

重力与固体潮

第七讲 重力异常正演
陈涛

GeoGoku

地球物理学院
中国石油大学（北京）



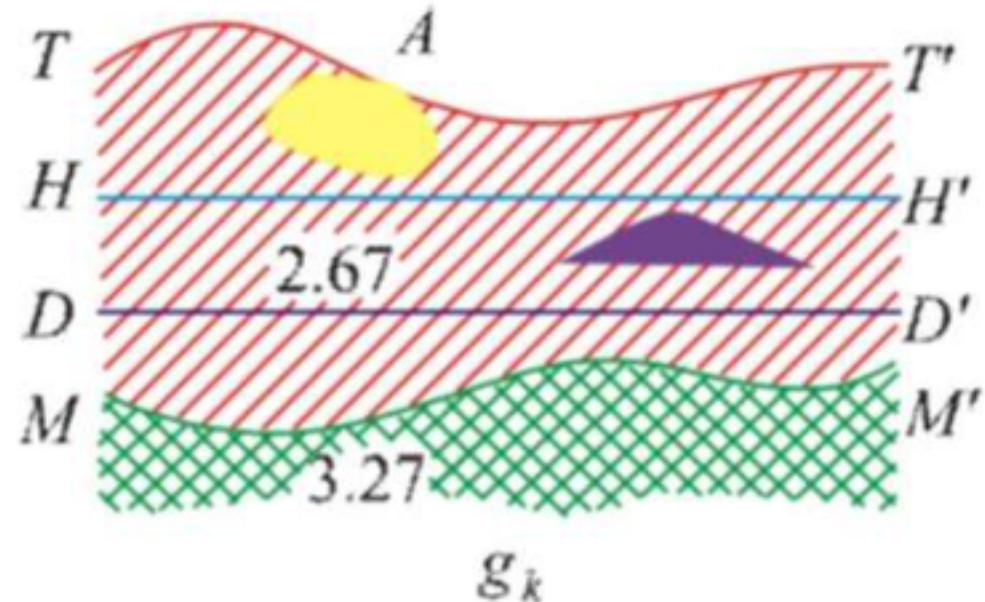
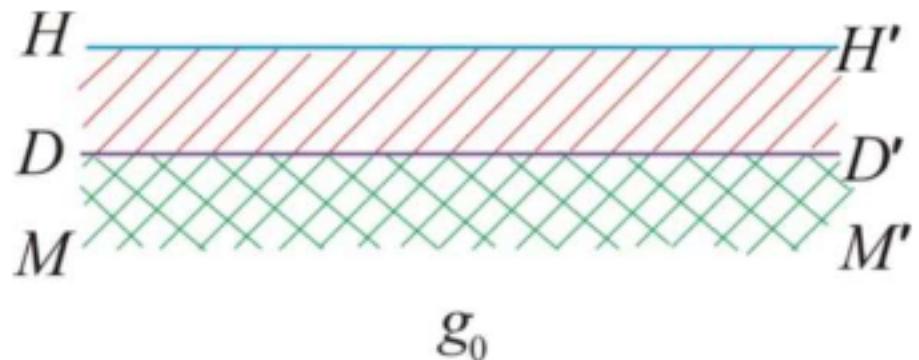
□ 布格重力异常的地质地球物理含义

□ 普拉特假说和艾里假说



课前测试

GeoGoku



TT' —地表面

NN' —通过测点的平面

HH' —大地水准面

DD' —正常地壳厚度平面

MM' —莫霍面



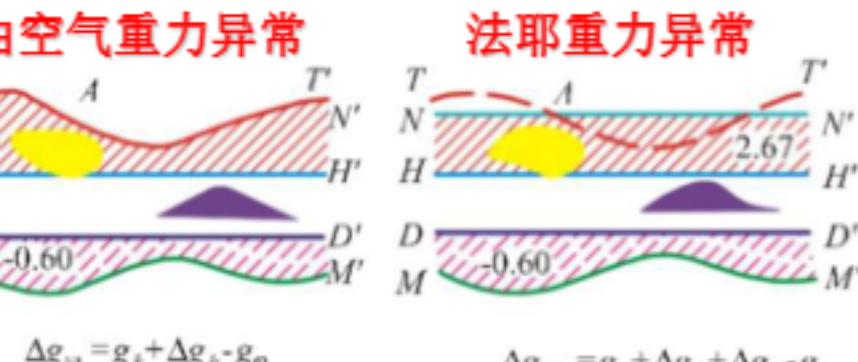
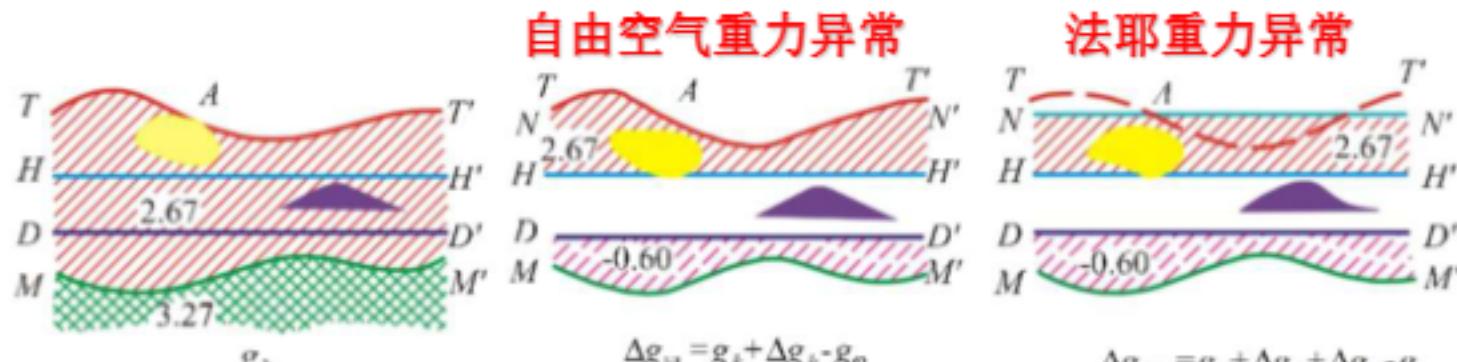
} 局部场源体剩余质量分布



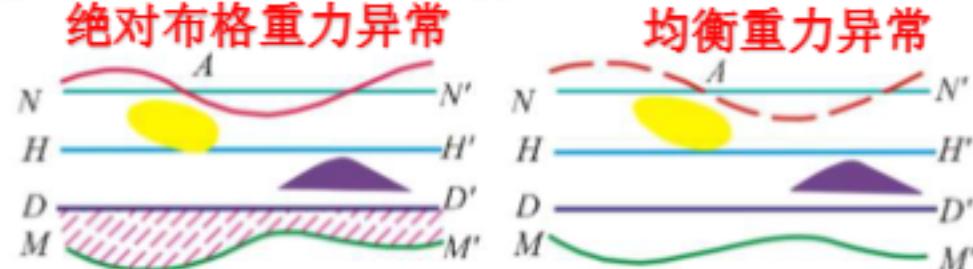
} 局部场源体质量分布

课前测试

GeoGoku



绝对布格重力异常 **均衡重力异常**



TT—地表面

NN'—通过测点的平面

HH'—大地水准面

DD'—正常地壳厚度平面

MM'—莫霍面



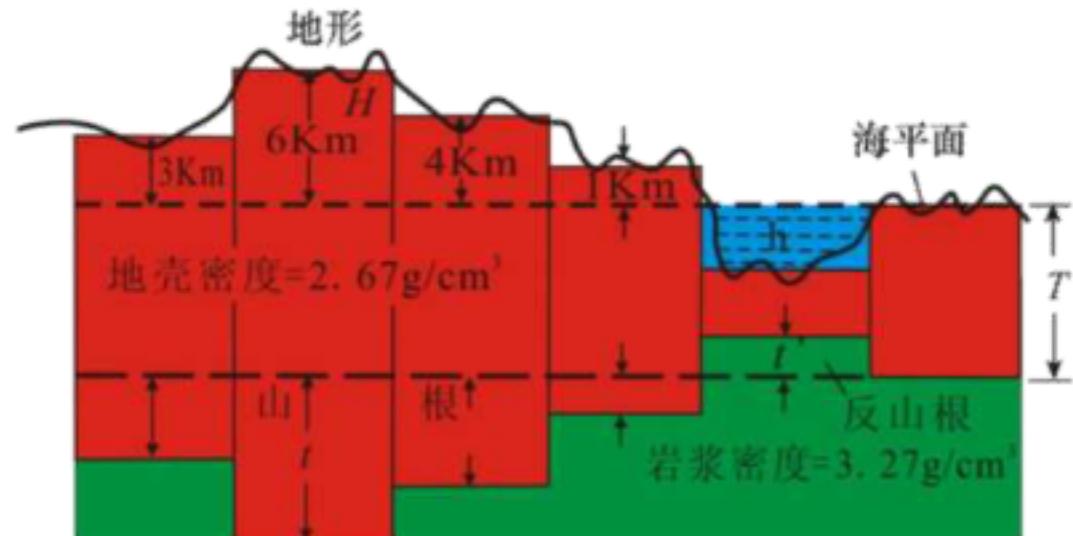
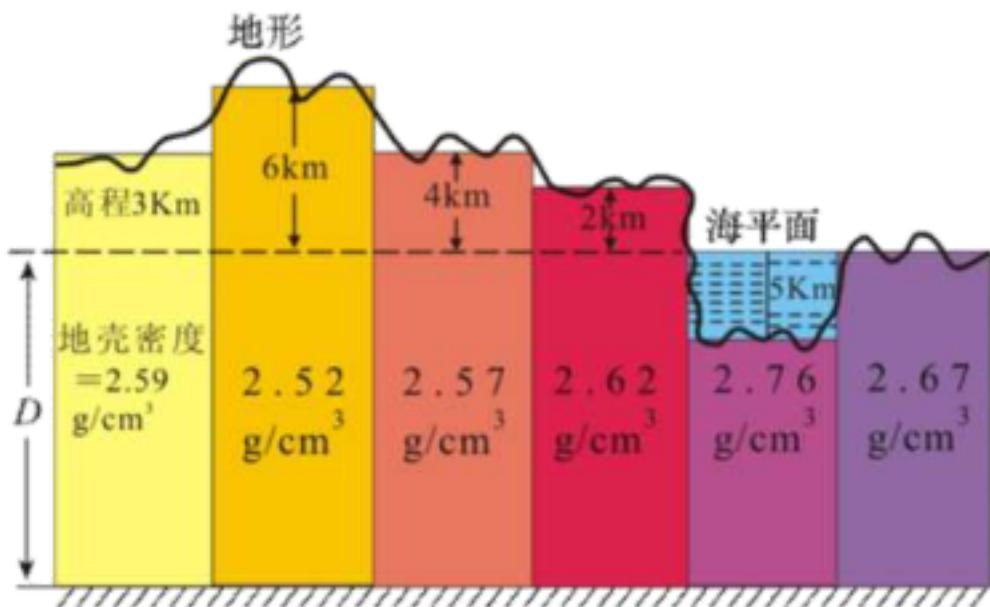
} 局部场源体剩余质量分布

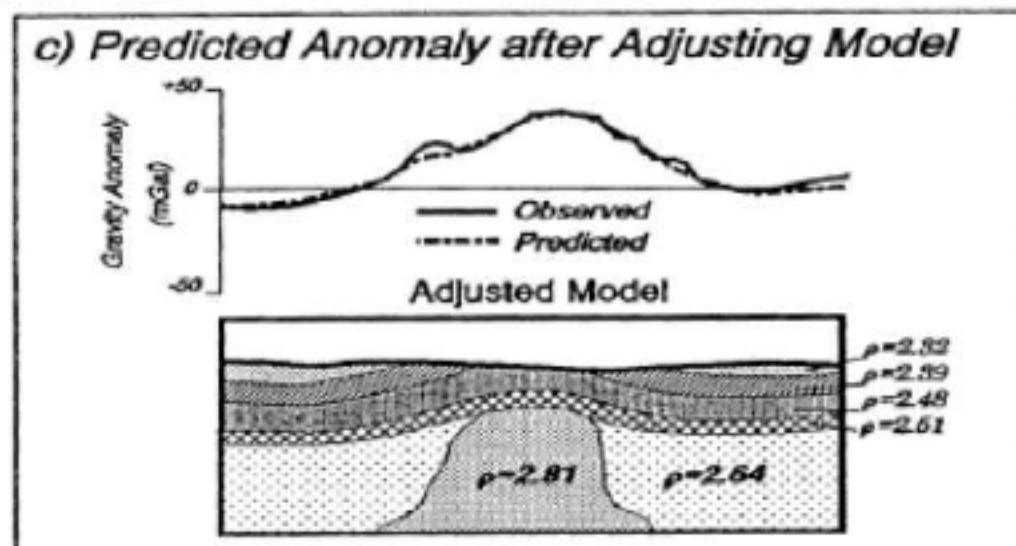
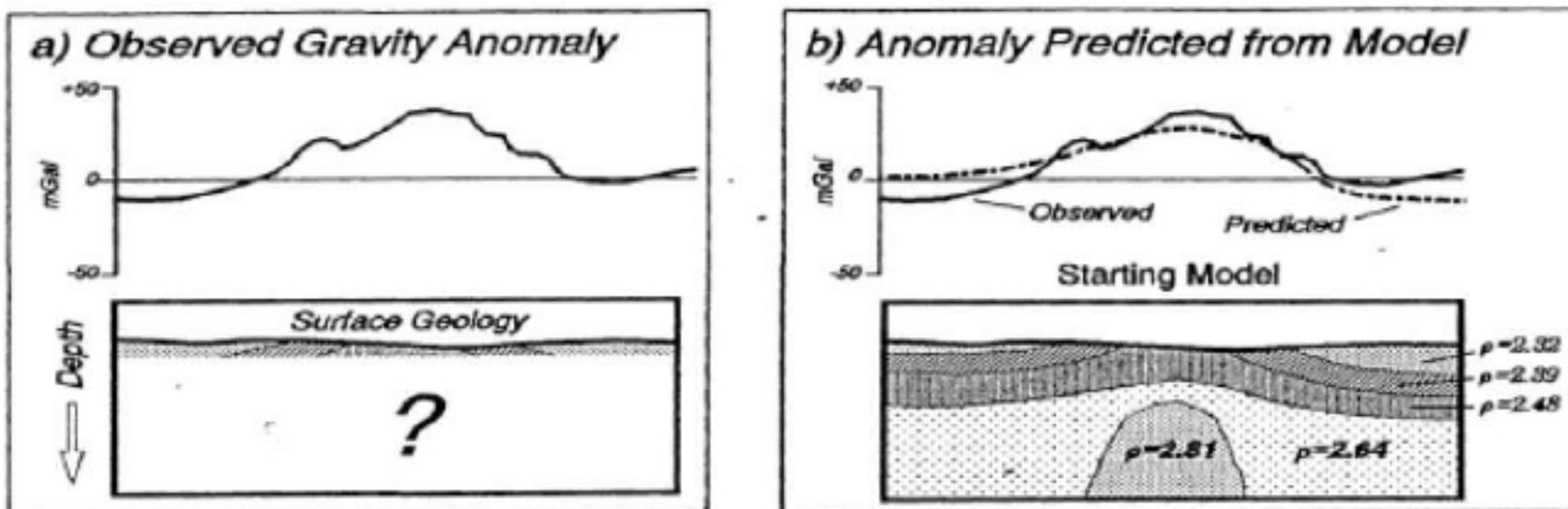


} 局部场源体质量分布

课前测试

GeoGoku



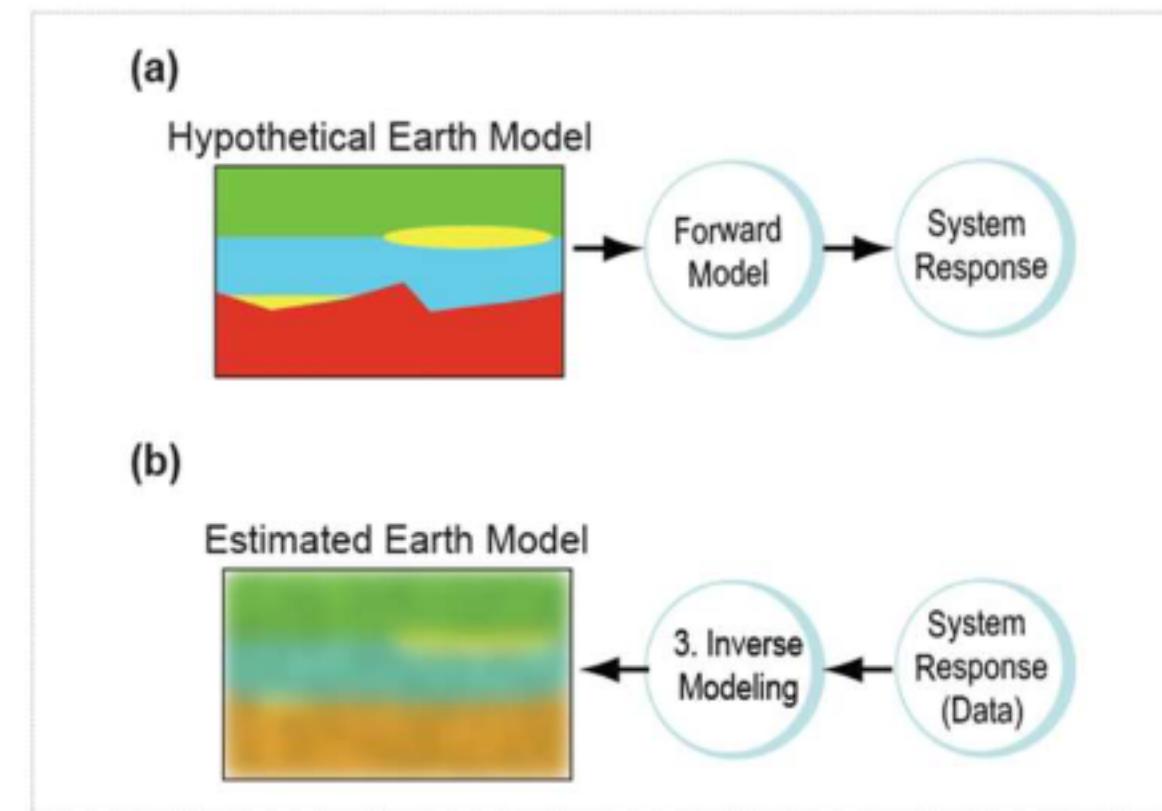


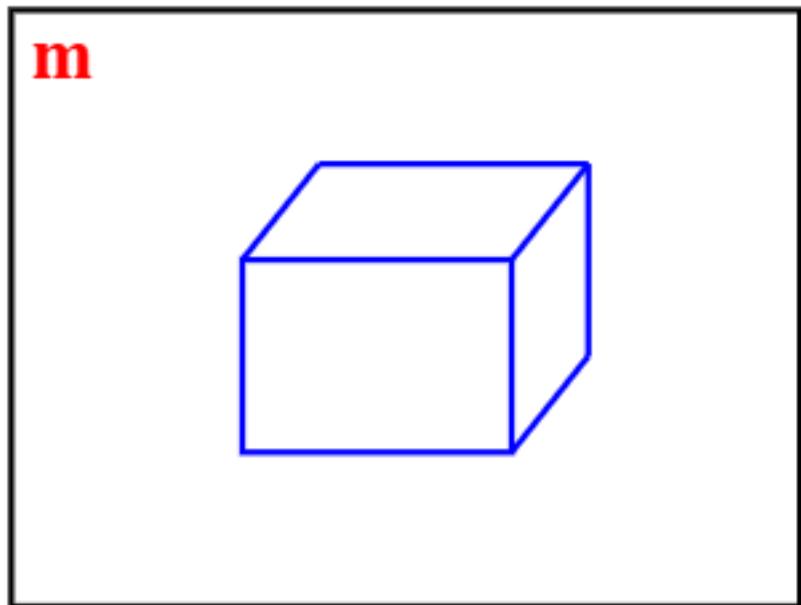
正演 (forward modeling)

已知地质体的形状、产状和剩余密度等，通过理论计算来求得异常的分布和规律。**是解决反问题的基础**

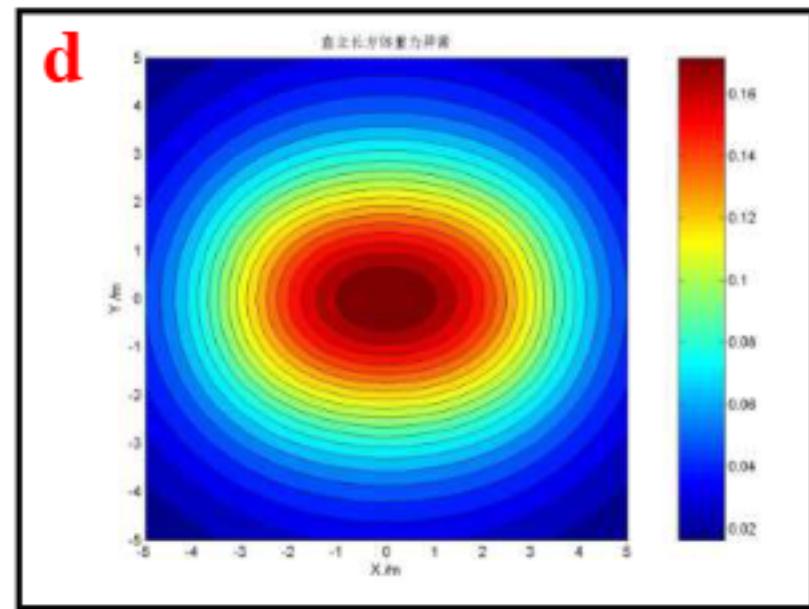
反演 (Inversion)

已知异常的分布特征和变化规律，求场源的赋存状态（产状、形状和剩余密度等）。**是勘探解决的目的**





正演
→



Model

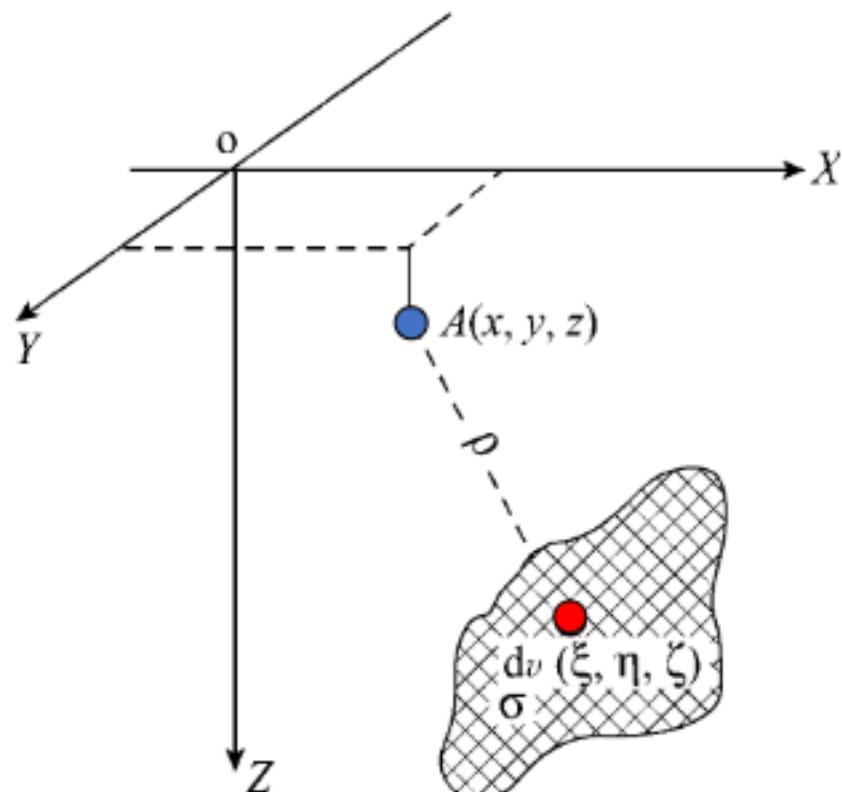
Synthetic data

第一节 基本公式

1. 基本公式

GeoGoku

求解偏微分方程获取任意密度体的重力异常



体积密度为 $\sigma(x, y, z)$ 的三维质量分布，在空间产生的重力场满足下方程：

$$\nabla \bullet g(x, y, z) = -4\pi G\sigma(x, y, z)$$

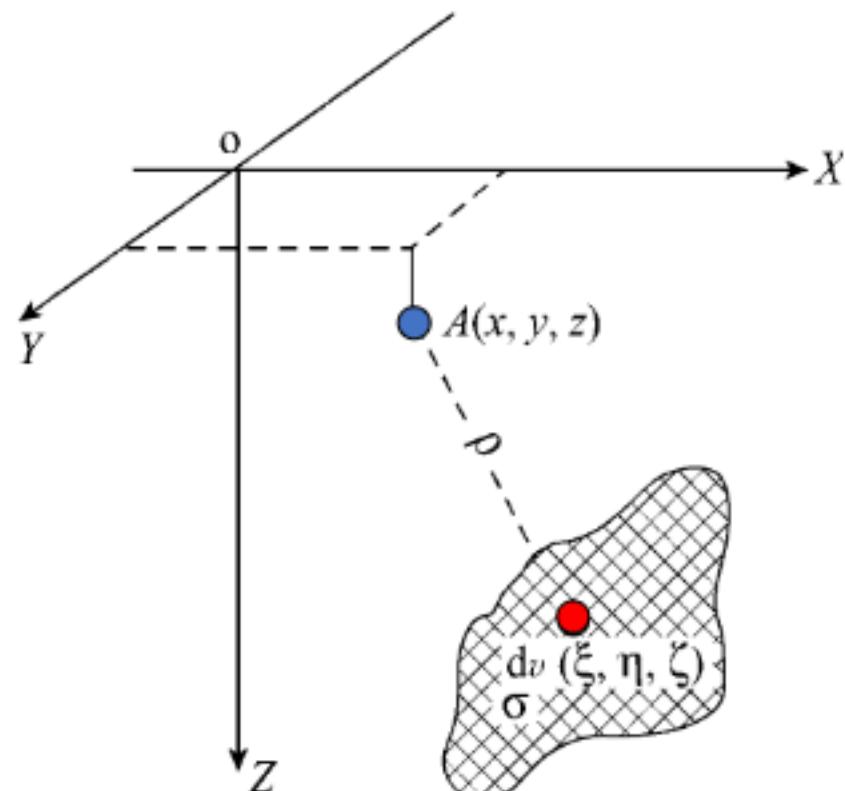
$$\nabla \times g(x, y, z) = 0$$

$$g(\mathbf{r}') = A^g(\sigma) = G\nabla' \iiint_V \sigma(\mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$
$$= G\nabla' \iiint_V \sigma(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV$$

1. 基本公式

GeoGoku

求解偏微分方程获取任意密度体的重力异常



体积密度为 $\sigma(x, y, z)$ 的三维质量分布，在空间产生的重力场满足如下方程：

$$\nabla \bullet g(x, y, z) = -4\pi G\sigma(x, y, z)$$

$$\nabla \times g(x, y, z) = 0$$

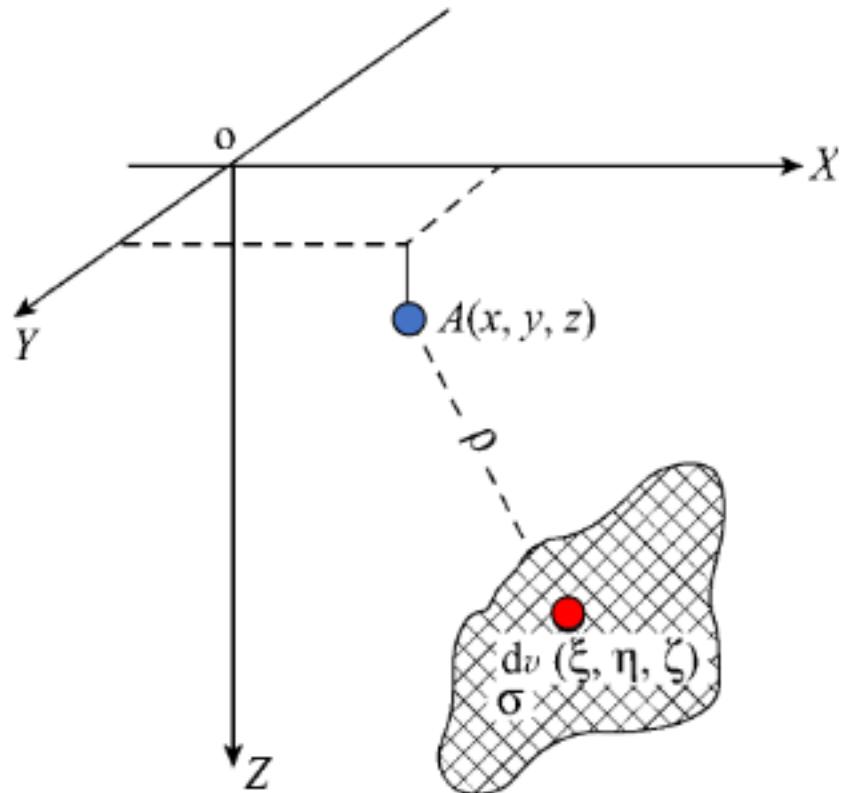
通常，实际重力勘探工作中测量的是重力的垂直分量 g_z

$$g_z(\mathbf{r}') = G \nabla' \iiint_V \sigma(\mathbf{r}) \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv$$

1. 基本公式

GeoGoku

用引力位沿重力方向的导数求重力异常



引力位

$$V(x, y, z) = G \iiint_V \frac{\sigma d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}}$$

重力异常

$$\Delta g = V_z = G \iiint_V \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

二度地质体（沿轴向无限延伸）重力异常

$$\Delta g(x, z) = 2G\sigma \iint_S \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

1. 基本公式

GeoGoku

重力异常水平梯度

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial x} = V_{xz} = 3G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z)(\xi - x)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial y} = V_{yz} = 3G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z)(\eta - y)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

重力异常垂向梯度

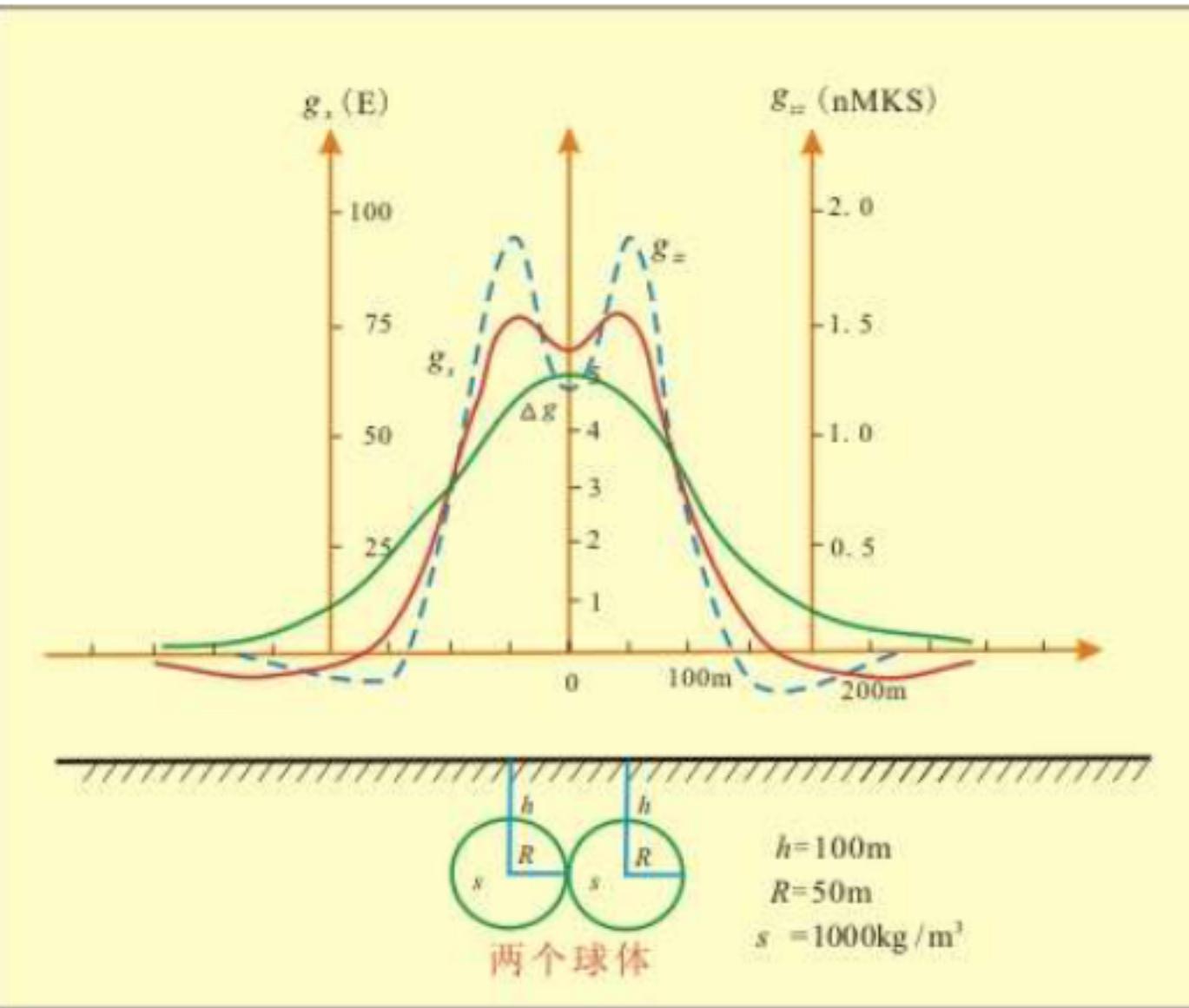
$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = V_{zz} = G\sigma \iiint_V \frac{\left[2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

重力异常垂向二阶导数

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = V_{zzz} = G\sigma \iiint_V \frac{(\zeta - z) \left[6(\zeta - z)^2 - 9(\xi - x)^2 - 9(\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{7/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

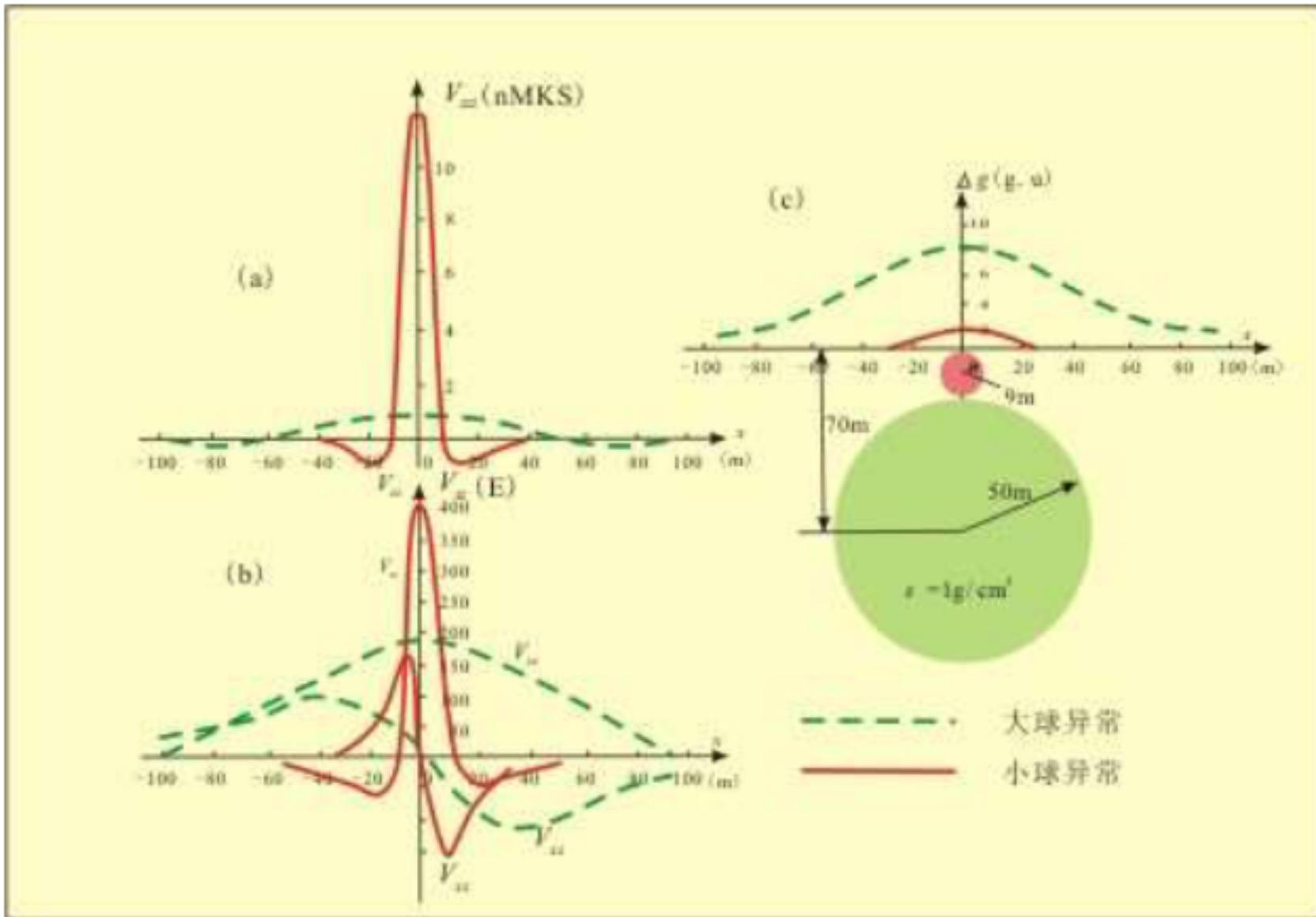
1. 基本公式

GeoGoku



1. 基本公式

GeoGoku





目 录

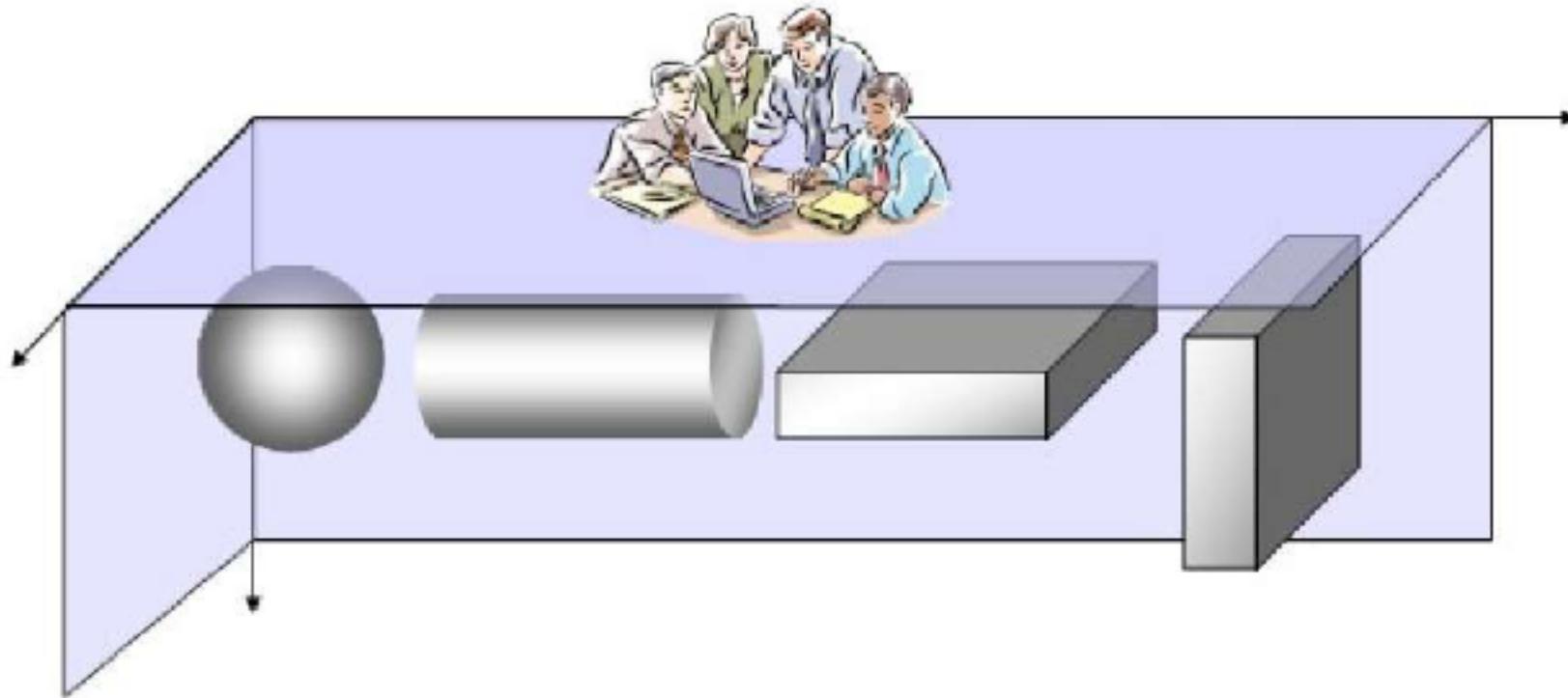
GeoGoku

第一节 基本公式

第二节 简单形体的正演

2.简单形体的正演

GeoGoku



规则形体：球体、水平圆柱体、垂直台阶、脉状体.....



2.简单形体的正演

GeoGoku

为了简化，假设地质形体**孤立存在，密度均匀，地面水平，**
所取剖面为中心剖面。

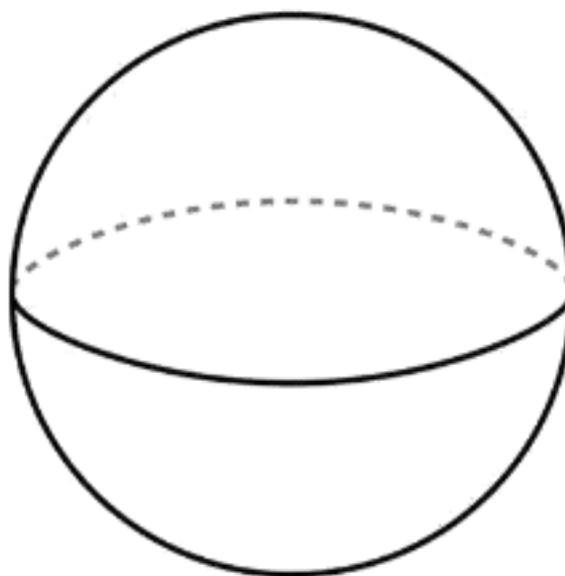
假设就是局限性，也就是待解决的难点问题

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于**等轴状的地质体**，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

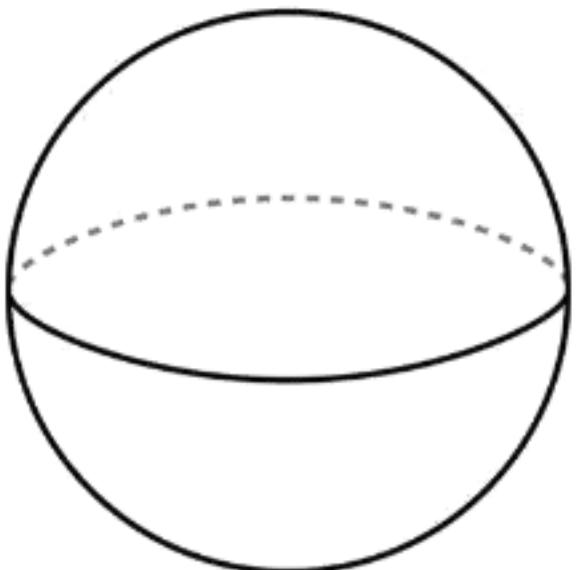


2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于**等轴状的地质体**，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。



$$\begin{aligned}\Delta g = V_z &= G \iiint_V \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} \\ &= G\sigma \iiint_V \frac{D d\xi d\eta d\zeta}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}} \\ &= \frac{GD}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}} \sigma \iiint_V d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{GDM}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

分析 Δg 的特征？

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

- 在 $x=0$ (即原点) 处，异常取得极大值

$$\Delta g_{\max} = \frac{GM}{D^2}$$

- 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时，异常趋近于零。

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{GM}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

- 当异常为极大值的 $1/n$ 时，对应的该点之横坐标以 $x_{1/n}$ 表示，则由关系式

$$\frac{GM}{nD^2} = \frac{GMD}{(x_{1/n}^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$x_{1/n} = \pm D \sqrt{n^{2/3} - 1}$$

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{GM}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$x_{1/n} = \pm D \sqrt{n^{2/3} - 1}$$

取 $n=2$ ，得 $x_{1/2} = 0.766D$ (x正半轴)
和 $x'_{1/2} = -0.766D$ (x负半轴)。

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

$$\Delta g_{\max} = \frac{GM}{D^2}$$

在 $y = 0$ 的剖面上

$$x_{1/n} = \pm D \sqrt{n^{2/3} - 1}$$

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

- ✓ D 不变， $M \nearrow m$ 倍，异常 $\nearrow m$ 倍；
- ✓ M 不变， $D \nearrow m$ 倍，异常极大值 $\searrow 1/m^2$ ， $x_{1/n}$ 值 $\nearrow m$ 倍。
- ✓ $D \nearrow$ ，异常迅速衰减，曲线明显变缓。

2. 简单形体的正演

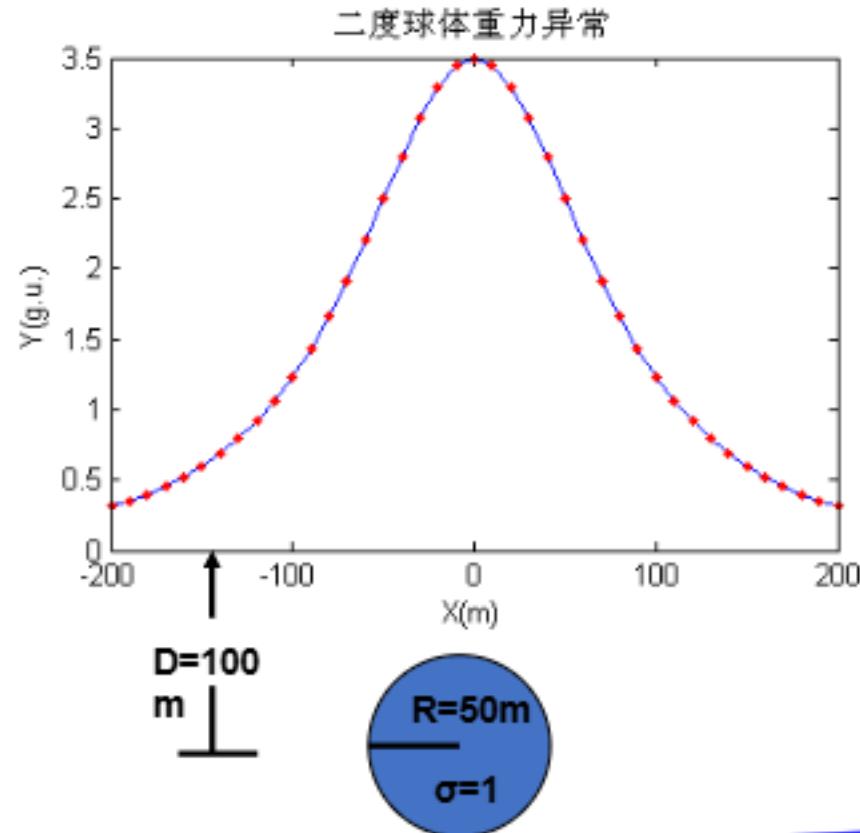
GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$V_z = \Delta g = \frac{GM}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$V_{xz} = -3GM \frac{Dx}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

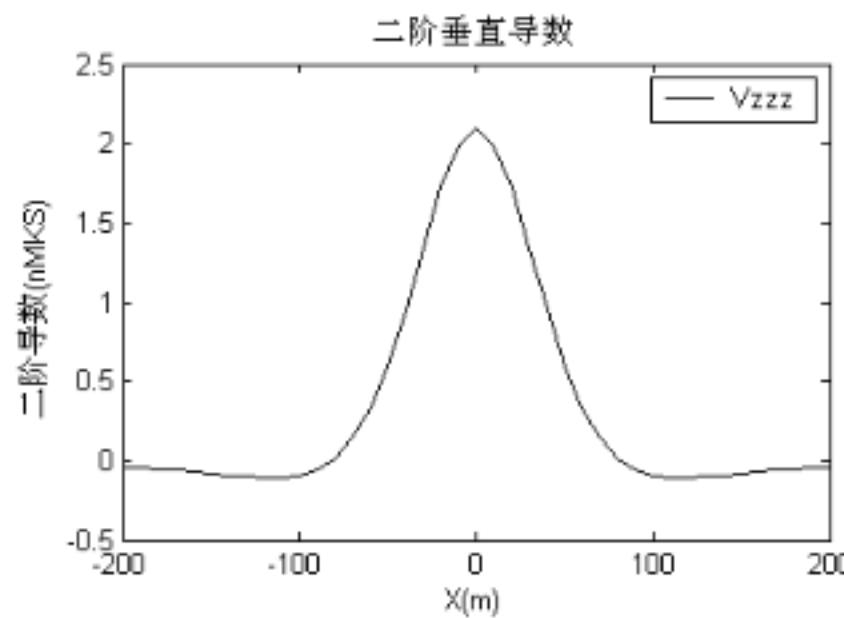
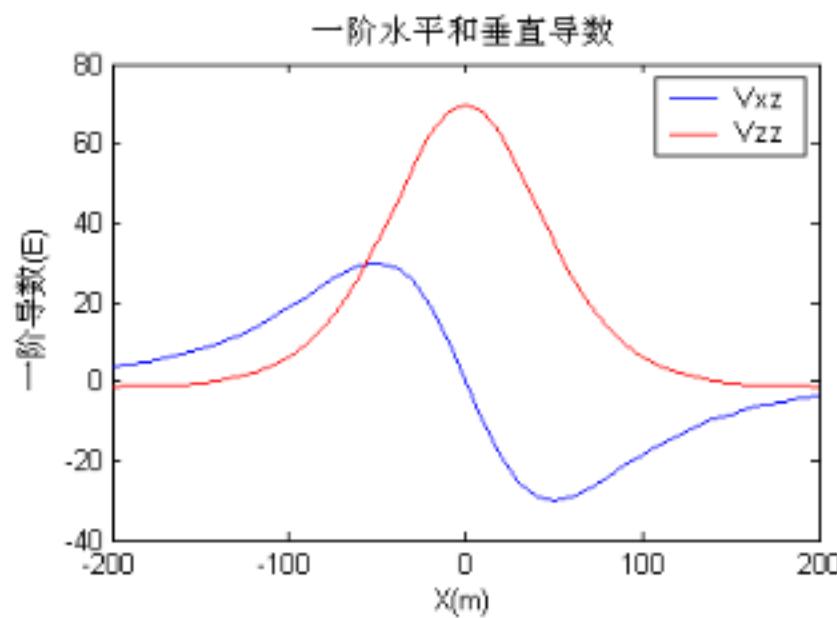
$$V_{zz} = GM \frac{2D^2 - x^2}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{zsz} = 3GM \frac{2D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^{7/2}}$$

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于等轴状的地质体，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。



2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于**等轴状的地质体**，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

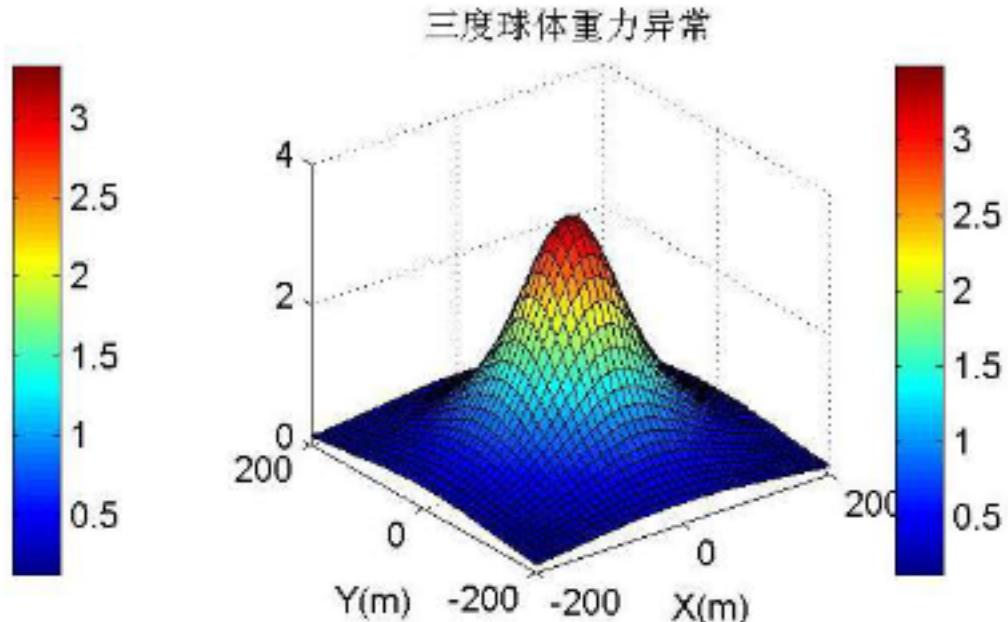
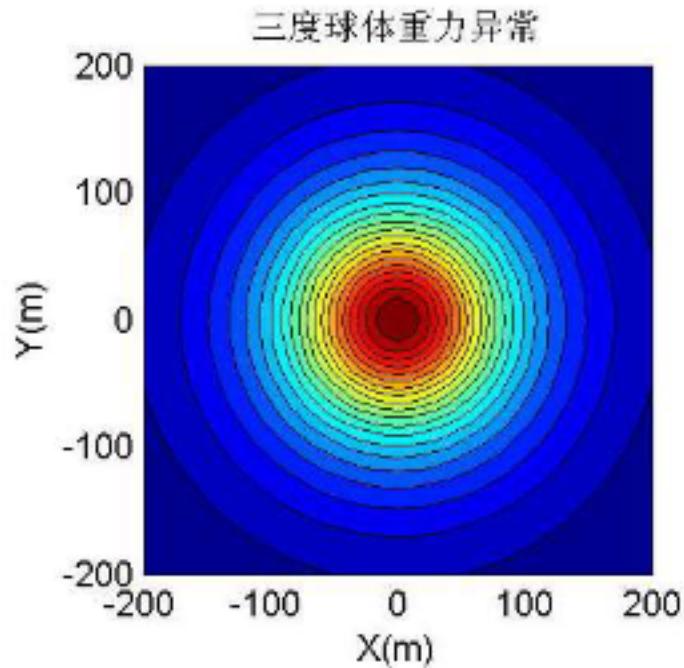
$$\Delta g = \frac{GM}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}}$$

分析 Δg 的特征?

2.简单形体的正演

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于**等轴状的地质体**，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

在实际工作中，一些近于**等轴状的地质体**，如矿巢、矿囊、岩株、穹窿构造等，都可以近似当作球体来计算它们的重力异常，特别当地质体的水平尺寸小于它的埋藏深度时，效果更好。

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + y^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$V_{xz} = -3GM \frac{Dx}{(x^2 + y^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{yz} = -3GM \frac{Dy}{(x^2 + y^2 + D^2)^{5/2}}$$

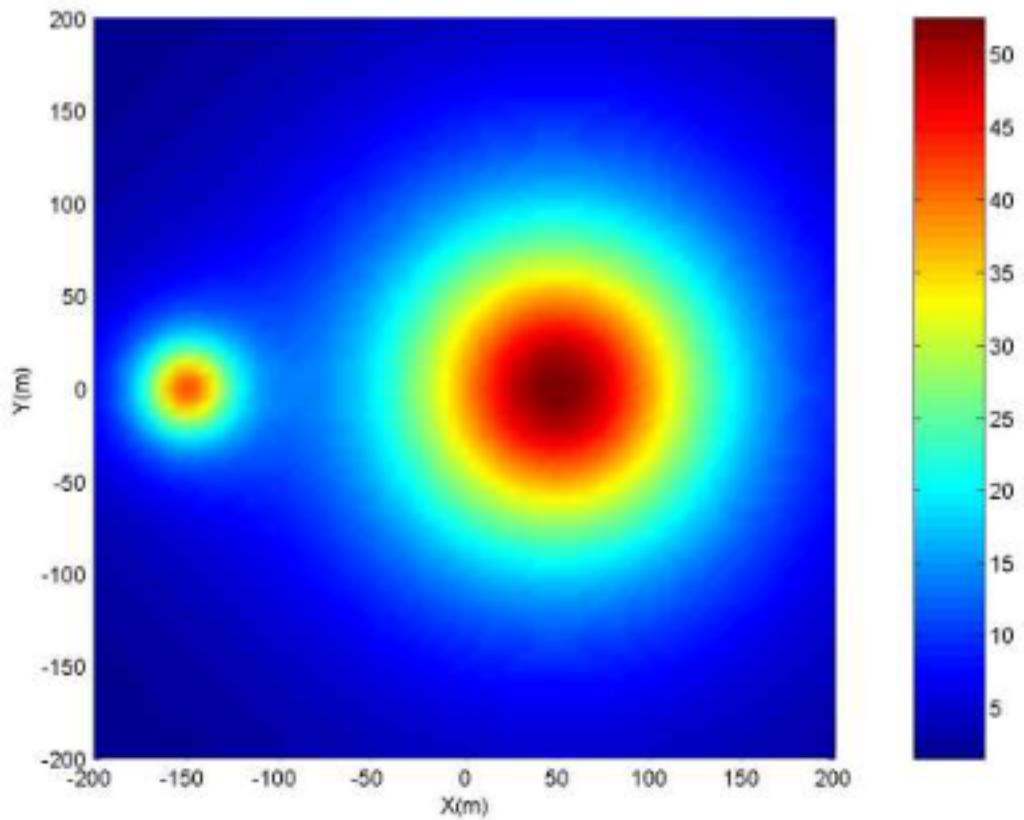
$$V_{zz} = GM \frac{2D^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{zzz} = 3GM \frac{2D^2 - 3x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + D^2)^{7/2}}$$

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

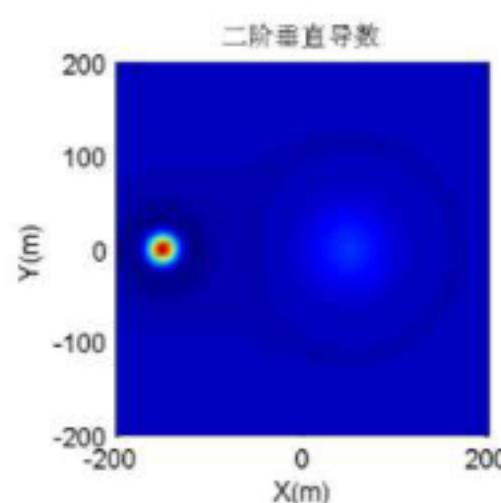
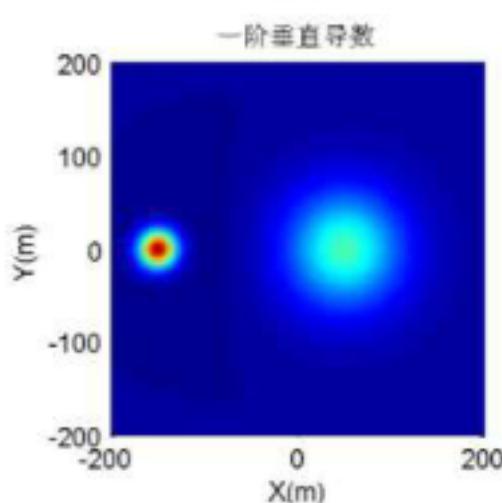
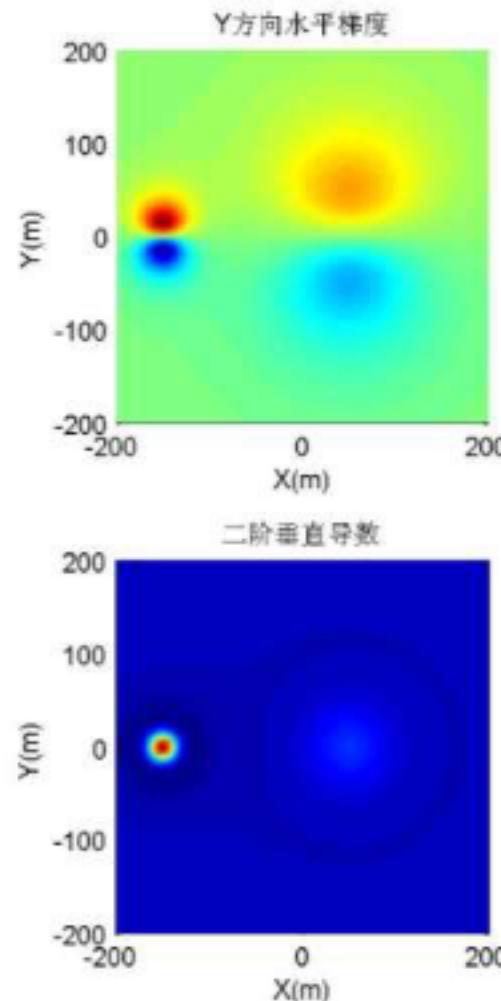
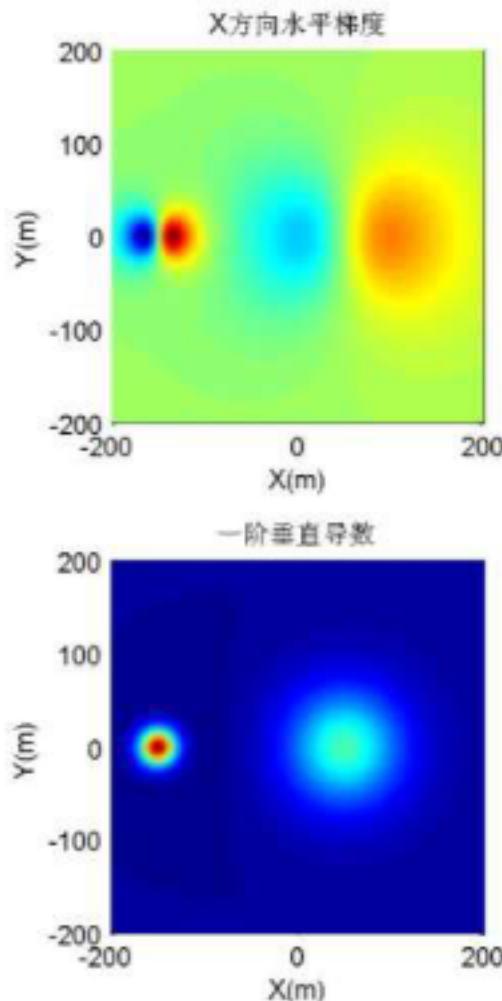


两个球体组合模型理论重力异常

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的球体(点质量)

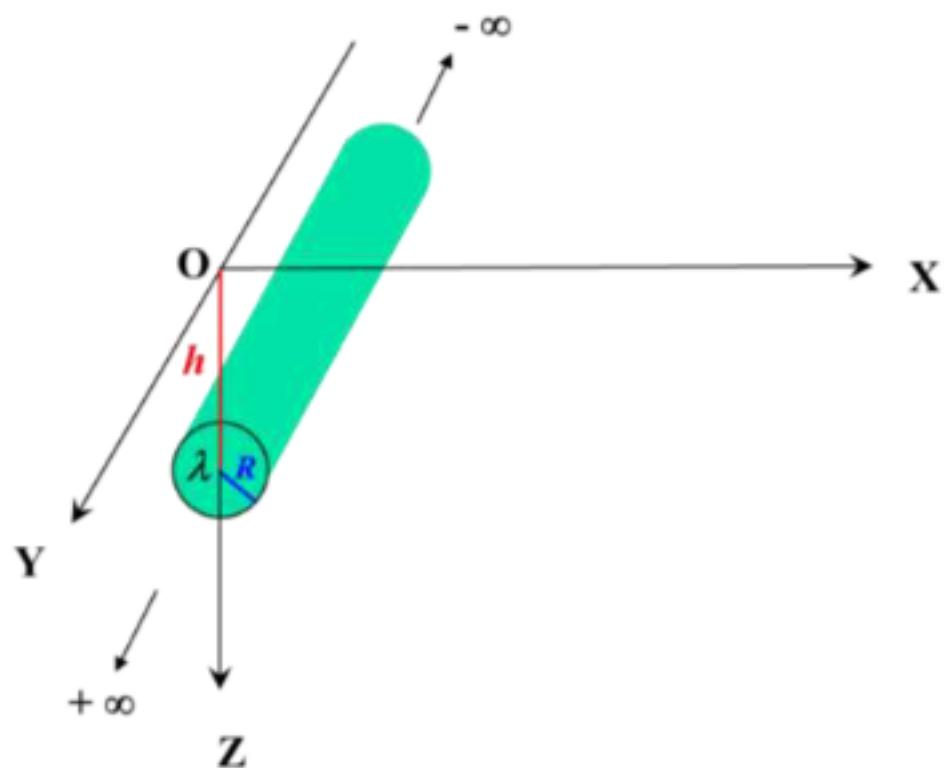


2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。



- 水平方向长度 $2L$; 沿 η 方向延伸;
- 半径 R , 中轴线埋深 h ;
- 剩余密度 σ ;
- $-z$ 坐标轴位于圆柱体中轴线中点;
 y 轴平行于中轴线

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

$$\Delta g = V_z = G \iiint_V \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

$$\lambda = \frac{\sigma \int d\xi \int d\eta \int d\zeta}{\int d\eta} = \sigma \int d\xi \int d\zeta = \sigma \cdot S \rightarrow \underline{\lambda = \sigma \bullet \pi R^2}$$

面密度

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

$$\Delta g = V_z = G \iiint_V \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

在 xoy 平面上

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + y^2 + D^2}$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

$$\Delta g = V_z = G \iiint_V \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

在 xoy 平面上

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + y^2 + D^2}$$

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + D^2}$$

2.简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + D^2}$$

分析 Δg 的特征？

2.简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + D^2}$$

✓ 当 $x=0$ 时， Δg 有极大值为

$$\Delta g_{\max} = \frac{2G\lambda}{D}$$

✓ 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时， $\Delta g \rightarrow 0$ 。

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

- 令半极大值点横坐标为 $x_{1/2}$ ，则由

在 $y = 0$ 的剖面上

$$\frac{2G\lambda}{2D} = \frac{2G\lambda D}{x_{1/2}^2 + D^2}$$

可解得 $x_{1/2} = \pm D$

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + D^2}$$

- λ 不变， $D \nearrow m$ 倍，极大值 $\searrow 1/m$ ， $x_{1/2} \nearrow m$ 倍，
- 与球体异常相比，它随 D 的加大衰减要慢些。

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + y^2 + D^2}$$

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{x^2 + D^2}$$

$$V_{xz} = \frac{4G\lambda D x}{(x^2 + D^2)^2}$$

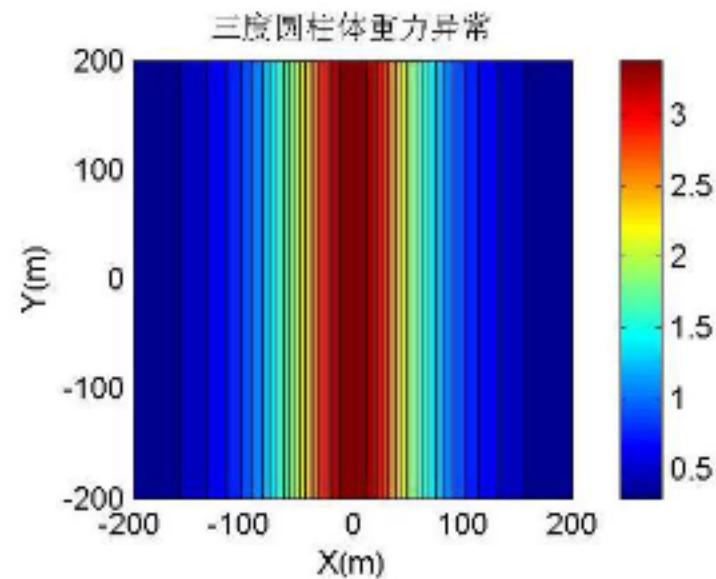
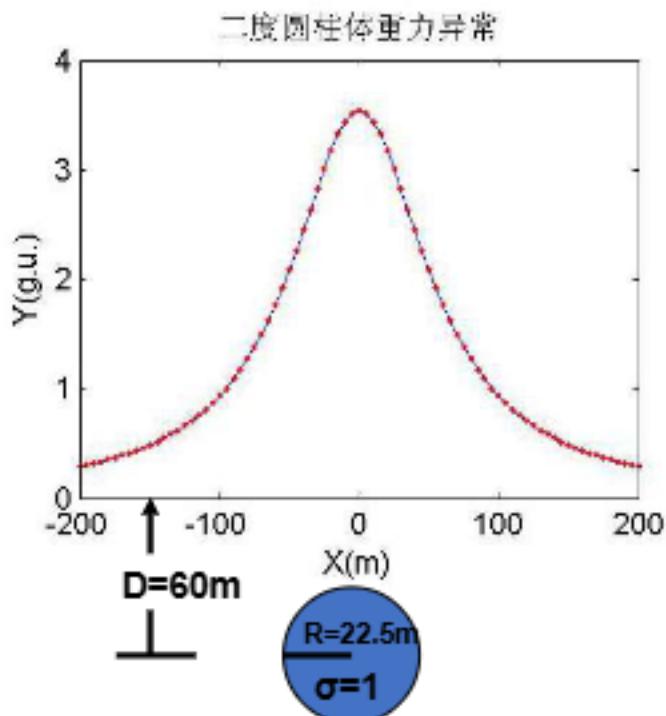
$$V_{zzz} = 4G\lambda D \frac{D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^3}$$

$$V_{zz} = 2G\lambda \frac{x^2 - D^2}{(D^2 + x^2)^2}$$

2.简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

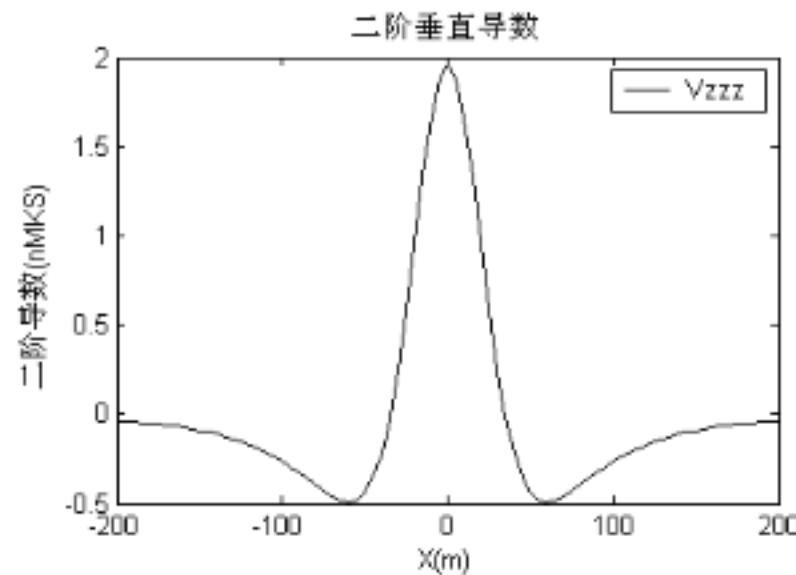
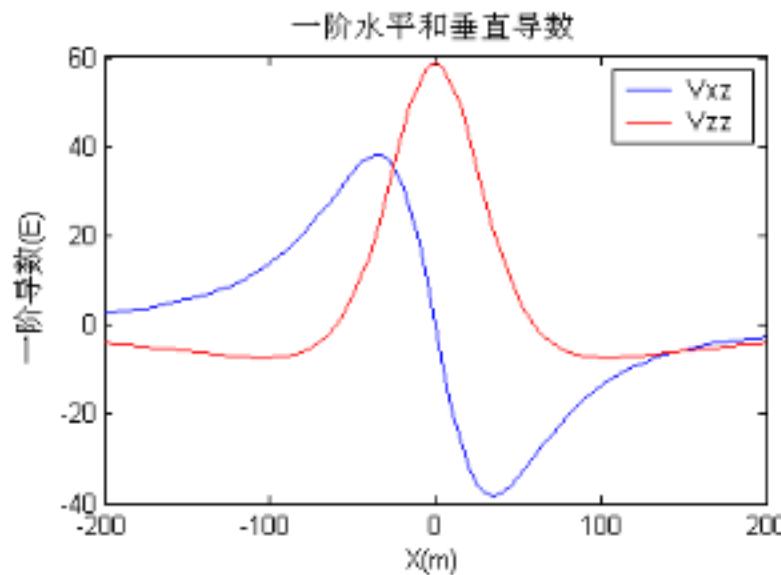


平面等值线为一族平行不等间距的直线，并以柱体中轴线在地面的投影线为对称轴对称分布。

2. 简单形体的正演

■ 密度均匀的水平圆柱体(水平物质线)

对于某些横截面近于圆形、沿水平方向延伸较长的地质体，如扁豆状矿体、两翼较陡的长轴背斜及向斜构造等，研究它们的异常时，在一定精度要求内，可以当成水平圆柱体的异常来对待。

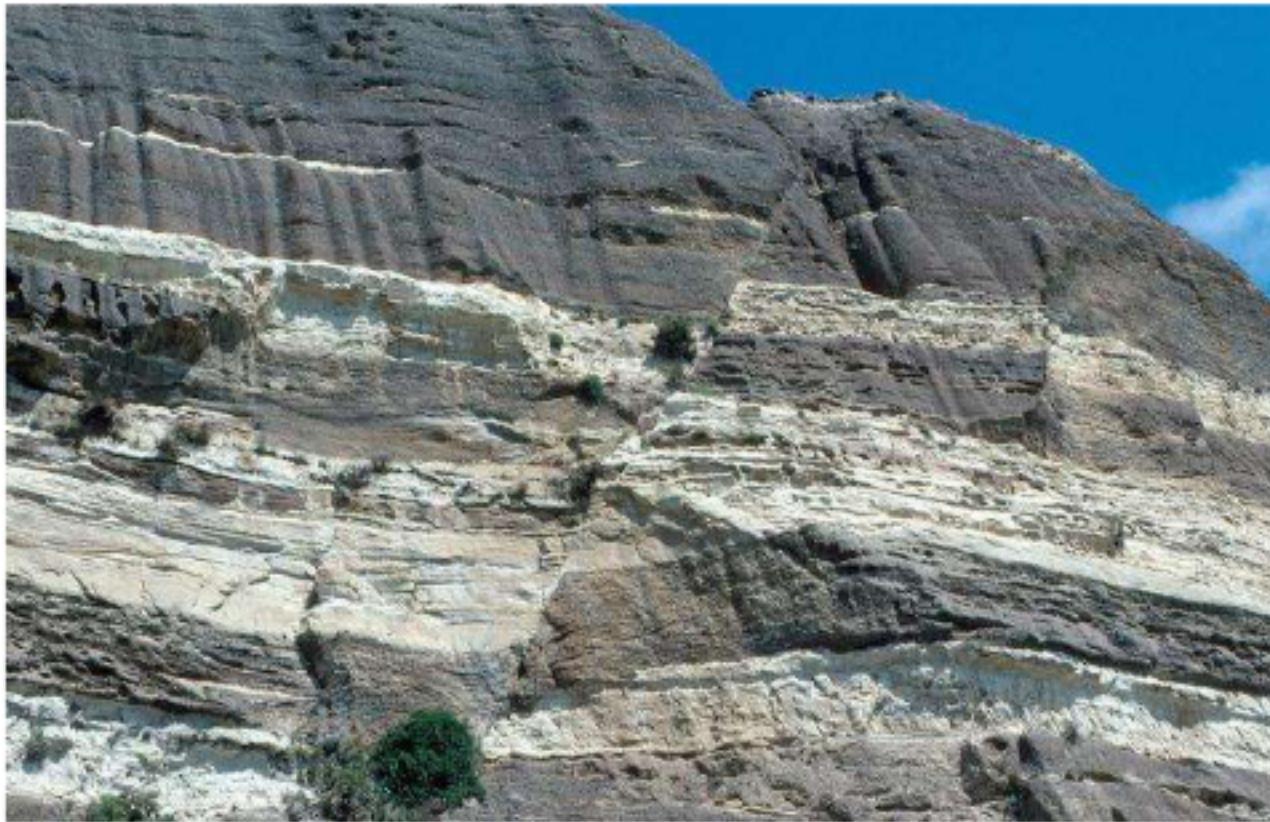


2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。



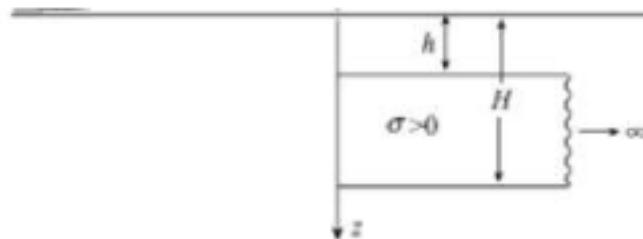
2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。

$$\Delta g = 2G\sigma \iint_S \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$



$$\Delta g = 2G\sigma \int_0^{\infty} d\xi \int_h^H \frac{\zeta d\zeta}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$$

$$= G\sigma \left[\pi(H-h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$

$$\Delta g = 2G\sigma \int_0^{\infty} d\xi \int_h^H \frac{\zeta d\zeta}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$$

$$= G\sigma \int_0^{\infty} \left\{ \ln \left[((\xi - x)^2 + H^2) \right] - \ln \left[((\xi - x)^2 + h^2) \right] \right\} d\xi$$

$$= G\sigma \begin{vmatrix} (\xi - x) \ln \left[((\xi - x)^2 + H^2) \right] - 2(\xi - x) + 2H \tan^{-1} \frac{\xi - x}{H} \\ (\xi - x) \ln \left[((\xi - x)^2 + h^2) \right] + 2(\xi - x) - 2h \tan^{-1} \frac{\xi - x}{h} \end{vmatrix}_0^{\infty}$$

$$= G\sigma \left[\pi(H - h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$

$$\int \frac{\zeta d\zeta}{A^2 + \zeta^2} = \frac{1}{2} \ln(A^2 + \zeta^2)$$

$$\int_0^{\infty} \ln(u^2 + a^2) du = \frac{\pi}{2} \ln(2a^2)$$

$$I = \int_0^\infty \ln((\xi - x)^2 + H^2) d\xi$$

我们令 $u = \xi - x$, 因此:

$$d\xi = du, \quad \xi = x + u$$

所以积分上限下限变为:

$$I = \int_{-x}^\infty \ln(u^2 + H^2) du$$

我们将积分拆成两部分来考虑对称性和易计算性:

$$I = \int_{-x}^0 \ln(u^2 + H^2) du + \int_0^\infty \ln(u^2 + H^2) du$$

$$\int_0^\infty \ln(u^2 + a^2) du = \frac{\pi}{2} \ln(2a^2)$$

$$\int_0^\infty \ln(u^2 + H^2) du = \frac{\pi}{2} \ln(2H^2) = \pi \ln(H)$$

我们令 $v = -u$, 于是有 $du = -dv$:

$$\int_{-x}^0 \ln(u^2 + H^2) du = \int_x^0 \ln((-v)^2 + H^2) (-dv) = - \int_0^x \ln(v^2 + H^2) dv$$

总结结果:

$$I = - \int_0^x \ln(v^2 + H^2) dv + \pi \ln(H)$$

我们使用积分的部分积分公式:

$$\int \ln(f(x)) dx = x \ln(f(x)) - \int \frac{xf'(x)}{f(x)} dx$$

设 $f(u) = u^2 + H^2$, 其导数为:

$$f'(u) = 2u$$

代入部分积分公式:

$$I = u \ln(u^2 + H^2) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{2u^2}{u^2 + H^2} du$$

$$\int_0^x \frac{2u^2}{u^2 + H^2} du = \int_0^x \left(2 - \frac{2H^2}{u^2 + H^2} \right) du$$

第二个积分使用换元，令 $v = \frac{u}{H}$ ，则 $du = Hdv$ ：

$$\int_0^x \frac{2H^2}{u^2 + H^2} du = 2H \int_0^{\frac{x}{H}} \frac{dv}{1 + v^2}$$

这就是反正切积分公式：

$$\int_0^{\frac{x}{H}} \frac{dv}{1 + v^2} = \tan^{-1}\left(\frac{x}{H}\right)$$

因此第二项积分的结果为：

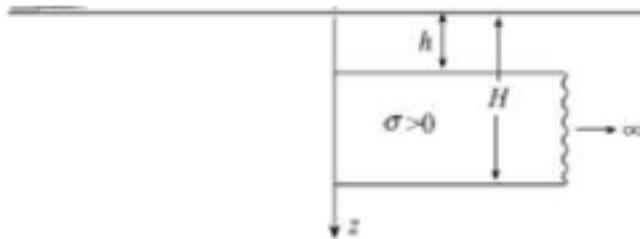
$$2H \tan^{-1}\left(\frac{x}{H}\right)$$

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。



$$\Delta g = G\sigma \left[\pi(H-h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$

分析 Δg 的特征?

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。

$$\Delta g = G\sigma \left[\pi(H-h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$

- ✓ 当 $x=0$ 时， $\Delta g(0) = \pi G\sigma(H-h)$ ；
- ✓ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时，由于对数项趋于零比 x 增长更快，故该项也是趋于零的，所以有

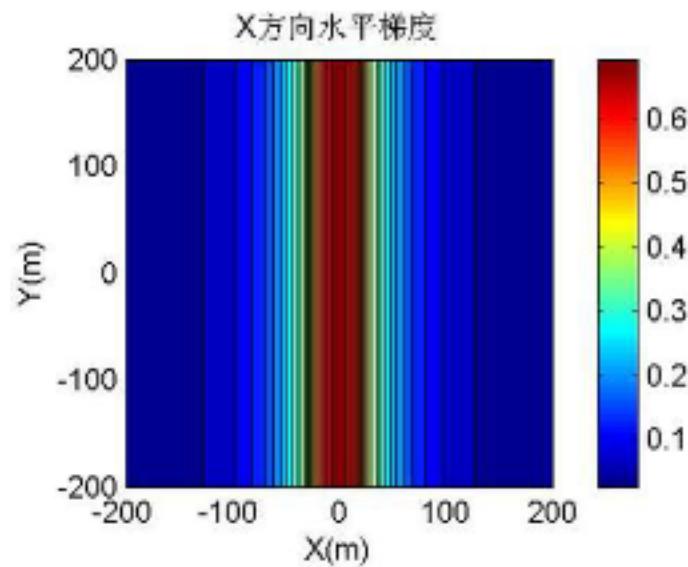
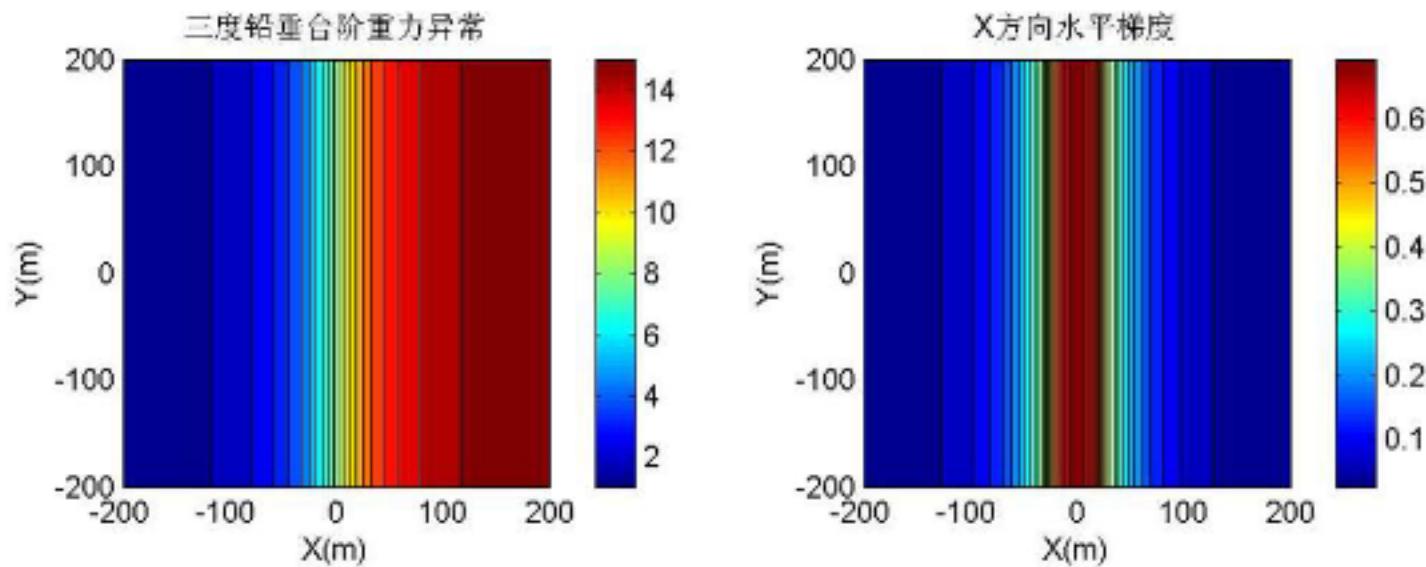
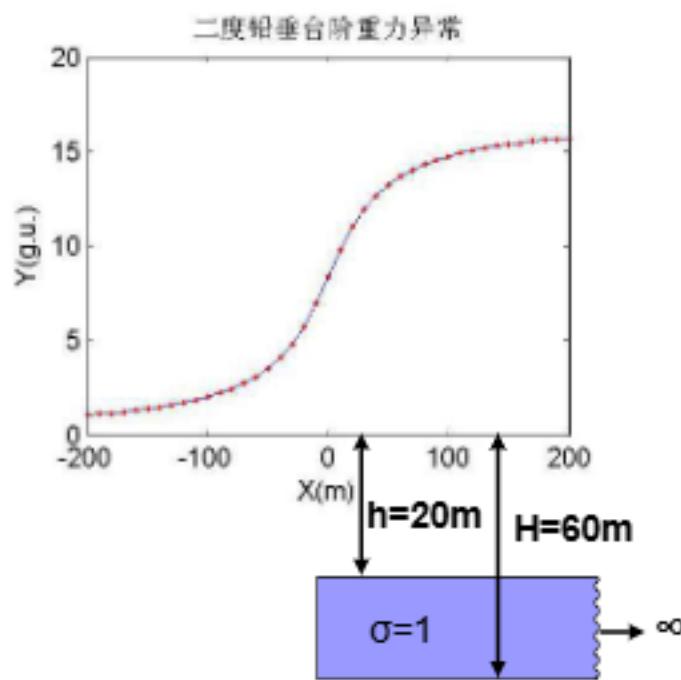
$$\Delta g_{\max} = 2\pi G\sigma(H-h);$$

- ✓ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $\Delta g_{\min} = 0$

2. 简单形体的正演

■ 铅垂台阶

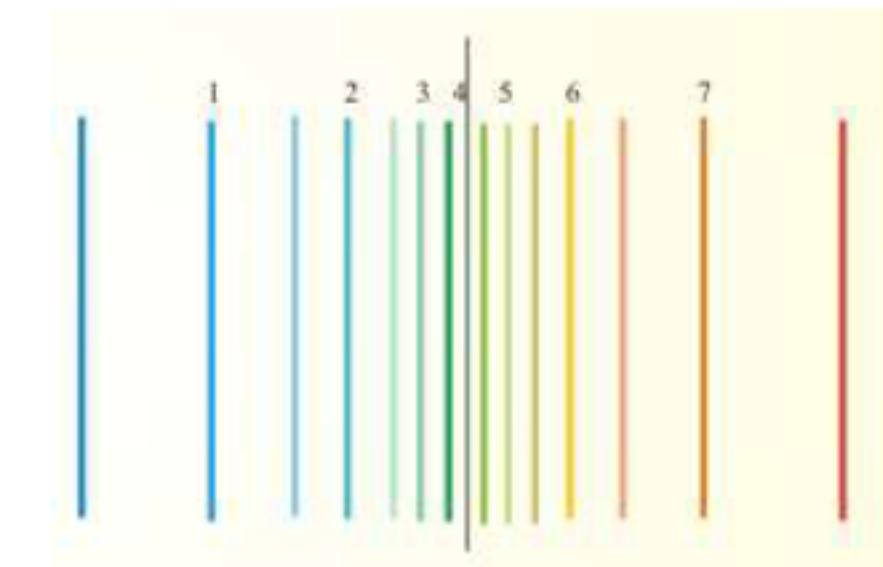
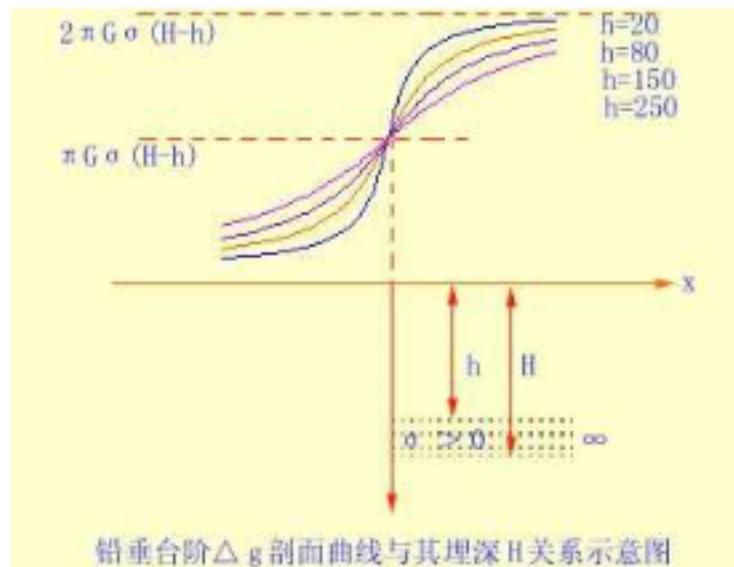
一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。



平面等值线是一系列平行于台阶走向的直线，且在断面两侧形成异常变化的梯度呈对称分布的等值线密集带，常称为**重力梯级带**，是识别断裂构造的重要标志。

2. 简单形体的正演

■ 铅垂台阶



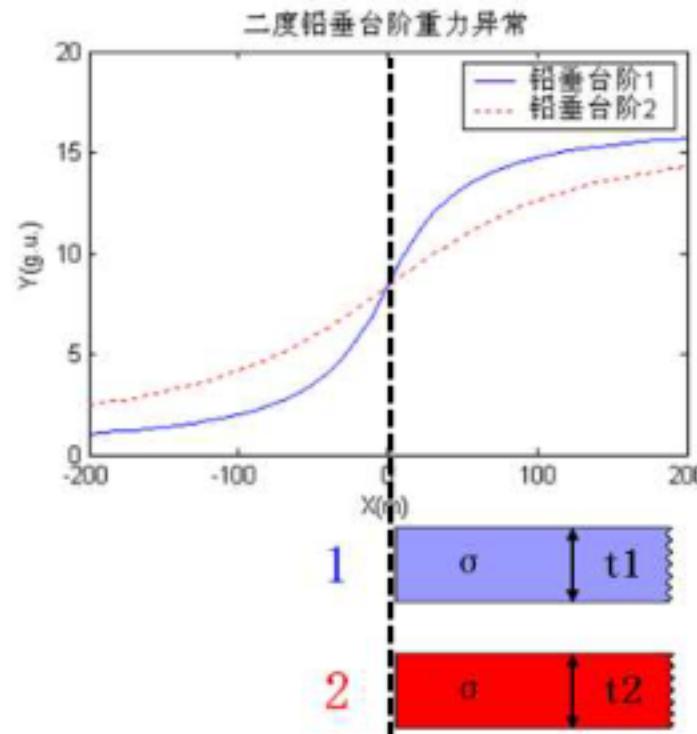
- ✓ 主剖面异常曲线单调变化，断层正上方梯度最大；平面异常等值线呈条带状分布，与断层线平行。
- ✓ 在前述三个特征点上，异常值与埋深无关；
- ✓ 异常形态与埋深有关，埋藏越浅，水平梯度越大。
- ✓ 等值线为一系列平行台阶走向的直线，在断面附近等值线最密，称为“重力梯级带”，且异常向台阶延伸方向单调增大。

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。



$$\Delta g(0) = \pi G \sigma (H-h)$$

$$\Delta g_{\max} = 2\pi G \sigma (H-h)$$

- 只要($H-h$)不变，不论台阶的上顶埋深如何， Δg_{\min} 、 $\Delta g(0)$ 和 Δg_{\max} 均不变，只是整条曲线随埋深的增大而变缓。

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。

$$\Delta g = G\sigma \left[\pi(H-h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$

$$V_{xz} = G\sigma \ln \frac{H^2 + x^2}{h^2 + x^2}$$

$$V_{zz} = 2G\sigma \left(tg^{-1} \frac{H}{x} - tg^{-1} \frac{h}{x} \right) = 2G\sigma tg^{-1} \frac{x(H-h)}{x^2 + Hh}$$

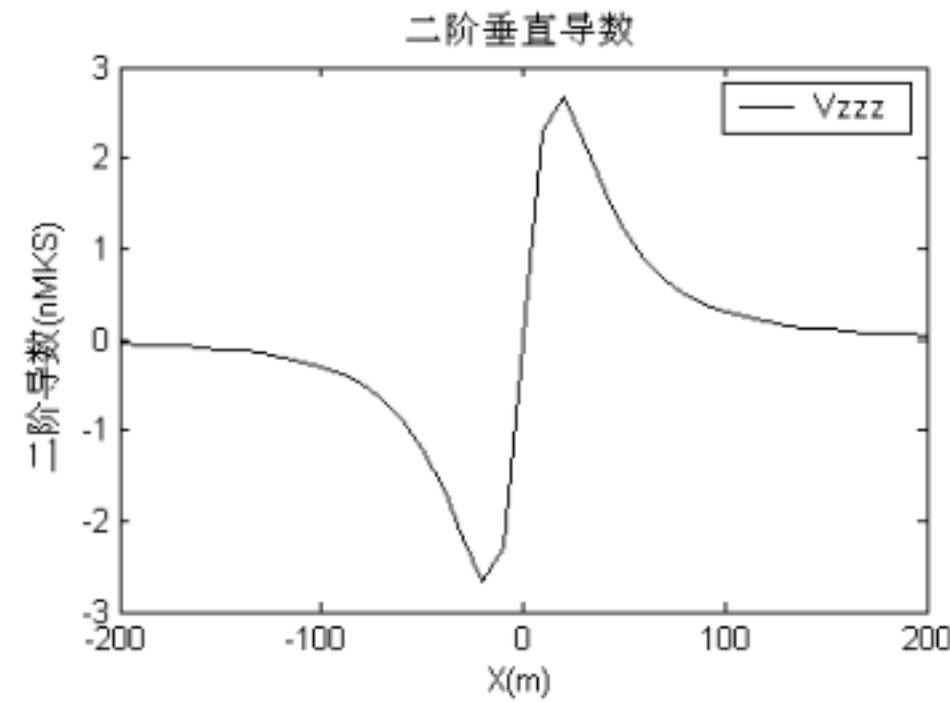
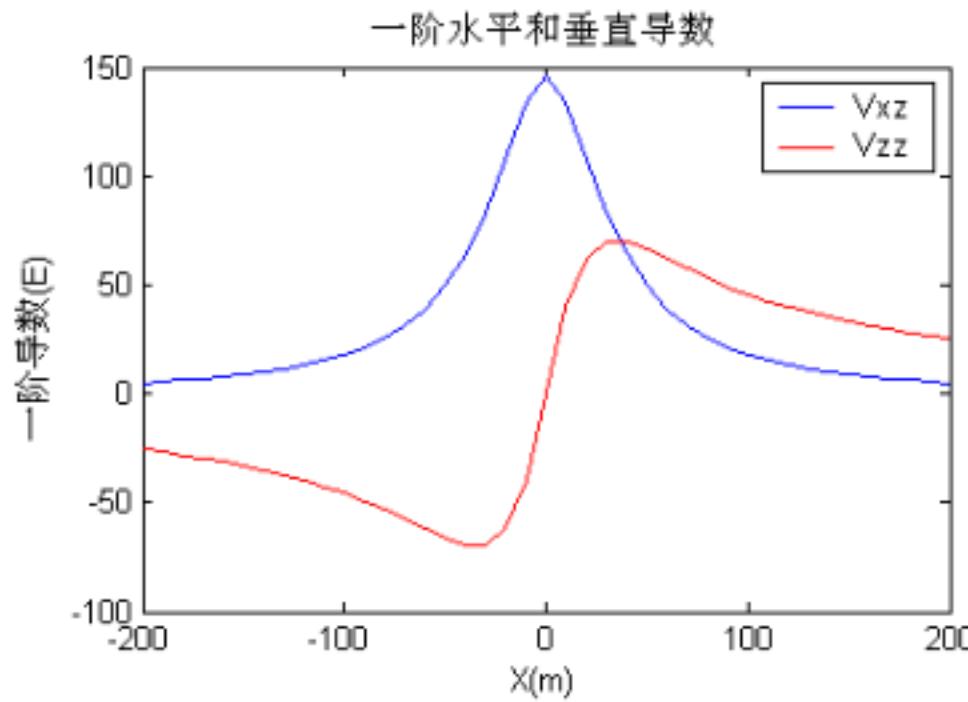
$$V_{zzz} = 2G\sigma x \left(\frac{1}{h^2 + x^2} - \frac{1}{H^2 + x^2} \right) = 2G\sigma \frac{x(H^2 - h^2)}{(h^2 + x^2)(H^2 + x^2)}$$

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅垂台阶

一些界线清楚的接触带以及高角度的断裂构造，可以用铅垂台阶模型研究其异常的基本特征。





2.简单形体的正演

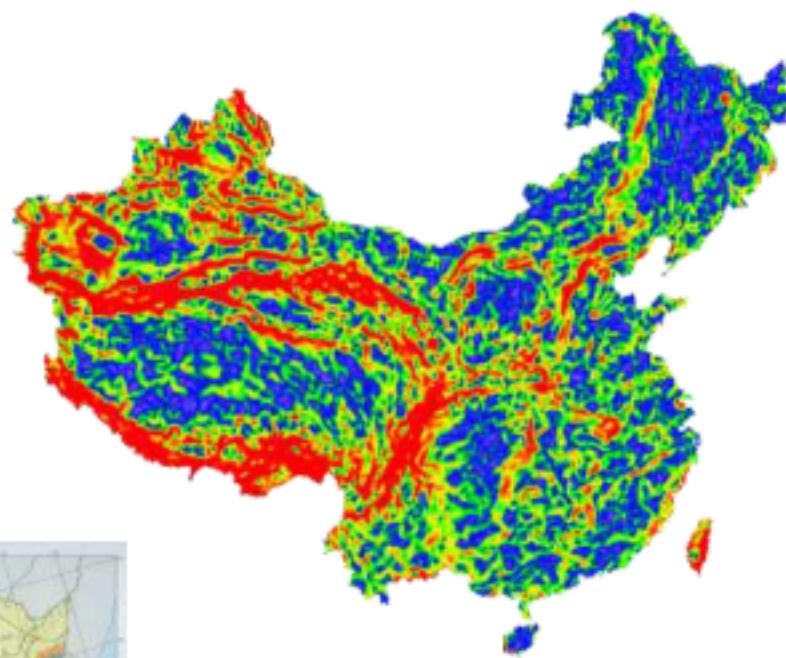
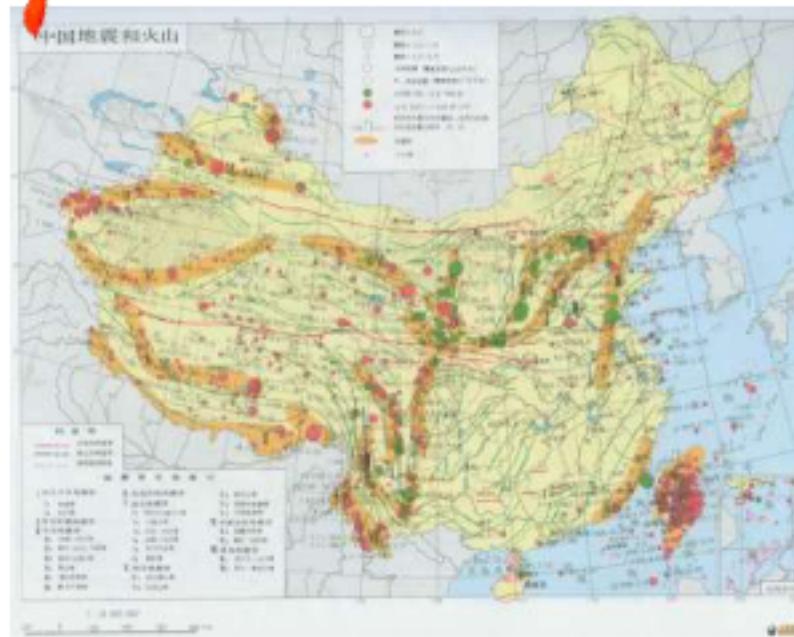
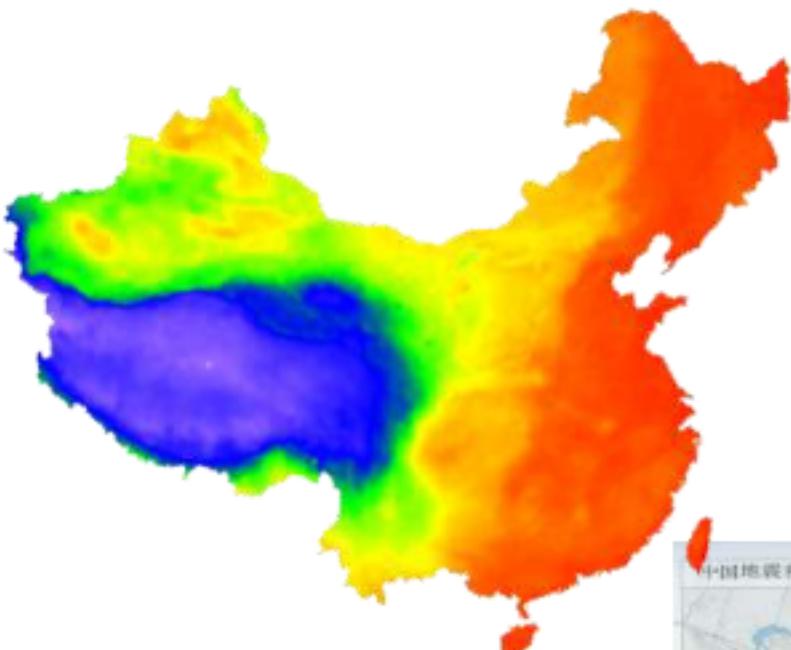
GeoGoku

思考：有啥区别（概念）

- 正演获取的重力异常
- 实际观测重力数据
- 布格重力异常

2.简单形体的正演

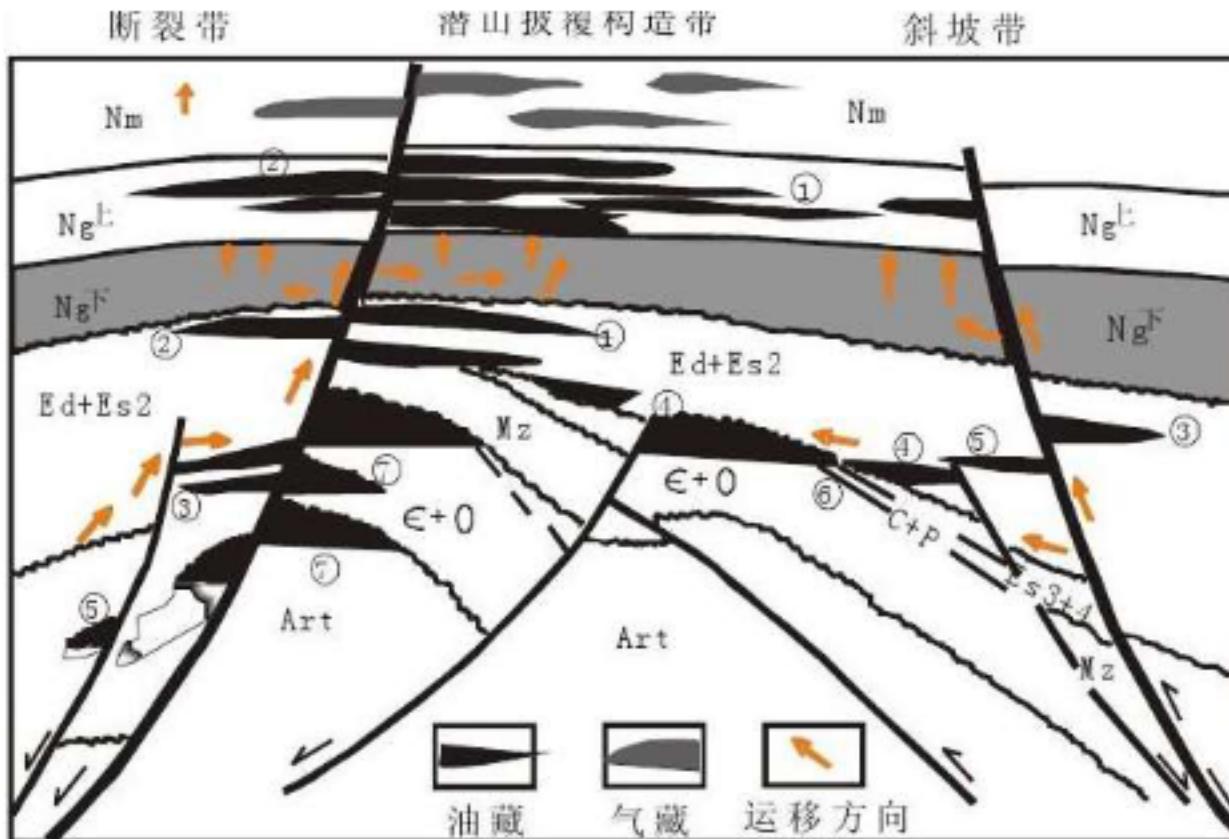
GeoGoku



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶



油藏类型: ①-披覆背斜; ②-滚动背斜; ③-断鼻、断块;
④-地层超覆; ⑤-岩性; ⑥-地层不整合; ⑦-潜山

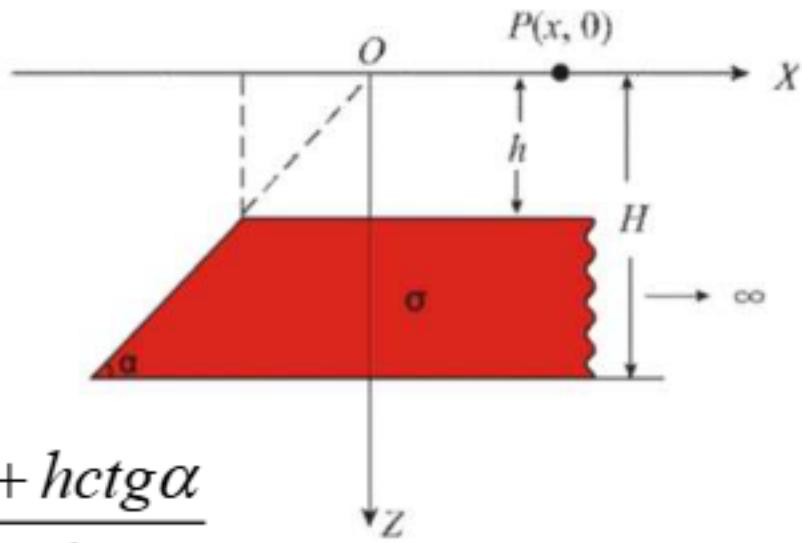
2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

$$\Delta g = 2G\sigma \int_{-h}^H d\zeta \int_0^\infty \frac{\zeta d\xi}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$$

$$\begin{aligned} &= G\sigma \left[\pi(H-h) + 2Hth^{-1} \frac{x + Hctg\alpha}{H} - 2htg^{-1} \frac{x + hctg\alpha}{h} \right. \\ &\quad \left. + x\sin^2\alpha \ln \frac{(H+x\sin\alpha\cos\alpha)^2 + x^2\sin^4\alpha}{(h+x\sin\alpha\cos\alpha)^2 + x^2\sin^4\alpha} \right. \\ &\quad \left. - 2x\sin\alpha\cos\alpha tg^{-1} \frac{x(H-h)\sin^2\alpha}{x^2\sin^2\alpha + (H+h)x\sin\alpha\cos\alpha)^2 + Hh} \right] \end{aligned}$$



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

图6.1-15为斜台阶的示意图。计算它的重力异常及其各阶偏导数时，坐标原点是选在斜面延展面与地面的交线上，X轴与其走向垂直，Z轴铅垂向下。设台阶的剩余密度为 σ ，斜面的倾角为 α ，则由式(1.7-7)可写出它在X轴上任意点引起的 Δg 的表达式

$$\Delta g = 2G\sigma \int_{-h}^H d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\zeta a\zeta}{(\zeta-x)^2 + \zeta^2} d\zeta \quad (6.1-45)$$

先对 ζ 积分再代入积分限得

$$\Delta g = 2G\sigma \left[\frac{\pi}{2} \int_{-h}^H d\zeta + \int_{-h}^H \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cot\alpha + x}{\zeta} d\zeta \right] \quad (6.1-46)$$

为了计算上式方括号中的第二项积分，令

$$u = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cot\alpha + x}{\zeta}, \quad du = d\zeta$$

$$du = -\frac{x d\zeta}{\zeta^2 + (\cot\alpha + x)^2}$$

应用分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 进行

积分得

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cot\alpha + x}{\zeta} d\zeta &= c \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cot\alpha + x}{\zeta} + \int \frac{x c d\zeta}{\zeta^2 + (\cot\alpha + x)^2} \\ &= c \operatorname{tg}^{-1} \frac{\cot\alpha + x}{\zeta} + \int \frac{x c d\zeta}{\zeta \csc^2 \alpha + 2x \cot\alpha + x^2} \end{aligned} \quad (6.1-47)$$

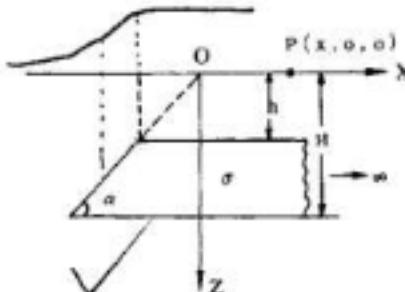


图 6.1-15

利用积分公式

$$\int \frac{nt}{at^2 + bt + c} dt = \frac{n}{2a} \ln(at^2 + bt + c) - \frac{nb}{2a\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2at + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

令式中的 $n=x$, $t=\zeta$, $a=\csc^2 \alpha$, $b=2x \cot \alpha$, $c=x^2$, 并代入式(6.1-47)然后再代入式(6.1-45)经整理后得

$$\begin{aligned} \Delta g &= G\sigma \left[\pi(H-h) + 2H \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+H \cot\alpha}{H} - 2h \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+h \cot\alpha}{h} \right. \\ &\quad \left. + x \sin^2 \alpha \ln \frac{(H+x \sin \alpha \cos \alpha)^2 + x^2 \sin^4 \alpha}{(h+x \sin \alpha \cos \alpha)^2 + x^2 \sin^4 \alpha} \right. \\ &\quad \left. - 2x \sin \alpha \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^{-1} \frac{x(H-h) \sin^2 \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha + (H+h)x \sin \alpha \cos \alpha + Hh} \right] \end{aligned} \quad (6.1-48)$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

$$V_{xz} = G\sigma \left\{ \sin^2 \alpha \ln \frac{(Hctg\alpha + x)^2 + H^2}{(hctg\alpha + x)^2 + h^2} - \right.$$
$$\left. \sin 2\alpha \left[\tg^{-1} \frac{\frac{H}{\sin \alpha} + x \cos \alpha}{x \sin \alpha} - \tg^{-1} \frac{\frac{H}{\sin \alpha h} + x \cos \alpha}{x \sin \alpha} \right] \right\}$$

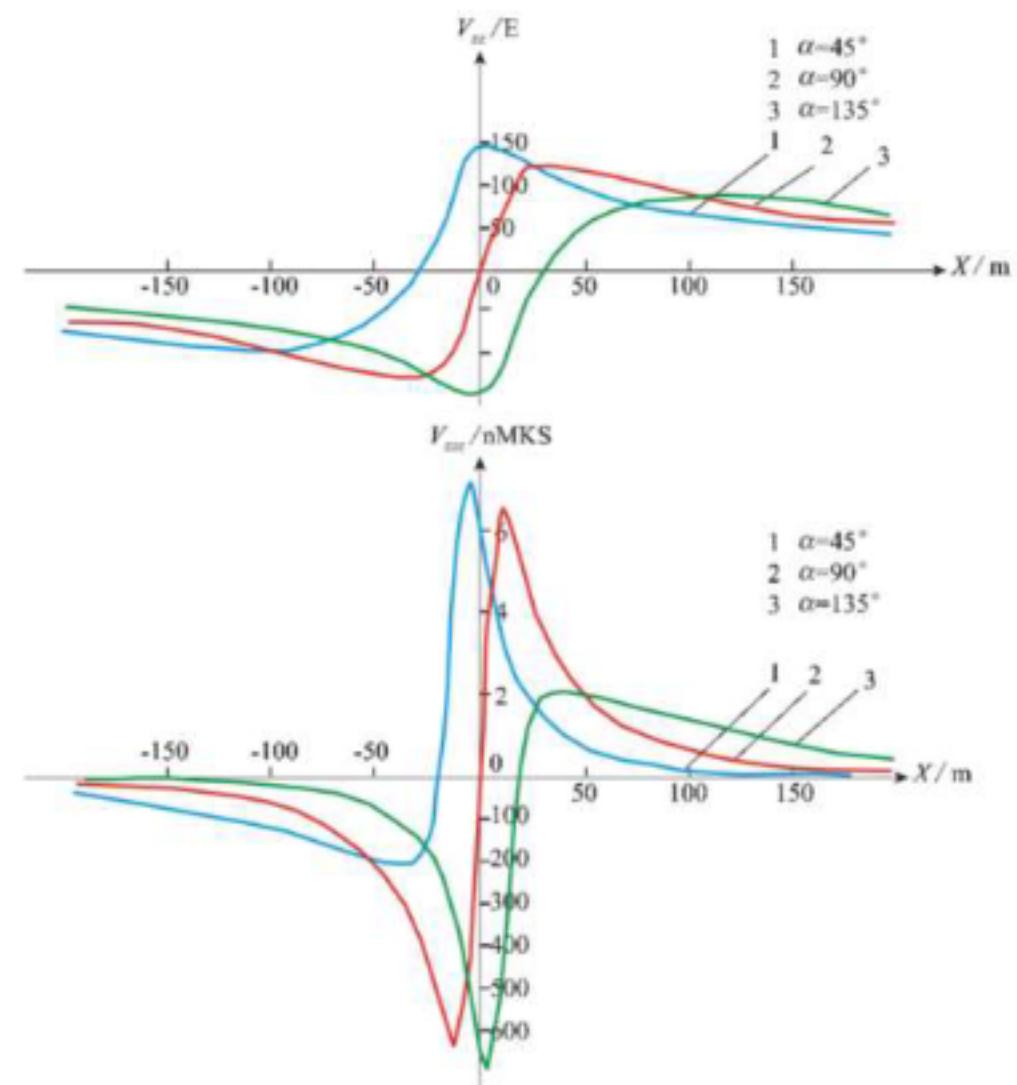
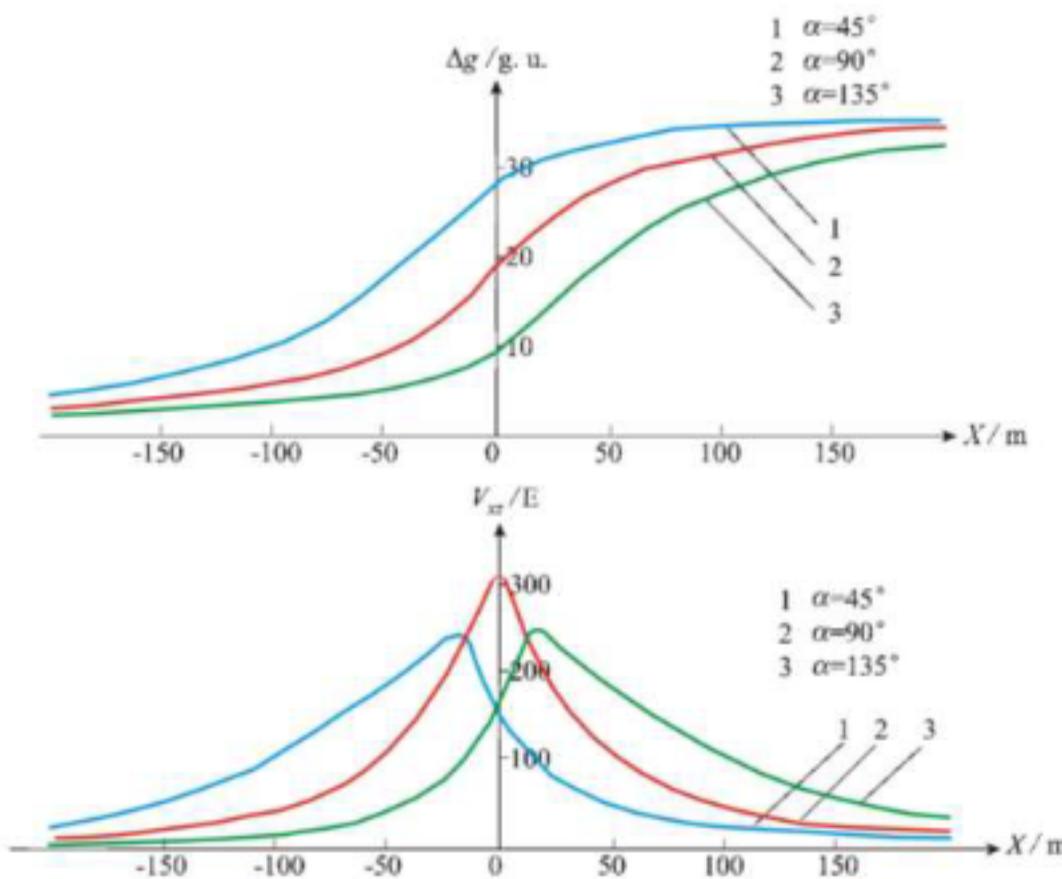
$$V_{zz} = G\sigma \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \ln \frac{(Hctg\alpha + x)^2 + H^2}{(hctg\alpha + x)^2 + h^2} + \right.$$
$$\left. 2 \sin^2 \alpha \left[\tg^{-1} \frac{\frac{H}{\sin \alpha} + x \cos \alpha}{x \sin \alpha} - \tg^{-1} \frac{\frac{H}{\sin \alpha h} + x \cos \alpha}{x \sin \alpha} \right] \right\}$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma \sin^2 \alpha \left[\frac{x + 2hctg\alpha}{(hctg\alpha + x)^2 + h^2} - \frac{x + 2Hctg\alpha}{(Hctg\alpha + x)^2 + H^2} \right]$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

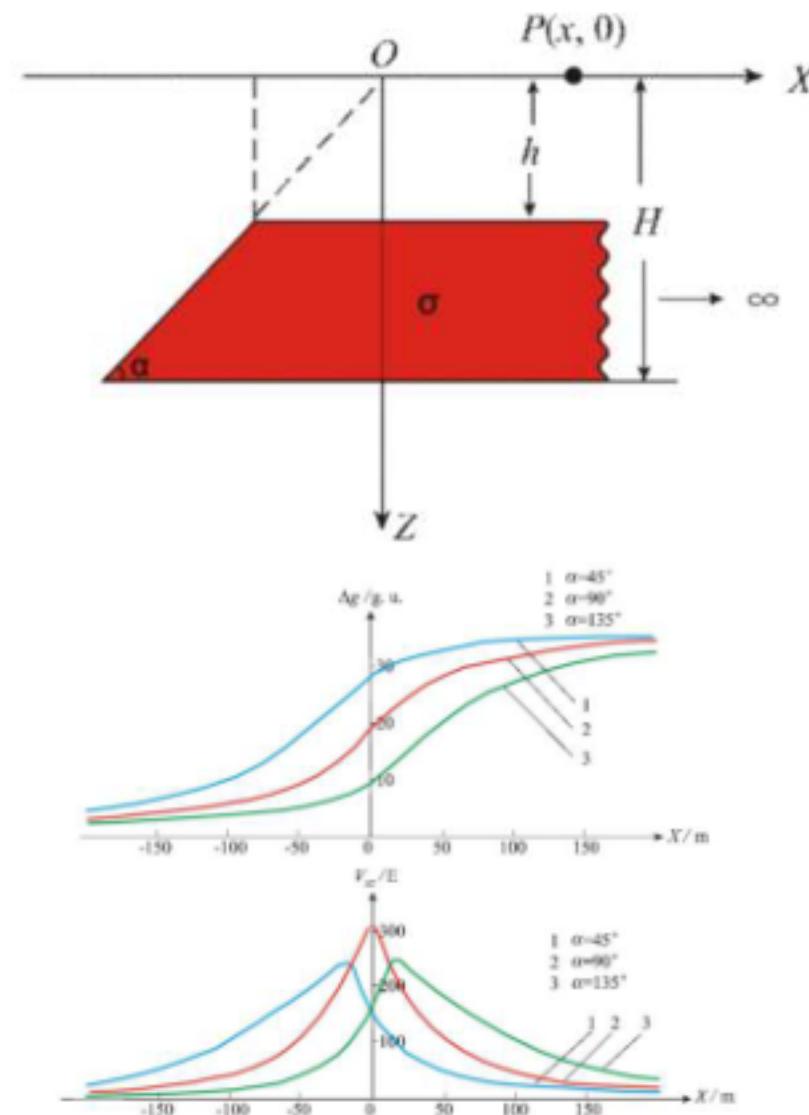


2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

- Δg
 - ✓ 当台阶倾斜时：无论台阶产状如何，异常的形态相似，仅原点处的异常值不同。
 - ✓ 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时， $\Delta g_{\max} = 2\pi G\sigma(H-h)$ 和 $\Delta g_{\min} = 0$ 仍成立；
 - ✓ 而只有在 $\alpha=90^\circ$ 时， $\Delta g(0) = \pi G\sigma(H-h)$ ；
 - ✓ 当台阶面向台阶外侧倾斜时：
$$\Delta g(0) > \pi G \Delta \sigma \Delta h$$
 - ✓ 当台阶面向台阶内侧倾斜时：
$$\Delta g(0) < \pi G \Delta \sigma \Delta h$$

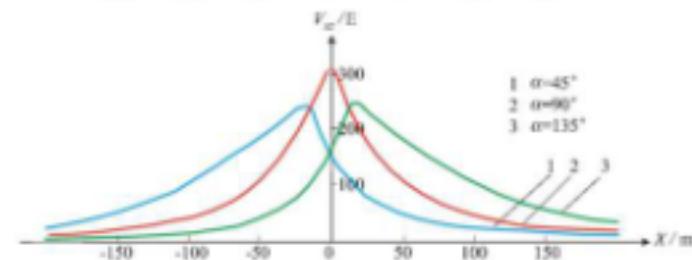
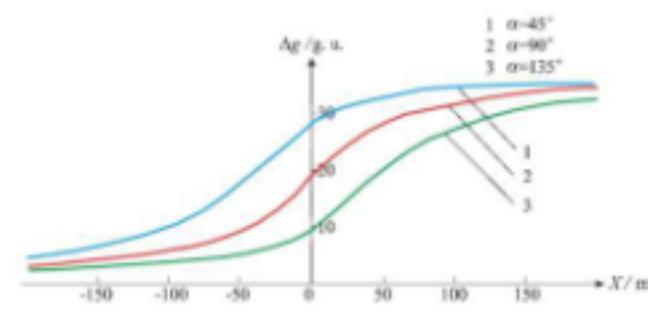
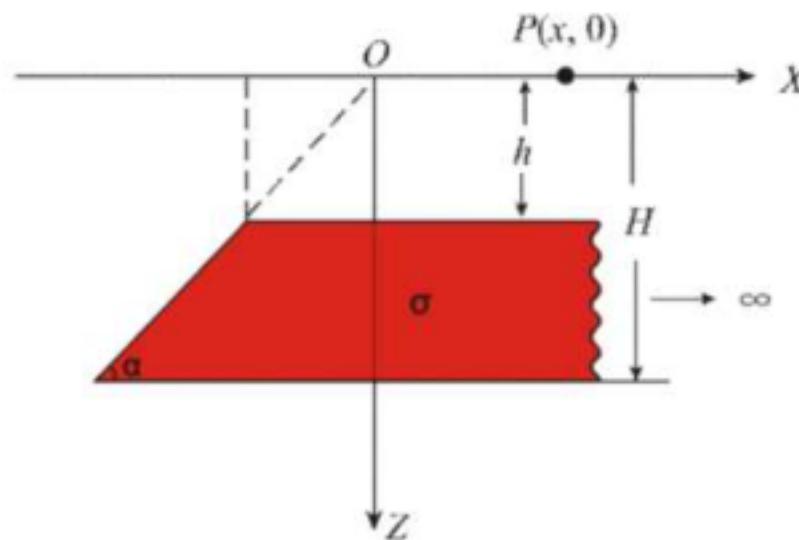


2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

- V_{xz}
 - ✓ 在 $\alpha=90^\circ$ 时，曲线才是以纵轴为对称轴，极大值位置正对应断面位置；
 - ✓ 而 $\alpha \neq 90^\circ$ 时，曲线为不对称形状，极大值偏向斜面所在一方。



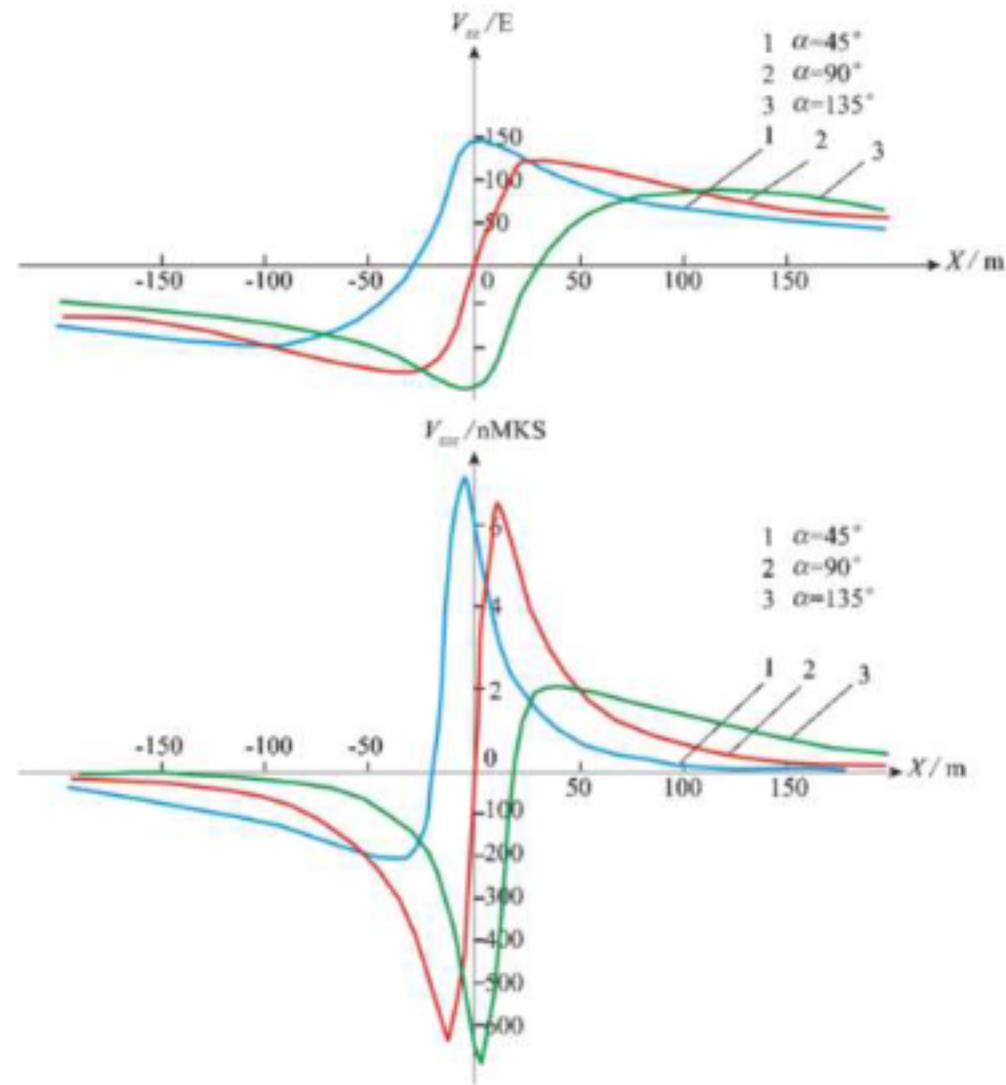
2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜台阶

- V_{zz} 与 V_{zzz}

- ✓ 只有在 $\alpha=90^\circ$ 时，曲线才是以原点 ($x=0$) 为中心的中心对称形，且原点处异常值为零，即零值线正好对应断面位置。
- ✓ $\alpha \neq 90^\circ$ 时，曲线的极大与极小值绝对值不再相等，极大值位置偏向斜面所在一方，且在 α 为 45° 时，异常极大的绝对值大于异常极小的绝对值，在 α 为 135° 时，则反了过来。

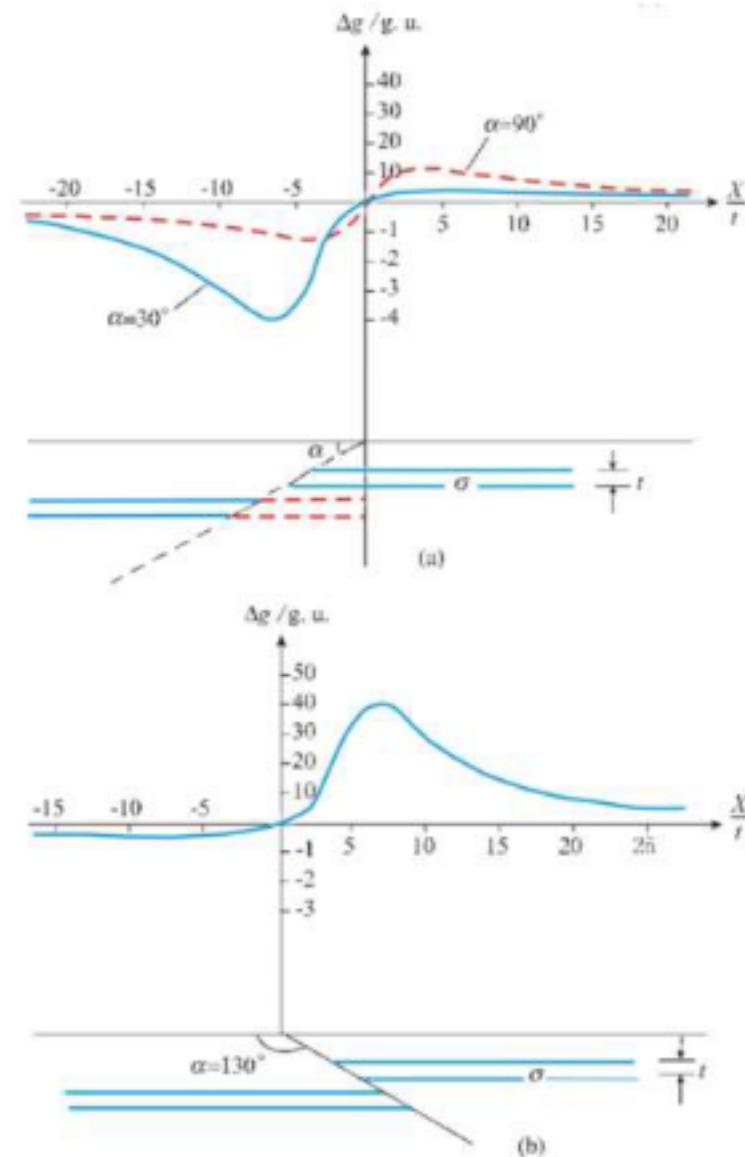


2. 简单形体的正演

■ 倾斜台阶

断层分析：

- ✓ 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 和 $x=0$ 时，重力异常均为 $2\pi G\sigma(H-h)$ ，图中纵坐标的刻度已是减去了 $2\pi G\sigma(H-h)$ 这一常数后的，因为这一常数在野外是测不出来的；
- ✓ 当 $\sigma > 0$ 时，极大值一侧对应着上升盘，极小值一侧对应着下降盘，在极小值十分清晰且大于极大的绝对值时，属正断层类型，反之则属逆断层类型。



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅锤圆柱体



火山爆发



火山颈岩浆凝结



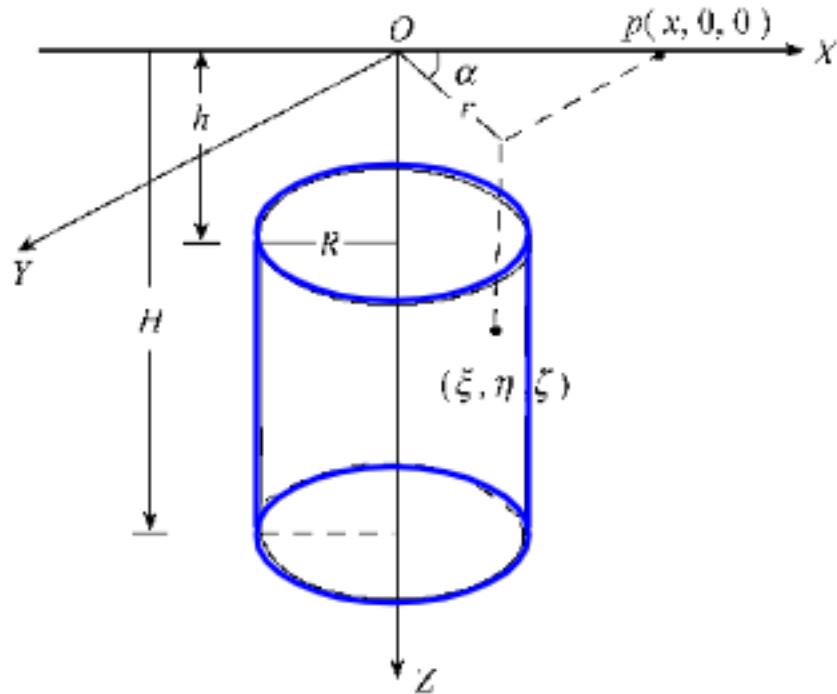
山体被侵蚀后
留下孤峰

博物

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 铅锤圆柱体



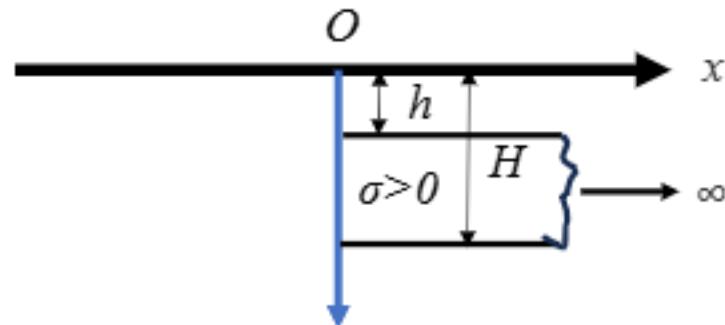
$$\Delta g = G\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H \frac{\zeta r d\alpha dr d\zeta}{(x^2 + r^2 - 2xr \cos \alpha + \zeta^2)^{3/2}}$$

2. 简单形体的正演

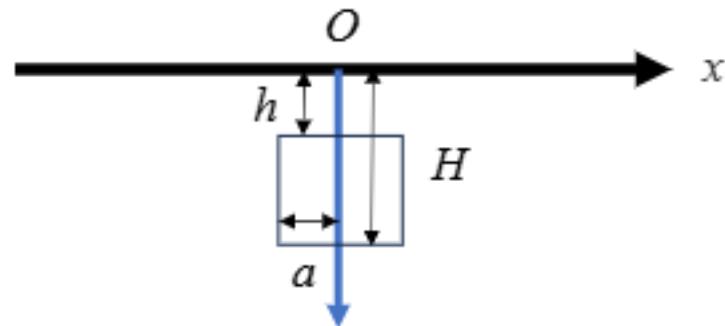
GeoGoku

■ 二度长方体

$$\Delta g = G\sigma \left[\pi(H-h) + x \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{x}{H} - 2htg^{-1} \frac{x}{h} \right]$$



用 $(x+a)$ 和 $(x-a)$ 分别代替铅垂台阶各公式中的 x , 并将结果相减, 即可获得二度长方体的重力异常公式



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 二度长方体

$$\Delta g = G\sigma \left[(x+a) \ln \frac{(x+a)^2 + H^2}{(x+a)^2 + h^2} - (x-a) \ln \frac{(x-a)^2 + H^2}{(x-a)^2 + h^2} \right. \\ \left. + 2H(tg^{-1} \frac{x+a}{H} - tg^{-1} \frac{x-a}{H}) - 2h(tg^{-1} \frac{x+a}{h} - tg^{-1} \frac{x-a}{h}) \right]$$

$$V_{xz} = G\sigma \ln \frac{[(x+a)^2 + H^2][(x-a)^2 + h^2]}{[(x+a)^2 + h^2][(x-a)^2 + H^2]}$$

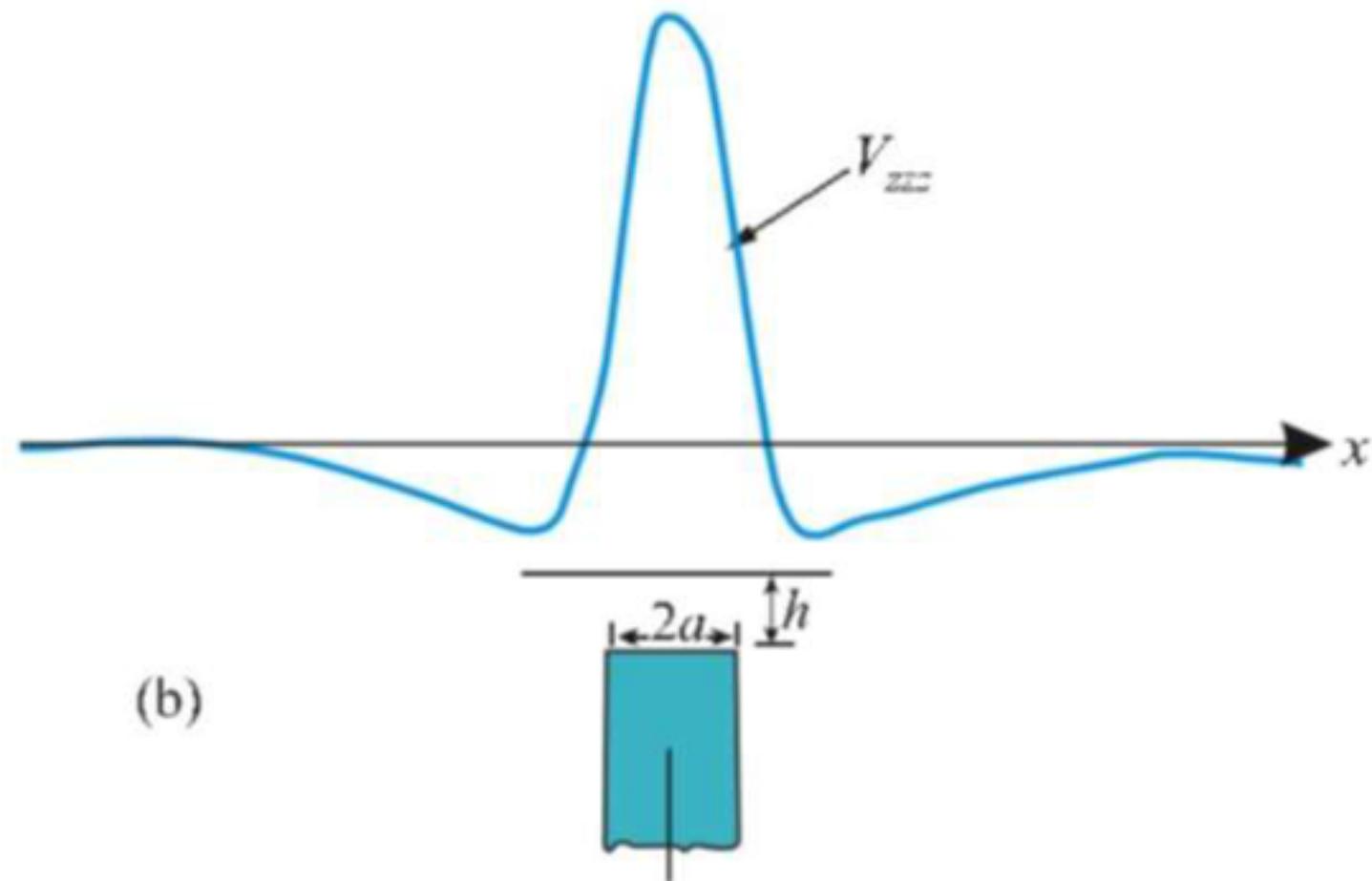
$$V_{zz} = 2G\sigma (tg^{-1} \frac{H}{x+a} - tg^{-1} \frac{h}{x+a} - tg^{-1} \frac{H}{x-a} + tg^{-1} \frac{h}{x-a})$$

$$V_{zzz} = 2G\sigma \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + h^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + H^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + h^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2 + H^2} \right]$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 无限延伸的铅垂脉



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 无限延伸的铅垂脉

$$\Delta g \rightarrow \infty$$

$$V_{xz} = G\sigma \ln \frac{(x-a)^2 + h^2}{(x+a)^2 + h^2}$$

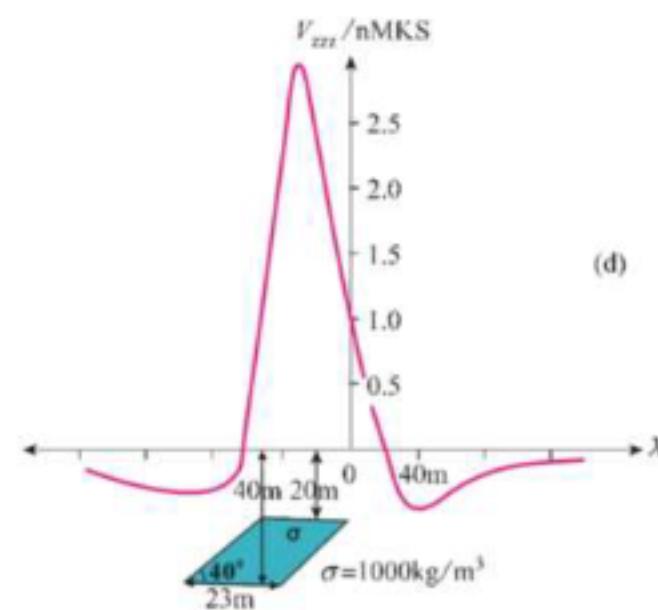
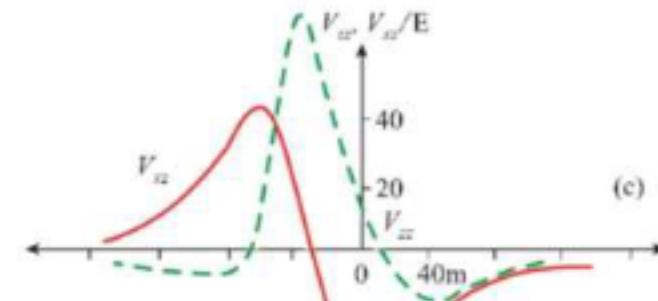
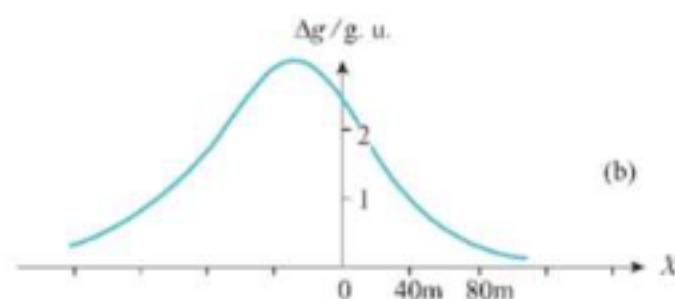
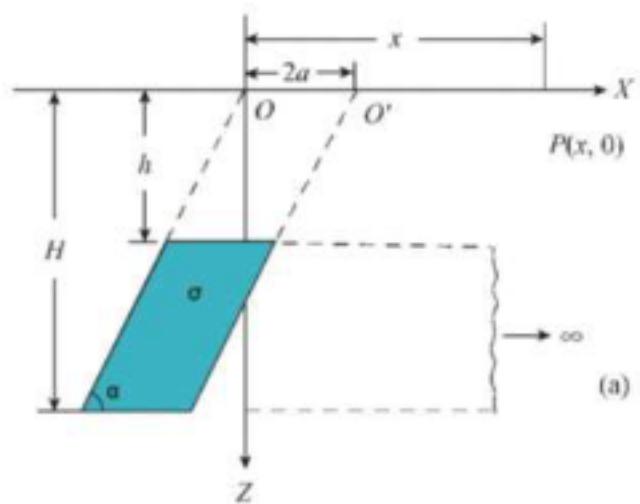
$$V_{zz} = 2G\sigma \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{h}{x-a} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{h}{x+a} \right) = 2G\sigma \operatorname{tg}^{-1} \frac{2ah}{x^2 + h^2 - a^2}$$

$$V_{zxx} = 2G\sigma \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + h^2} - \frac{x-a}{(x+a)^2 + h^2} \right] = 2G\sigma \frac{2a(a^2 + h^2 - x^2)}{(x^2 + a^2 + h^2)^2 - 4a^2 x^2}$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

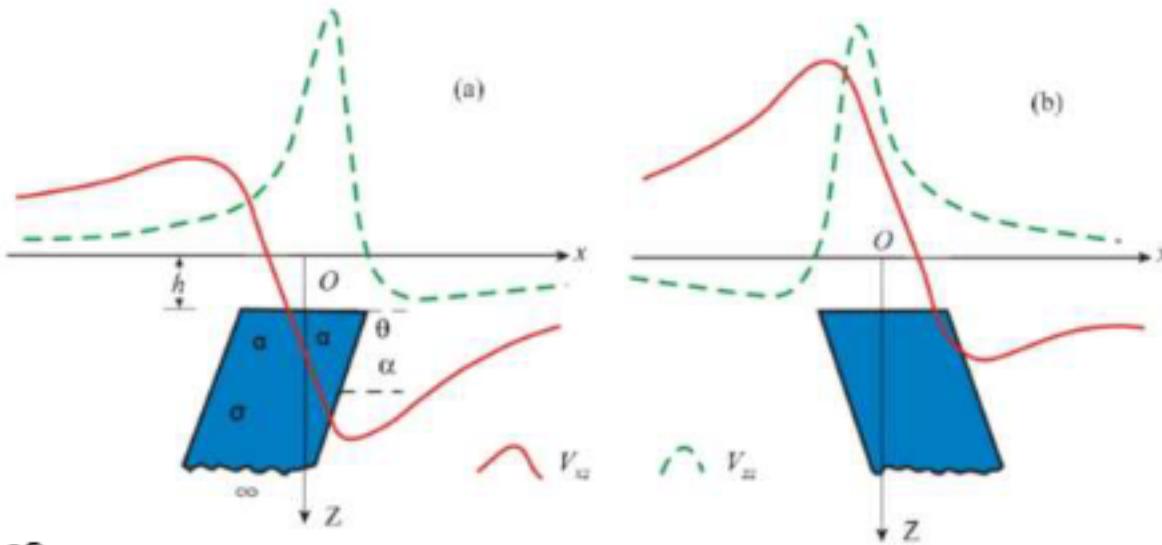
■ 倾斜脉



2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜脉无限延伸



$$\Delta g \rightarrow \infty$$

$$V_{xz} = G\sigma \left[\sin^2 \theta \ln \frac{(x-a)^2 + h^2}{(x+a)^2 + h^2} + \sin 2\theta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2ah}{x^2 - a^2 + h^2} \right]$$

$$V_{zz} = G\sigma \left[2 \sin^2 \theta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2ah}{x^2 - a^2 + h^2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \ln \frac{(x-a)^2 + h^2}{(x+a)^2 + h^2} \right]$$

2. 简单形体的正演

GeoGoku

■ 倾斜脉无限延伸

$$\left. \begin{array}{l} V_{xz}(x, \pi - \theta) = -V_{xz}(-x, \theta) \\ V_{zz}(x, \pi - \theta) = V_{zz}(-x, \theta) \end{array} \right\}$$

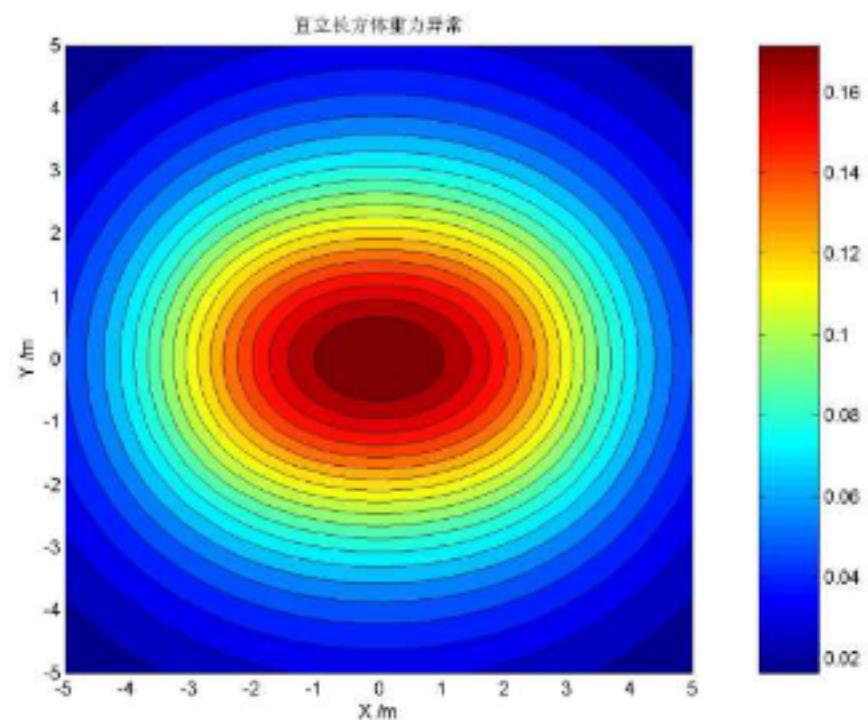
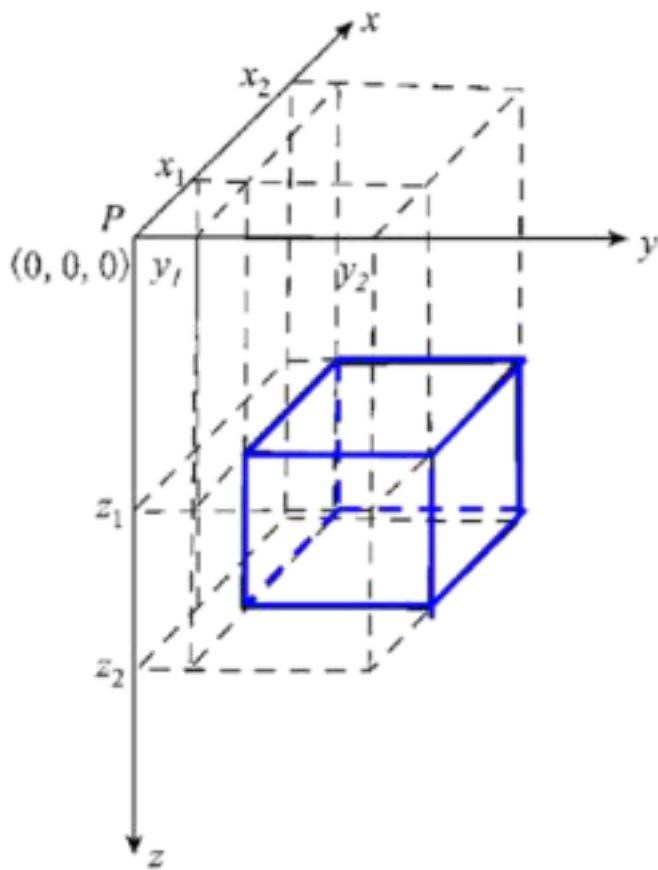
- 把倾角为 θ 的倾斜脉产生的 V_{xz} 曲线，先绕纵轴翻转180°，再绕横轴翻转180°，便得到其它条件相同但倾角为 $\pi - \theta$ 的倾斜脉产生的 V_{xz} 异常曲线了；而对于 V_{zz} 来说，只需要绕纵轴翻转180°即可。
- 当 $(V_{xz})_{\max} = |(V_{xz})_{\min}|$ 时，则 $\theta = 90^\circ$ 为铅垂脉，
- 若 $(V_{xz})_{\max} \neq |(V_{xz})_{\min}|$ ，则为倾斜脉，倾斜方向指向 V_{xz} 极值绝对值较小的一侧，随倾角变小， V_{xz} 两个极值绝对值的差也越大。

2.简单形体的正演

GeoGoku

■ 长方体（六面棱柱体）

$$\Delta g = -G\sigma \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} \xi \ln(\eta + \rho) + \eta \ln(\xi + \rho) - \zeta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi\eta}{\zeta\rho} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \\ z_1 \end{array} \right|$$





目 录

GeoGoku

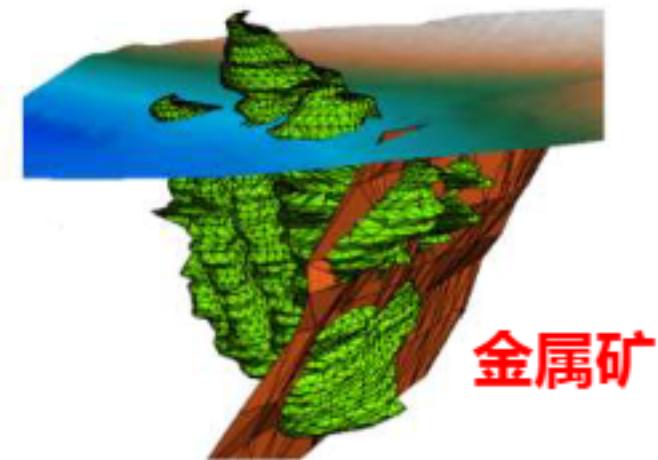
第一节 基本公式

第二节 简单形体的正演

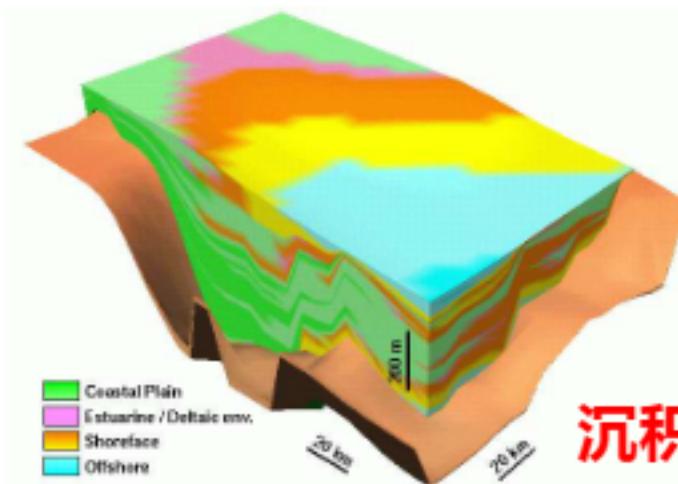
第三节 复杂形体的正演

3. 复杂形体的正演

- 实际地质体的形状不规则，且很复杂
- 正演没有数学解析式，无法直接正演计算重力异常



金属矿



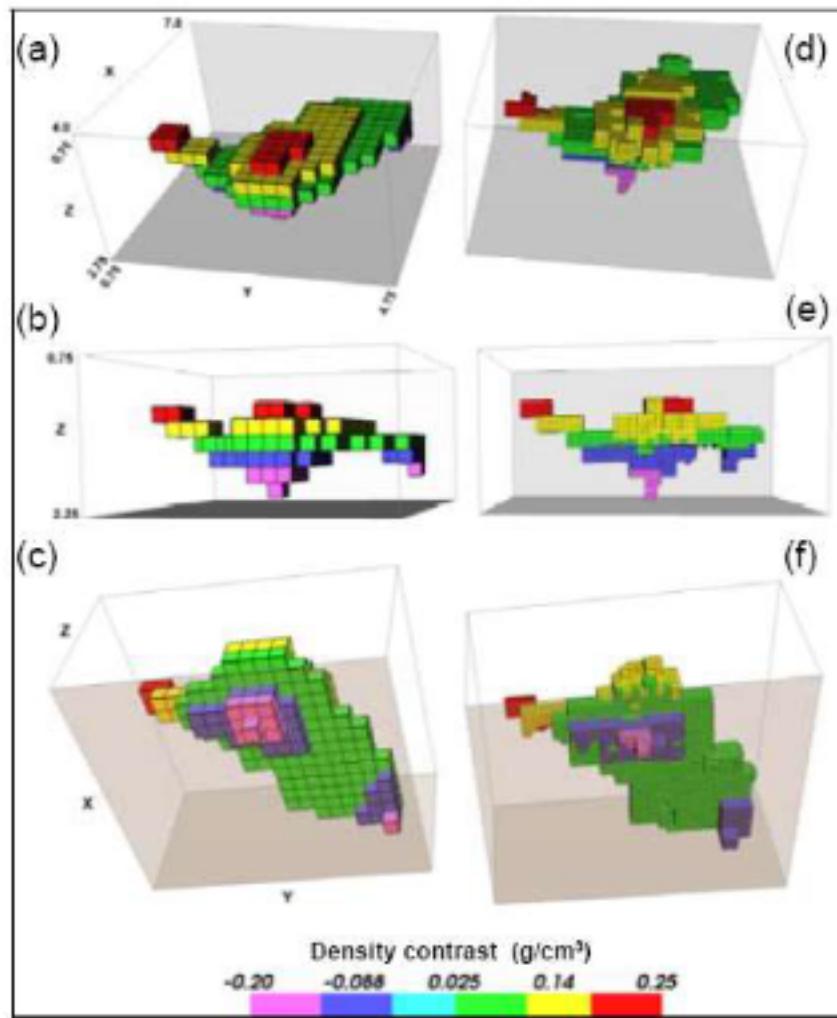
沉积盆地

$$\Delta g = G \iiint \frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}$$

3. 复杂形体的正演

如何正演不规则形体重力异常？

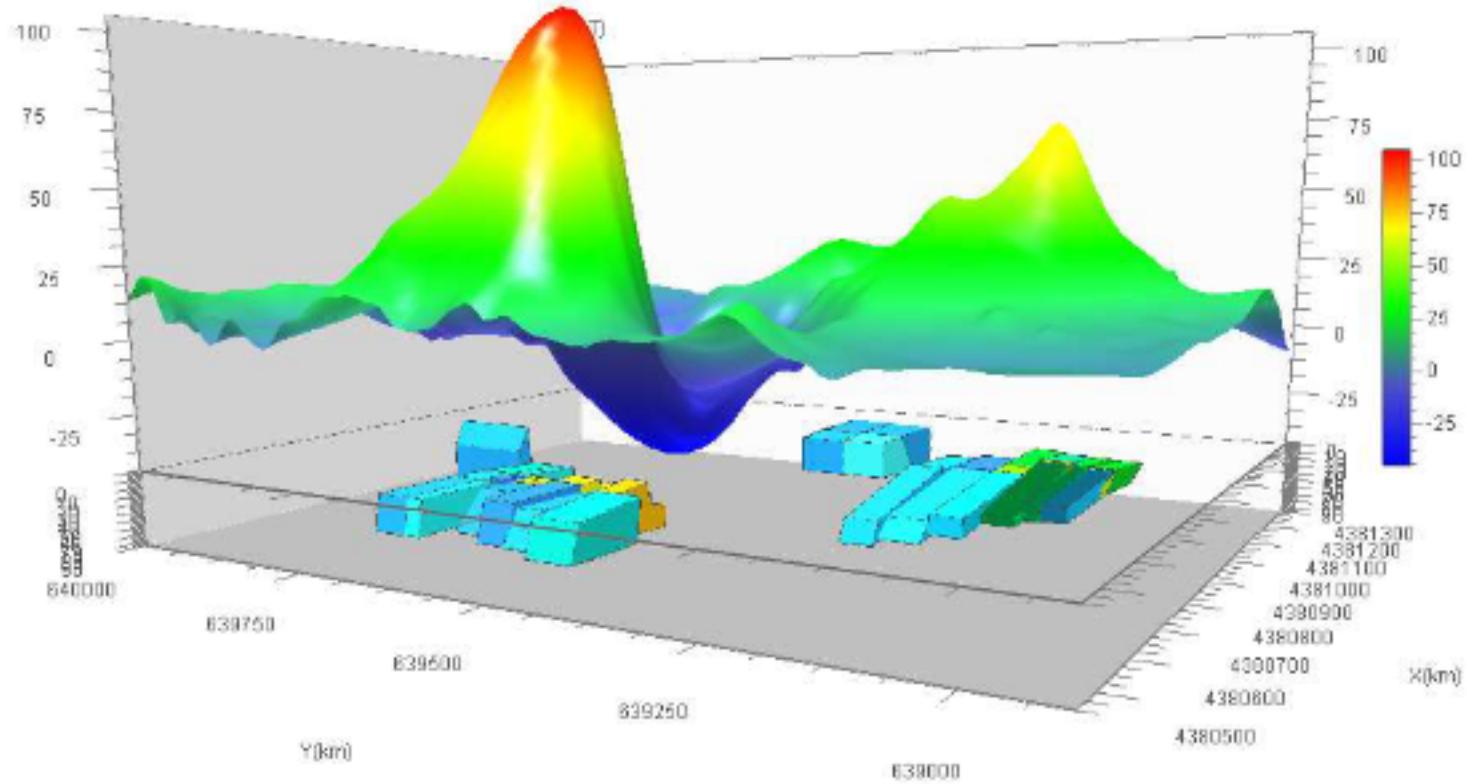
- ✓ 将不规则复杂形体剖分成规则形体的组合，计算每一个规则形体的异常，然后求和。
- ✓ 正演精度取决于规则体组合对不规则体的逼近程度



3.复杂形体的正演

GeoGoku

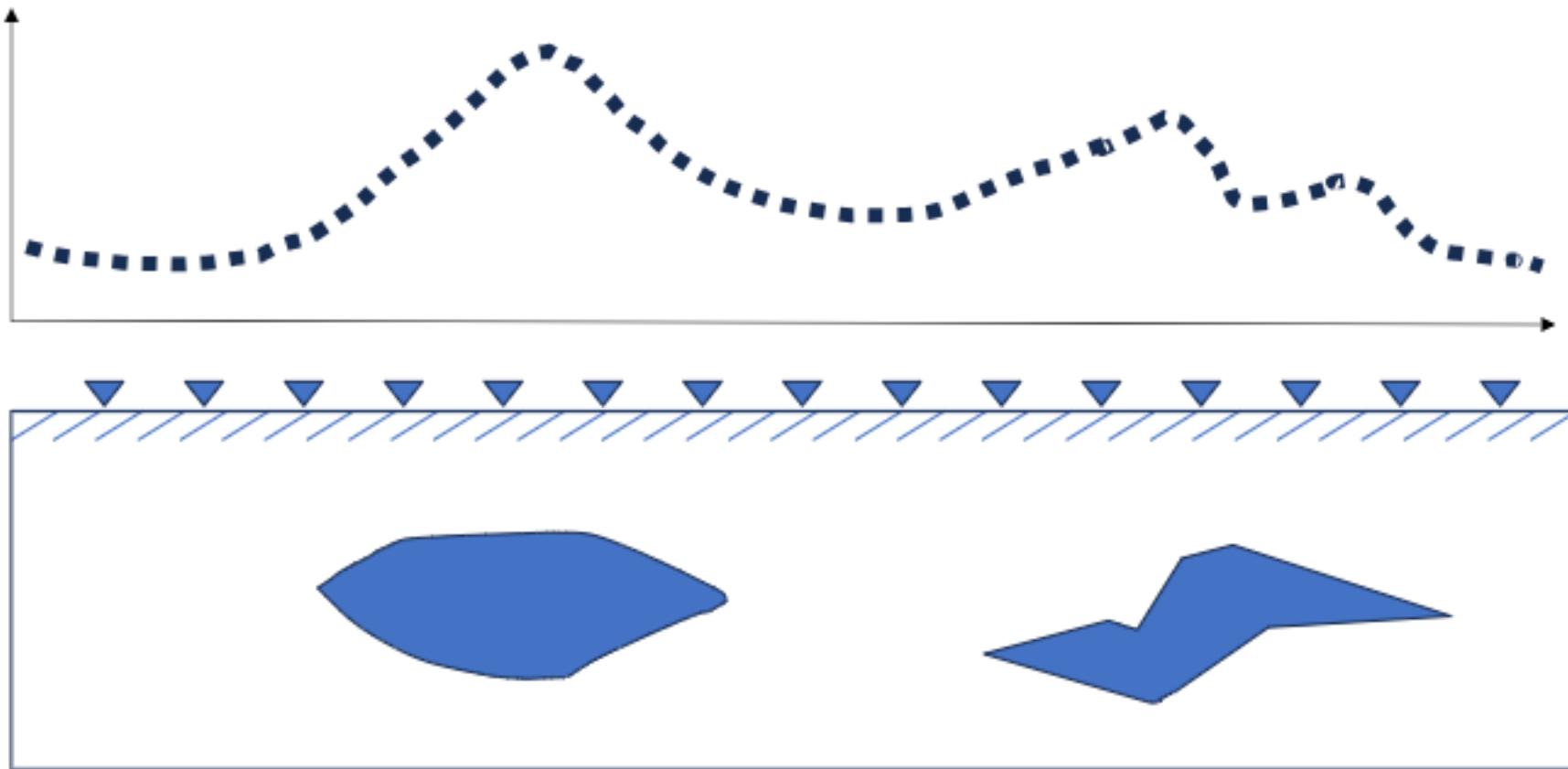
如何正演不规则形体重力异常?



3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体



3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体



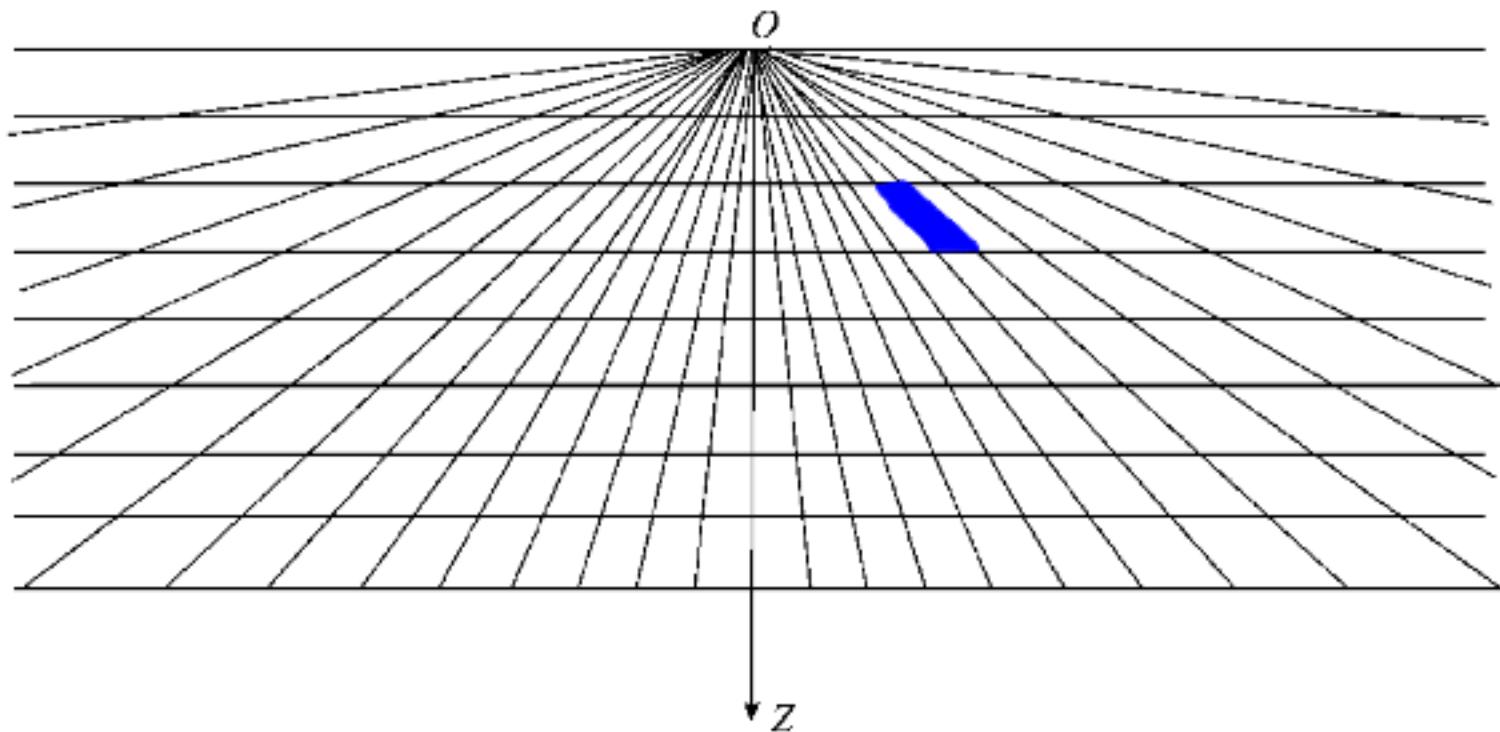
3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

量板法

将剖面的下半空间，按一定的要求划分成一系列形状相似但面积不等的面元。



3. 复杂形体的正演

■ 二度体

任一面元在原点产生的场

$$\delta g = 2G\sigma \iint_{ds} \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi d\zeta$$

$$\xi = r\cos\theta, \quad \zeta = r\sin\theta, \quad d\xi d\zeta = rd\theta dr, \quad \sin\theta dr = d\zeta$$

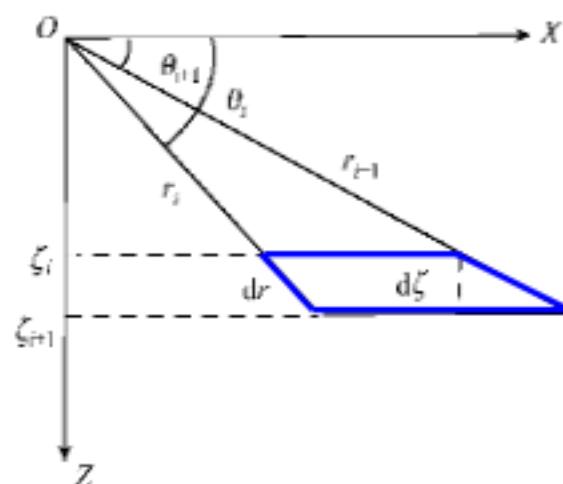
$$\delta g = 2G\sigma \iint_{ds} \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi d\zeta$$

$$= 2G\sigma \iint_{ds} \sin\theta d\theta dr$$

$$= 2G\sigma \Delta\zeta \Delta\theta$$

$$= 2G\sigma (\zeta_{i+1} - \zeta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

量板法



3. 复杂形体的正演

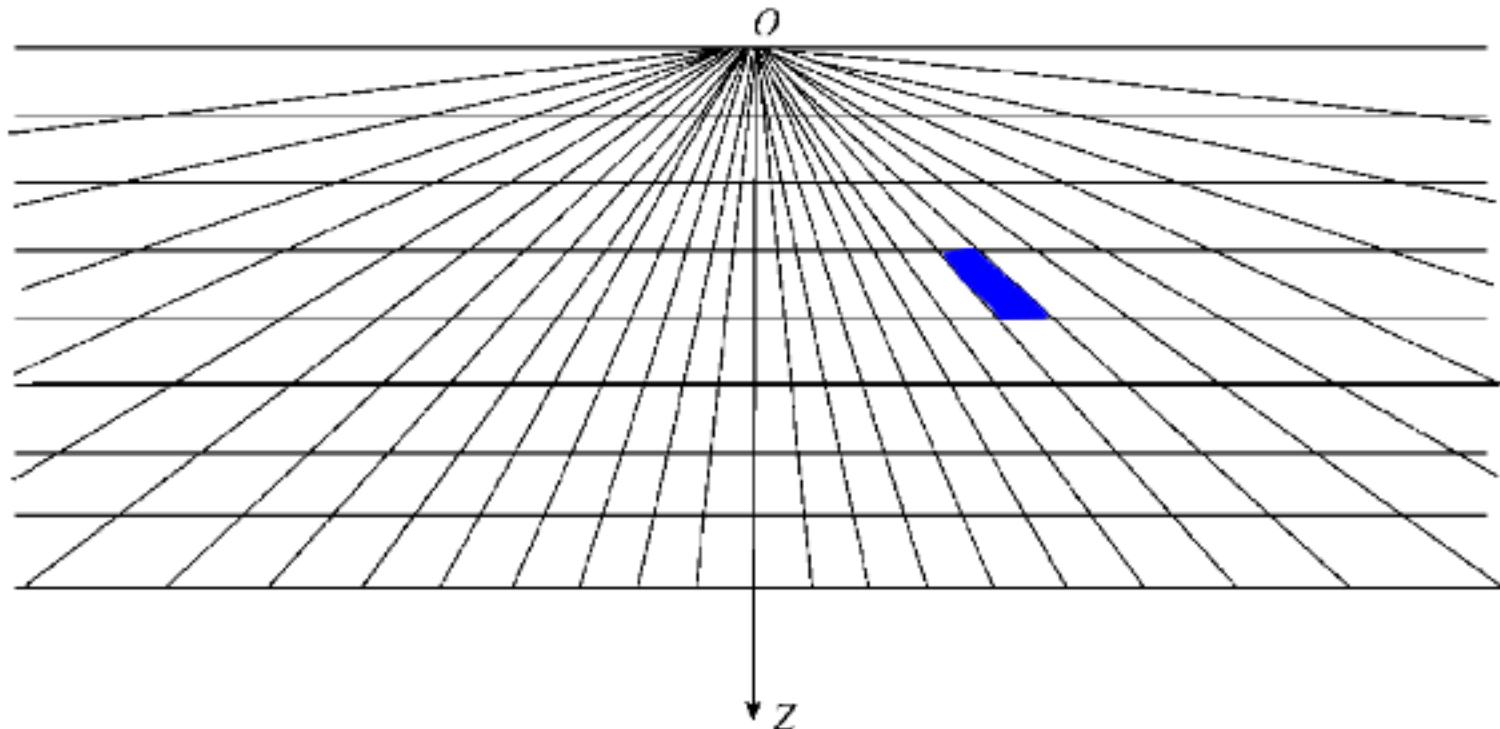
GeoGoku

■ 二度体

所有面元在原点产生的场

量板法

$$\Delta g = \sum S_i$$



3. 复杂形体的正演

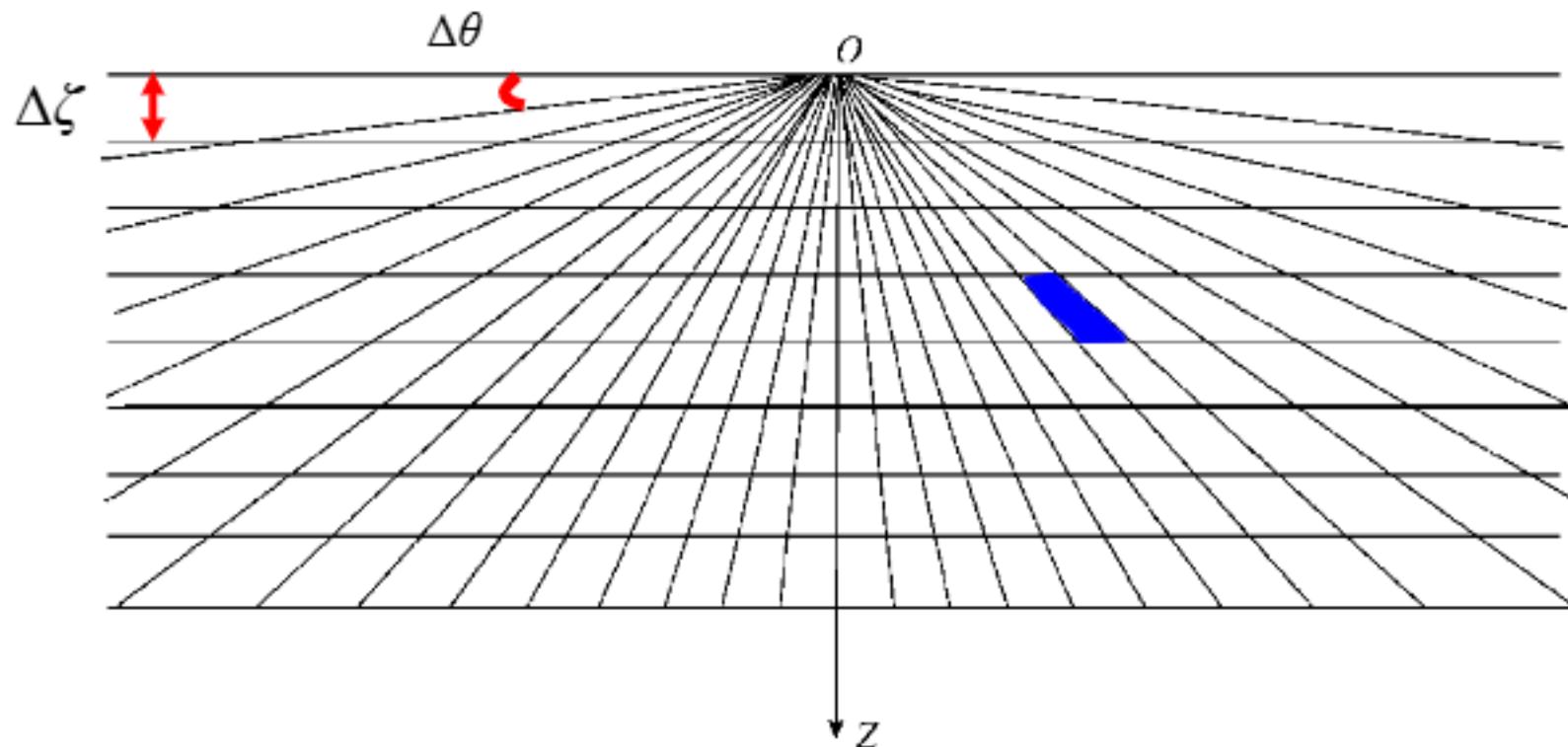
GeoGoku

■ 二度体

量板法

将下半空间用一组平行于 x 轴且间距为 $\Delta\zeta$ 的水平线和一组从原点出发夹角为 $\Delta\theta$ 的射线进行分割。

每一面元在原点处产生的异常是一相等的常数
(即量板的格值)。



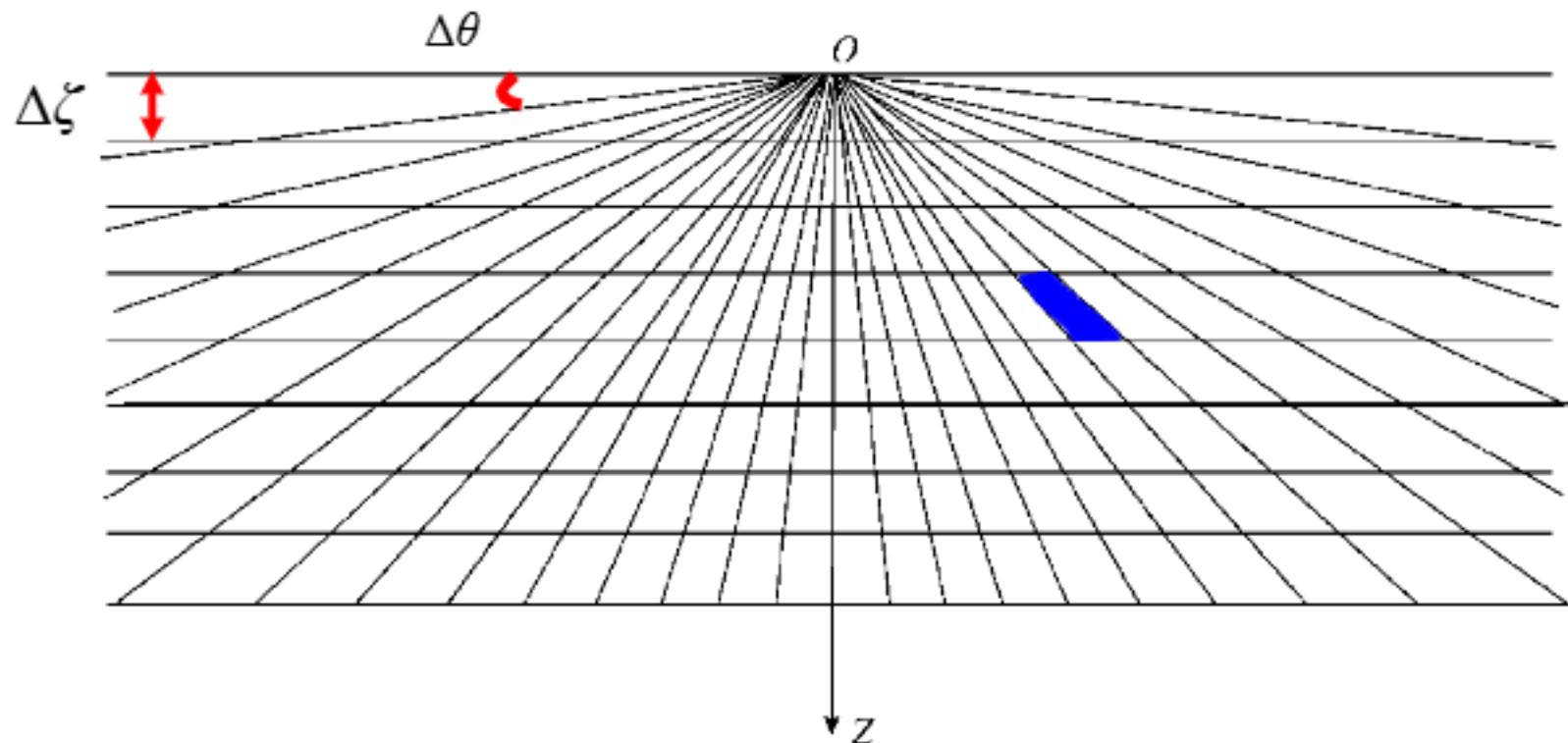
3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

量板法

影响量板法精度的因素有哪些，怎么减小计算误差？

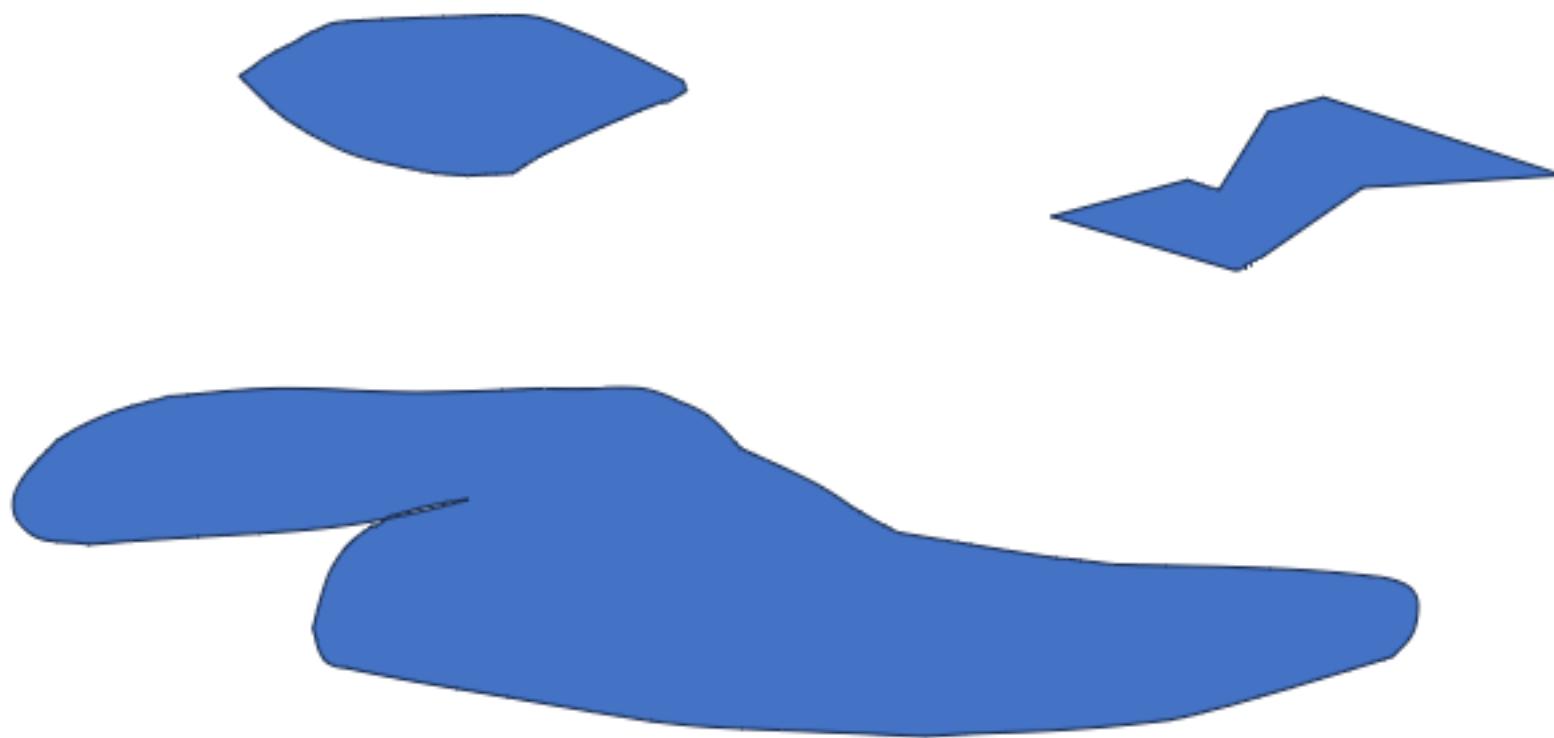


3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法





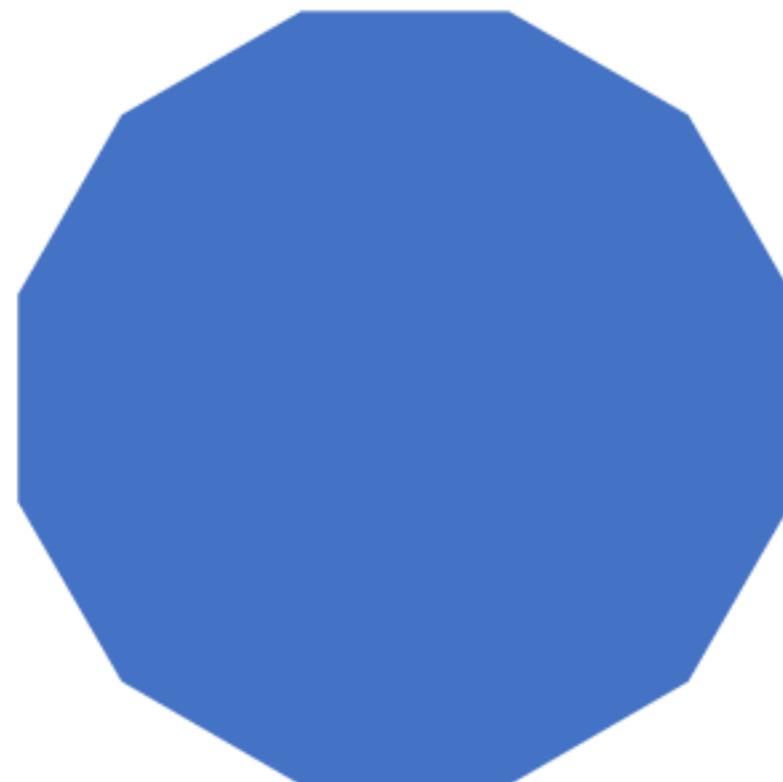
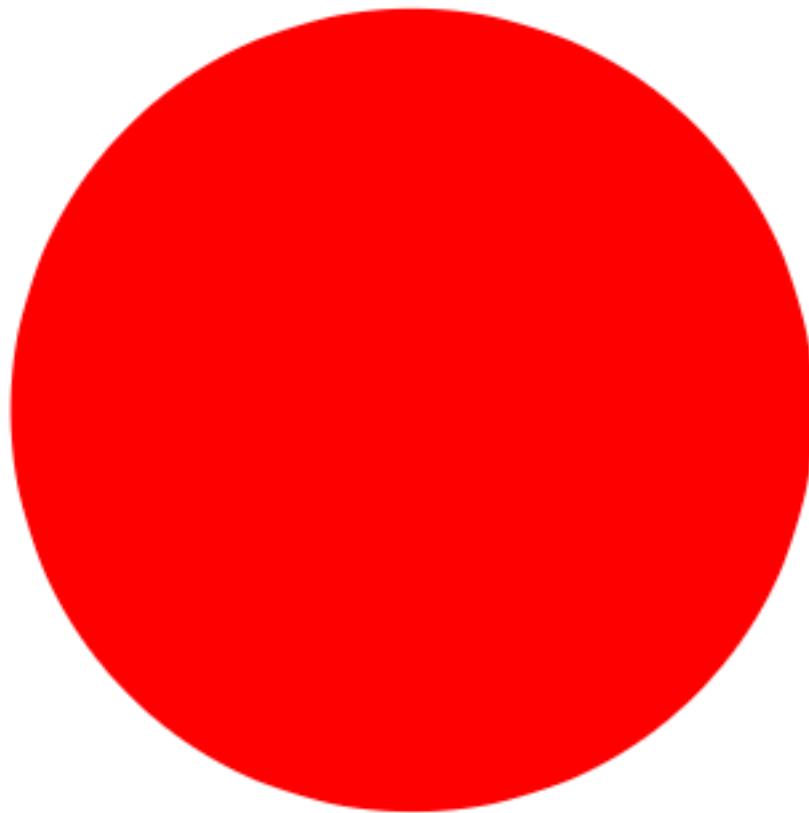
3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

对于横截面为任意形状的二度体，可以用多边形来逼近其截面的形状。



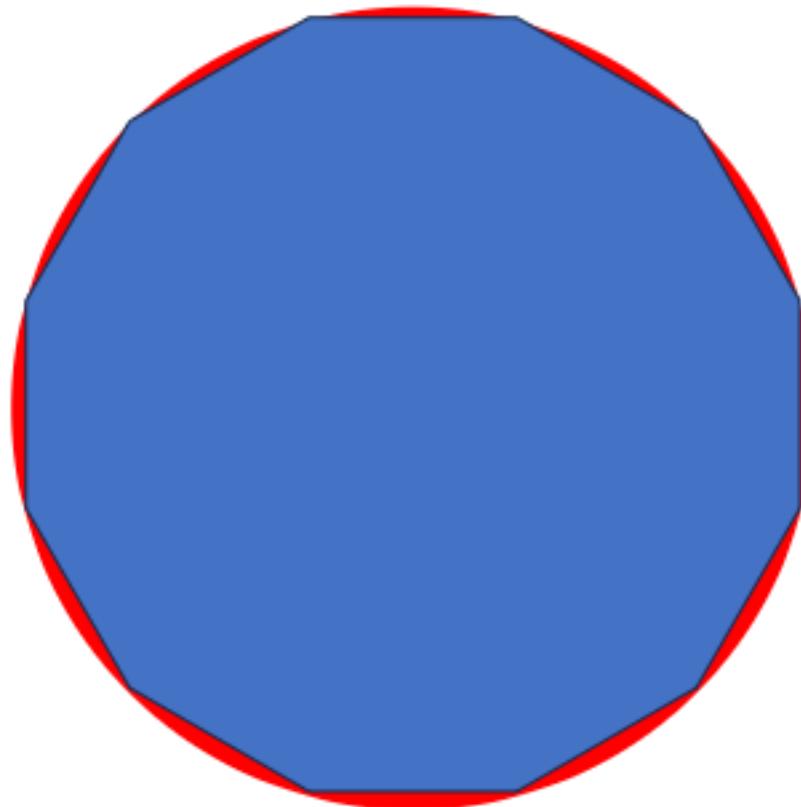
3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

对于横截面为任意形状的二度体，可以用多边形来逼近其截面的形状。



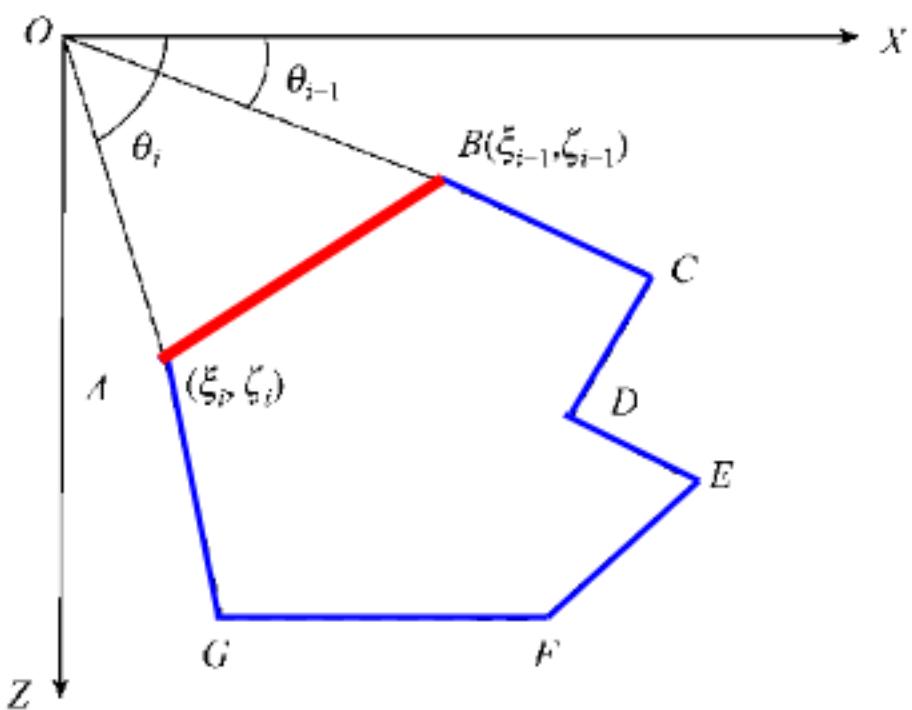
3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

只要给出多边形各角点的坐标(ξ, ζ)，就可以用解析式计算出它的重力异常来。其精度取决于多边形逼近任意形状的程度。



ΔOAB 截面在O点引起的重力异常：

$$\delta g_i = 2G\sigma \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta \int_0^\zeta d\zeta = 2G\sigma \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \zeta d\theta$$

$$\zeta = \frac{\xi_i \zeta_{i+1} - \xi_{i+1} \zeta_i}{ctg\theta(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - (\xi_{i+1} - \xi_i)}$$

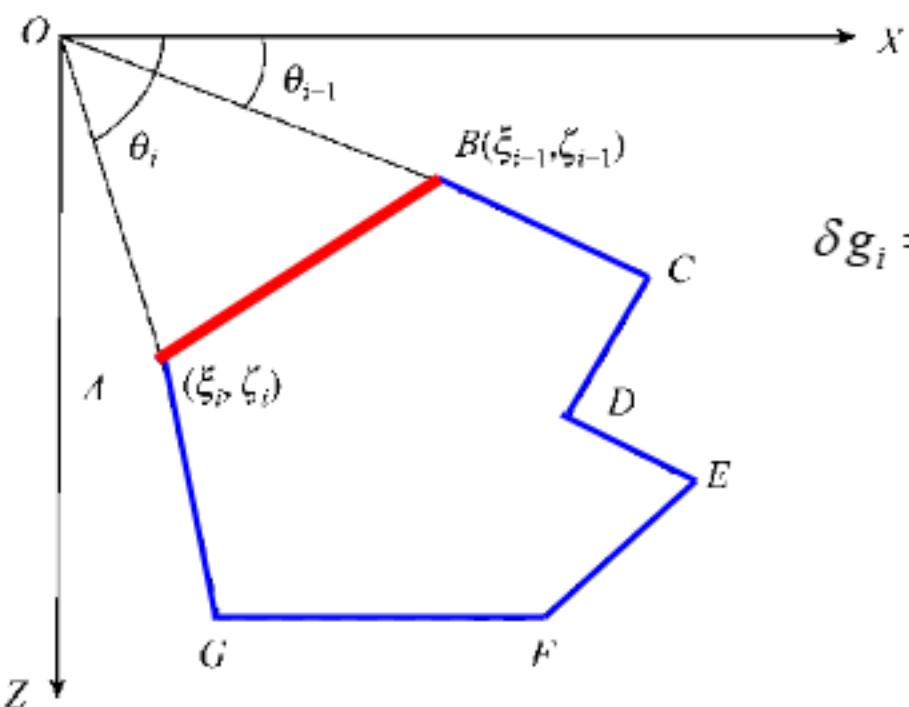
3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

只要给出多边形各角点的坐标(ξ, ζ)，就可以用解析式计算出它的重力异常来。其精度取决于多边形逼近任意形状的程度。



ΔOAB 截面在O点引起的重力异常：

$$\begin{aligned}\delta g_i &= 2G\sigma(\xi_i \zeta_{i+1} - \xi_{i+1} \zeta_i) \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{d\theta}{ctg\theta(\zeta_{i+1} - \zeta_i) - (\xi_{i+1} - \xi_i)} \\ &= 2G\sigma \frac{\xi_i \zeta_{i+1} - \xi_{i+1} \zeta_i}{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)^2 + (\xi_{i+1} - \xi_i)^2} \left[(\zeta_{i+1} - \zeta_i) \left(\tg^{-1} \frac{\zeta_i}{\xi_i} - \tg^{-1} \frac{\zeta_{i+1}}{\xi_{i+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \ln \frac{\xi_{i+1}^2 + \zeta_{i+1}^2}{\xi_i^2 + \zeta_i^2} \right]\end{aligned}$$

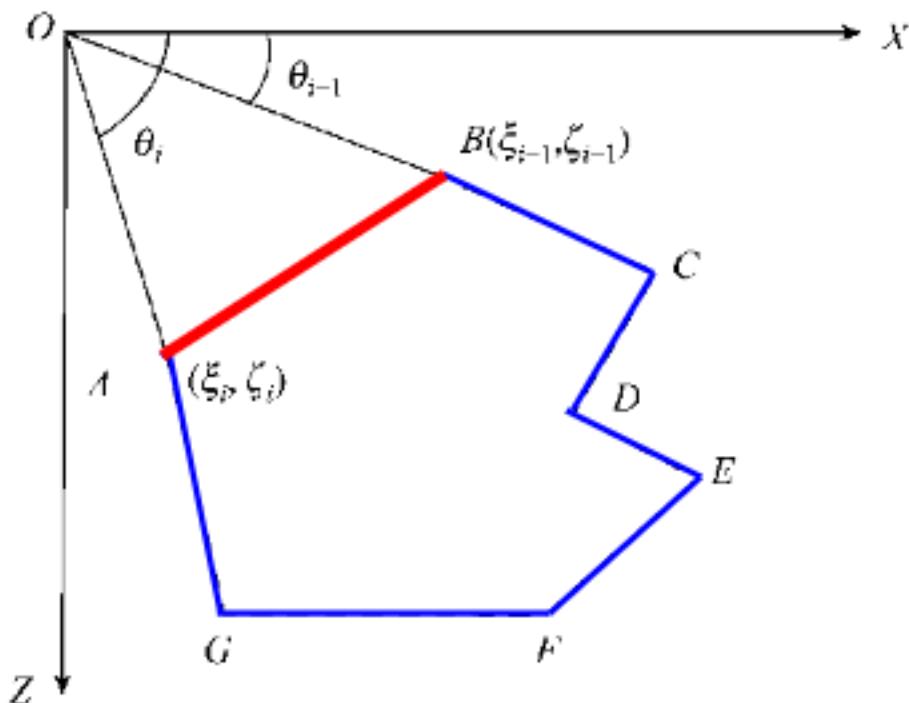
3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

只要给出多边形各角点的坐标(ξ, ζ)，就可以用解析式计算出它的重力异常来。其精度取决于多边形逼近任意形状的程度。



1. ΔOAB 截面在O点引起的重力异常；
2. 用同样的办法，把三角形 **OBC**, **OCD**……的重力异常值都算出来相加。
3. 由于是沿一个方向积分(如顺时针方向)求和，故多边形AB…A以外的面积部分产生的异常互相抵消，最后结果仅是该多边形所代表的二度体在原点处产生的重力异常。

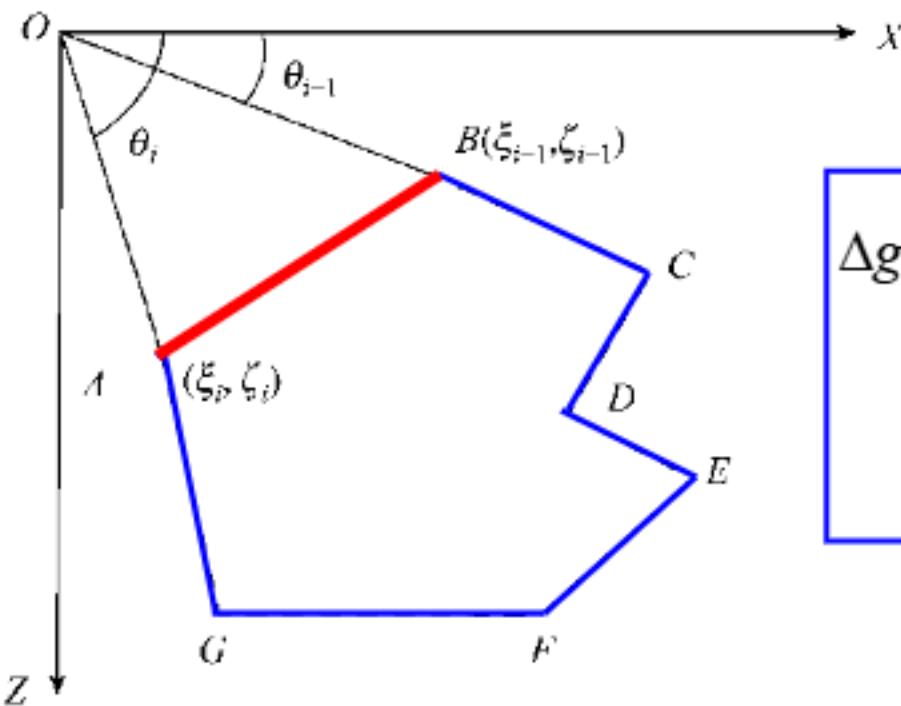
3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

只要给出多边形各角点的坐标(ξ, ζ)，就可以用解析式计算出它的重力异常来。其精度取决于多边形逼近任意形状的程度。



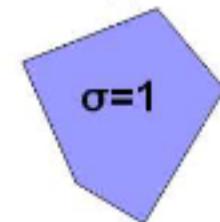
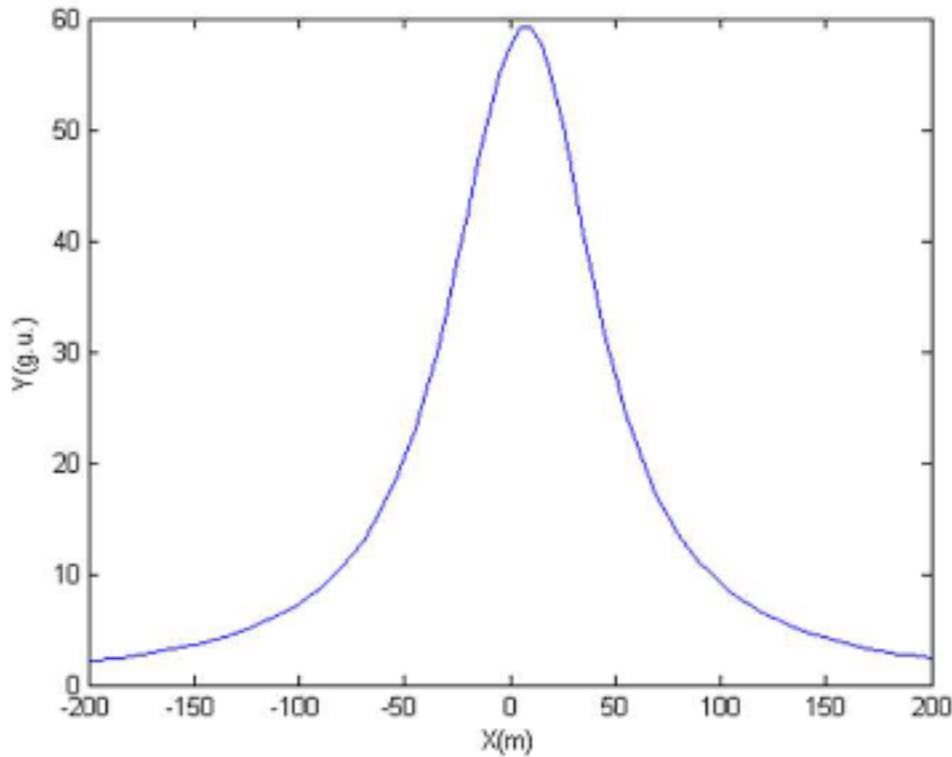
$$\Delta g = \sum_{i=1}^n \delta g_i = 2G\sigma \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \zeta_{i+1} - \xi_{i+1} \zeta_i}{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)^2 + (\xi_{i+1} - \xi_i)^2}$$
$$\cdot \left[(\xi_{i+1} - \xi_i) \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_{i+1}}{\zeta_{i+1}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi_i}{\zeta_i} \right) + \frac{1}{2} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \ln \frac{\xi_{i+1}^2 + \zeta_{i+1}^2}{\xi_i^2 + \zeta_i^2} \right]$$

3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 二度体

多边形截面法

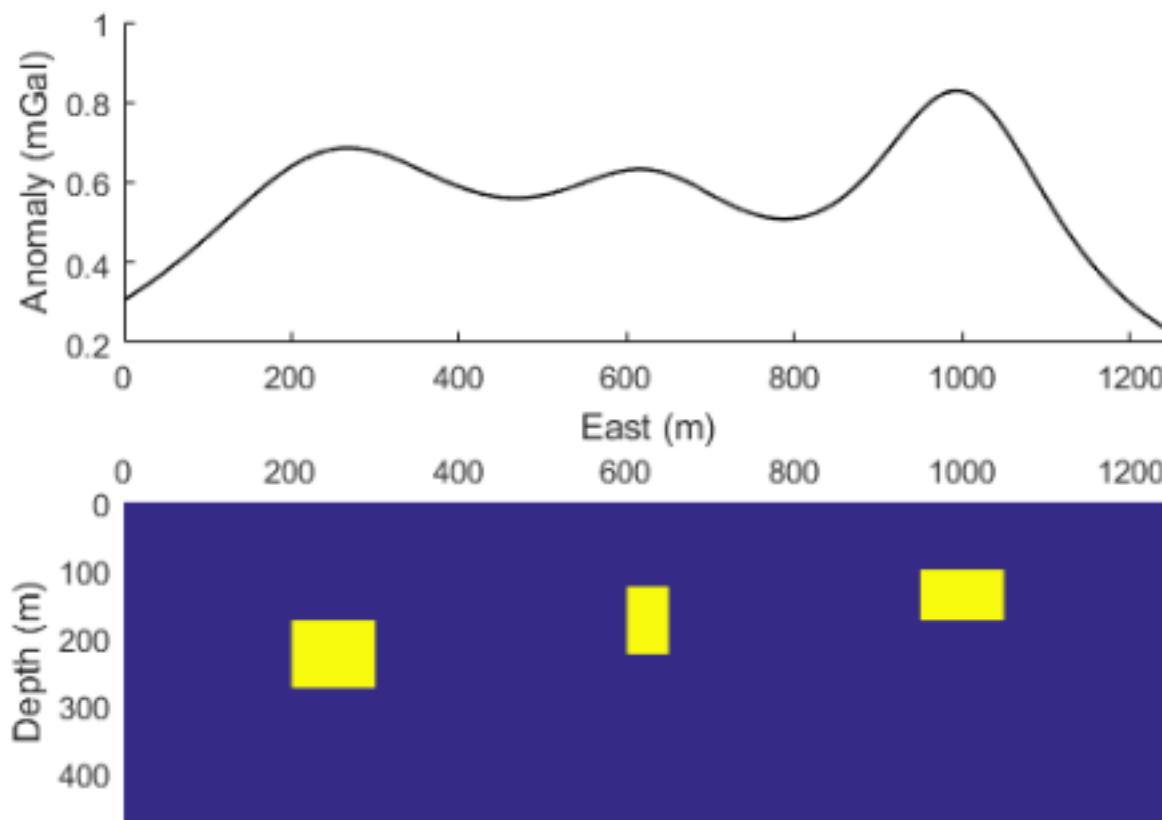


3. 复杂形体的正演

GeoGoku

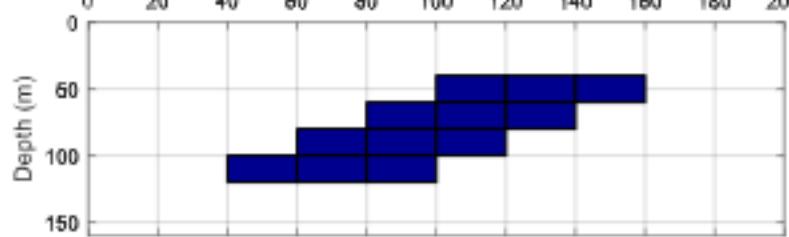
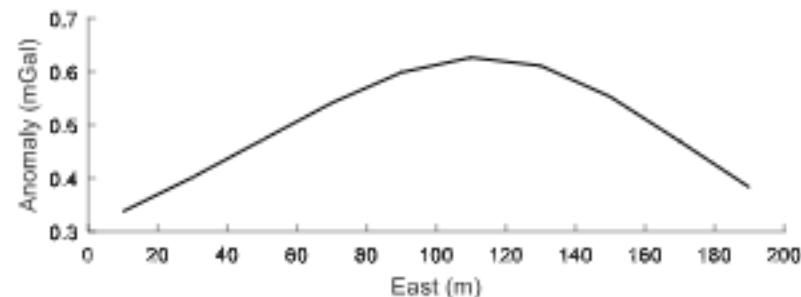
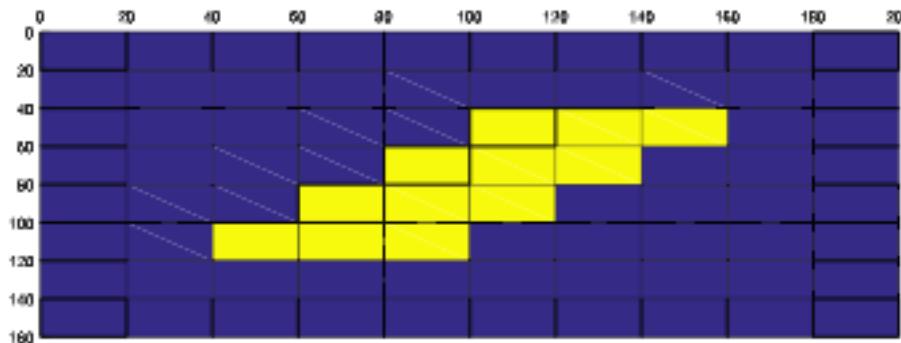
■ 二度体

组合法

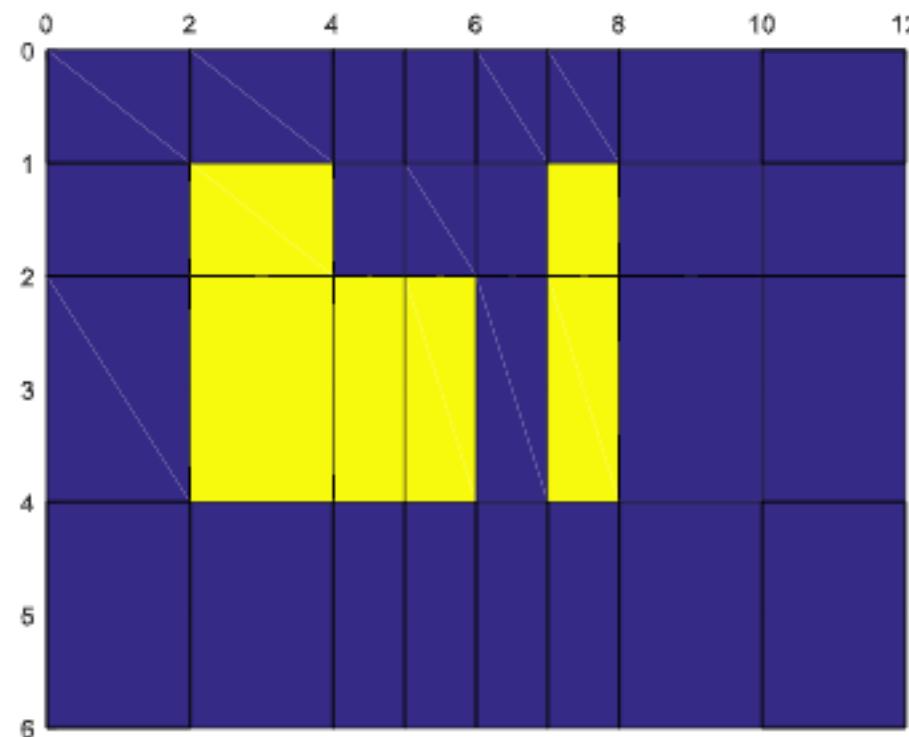


3. 复杂形体的正演

■ 二度体



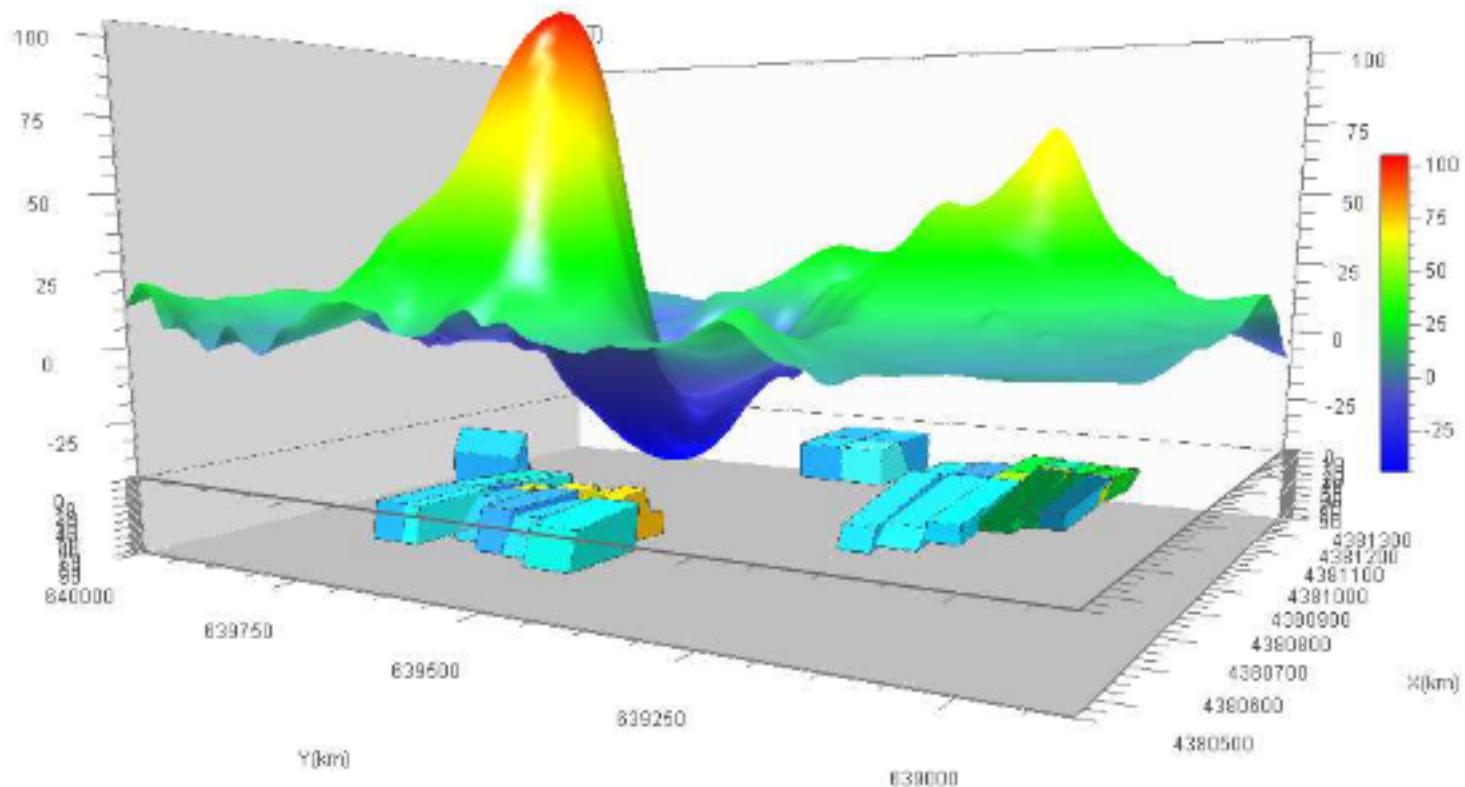
组合法



3.复杂形体的正演

GeoGoku

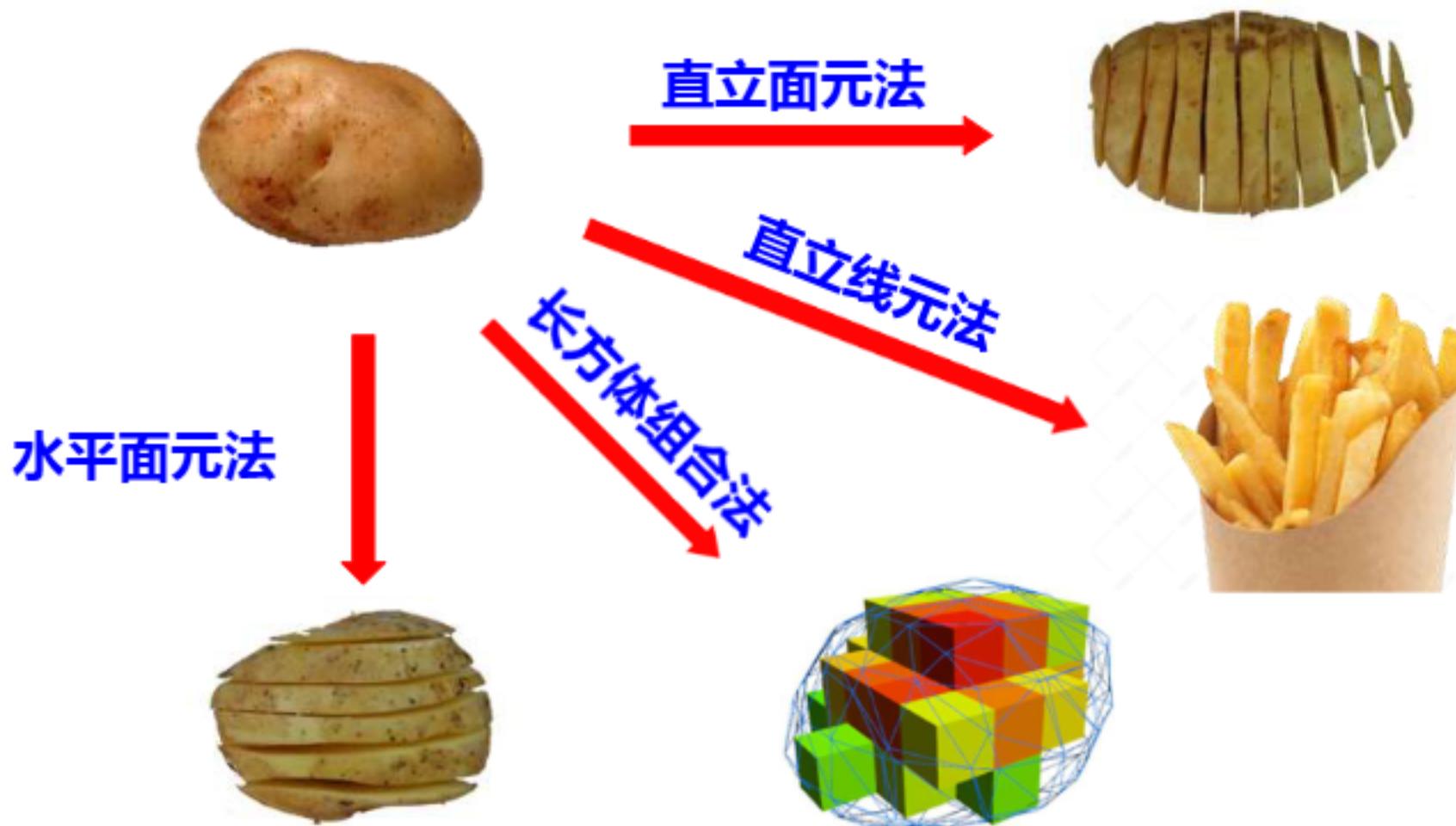
■ 三度体



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体





3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

- 把不规则形体分割为许多规则几何形体，每个几何形体的重力效应或作用值可以用一个解析式算出；
- 求出单个几何形体的作用值后，再通过数值积分便得到整个地质体的异常值。
- 因为这些规则几何形体不可能十分严密地与不规则形体吻合，所以这是一种近似计算，近似程度主要与不规则形体分割的细密程度有关。

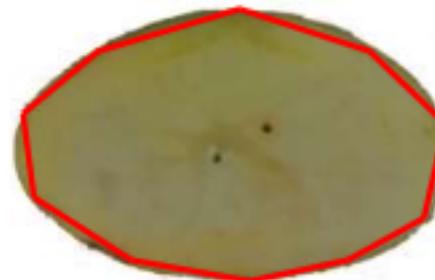
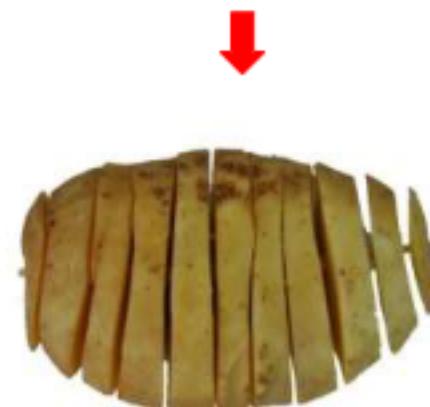
3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

1. 以一组互相平行的铅垂面将三度体分成若干个直立薄片；
2. 每一片又用适当的多边形来逼近其形状；
3. 用数学解析法计算每一薄片在计算点的重力效应；
4. 对所有薄片作用值进行数值积分即得整个三度体产生的异常。

直立面元法



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

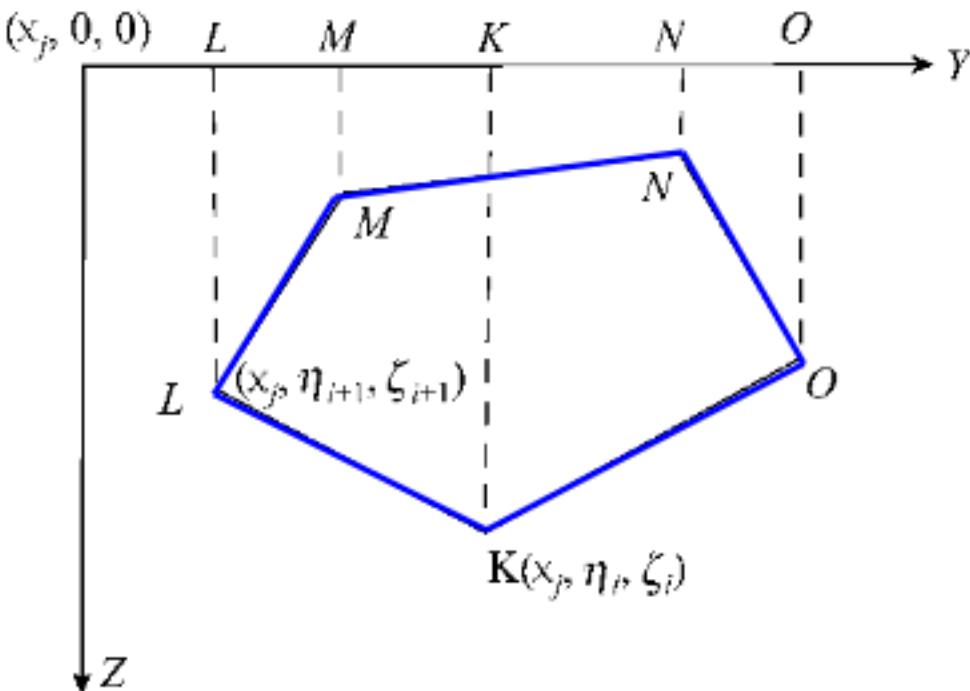
薄片异常 (直立面元) :

$$S(\xi) = \iint \frac{\zeta d\eta d\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

总异常:

$$\Delta g = G\sigma \iiint \frac{\zeta d\xi d\eta d\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} = G\sigma \int S(\xi) d\xi$$

直立面元法



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

直立面元法

薄片异常 (直立面元) :

$$S(\xi_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+C_i^2}} \ln \frac{R_{i+1}\sqrt{1+C_i^2} + \eta_i(1+C_i^2) + C_i D_i}{R_i\sqrt{1+C_i^2} + \eta_i(1+C_i^2) + C_i D_i}$$

总异常:

$$\begin{aligned}\Delta g &= G\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_m} S(\xi_j) d\xi \\ &= G\mu \sum_{j=1}^m s(\xi_j) \quad \mu = \sigma \Delta \xi\end{aligned}$$

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

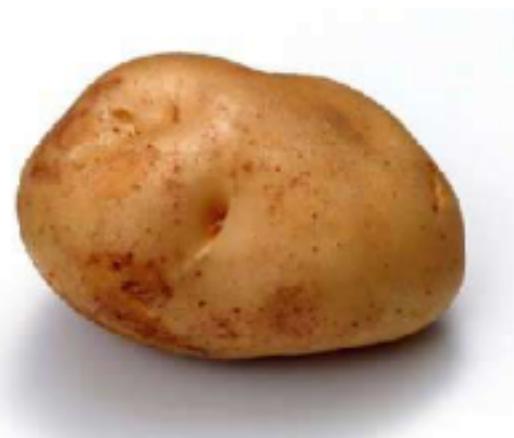
■ 三度体

原理同直立面元法，只是改为水平方向切割。由塔尔瓦尼(Talwani, 1959)提出，在国际上非常流行。

$$S(\zeta_j) = G\sigma \sum_{i=1}^n \left[(\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \sin^{-1} \frac{\zeta_j \cos \theta_{i+1}}{(P_i^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{\zeta_j \cos \theta_i}{(P_i^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} \right]$$

$$\Delta g = \int_{\zeta'_1}^{\zeta'_m} S(\zeta_j) d\zeta$$

水平面元法



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

薄片异常 (水平面元)

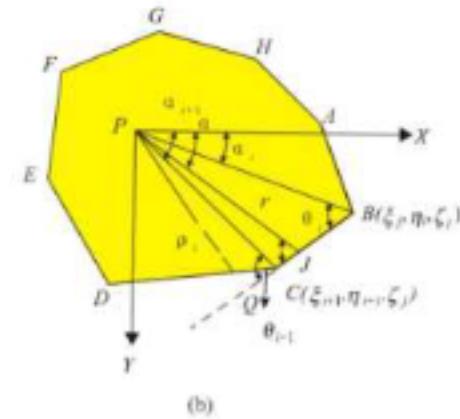
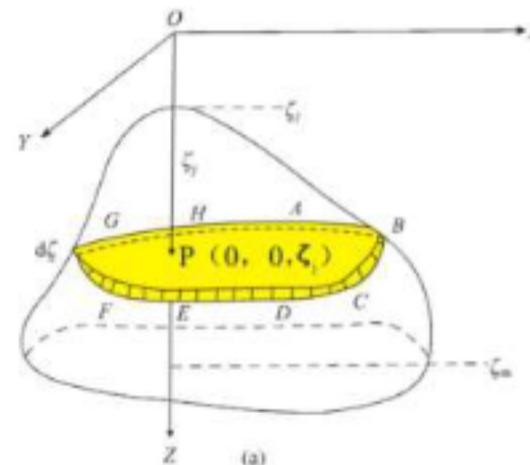
$$S(\zeta) = \iint \frac{\zeta r d\alpha dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$S(\zeta_j) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\zeta_j r d\alpha dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{\zeta_j}{(r^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} \right] d\alpha$$

上边的积分中， r 是 α 的函数，首先要找出 r 和 α 的关系。

水平面元法



$$PQ = P_i$$

$$\theta = \theta_i + (\alpha - \alpha_i)$$

$$r = P_i / \sin \theta$$

$$d\alpha = d\theta$$

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

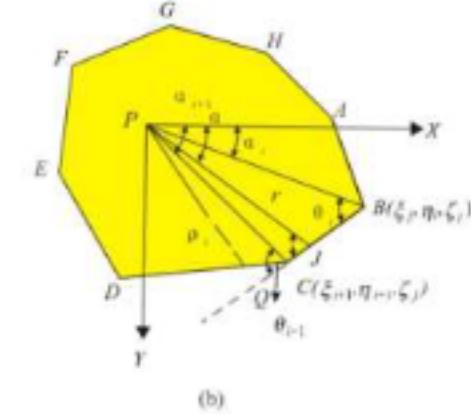
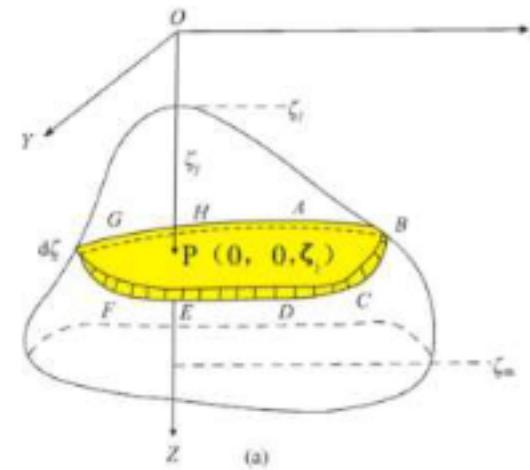
水平面元法

薄片异常 (水平面元)

$$S(\zeta) = \iint \frac{\zeta r d\alpha dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$S(\zeta_j) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\zeta_j r d\alpha dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{\zeta_j}{(r^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} \right] d\alpha$$



$$\begin{aligned}\delta g(S(\zeta_j)) &= (\alpha_{i+1} - \alpha_i) - \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\zeta_j d\theta}{[(P_i / \sin \theta)^2 + \zeta_j^2]^{1/2}} \\ &= (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \arcsin \frac{\zeta_j \cos \theta_{i+1}}{[P_i^2 + \zeta_j^2]^{1/2}} - \arcsin \frac{\zeta_j \cos \theta_i}{[P_i^2 + \zeta_j^2]^{1/2}}\end{aligned}$$

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

水平面元法

薄片异常 (水平面元)

$$S(\zeta) = \iint \frac{\zeta r d\alpha dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}}$$

$$S(\zeta_j) = \sum_{i=1}^n \left[(\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \sin^{-1} \frac{\zeta_j \cos \theta_{i+1}}{(P_i^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} - \sin^{-1} \frac{\zeta_j \cos \theta_i}{(P_i^2 + \zeta_j^2)^{1/2}} \right]$$

总异常

$$\Delta g = G\sigma \iiint \frac{\zeta r d\alpha dr d\zeta}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}} = G\sigma \int S(\zeta) d\zeta$$

$$\Delta g = G\sigma \int_{\zeta'_1}^{\zeta'_m} S(\zeta_j) d\zeta$$

3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

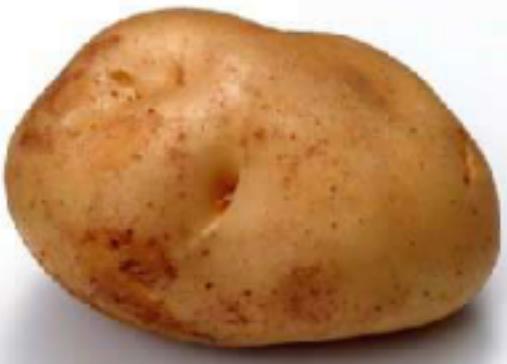
水平面元法

- ✓ 本方法对于计算以等深线表示的沉积盆地的异常十分有利，特别是当密度随深度变化需要分层时更为方便。
- ✓ 同时，它也可以用来计算以等高线表示的地形质量产生的作用值，用以进行地形校正。

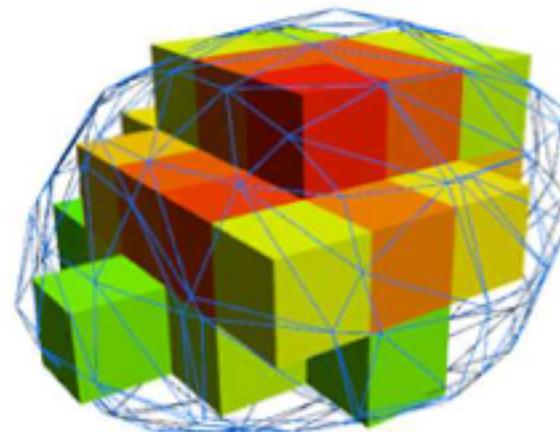
3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体



长方体组合法



$$S_i = -G\sigma \left| \left| \left[\xi \ln(\eta + \rho) + \eta \ln(\xi + \rho) - \zeta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi\eta}{\zeta\rho} \right] \right| \right|_{x_1}^{x_2} \left| \right|_{y_1}^{y_2} \left| \right|_{z_1}^{z_2}$$



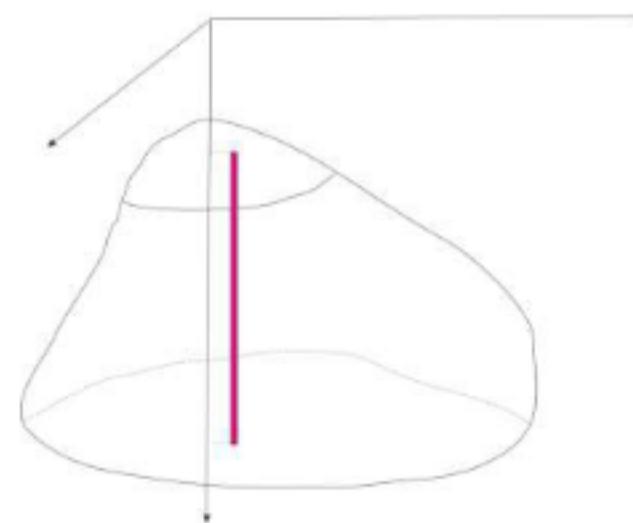
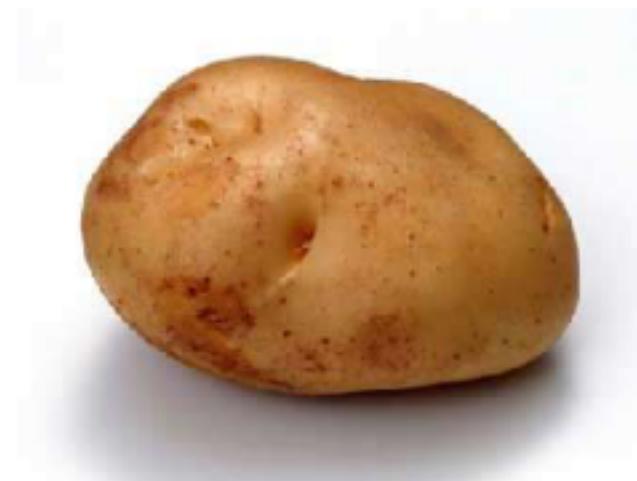
$$\Delta g = \int_{\zeta'_1}^{\zeta'_m} S_i d\zeta$$

3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

直立线元法



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

直立线元法

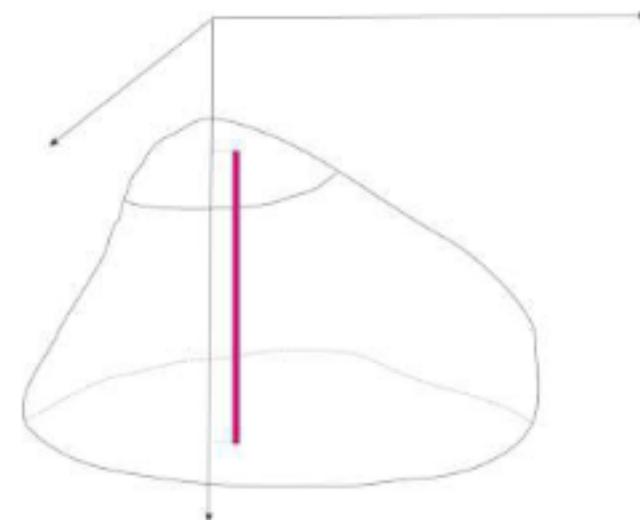
1. 用两组互相垂直的直立平面把地质体分割

为“一束”水平截面积很小的直立长方体，

这些长方体可以看做为一组“线元”；

2. 这些“线元”可以用解析式计算出来；
3. 最后用两个方向的数值积分求出整个模型

体的异常。



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

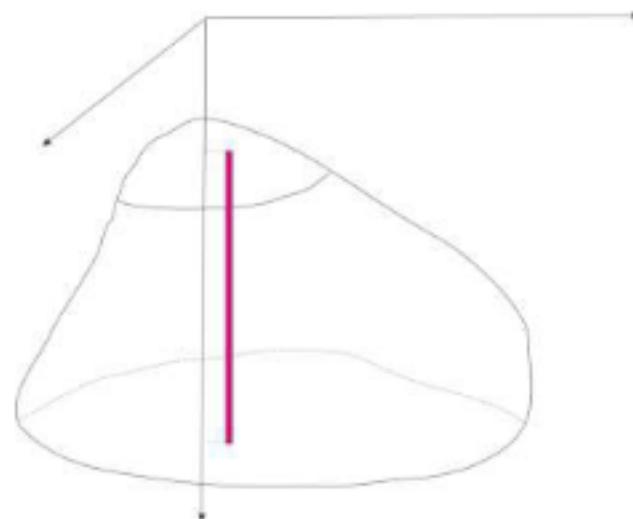
直立线元法

直立线元

$$F = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta}{\rho^3} d\zeta = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$$

$$\rho_1 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta_1^2) \quad \rho_2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta_2^2)$$

总异常

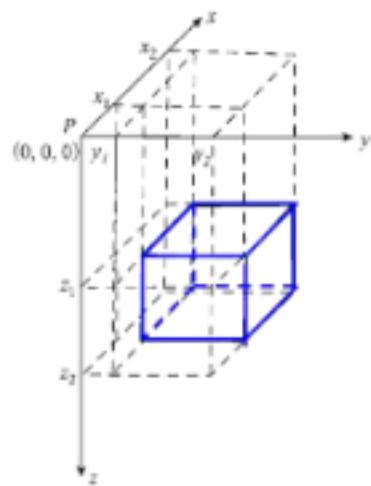
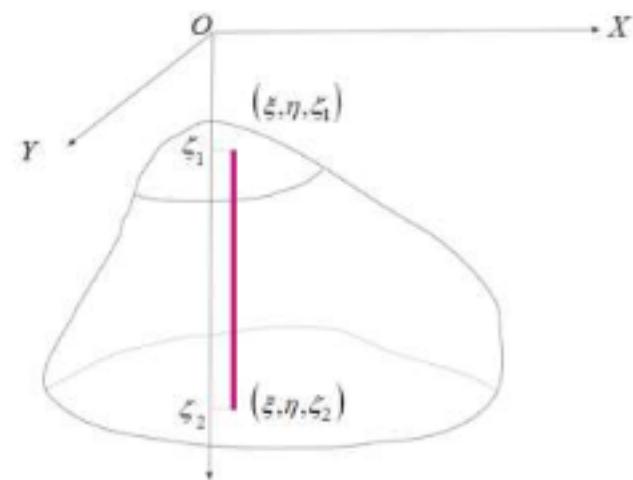
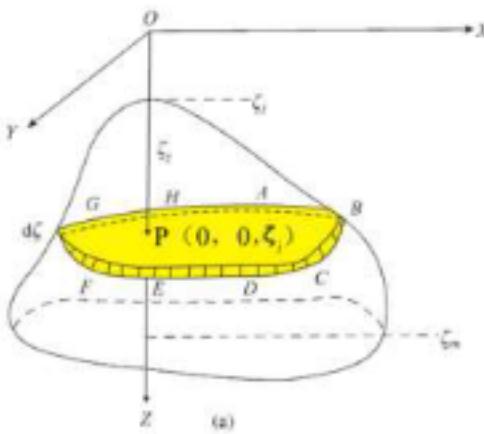
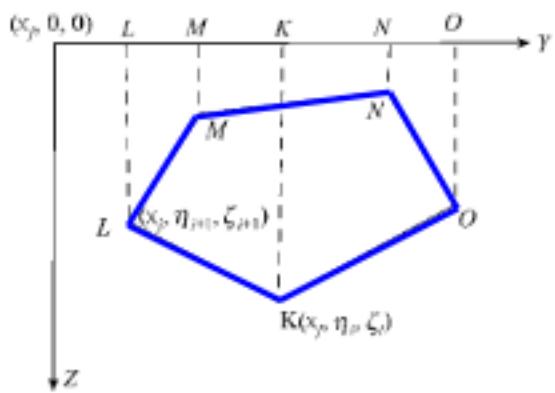


$$\Delta g = G\sigma \iiint \frac{\zeta d\xi d\eta d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} = G\sigma \iint \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta}{\rho^3} d\zeta d\xi d\eta$$

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 三度体

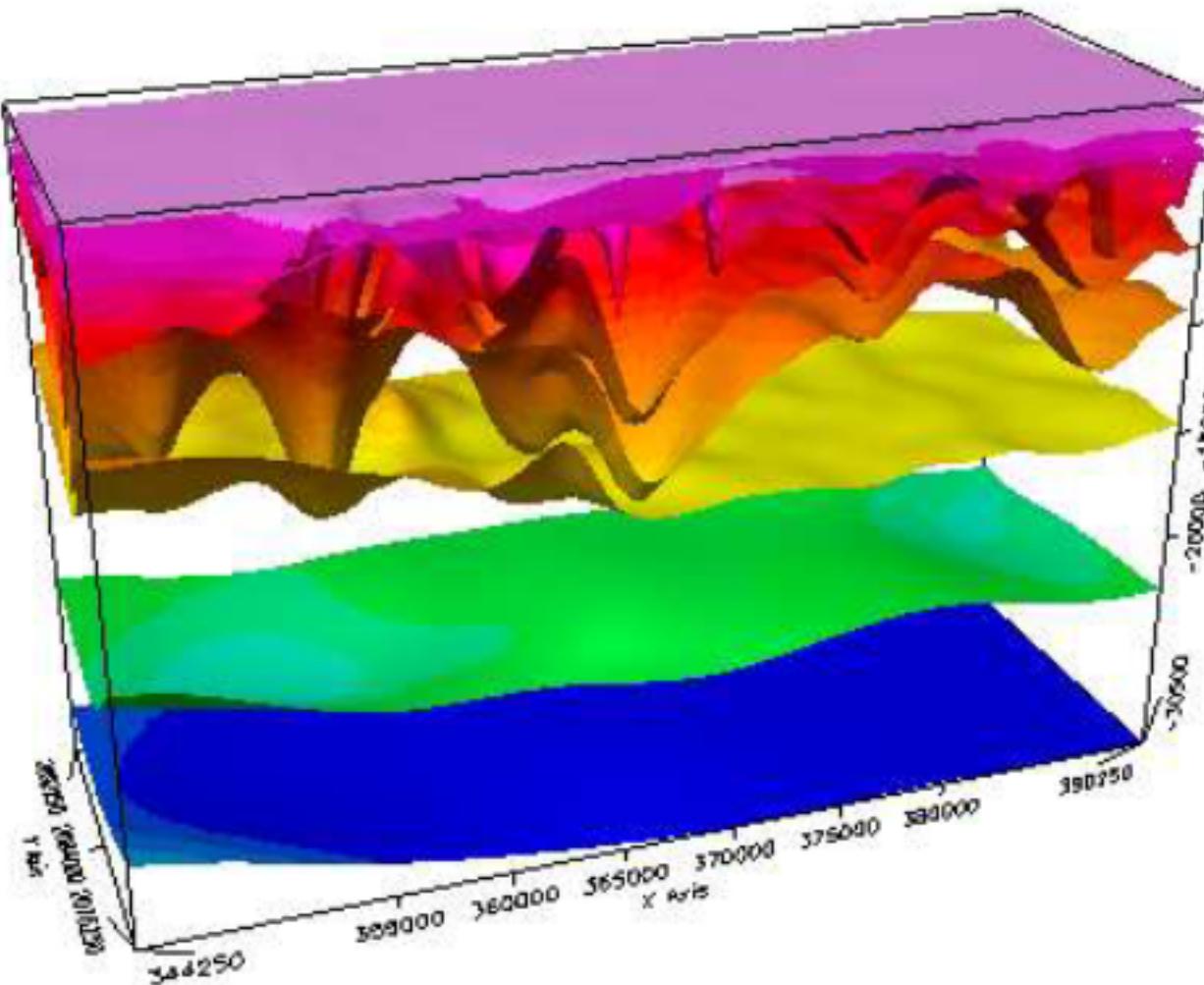
电磁、地震方法可以采用组合法/
微元法进行正演模拟吗？为什么？



3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面

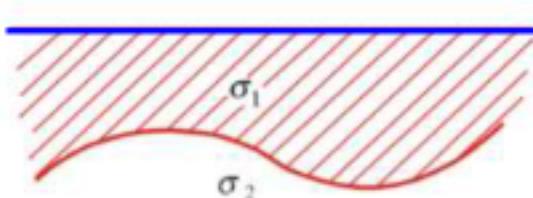


3. 复杂形体的正演

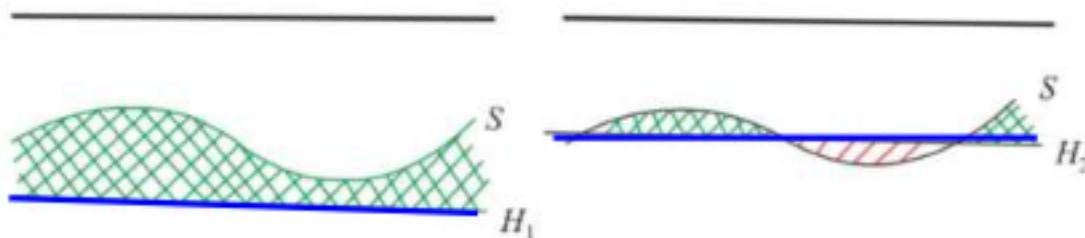
GeoGoku

■ 界面

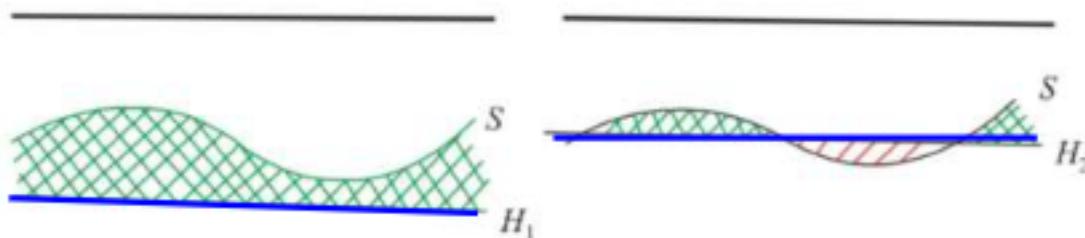
密度分界面重力异常正演的等效性



(a)



(b)



(c)

左：由地面与S面构成的物质层，剩余密度 $\sigma'=\sigma_1-\sigma_2$ ；

中：S面与其下方某一水平面H₁构成的物质层，剩余密度 $\sigma'=\sigma_2-\sigma_1$ ；

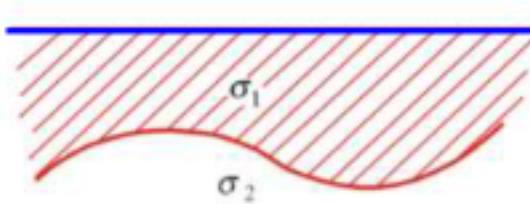
右：穿过S面的某一水平面H₂与S面构成的物质层可分为两部分，相应的剩余密度分别为 σ 和 σ' 。

3. 复杂形体的正演

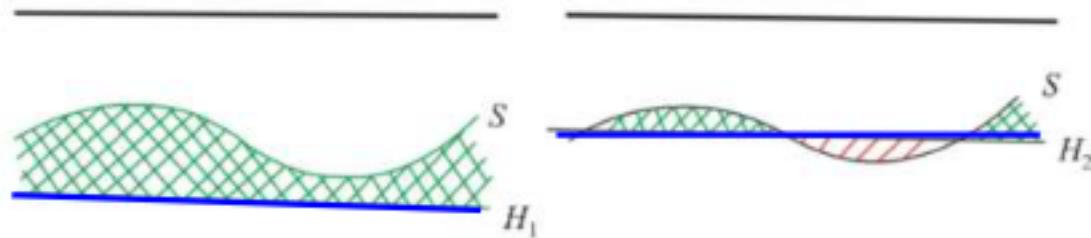
GeoGoku

■ 界面

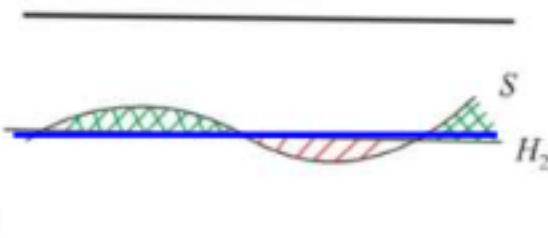
密度分界面重力异常正演的等效性



(a)



(b)



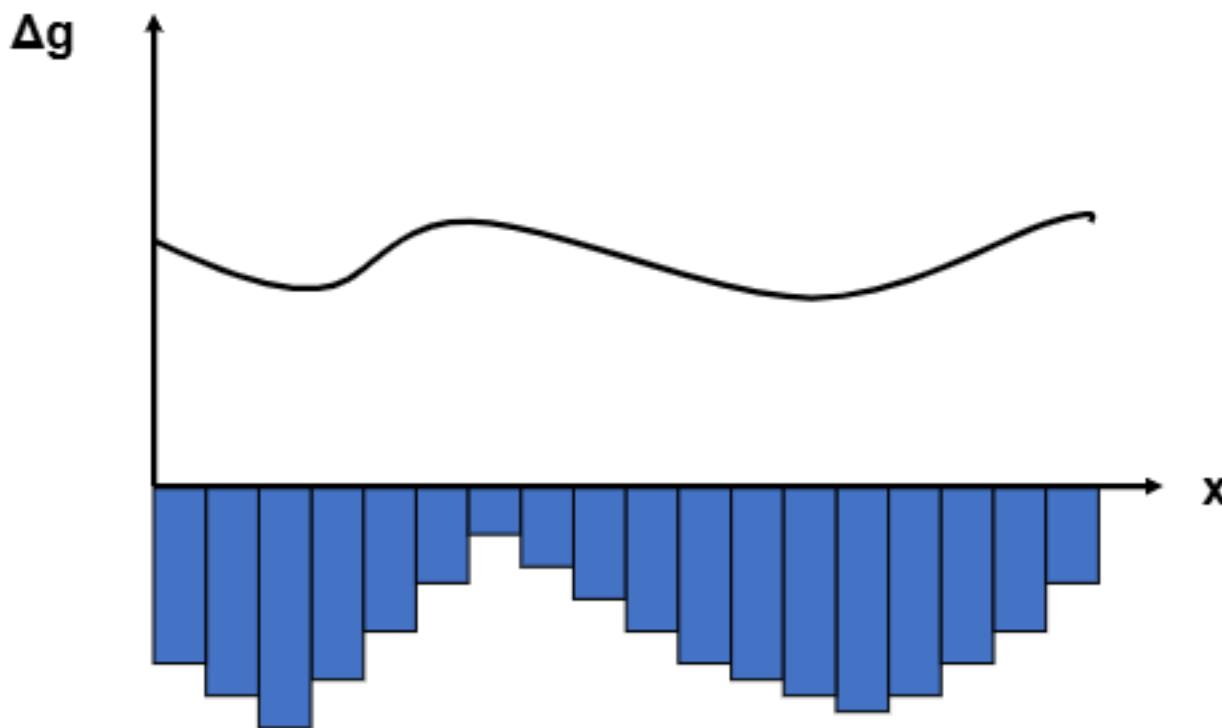
(c)

- ✓ 三种场景下得到的重力异常形态完全一样，只差某一个常数。
- ✓ 在多个界面情况下，一般都是以地面为起算面，逐一将各界面与地面构成一个物质层，取相应的剩余密度进行正演计算。

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

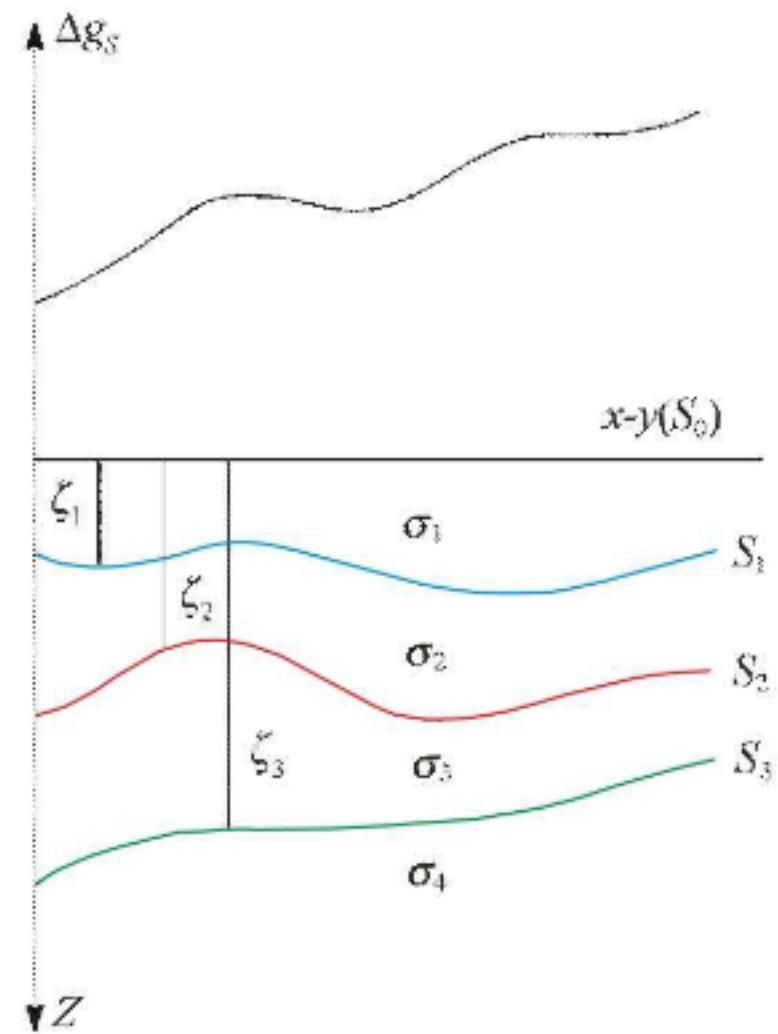
■ 界面

$$\Delta g_{S_1} = -G\Delta\sigma_1 \iint \left| \frac{1}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + \zeta^2]^{1/2}} \right|_0^{\zeta_1(\xi,\eta)} d\xi d\eta$$

$$\Delta g_{S_2} = -G\Delta\sigma_2 \iint \left| \frac{1}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + \zeta^2]^{1/2}} \right|_0^{\zeta_2(\xi,\eta)} d\xi d\eta$$

$$\Delta g_{S_3} = -G\Delta\sigma_3 \iint \left| \frac{1}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + \zeta^2]^{1/2}} \right|_0^{\zeta_3(\xi,\eta)} d\xi d\eta$$

$$\Delta g_S = \Delta g_{S_1} + \Delta g_{S_2} + \Delta g_{S_3}$$

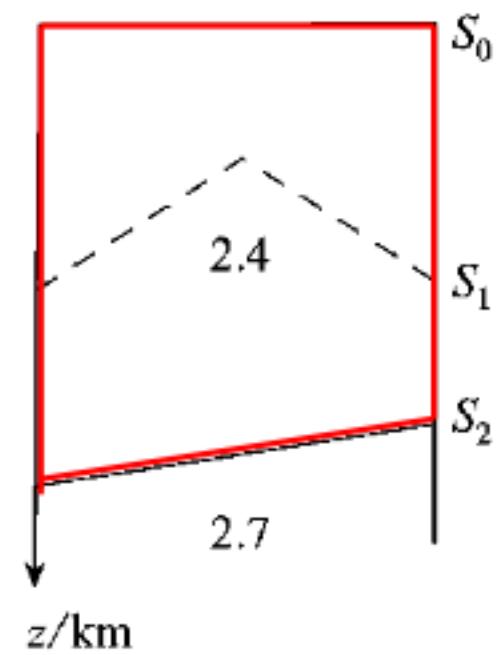
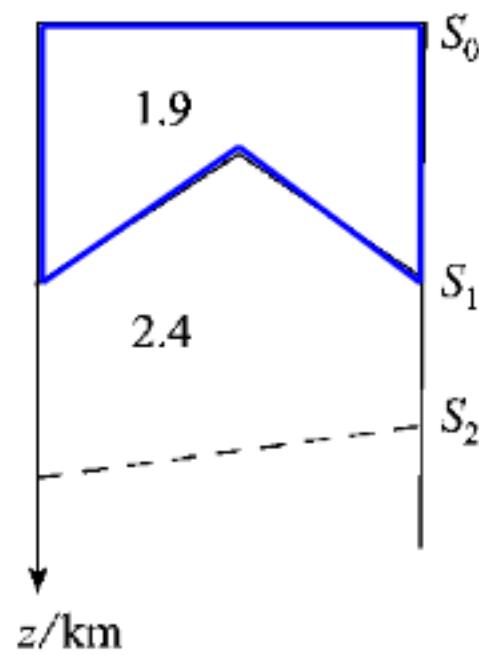
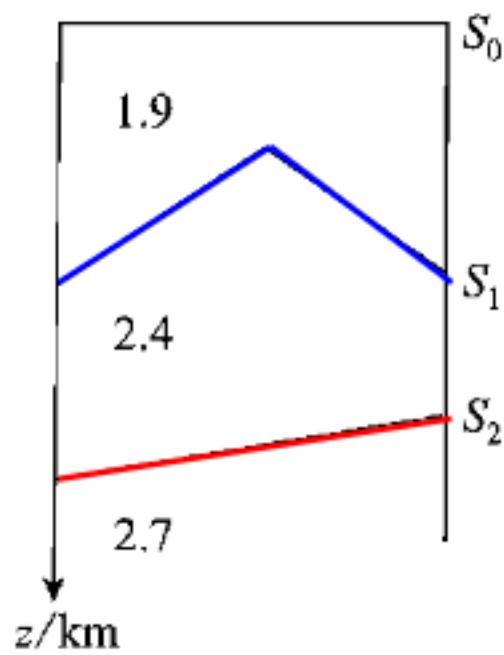


3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面

第一种正演方法

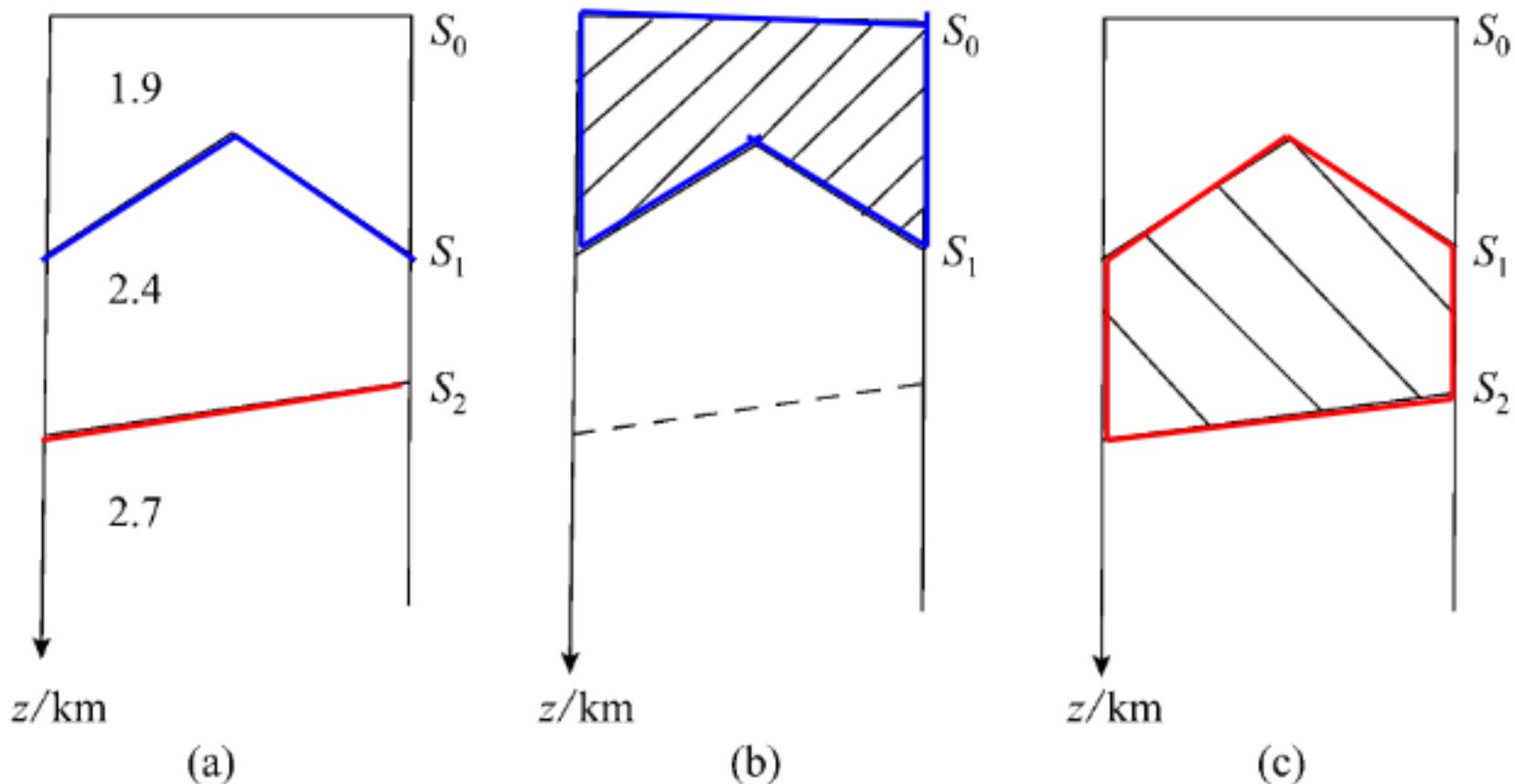


3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面

第二种正演方法



3. 复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面

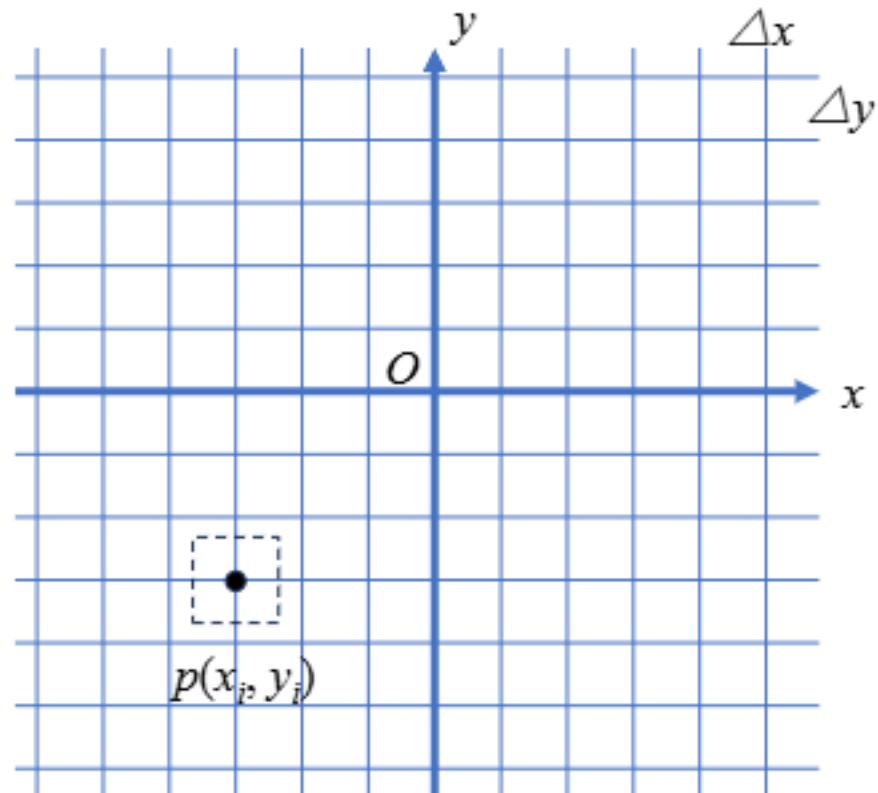
$$x: (-m\Delta x, m\Delta x); y: (-n\Delta y, n\Delta y)$$

$$u_0 \approx G\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_0 \Delta h d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + h_0^2)^{3/2}}$$

$$= G\sigma \sum_{i=-m}^m \sum_{n=-j}^n \int_{-(i-1/2)\Delta x}^{(i-1/2)\Delta x} d\xi \int_{-(j-1/2)\Delta y}^{(j-1/2)\Delta y} \frac{h_0 \Delta h_{ij} d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + h_0^2)^{3/2}}$$

$$= G\sigma \sum_{i=-m}^m \sum_{n=-j}^n \left[\bullet \arctan \frac{\xi \eta}{h_0 (\xi^2 + \eta^2 + h_0^2)^{1/2}} \Big|_{-(i-1/2)\Delta x}^{(i-1/2)\Delta x} \Big|_{-(j-1/2)\Delta y}^{(j-1/2)\Delta y} \right]$$

三维界面



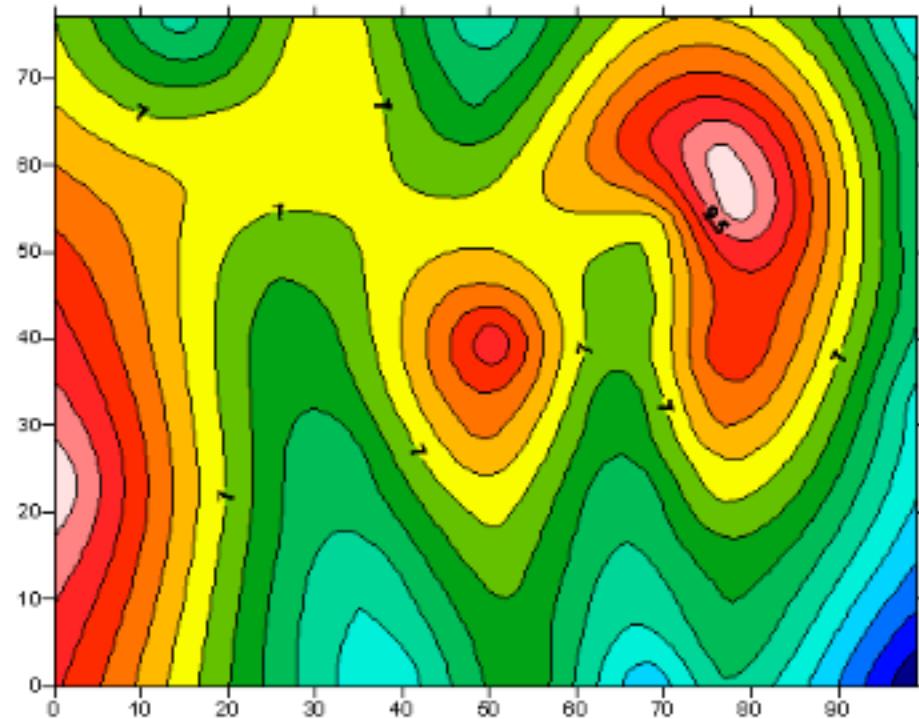
方域 u 函数法计算方案

3. 复杂形体的正演

GeoGoku

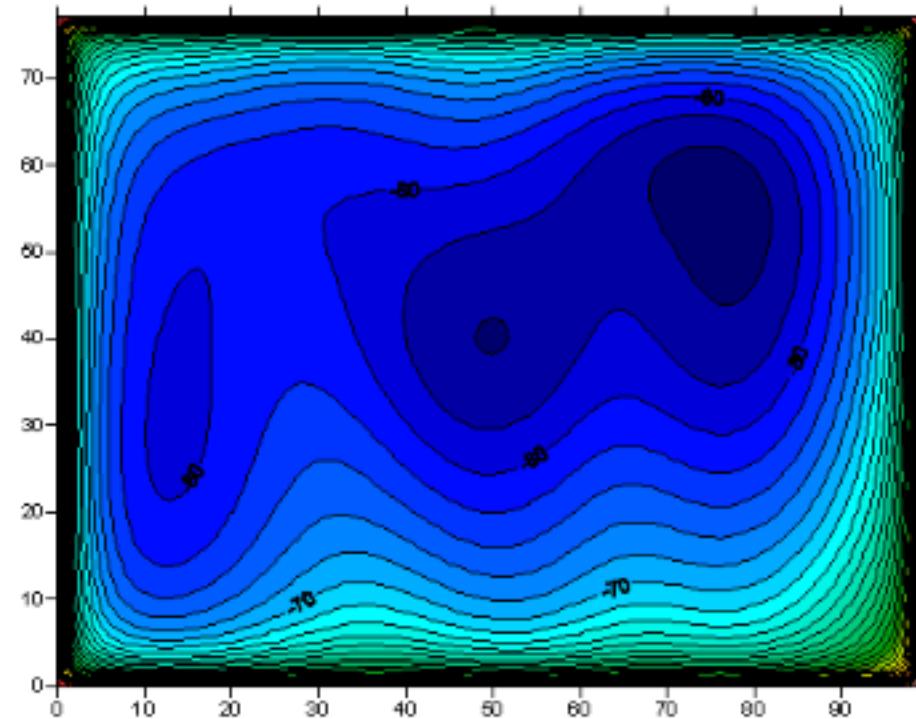
■ 界面

理论密度分界面深度



m

正演的重力异常

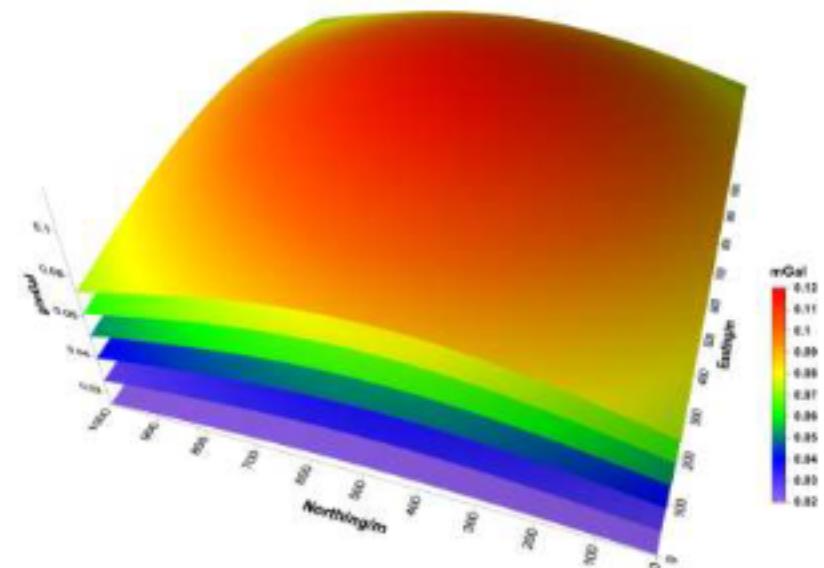
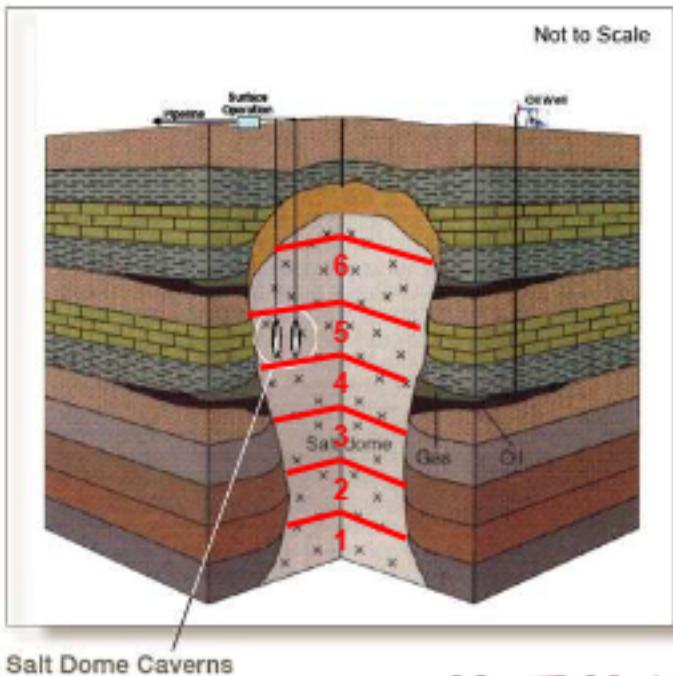


$d=Gm$

3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 界面



盐丘构造

3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 偏微分方程法

重力场满足的PDE方程

体积密度为 $\sigma(x, y, z)$ 的三维质量分布，在空间产生的重力场满足如下方程：

$$\nabla \bullet g(x, y, z) = -4\pi G\sigma(x, y, z)$$

$$\nabla \times g(x, y, z) = 0$$



3.复杂形体的正演

GeoGoku

■ 偏微分方程法

重力场满足的PDE方程

$$\nabla \bullet g(x, y, z) = -4\pi G\sigma(x, y, z)$$

FDM, Finite Difference Method

FEM, Finite Element Method

FVM, Finite Volume Method

MSM, Mesh Free Method

.....



目 录

GeoGoku

第一节 基本公式

第二节 简单形体的正演

第三节 复杂形体的正演

第四节 正演模拟试验



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验目的

- 通过球体、水平圆柱体、铅垂台阶和直立长方体重力异常的正演计算，掌握简单规则形体重力异常正演的计算方法
- 通过计算认识球体、水平圆柱体、铅垂台阶和直立长方体重力异常的一般分布规律，了解影响简单规则形体重力异常的主要因素（如形体的几何参数和密度参数等），培养学生实际动手能力与分析问题的能力；
- 学会使用Matlab/Python语言编写程序绘制异常图件。



4. 正演模拟试验

■ 实验内容

- 用Matlab或Python语言编程实现二维球体、三维球体重力异常及其导数正演，绘制异常曲线或等值线图。
- 用Matlab或Python语言编程实现二度水平圆柱体重力异常及其导数正演，绘制异常曲线图。
- 用Matlab或Python语言编程实现二度铅垂台阶重力异常及其导数正演，绘制异常曲线图。
- 用Matlab或Python语言编程实现直立长方体重力异常正演，绘制异常曲线图。

4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验原理

1) 二维球体、三维球体重力异常及其导数正演

$$\Delta g = \frac{GMD}{(x^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$V_{xz} = -3GM \frac{Dx}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{zz} = GM \frac{2D^2 - x^2}{(x^2 + D^2)^{5/2}}$$

$$V_{zzz} = 3GM \frac{2D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^{7/2}}$$

二维球体

$$\Delta g = \frac{GMD}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + D^2]^{3/2}}$$

$$V_{xz} = -3GM \frac{D(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + D^2]^{5/2}}$$

$$V_{yz} = -3GM \frac{D(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + D^2]^{5/2}}$$

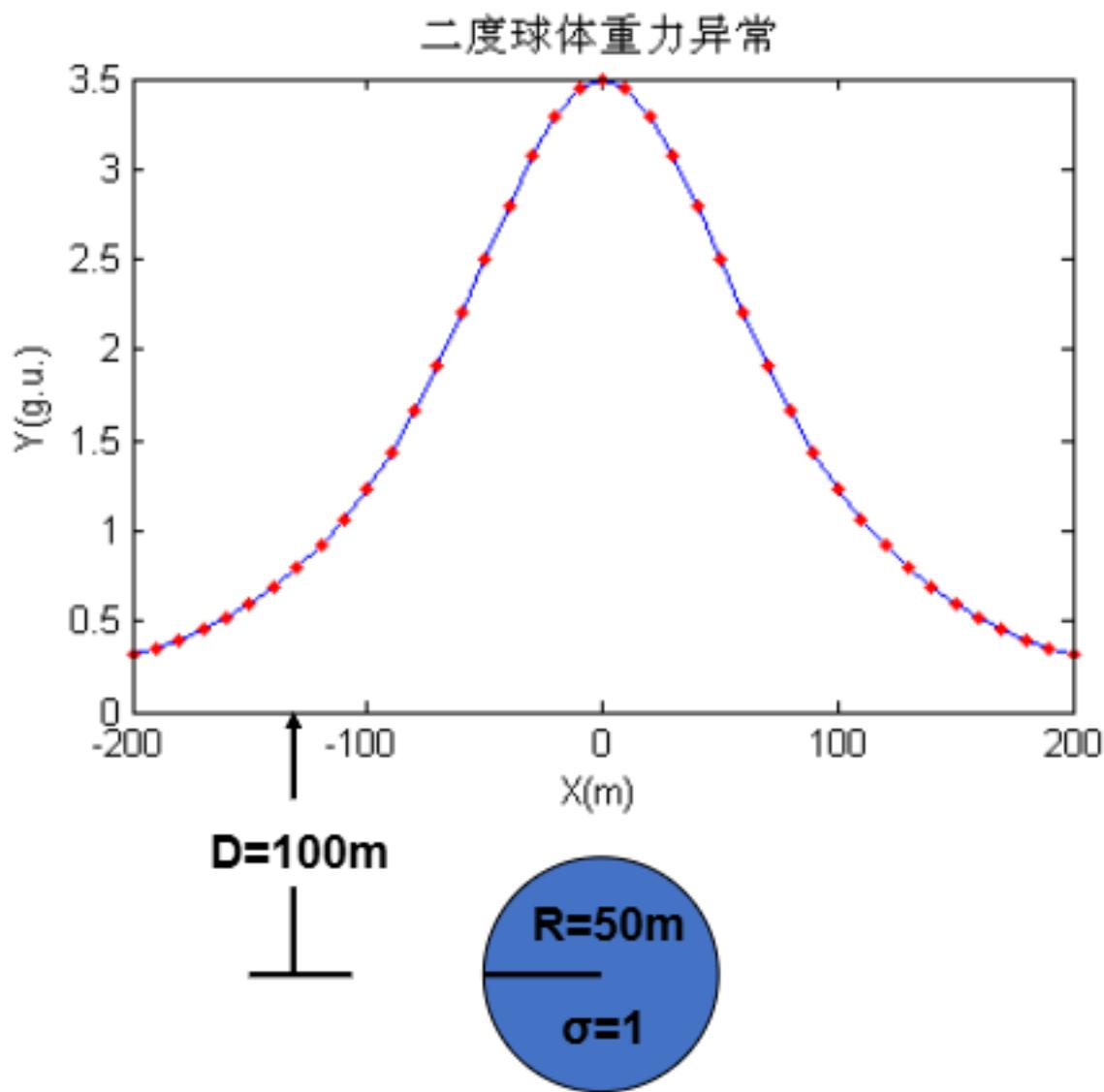
$$V_{zz} = GM \frac{2D^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + D^2]^{5/2}}$$

$$V_{zzz} = 3GM \frac{2D^2 - 3(x - x_0)^2 - 3(y - y_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + D^2]^{7/2}}$$

三维球体

4. 正演模拟试验

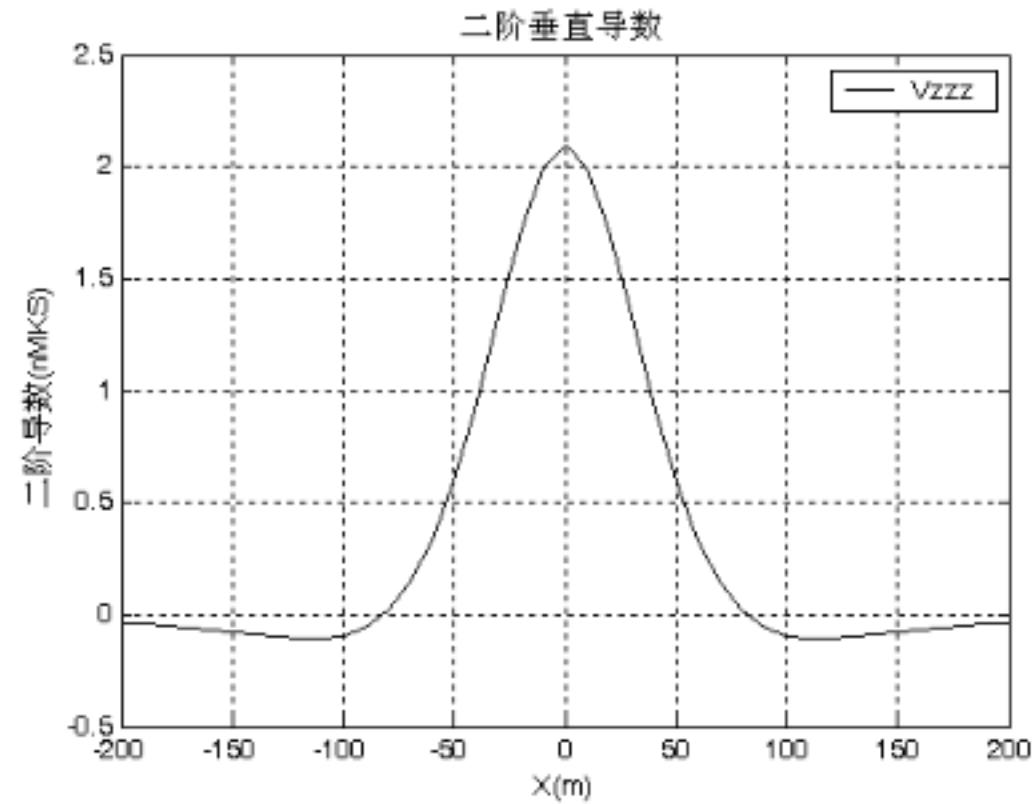
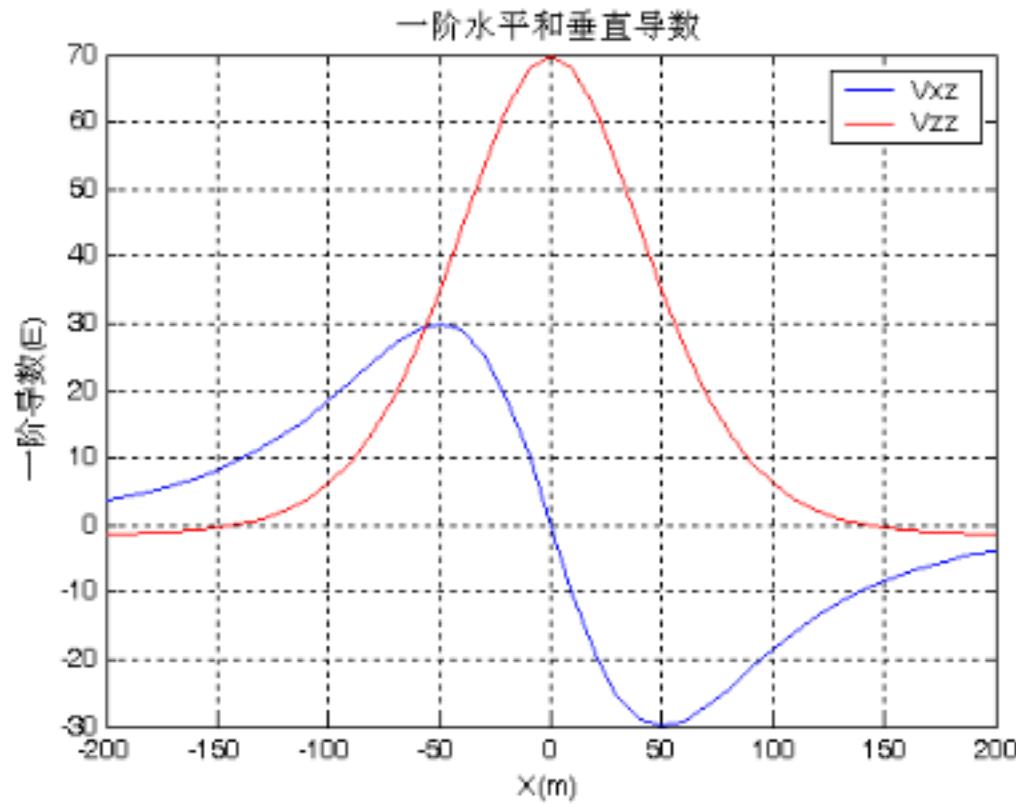
■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

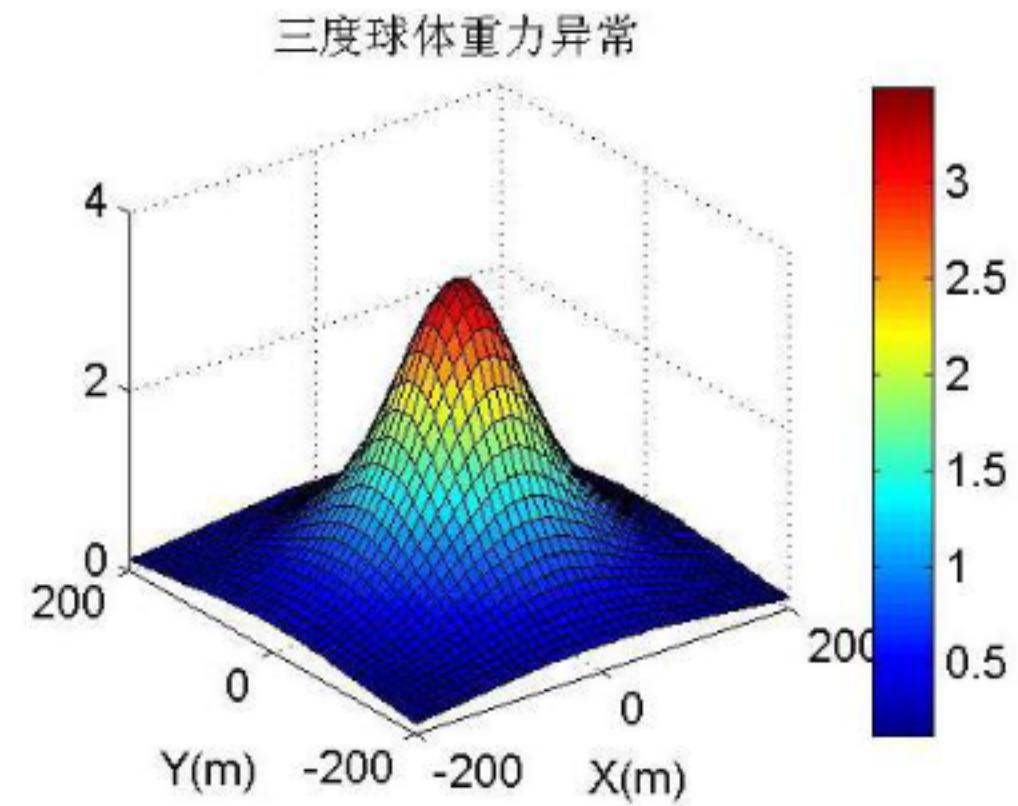
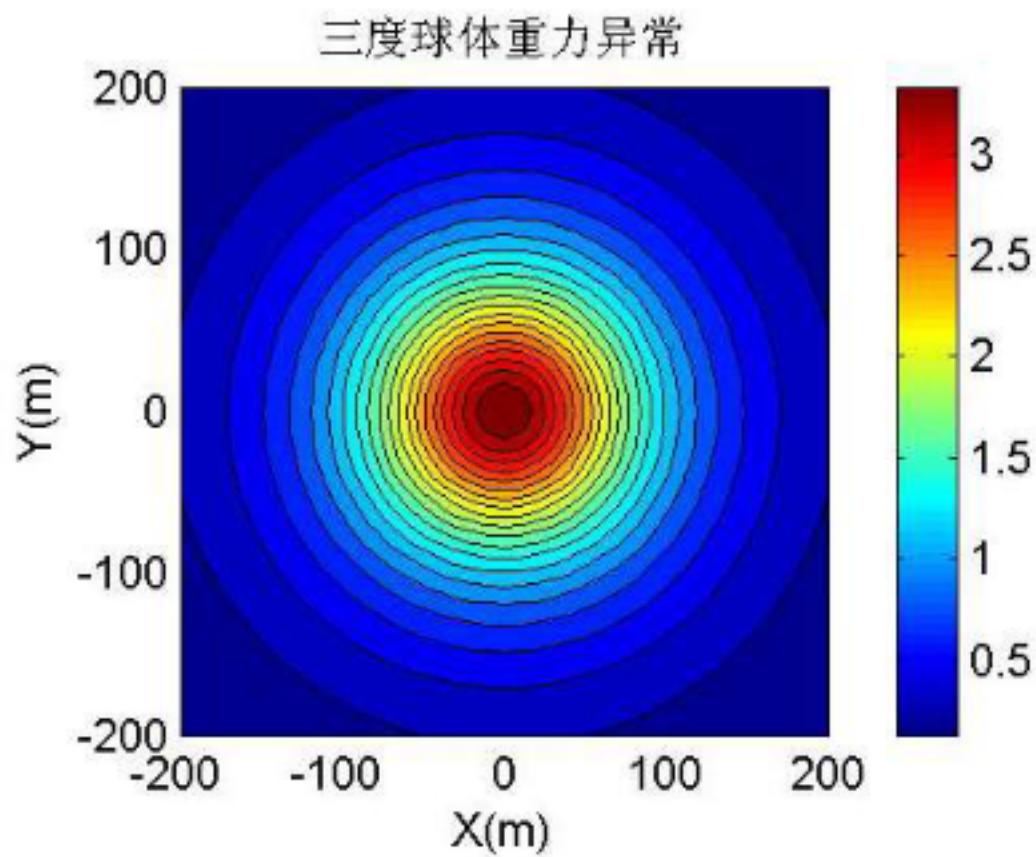
■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

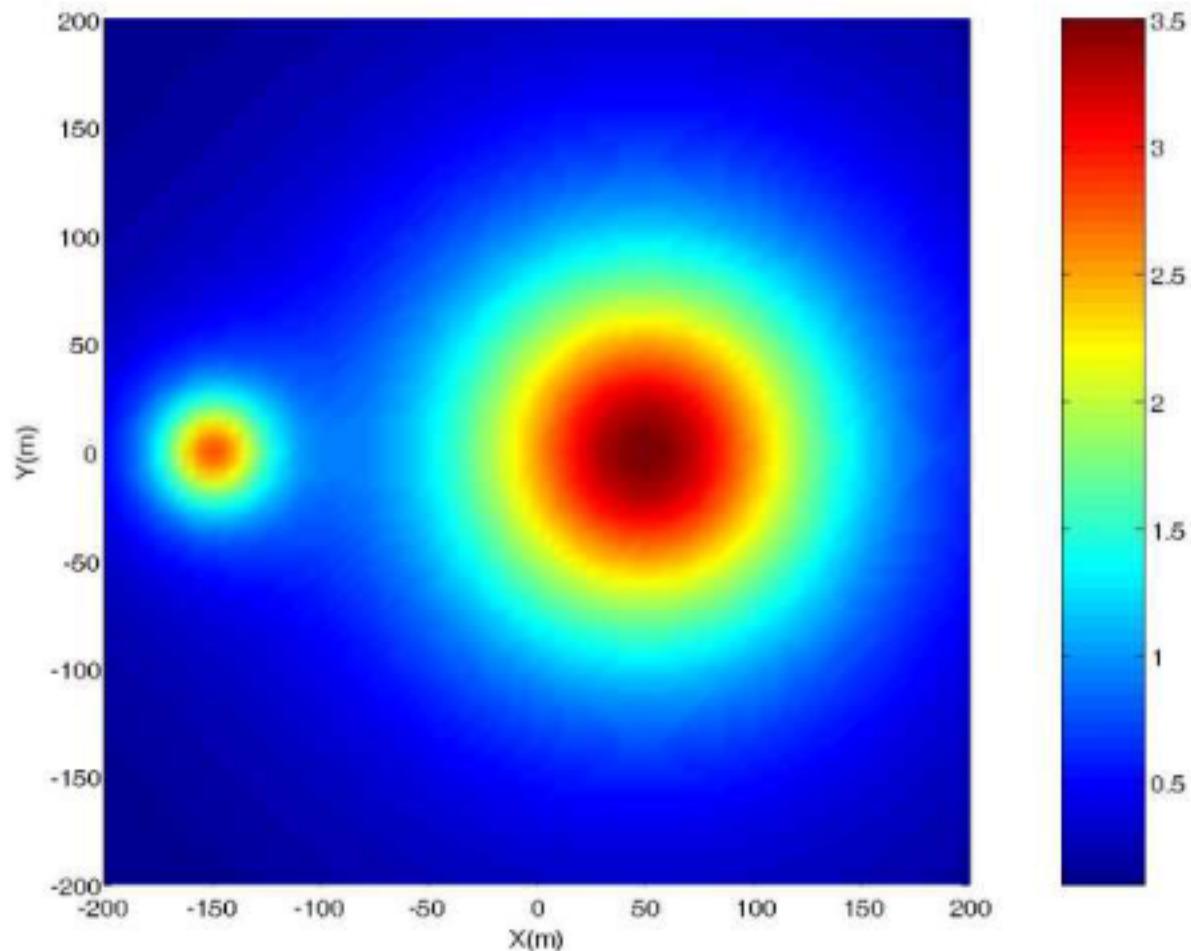
■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件

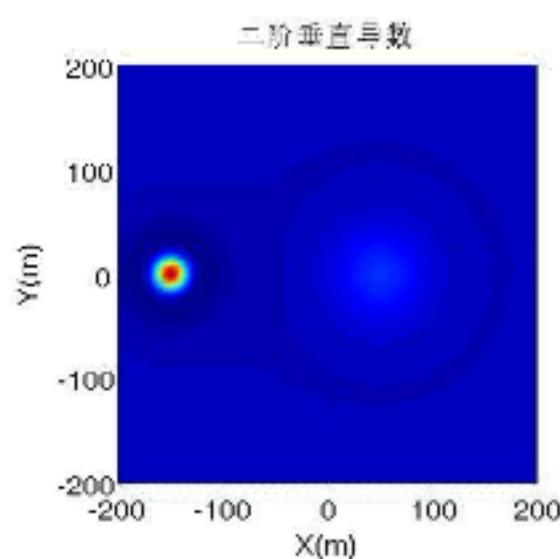
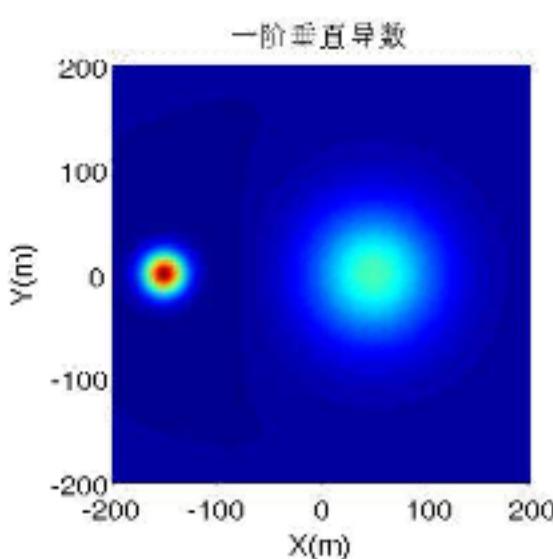
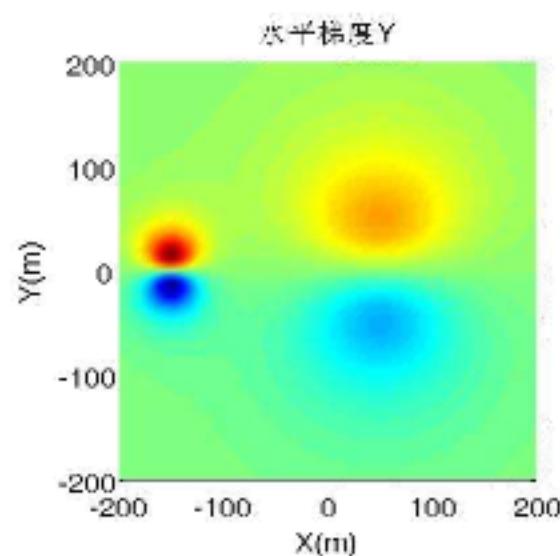
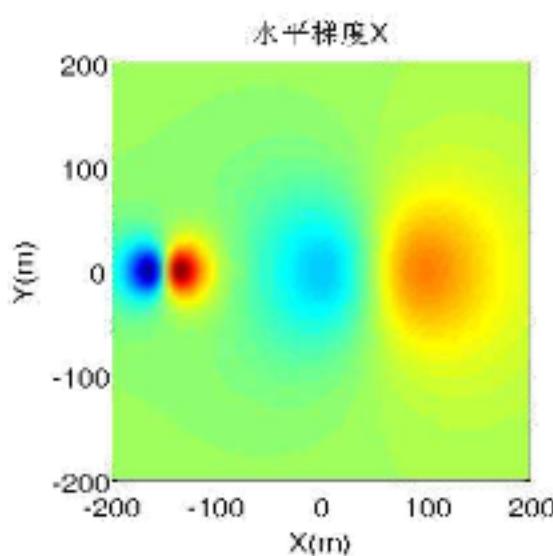


两个球体组合模型理论重力异常

4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件

2) 二度水平圆柱体重力异常及其导数正演

$$\Delta g = \frac{2G\lambda D}{(x - x_0)^2 + D^2}$$

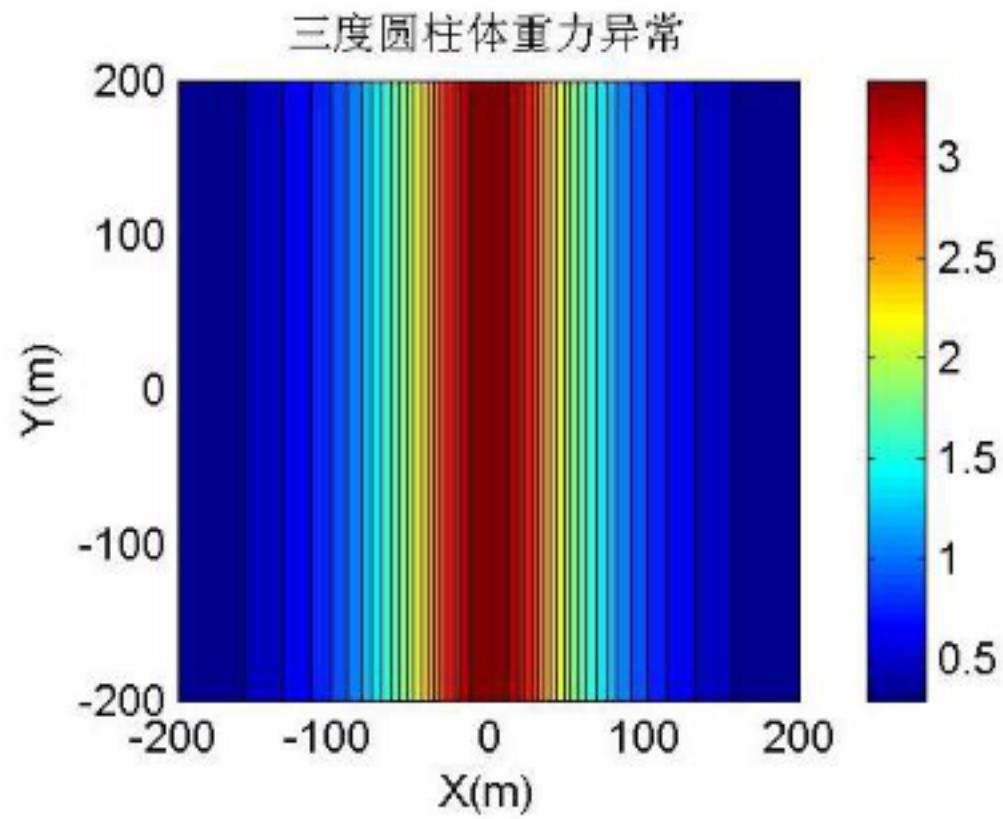
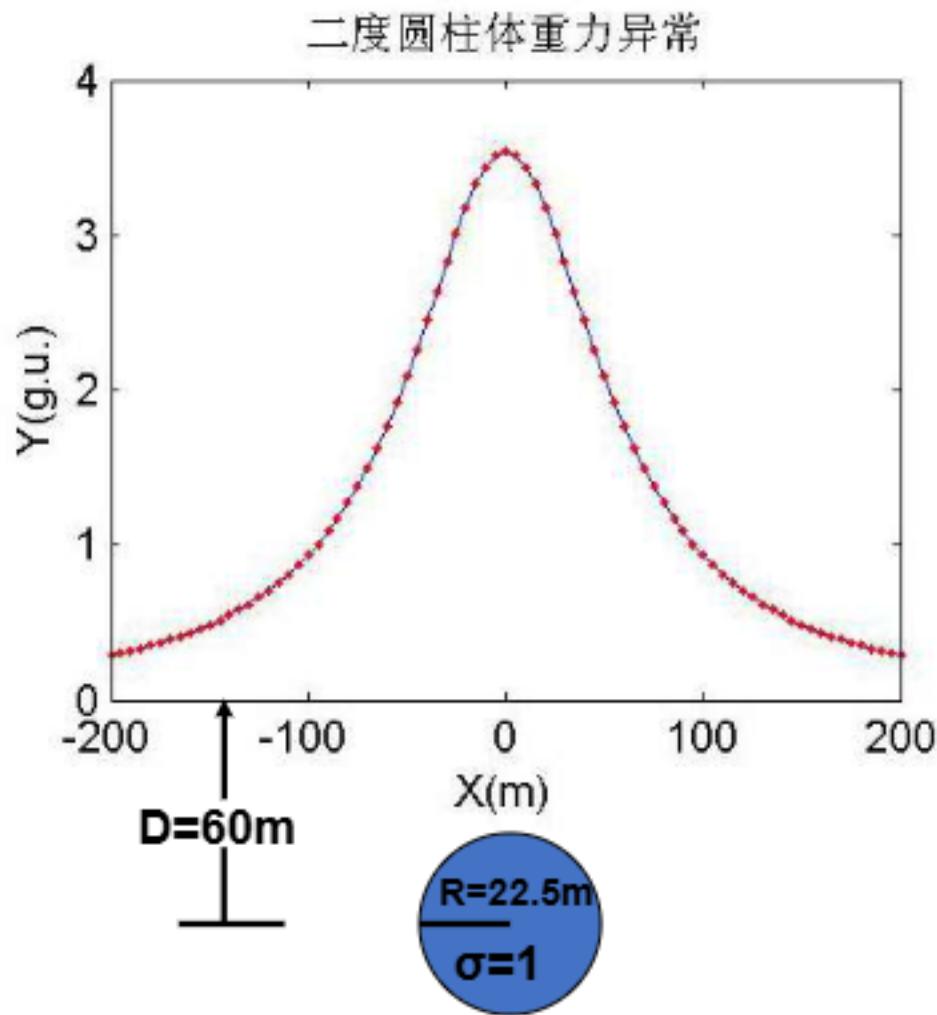
$$V_{xz} = \frac{4G\lambda D x}{(x^2 + D^2)^2}$$

$$V_{zz} = \frac{2G\lambda(D^2 - x^2)}{(x^2 + D^2)^2}$$

$$V_{zzz} = 4G\lambda D \frac{D^2 - 3x^2}{(x^2 + D^2)^3}$$

4. 正演模拟试验

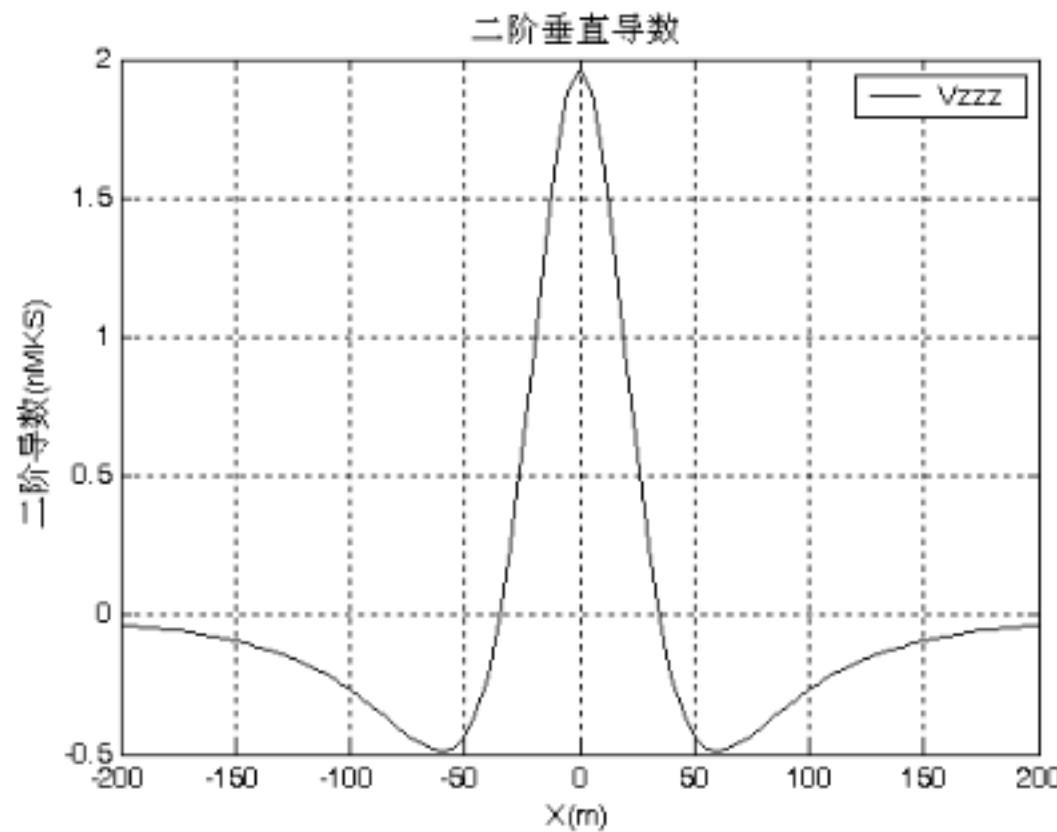
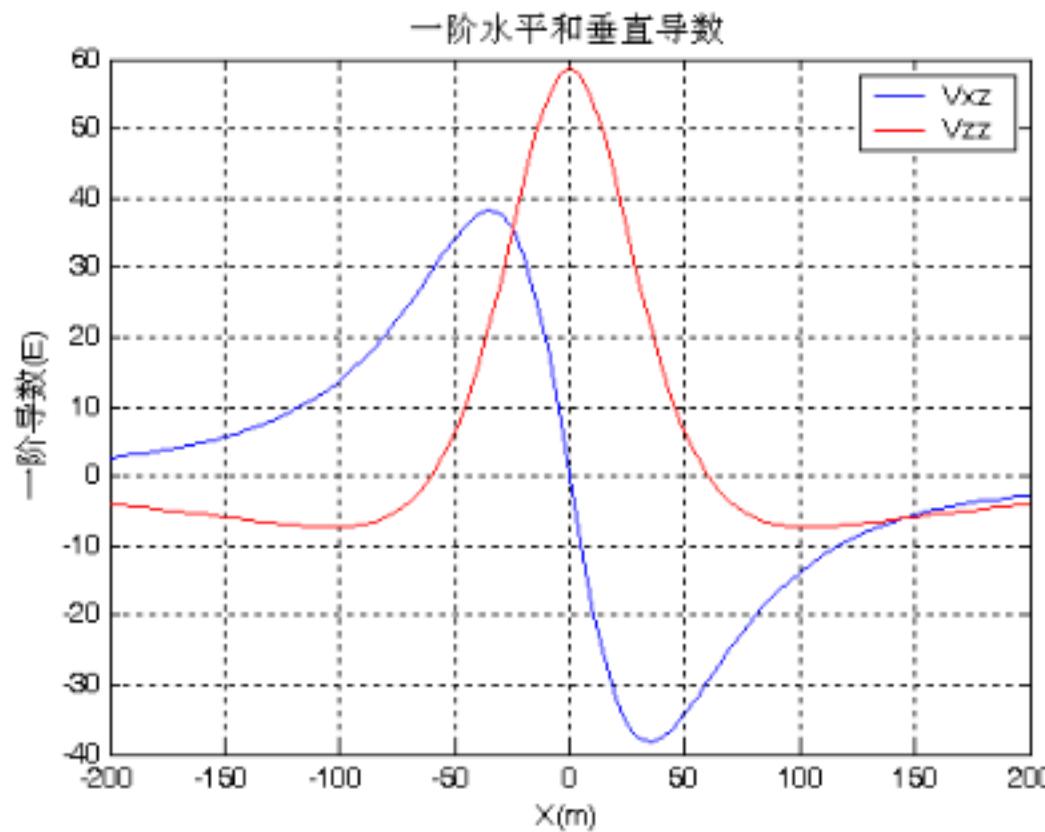
■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件

3) 二度铅垂台阶重力异常及其导数正演

$$\Delta g = G\sigma \left[\pi(H-h) + (x-x_0) \ln \frac{(x-x_0)^2 + H^2}{(x-x_0)^2 + h^2} + 2Htg^{-1} \frac{(x-x_0)}{H} - 2htg^{-1} \frac{(x-x_0)}{h} \right]$$

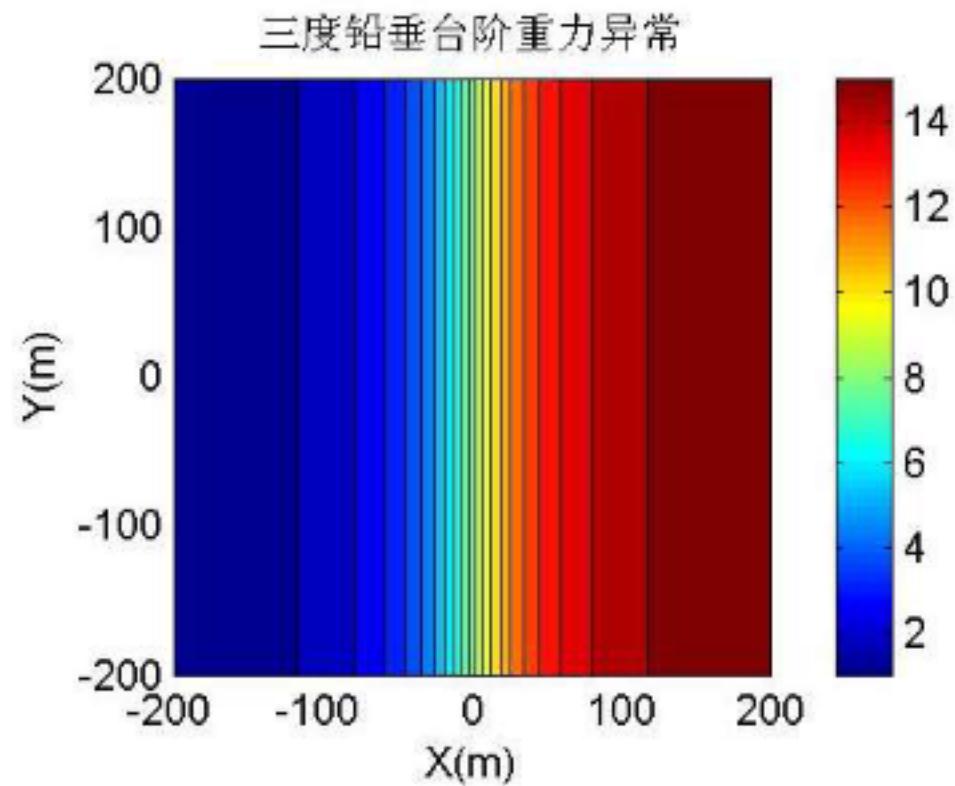
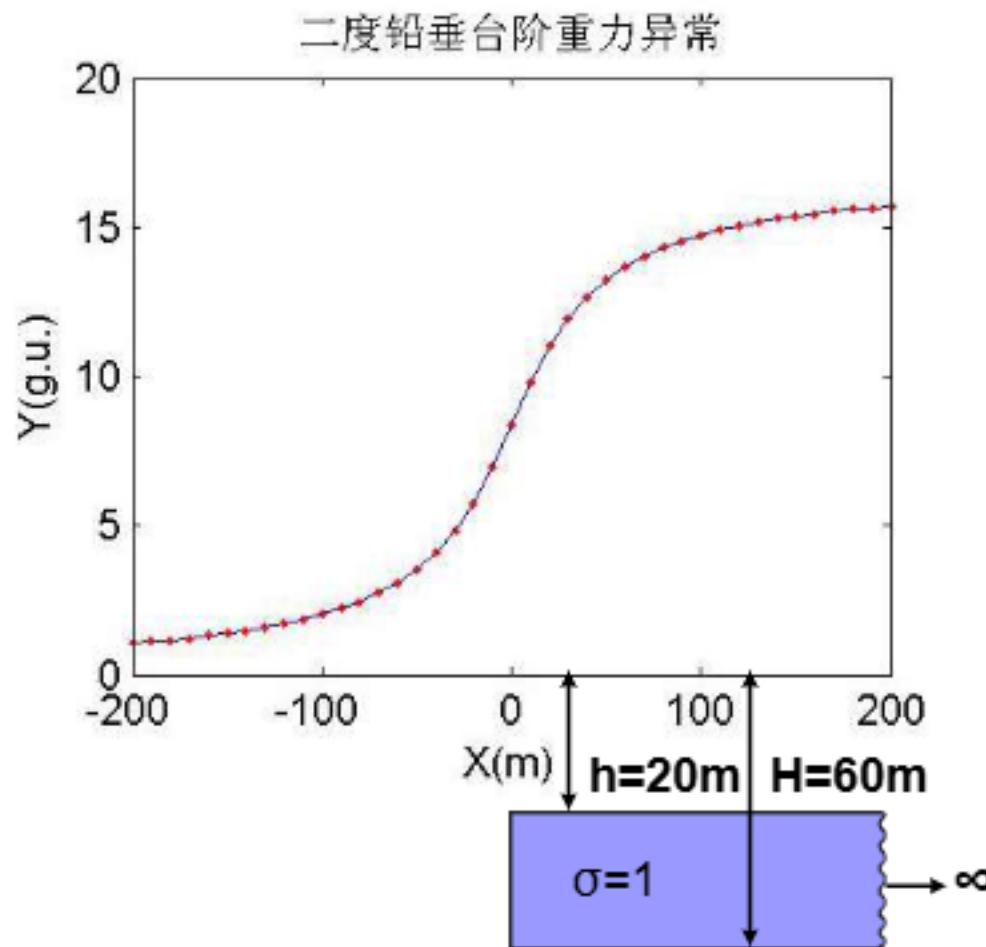
$$V_{xz} = G\sigma \ln \frac{H^2 + x^2}{h^2 + x^2}$$

$$V_{zz} = 2G\sigma \left(tg^{-1} \frac{H}{x} - tg^{-1} \frac{h}{x} \right) = 2G\sigma tg^{-1} \frac{x(H-h)}{x^2 + Hh}$$

$$V_{zxx} = 2G\sigma x \left(\frac{1}{h^2 + x^2} - \frac{1}{H^2 + x^2} \right) = 2G\sigma \frac{x(H^2 - h^2)}{(h^2 + x^2)(H^2 + x^2)}$$

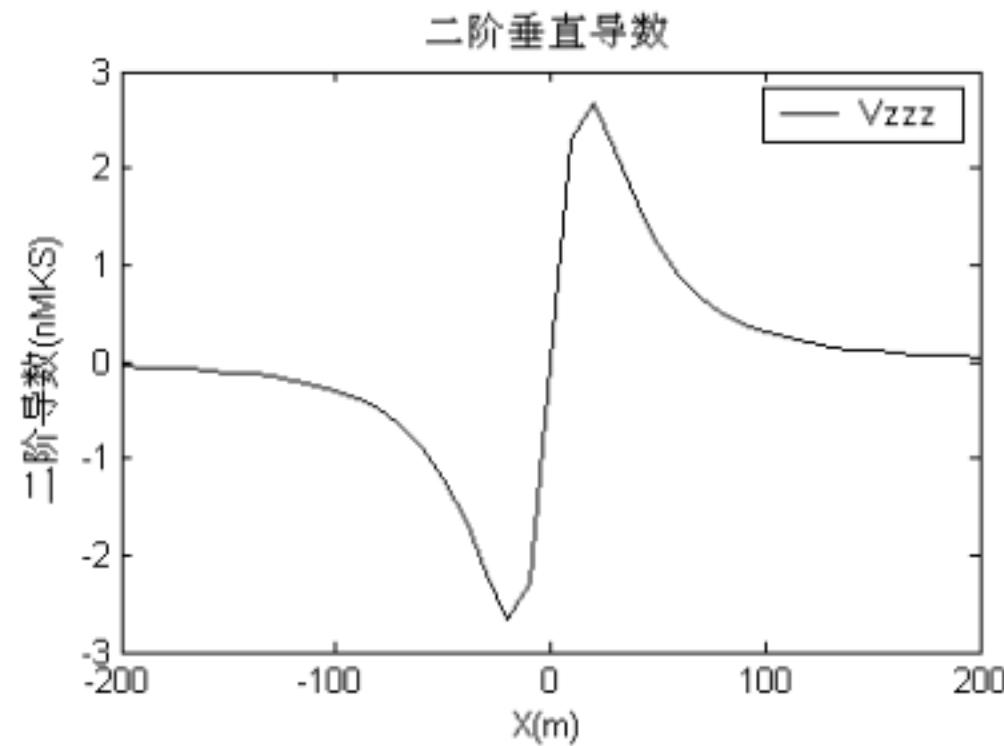
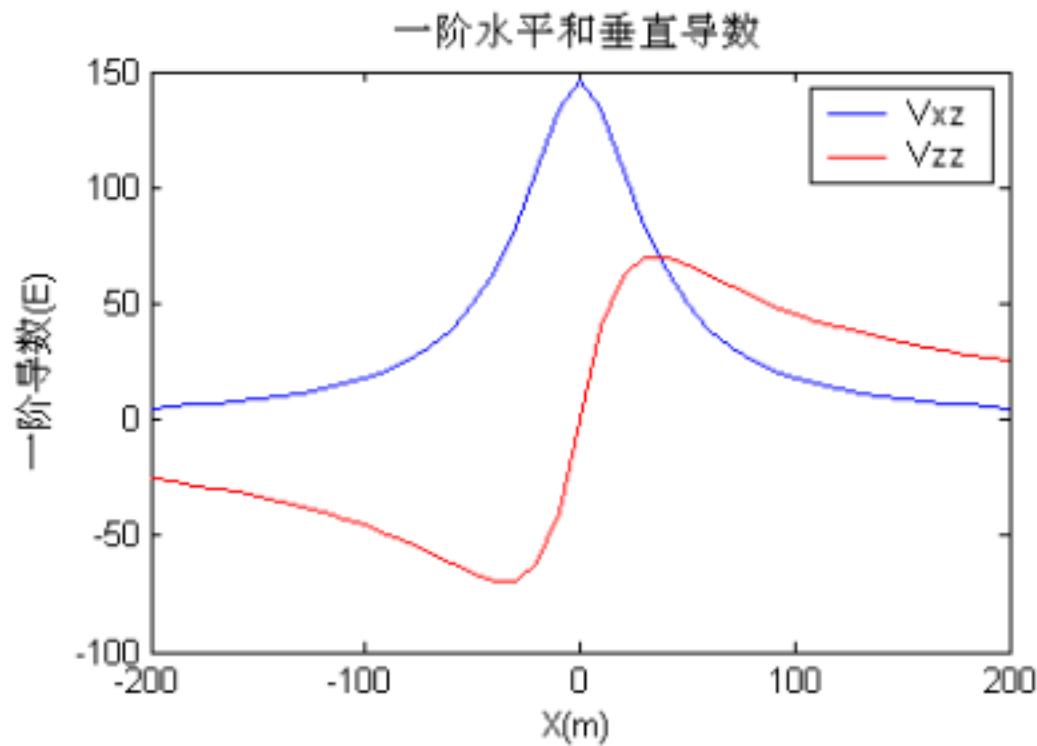
4. 正演模拟试验

■ 实验图件



4. 正演模拟试验

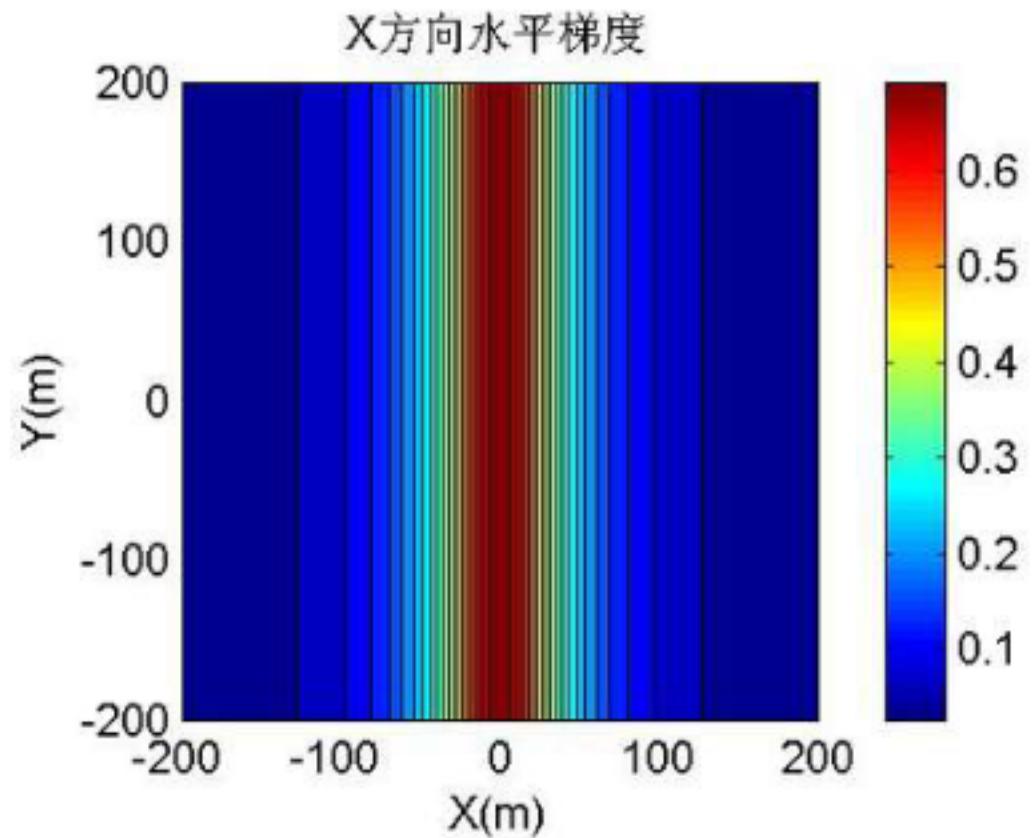
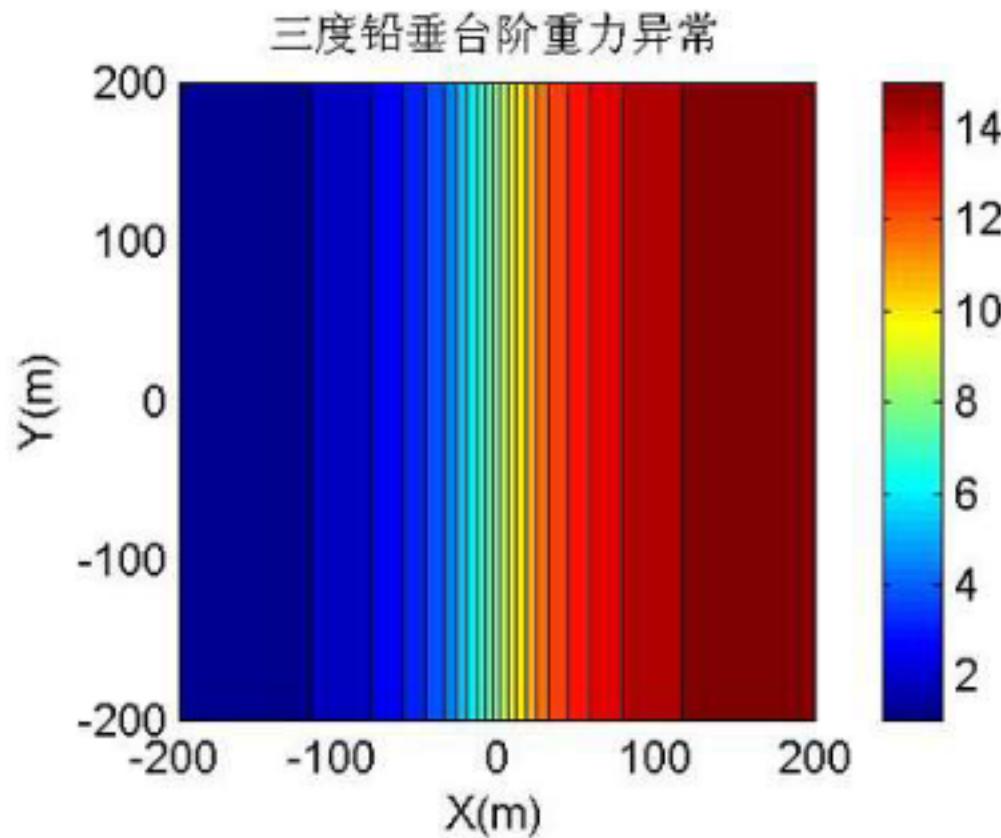
■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件



4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件

4) 直立长方体重力异常正演

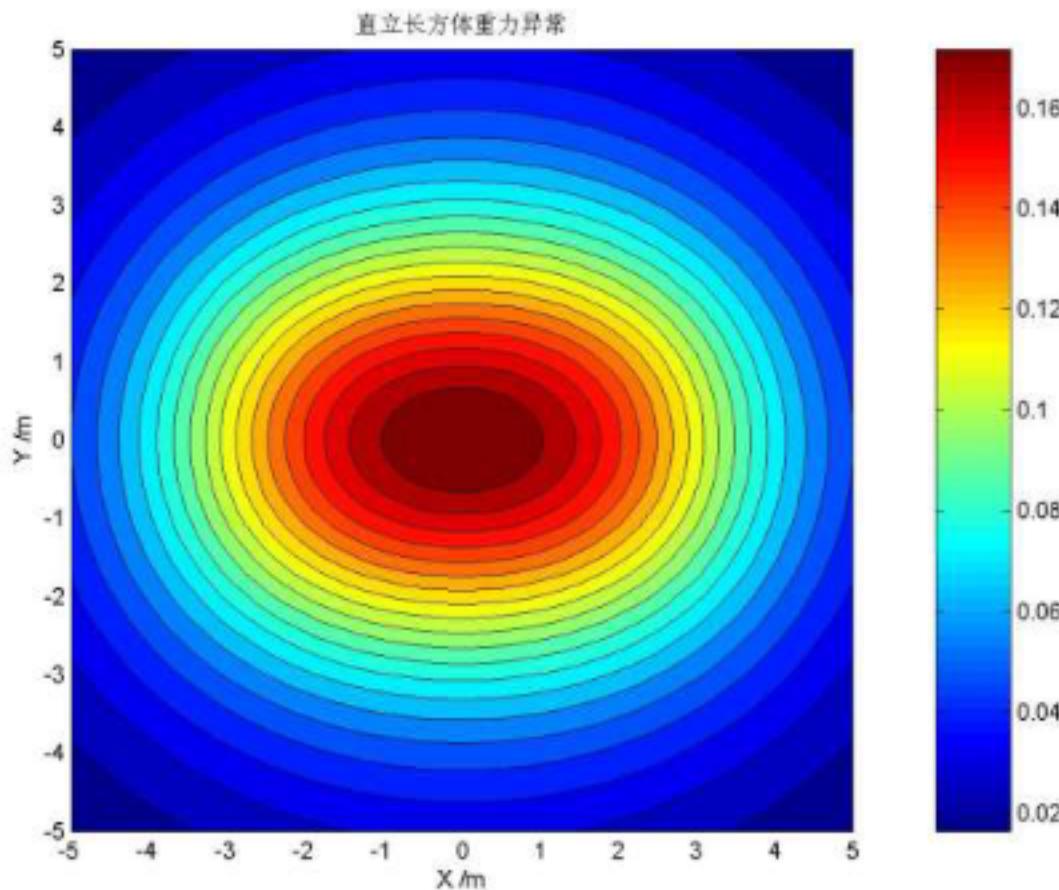
$$\Delta g = -G\sigma \left| \left| \left[\xi \ln(\eta + \rho) + \eta \ln(\xi + \rho) - \zeta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\xi\eta}{\zeta\rho} \right] \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \left|_{z_1}^{z_2} \right.$$

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

4. 正演模拟试验

GeoGoku

■ 实验图件



4. 正演模拟试验

■ 实验报告

内容包括实验目的、实验内容、实验原理、计算程序代码、实验结果、结果分析或小结。

提交注意：全部采用Matlab Live script或者Python Jupyter Notebook提交，不需要word

简单规则几何形体重力异常正演

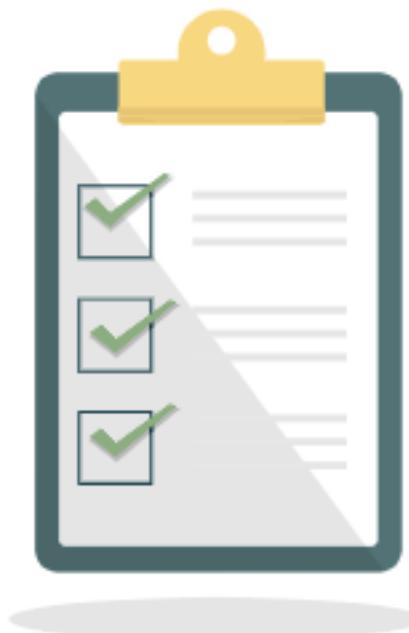
球体、水平圆柱体、铅垂台阶、
倾斜台阶、二度铅垂柱体、倾斜脉、
铅垂圆柱体、直立长方体

复杂形体重力异常正演

二度体：量板法、多边形截面法
三度体：直立面元、水平面元、直立线元
长方体组合法

密度分界面重力异常正演

单个、多个密度分界面反演



- 复杂密度体如何进行正演
- 球体重力异常的特征
- 思考：有其他方法进行正演模拟吗



课程结束

陈涛

