

# 重力与固体潮

## 第三讲 地球固体潮 陈涛

地球物理学院  
中国石油大学（北京）





# 课前测试

- 地球的形状
- 重力异常、正常重力
- 全球重力场模型

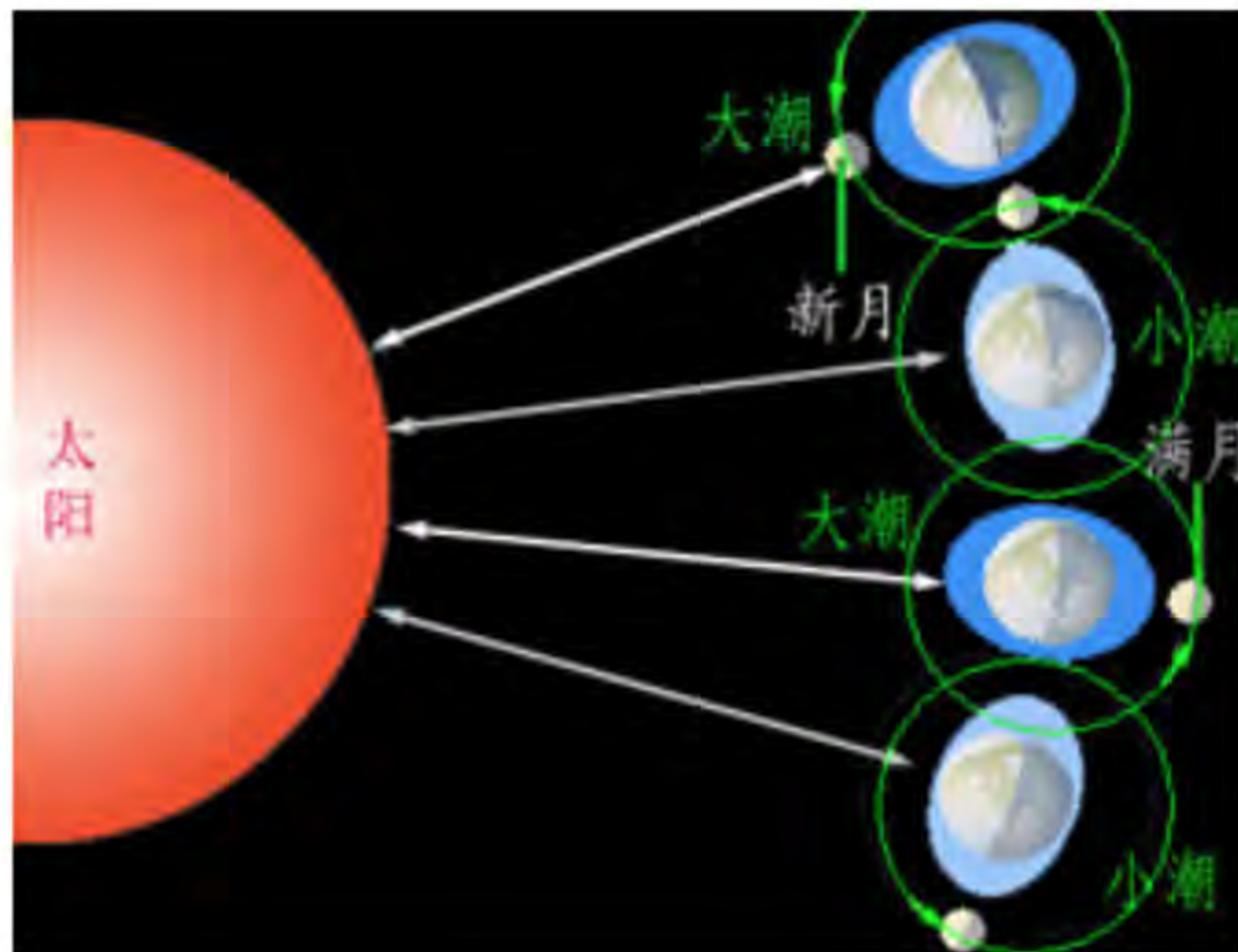




## 课前知识

### ■ 潮起潮落的原因

月球和太阳对地球的引力引起地球表面流体的潮汐



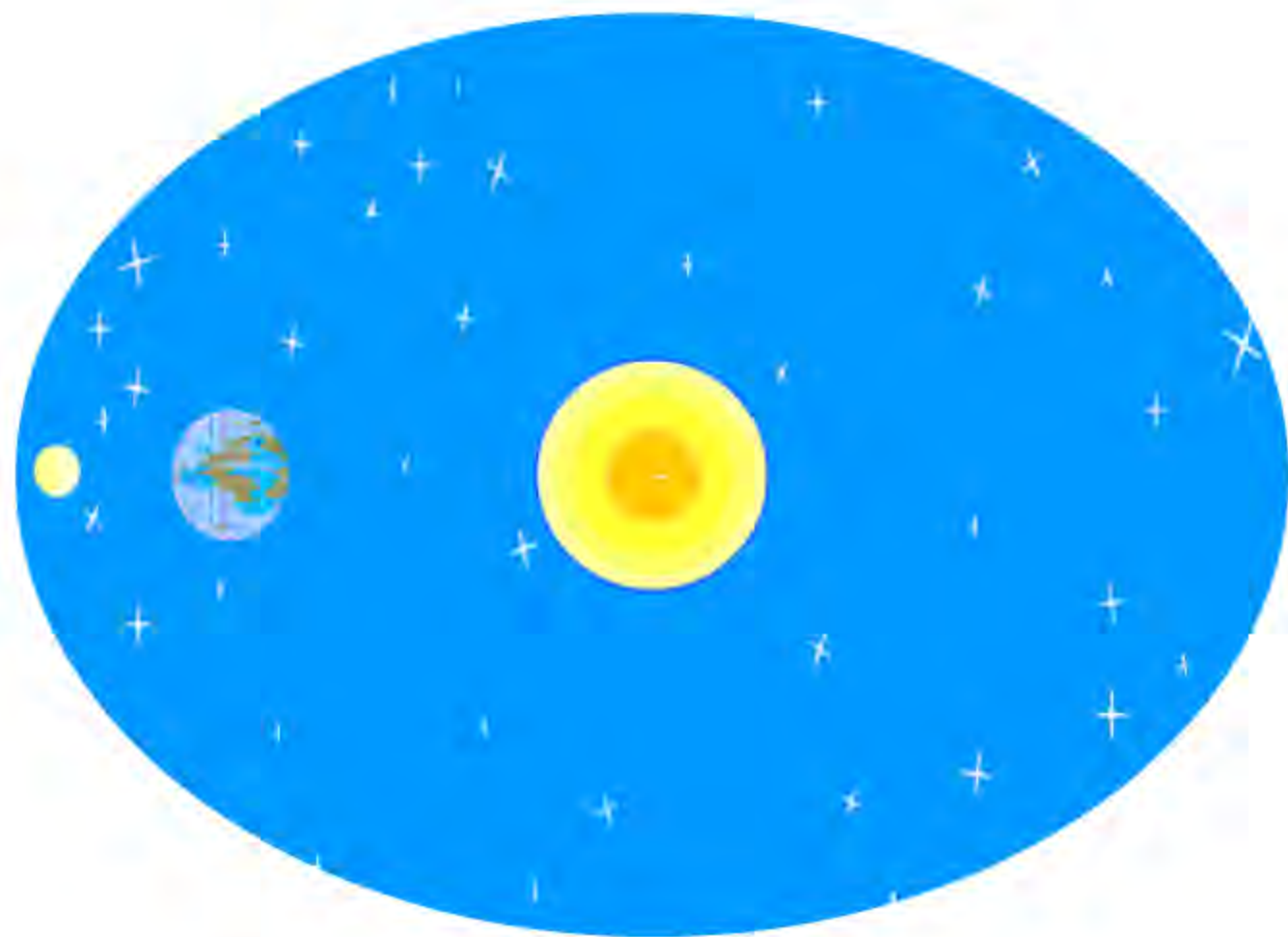




## 课前知识

### ■ 潮起潮落的原因

太阳质量虽大，但是月球同地球的距离比太阳同地球的距离近，月球的引潮力比太阳的引潮力大。



## 课前知识

在月亮和太阳的作用下，海水**每天两次**的**周期性涨落**称为**海潮**。海潮现象非常明显，极易察觉。十九世纪末，英国天文学家乔治·达尔文（George Howard Darwin）分析了当时积累的海潮观测资料，发现接近平衡潮的月球半月潮的实际潮高比把地球看成刚体时的理论潮高小三分之二。为了解释这种现象，他认为地球的固体表面也发生与海水类似的周期性涨落，其涨落幅度约为海水涨落幅度的三分之一。后来，就把**地球整体在月球和太阳引力的作用下的变形称为固体潮（Solid tide）**。



## 课前知识

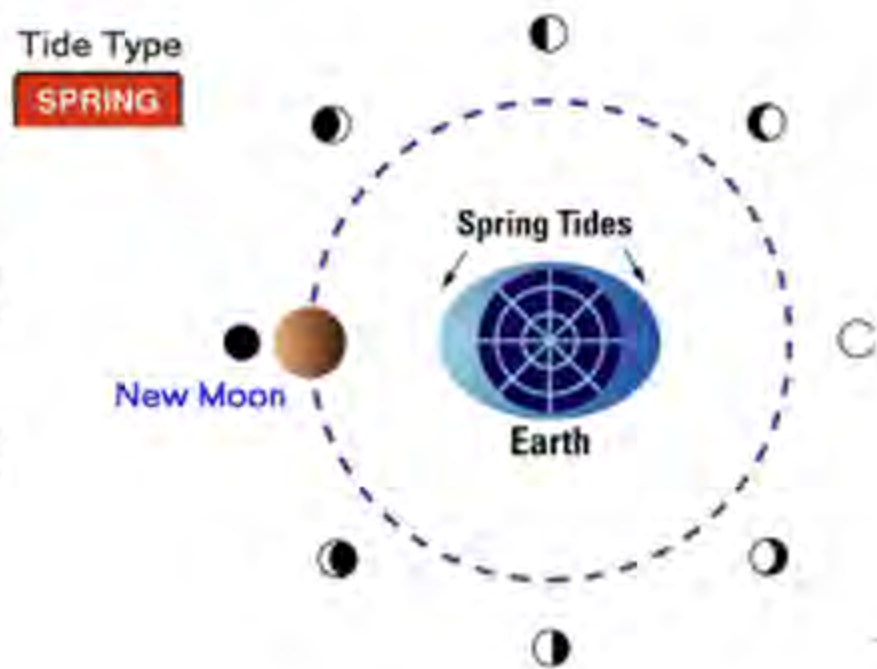
达尔文于1883年，从理论上对简化的地球模型在月亮和太阳作用下的潮汐变形进行了计算，计算结果表明，若把地球看成均匀的、不可压缩的刚性球体，那么，要使地球表面上月亮和太阳的作用下的涨落幅度为海水涨落幅度的三分之一。地球的切变模量约等于钢的切变模量。这是有关地球整体表现为固体的最早结论。地球固体潮伴随一系列地球物理现象：

1. 相对地球表面的海潮；
2. 重力变化——重力固体潮 (gravity tide)；
3. 地面倾斜——地倾斜固体潮；
4. 地面的变形——应变固体潮；
5. 经纬度变化——经纬度固体潮；
6. 地球自转速度的变化等。

# 课前知识

## 地球的固体潮

固体潮 (Earth tide, Solid tide, Body tide) —— 在太阳和月球引力的作用下，固体地球产生的周期形变的现象。月球和太阳对地球的引力不但可以引起地球表面流体的潮汐 (如海潮、大气潮)，还能引起地球固体部分的周期性形变。



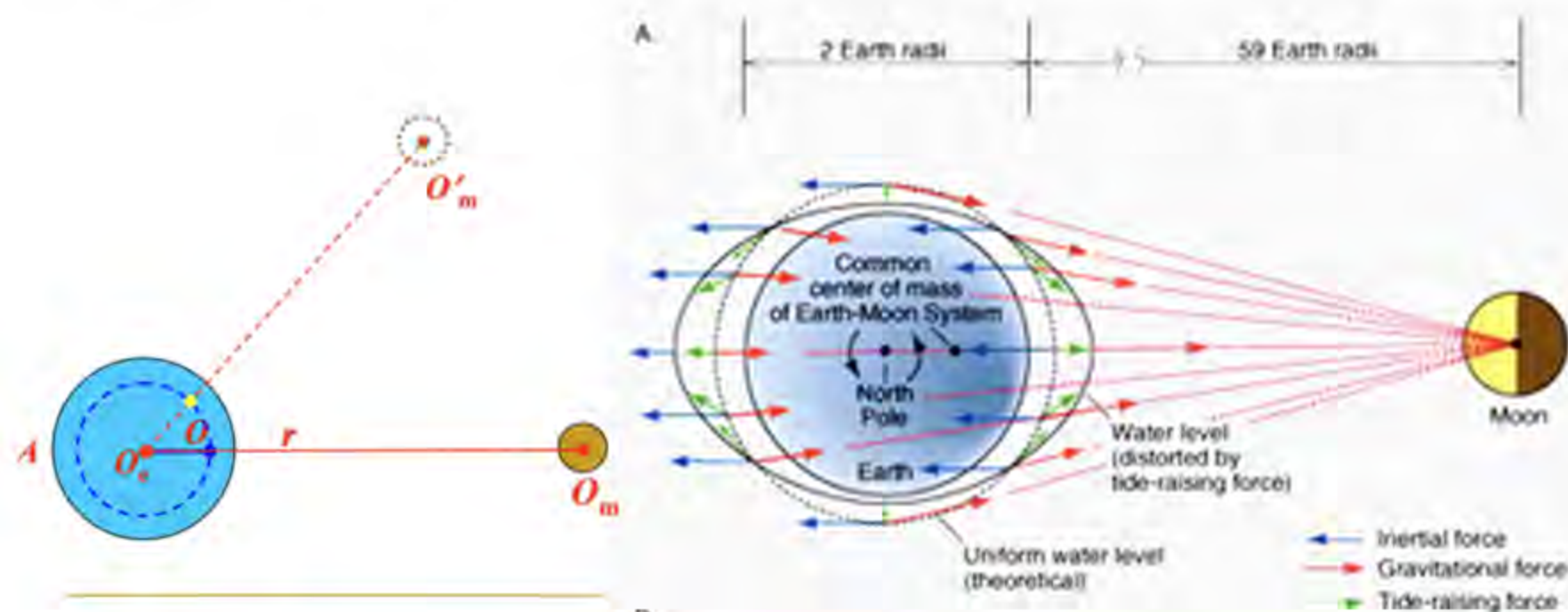
重力潮汐变化影响的最大幅度可达 $\pm 130$  微伽，重力测量结果和精密大地测量结果中应加入相应的修正。



## 课前知识

地球固体潮是如何形成的？——起潮力。

以月球为例，由于月球是绕月-地共同质心 $O$ 旋转，地球上各质点受到的离心力与月球引力的合力就是起潮力。月球和太阳相对地球位置不同时，地球上各质点受到的力的大小和方向都不同。







## 课前知识

起潮力主要来源？

太阳的质量虽然比月球的质量大，但月球同地球的距离比太阳同地球的距离近，月球的引潮力比太阳的引潮力大。

日、月对地球的引力比较：

$$F_s = GMm / r_m^2 \approx 3.5 \times 10^{22} N$$

$$F_m = GMm / r_m^2 \approx 2.0 \times 10^{20} N$$

$$F_s / F_m \approx 100$$

日、月对地球（地面与球心）引力差比较：

$$\Delta g_r = g_{Ar} - g_{Or}$$

$$\Delta g_\varphi = g_{A\varphi} - g_{O\varphi}$$

$$\Delta g_{mr} / \Delta g_{sr} \approx 2.18$$

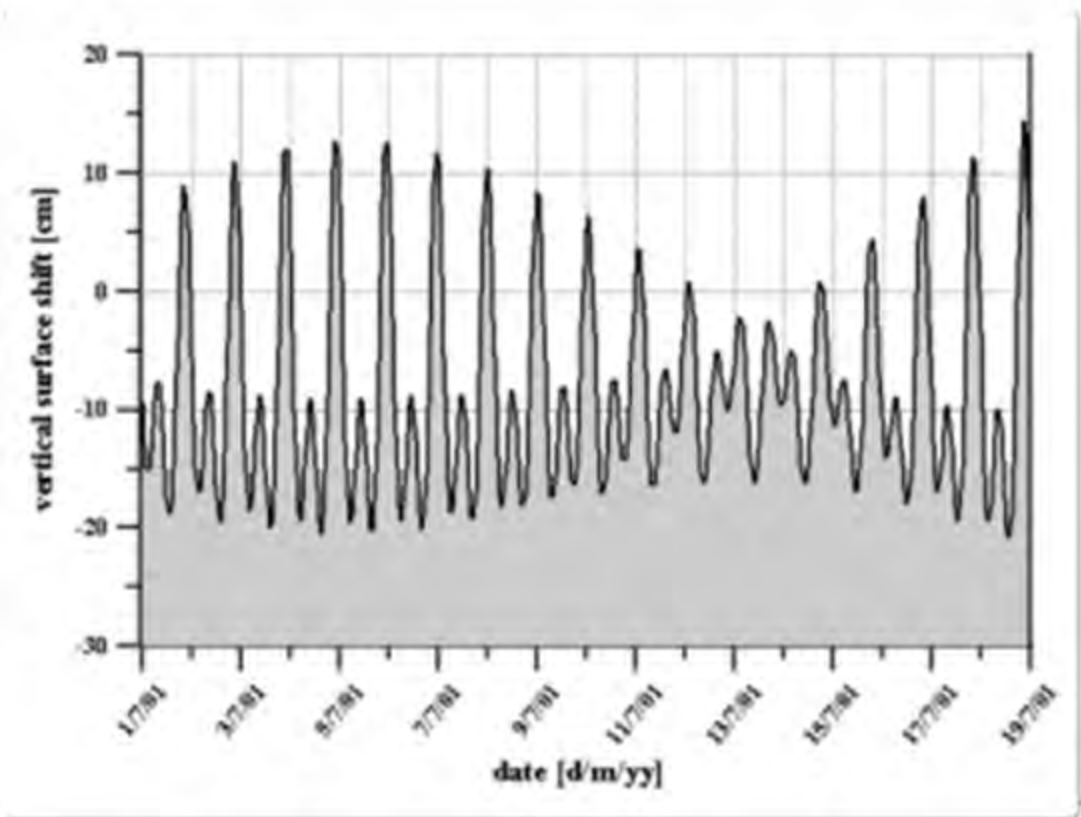
所以，月球的引力是产生在固体潮主要原因。



## 课前知识

由于其他天体距地球甚远，对地球的引力甚微，在固体潮的研究中一般可略而不计。引潮力是作用在地球的单位质点上的太阳、月引力和地球绕地月（和地日）公共质心旋转所产生的惯性离心力的合力。随着作用点的位置不同，引潮力的大小、方向也发生改变。

固体潮的重力响应——重力固体潮在一个固定点上的特征如图所示。图中可见。重力固体潮变化由不同周期信叠加而成。





## 课前知识

地面上观测到的固体潮除了包括地球对起潮力的直接响应外，还包括地球对海潮和大气潮的响应。**地球对海潮和大气潮的响应称为地球的负荷潮**，因为地球的固体潮、海潮和大气潮都来源于起潮力，因而地球的固体潮及其负荷潮的谱线完全相同。

海水受引潮力作用而产生的海洋水体的长周期波动现象。它在垂直方向表现为潮位升降，在水平方向表现为潮流涨落。随着固体潮观测仪器精度的提高以及固体潮观测资料的积累，证明了地球对海潮负荷产生影响，地球对海潮负荷的这种响应后来就称为**海潮负荷潮**。在沿海地区海潮负荷潮非常显著，负荷潮的幅度可能接近或者超过固体潮本身，在一般情况下在沿海地区重力负荷潮约占重力固体潮的10%，应变负荷潮约占应变固体潮的25%，地倾斜负荷潮占地倾斜固体潮的90%。



## 课前知识

大气潮与海潮产生的原理相同，发生的规律也相似，在地球上某一点的海潮每天产生两次涨潮两次落潮的现象，大气潮同样会出现两次涨潮和两次落潮，而且两次涨潮所经过的时间平均是12小时25分，第二天涨潮的时间会比前一天平均推迟50分钟。在很多方面大气潮和海洋潮汐类似。大气潮的激发机制包括：大气辐射加热的日夜更替、月球的引力场影响、行星波和大气潮之间的非线性相互作用。简单来说月球和太阳对地球大气的摄引（引力的波动）也会产生大气的“涨潮”和“落潮”，这就是大气潮。**大气潮是全球尺度的大气振荡。**

根据万有引力定律，两个物体之间的引力和它们的质量成正比，因此对于潮汐来说，起潮力与被摄引物体的质量成正比。与海水相比大气质量(密度)小得多，所以大气潮引起的引力变化远不如海潮显著，只有用极精密的仪器测量才能发现。



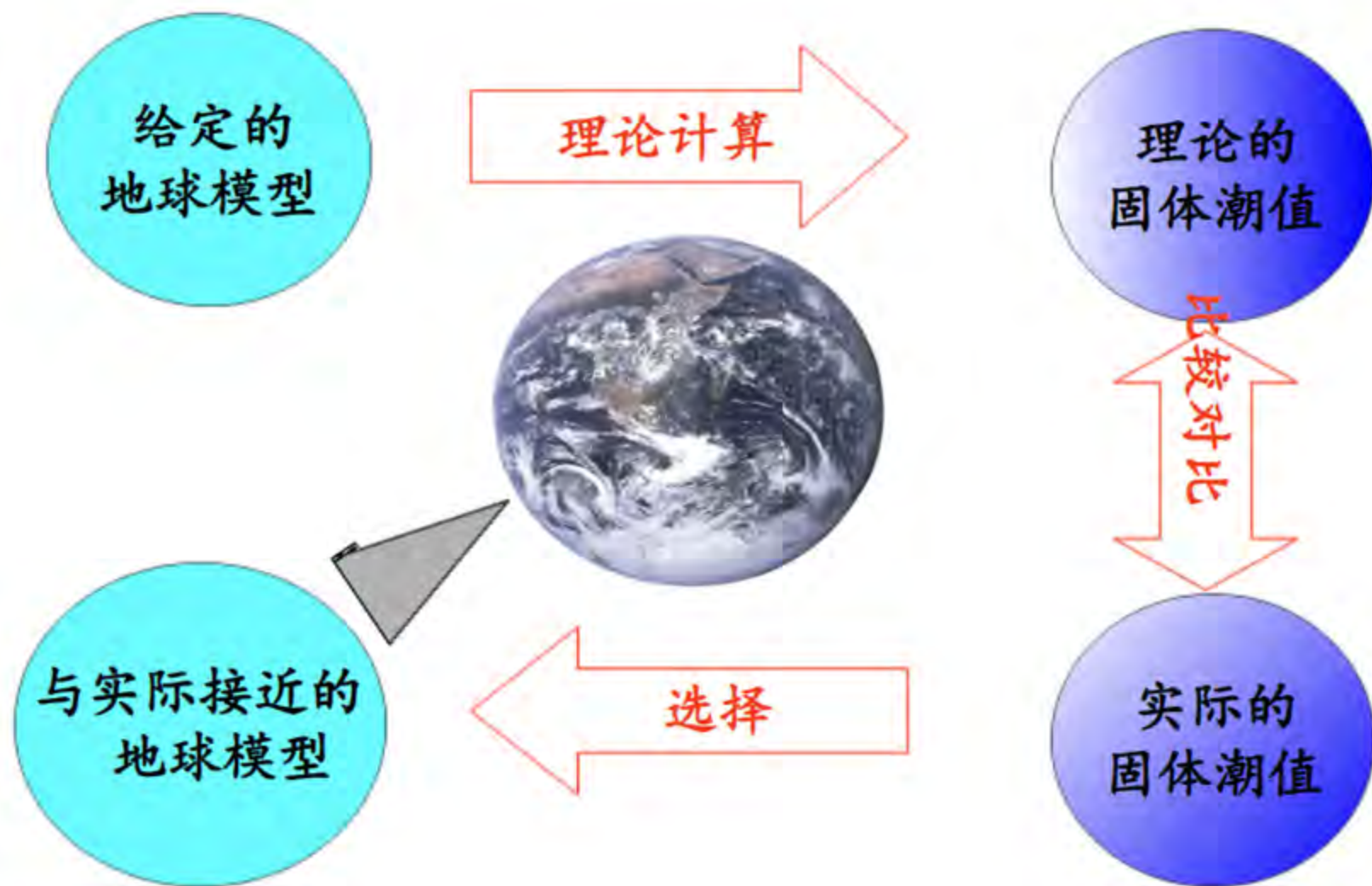
## 课前知识

重力固体潮观测的主要目的:

- ✓ 为重力测量和其他的精密测量 (卫星定位和精密水准测量等)提供**固体潮改正**。
- ✓ 在消除模拟的海洋潮汐影响后, 固体潮观测可用于研究全球地球模型。(研究固体地核平动振荡, 液核共振效应, 核慢边界黏性)
- ✓ 在扣除模拟的海洋潮汐影响和全球性固体潮影响后, 可以用来确定区域性的“地壳-地慢模型”, 揭示岩石圈和上地慢中的横向不均匀性。
- ✓ 检验全球和区域性的“海洋潮汐模型”
- ✓ 研究固体地球潮汐和海洋负荷潮汐与现代地球动力学过程 (地震、火山爆发)之间的联系。



# 课前知识





# 目 录

---

## 第一节 起潮力位及其调和展开

# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

### (1) 地月系统的质心

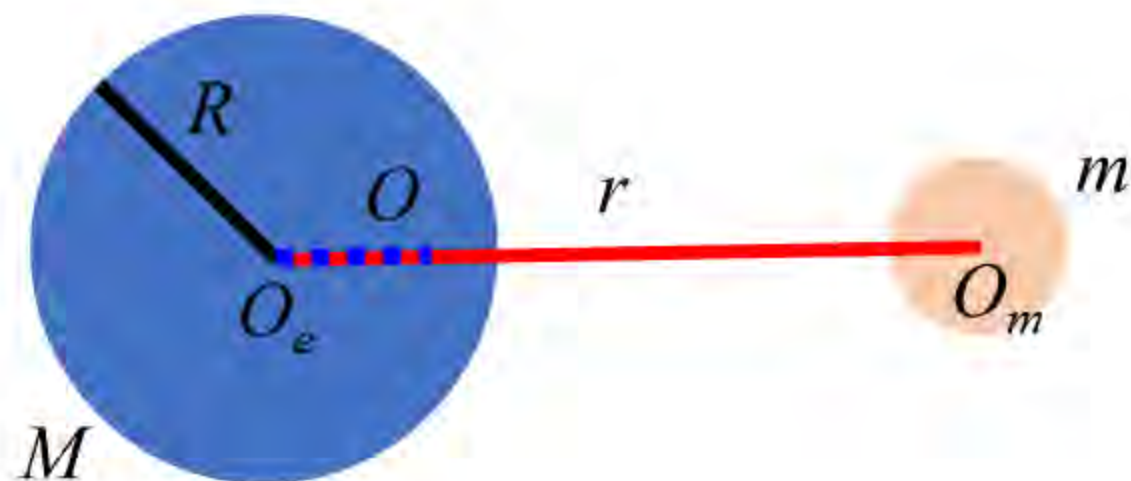
地球质量  $M = 5.9933 \times 10^{24} \text{ kg}$

地球平均半径  $R_e = 6371 \text{ km}$

月球质量  $m = 7.3537 \times 10^{22} \text{ kg}$

月球平均半径  $R_m = 1738.2 \text{ km}$

地心和月心的平均距离  $r = 385000 \text{ km} \approx 60R_e \approx 222R_m$





# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

### (1) 地月系统的质心

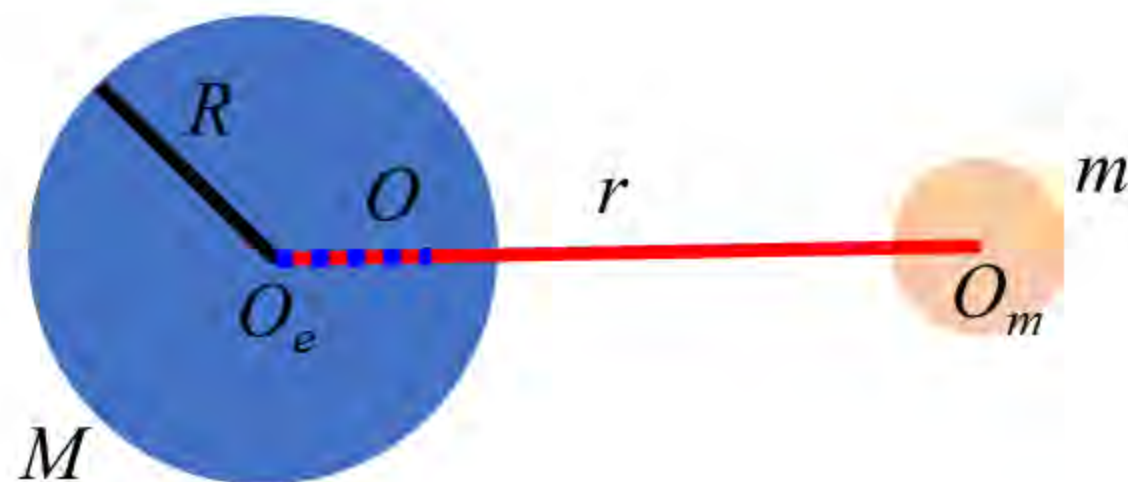
设地球质量 $M$ ，质心为 $O_e$ ，月球的质量为 $m$ ，质心为 $O_m$ ，地月系统质心为 $O$ ，地月质心之间的距离为 $r$ ，根据力矩定理

$$OO_e \times M = OO_m \times m = (r - OO_e) \times m$$

$$\Rightarrow OO_e \times (M + m) = r \times m$$

$$\Rightarrow OO_e = \frac{m}{(M + m)} r$$

$$\approx 0.73R$$



公共质心位于地心、月心连线上，且在地球内部距地心  $0.73R$  处



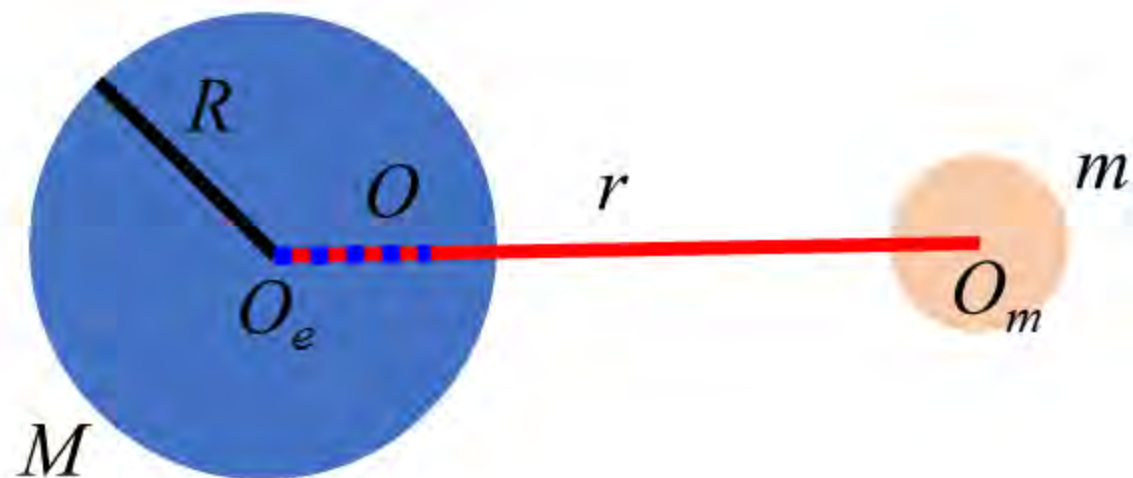
# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

### (1) 地月系统的质心

根据万有引力定律，地球与月球的相互引力为

$$F_{e-m} = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

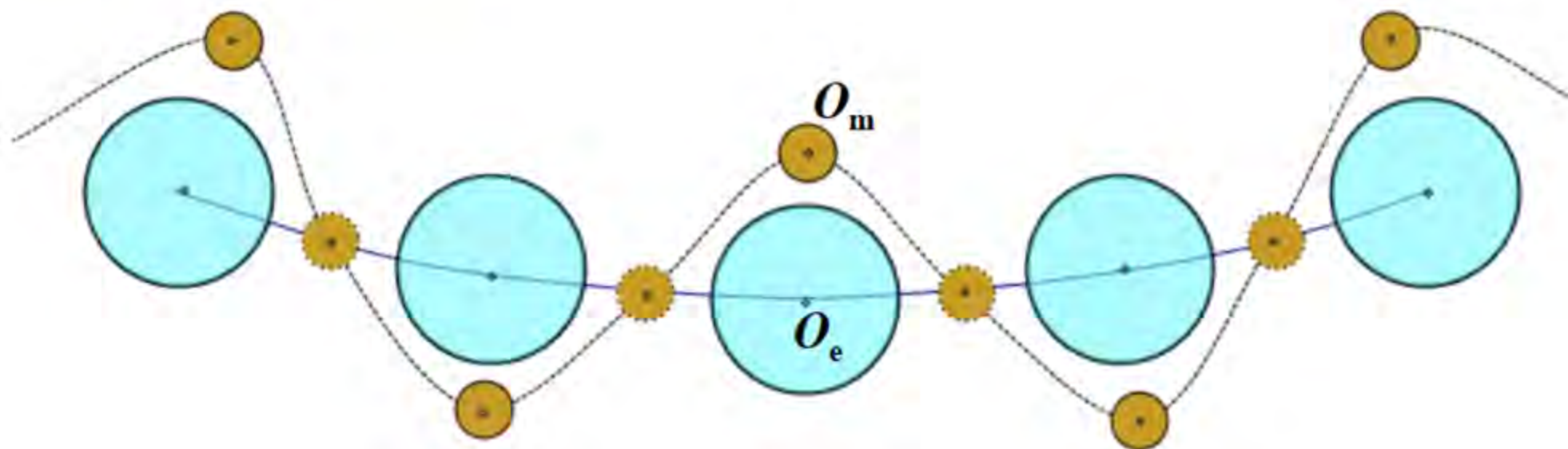




# 1.起潮力位及其调和展开

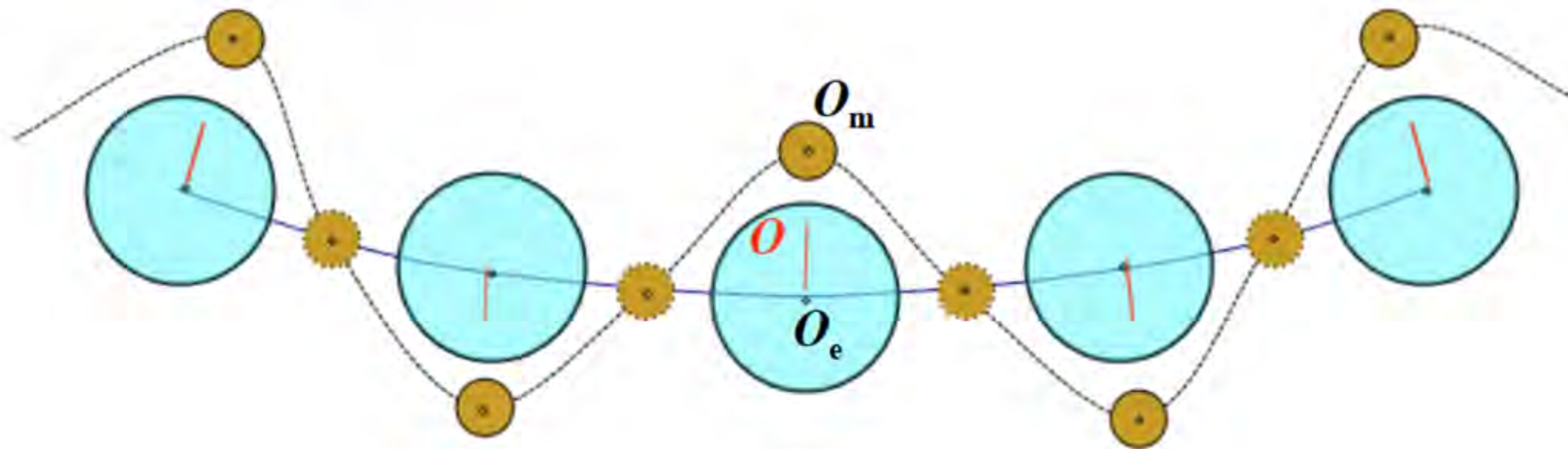
## ■ 1.1 起潮力

### (2) 地月系统运动轨迹



### ■ 1.1 起潮力

## (2) 地月系统运动轨迹

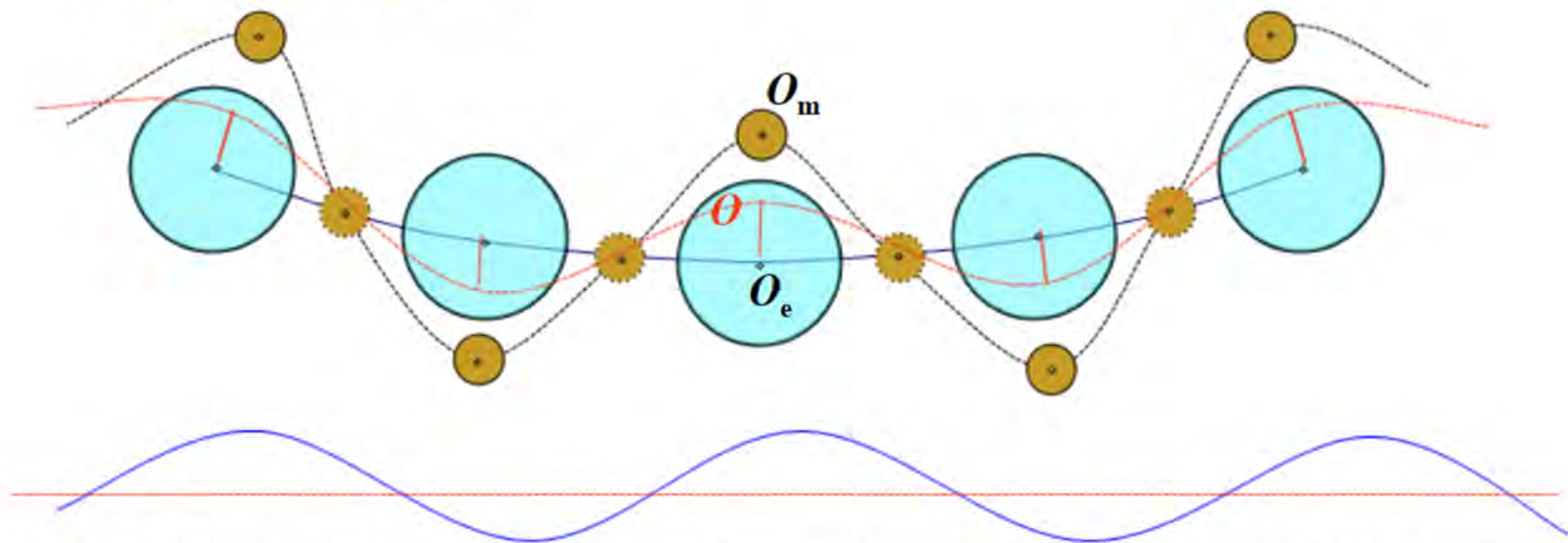




# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

### (2) 地月系统运动轨迹



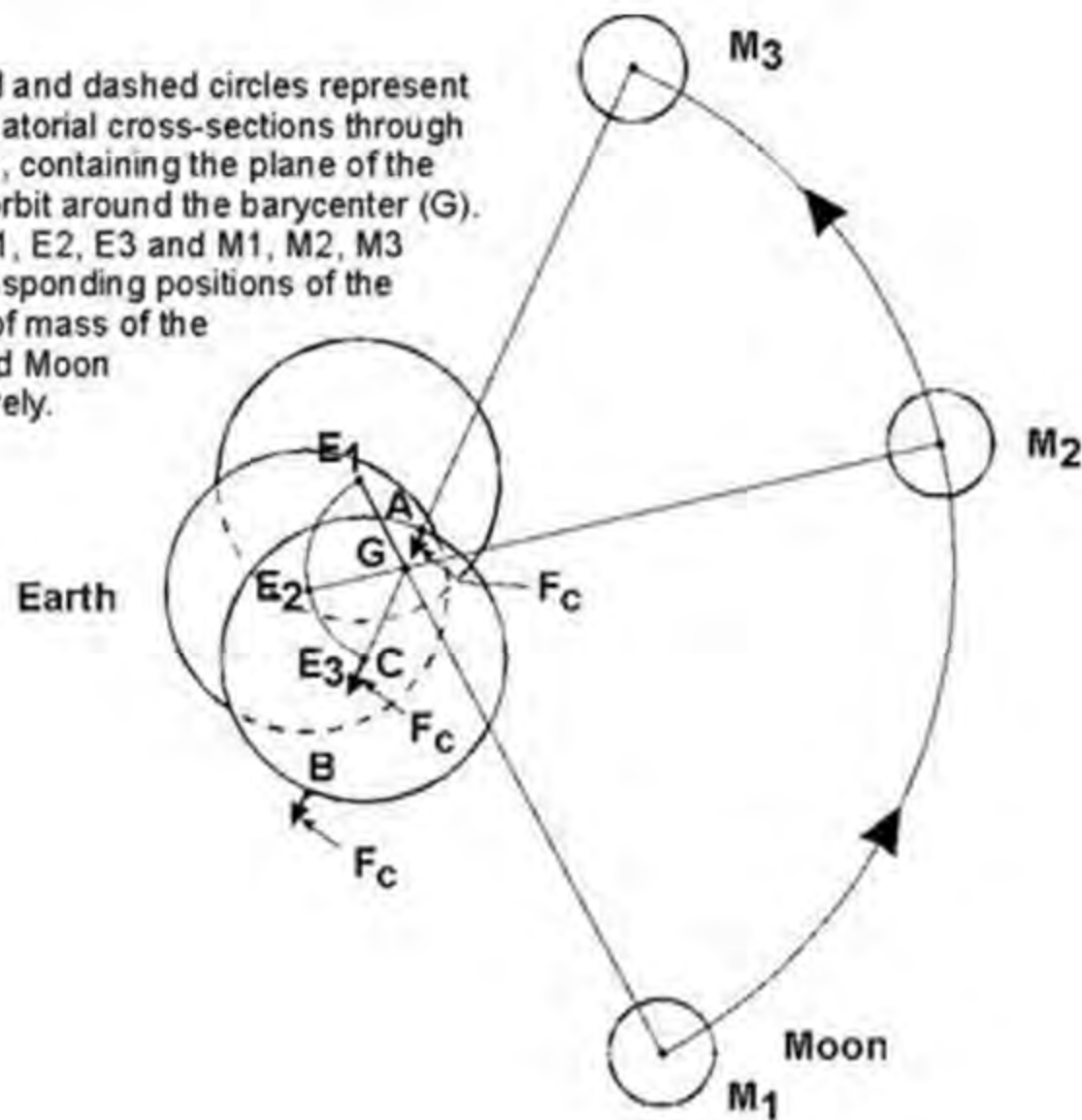
相对地月质心运动轨迹 (红色虚线) 而言, 地球质心的运动轨迹在基本轨道上摆动。

## ■ 1.1 起潮力

(3)地月系统围绕共同质心O点旋转的惯性离心力

以地月系统质心为参考，看地、月的运动轨迹。

The solid and dashed circles represent near-equatorial cross-sections through the earth, containing the plane of the Moon's orbit around the barycenter (G). Points E1, E2, E3 and M1, M2, M3 are corresponding positions of the centers of mass of the Earth and Moon respectively.

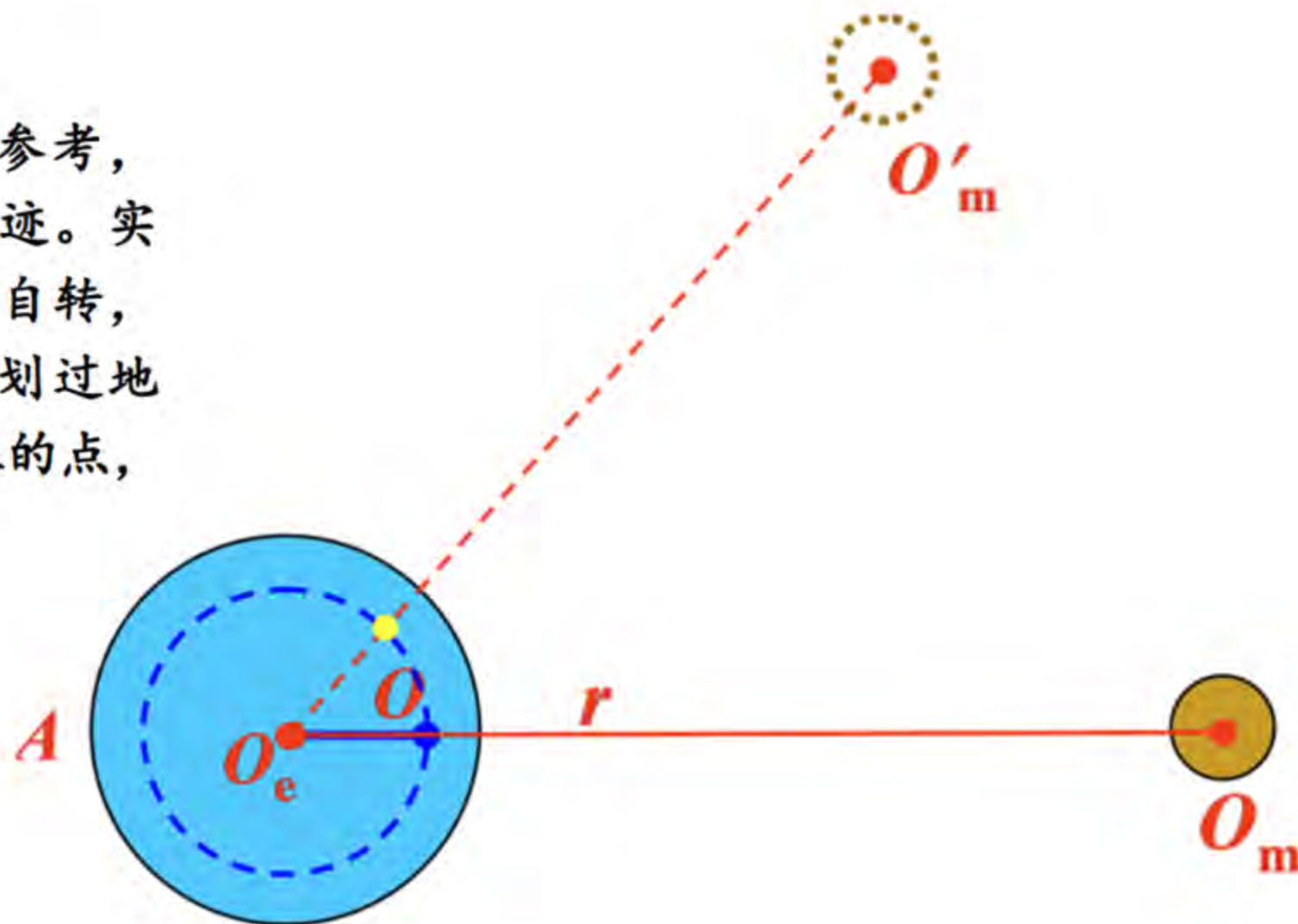




# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

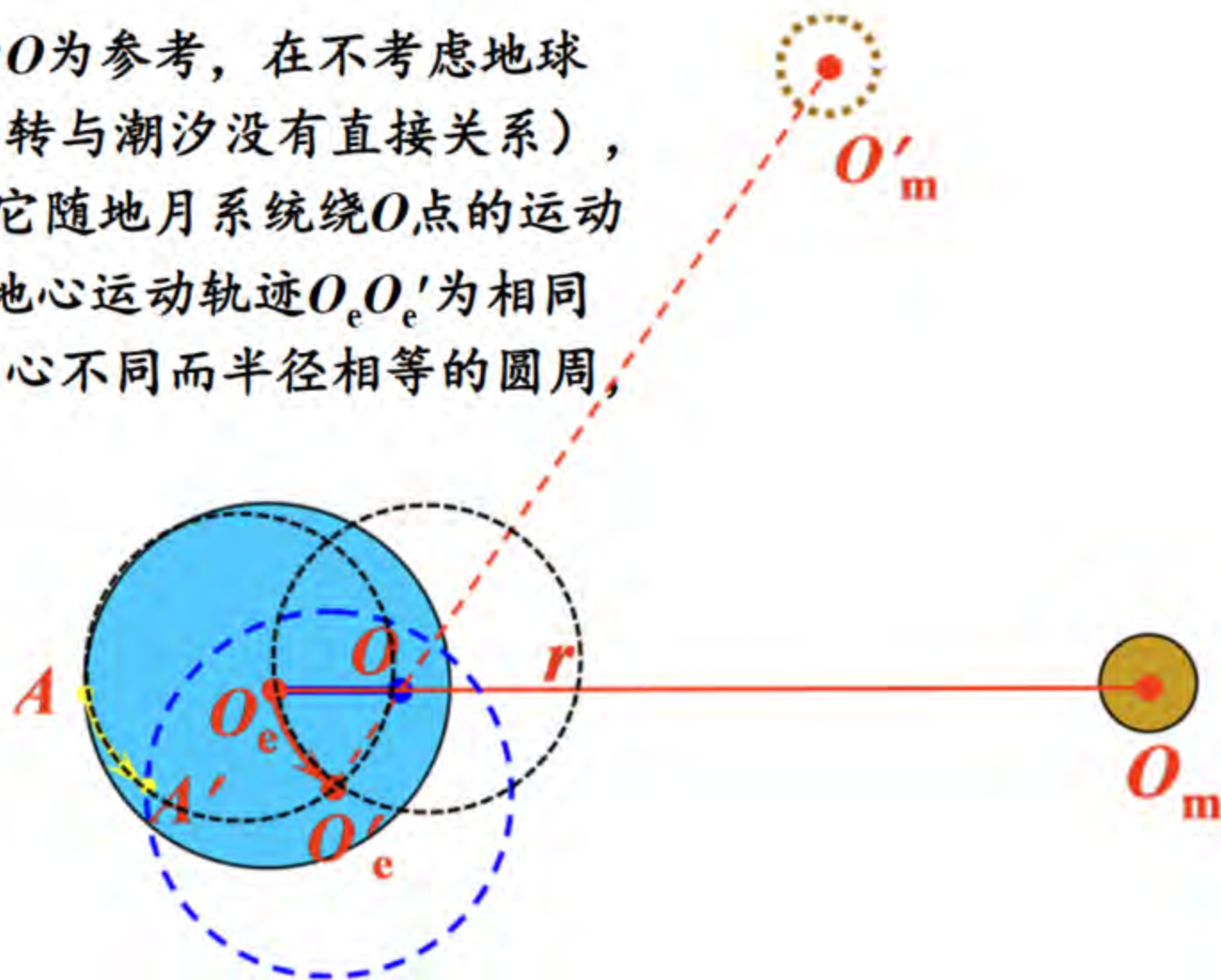
若以地心为参考，  
看地、月运动轨迹。实  
际上，由于地球自转，  
地月系统质心 $O$ 划过地  
球内部 $0.73R$ 部位的点，  
形成圆弧。



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

若以地月系统质心 $O$ 为参考，在不考虑地球自转的情况下（地球自转与潮汐没有直接关系），考虑地球上任一点 $A$ ，它随地月系统绕 $O$ 点的运动轨迹为 $AA'$ 圆弧，它与地心运动轨迹 $O_eO'_e$ 为相同的圆弧。这些圆弧属圆心不同而半径相等的圆周，其半径等于 $0.73R$ 。



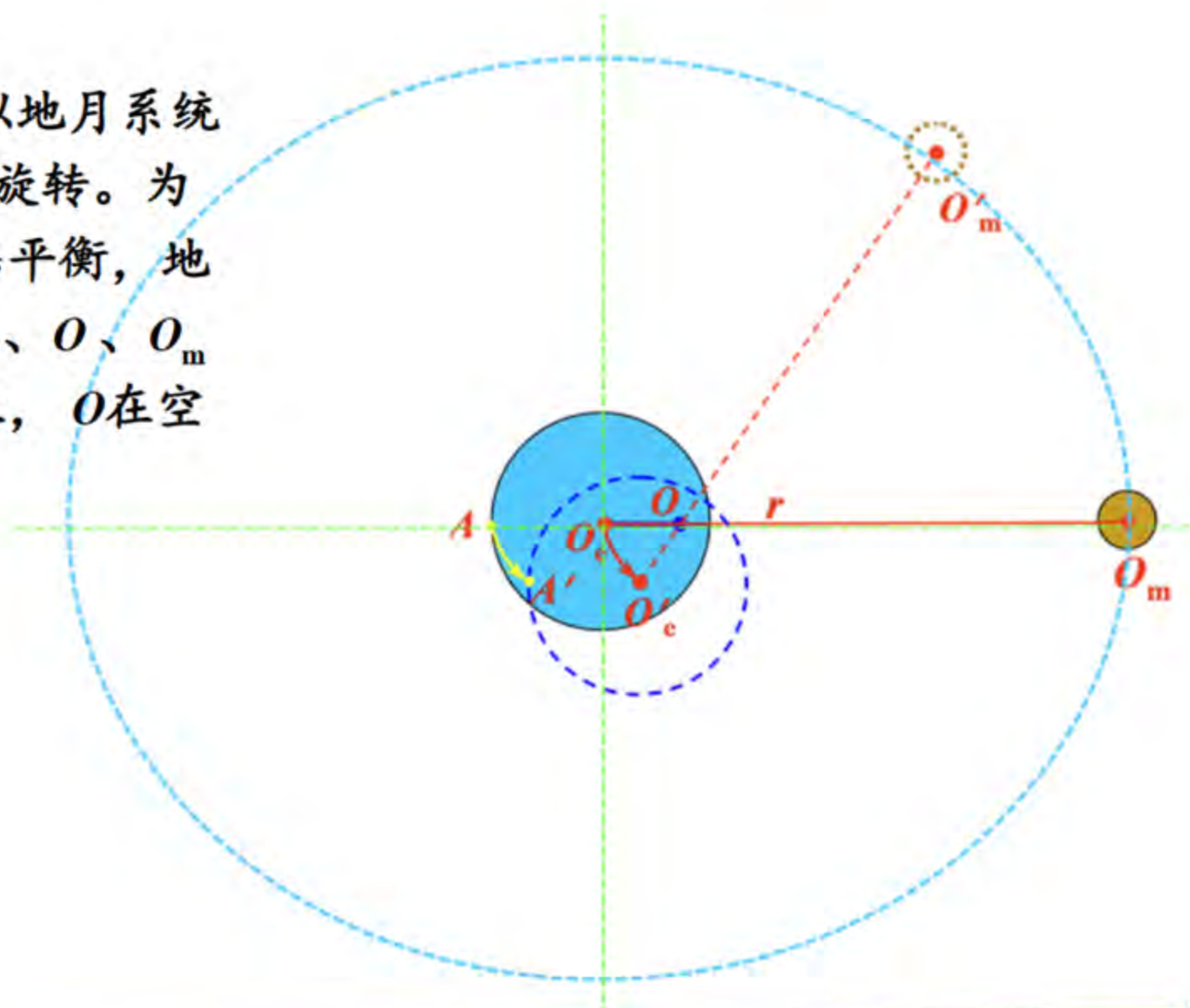




# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

月球的质心 $O_m$ 沿以地月系统的质心 $O$ 为焦点的椭圆旋转。为了保持月地系统的动态平衡，地心 $O_e$ 绕 $O$ 旋转，使得 $O_e$ 、 $O$ 、 $O_m$ 始终保持一条直线上， $O$ 在空间的位置不动。



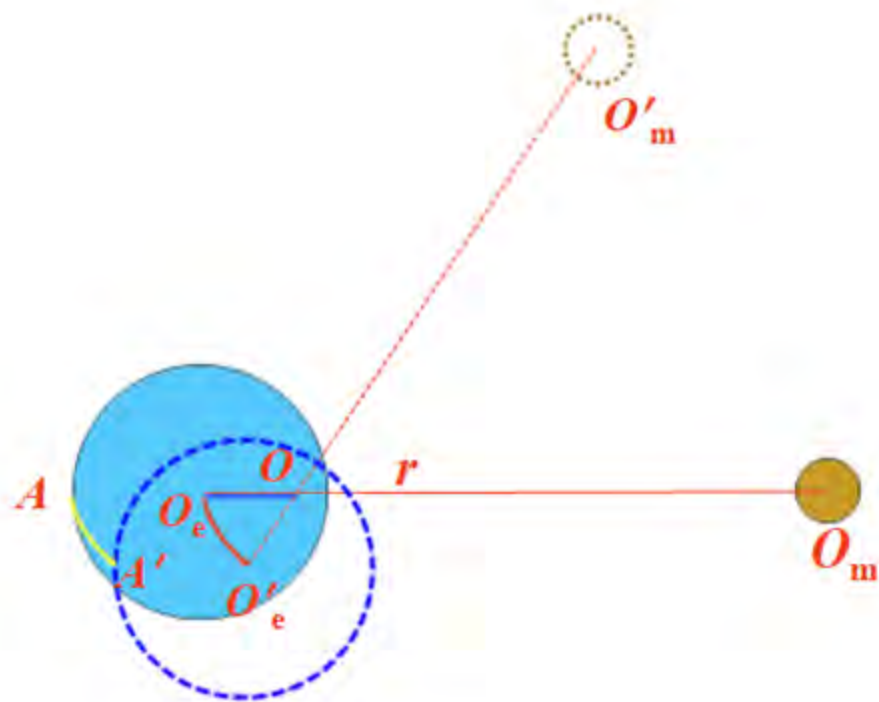


# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

此时，地球所做的运动就是平动。  
理论力学中，平动的概念就是指物体内部各点都具有相同的速度和加速度。在这里，各点平动是圆周运动，即A点与 $O_e$ 点具有相同的向心加速度。可以证明，地球内部任何一点都与A点一样，具有相同的向心加速度。

显然，这里包括地球球心处。



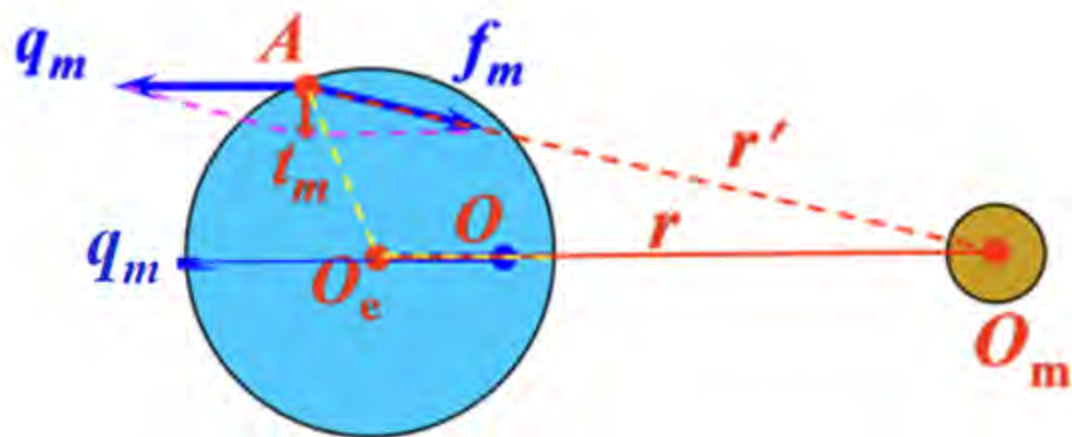


# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

这样，地球内任一点受到的惯性离心力相同，即等于地球质心处的离心力，且方向始终平行于质心连线，即有

$$\vec{q}_m = -\omega_{e-m}^2 \overline{OO_e} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



# 1.起潮力位及其调和展开

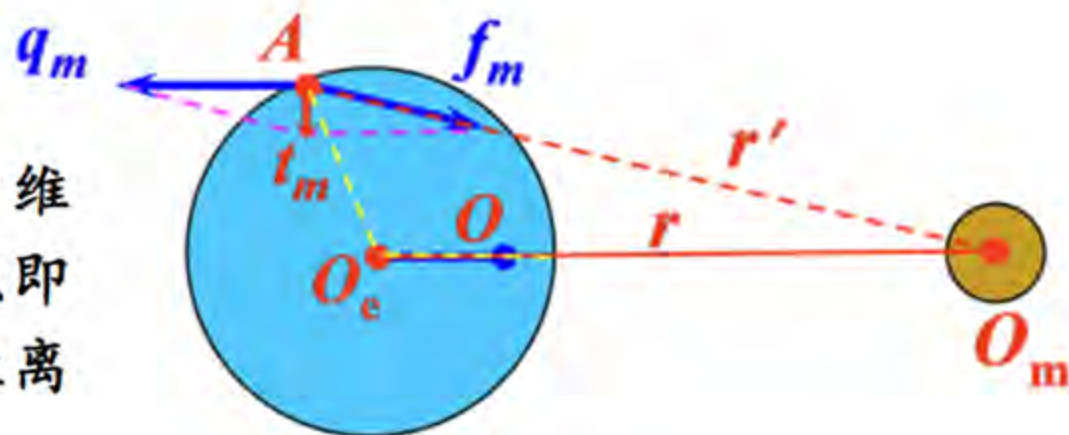
## ■ 1.1 起潮力

(3)地月系统围绕共同质心O点旋转的惯性离心力

可见，月球对地球提供的引力维持着地球绕O点作圆周运动， $O_e$ 点即受到月球的引力就等于该点的惯性离心力，即

$$q_m = \omega_{e-m}^2 \overline{OO_e} = G \frac{m}{r^2}$$

33 g.u.

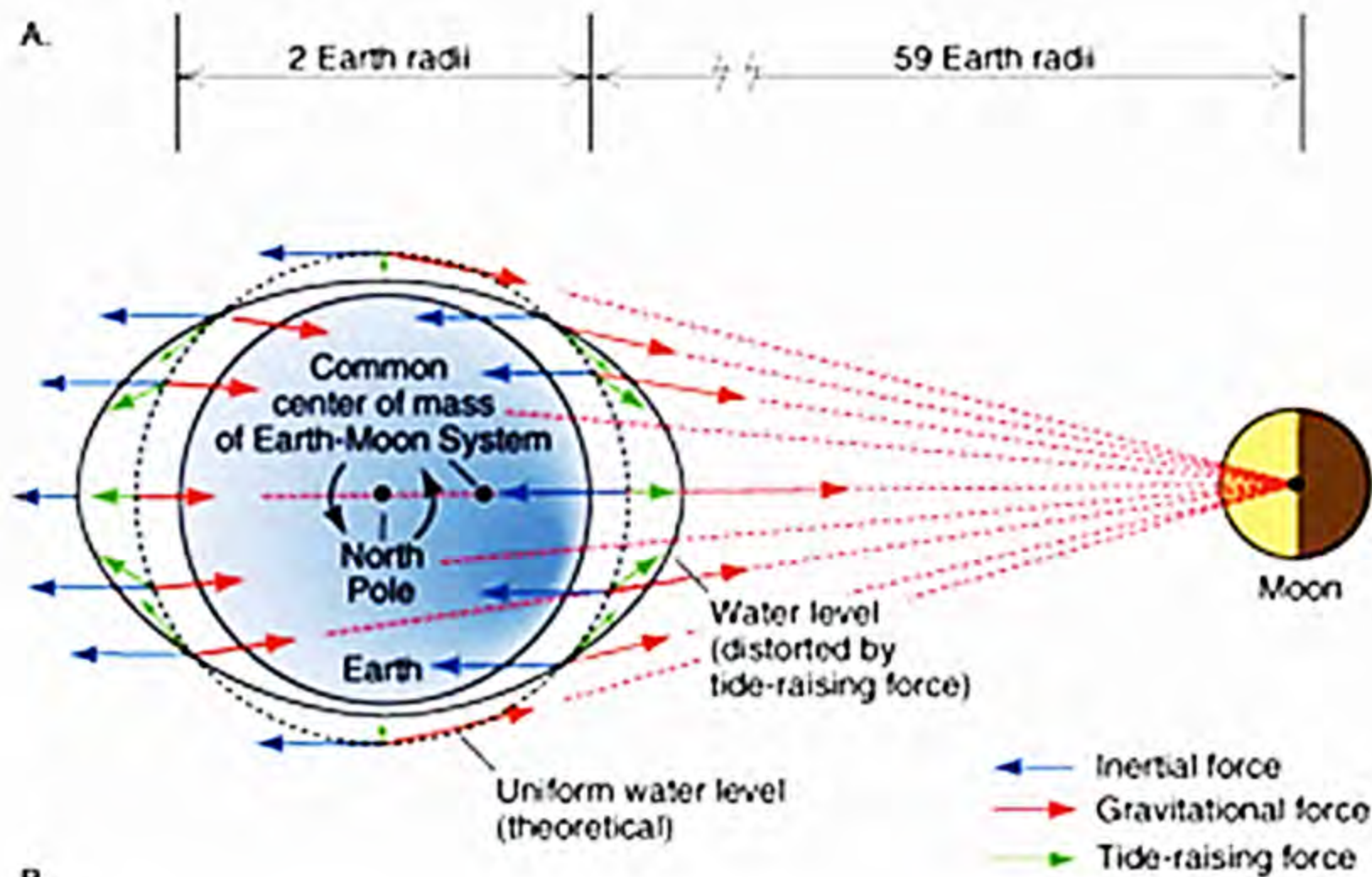
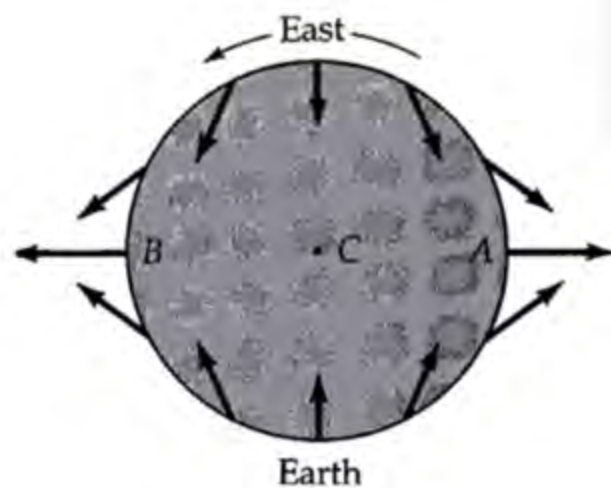




# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

但地球内各质点受到月球的引力在大小、方向上都不一样。

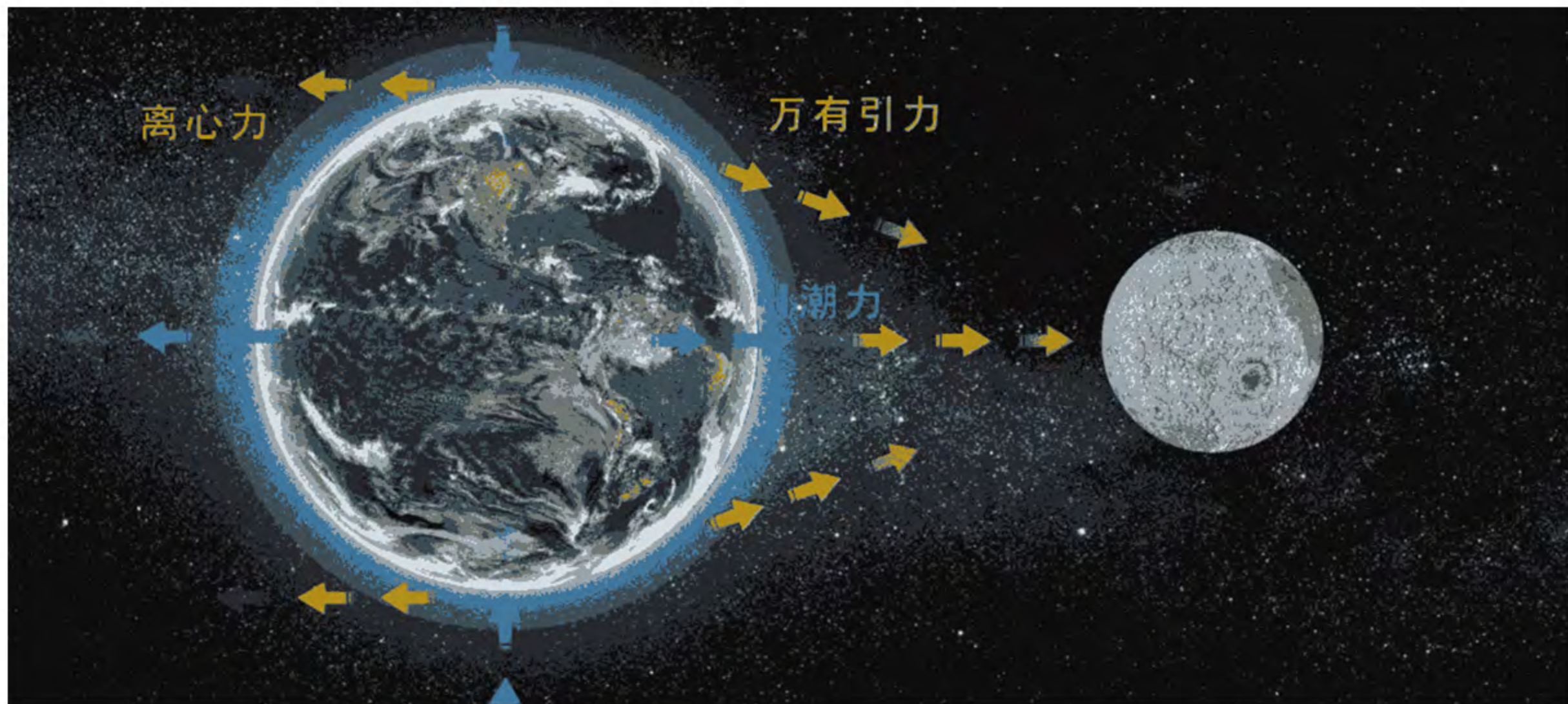






# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力





# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.1 起潮力

### (4)起潮力

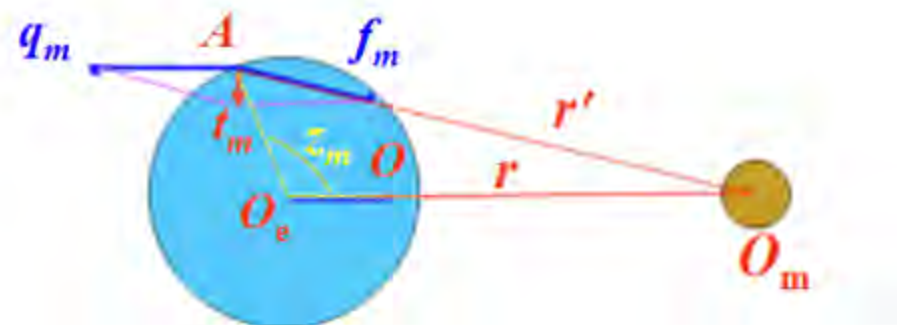
月球引力  $\vec{f}_m$  与惯性离心力  $\vec{q}_m$  之矢量合  $\vec{t}_m$  为月球起潮力，即

$$\vec{t}_m = \vec{f}_m + \vec{q}_m$$

同理，可以导出太阳的起潮力  $\vec{t}_s$ 。

地球上任一点所受到的总起潮力为

$$\vec{t} = \vec{t}_m + \vec{t}_s$$



起潮力是随着时间变化的，当A点处于不同位置时，起潮力大小不同，形成周期性变化。



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.2 起潮力位

### (1)月球起潮力位

由于地球的自转，月球绕地球的旋转和地球绕太阳的旋转，因而在地球内部任一点的起潮力是一个随时间变化的矢量场。物体的引力是保守力，因而月球在A点的引力 $f_m(A)$ 可用位函数表示，即 $U_m(A)$ 。

地球内部的惯性离心力 $q_m(A)$ 也是一个保守力，也可用地球在月球引力场内的平动加速运动在A点产生的惯性离心力位 $Q_m(A)$ 的梯度表示，即

$$q_m(A) = \text{grad} Q_m(A)$$

用 $T_m(A)$ 表示引力位 $U_m(A)$ 和惯性离心力位 $Q_m(A)$ 的和，即

$$T_m(A) = U_m(A) + Q_m(A)$$

称为月球在地球内部任一点所产生的起潮力位。

显然，有  $t_m(A) = \nabla T_m(A)$



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.2 起潮力位

### (1) 月球起潮力位

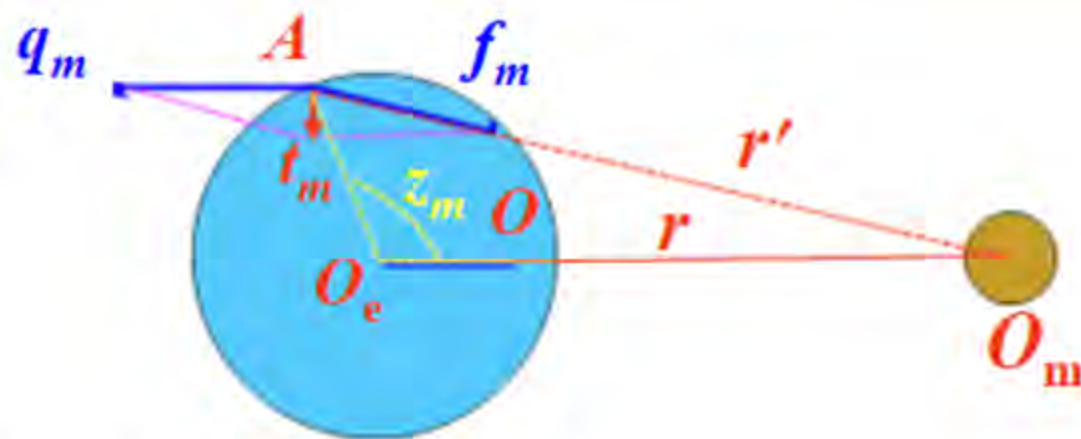
设地球、月球和太阳的质量分别为  $M_e, M_m, M_s$ , 地月距、地日距分别为  $r_m, r_s$ ,  $r$  为地球内部A点半径, 则月球起潮力位可写成

$$T_m(A) = -G \frac{M_m}{r_m^2} r \cos z_m + G \frac{M_m}{r_{m,A}}$$

由  $\frac{1}{r_{m,A}} = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_m} \right)^n P_n(\cos z_m)$  勒让德级数

可得

$$T_m(A) = -G \frac{M_m}{r_m^2} r \cos z_m + G \frac{M_m}{r_m} \left[ 1 + \frac{r}{r_m} \cos z_m + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_m} \right)^n P_n(\cos z_m) \right]$$



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.2 起潮力位

### (2) 太阳起潮力位

同理，并考虑到 $(r/r_s) \leq 1/234000$ ，且太阳与地球质量之 $(M_s/M_e)=333432$ ，只取 $(r/r_m)^2$ 项，可得

$$T_s(A) = G \frac{M_s}{r_s} \left( \frac{r}{r_s} \right)^2 P_2(\cos z_s)$$

所以起潮位为

$$T(A) = T_m(A) + T_s(A)$$

由于 $z_m, z_s$ 都是地球内部空间位置和时间的函数，所以，起潮位反映了起潮力在时间和空间上的分布规律。



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (1) 勒让德展开与杜森常数

由 
$$\frac{1}{r_{m,A}} = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_m} \right)^n P_n(\cos z_m)$$

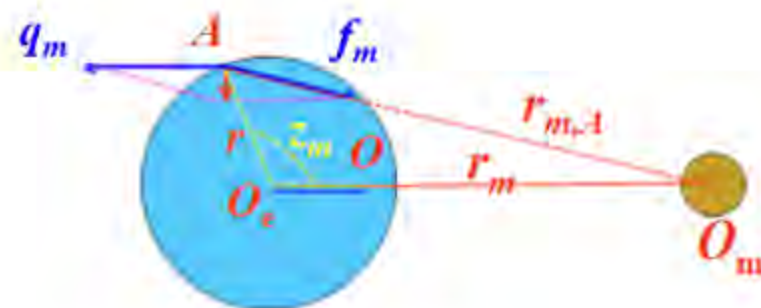
可得

$$T_m(A) = G \frac{M_m}{r_m} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_m} \right)^n P_n(\cos z_m)$$

英国人杜森(Doodson)于1922年引入一个常数 $D$ , 即

$$D = \frac{3}{4} G \frac{M_m R^2}{c_m^3}$$

$D$ 为杜森常数,  $c_m$ 为地心至月心平均距离,  $R$ 为地球半径。



$$D = 26206 \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

$$D = 26277 \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (1) 勒让德展开与杜森常数

对于太阳而言，可得到类似的结果，只是杜森常数为

$$D = \frac{3}{4} G \frac{M_s R^2}{c_s^3}$$

$D$ 为杜森常数， $c_s$ 为地心至太阳质心平均距离， $R$ 为地球半径。

且有 
$$D_s = \left( \frac{c_m}{c_s} \right)^3 \left( \frac{M_s}{M_m} \right) D_m \approx 0.45990 D_m$$





# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开



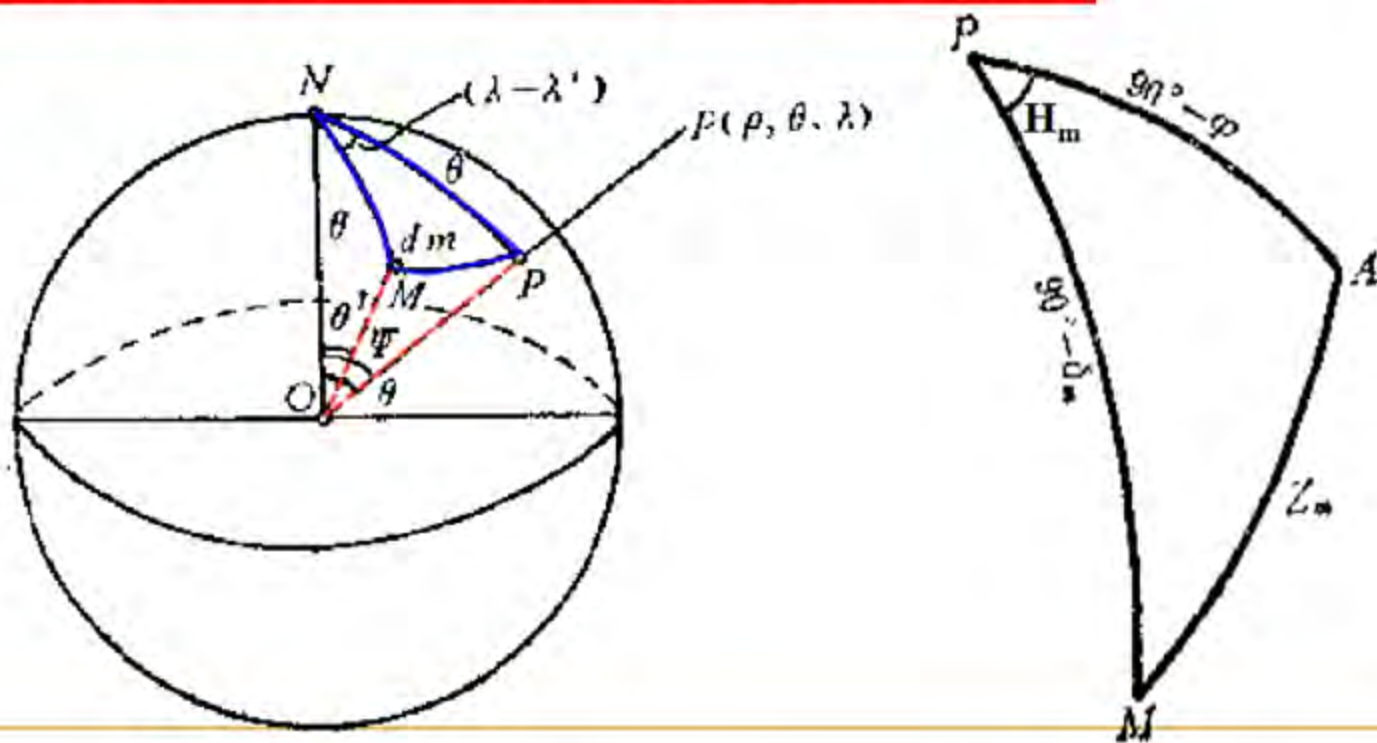
[https://baike.baidu.com/item/%E8%B5%A4%E7%BA%AC?fromModule=lemma\\_search-box](https://baike.baidu.com/item/%E8%B5%A4%E7%BA%AC?fromModule=lemma_search-box)

# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

首先讨论月球起潮位。选定天球坐标系，设P为北极，A为地面一点，M为月球在天球上的位置， $z_m$ 为月球对A点的地心天顶距， $\varphi$ 为A点纬度， $\delta_m$ 为月球在天球上位置的赤纬， $H_m$ 为月球时角。





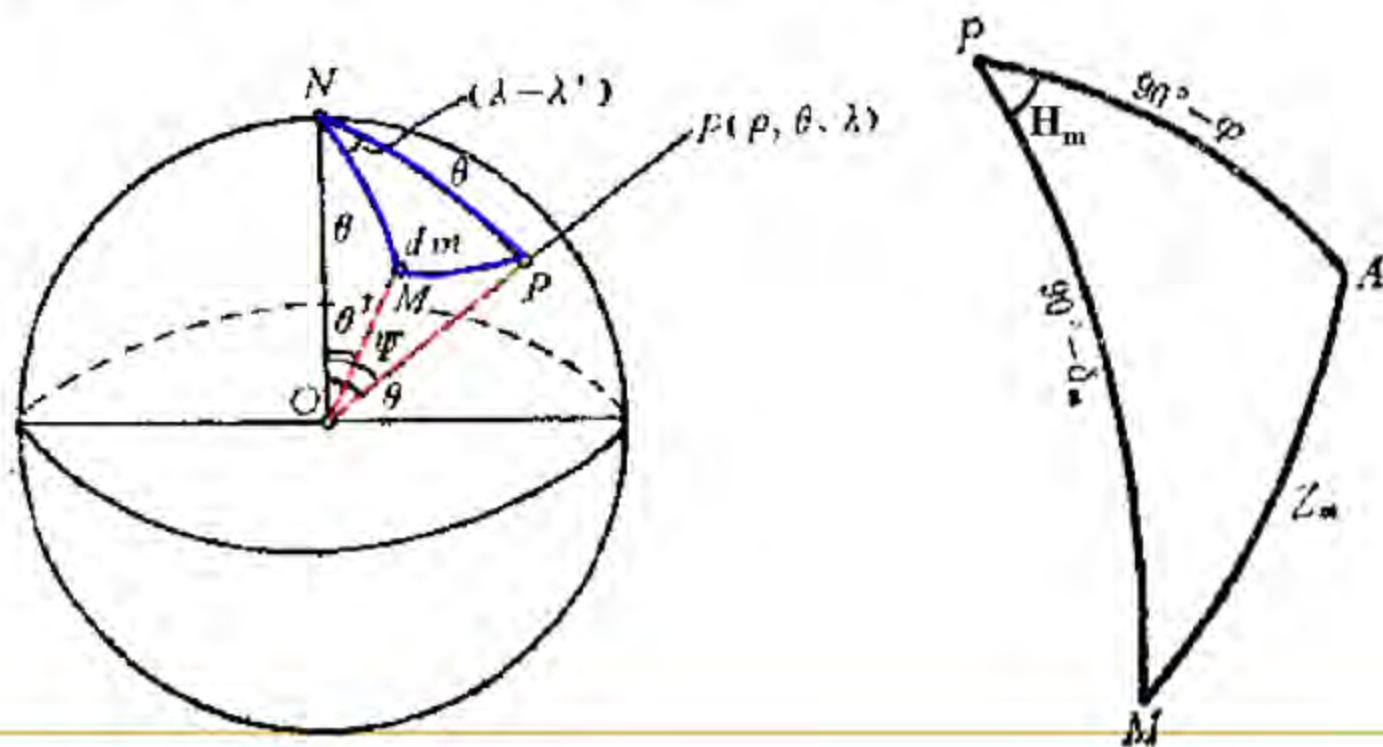
# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

在球面三角形PAM中，有

$$\cos z_m = \sin \varphi \sin \delta_m + \cos \varphi \cos \delta_m \cos H_m$$



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

根据球函数的加法定理，有

$$P_n(\cos z_m) = P_n(\sin \varphi)P_n(\sin \delta_m) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\sin \varphi) P_n^k(\sin \delta_m) \cos H_m$$

若只取至二次项，化简可得

$$P_2(\cos z_m) = P_2(\sin \varphi)P_2(\sin \delta_m) + \frac{1}{3} P_2^1(\sin \varphi)P_2^1(\sin \delta_m) \cos H_m + \frac{1}{12} P_2^2(\sin \varphi)P_2^2(\sin \delta_m) \cos 2H_m$$



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

考虑到

$$\begin{aligned}P_2(\sin \varphi) &= \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}, & P_2(\sin \delta_m) &= \frac{3}{2} \sin^2 \delta_m - \frac{1}{2} \\P_2^1(\sin \varphi) &= 3 \sin \varphi \cos \varphi, & P_2^1(\sin \delta_m) &= 3 \sin \delta_m \cos \delta_m \\P_2^2(\sin \varphi) &= 3 \cos^2 \varphi, & P_2^2(\sin \delta_m) &= 3 \cos^2 \delta_m\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}P_2(\cos z_m) &= \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{2} \sin^2 \delta_m - \frac{1}{2} \right) + 3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \delta_m \cos \delta_m \cos H_m \\&\quad + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} (3 \sin^2 \varphi - 1) (3 \sin^2 \delta_m - 1) + \frac{3}{4} \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m \\&\quad + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m\end{aligned}$$

# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

将杜森常数代入，化简可得

$$\begin{aligned} T_{m2} &= D_m \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ 3 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta_m - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m + \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m \right] \\ &= D_m \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \right] \end{aligned}$$



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2)起潮位的拉普拉斯展开

同理，二阶太阳起潮位为

$$T_{s2} = D \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_s \right) + \right. \\ \left. + \sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos 2H_s \right]$$

# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (1)长周期潮

考虑第一项

$\varphi$ 为地面A点纬度  
 $\delta_m$ 为月球的赤纬

$$\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m\right), \quad \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta_s\right)$$

对于A点来说， $\sin^2 \varphi$ 是常数，而 $\sin^2 \delta_m$ ， $\sin^2 \delta_s$ 是周期波。显然，月球运行周期为一个月，其半周期约为14天；而太阳（相对地球）运行周期为1年，其半周期约为6个月。与此对应的潮汐现象以半个月为周期的潮为半月潮，以半年为周期的潮为半年潮，两者统称为长周期潮。

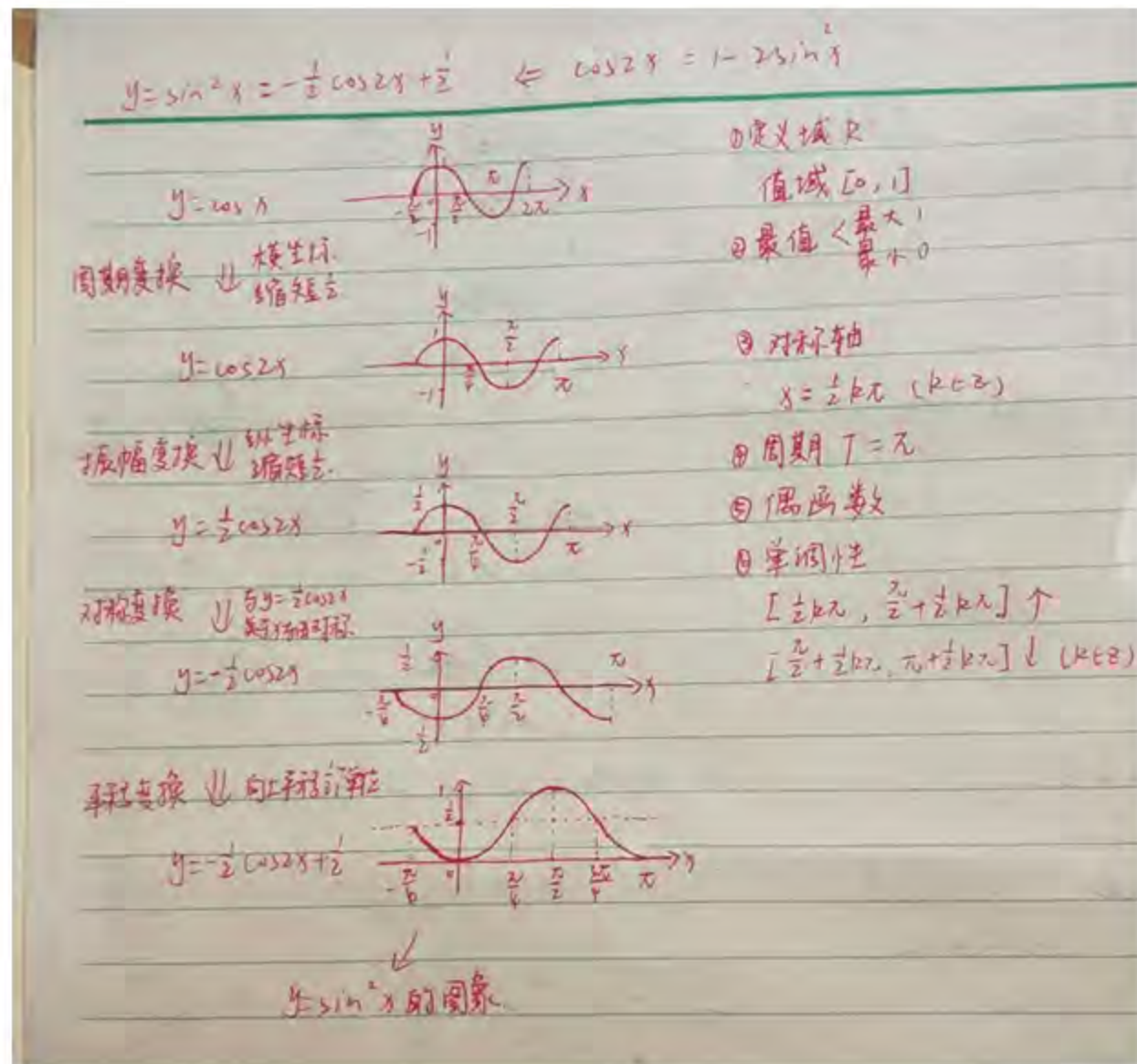


# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

$$\left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right),$$

作业：分析长周期波第一项的特性。  
并利用 matlab 或者 python 画图模拟



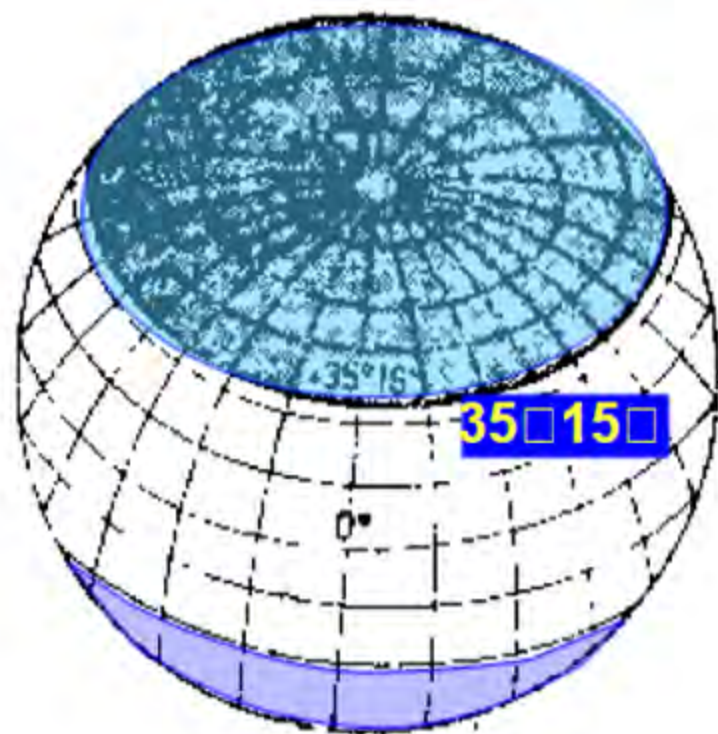
# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (1)长周期潮

显然，长周期潮在空间上的分布特征与纬度有关， $\varphi = \pm 35^{\circ}16'$  的纬度线将球面分成3个带，即在赤道附近的这个带为正，在两极附近的带为负。

可见，第一项为起潮位的带函数。





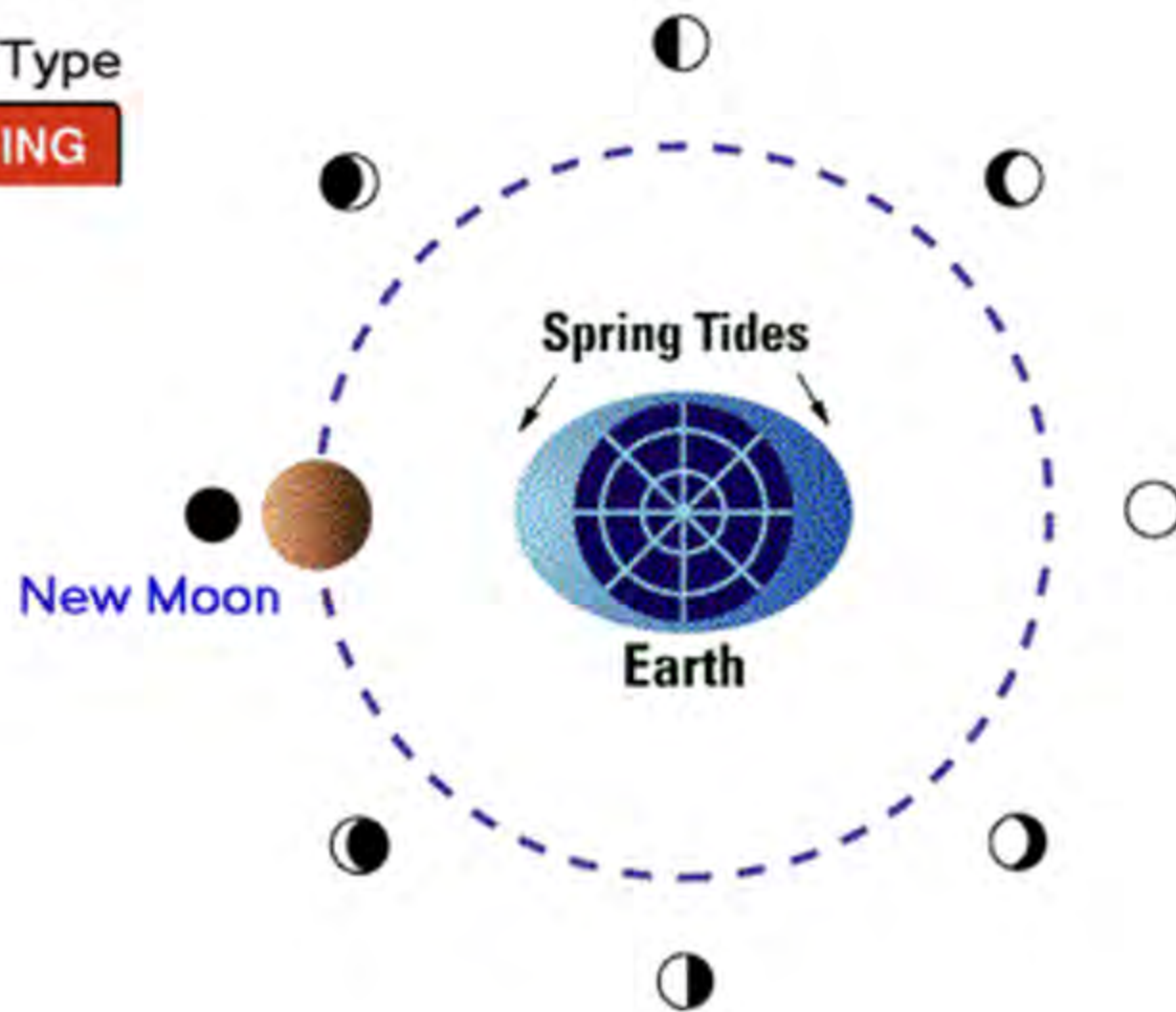


# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

Tide Type

**SPRING**



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2) 日潮

考虑第二项

$$\sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m$$

$$\sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s$$

$\varphi$ 为地面  $A$  点纬度  
 $\delta_m$ 为月球的赤纬  
 $H_m$ 为月球时角

由于地球自转，对于  $A$  点来说， $\cos H_m$  和  $\cos H_s$  是在  $\sin 2\varphi \sin 2\delta_m$  和  $\sin 2\varphi \sin 2\delta_s$  基础上，以日为周期的波。 $H_m$  和  $H_s$  的周期为一个太阳日（24 小时 50.47 分），显然， $\cos H_m$  和  $\cos H_s$  表现为以日为周期的日潮。



# 1.起潮力位及其调和展开

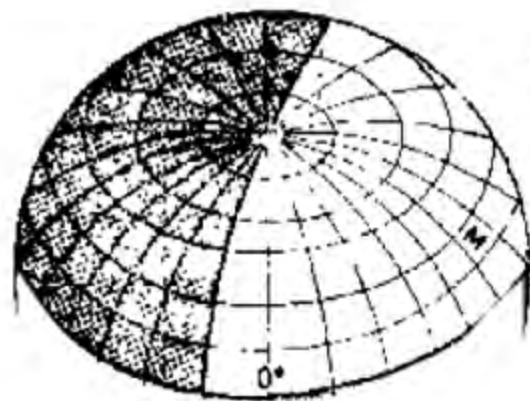
## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2) 日潮

现在讨论日潮在北半球( $\sin 2\varphi > 0$ )某一瞬间的空间分布。

$$\text{当 } H_m = \pm \frac{\pi}{2}, \quad H_s = \pm \frac{\pi}{2}$$

该项的起潮力位为零，时角等于 $\pm 90^\circ$ 的2条经线将球面分为2个扇形区域，若 $\delta > 0$ ，当 $\cos H > 0$ 时为涨潮区，反之（阴影区）为落潮区。为正。



# 1.起潮力位及其调和展开

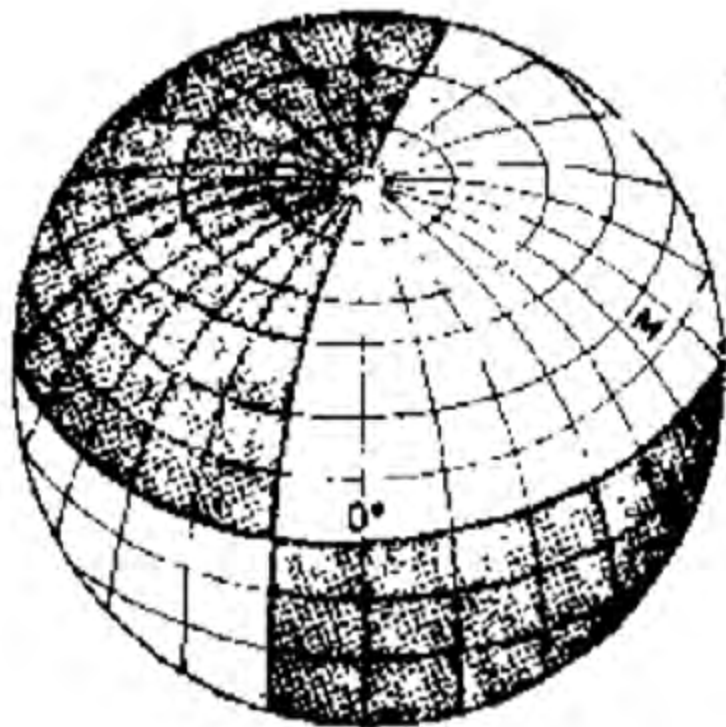
## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (2) 日潮

而当在南半球 ( $\sin 2\varphi < 0$ ) 时, 日潮的空间分布发生了变化。同样具有2个扇形区域, 但涨落区域与北半球相反。

起潮力位由在赤道 ( $\varphi = 0$ ) 与  $H_m = \pm 90^\circ$  处经线划分为4个正负相异的区域, 如同“田字”。

可见, 第二项为起潮力位的田扇函数。





# 1.起潮力位及其调和展开

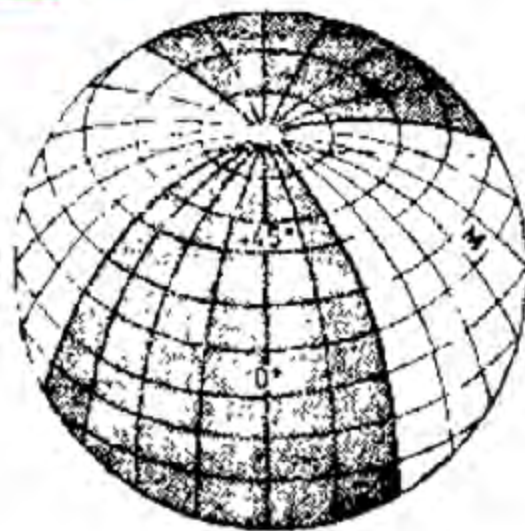
## ■ 1.3 起潮力位的展开

### (3)半日潮

考虑第三项

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m, \quad \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos 2H_s$$

由于地球自转，对于A点来说， $\cos 2H_m$ 和 $\cos 2H_s$ 是在 $\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m$ 和 $\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s$ 基础上的，以半日为周期的波，称为半日潮。



# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.3 起潮力位的展开

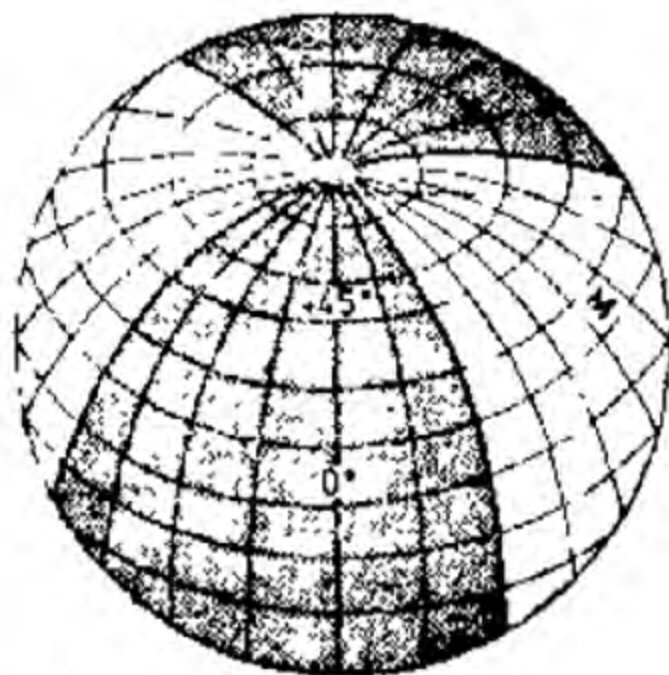
### (3)半日潮

现在讨论讨论日潮在某一瞬间的空间分布。

$$\text{当} \quad \left. \begin{matrix} H_m \\ H_s \end{matrix} \right\} = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \left. \begin{matrix} H_m \\ H_s \end{matrix} \right\} = \pm \frac{3\pi}{4}$$

该项的起潮力位为零，时角等于 $\pm 45^\circ$  或 $\pm 135^\circ$ ，4条经线将球面分为4个扇形区域，当 $\cos 2H > 0$  时为涨潮区，反之（阴影区）为落潮区，且南北半球符号相同。

可见，第三项为起潮位的扇函数。







# 1.起潮力位及其调和展开

## ■ 1.4 杜森展开（潮汐波）

由于日、地、月三者之间的时空关系十分复杂，拉普拉斯展开给出的三类潮汐波不能满足精细地描述固体潮特征的要求。

杜森利用6个天文参数，将起潮力位展成振幅为常数的谐波的总合。

在起潮力位的杜森展开式中，共有386个谐波，每个谐波振幅都不大于 $10^{-5}D$ 。



# 目 录

---

第一节 起潮力位及其调和展开

第二节 刚体地球的理论固体潮

## 2.刚体地球的理论固体潮

**平衡潮：**假设地球是一个刚体，在起潮力的作用下，地球所产生的一切潮汐现象都成为平衡潮。

$$T_{m2}(A) = D \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( 2 \cos^2 z_m - \frac{2}{3} \right)$$

$$T_{s2}(A) = D \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( 2 \cos^2 z_s - \frac{2}{3} \right)$$

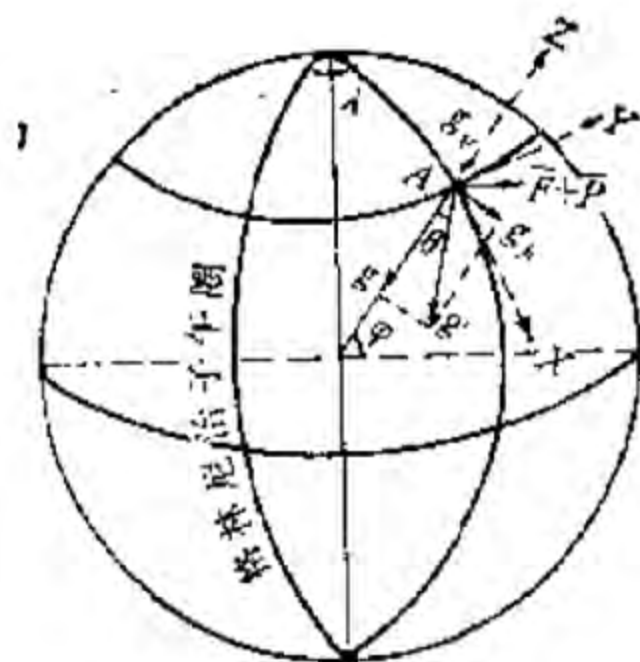


## ■ 2.1 刚体地球的重力固体潮

在地球是刚体的情况下，起潮力沿地球重力方向(即垂直于大地水准面的方向)的分量称为刚体地球的重力固体潮。

我们将起潮力位 $T(A)$ 对 $A$ 点处向径方向求导, 即

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T(A)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} &= - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ D \left( \frac{c}{r} \right)^3 \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \left( 2 \cos^2 z - \frac{2}{3} \right) \right]_{\rho=R} \\ &= - D \left( \frac{c}{r} \right)^3 \left( 2 \cos^2 z - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \bigg|_{\rho=R} \\ &= - \frac{4}{3} \frac{D}{R} \left( \frac{c}{r} \right)^3 (3 \cos^2 z - 1) \end{aligned}$$



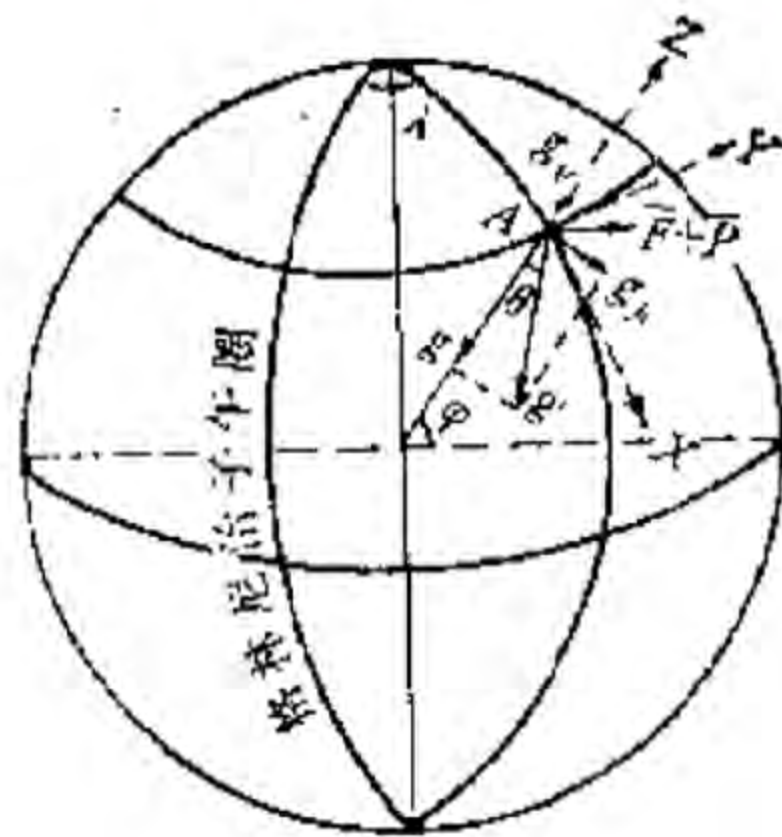
## ■ 2.1 刚体地球的重力固体潮

对于月球而言，有

$$\Delta g_{V_m} = -\frac{4}{3} \frac{D_m}{R} \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 (3 \cos^2 z_m - 1)$$

对于太阳而言，有

$$\Delta g_{V_s} = -\frac{4}{3} \frac{D_s}{R} \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 (3 \cos^2 z_s - 1)$$





## 2.刚体地球的理论固体潮

### ■ 2.1刚体地球的重力固体潮

若将上式按拉普拉斯展开, 可得

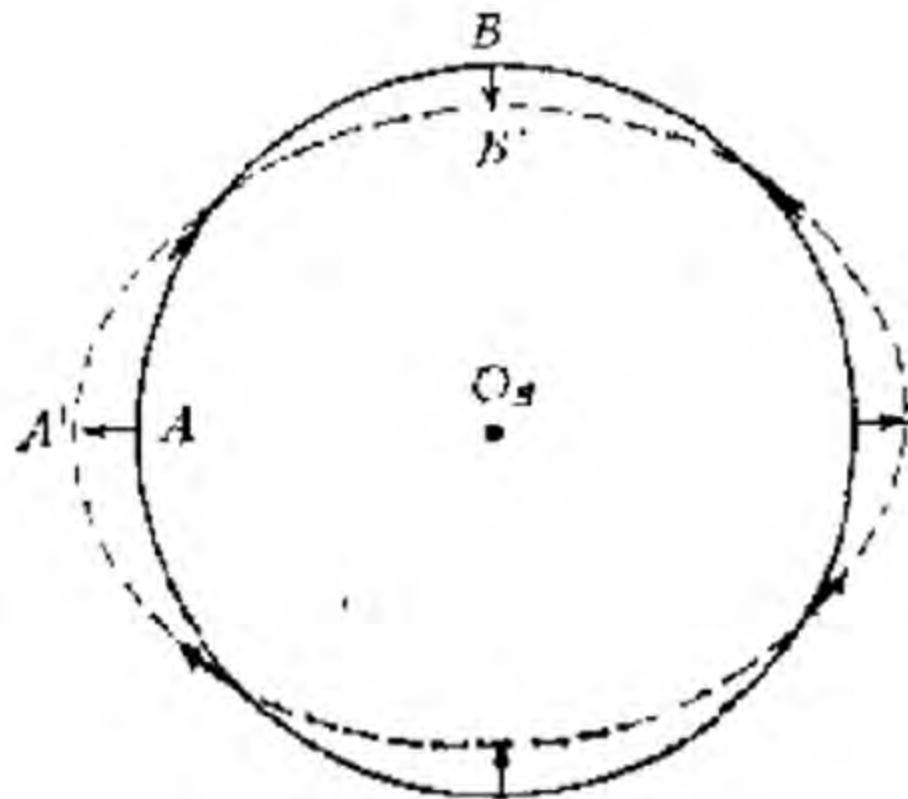
$$\Delta g_{V_m} = -\frac{2D_m}{R} \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \right]$$

$$\Delta g_{V_s} = -\frac{2D_s}{R} \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_s \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos 2H_s \right]$$

## 2.刚体地球的理论固体潮

### ■ 2.2 大地水准面潮汐

在地球是刚体的情况下，大地水准面就是覆盖在刚体地球表面的静止海水面。当有起潮力作用时，此大地水准面将因潮汐运动而发生形变。根据一般的原理，形变后的大地水准面形状如图中的虚线椭圆。此时原来大地水准面上的A点上升至A'点，B点下降至B'点。AA'和BB'称为大地水准面平衡潮高。这种现象称为刚体地球的大地水准面潮汐。





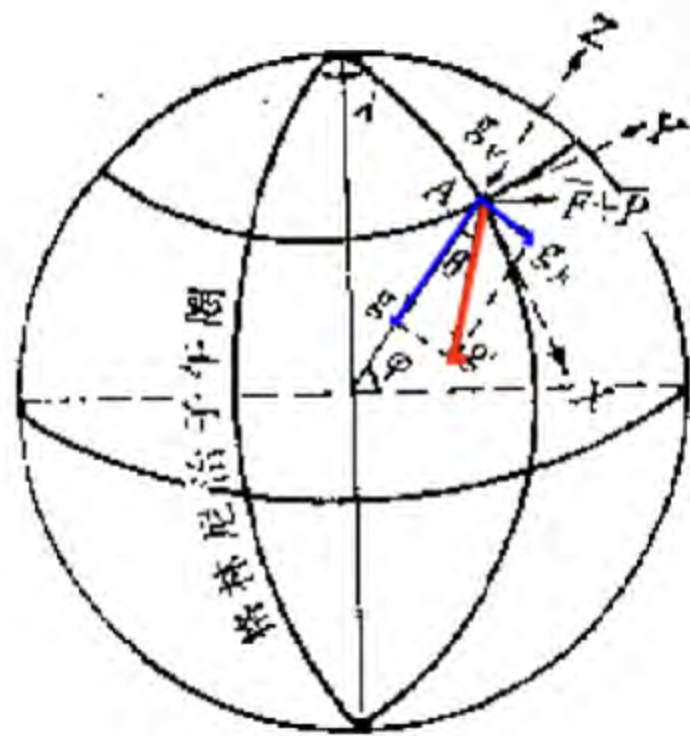


## 2.刚体地球的理论固体潮

### ■ 2.2 倾斜固体潮

对于刚体地球，沿大地水准面水平方向的起潮力分量 $\Delta g_h$ 将引起垂线方向的变化，这就是说，地球上任一点的垂线方向应是重力(减去起潮力垂直分量)与引潮力水平分量的合力方向。由于起潮力水平分量 $g_h$ 的作用使垂线方向 $g$ 偏离了 $\theta$ 角(一般很小)，因此可以写成： $\theta = \Delta g_h / g$

由于垂线偏离，过A点的水平面发生同样的倾斜，这就相当于地平面的倾斜，这种垂线方向的变化称为地倾斜固体潮。



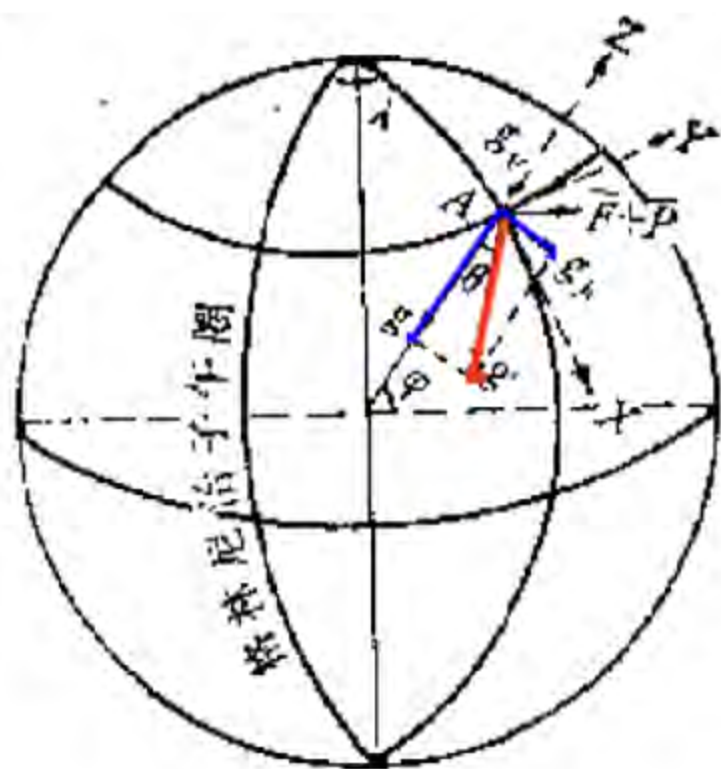
## ■ 2.2 倾斜固体潮

对（月球或太阳）起潮力位水平方向求导，并令  $\rho=R$ ，得

$$g_h = -\frac{\partial T}{\rho \partial z} = -\frac{4D}{R} \left( \frac{c}{r} \right)^3 \sin z \cos z$$

则有

$$\theta = \frac{g_h}{g} = \frac{2D}{gR} \left( \frac{c}{r} \right)^3 \sin 2z$$





## 2.刚体地球的理论固体潮

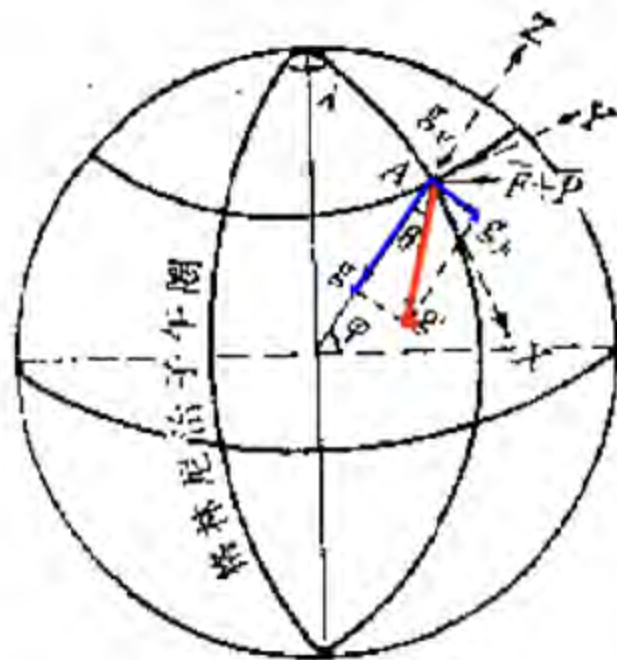
### ■ 2.2 倾斜固体潮

在实际应用和观测中，通常只能记录出地倾斜固体潮的南北和东西两个分量，即子午圈和卯酉圈分量，即

$$\xi_0 = \frac{g_x}{g}, \quad \eta_0 = \frac{g_y}{g}$$

$$g_x = -\frac{\partial T}{\rho \partial \varphi}$$

$$= -\frac{D}{R} \left( \frac{c}{r} \right)^3 \left[ 3 \sin^2 \varphi \cdot \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) + 2 \cos 2\varphi \sin 2\delta \cos H - \sin 2\varphi \cos^2 \delta \cos 2H \right]$$



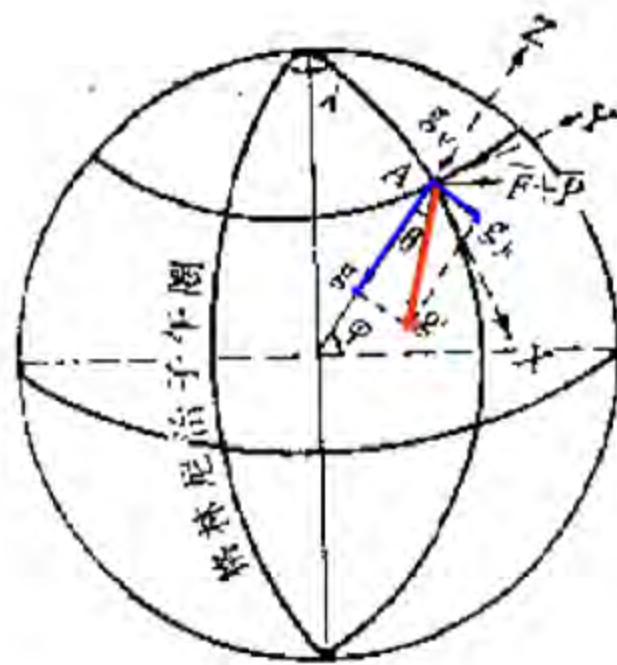


## 2.刚体地球的理论固体潮

### ■ 2.2 倾斜固体潮

设 $H=t_0+\lambda$ ,  $t_0$ 为格林威治子午圈的平月球时角  
 $\lambda$ 为观测点的经度, 则有起潮力位对卯酉圈方向求  
导为

$$\begin{aligned} g_y &= -\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \\ &= \frac{2D}{R} \left( \frac{c}{r} \right)^3 \left[ \sin \varphi \sin 2\delta \sin H + \cos \varphi \cos^2 \delta \sin 2H \right] \end{aligned}$$



# 目 录

第一节 起潮力位及其调和展开

第二节 刚体地球的理论固体潮

第三节 理论重力固体潮计算



### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算

将起潮力位 $T(A)$ 对A点处向径方向求导可得到重力表达式, 如

$$\left. \frac{\partial T(A)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -\frac{4}{3} \frac{D}{R} \left( \frac{c}{r} \right)^3 (3 \cos^2 z - 1)$$

通过对  $(c/r)$  及  $z$  的不同方式展开, 可得到地面A点处月球、太阳的起潮力与它们的在A点的观测值与时间(世界时)的关系, 从而可以计算出地面各点不同时间的理论重力固体潮。





### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——天顶距计算方法

对于太阳，可用前面导出的公式：

$$\Delta g_{Vs} = -\frac{4}{3} \frac{D_s}{R} \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 (3 \cos^2 z_s - 1)$$

对月球而言，为了提高精度，我们考虑在拉普拉斯展开中保留n=3项，并对起潮力位进行求导，可得

$$\Delta g_{Vm} = -\frac{4D_m}{3R} \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 (3 \cos^2 z_m - 1) - \frac{D_m}{c_m} \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^4 (5 \cos^3 z_m - 3 \cos z_m)$$

为了便于计算，将(c/r)用月球地平视差表示。

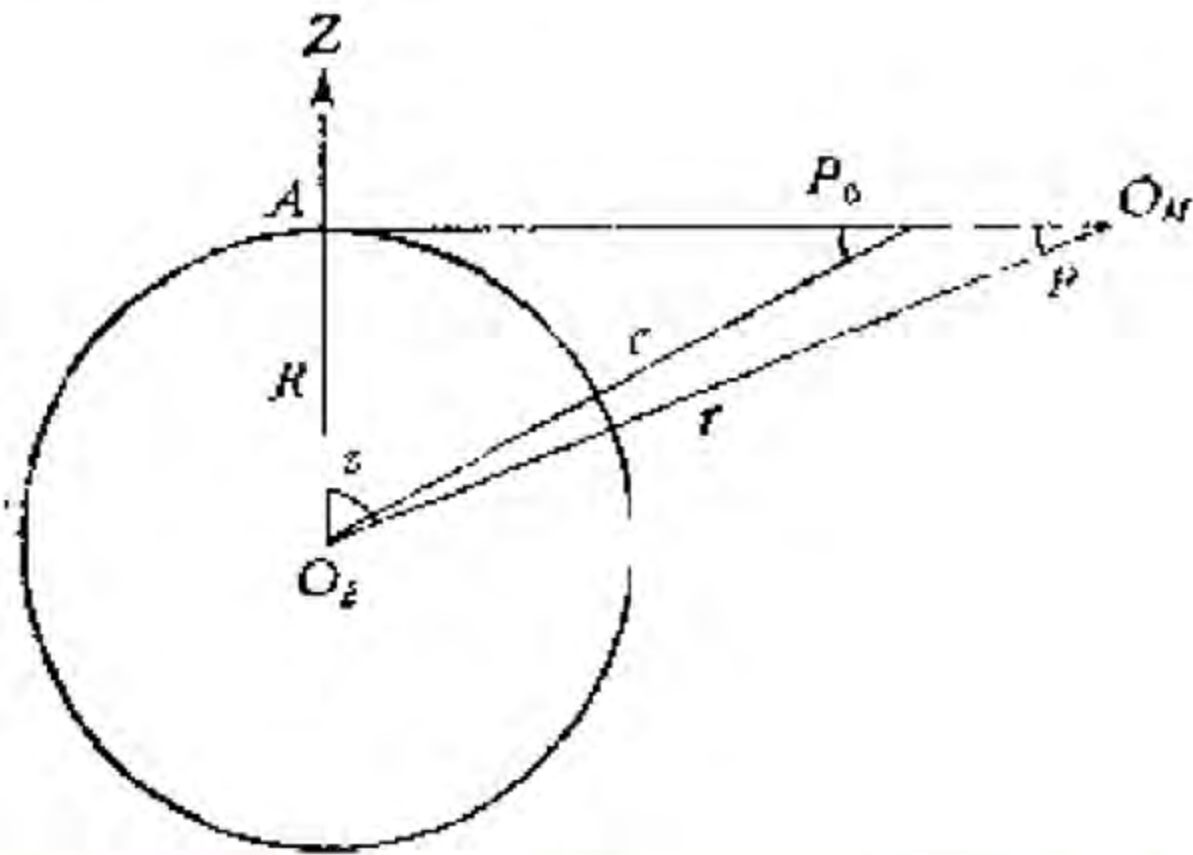
### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——天顶距计算方法

由图可知, 设从月球中心刚好可以看到地球表面上A点,  $P$ 被称为月球的瞬间地平视差(角),  $P_0$ 则为月球的平均地平视差。

显然有

$$\sin P_0 = \frac{R}{c}, \quad \sin P = \frac{R}{r}$$



### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——天顶距计算方法

由  $\frac{c}{r} = \frac{\sin P}{\sin P_0}$  可得

$$\Delta g_{Vm} = -\frac{4D_m}{R} \left( \frac{\sin P_m}{\sin P_{0m}} \right)^3 \left( \cos^2 z_m - \frac{1}{3} \right) - \frac{2D_m}{R} \left( \frac{\sin P_m}{\sin P_{0m}} \right)^4 \sin P_{0m} (5 \cos^3 z_m - 3 \cos z_m)$$

对于太阳，有

$$\Delta g_{Vs} = -\frac{4D_s}{R} \left( \frac{\sin P_s}{\sin P_{0s}} \right)^3 \left( \cos^2 z_s - \frac{1}{3} \right)$$



### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——天顶距计算方法

$$P_{0m} = 57'02''.52, \quad P_{0s} = 8''.79$$

而月球和太阳的瞬间地平视差可从天文年历中计算得到。  
按拉普拉斯展开，可知固体潮理论值是 $\varphi, \lambda, \delta$ 和 $H$ 的函数，  
这些参数可以通过月球轨道来确定，由此可计算出理论固体潮值。



## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——杜森法

根据杜森引入的6个天文参数：

$\tau$  ——以角度表示的平月球地方时；

$s$  ——月球的平黄经；

$h$  ——太阳的平黄经；

$p$  ——月球近地点的平黄经；

$N\Box$  ——  $-N$ ,  $N$ 月球升交点的平黄经；

$p_s$  ——地球近日点的平黄经。

这些参数都可表示为世界时 $t$ 的函数。

月球真黄经、纬度 $(\lambda_m, \beta_m)$ 和太阳的真黄经、纬度 $(\lambda_s, \beta_s)$ 都表示为上述参数的线性组合的幅角（见《重力与固体潮教程》p233, 11.40式）。



## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.1 刚体地球理论固体潮计算——杜森法

为了计算潮汐波方便，杜森利用天文参数和根据观测精度需要，将起潮力位展开成 386 个简单的谐波（潮汐波），写为

$$T = \sum_{i=1}^{386} G_{0,1,2,3} H_i \cos \varphi_i (\sin \varphi_i)$$

在月球和太阳的起潮力位中， $G_{0,1,2,3}$  只与观测点的纬度有关，称为大地系数。而  $H_i$  只与月亮和太阳在天球上的位置、它们至地心的距离以及观测点的经度有关。



### 3.理论重力固体潮计算

#### ■ 3.2 潮汐波分类

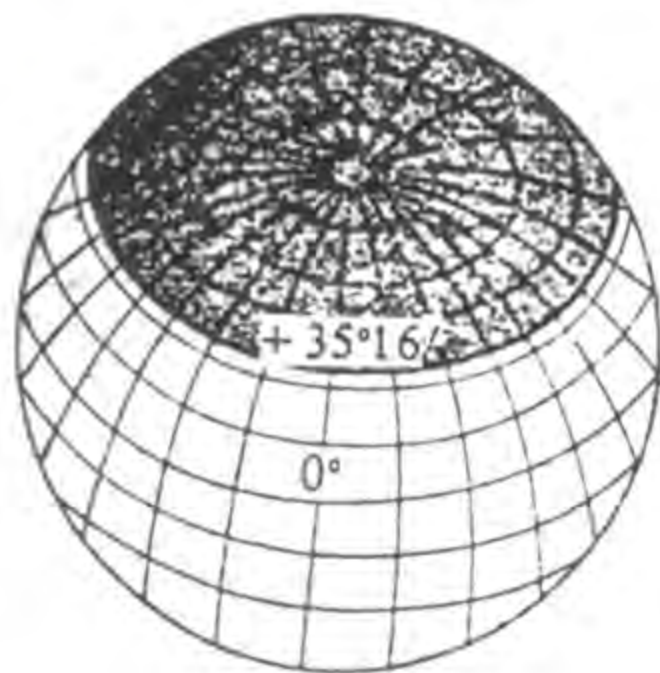
$$\Delta g_{Vm} = -\frac{2D_m}{R} \left( \frac{c_m}{r_m} \right)^3 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \right]$$

$$\Delta g_{Vs} = -\frac{2D_s}{R} \left( \frac{c_s}{r_s} \right)^3 \left[ 3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta_s \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos 2H_s \right]$$

## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.2 潮汐波分类

潮汐波按周期可分为 **长周期波**，（全）日波，半日波和三分之一日波。



$$1 - 3 \sin^2 \varphi \Rightarrow \begin{cases} +, & \text{equator} \\ 0, & \varphi = \pm 35^\circ 15' \\ -, & \text{pole} \end{cases}$$

图 11.5.1  $\sin \varphi$  的二阶勒让德多项式决定的长周期潮起潮力位振幅在单位球面上的分布

（见《重力学与固体潮》）

## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.2 潮汐波分类

潮汐波按周期可分为 长周期波, (全) 日波, 半日波和三分之一日波。



$$\sin 2\varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \pm \pi / 4, \\ \varphi = \pm \pi / 2, \end{cases}$$

图 11.5.2 由  $\sin\varphi$  的二阶一次伴随勒让德多项式决定的日潮起潮力位振幅在单位球面上的分布

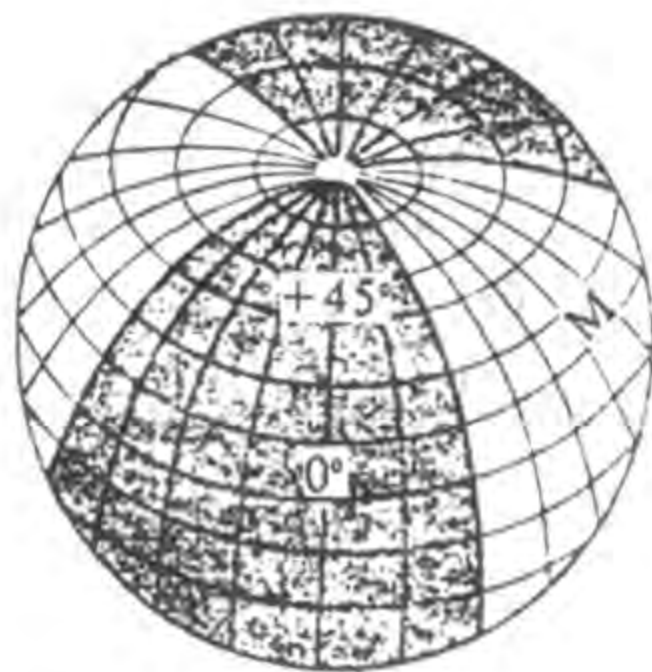
(见《重力学与固体潮》)



## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.2 潮汐波分类

潮汐波按周期可分为 长周期波, (全) 日波, 半日波和三分之一日波。



$$\cos^2 \varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ \varphi = \pm \pi / 2, \end{cases}$$

图 11.5.3  $\sin \varphi$  的二阶二次伴随勒让德多项式决定的半日潮起潮力位的振幅在单位球面上的分布 (见《重力学与固体潮》)



## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.2 潮汐波分类

在起潮力位的调和展开中，可以得到无穷多个潮汐波。若从振幅大于某个数值的潮汐波处截断，则起潮力位的调和展开由有限个潮汐波组成。

1883年达尔文在他的调和展开中，用字母对潮汐进行了命名，如将主要长周期波取名为 $M_m$ 、 $M_f$ 、 $S_a$ 、 $S_{sa}$ ，将主要日波取名为 $K_1$ 、 $O_1$ ，将主要半日波取名为 $M_2$ 、 $S_2$ 等。这种命名方法简单并且便于记忆，但潮汐波很多，字母有限，不可能用字母命名每个潮汐波。

杜森1922年在他的展开中只保留了振幅大于 $0.00010D$ 的潮汐波，每个潮汐波的振幅计算至小数点后五位，共得386个潮汐波，其中长周期波99个，日波158个，半日波115个，三分之一波14个。杜森用他提出的幅角数构成的编码对潮汐波进行了自然分类，每个潮汐波有一个编码，每一个编码代表一个潮汐波。





## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.3 在线计算资源

#### SOLID EARTH TIDE

Dennis Milbert

Updated: 2018-jun-07

The program, *solid*, will ask for a date and location, and then writes solid earth tide (body tide) components into a text file.

**Note that the 2018 version of *solid* now references UTC time.**

Fine Print: If you are looking for wet tide (ocean tide) software, you do not want to be here. Information on wet tides for the USA can be found at NOAA's ["Center for Operational Oceanographic Products and Services"](#)

#### Contents

- [Operation](#)
- [Output File Format](#)
- [Source Code and Binary Executable](#)
- [Discussion](#)
- [Leap Seconds and Accuracy](#)
- [Permanent Earth Tide](#)
- [Shortcomings](#)
- [Acknowledgements](#)
- [To Contact Me](#)
- [Back To Home](#)

[Solid Earth Tide \(geodesyworld.github.io\)](https://geodesyworld.github.io)





## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.3 在线计算资源

重力固体潮在线计算网址

<http://www.megsystems.ca/webapps/tidecorr/tidecorr.aspx>

Station Latitude	Date and Time	Number of Days
<input type="text" value="30.5"/>	<input type="text" value="2013-11-25T05:41:15"/>	<input type="text" value="10"/>
Station Longitude	UTC Offset	<input type="button" value="Generate Table"/> <input type="button" value="Clear Table"/>
<input type="text" value="114.3"/>	<input type="text" value="+8"/>	

Table of Tide Corrections

Run Date: Monday, November 25, 2013 5:43 AM

Start Date: Monday, November 25, 2013 5:41 AM

Stop Date: Thursday, December 05, 2013 5:41 AM

Station Latitude: 30.5

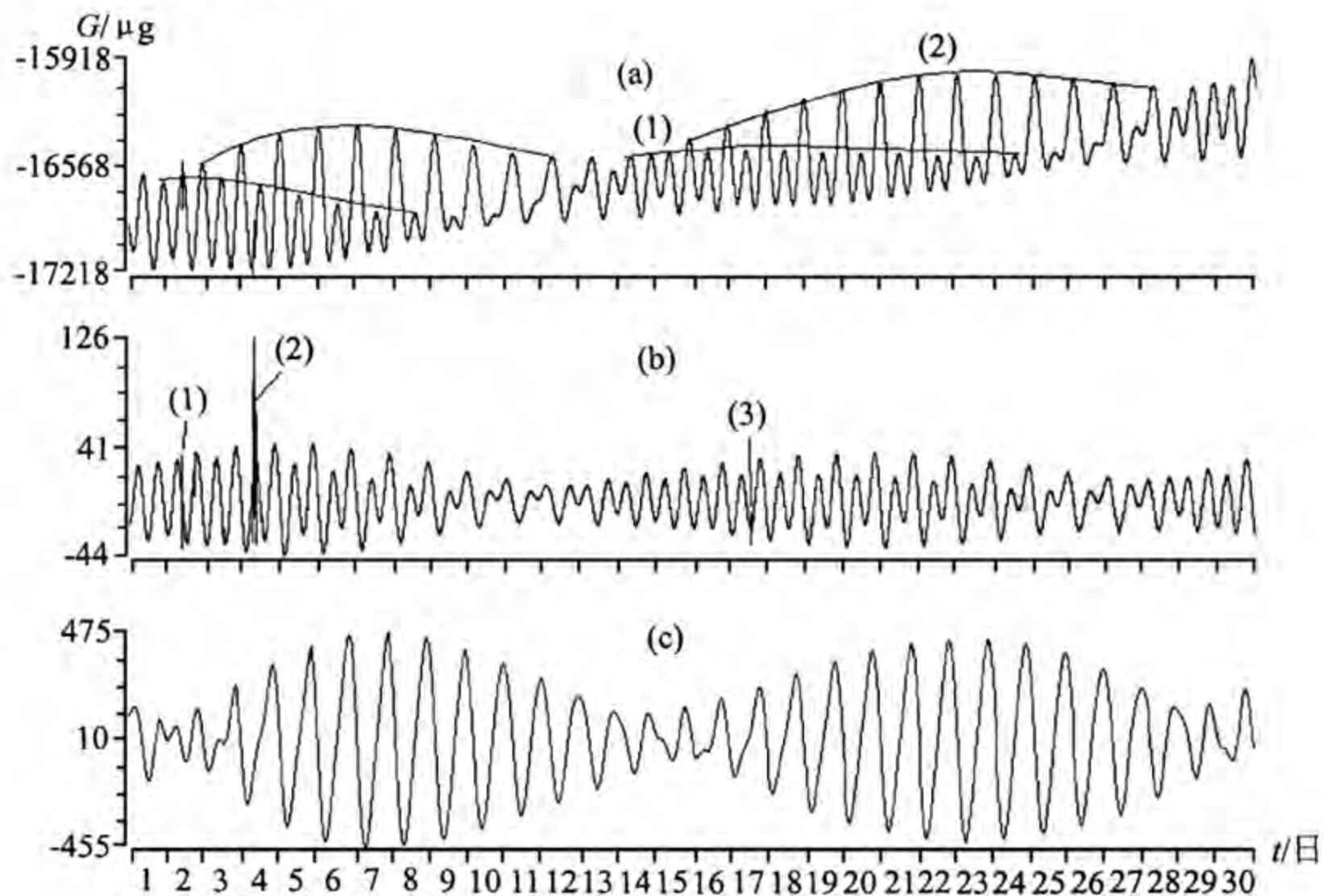
Station Longitude: 114.3

GMT Offset (hours): 8

Date	Time	JulianSec	Tide(mGal)
2013-11-25T05:41:15		63520954875	0.068
2013-11-25T05:51:15		63520955475	0.066
2013-11-25T06:01:15		63520956075	0.064

# 3.理论重力固体潮计算

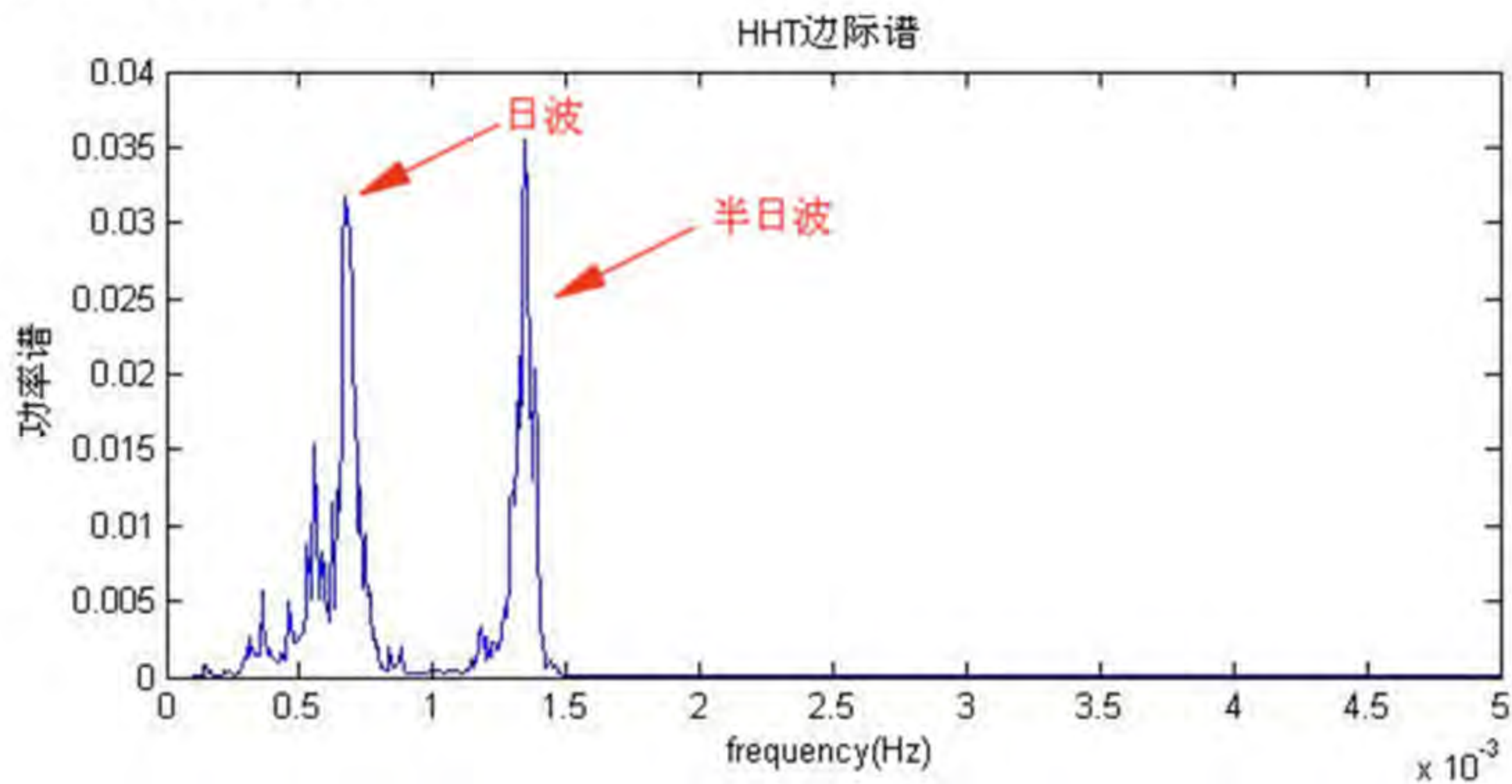
## ■ 3.3 在线计算资源



余山台重力2002年11月的观测值(a)与半日波(b)、日波-半月波(c)的分离

## 3.理论重力固体潮计算

### ■ 3.3 在线计算资源





## 小结

- ✓ 起潮力、地月系统的惯性离心力、刚体地球的固体潮
- ✓ 起潮力位的基本表达式
- ✓ 三种拉普拉斯潮的名称及特征
- ✓ 潮汐波分类





## 课后习题

- 三种拉普拉斯潮的特征
- 固体潮的分类
- 起潮力



# 课程结束

陈涛

