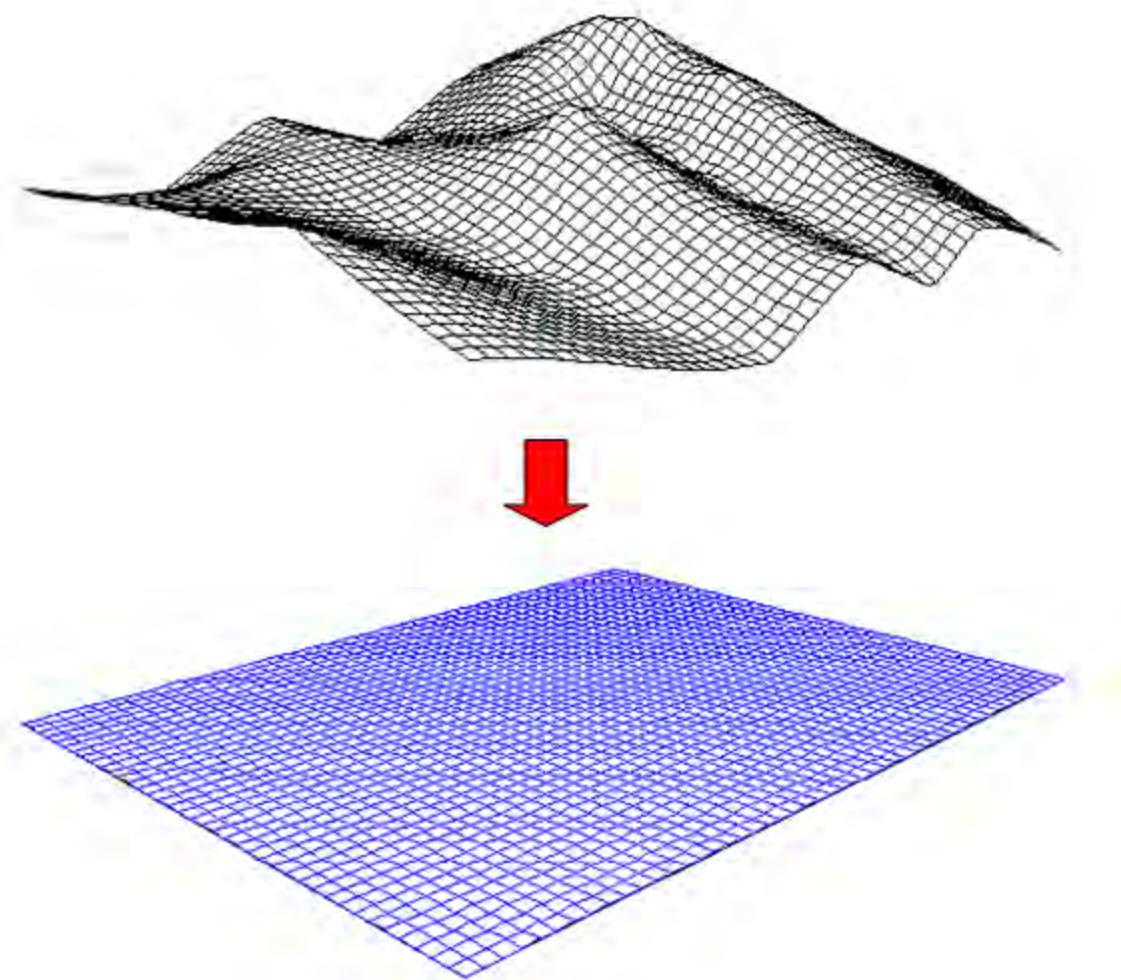


$$\{\Delta g_h\}_{g.u.} = 3.086 \{h\}_m$$

不能，因为该公式是正常重力值随高度的变化而不是异常随高度的变化。

5. 空间延拓

■ 曲化平



5. 空间延拓

■ 曲化平

一般情况下，重力测量是在起伏地形上进行的。测量数据经各项改正后，所提取出的重力异常仍旧位于原来的起伏地表上。

起伏地形上重力异常转换包括上、下延拓和场量换算。

为了给平面异常转换处理和反演方法的应用创造条件，起伏地形上重力异常转换的最重要的内容，是由起伏地形上重力异常换算出某一平面上的重力异常，简称为“曲化平”。

5. 空间延拓

■ 曲化平

等效源方法

傅立叶分析方法

上延迭代法 (类似于反问题求解)

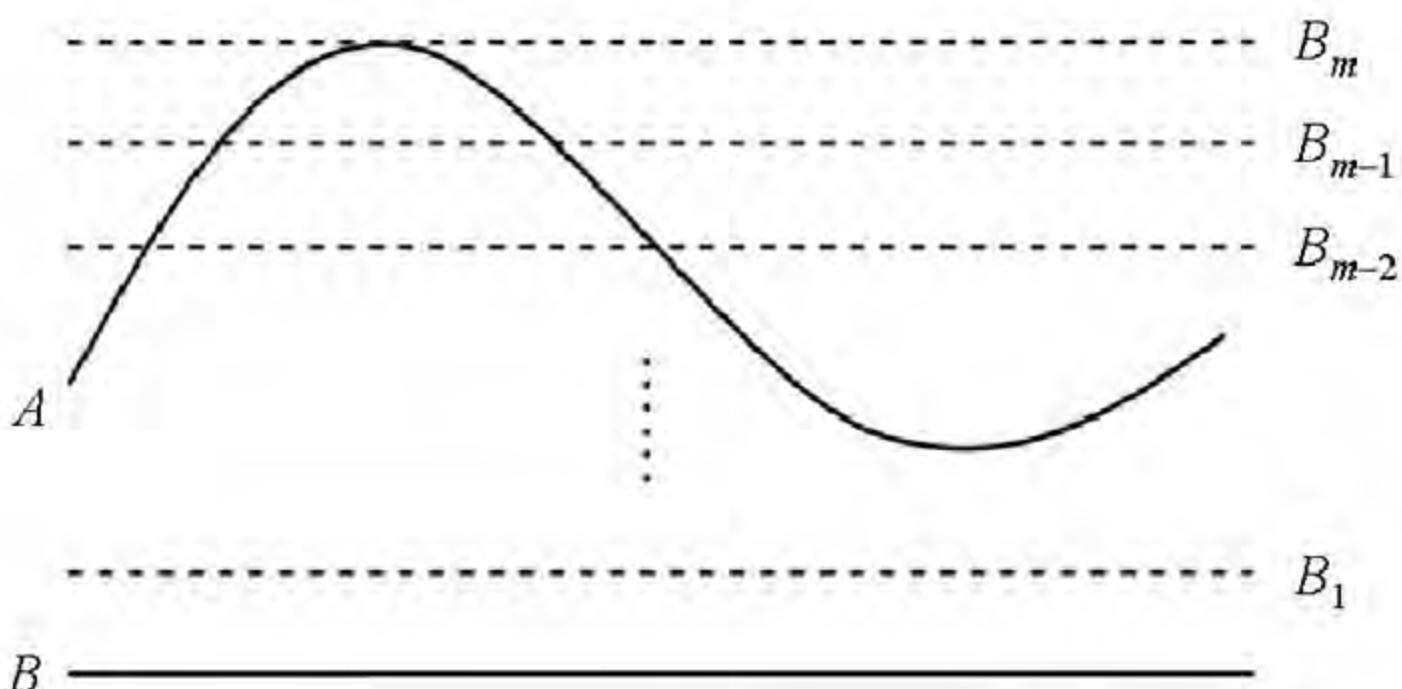
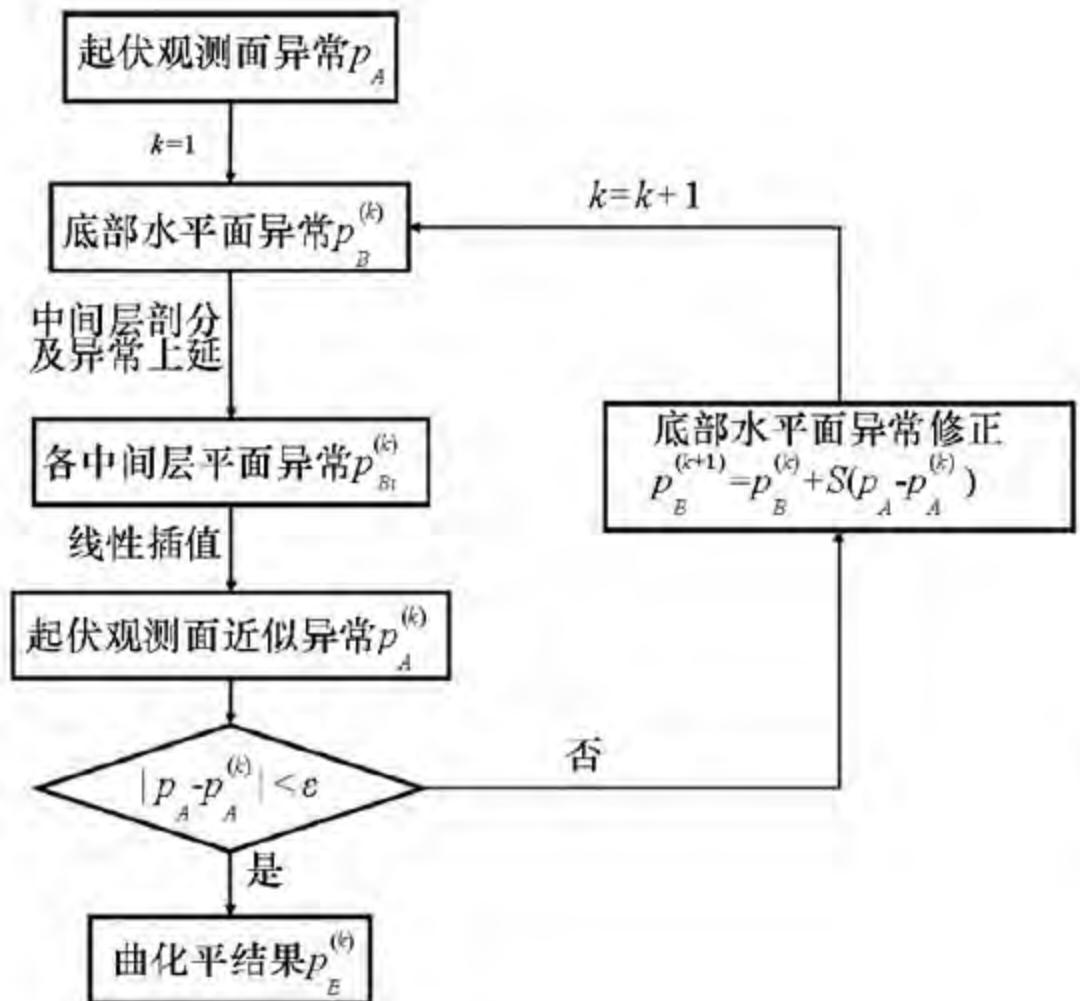
矩形网格迭代方法

边界元方法等

5. 空间延拓

■ 曲化平

上延迭代法

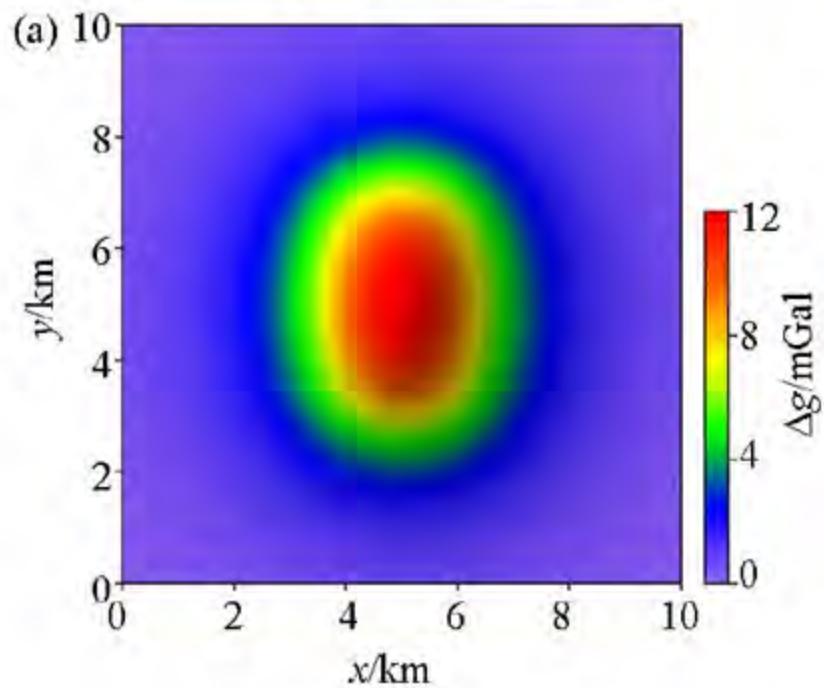


5. 空间延拓

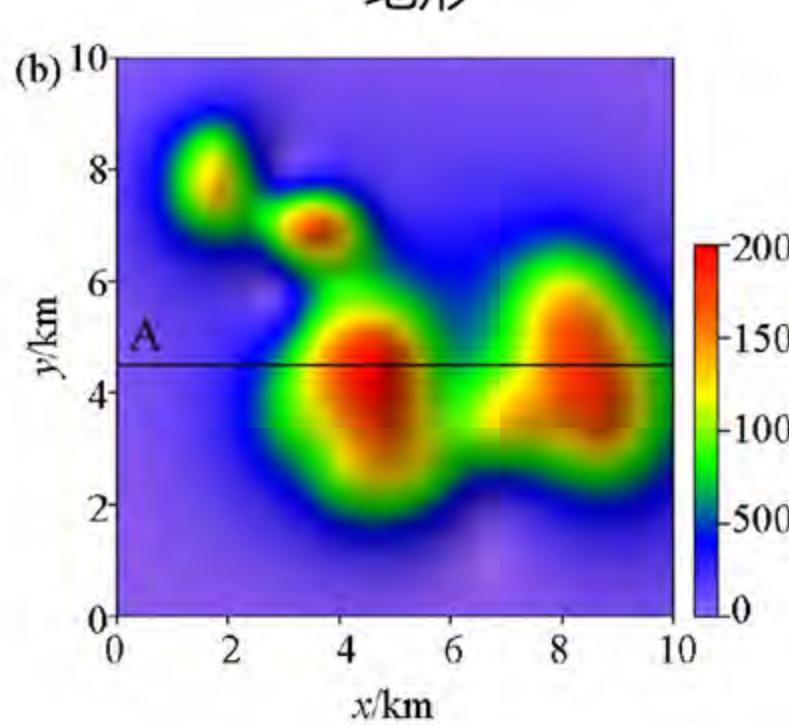
■ 曲化平

上延迭代法

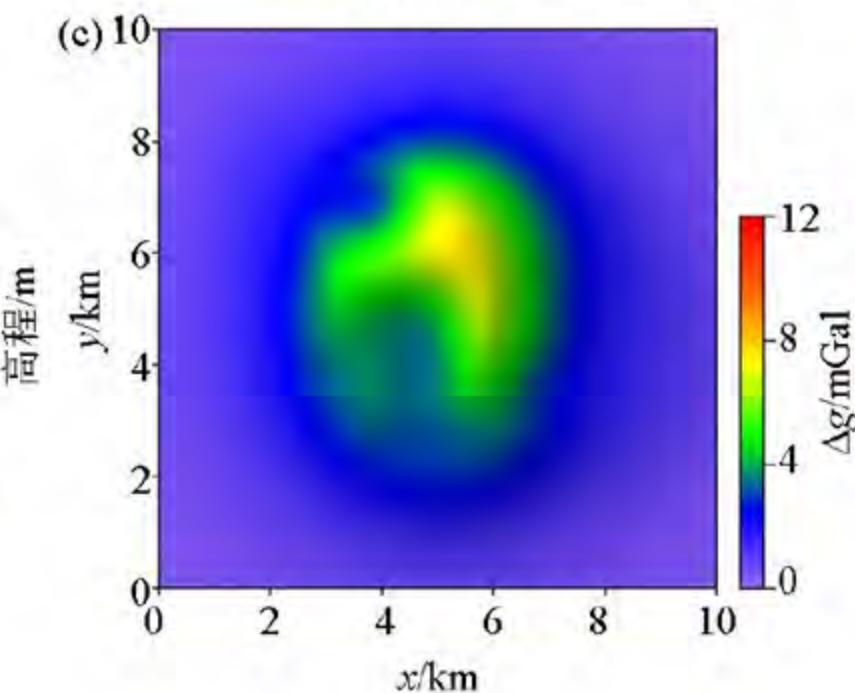
海拔0 m Δg



地形



起伏地形 Δg



5. 空间延拓

■ 曲化平

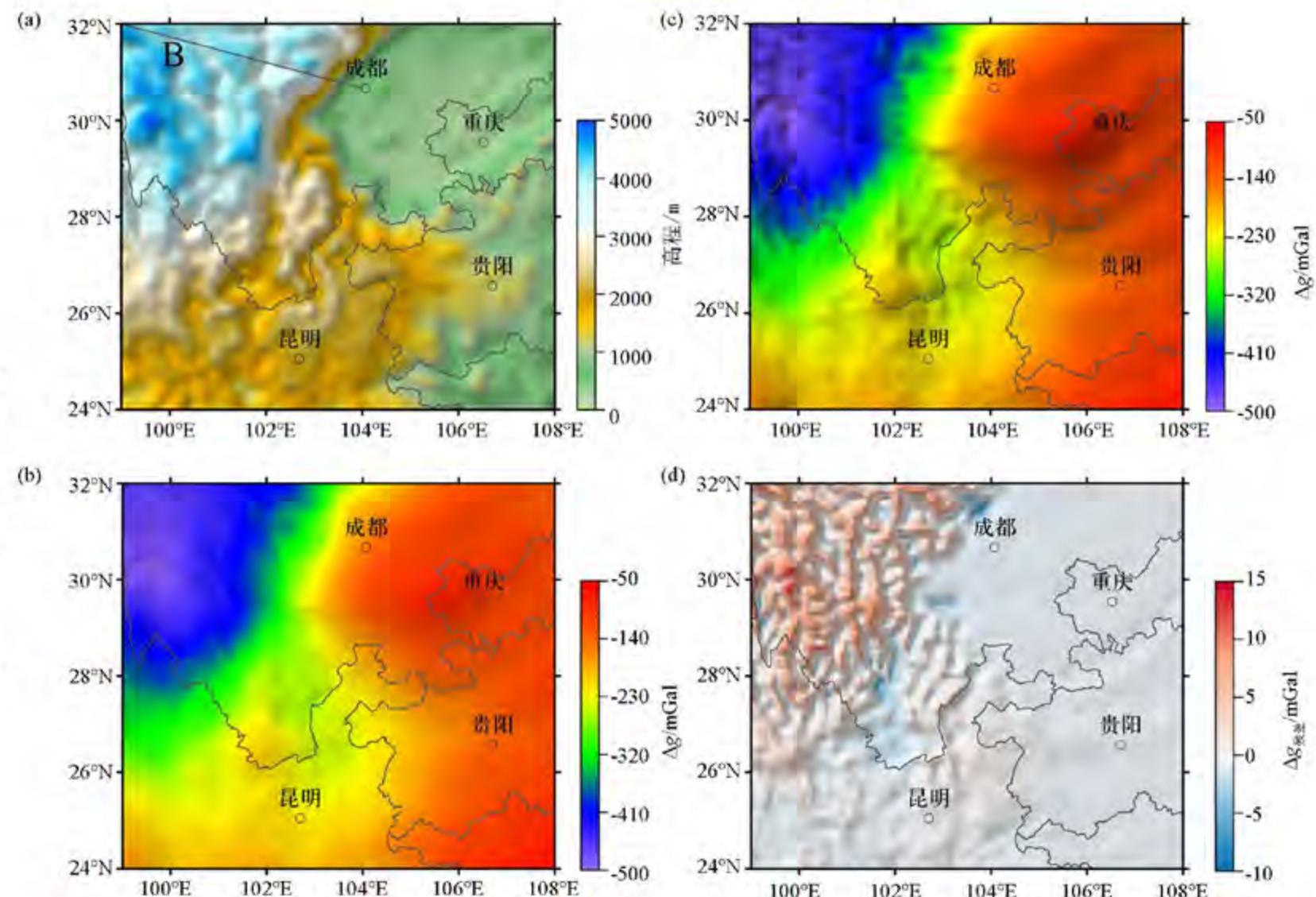
a—川滇地区地形高程；

b—去噪后的布格重力异常；

c—曲化平后布格重力异常；

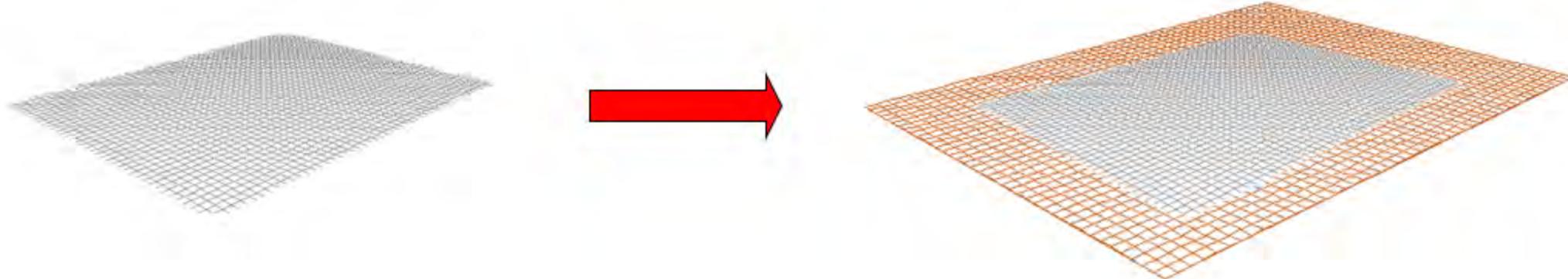
d—曲化平前后的异常残差。

上延迭代法



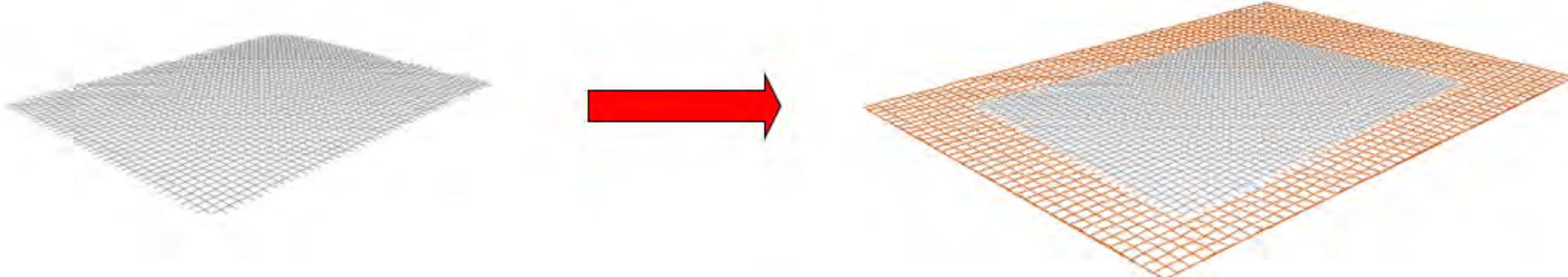
5. 空间延拓

■ 扩边



5. 空间延拓

■ 扩边



为什么要扩边

5. 空间延拓

■ 扩边

拉格朗日插值法

余弦扩边法

最小曲率扩边法

等效源扩边法

.....

目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

第四节 场分离

第五节 空间延拓

第六节 重力异常导数

6.重力异常导数

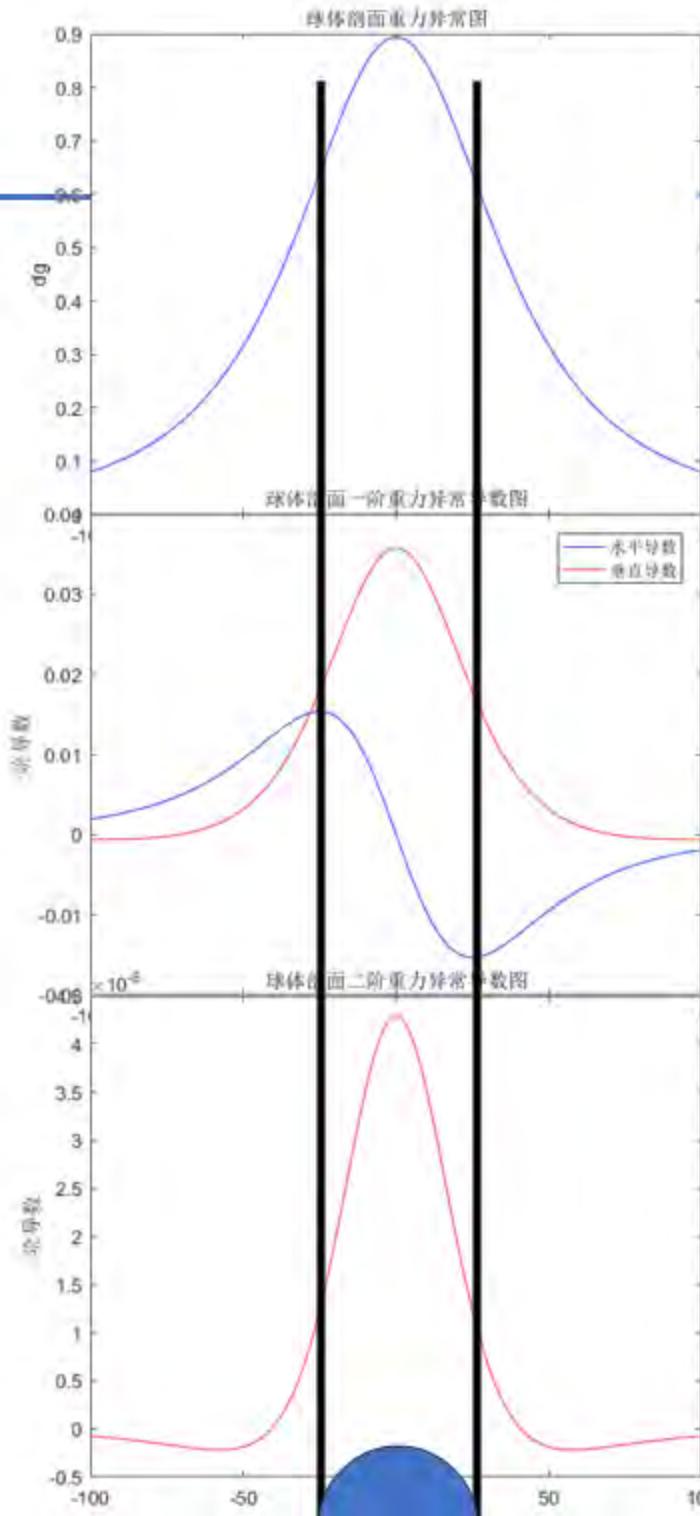
$$\Delta g \quad \mathbf{g} \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix}$$

6.重力异常导数

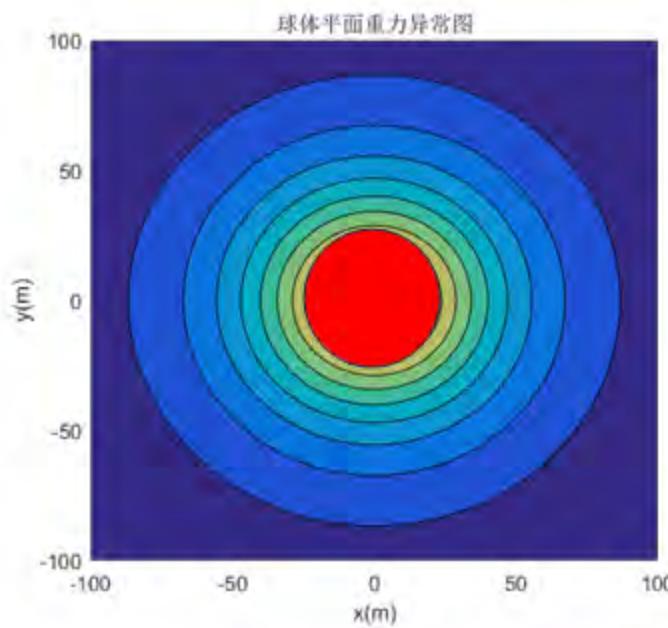
Δg

V_{xz} 、 V_{zz}

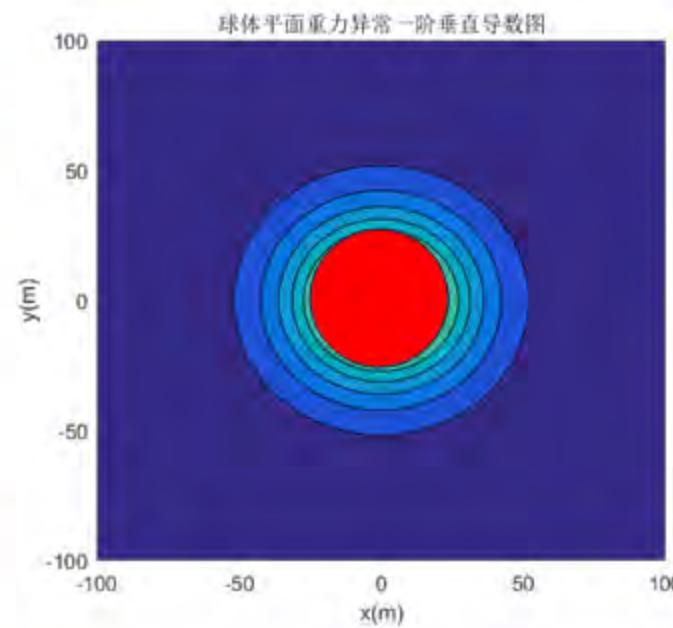
V_{zzz}



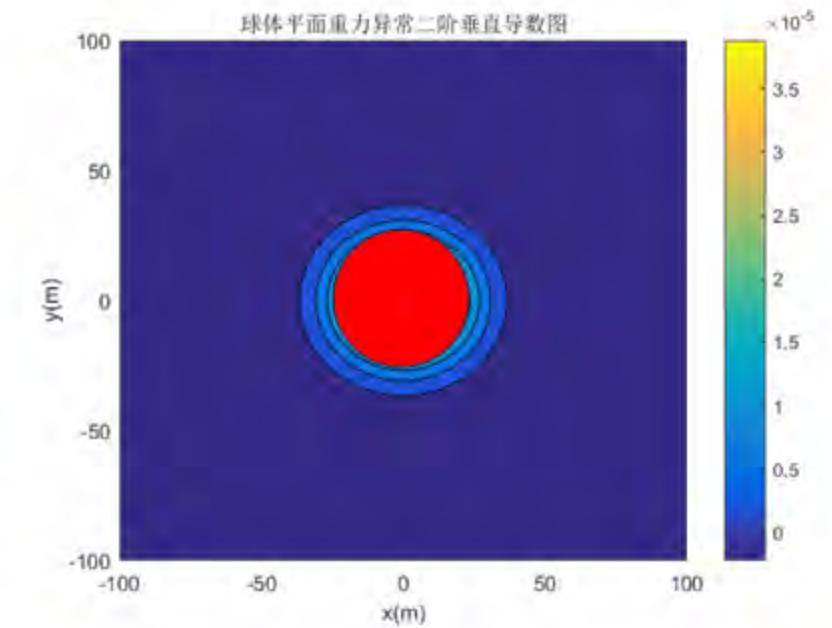
6.重力异常导数



$$\Delta g$$



$$V_{zz}$$



$$V_{zzz}$$

6.重力异常导数

$\Delta g \rightarrow V_{xz}$ 、 V_{yz} 、 V_{zz} 和 $V_{z\bar{z}}$

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

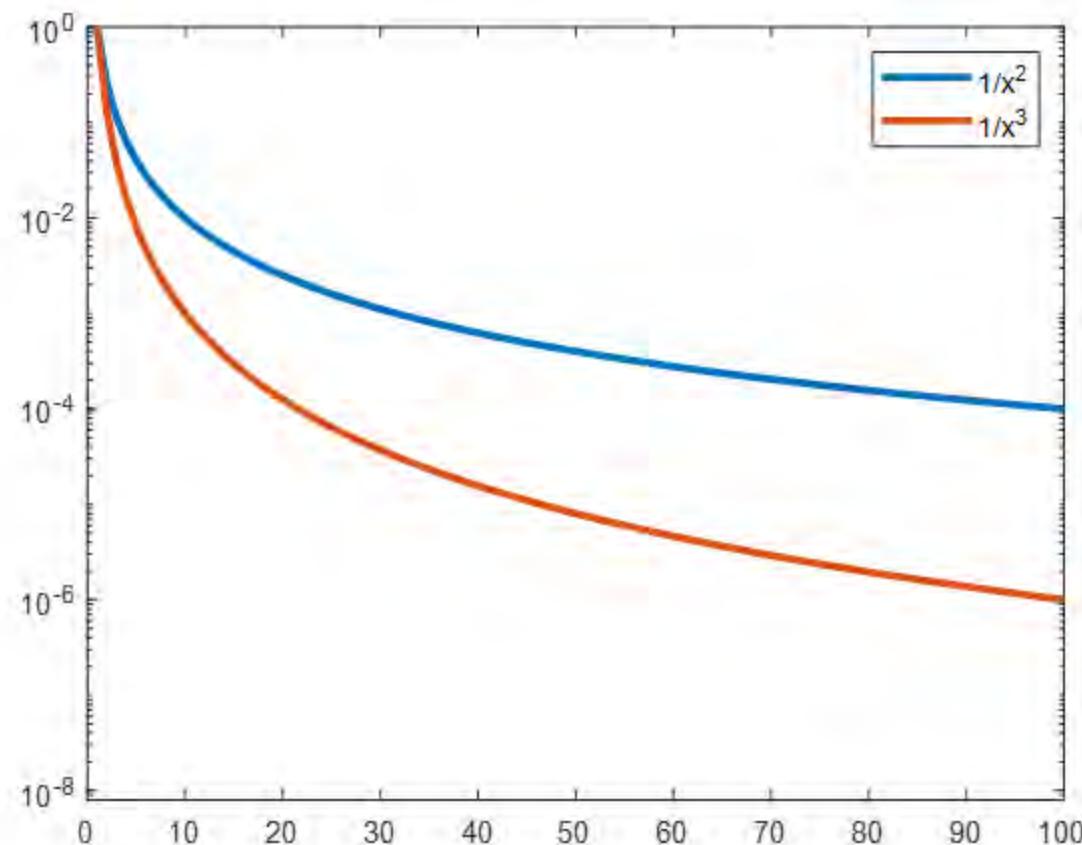
$$V_{xz} = -3GM \frac{Dx}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{yz} = GM \frac{2D^2 - x^2}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{zz} = 3GM \frac{2D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^{7/2}}$$

6.重力异常导数

$\Delta g \rightarrow V_{xz}$ 、 V_{yz} 、 V_{zz} 和 V_{zsz}



6.重力异常导数

$$\Delta g \rightarrow V_{xz}, V_{yz}, V_{zz} \text{ 和 } V_{zzz}$$

核心思想：导数阶数越高，异常随中心埋深加大而衰减越快；水平方向来看，基于同样的道理，阶数越高的异常范围越小，因而，无论从垂向或者水平方向看，高阶导数的分辨能力都提高了。

从本质上讲，高阶导数的作用是将重力异常换算成另一种位场的过程，以突出某种场源体引起的异常。

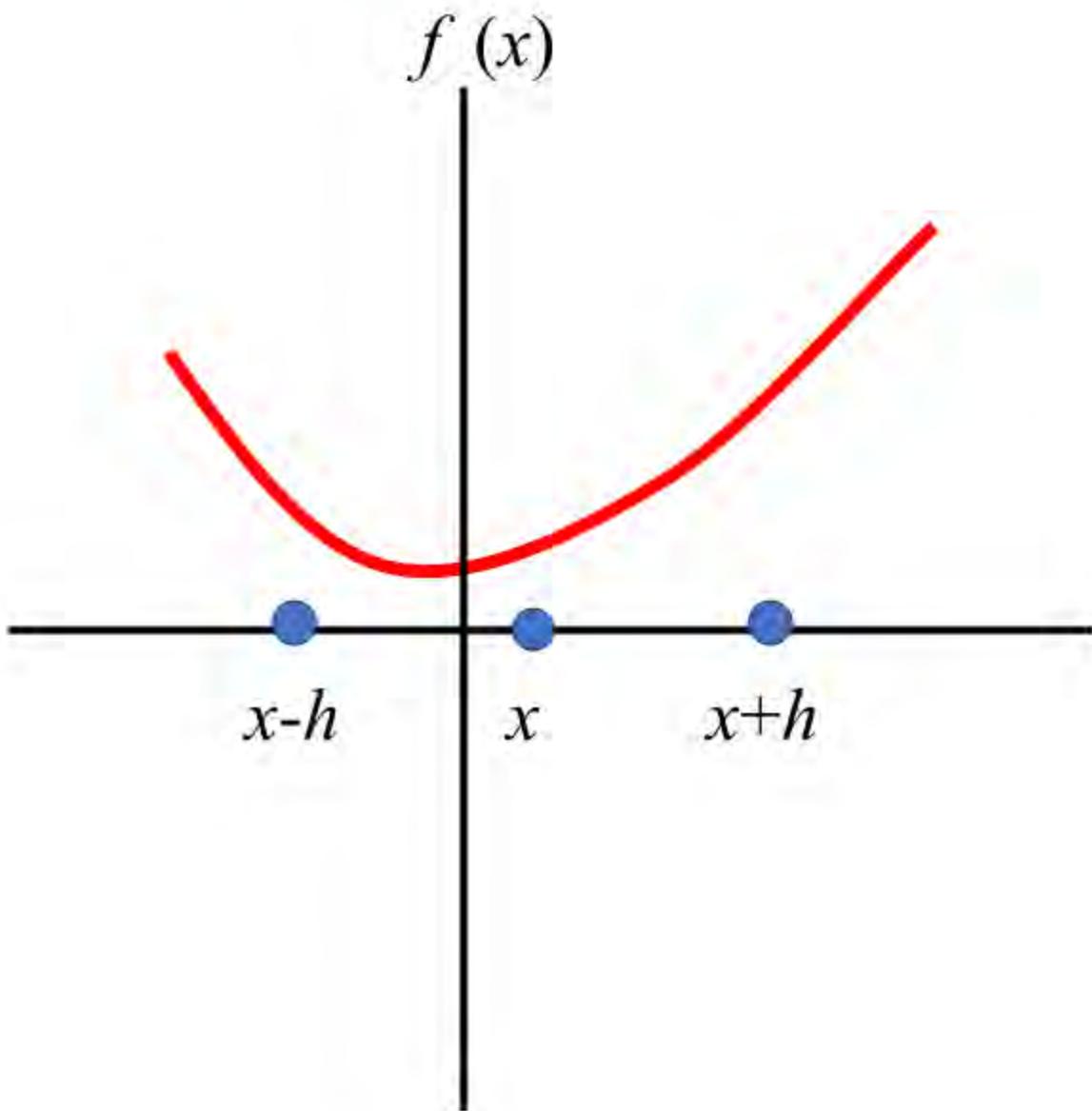
6.重力异常导数

■ 导数的物理意义

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

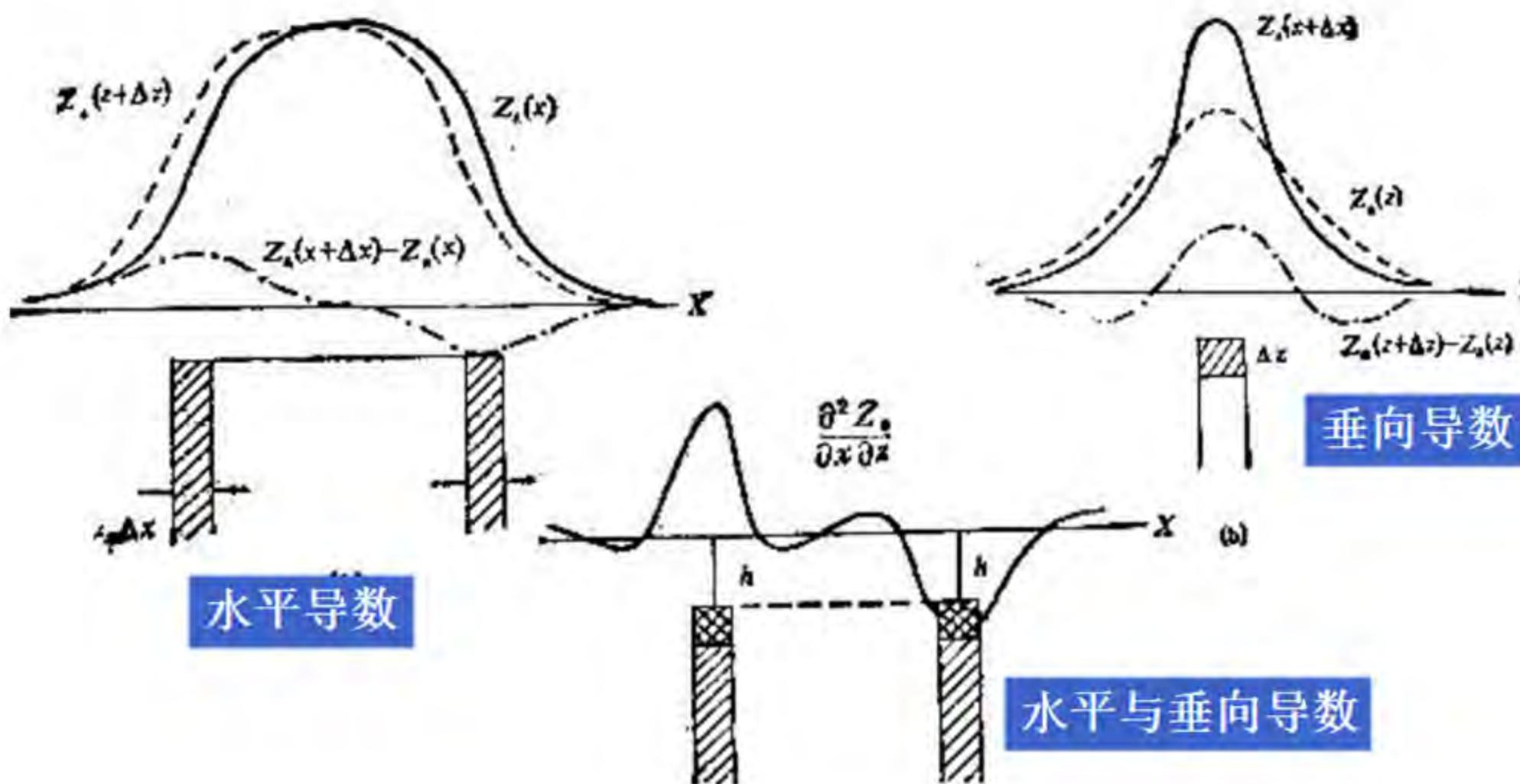
$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



6. 重力异常导数

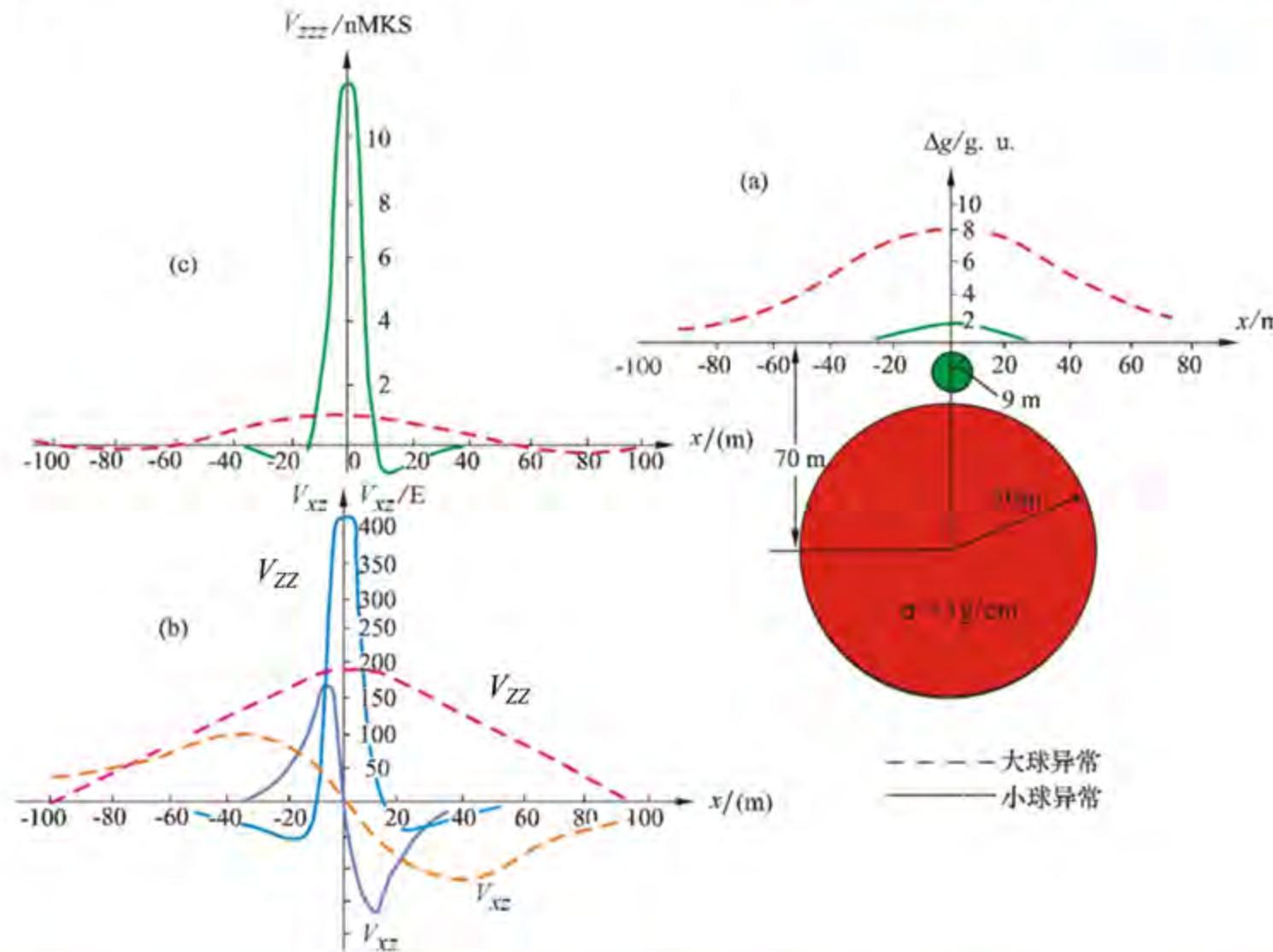
■ 导数的物理意义



6. 重力异常导数

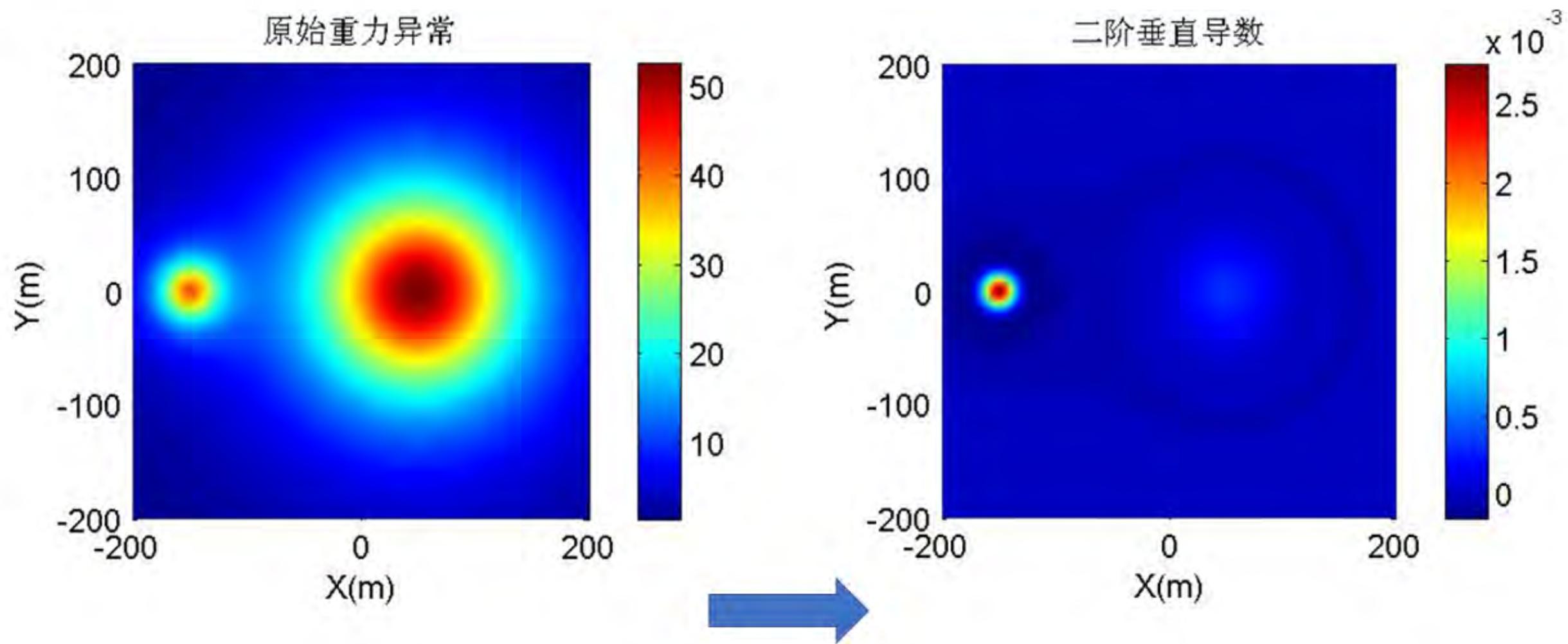
■ 导数的作用

区分大小球产生的重力异常、高阶导数



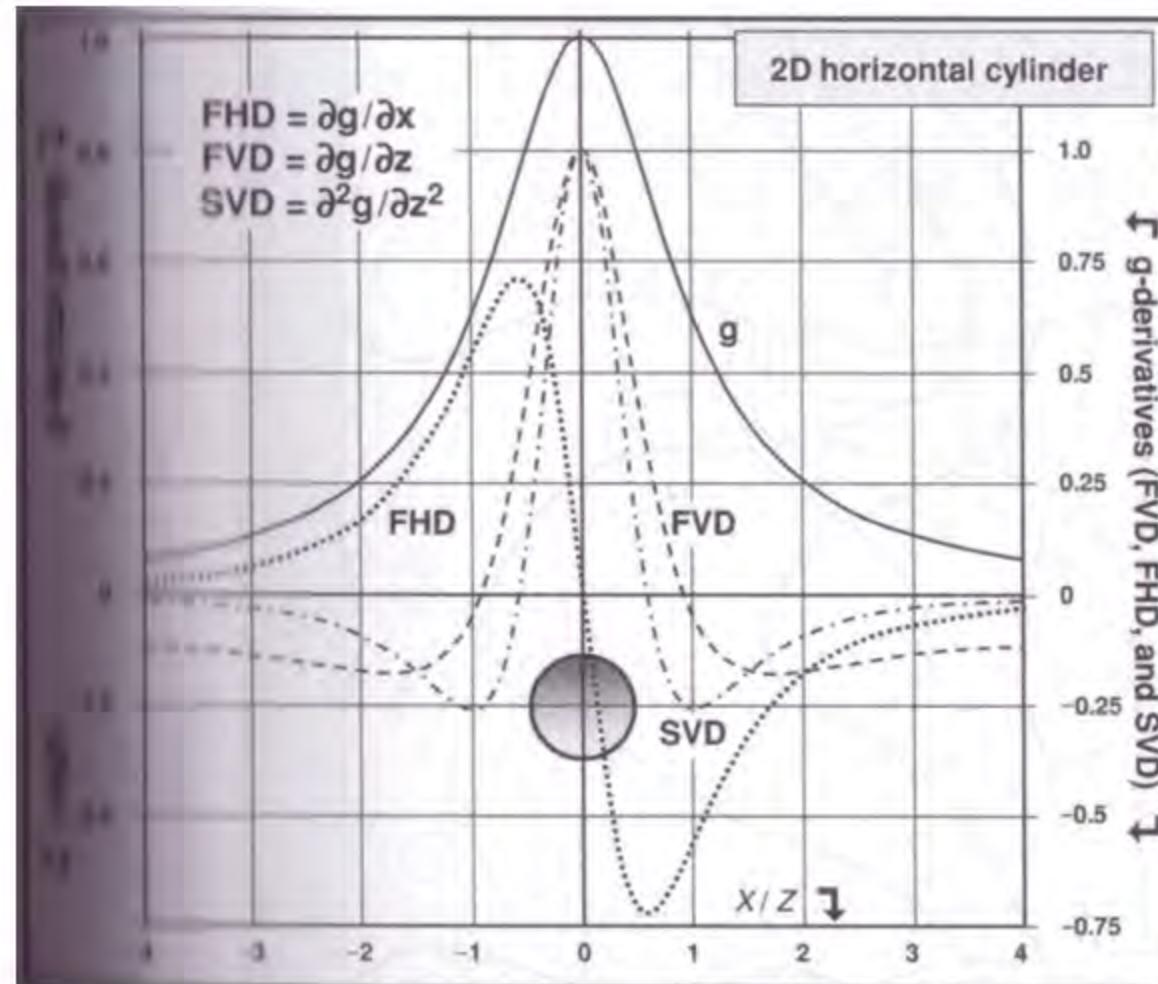
6.重力异常导数

■ 导数的作用



6.重力异常导数

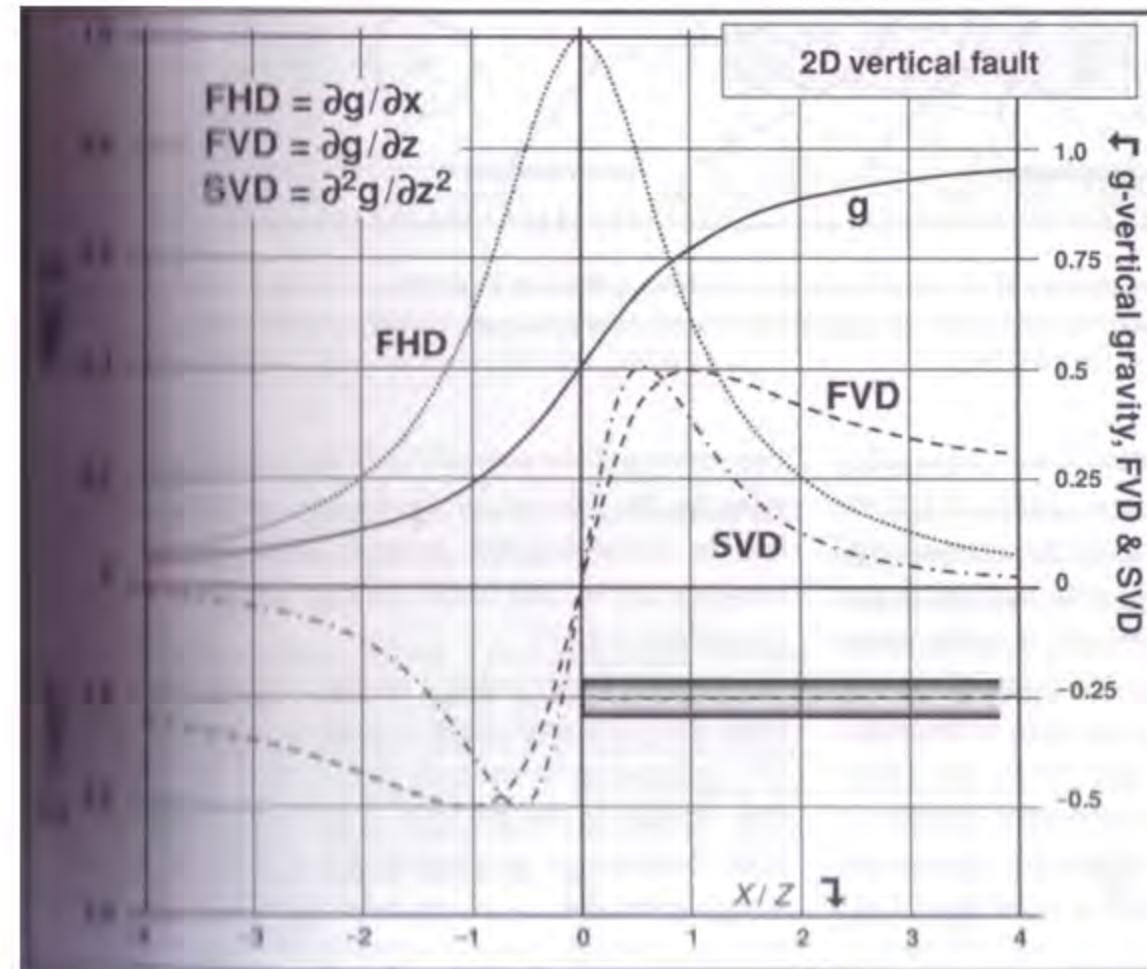
■ 导数的作用



无限长水平柱体的重力异常(g)，重力一阶垂直导数(FVD)，重力一阶水平导数(FHD)，重力二阶垂直导数(SVD)，

6.重力异常导数

■ 导数的作用



无限延伸二维断层模型的重力异常(g)，重力一阶垂直导数(FVD)，
重力一阶水平导数(FHD)，重力二阶垂直导数(SVD)，

6.重力异常导数

■ 导数的作用

$\Delta\rho$: 台阶和围岩的密度差异

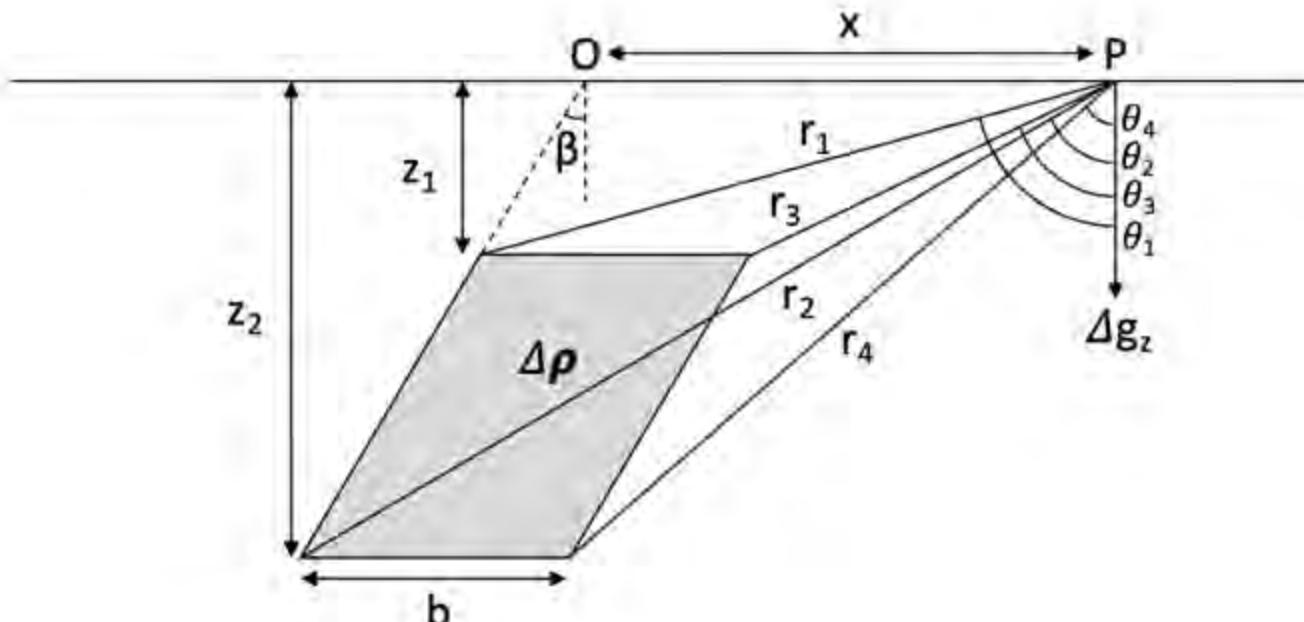
z_1 : 台阶上界面的深度

z_2 : 台阶下界面的深度

b : 台阶的宽度

β : 台阶的倾角

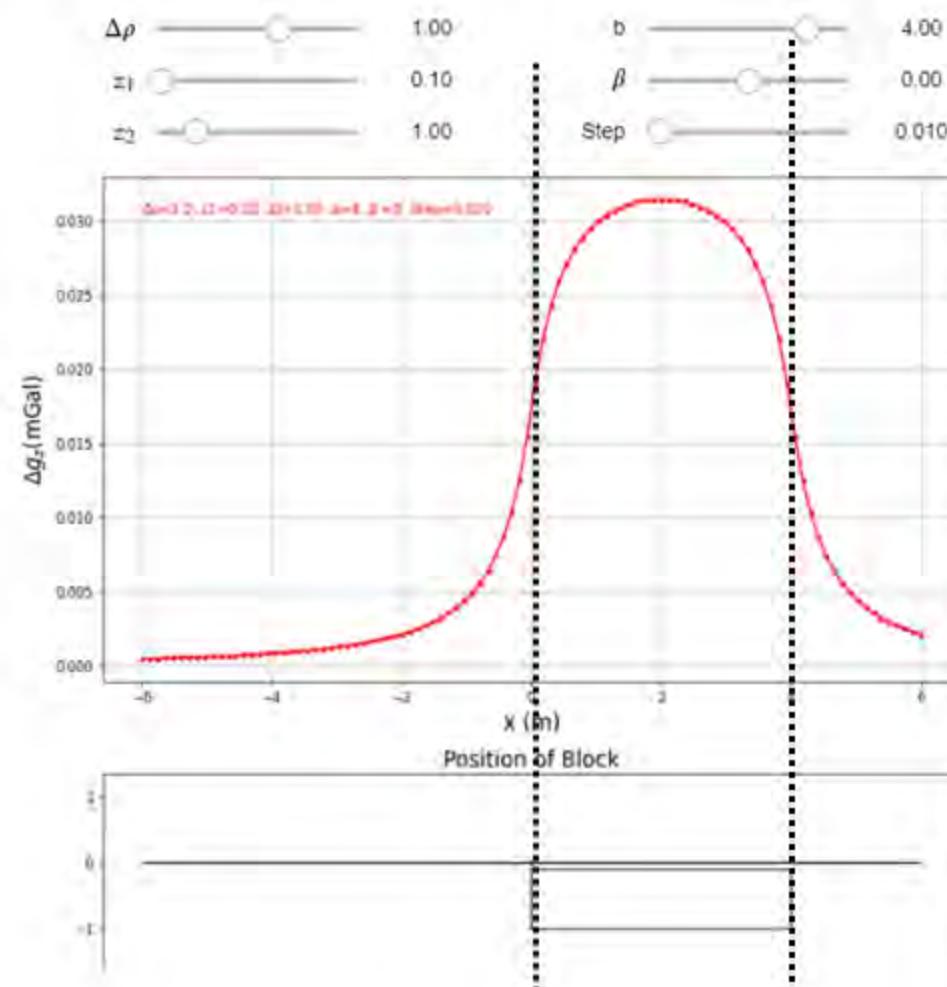
G : 万有引力常数



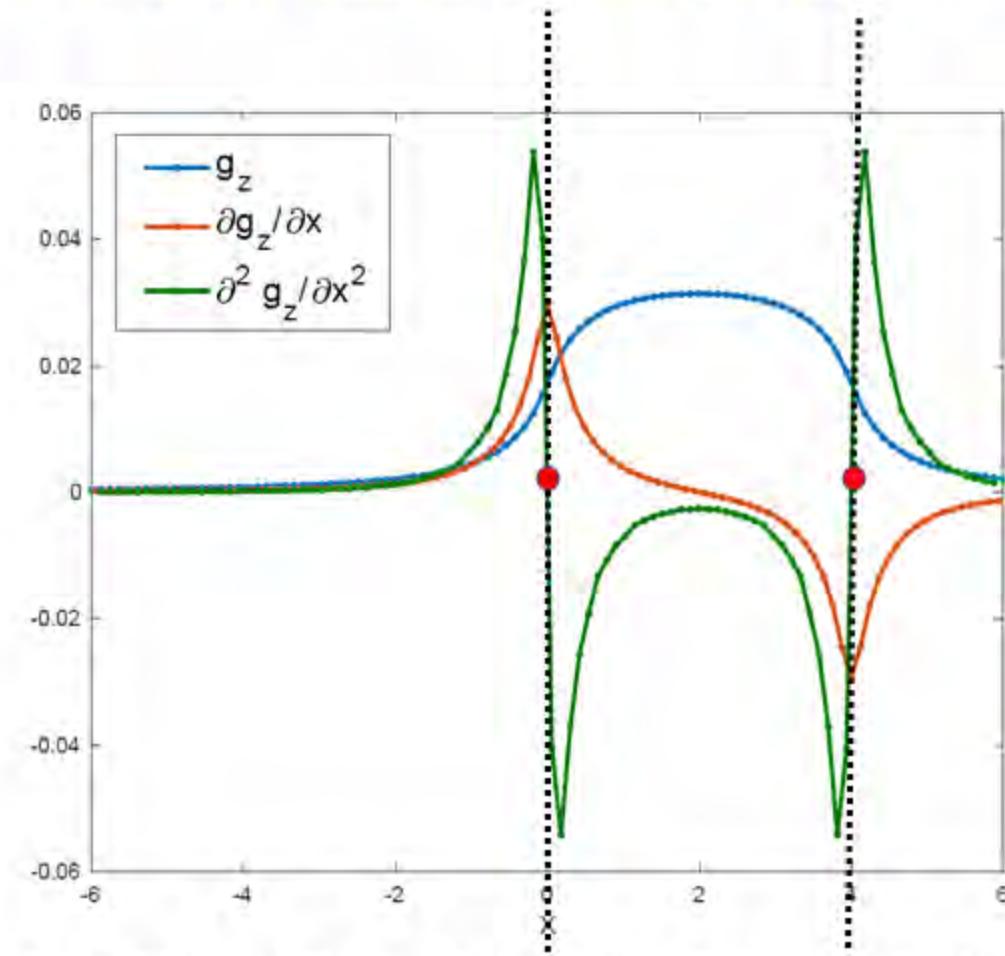
$$\Delta g_z = 2G\Delta\rho[z_2(\theta_2 - \theta_4) - z_1(\theta_1 - \theta_3) + \sin\beta\cos\beta\{x(\theta_2 - \theta_4) - (x - b)(\theta_4 - \theta_3)\} + \cos^2\beta\{x\ln(r_2/r_1) - (x - b)\ln(r_4/r_3)\}]$$

6.重力异常导数

■ 导数的作用（识别边界）



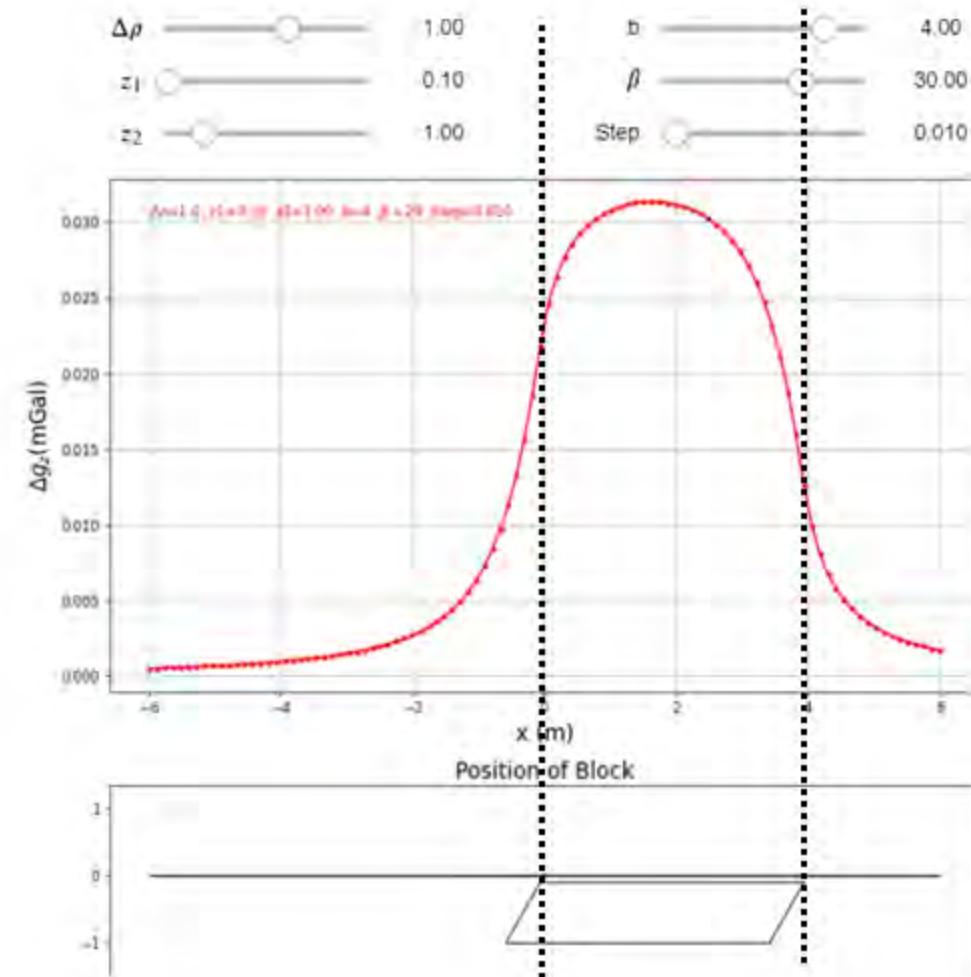
依据重力异常以及对应的一阶、二阶导数，
哪个导数对于检测台阶的水平边界更为有效？



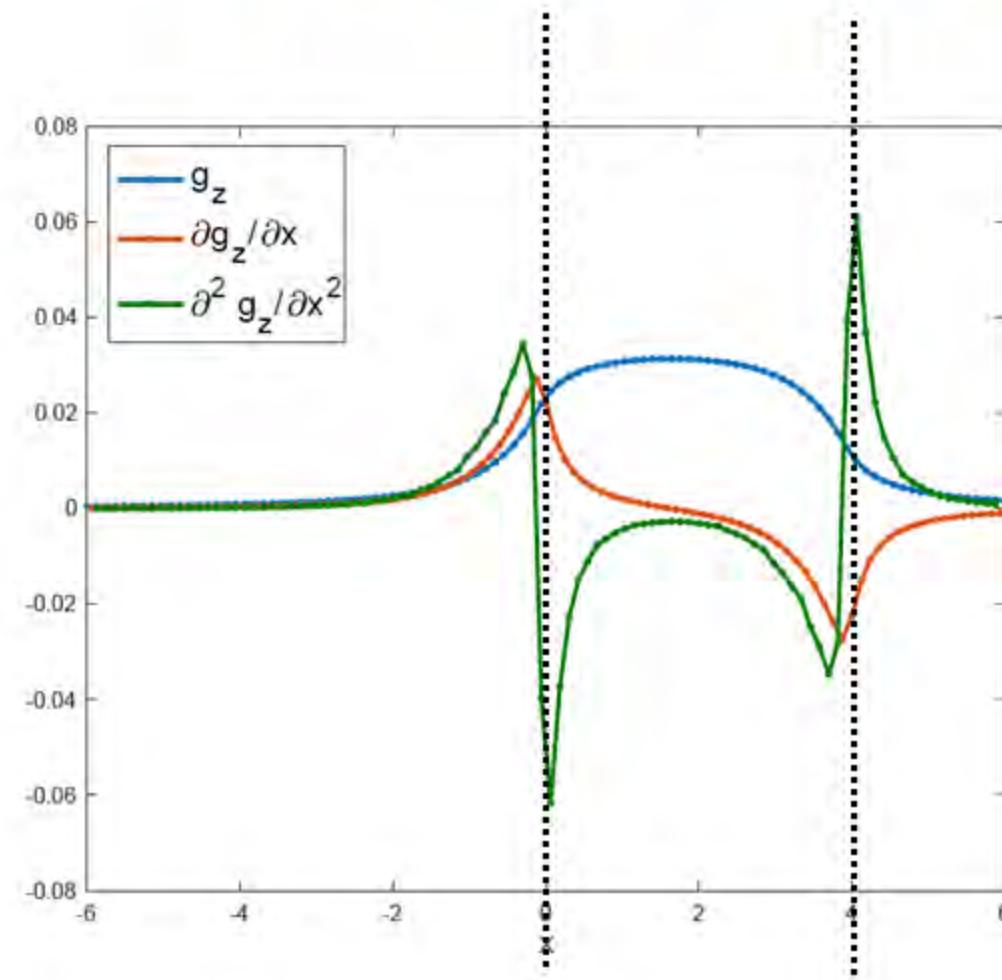
一阶导数的极值，二阶导数的零值对应直立台阶的边界

6.重力异常导数

■ 导数的作用（识别边界）

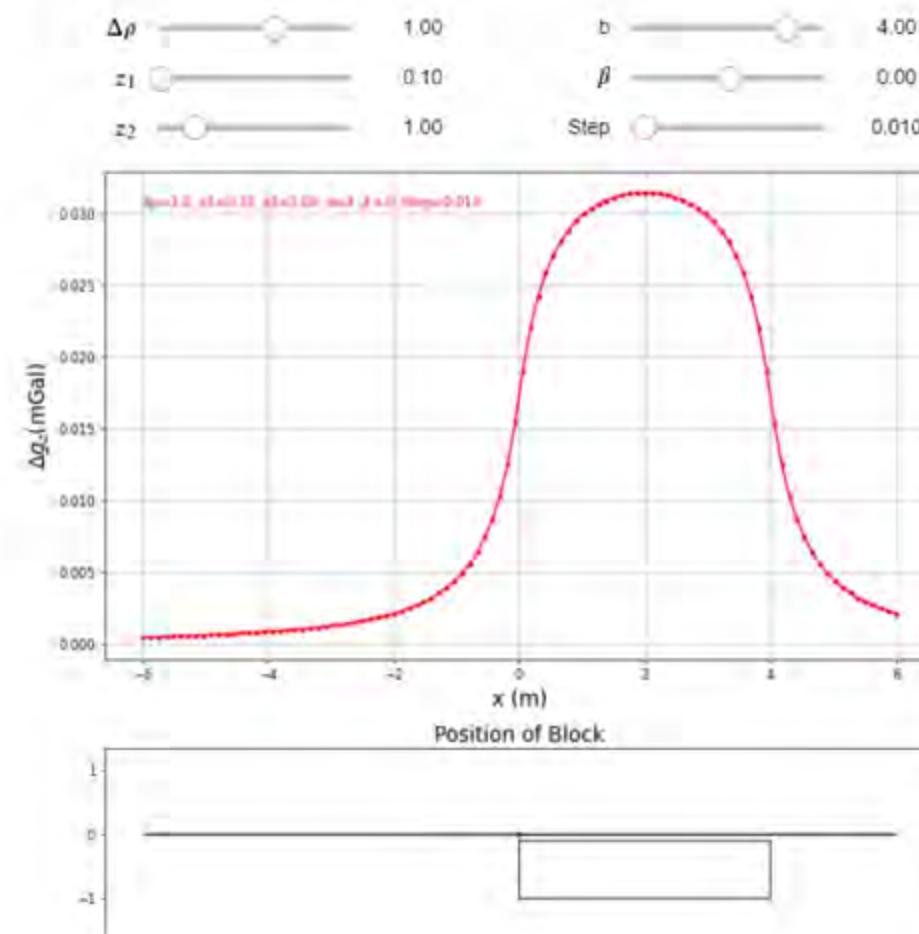


哪个导数有助于判断台阶的倾向？

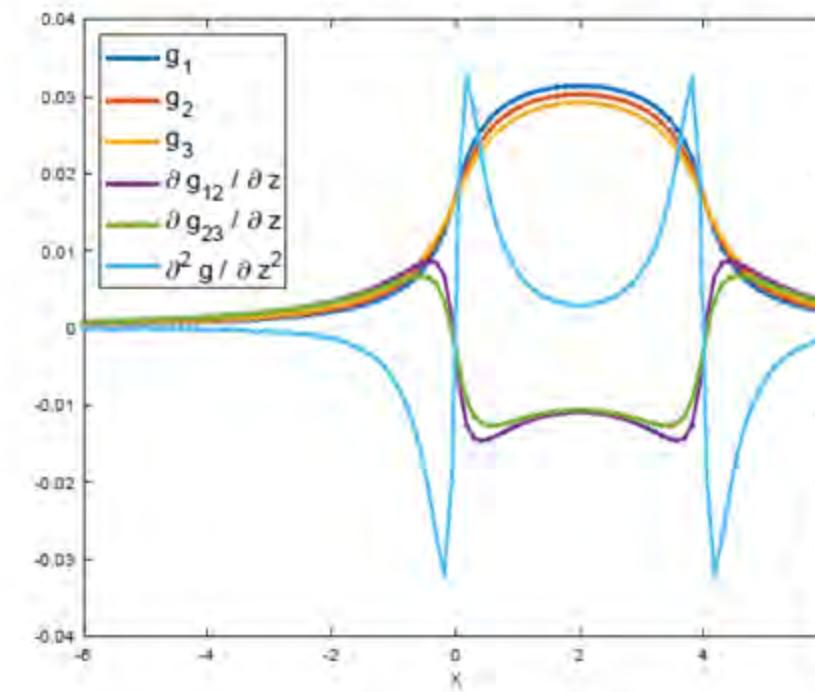


6. 重力异常导数

■ 导数的作用（识别边界）



g₁: 0 米高度的重力异常
g₂: 0.1 米高度的重力异常
g₃: 0.2 米高度的重力异常

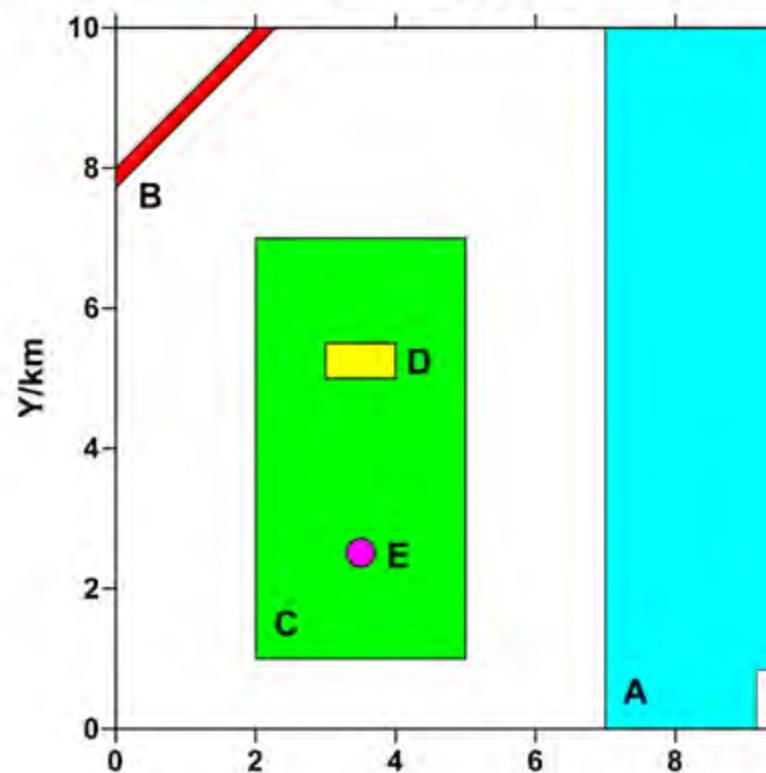


一阶导数，二阶导数的零值对应直立台阶的边界

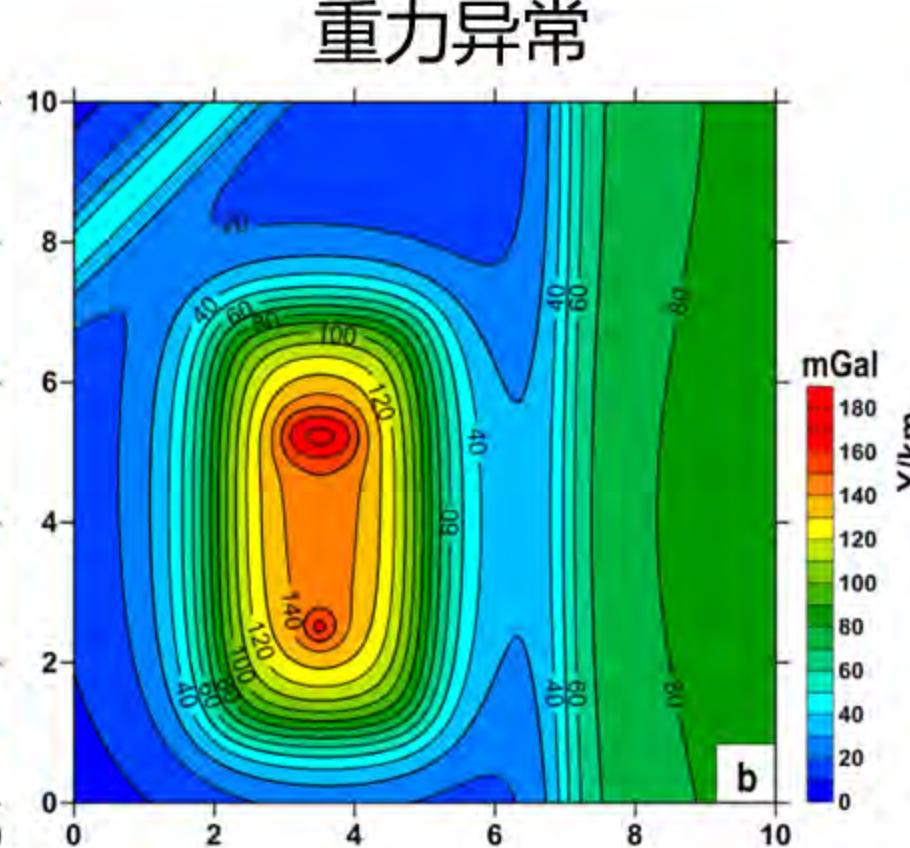
6. 重力异常导数

■ 导数的作用

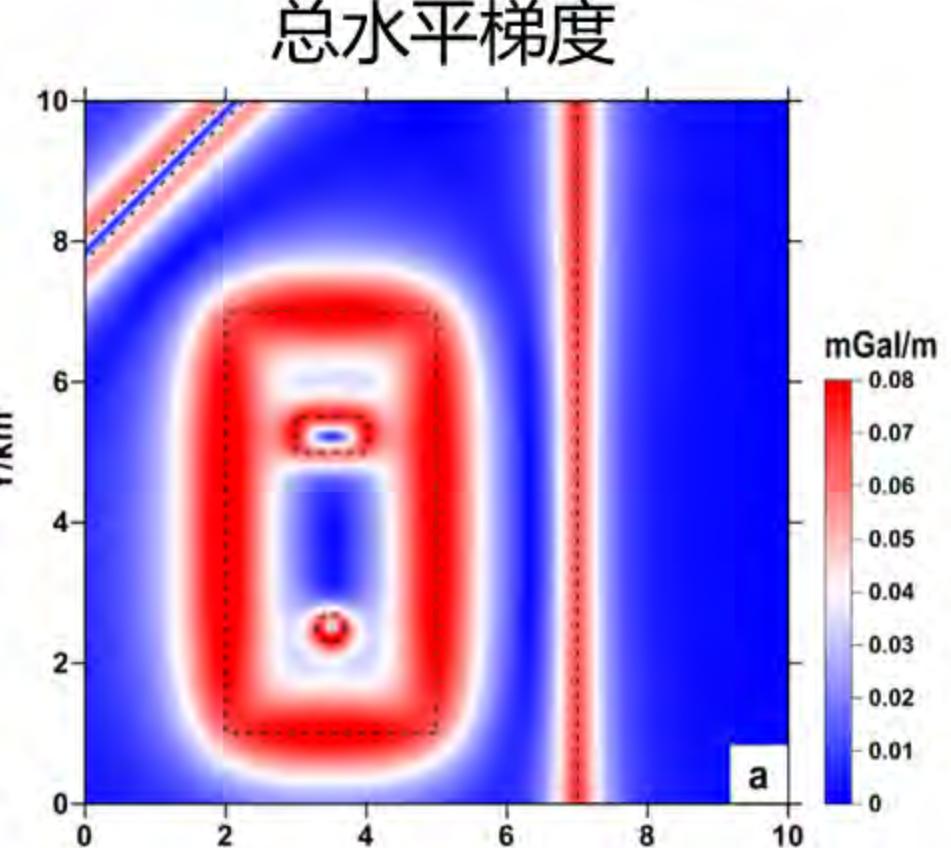
理论模型



重力异常

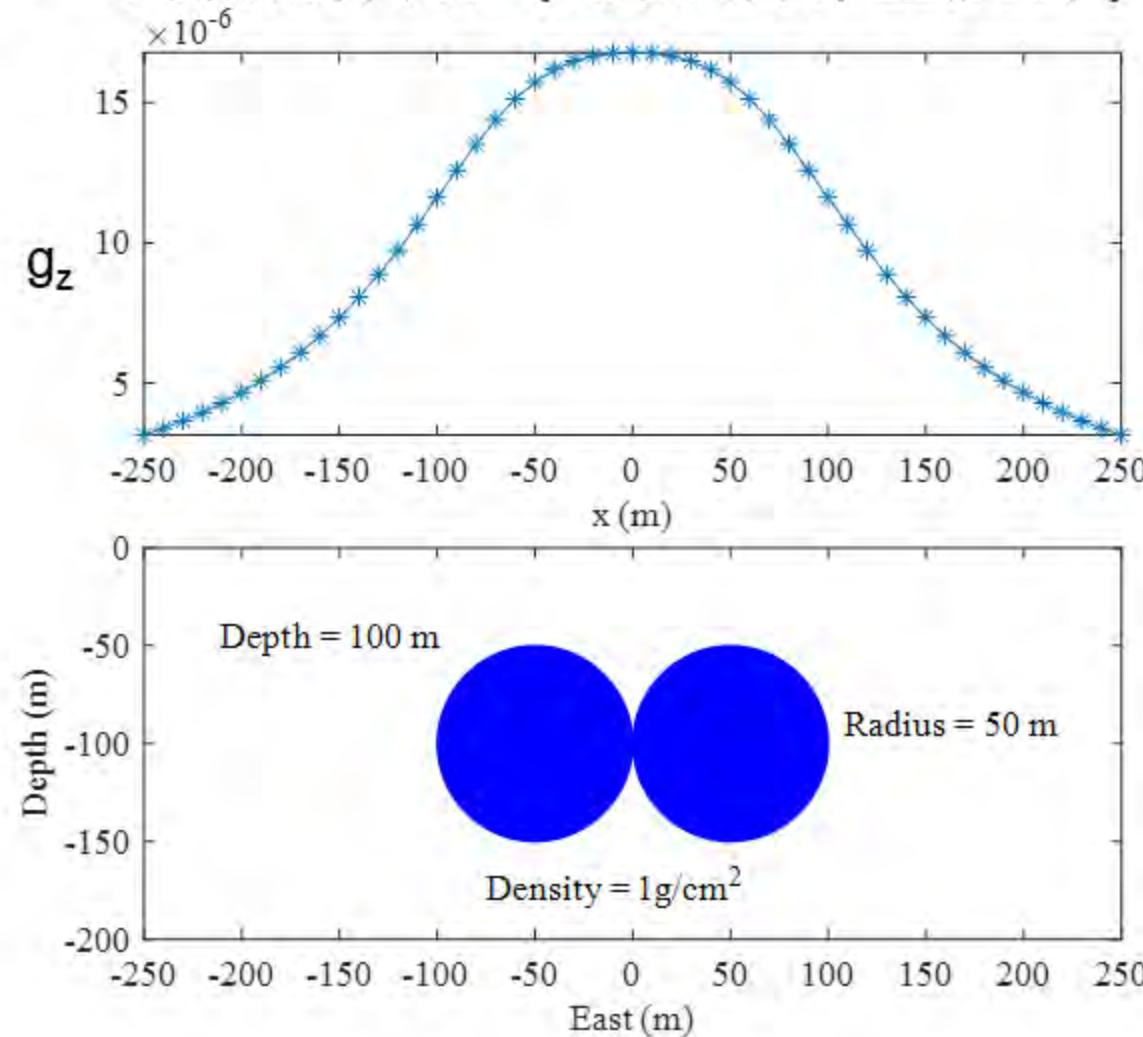


总水平梯度

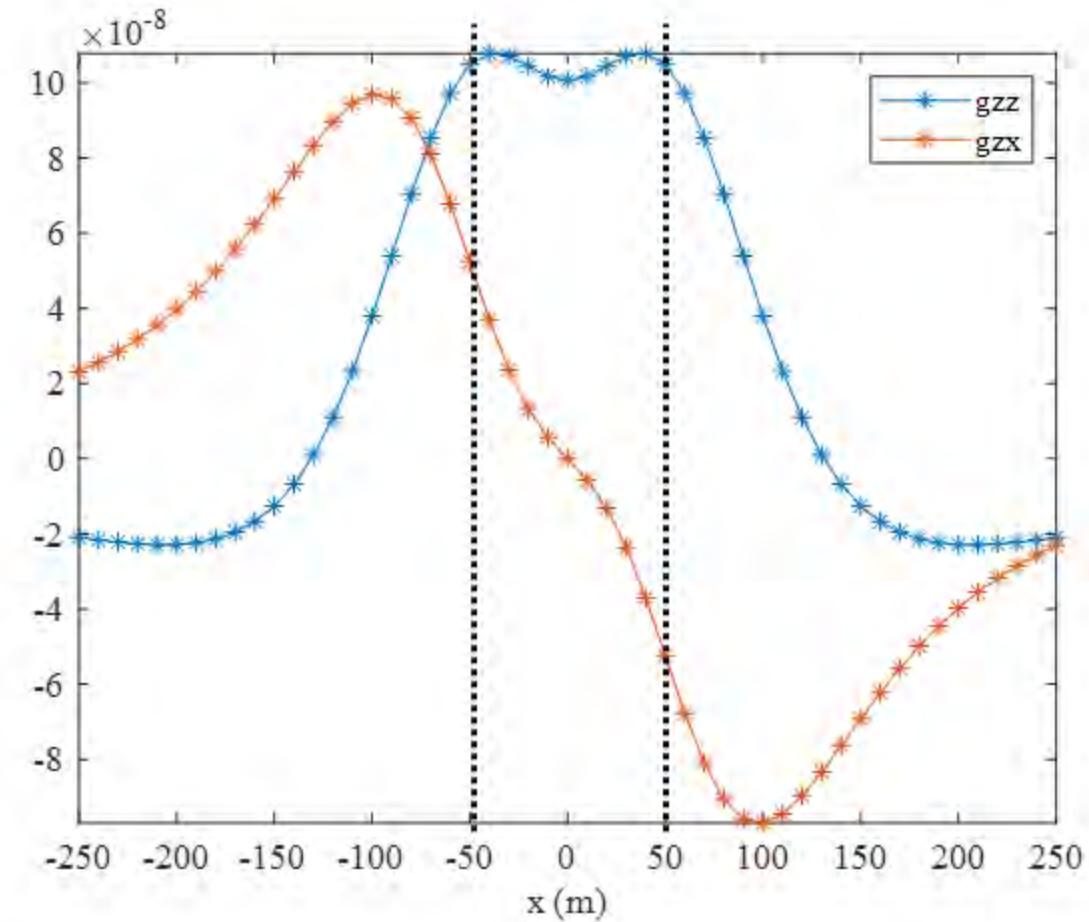


6. 重力异常导数

■ 导数的作用（划分相邻密度体）

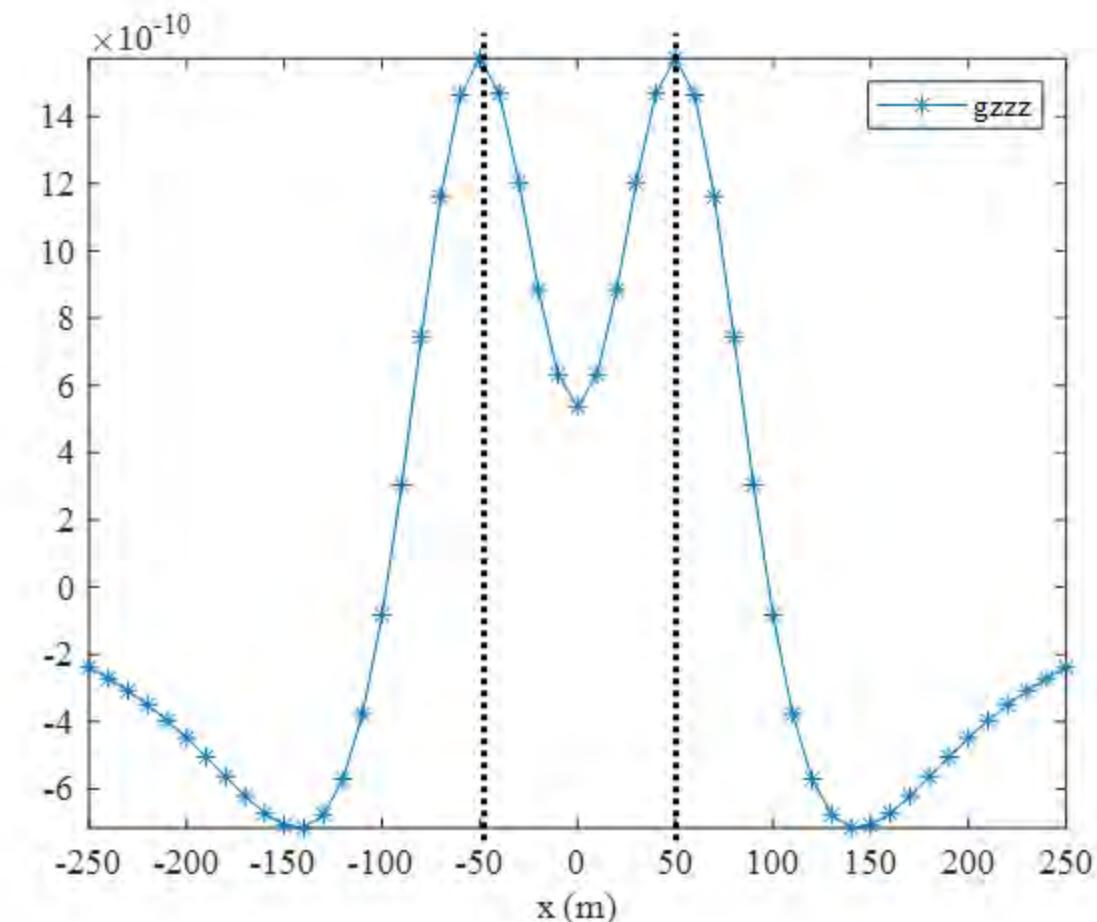
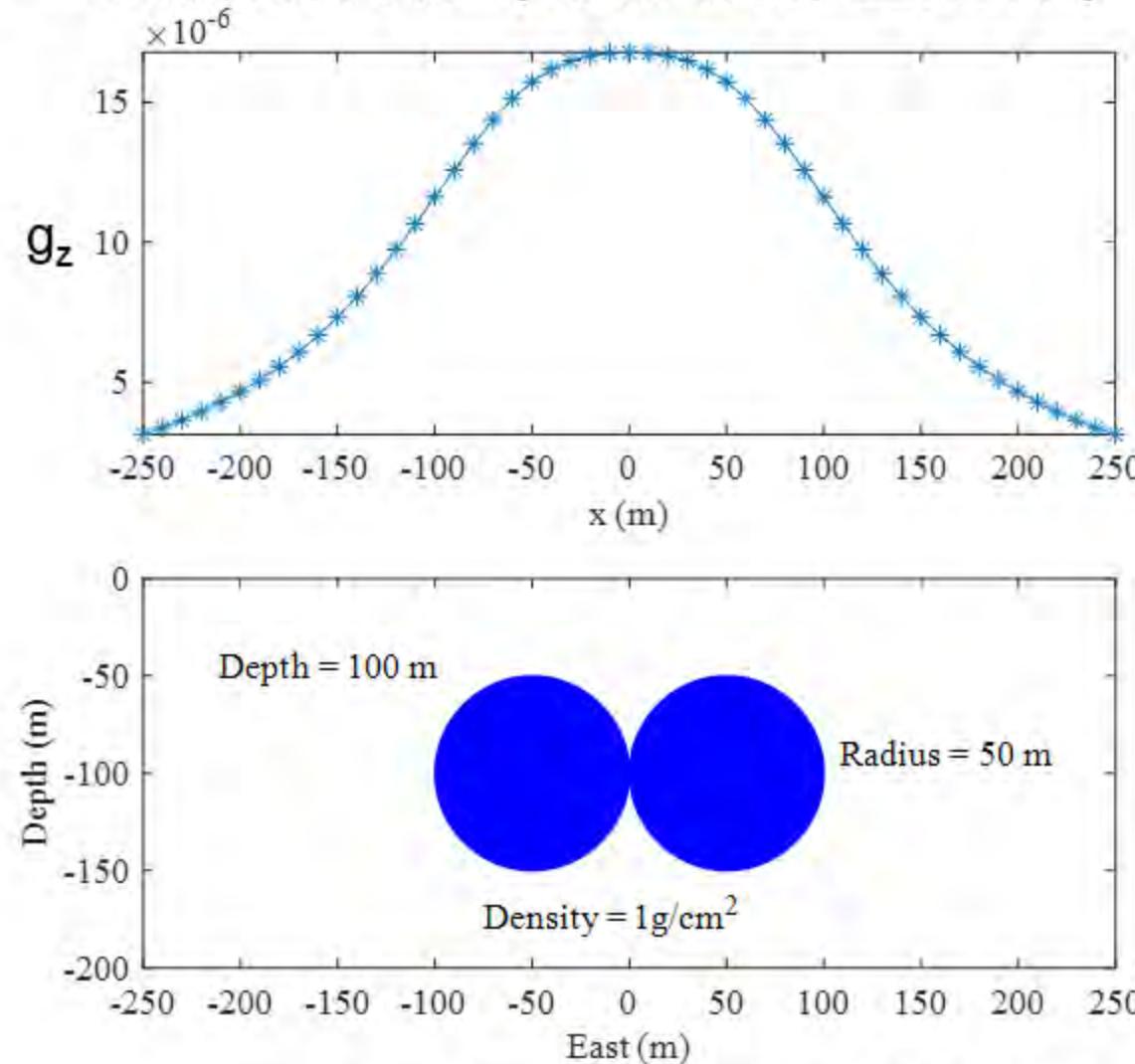


哪个导数更有助于划分？



6. 重力异常导数

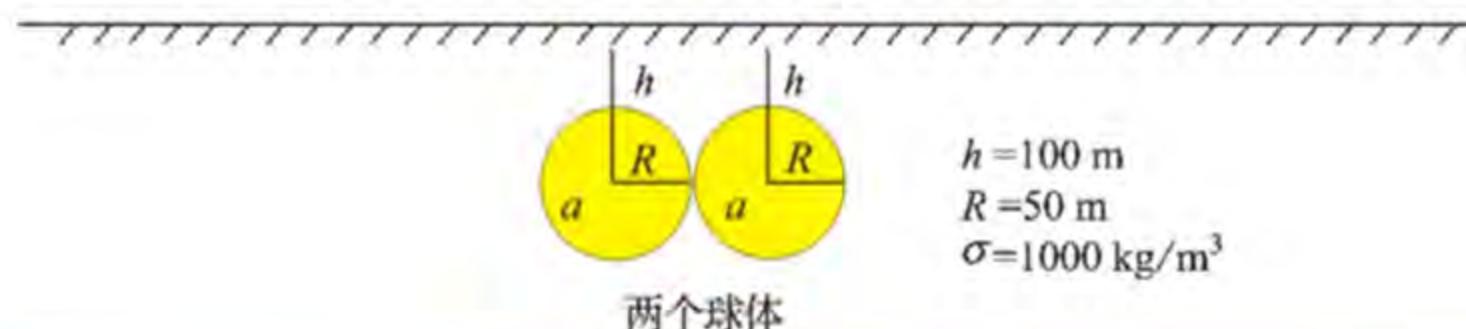
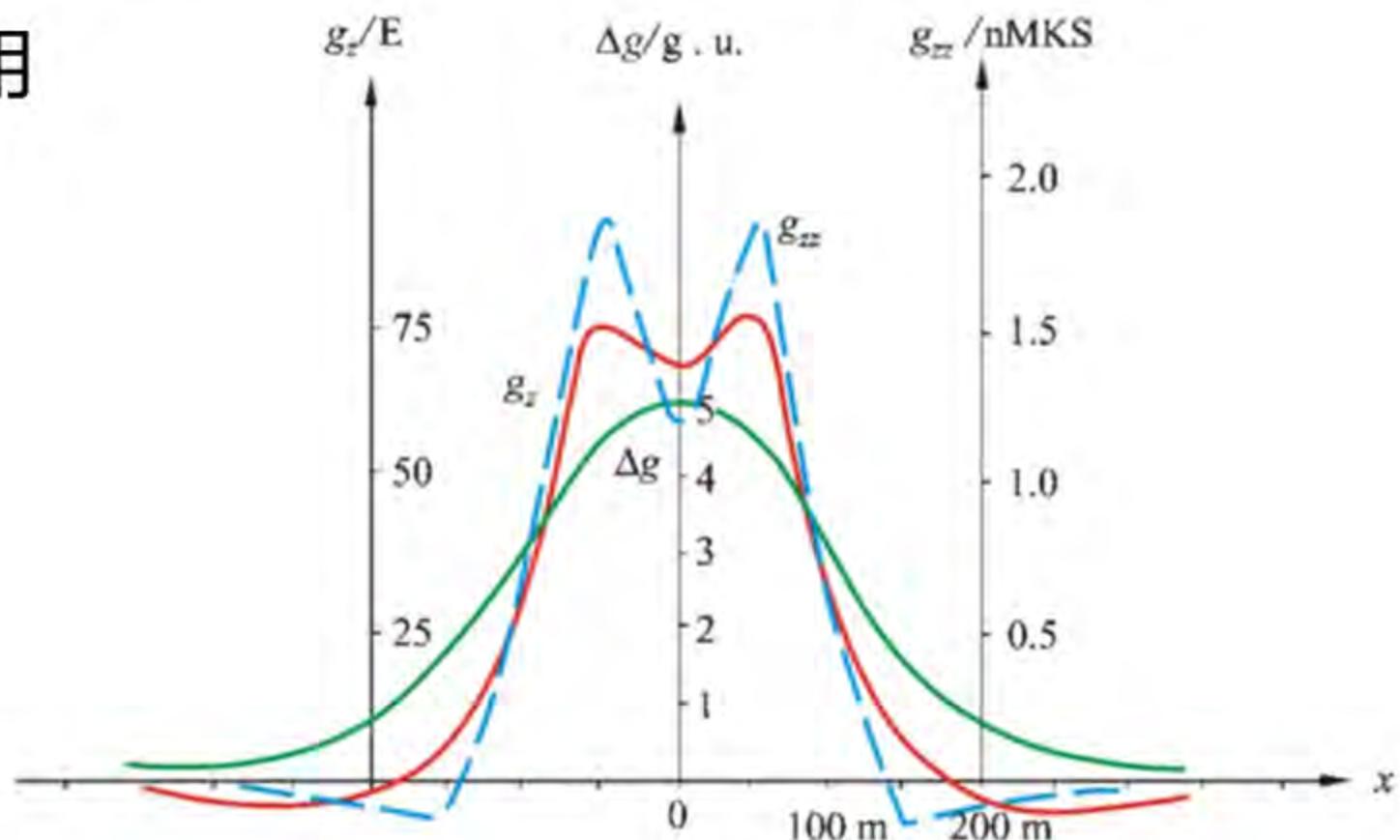
■ 导数的作用（划分相邻密度体）



重力的高阶导数可以划分相邻的密度体，并且导数阶数越高，划分越明显。

6. 重力异常导数

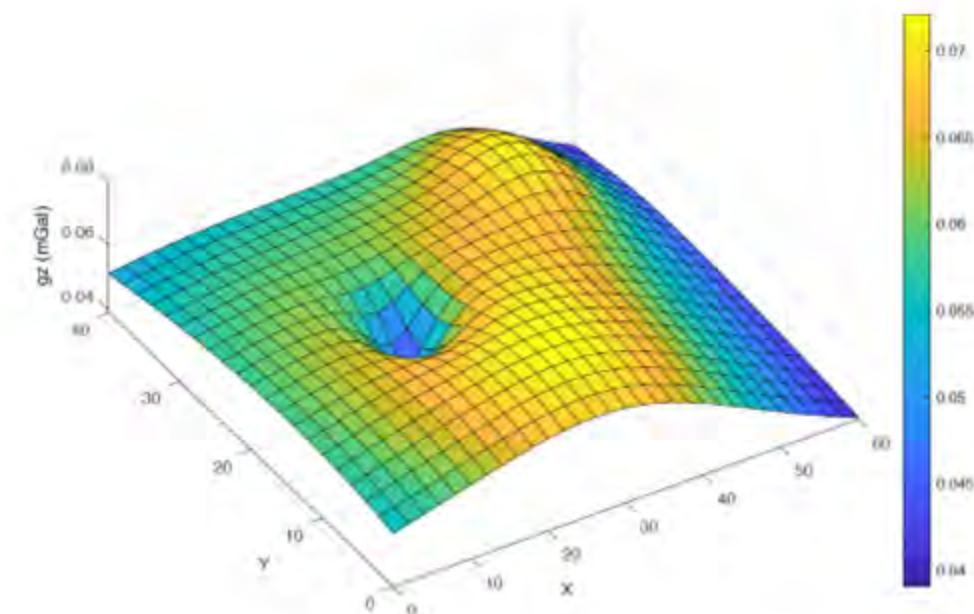
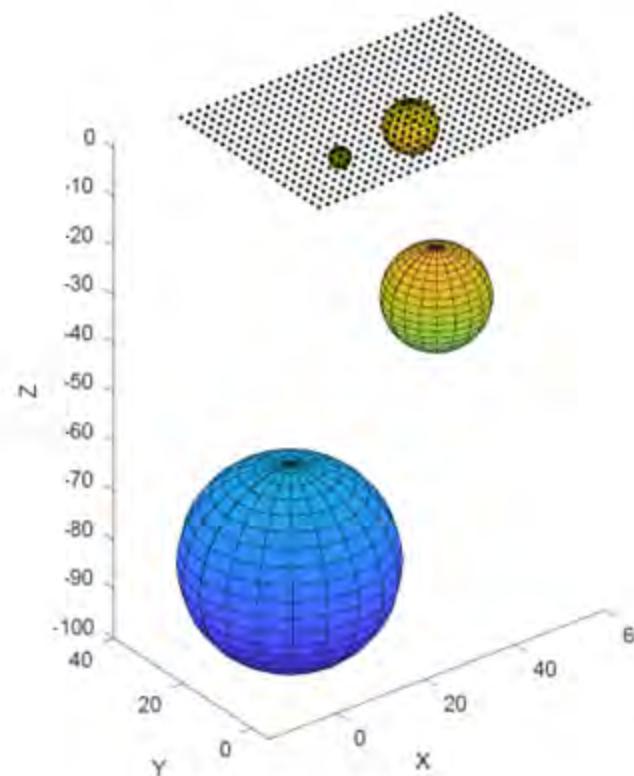
■ 导数的作用



6.重力异常导数

■ 导数的作用（突出浅部密度体）

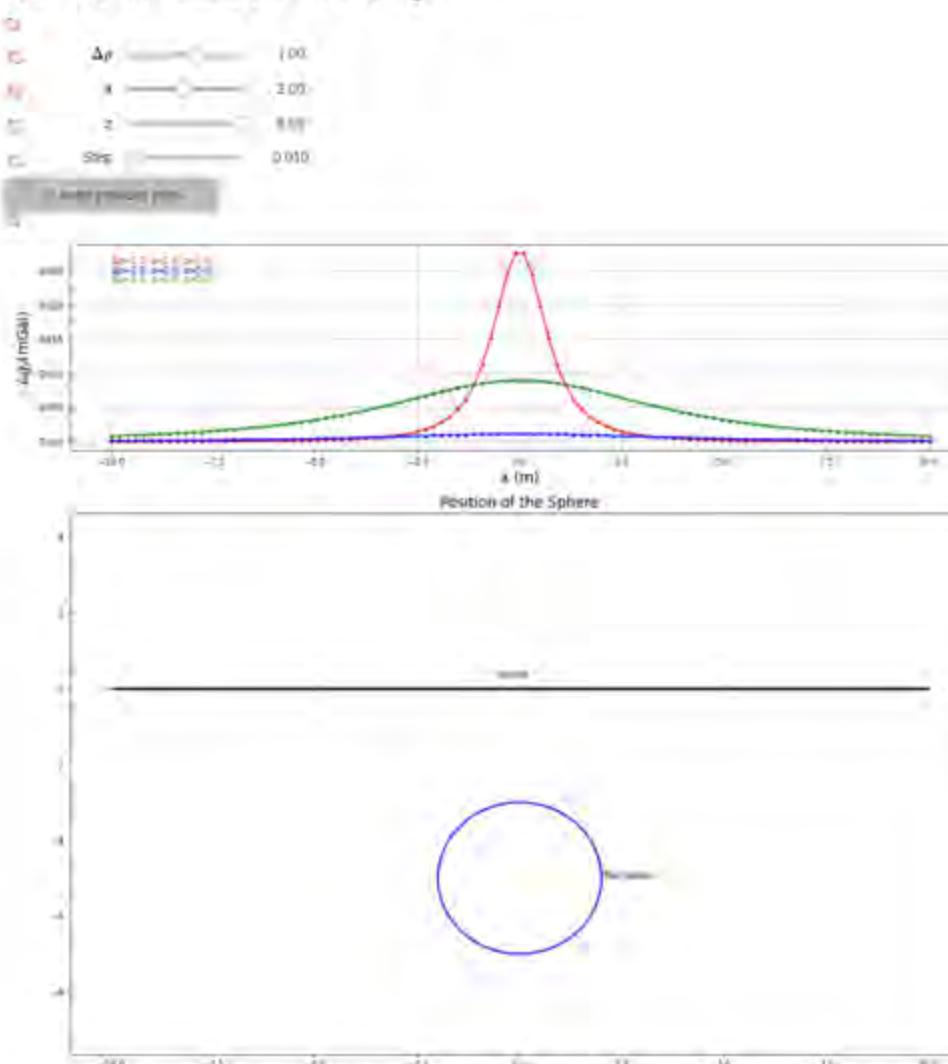
所有球体产生的重力异常



<https://github.com/geoscixyz/geosci-labs/blob/main/notebooks/gravity/gravitySphere.ipynb>

6.重力异常导数

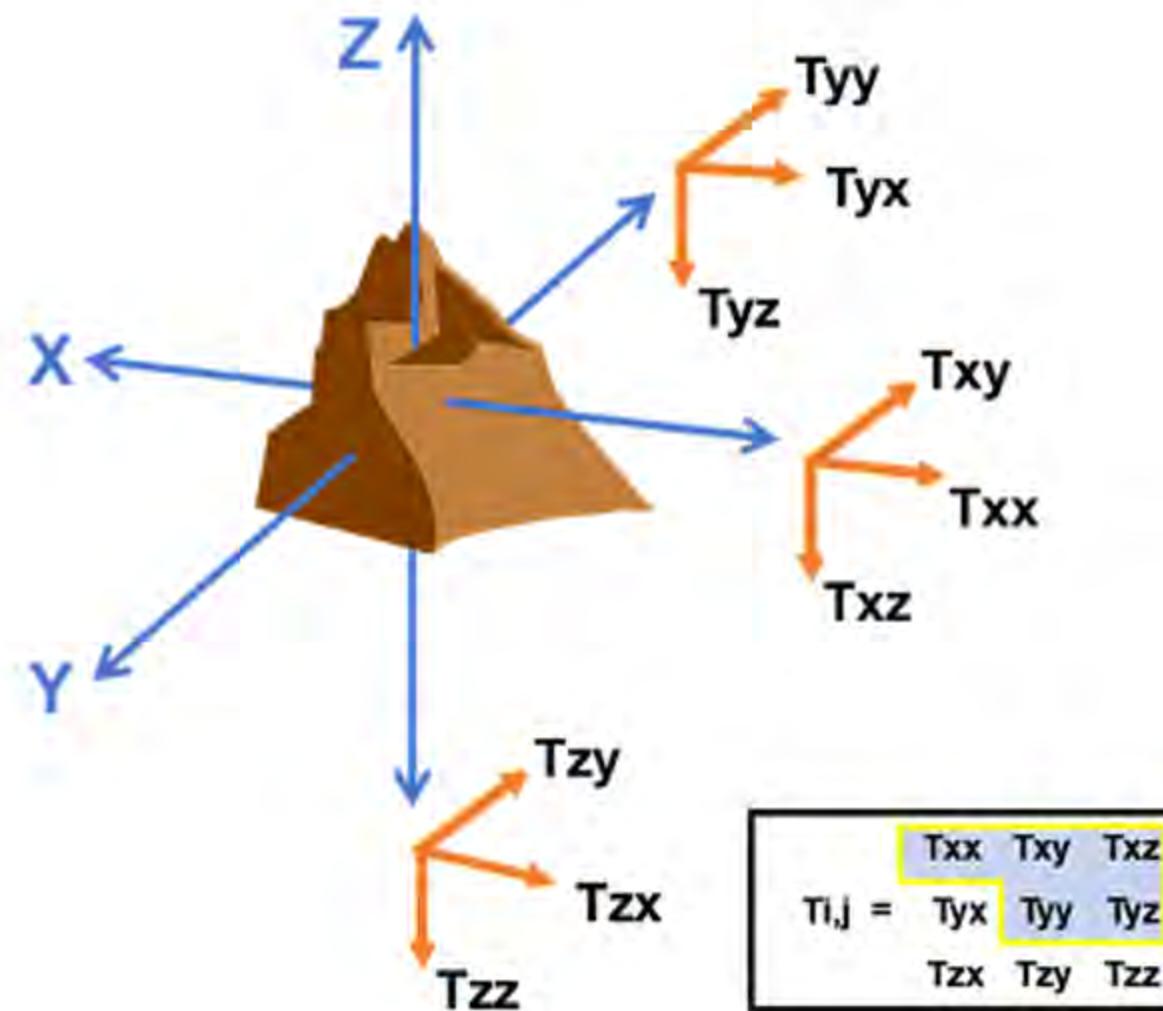
■ 导数的作用（突出浅部密度体）



6. 重力异常导数

■ 重力梯度

梯度
导数



6.重力异常导数

■重力梯度

- ✓ The individual component information is directly suited for mapping complex geometries on targeted geology that generate a density contrast with host geology.
- ✓ When combined, the directly measured **Txz** and **Tyz** components produce the **total horizontal gradient (THG)** and directly maps geological contact information defining the structural and stratigraphic setting of the target.
- ✓ Combining **Txx**, **Txy** and **Tyy** yields a measure of the **total horizontal curvature (THC)** and captures curvature evident in geological structures, such as that sourced by rounded basins, the tops of fault blocks, ridges, the tops of salt bodies, ore bodies and carbonates.

6.重力异常导数

■重力梯度

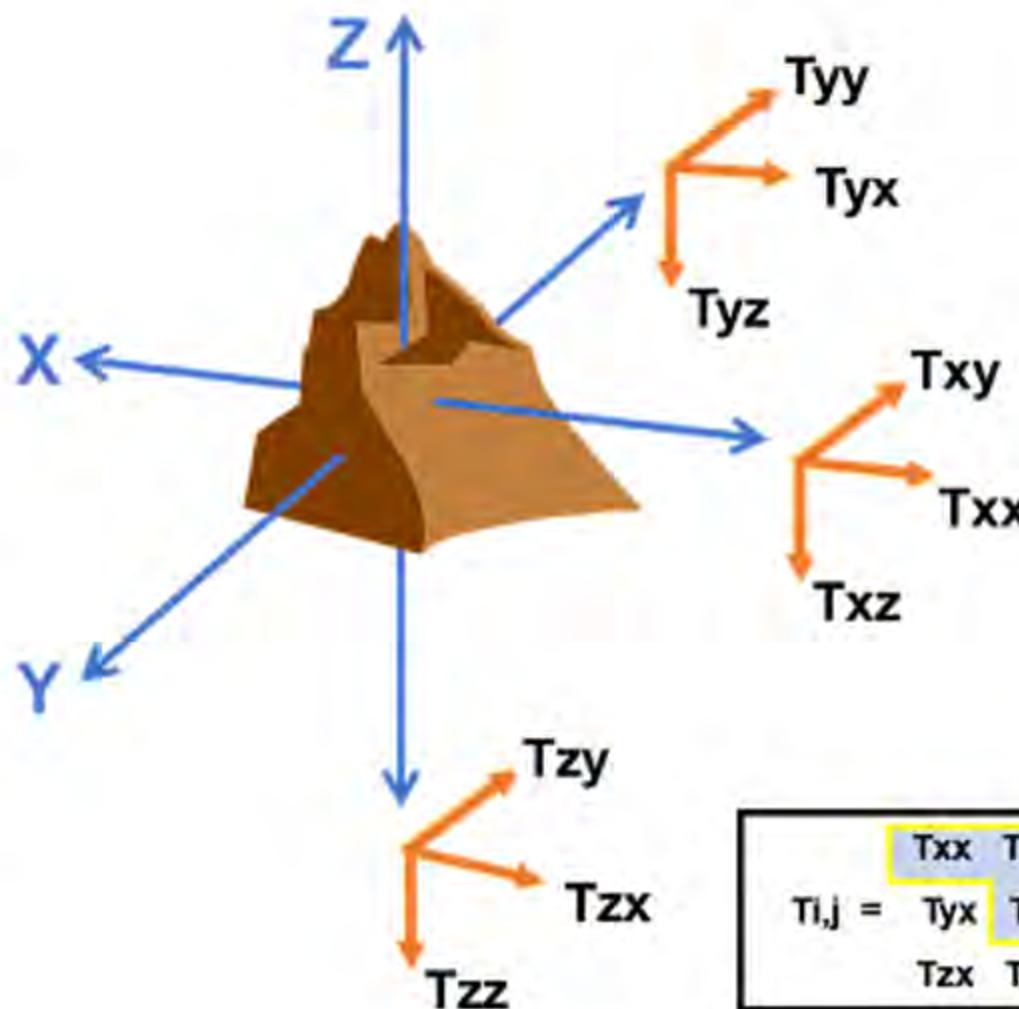
- ✓ The vertical gradient, T_{zz} , complements the THG by mapping vertical contacts evident on edges of density contrasts. Together, **T_{zz} and THG facilitate mapping of complex fault zones.**
- ✓ All tensor component data are a measurement of the gravity potential, that when collectively combined accurately depict a gravity anomaly field. The resultant gravity field offers high resolution and accurate capturing of a signal bandwidth that is not possible with conventional gravity surveying methods.

6. 重力异常导数

■ 重力梯度

The three primary elements of the full tensor are:

- ✓ The vertical component: T_{zz}
- ✓ The total horizontal curvature (THC): T_{xy} 、 T_{xx} 、 T_{yy}
- ✓ The total horizontal gradient (THG): T_{xz} 、 T_{yz}

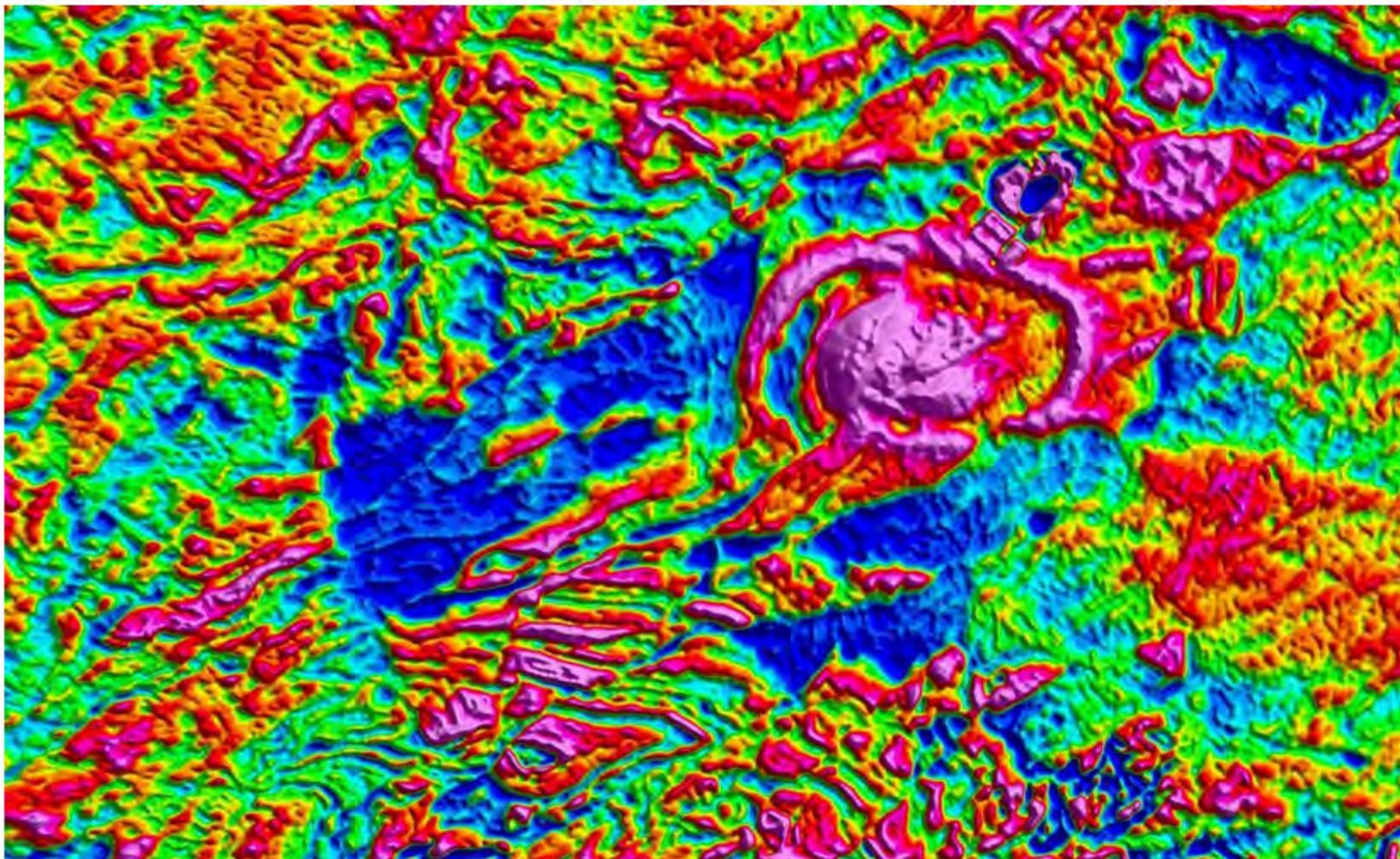


T_{xx}	T_{xy}	T_{xz}
T_{yx}	T_{yy}	T_{zy}
T_{zx}	T_{zy}	T_{zz}

6.重力异常导数

■重力梯度

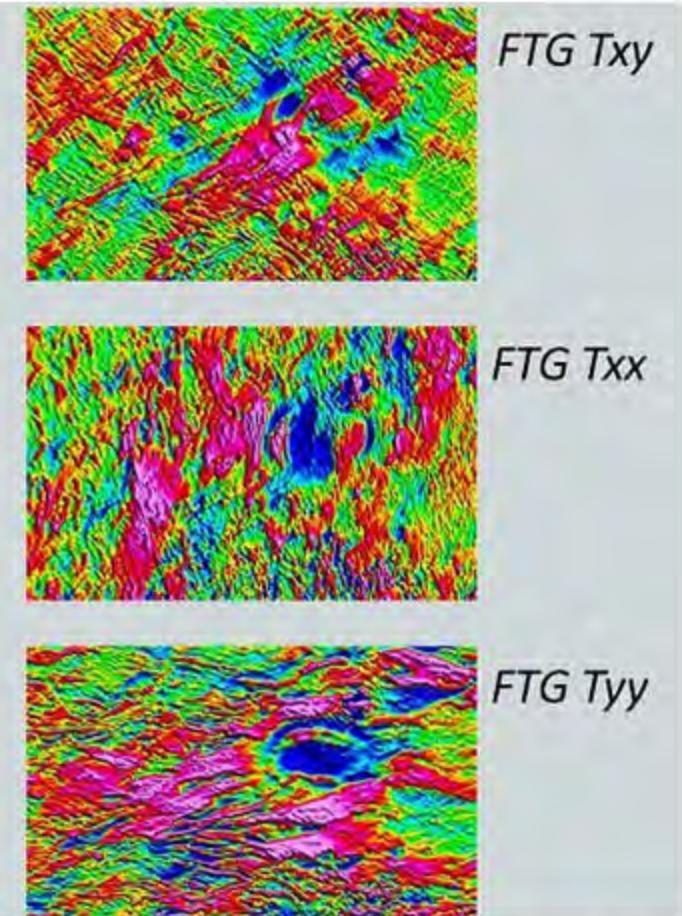
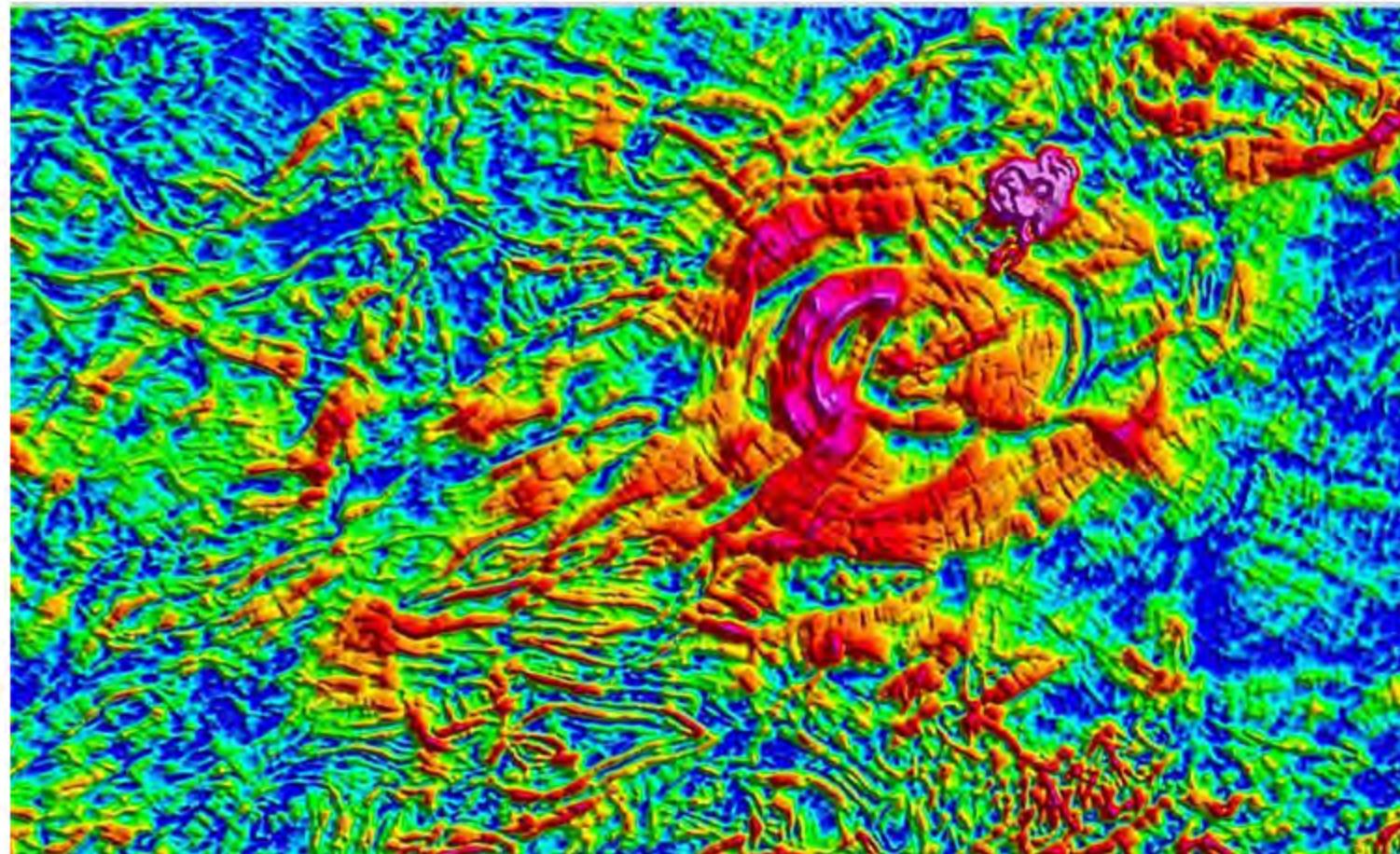
Vertical Gradient - FTG Tzz



6.重力异常导数

■重力梯度

Total Horizontal Curvature – FTG THC

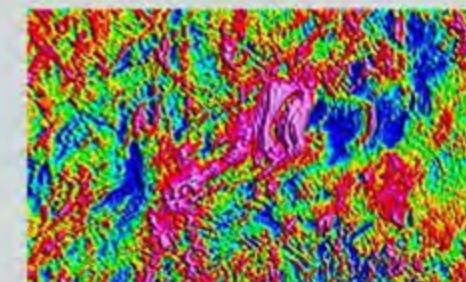
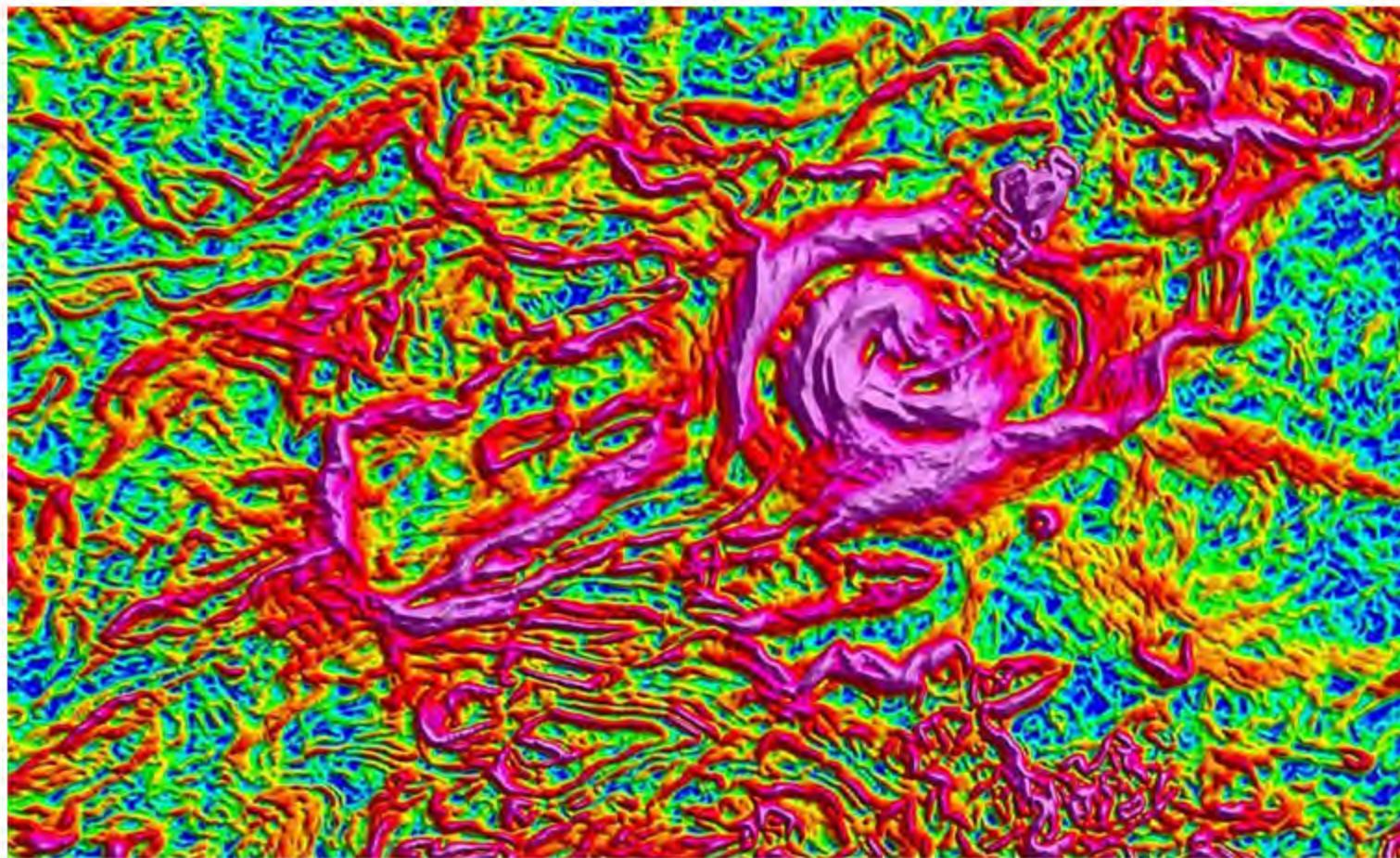


THC maps the curvature of the field and directly images geological structures exhibiting curvature. It does not discriminate structure type, it just locates curved structures.

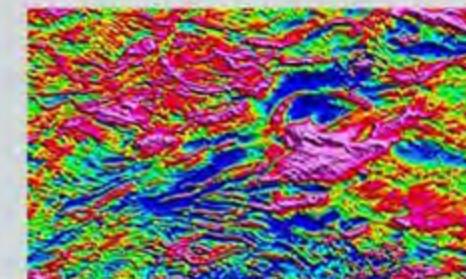
6.重力异常导数

■重力梯度

Total Horizontal Gradient – FTG THG



FTG T_{xz}



FTG T_{yz}

THG maps the horizontal gradient. Maxima anomalous responses accurately locate contact edges of target geology.

6.重力异常导数

■ 导数的作用

- ✓ 异常导数可突出浅而小的地质体的异常特征而压制区域性深部地质因素的影响，在一定程度上可**划分**不同深度和大小异常源产生的**叠加异常**，且导数次数越高，这种分辨能力就越强。
- ✓ 高阶导数可以将几个互相靠近、埋深相差不大的相邻地质因素所引起的**叠加异常划分**开来。
- ✓ 水平梯度可以突出**场源边界或构造边界**信息
- ✓ 异常导数在不同形状地质体上有不同的特征，有助于对异常的解释和分类

6.重力异常导数

■ 导数的计算

诺依曼 (Neuman) 无限平面外部问题的解

从位场理论可知，一个未知的场源体在观测平面上所引起的重力异常已知时，可以将这个观测面展布成一个无限大而面密度不均匀的等效物质面，使这个面上各点的面密度为

$$\mu(\xi, \eta, 0) = \frac{1}{2\pi G} \Delta g(\xi, \eta, 0)$$

这个面密度分布在其外部空间任意点引起的重力异常及其各阶导数，都将与原来场源在该点引起的异常及各阶导数是等效的。

6. 重力异常导数

■ 导数的计算

一个密度分布不均匀的无限大物质面，在其上部空间任意点A所引起的引力位为

$$V(x, y, -z) = G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (0 - z)^2]^{1/2}}$$

$$V(x, y, -z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (0 - z)^2]^{1/2}}$$

$$\Delta g(x, y, -z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (0 - z)^2]^{3/2}}$$

$$\Delta g(x, y, -h) = \frac{h}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta g(r, \alpha, 0) r dr d\alpha}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\Delta g(0, -h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, 0) d\xi}{\xi^2 + h^2}$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

V_{xz} 的物理意义是 V_z (即 Δg) 在 x 方向的变化率:

$$(V_{xz})_0 = \frac{\Delta g(\Delta x) - \Delta g(-\Delta x)}{2\Delta x}$$

为了提高精度, 采用多点计算, 使用最小二乘法:

设计算点为坐标原点, 那么重力异常可以表示为 x 的多项式:

$$\Delta g(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

$$W_{xz}(x) = \Delta g'(x) = \sum_{k=0}^m k a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

$$W_{xz}(x) = \Delta g'(x) = \sum_{k=0}^m k a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

$$x = 0 \text{ 时, } W_{xz}(0) = a_1$$

若取 $m=2$, 则有:

$$\Delta g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

特别地，取5个点计算时：

$$-2\Delta x, -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x$$

$$\Delta g(-2\Delta x) = a_0 - 2a_1\Delta x + 4a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_{-2}$$

$$\Delta g(-\Delta x) = a_0 - a_1\Delta x + a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_{-1}$$

$$\Delta g(0) = a_0$$

$$\Delta g(\Delta x) = a_0 + a_1\Delta x + a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_1$$

$$\Delta g(2\Delta x) = a_0 + 2a_1\Delta x + 4a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_2$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \partial \left[\sum_{k=-2}^2 (\varepsilon_k)^2 \right] / \partial a_0 = 0$$

误差泛函的构造:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \partial \left[\sum_{k=-2}^2 (\varepsilon_k)^2 \right] / \partial a_1 = 0$$

$$Q = \sum_{k=-2}^2 (\varepsilon_k)^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2} = \partial \left[\sum_{k=-2}^2 (\varepsilon_k)^2 \right] / \partial a_2 = 0$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

5点 (- $2\Delta x$, - Δx , 0, Δx , $2\Delta x$) 计算公式

$$a_1 = \frac{1}{5\Delta x} [\Delta g(2\Delta x) - \Delta g(-2\Delta x)] + \frac{1}{10\Delta x} [\Delta g(\Delta x) - \Delta g(-\Delta x)]$$

$x = 0$ 时, $W_{xz}(0) = a_1$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

类似地，用7点拟合 $(-3\Delta x, -2\Delta x, -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x)$ 可以得到：

$$\Delta g(-3\Delta x) = a_0 - 3a_1\Delta x + 9a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_{-3}$$

$$\Delta g(-2\Delta x) = a_0 - 2a_1\Delta x + 4a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_{-2}$$

$$\Delta g(-\Delta x) = a_0 - a_1\Delta x + a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_{-1}$$

$$\Delta g(0) = a_0$$

$$\Delta g(\Delta x) = a_0 + a_1\Delta x + a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_1$$

$$\Delta g(2\Delta x) = a_0 + 2a_1\Delta x + 4a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_2$$

$$\Delta g(3\Delta x) = a_0 + 3a_1\Delta x + 9a_2(\Delta x)^2 + \varepsilon_3$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(一) V_{xz} 的计算

7点 $(-3\Delta x, -2\Delta x, -\Delta x, 0, \Delta x, 2 \Delta x, 3\Delta x)$ 计算公式

$$a_1 = \frac{3}{28\Delta x} [\Delta g(3\Delta x) - \Delta g(-3\Delta x)]$$

$$+ \frac{1}{14\Delta x} [\Delta g(2\Delta x) - \Delta g(-2\Delta x)]$$

$$+ \frac{1}{28\Delta x} [\Delta g(\Delta x) - \Delta g(-\Delta x)]$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(二) V_{zz} 的计算

对 V_z 求 z 方向的导数并采用柱坐标系：

$$\Delta g(x, y, -z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (0 - z)^2]^{3/2}}$$

$$V_z(0, 0, -h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \Delta g(r, \alpha, 0) \frac{(r^2 - 2h^2)r}{(r^2 + h^2)^{5/2}} dr$$

令 $\overline{\Delta g}(r, 0)$ 为半径 r 的圆周上的重力平均值

$$\overline{\Delta g}(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g(r, \alpha, 0) d\alpha$$

则

计算地面 $h=0$ 处的 V_{zz}

$$V_{zz}(0, 0, -h) = - \int_0^{\infty} \overline{\Delta g}(r, 0) \frac{(r^2 - 2h^2)r}{(r^2 + h^2)^{5/2}} dr$$

$$V_{zz}(0, 0, 0) = - \int_0^{\infty} \overline{\Delta g}(r, 0) \frac{1}{r^2} dr$$

6. 重力异常导数

■ 导数的计算

(三) V_{zz} (g_{zz}) 的计算

引力位在场源体外部满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

因此

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0$$

即

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = 0$$

又因为：

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

故：

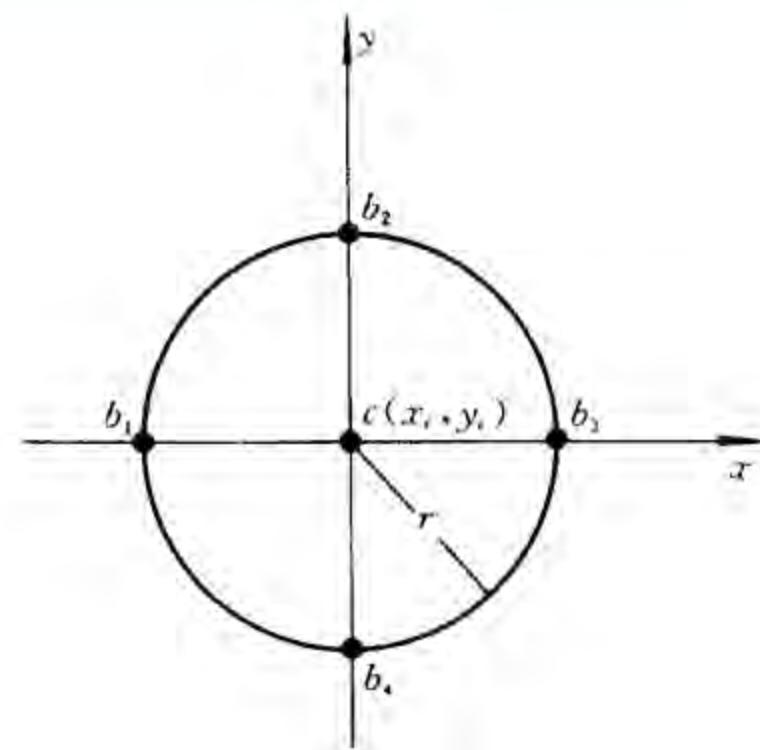
$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(三) V_{zz} (g_{zz}) 的计算

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)$$



$$\frac{d^2 g}{dx^2} \approx \frac{\Delta g_1 / r - \Delta g_3 / r}{r} = \frac{1}{r} \left[\frac{g_{b1} - g_c}{r} - \frac{g_c - g_{b3}}{r} \right] = \frac{1}{r^2} [g_{b1} + g_{b3} - 2g_c]$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} \approx \frac{\Delta g_2 / r - \Delta g_4 / r}{r} = \frac{1}{r} \left[\frac{g_{b2} - g_c}{r} - \frac{g_c - g_{b4}}{r} \right] = \frac{1}{r^2} [g_{b2} + g_{b4} - 2g_c]$$

6.重力异常导数

■ 导数的计算

(三) V_{zz} (g_{zz}) 的计算

- 哈克公式

$$g_{zz} = \frac{4}{R^2} [g(0) - \bar{g}(R)]$$

- 艾尔金斯I公式

$$g_{zz} = \frac{1}{60R^2} [64g(0) - 8\bar{g}(R) - 16\bar{g}(\sqrt{2}R) - 40\bar{g}(\sqrt{5}R)]$$

- 艾尔金斯II公式

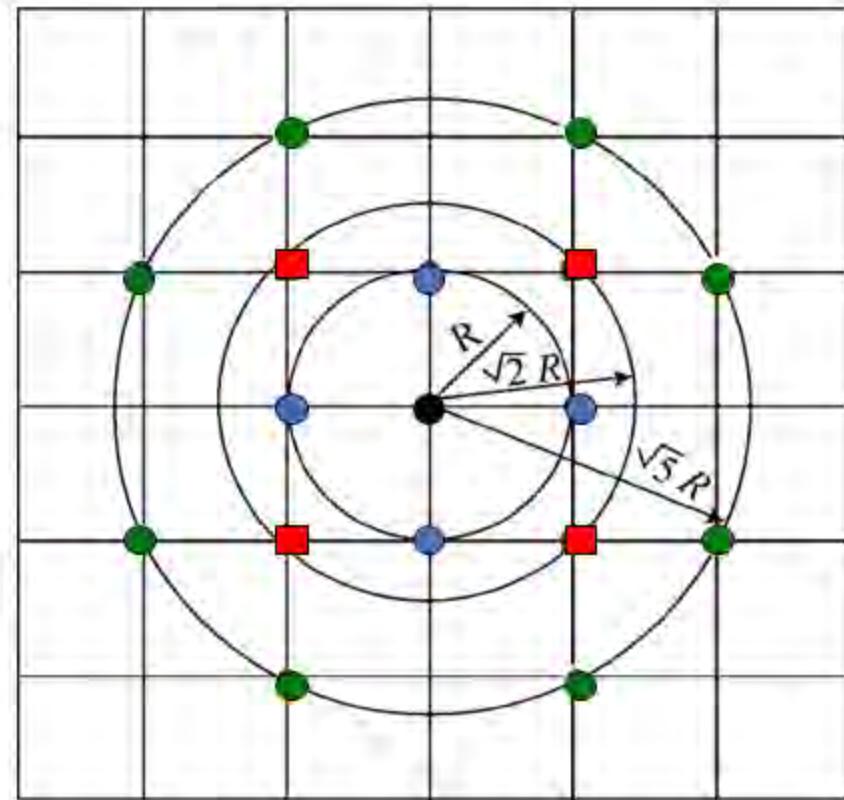
$$g_{zz} = \frac{1}{28R^2} [16g(0) + 8\bar{g}(R) - 24\bar{g}(\sqrt{5}R)]$$

- 艾尔金斯III公式

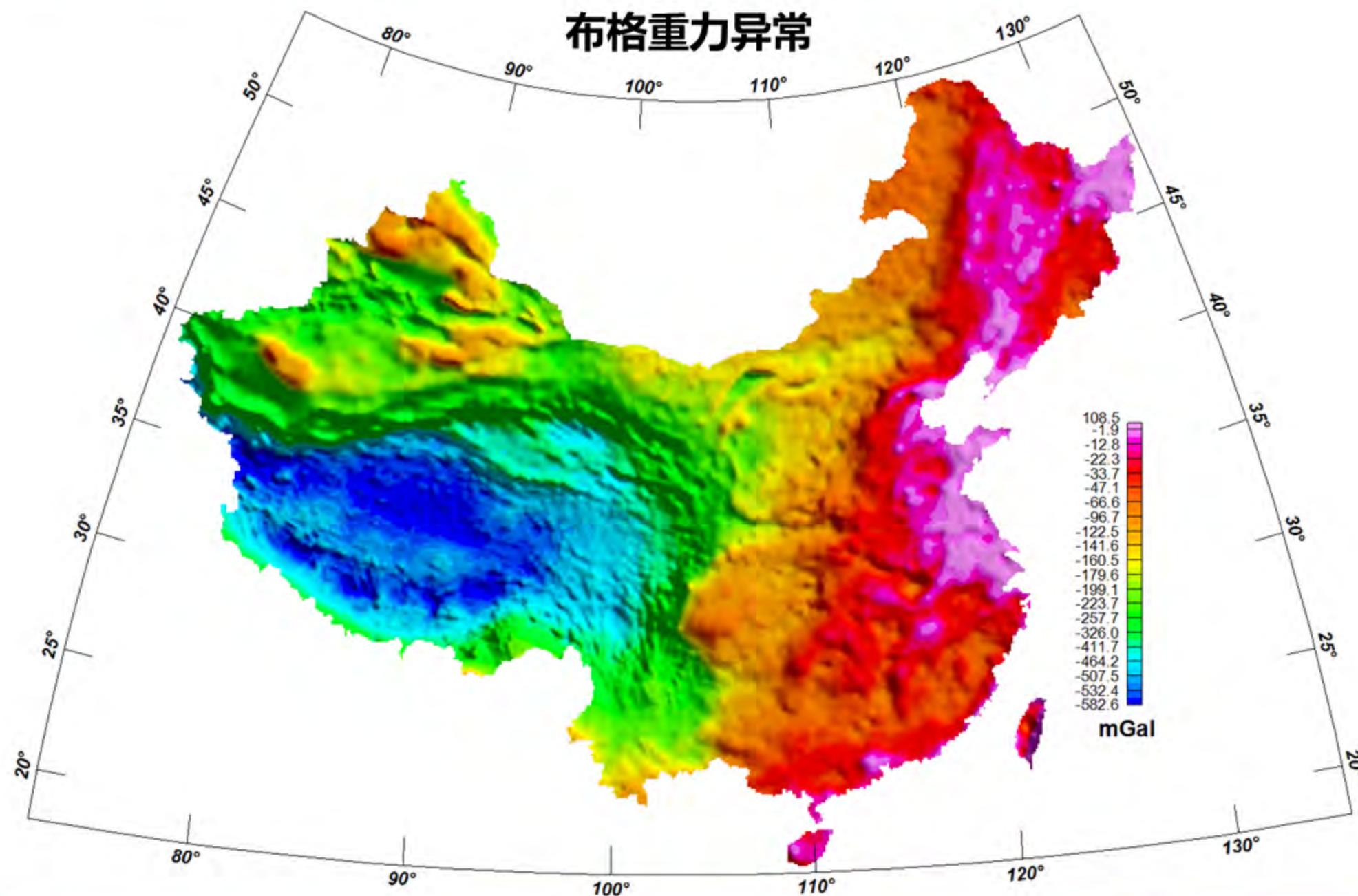
$$g_{zz} = \frac{1}{62R^2} [44g(0) + 16\bar{g}(R) - 12\bar{g}(\sqrt{2}R) - 48\bar{g}(\sqrt{5}R)]$$

- 罗森巴赫公式

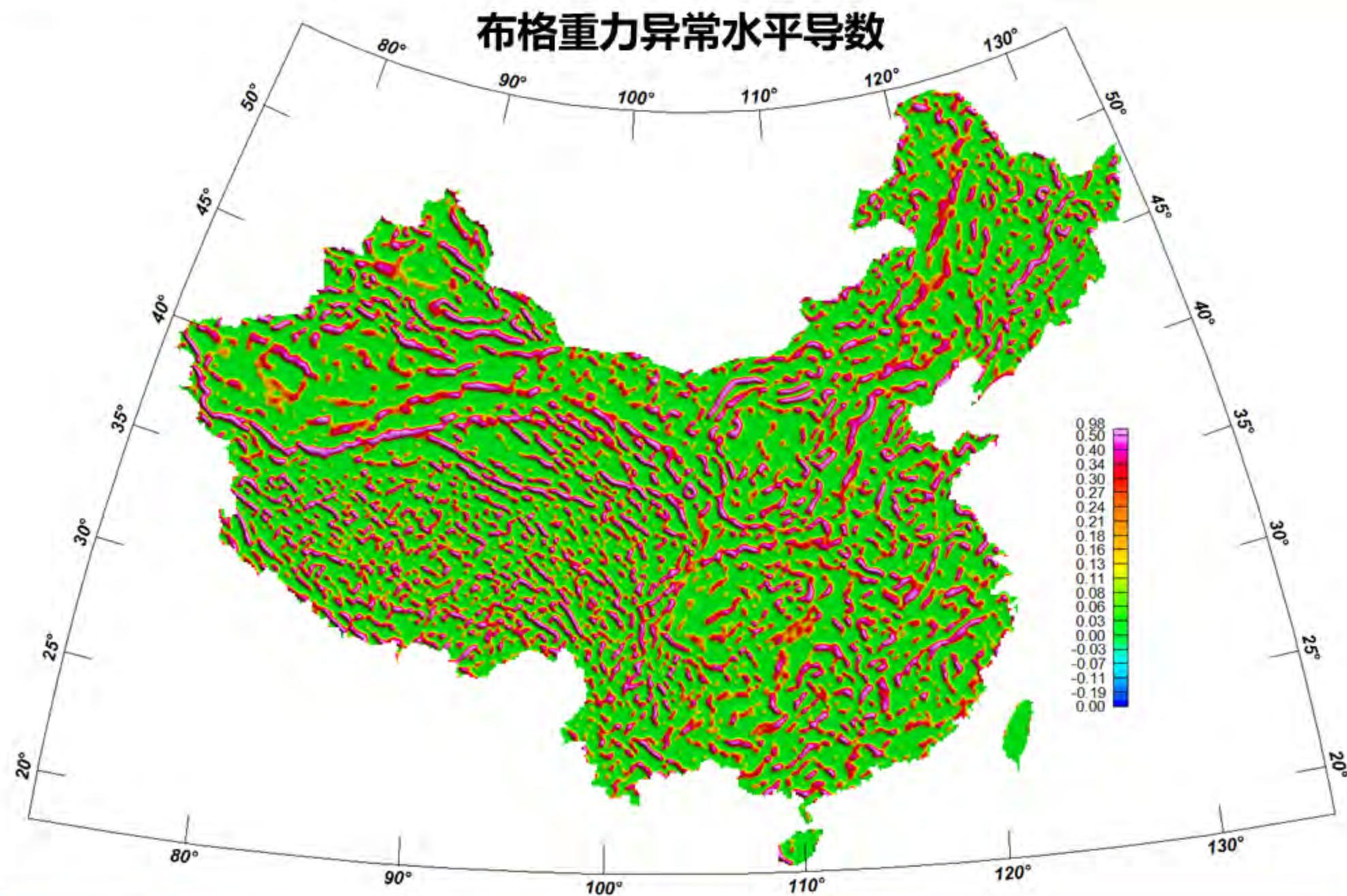
$$g_{zz} = \frac{1}{24R^2} [96g(0) - 72\bar{g}(R) - 32\bar{g}(\sqrt{2}R) + 8\bar{g}(\sqrt{5}R)]$$



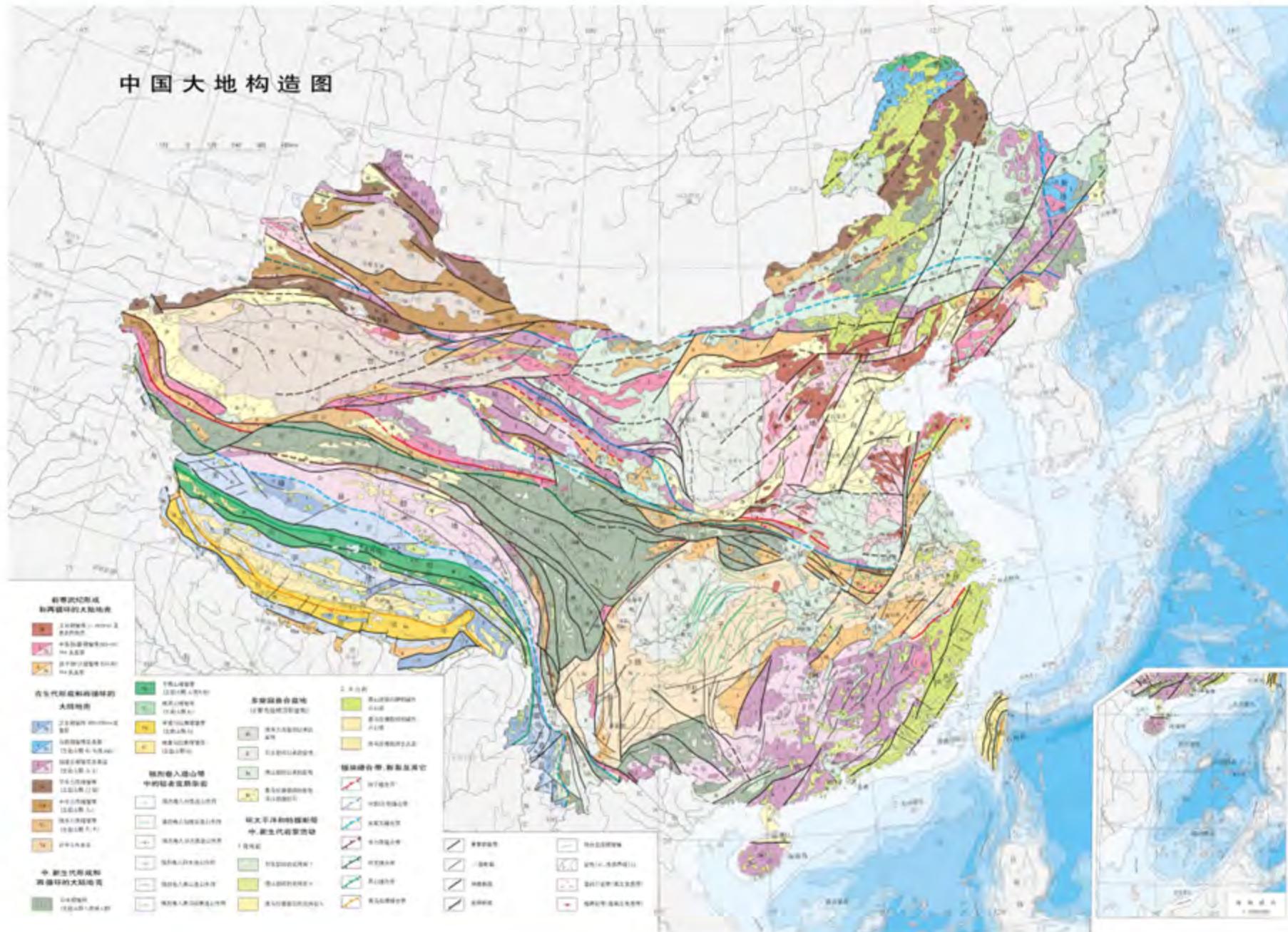
6.重力异常导数



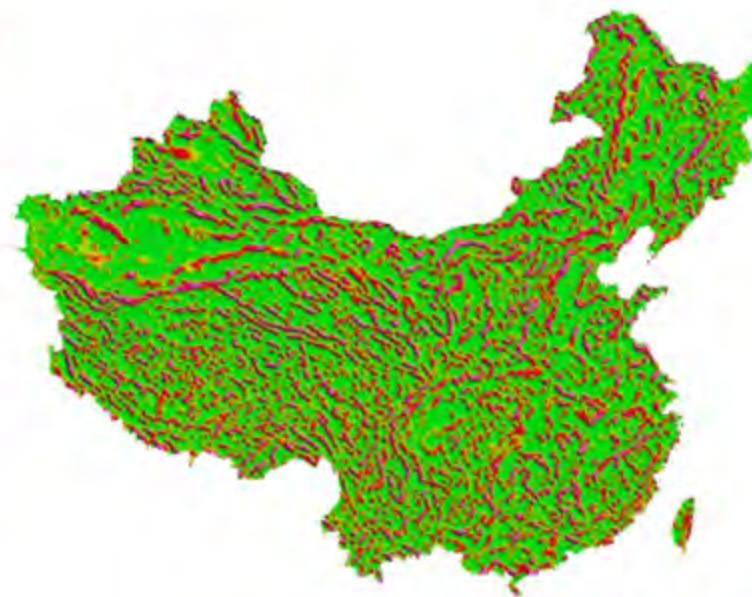
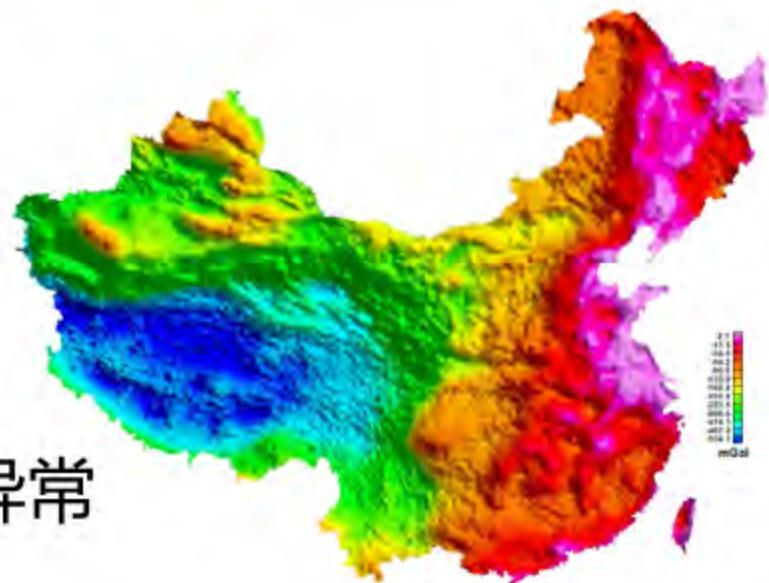
6.重力异常导数



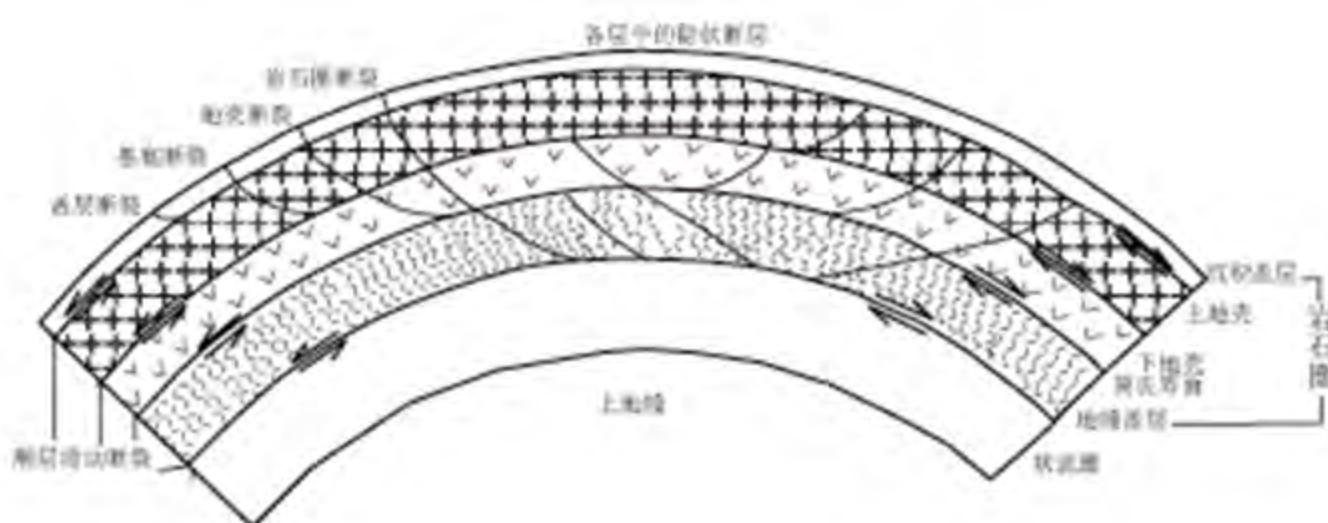
6.重力异常导数



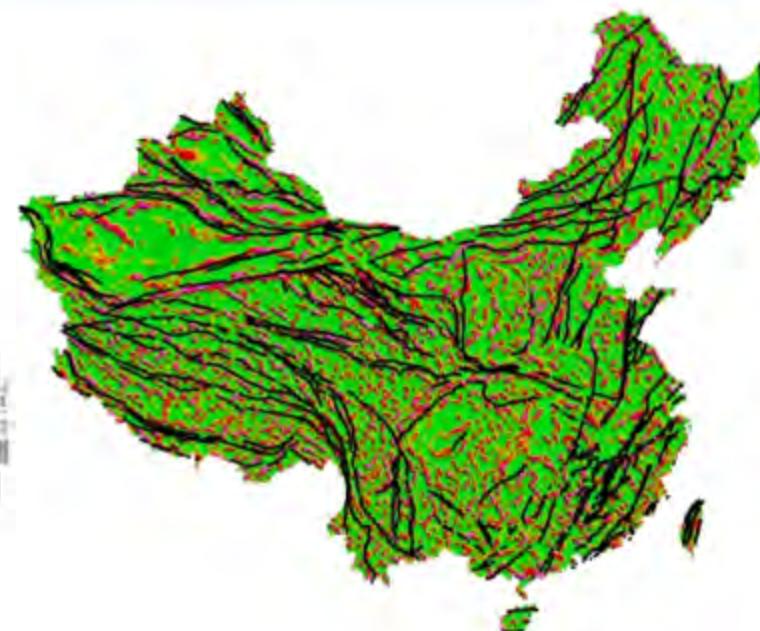
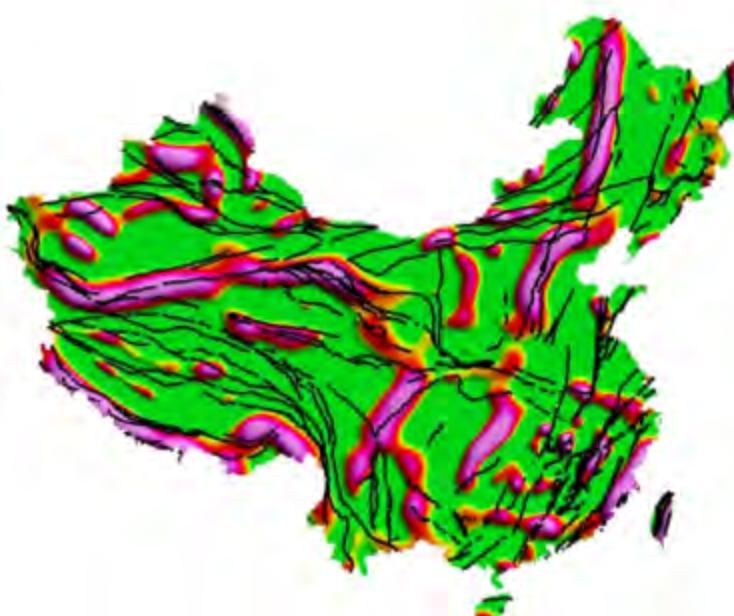
6.重力异常导数



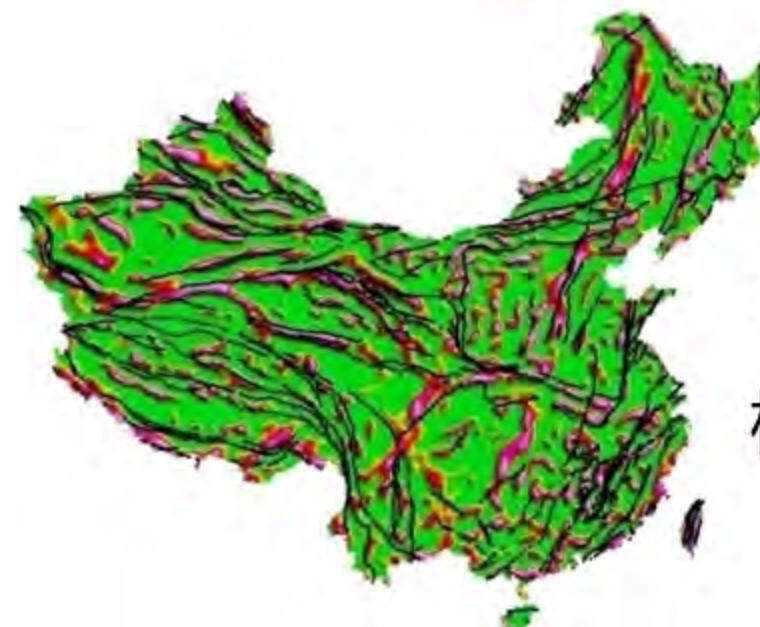
6.重力异常导数



剥离地壳 层后重力 异常线性 构造+露头 断裂



布格重力异
常线性构造+
露头断裂



剥离上地壳后 重力异常线性 构造+露头断裂

目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

第四节 场分离

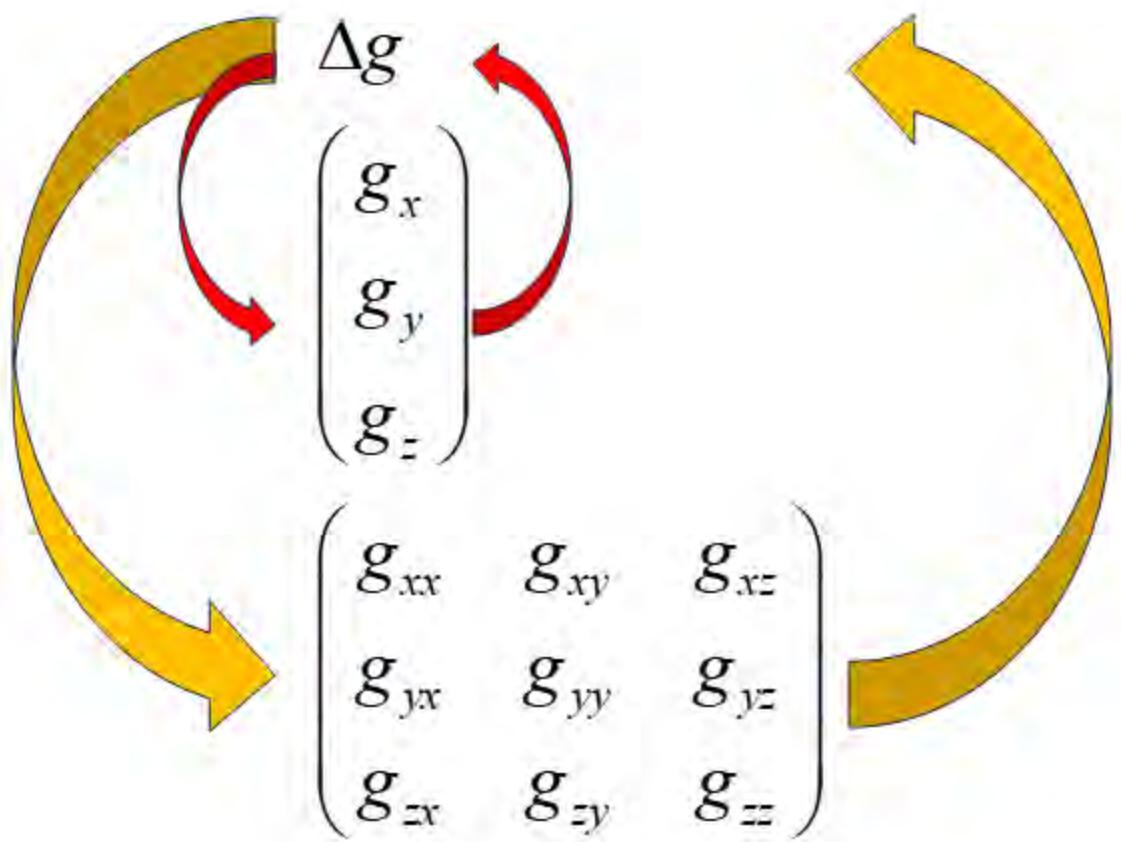
第五节 空间延拓

第六节 重力异常导数

第七节 分量转换

7. 分量转换

■ 什么是分量转换



7. 分量转换

■ 分量转换的方法

等效源法

FFT法

余弦变换法

小波变换法

泰勒多项式法

...

目 录

第一节 引起重力异常的主要地质因素

第二节 网格化

第三节 平滑（去噪）

第四节 场分离

第五节 空间延拓

第六节 重力异常导数

第七节 分量转换

第八节 总梯度归一化方法

8. 总梯度归一化方法

原苏联地球物理学家**别列兹金**于1967年提出了重力归一化总梯度法，它是一种利用重力场中的**特征点**（如极大点或极小点）或者解析函数的奇点，**探测重力异常的场源体并估计其位置的方法。**

8. 总梯度归一化方法

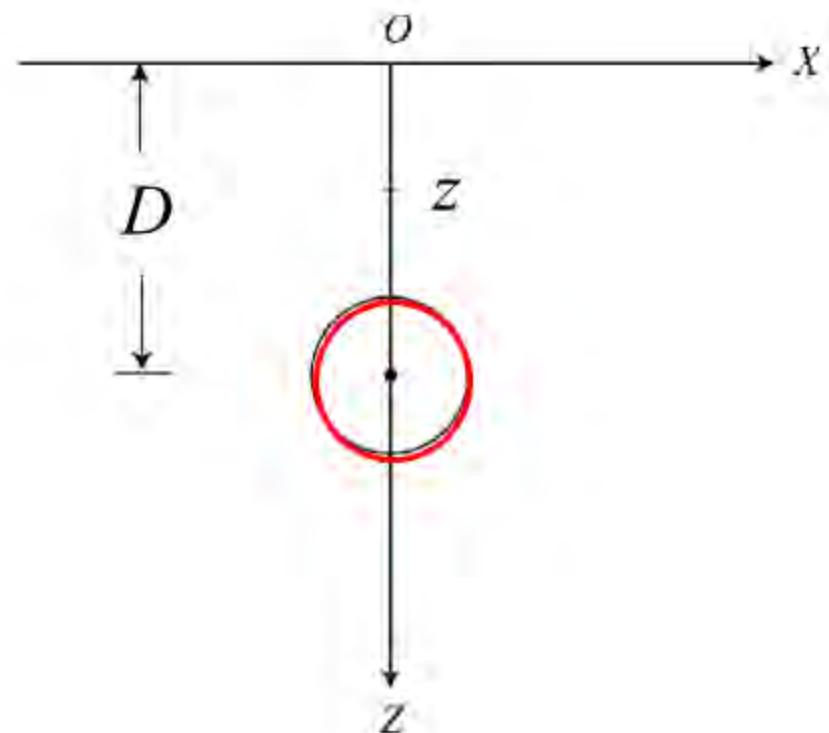
$$\Delta g = G \iiint_v \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

- 剩余质量的引力位及导数在场源体以外空间都是解析函数，而在场源处则失去解析性。
- 在解析函数中，失去解析性的点叫函数的**奇点**。
- 确定场源的问题，就是通过对异常解析延拓来确定函数的奇点问题。

8. 总梯度归一化方法

$$\Delta g(x, z) = 2G\lambda \frac{D - z}{(D - z)^2 + x^2}$$

- 在 $x=0$ 处，把 $\Delta g(x, y)$ 延拓到圆柱中心 $z=D$ 处，在圆柱中心处的 $\Delta g(0, 0)$ 将变为无穷大。
- 圆柱中心是极点类型的奇点。



8. 总梯度归一化方法

寻找重力场的奇点有一些困难：

- 实测异常是由解析成分（有用信号）及随机干扰组成，要用实测异常求奇点首先必须把干扰滤掉；
- 实测异常为离散形式，而且其观测剖面长度是有限的，在确定奇点时，需施加某些限制；
- 不知道实测异常的解析式，无法求其奇点。

8. 总梯度归一化方法

- 二度水平圆柱重力异常

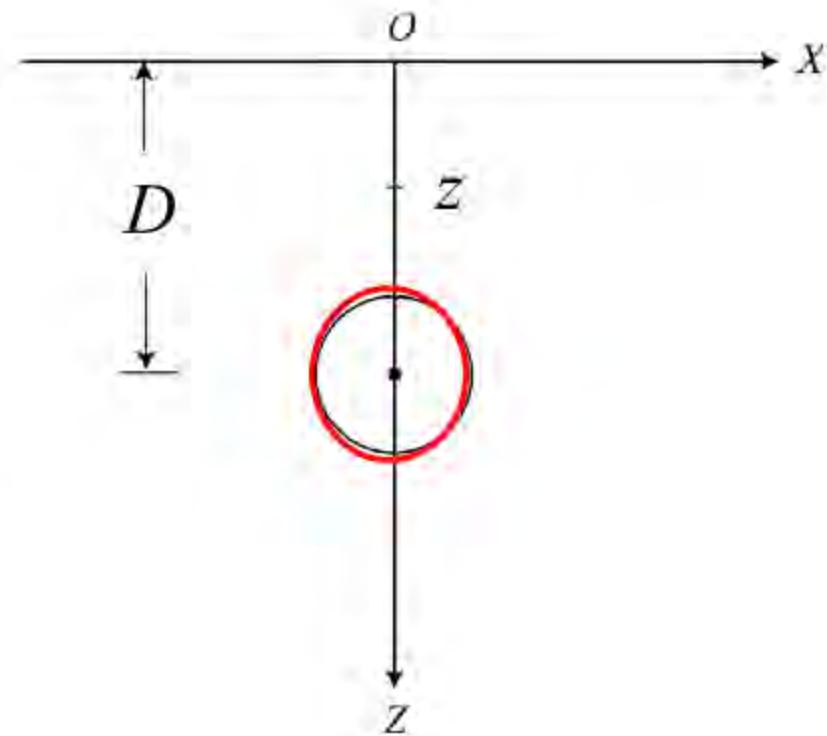
$$\Delta g(x) = 2G\lambda \frac{D}{D^2 + x^2}$$

- 向下延拓到任一点P(x, z)时

$$\Delta g(x, z) = 2G\lambda \frac{D - z}{(D - z)^2 + x^2}$$

- 若沿Z轴(x=0)

$$\Delta g(z) = 2G\lambda \frac{1}{D - z}$$



8. 总梯度归一化方法

- 在 $z=0$ 的附近将上式展开成泰勒级数为

$$\begin{aligned}\Delta g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2G\lambda \left. \frac{n!}{(D-z)^{n+1}} \right|_{z=0} (z-0)^n \\ &= 2G\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{D^{n+1}} z^n = \frac{2G\lambda}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{D} \right)^n\end{aligned}$$

- 当向下延拓趋于场源($z \rightarrow D$)时, 级数发散, 即 D 为 $\Delta g(z)$ 的一个奇点。

8. 总梯度归一化方法

- 当级数不取无限项时，情况就不同了，这时

$$\Delta g(z) = \frac{2G\lambda}{D} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{D}\right)^n$$

- 通过柱体中心($z \geq D$)，因式是一**有限项级数**，只有当 $z \rightarrow \infty$ 时才发散，否则只要 N 为有限值，级数都是收敛的。
- 但是有限项无法获取奇点信息，所以向下延拓直接求与场源质量有关的奇点是很困难的。

8. 总梯度归一化方法

- 作如下改进：

$$\Delta g(z) = \frac{2G\lambda}{D} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{D}\right)^n + \frac{2G\lambda}{D} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{z}{D}\right)^n$$

- 右边的第二项是级数的余项，也即舍去误差。
- 令 $\zeta = z/D$

$$\Delta g(\zeta) = \Delta g_N(\zeta) + r_N(\zeta)$$

- 若 N 取适当值，则 $\zeta < 1$ 时，有 $r_N(\zeta) < \Delta g_N(\zeta)$ ，反之，在 $\zeta > 1$ 时将有 $r_N(\zeta) > \Delta g_N(\zeta)$ ，用它可以确定与场源有关的奇点。

8. 总梯度归一化方法

- 以 $r_N(\zeta)$ 对 $\Delta g_N(\zeta)$ 进行归一化，则

$$\Delta g_H(\zeta) = \frac{\Delta g_N(\zeta) + r_N(\zeta)}{r_N(\zeta)} = \frac{\Delta g_N(\zeta)}{r_N(\zeta)} + 1$$

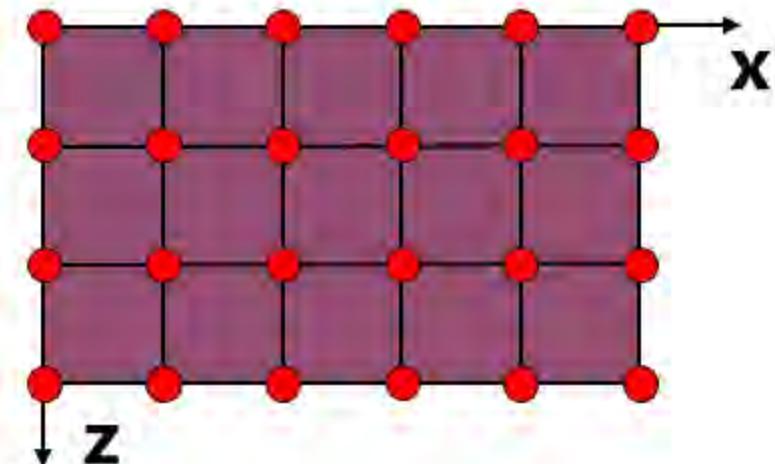
- 归一化函数 $\Delta g_H(\zeta)$ 的变化仅与 $\Delta g_N(\zeta)$ 和 $r_N(\zeta)$ 之比有关。

8. 总梯度归一化方法

- 只要N取值合适，在从上面接近奇点时，有 $rN(\zeta) < \Delta g N(\zeta)$ ，且 $\Delta g N(\zeta)$ 增加比 $rN(\zeta)$ 为快，故 $\Delta g_H(\zeta)$ 随之增大；
- 当通过奇点后，情况反过来， $\Delta g_H(\zeta)$ 是逐渐减小，所以在 $\zeta \rightarrow 1$ 时， $\Delta g_H(\zeta)$ 将有极大值出现。
- 用归一化函数 $\Delta g_H(\zeta)$ 可克服用一般向下延拓直接寻找奇点的困难。

8. 总梯度归一化方法

$$G_H(x, z) = \frac{G(x, z)}{G_{CP}(z)} = \frac{\sqrt{V_{xz}^2(x, z) + V_{zz}^2(x, z)}}{\frac{1}{M+1} \sum_0^M \sqrt{V_{xz}^2(x, z) + V_{zz}^2(x, z)}}$$



- $G_H(x, z)$ 是 (x, z) 点处的归一化总梯度值；
- $V_{zz}(x, z)$ 、 $V_{xz}(x, z)$ 分别为铅垂、水平一次导数；
- $G(x, z)$ 为 (x, z) 点处重力异常总梯度；
- $G_{CP}(z)$ 是深度 z 处的水平线上总梯度的平均值。

8. 总梯度归一化方法

通过将重力异常展开成傅里叶级数来计算

$$V_{xz}(x, z), V_{zx}(x, z)$$

$$\Delta g(x, z) = \sum_1^N B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{N} \right)^2$$

$$V_{xz}(x, z) = \frac{\pi}{L} \sum_1^N n B_n \cos \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{N} \right)^2$$

$$V_{zx}(x, z) = \frac{\pi}{L} \sum_1^N n B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{N} \right)^2$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Delta g(x, 0) \sin \frac{\pi n x}{L} dx$$

8. 总梯度归一化方法

- 重力归一化总梯度法不考虑场源在何处存在，而是直接计算重力归一化总梯度场值在下半空间的分布；
- 在解析函数的奇点，即场源体处，重力归一化总梯度是收敛的，而且正好反映了奇点的位置。

8. 总梯度归一化方法

选取不同的 N 值进行计算，
找出诸极值中最大的那个值，
其圈闭所在的位置即为最接
近场源的深度位置，此时 N
值也即为最佳值，异常中心
两侧的等值线亦向中心靠的
最近。

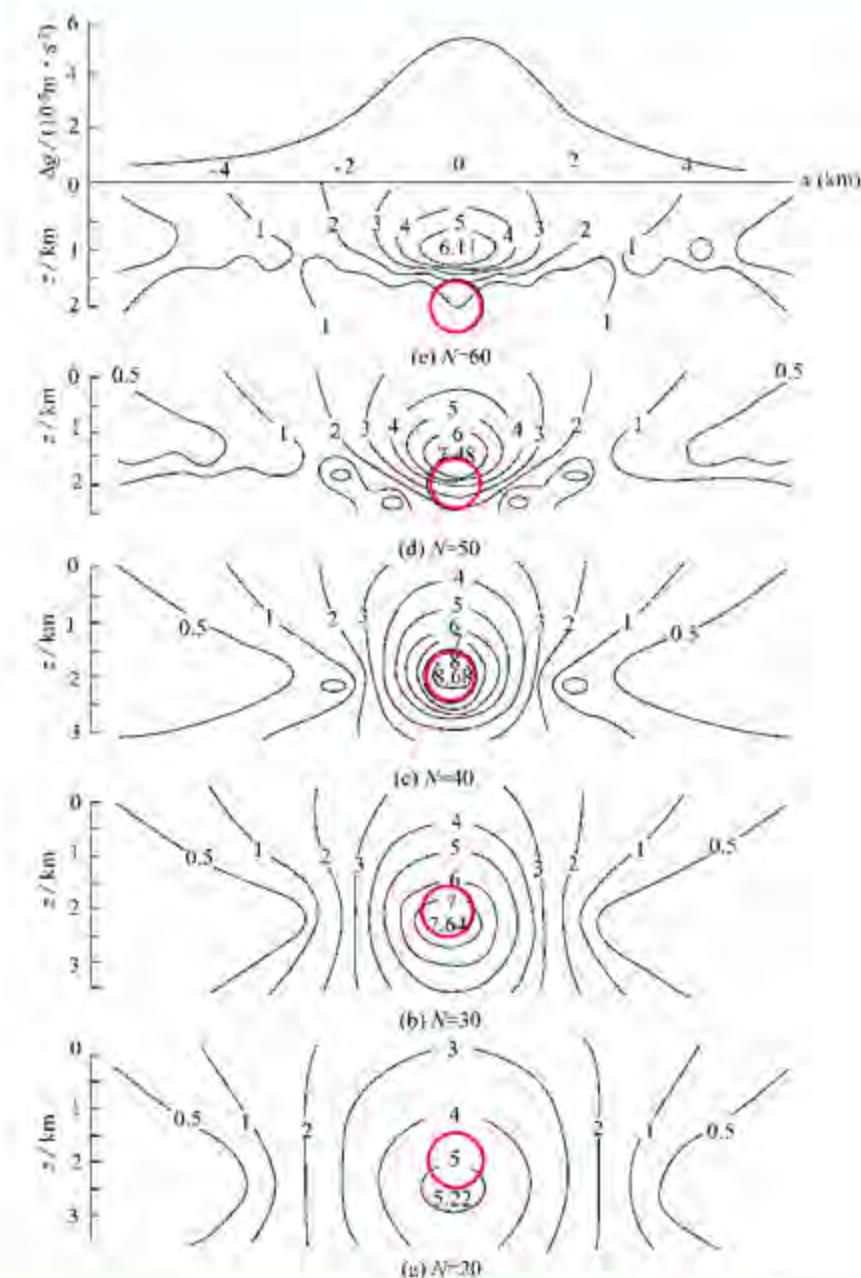
$N=60$

$N=50$

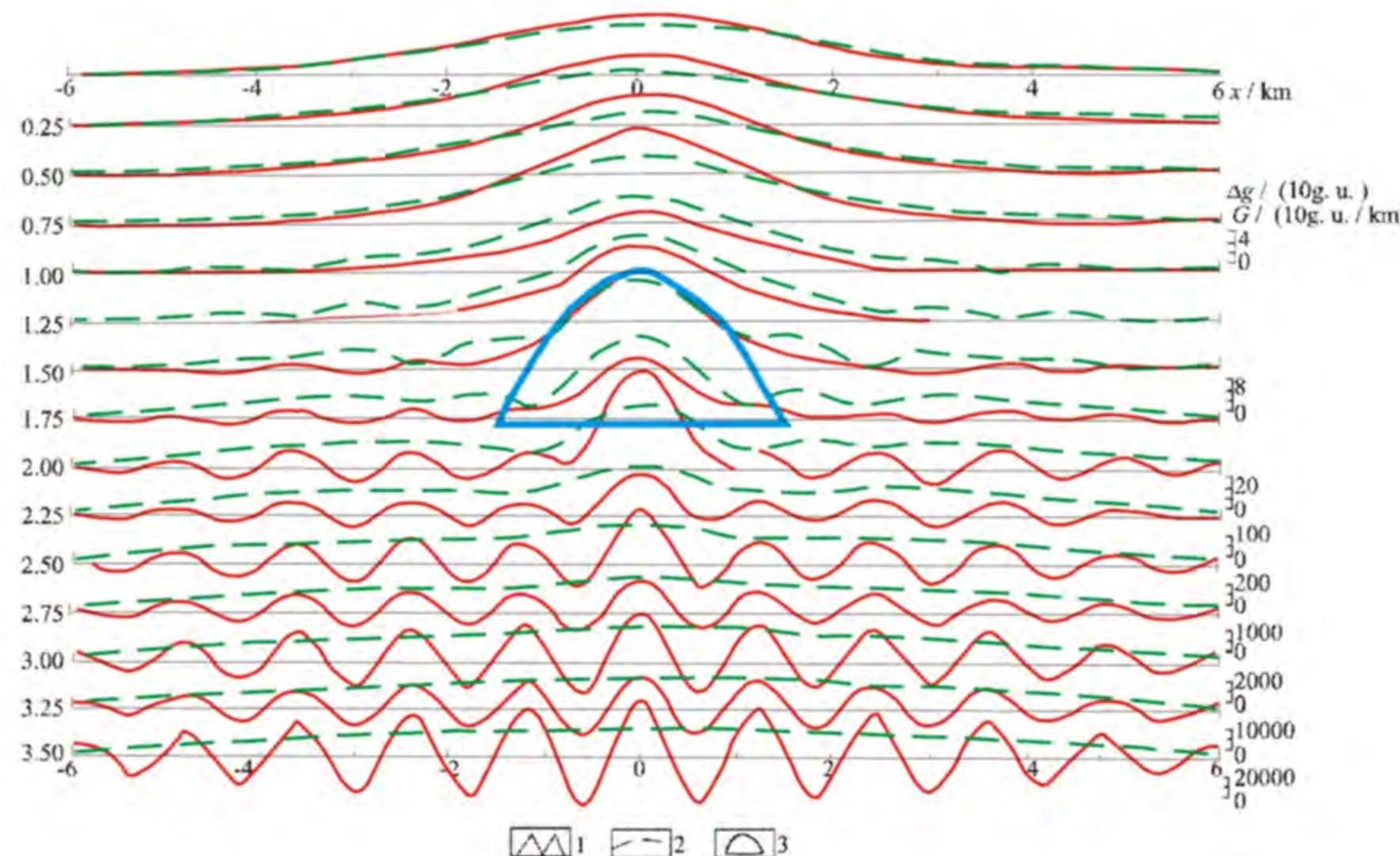
$N=40$

$N=30$

$N=20$



8. 总梯度归一化方法

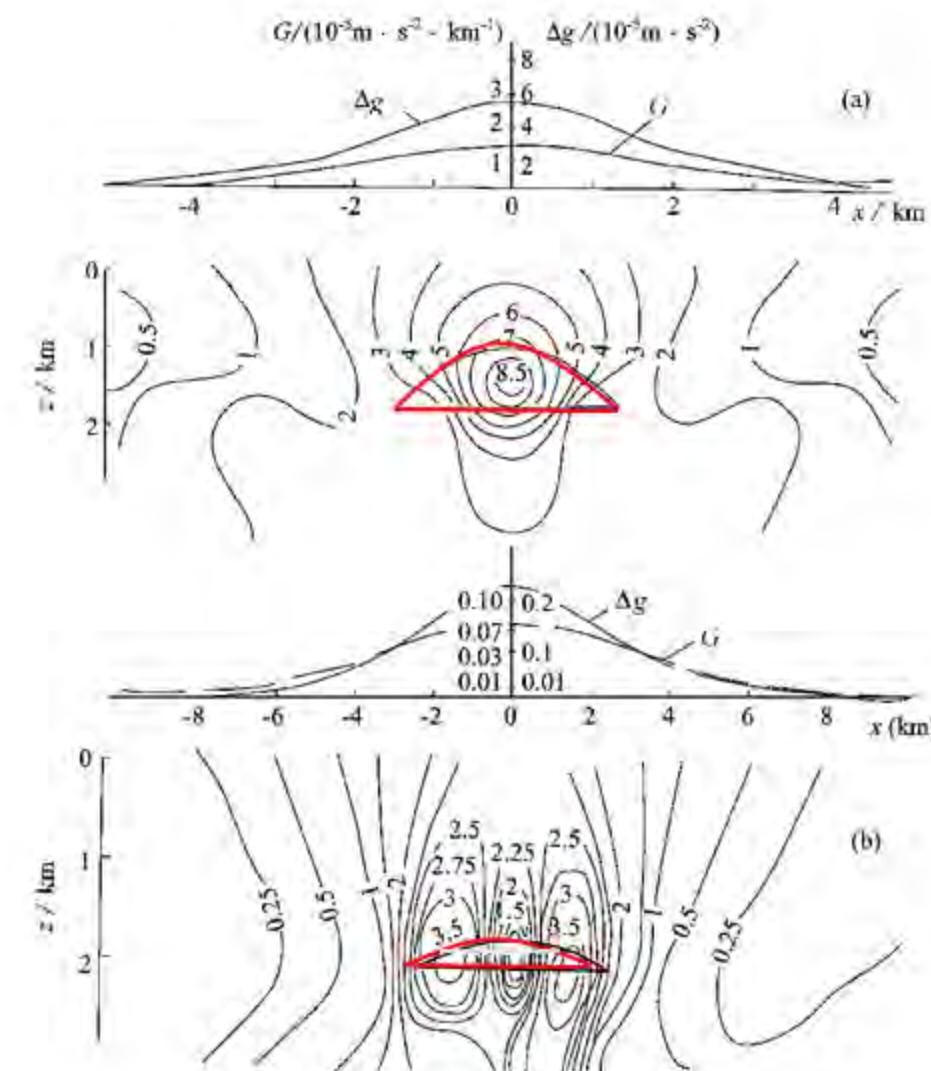


1- $\Delta g(x, z)$ 曲线; 2- $G(x, z)$ 曲线; 3-背斜截面轮廓

8. 总梯度归一化方法

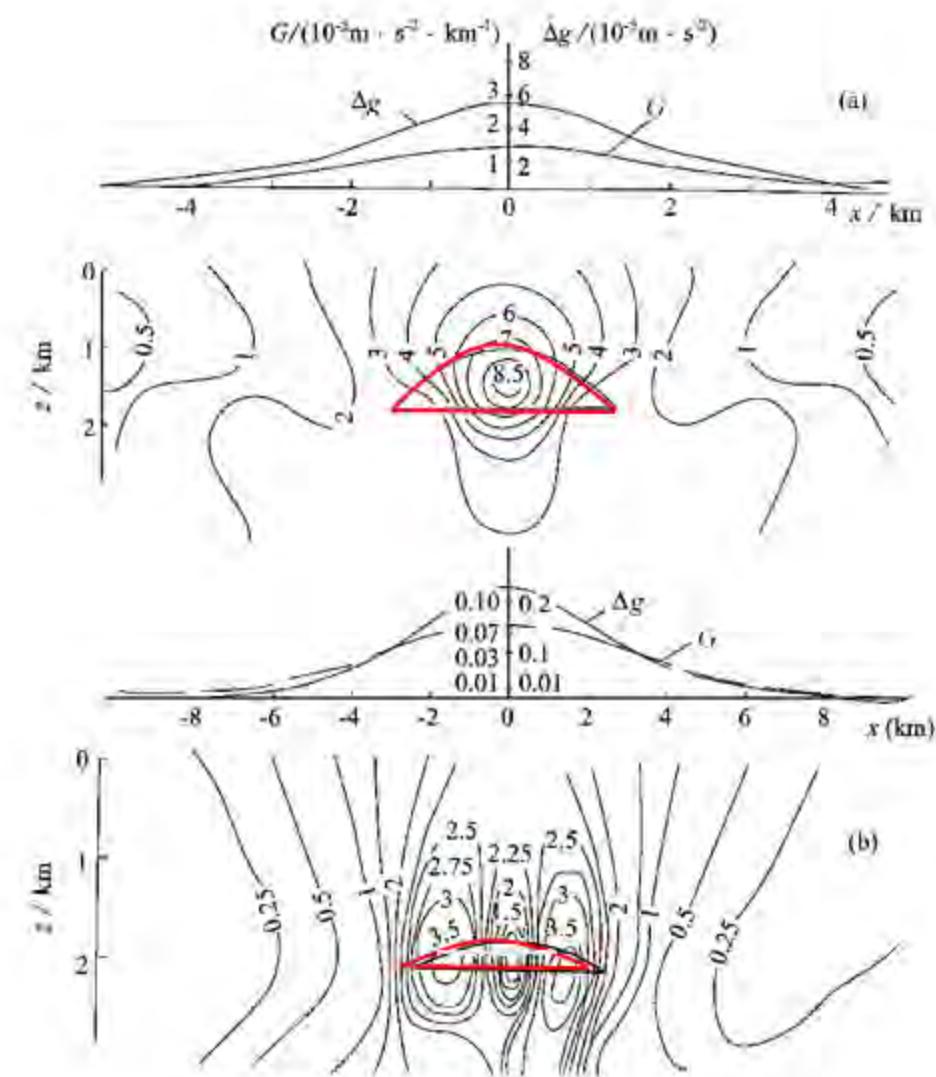
均匀背斜构造

非均匀背斜构造



8. 总梯度归一化方法

- 对于均匀的背斜型构造， $G_H(x,z)$ 场中有一个极大值，表明此处存在一个奇点。
- 对于非均匀构造，或顶部含油气藏的背斜构造，其 $G_H(x,z)$ 场中出现两个极大值，表明构造边缘存在两个奇点；在两个极大值中间有一个相对极小值，而且极小值的中心在油气藏内。



8. 总梯度归一化方法

- $G_H(x,z)$ 场中出现的两个极大值中间存在一个极小值（即“两高夹一低”）的情况，可以作为背斜构造顶部是否存在低密度体或油气藏的标志。
- “两高夹一低”的情况，只能直接表明背斜构造顶部存在低密度体，在油气区，这个低密度体很可能是油气藏，但不能肯定就是油气藏，因此利用重力归一化总梯度只能“间接”找油。

8. 总梯度归一化方法

■ 三维重力归一化总梯度

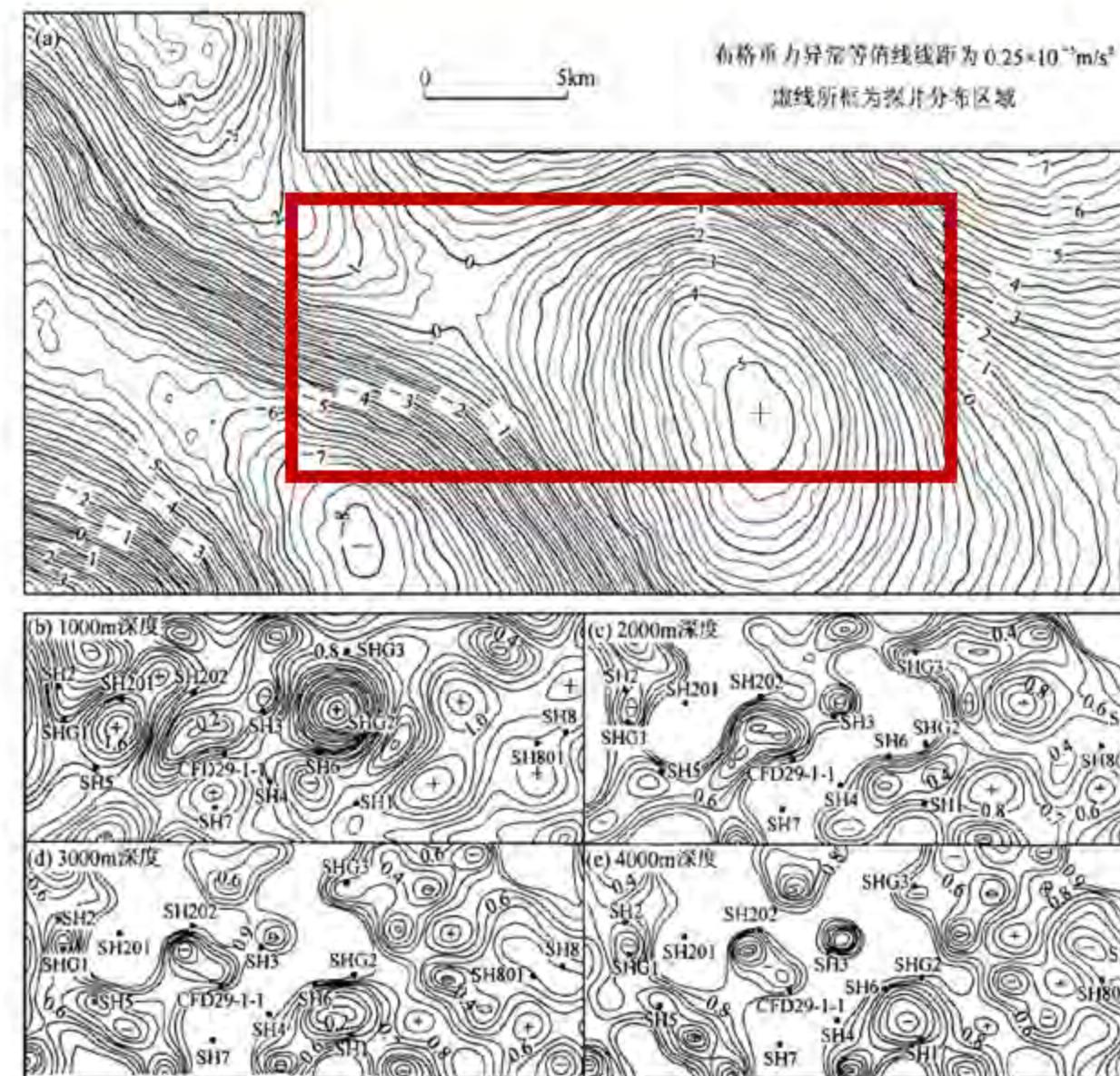
$$\begin{aligned} G_H(x, y, z) &= \frac{G(x, y, z)}{G_{cp}(z)} \\ &= \frac{\sqrt{V_{xz}^2(x, y, z) + V_{yz}^2(x, y, z) + V_{zx}^2(x, y, z)}}{\frac{1}{M} \sum_0^M \sqrt{V_{xz}^2(x, y, z) + V_{yx}^2(x, y, z) + V_{zz}^2(x, y, z)}} \end{aligned}$$

8. 总梯度归一化方法

■ 应用条件

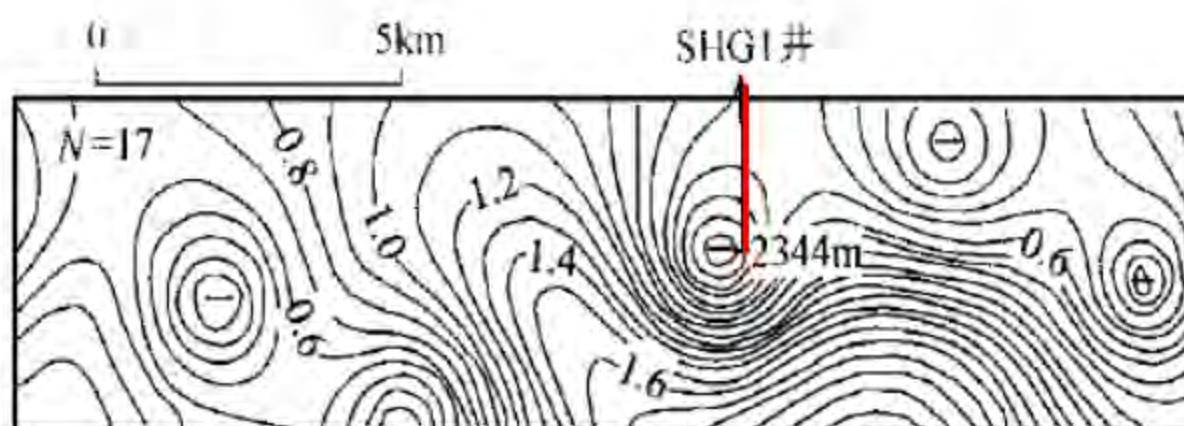
- $G_H(x,z)$ 法可从观测重力场中分离出幅度为20-30 m，深度在3-5 km以上的平缓构造的重力场，并推断其深度，理论上精度可达5-50%。
- $G_H(x,z)$ 法可从观测重力场中分离出厚度为50 m以上的油层或30 m以上的气层引起的重力场，为用重力法和其它物探方法综合“直接”寻找储量相对不大的油气藏提供了一条有效途径。
- 在金属矿物探中， $G_H(x,z)$ 法可求出矿体上顶面或重心的深度，并对它的倾向作出某些推断。
- $G_H(x,z)$ 法可用于研究地壳深部构造，推断深部断裂的位置和它的分布方向等。

8. 总梯度归一化方法



(根据曾华霖, 1999)

8. 总梯度归一化方法



(根据曾华霖, 1999)

目 录

- 第一节 引起重力异常的主要地质因素
- 第二节 网格化
- 第三节 平滑（去噪）
- 第四节 场分离
- 第五节 空间延拓
- 第六节 重力异常导数
- 第七节 分量转换
- 第八节 总梯度归一化方法
- 第九节 频率域方法

9. 频率域法

一、空间域和频率域

1. 在时间域(变量为 t)作周期变化的波 $s(t)$, 其周期为 T , 单位为 S ; 其频率为 $f = 1/T$ 单位为 $1/s$ 。把 $s(t)$ 变换到频率域后, 变量为 f , 其含义为单位时间内振动的次数, 或单位时间内的波数, 因为时间 T 内有一个波。

2. 把空间域 (例如一条剖面) 上的重力异常 $g(x)$ 看作一个“波”,

如果点距为 Δx , 点数为 M , 则“波长”为:

$$\lambda_x = M \cdot \Delta x$$

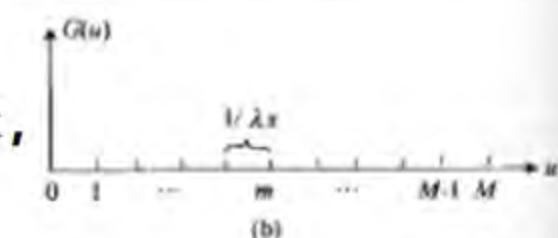
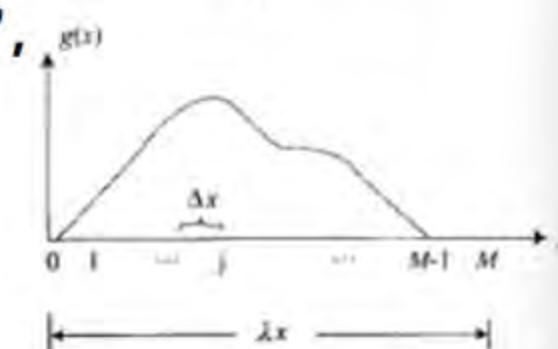
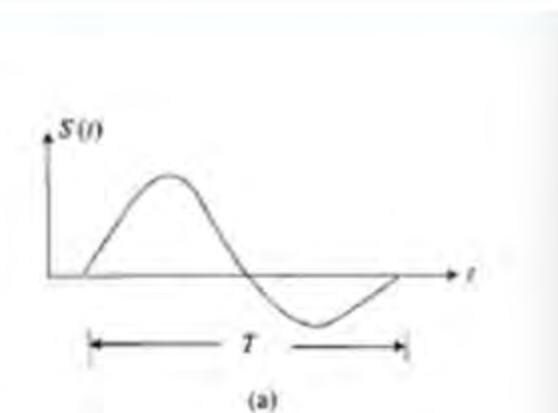
把重力异常变换到频率域, 频率 (系指空间频率) 为 $1/\lambda_x$

其单位为 $1/m$, 意为单位长度上的波数, 即一个波有 $\lambda_x(M)$ 长, 单位长度上应有 $1/\lambda_x$ 个波。

在频率轴 u 上, 点距为 $1/\lambda_x$, 各点的频率为:

$$u = m \frac{1}{\lambda_x} (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

重力异常的频率是以波数表示的, 因此空间频率域又称为波数域。



9. 频率域法

- 重力异常傅立叶变换

$$G(u, v, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \exp[-2\pi i(ux + vy)] dx dy$$

- 重力异常傅立叶反变换

$$g(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v, z) \exp[2\pi i(ux + vy)] du dv$$

$$g(x, y, z) \Leftrightarrow G(u, v, z)$$

9. 频率域法

在空间域分布的重力异常，具有不同的频率。

- ✓由深部地质体引起的宽缓异常具有低频的性质，
- ✓由浅部地质体引起的局部异常具有高频的特征；
- ✓观测误差及近地表密度不均匀引起的重力效应，则是一些高频干扰。

由多个地质体引起的叠加异常可以分离的必要条件，或上述的空间域滤波方法其有效性的必要条件，是这些异常之间必须具有不同的频率。频率差异越大，不同的异常越易分离。

二、重力异常的傅里叶(傅氏)变换

傅里叶变换：

$$G(u, v, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) \exp[-2\pi i(ux + vy)] dx dy \quad (9-68)$$

傅里叶反变换：

$$g(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u, v, z) \exp[2\pi i(ux + vy)] du dv$$

傅里叶变换对：

$$g(x, y, z) \Leftrightarrow G(u, v, z)$$

9. 频率域法

设观测重力异常记为 $g(x,y)$, 采用的处理方法的算子(例如解析延拓)为 $h(x,y)$
在空间域得到的变换值(即延拓值)为 $g_T(x,y)$

则相应的傅氏变换褶积定理为:

$$g_B(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow G_B(u,v) \cdot H(u,v) \quad (9-72)$$

$$g_B(x,y) \cdot h(x,y) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} G_B(u,v) * H(u,v) \quad (9-73)$$

特记为:

$$g_{FT}(x,y) = g_B(x,y) * h(x,y) \quad (9-74)$$

$$G_{FT}(u,v) = G_B(u,v) \cdot H(u,v) \quad (9-75)$$

三、频率域变换滤波

- 1) 应用傅氏变换, 计算空间域原始或观测异常 $g(x,y)$ 的频谱 $G_B(u,v)$;
- 2) 将 $G_B(u,v)$ 与所求转换异常的滤波算子 $H(u,v)$ 相乘, 得到转换异常的傅氏变换 $G_{FT}(u,v)$;
- 3) 将 $g_T(x,y)$ 进行傅氏反变换, 便得到所求的转换异常 $G_{FT}(u,v)$

$$\begin{array}{c} g_B(x,y) \rightarrow h(x,y) * g_B(x,y) \rightarrow g_{FT}(x,y) \\ (\text{FT}) \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow (\text{IFT}) \end{array}$$

$$G_B(u,v) \Rightarrow G_B(u,v) \cdot H(u,v) \Rightarrow G_{FT}(u,v)$$

9. 频率域法

观测重力异常 $g_B(x, y)$, 滤波算子 (延拓或导数算子) $h(x, y)$, 滤波后的重力异常 $g_{FT}(x, y)$ 。

$$\begin{Bmatrix} G_B(u, v) \\ H(u, v) \\ G_{FT}(u, v) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} g_B(x, y) \\ h(x, y) \\ g_{FT}(x, y) \end{Bmatrix} e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy$$

$$\begin{Bmatrix} g_B(x, y) \\ h(x, y) \\ g_{FT}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} G_B(u, v) \\ H(u, v) \\ G_{FT}(u, v) \end{Bmatrix} e^{2\pi i(ux+vy)} du dv$$

$$g_{FT}(x, y) = g_B(x, y) * h(x, y)$$
$$G_{FT}(u, v) = G_B(u, v) \cdot H(u, v)$$

$$g_B(x, y) \Leftrightarrow G_B(u, v)$$

$$h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$$

$$g_{FT}(x, y) \Leftrightarrow G_{FT}(u, v)$$

9. 频率域法

■ 向上延拓

$$\begin{aligned} g_{up}(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\frac{z}{2\pi}}{\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]} g_B(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \left[\frac{-\frac{z}{2\pi}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right] * g_B(x, y) \end{aligned}$$

$$FT[\ g_{up}(x, y, z) \] = FT \left[\frac{-\frac{z}{2\pi}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \cdot FT[\ g_B(x, y) \]$$

9. 频率域法

■ 频率域滤波的一般流程

1. 应用傅立叶变换，计算空间域观测异常 $g_B(x, y)$ 的频谱 $G_B(u, v)$ ；
2. 将 $G_B(u, v)$ 与所求转换异常的滤波算子 $H(u, v)$ 相乘，得到转换异常的傅立叶变换 $G_{FT}(u, v)$ ；
3. 将 $G_{FT}(u, v)$ 进行傅立叶反变换，便得到所求的转换异常 $g_{FT}(x, y)$ 。

$$\begin{array}{ccc} g_B(x, y) \rightarrow h(x, y) * g_B(x, y) \rightarrow g_{FT}(x, y) \\ (FT) \downarrow & & \uparrow (IFT) \\ G_B(u, v) \Rightarrow G_B(u, v) \cdot H(u, v) \Rightarrow G_{FT}(u, v) \end{array}$$

9. 频率域法

■ 频率域滤波算子

解析延拓

- 向上延拓
- 向下延拓

$$H_{up} = \exp(2\pi z \sqrt{u^2 + v^2}) \quad z < 0$$

$$H_{down} = \exp(2\pi z \sqrt{u^2 + v^2} \cdot S) \quad z > 0$$

S为压制高频干扰的滤波因子。

一次导数

- x方向
- y方向
- z方向

$$H_x = 2\pi i u \cdot S$$

$$H_y = 2\pi i v \cdot S$$

$$H_z = 2\pi \sqrt{u^2 + v^2} \cdot S$$

9. 频率域法

■ 频率域滤波算子

垂向二次导数

- V_{zzz}

$$H_{zzz} = 4\pi^2(u^2 + v^2) \cdot S$$

分量转换

- 由垂直分量计算X方向的水平分量

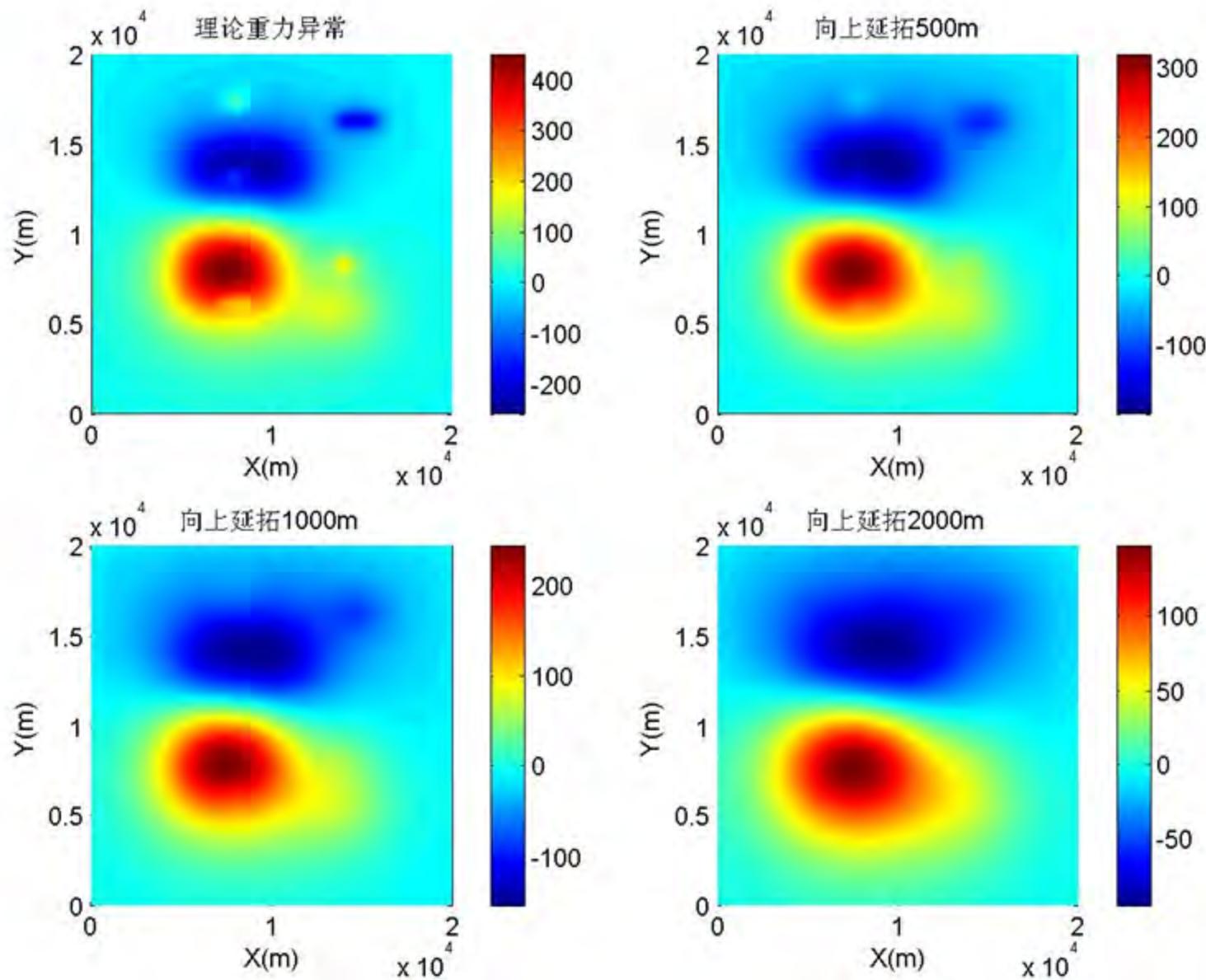
$$H_{z \rightarrow x} = \frac{iu}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

- 由垂直分量计算Y方向的水平分量

$$H_{z \rightarrow y} = \frac{iv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

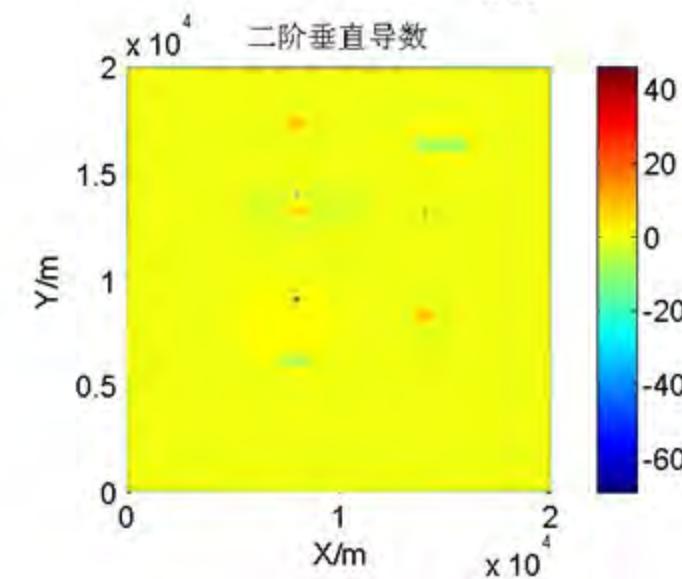
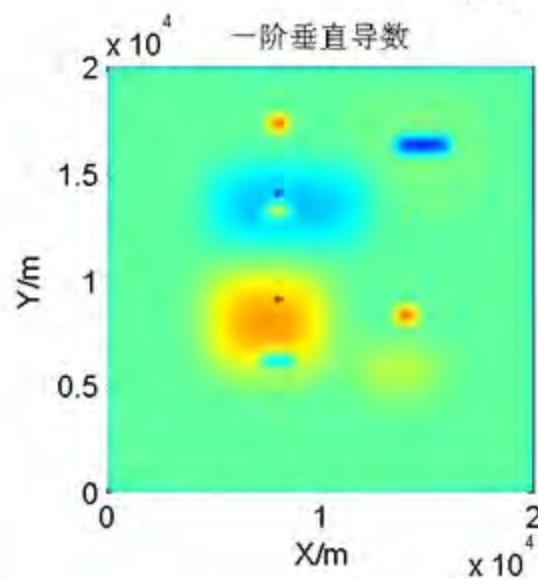
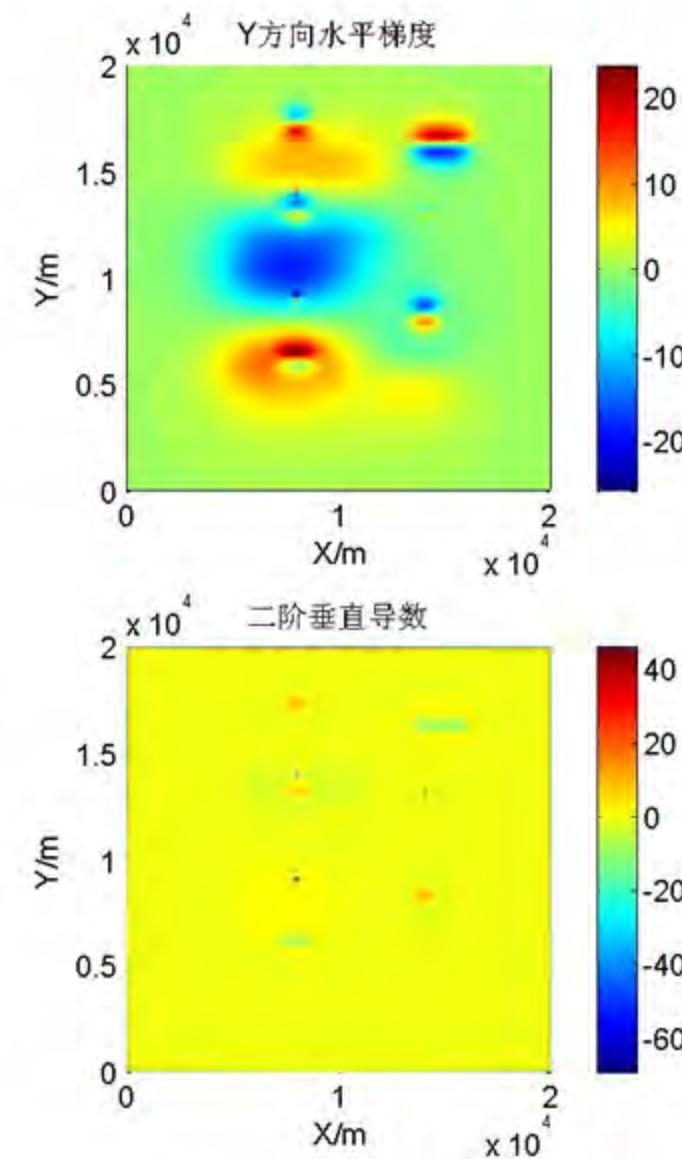
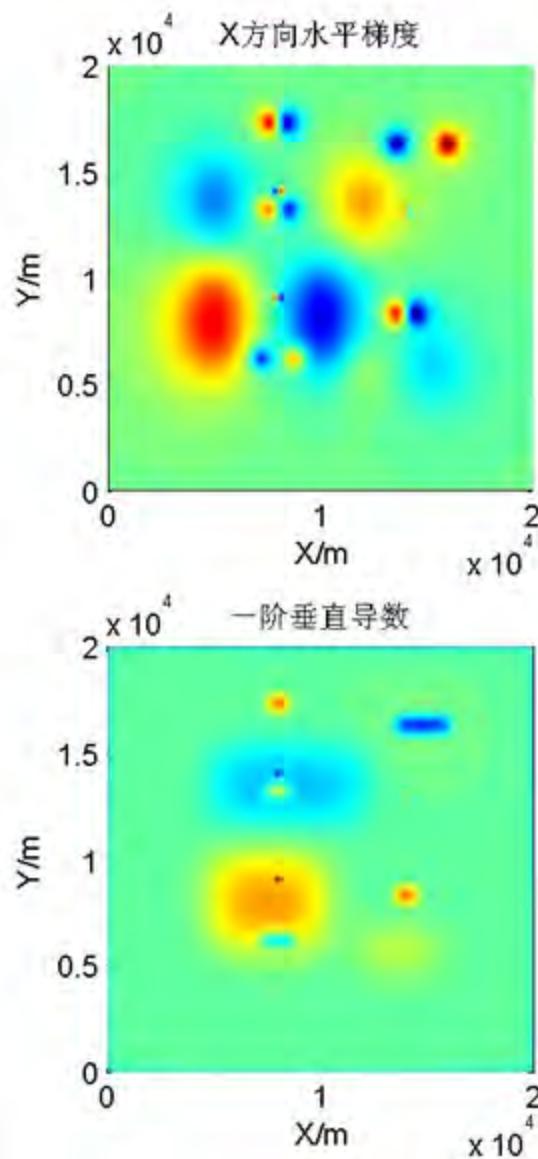
9. 频率域法

■示例



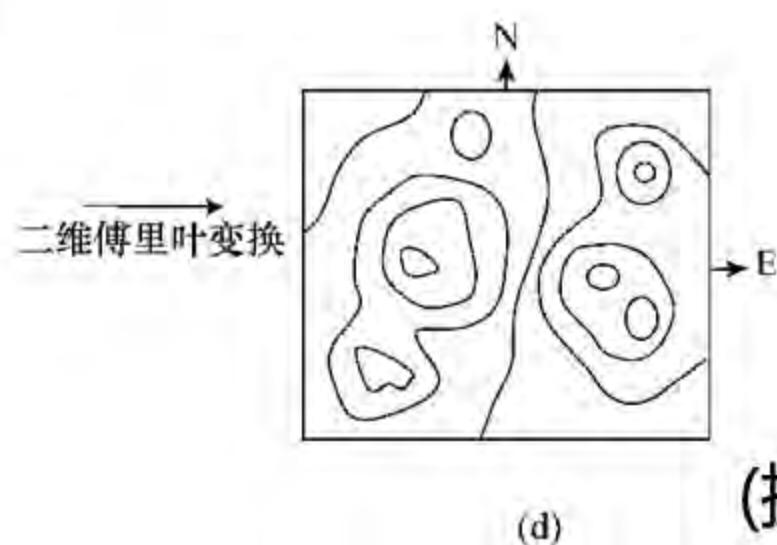
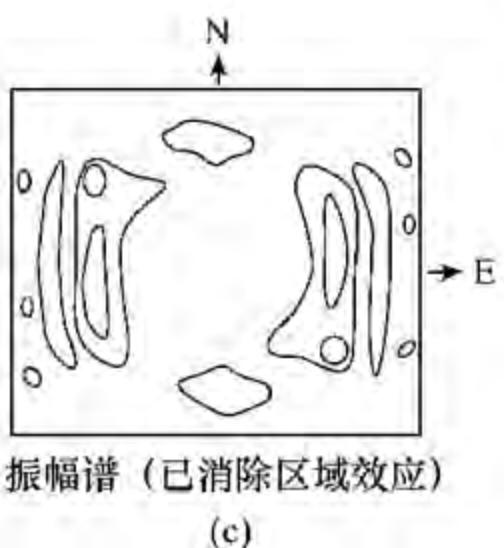
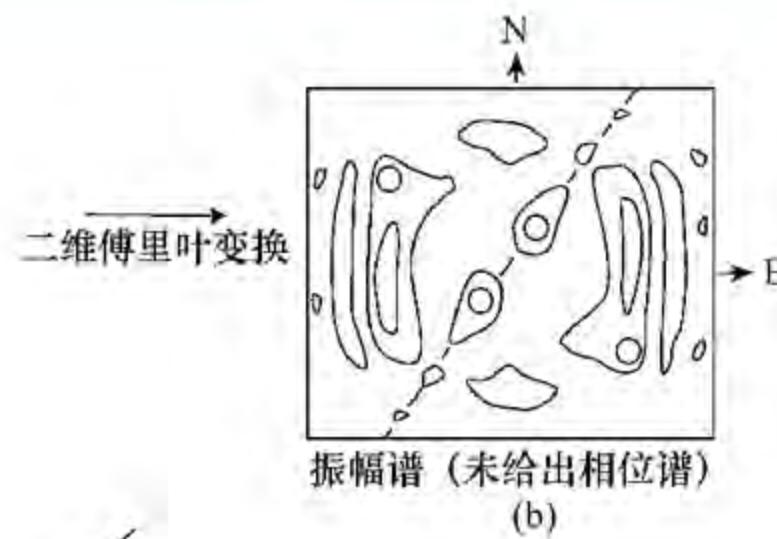
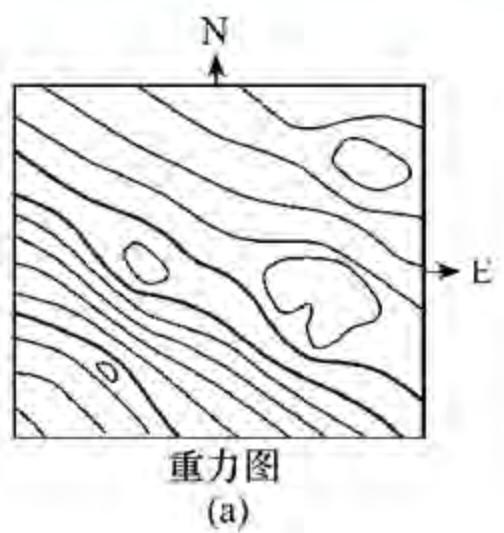
9. 频率域法

■示例



9. 频率域法

■示例



(据内特尔顿, 1987)

9. 频率域法

■示例

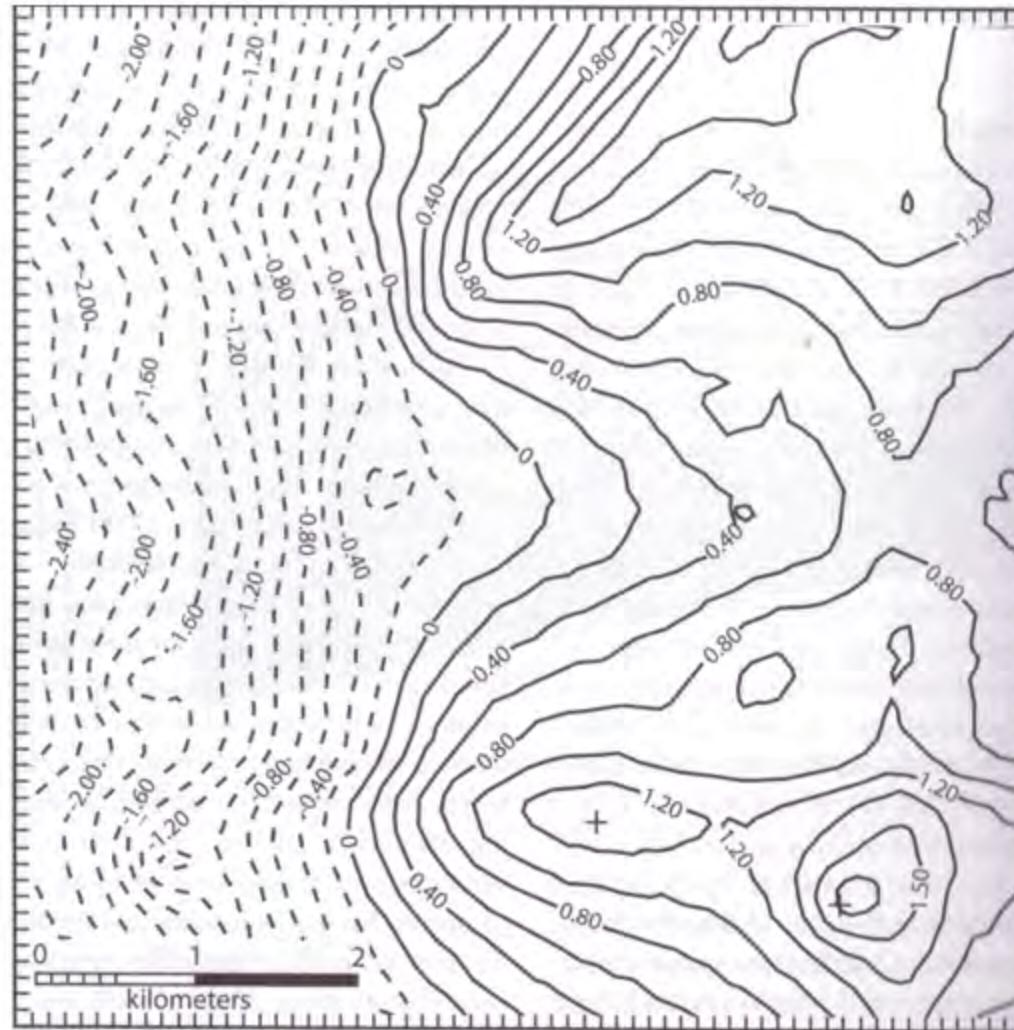


图1-23 观测的重力异常分布（几个剩余重力异常加上区域重力异常和噪声）

9. 频率域法

■示例

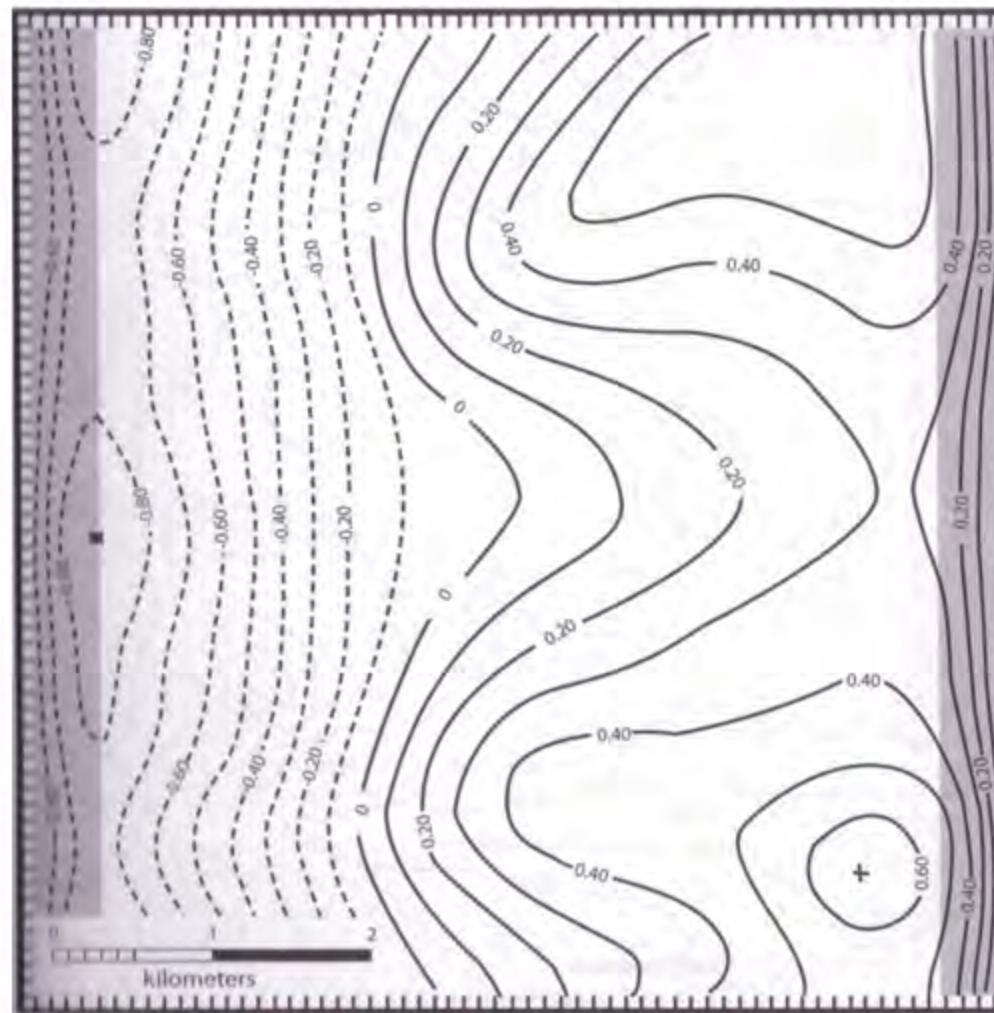


图1-24 带通滤波后的重力异常分布 ($2 < \lambda < 4\text{km}$) 灰色阴影部分为边界效应，异常地质解释时应去除。

9. 频率域法

■示例



图1-25 带通滤波后的重力异常分布 ($0.3 < \lambda < 1\text{km}$) 灰色阴影部分为边界效应，异常地质解释时应去除。

9. 频率域法

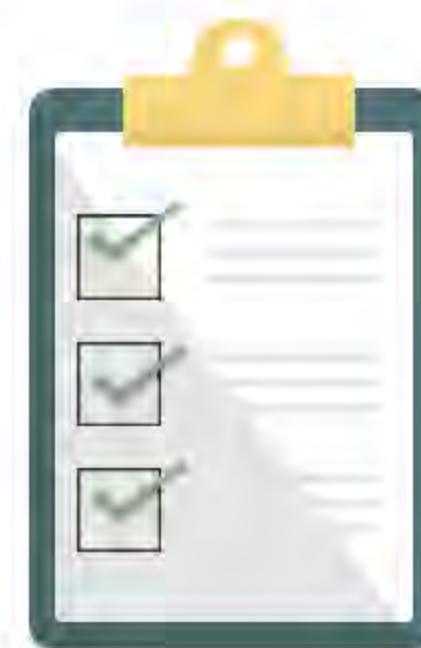
■示例



图1-26 高通滤波后的重力异常分布 ($\lambda < 1\text{km}$) 灰色阴影部分为边界效应，异常地质解释时应去除。

小结

- 引起重力异常的主要地质因素
- 区域异常、局部异常、剩余异常
- 异常分离、延拓、导数换算作用



课后习题

- 场分离的作用
- 重力梯度
- 在研究地球深部结构时，研究对象是局部异常还是区域异常



课程结束

陈涛

