# 重力与固体潮

第二讲 地球重力场 陈涛

地球物理学院 中国石油大学(北京)



## 课前测试

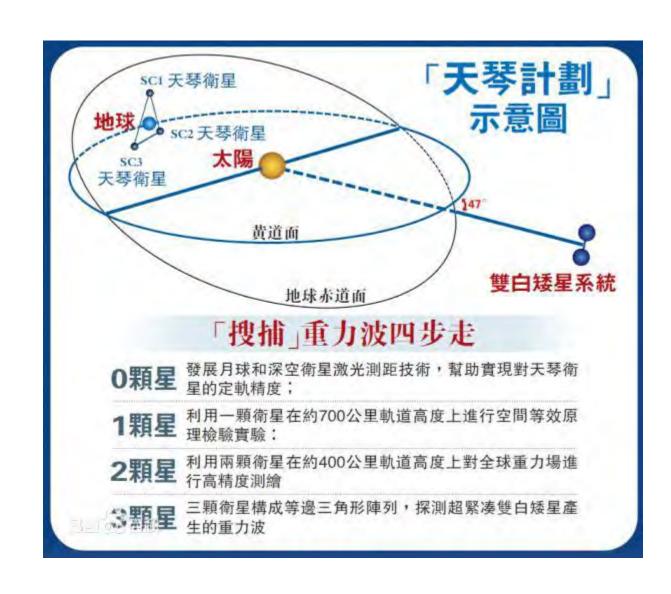
- □ 潮汐是由什么引起的
- □ 重力加速度



# 课前知识

□天琴计划

### 课前知识



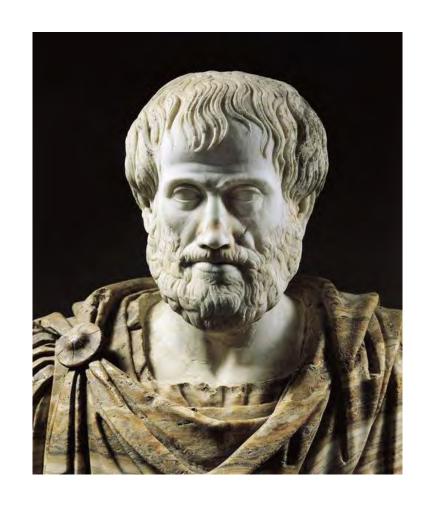


### 目 录

### 第一节人们对地球重力场的认识

■ 亚里士多德 (古希腊)

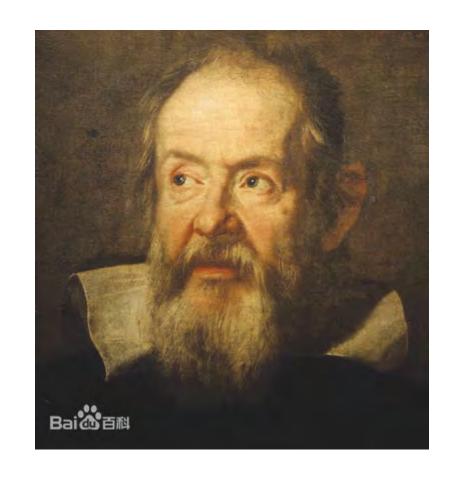
提出运动物体的下落时间 与其重量成比例

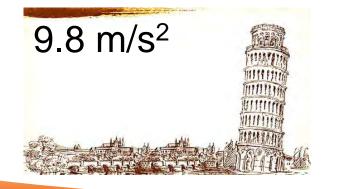


公元前384~前322 (东周、战国)

■ 伽利略 (意大利)

1590年从比萨斜塔大量实验,发现物体坠落的路径与它经历的时间的平方成正比,而与物体自身的重量无关,他粗略地求出地球重力加速度的数值为





1564年2月15日~1642年1月8日) (明朝)

■ 惠更斯 (荷兰)

确定了数学摆的摆动周期 *T*与摆长 *l*及重力加速度*g*之间的关系,并据 此在1655年制造了钟。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



1629年04月14日—1695年07月08日

■ 惠更斯 (荷兰)





■ 让.里歇尔(法国)

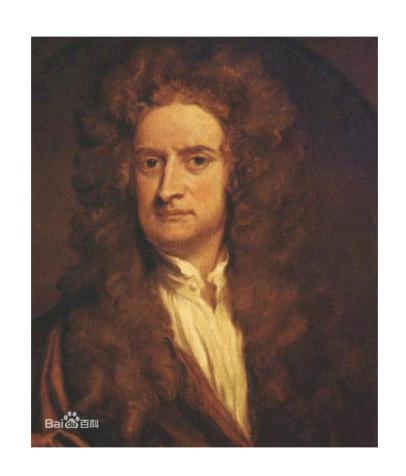
1672 年,法国天文学家里歇利 用摆钟从巴黎到南美进行天文观 测时发现重力加速度在世界各地 并非恒值。



1630 ~ 1690

■ 牛顿 (英国)

牛顿和惠根斯指出这种现象与他们认为地球是旋转的扁球体的推论相符,在理论上阐明了地球重力场的变化.



1643年1月4日—1727年3月31日

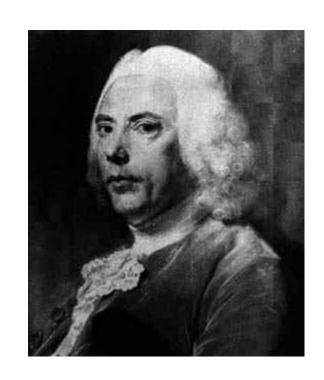
■ 牛顿 (英国)

1687年,牛顿根据开普勒行星运动定律推导出万有引力定律,这一 定律是重力学最重要的基本定律。

$$F = -\frac{GM_1 M_2}{R^2}$$

■ Pierre Bouguer (法国)

1735~1745年,法国科学院在 Lap land 和 Peru 的考察,使布格(P. Bouguer)建立了许多基本的引力关系,包括重力随高度和纬度的变化规律,并计算出水平引力及地球的密度等。



1698~1758

■ Henry Kater (法国)

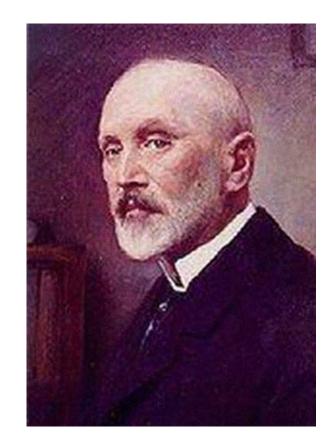
1817年,卡特在重力测量中引进了可以交换振动和悬挂中心的复摆,这个 装置作为重力调查的主要工具延续使 用了一个世纪。



1777~1835

■ Baron Roland von Eötvös (匈牙利)

重力勘探大约起始于20世纪初。厄 缶在1890年制造出了第一台测量重力变 化率的扭秤。1901年,他使用扭秤在 Balaton湖进行了第一次重力测量,后来 用它在捷克、德国、埃及和美国的石油 勘探中寻找盐丘等储油构造获得了成功。 1922年厄缶扭秤由Shell 和Amerada 公 司进口到美国。



1848~1919

1922年12月,横过Spindletop油田的试验性测量,清楚地表明这个构造能够被扭秤发现,从而开创了石油地球物理勘探的历史。1924年末,在美国得克萨斯州Brazoria县,用Nash 盐丘的一口试验井,验证了重力解释,根据这一结果在世界上首次用地球物理方法发现了石油。

■ Vening Meinesz (荷兰)

1923 年,韦宁·曼涅兹 在荷兰的潜水艇上用摆仪测量重力,发现了重力在不同海洋地区的变化,特别是发现了在印度尼西亚海沟附近的巨大重力效应。

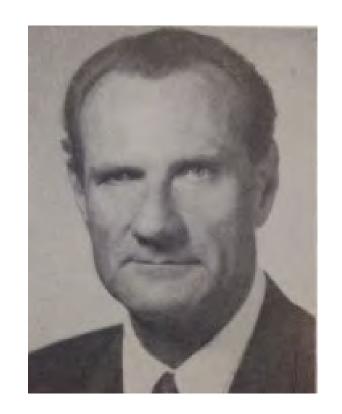


1887~1966

20 世纪上半叶的重力测量及重力勘探中,扭秤得到了广泛的应用。1929 年出现了轻便的摆仪。

■ Lucien LaCoste (美国)

1934 年,拉科斯特提出了零长弹簧的原理,在1939 年制造出第一台可以工作的LaCoste重力仪。



1908~1995

1934年拉科斯特研制出了高精度的金属弹簧重力仪,沃登研制了石英弹簧重力仪,这类仪器的测量精度约达0.05-0.2 mGal;一个测点的平均观测时间己缩短到10-30分钟,到1939年,这类重力仪完全取代了扭秤。

### CG-5重力仪

由加拿大Scintrex仪器公司所生产的CG-5重力仪,是一种使用静电重力补偿、电容位移检测等现代技术组合,研制的全自动零长石英弹簧重力仪。主要用于地面(陆地地表)相对重力测量,可应用于:矿藏勘探、地质调查、油气勘探、区域重力调查、工程地质勘察、火山勘察等领域。

### 主要技术指标

传感器类型	无静电熔凝石英弹性系统
读数分辨率	1μGal
观测精度	5 μ Ga1
测量范围	8000mGa1,全球不用重置
长期漂移 (静态)	<1.0 mgal/day
自动补偿倾斜范围	±200"
波动范围	20g以上的冲击,通常<5 μ Gal
自动修正	潮汐、仪器倾斜、温度、噪声、地震噪声





从此,重力勘探迅速发展,应用于大地测量、地球内部构造、 地球动力学、资源勘探、工程建设、灾害预防等基础性科学和 应用基础性科学的各个方面。

在中国,对重力测量和重力学的研究发展较晚,至今仅有将近 80年的历史。(翁文波)







地球的重力场是地球表面及其外部空间客观存在的一种物理场,

它随空间和时间变化。

重力学研究重力随空间、时间的变化及变化规律

- 大地测量
- 地球内部构造
- 地球动力学
- 资源勘探(包含石油勘探)
- 工程环境等



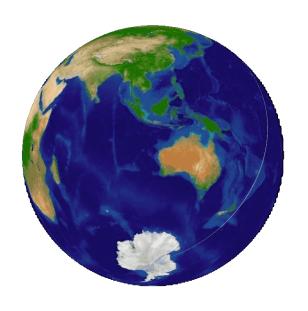
### 目 录

第一节 人们对地球重力场的认识

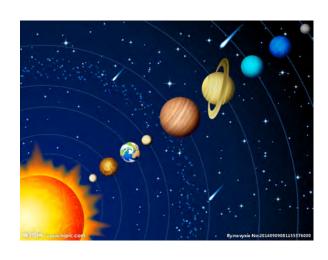
第二节 地球重力场





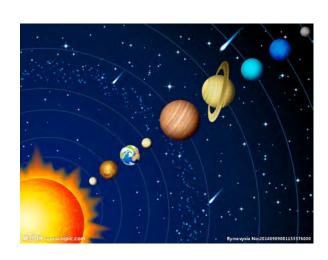




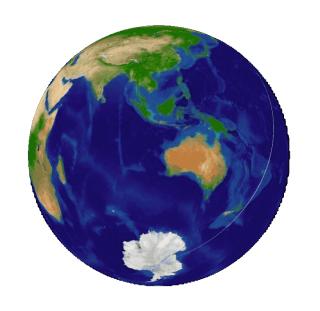


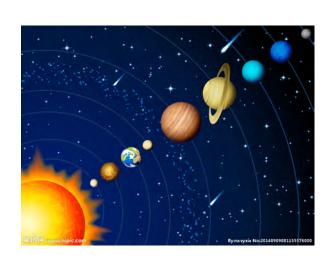






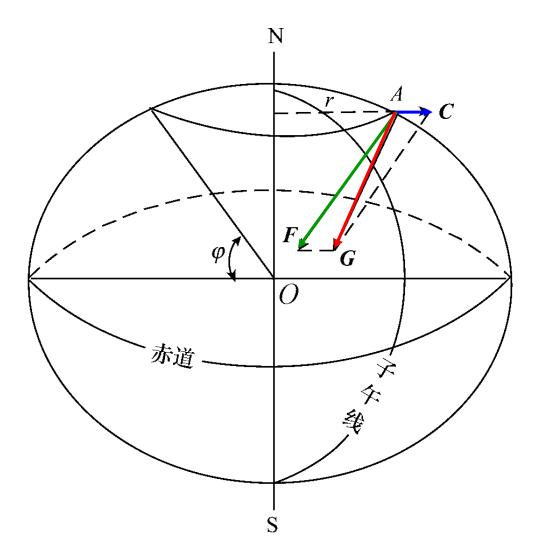






重力 = 地球引力 + 惯性离心力 + 天体引力

微弱,寸忽略



引力**F** 
$$\mathbf{F} = \frac{GM_E \cdot m}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}$$

惯性离心力**C** 
$$\mathbf{C} = m\omega^2 \mathbf{r}$$

问题: 地球何处重力值最大?

地球的重力场是地球表面及其外部空间客观存在的一种物理场,它随空间和时间变化。

地球上的物体在哪里重力最大? (xiaohongshu.com)

地球重力场: 在地球内部及其附近存在重力作用的空间。

- $\checkmark$  单位质量物体在重力场中所受重力称为<mark>重力场强度(g=G/m)。</mark>
- $\checkmark$  重力加速度 g=G/m G=mg
- 重力加速度在数值上(包括方向)等于单位质量所受的重力,也就是等于 重力场强度。

重力加速度 ᡨ 重力 ᡨ 重力场强度

重力勘探所提的重力都是指重力加速度或重力场强度。

### 重力(重力加速度)单位

- 1、SI是国际单位制,以长度、质量、时间、热力学温度、物质的量、 电流强度、发光强度为基本单位。
- 2、CGS是绝对单位制,以长度(单位厘米)、质量(单位克)、时间(单位为秒)为基本单位。

### 重力(重力加速度)单位

✓ 在CGS单位制(克、厘米、秒):

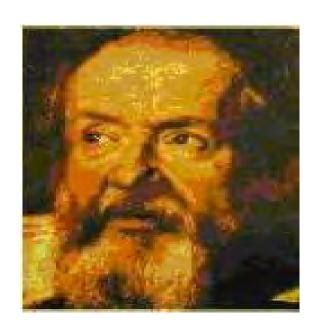
"cm/s<sup>2</sup>", "伽"或"Gal"

 $1 \text{ cm/s}^2 = 1 \text{ Gal}$ 

✓ 在SI单位制 (千克、米、秒):

"m/s<sup>2</sup>", "g.u."

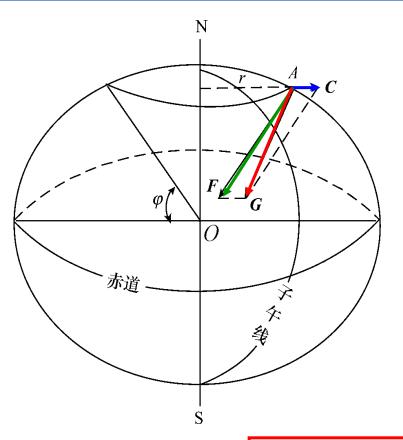
 $1 \text{ m/s}^2 = 10^6 \text{ g.u.}$ 



Galileo Galilei

- $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$
- $1 \text{ g.u.} = 10^{-6} \text{m/s}^2$
- 1 Gal = ? g.u.
- 1 Gal (伽) = 1 cm/s<sup>2</sup> =  $10^{-2}$  m/s<sup>2</sup> =  $10^4$  g.u.
- 1 mGal (毫伽) = 10<sup>-5</sup> m/s<sup>2</sup> = 10 g.u.
- 1  $\mu$ Gal (微伽) =  $10^{-8}$  m/s<sup>2</sup> =  $10^{-2}$  g.u.





$$\mathbf{F} = \frac{GM_E \cdot m}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}$$

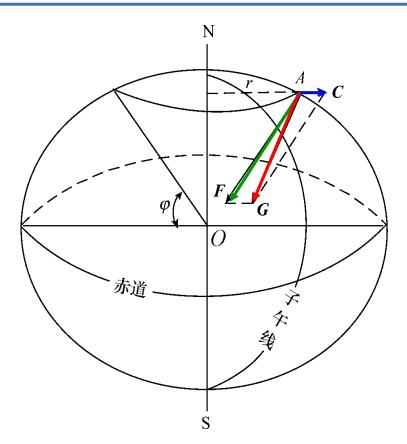
$$\mathbf{C} = m\omega^2 \mathbf{r}$$

重力的变化 = 空间变化 + 时间变化

重力的变化包括随不同测点位置的空间变化以及同一测点的重力随时间的变化。

#### 空间上:

- ✓ 地球形状、地形: 引起约 6干 mGal的变化;
- ✓ 地球自转: 重力有 3.4千 mGal的变化;
- ✓ 地下物质密度分布不均匀:能达到几百 mGal变化
- ✓ 人类的历史活动遗迹和建筑物等



$$\mathbf{F} = \frac{GM_E \cdot m}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\mathbf{C} = m\omega^2 \mathbf{r}$$

假设地球为质量M =  $5.976 \times 10^{24}$  kg, 半径R = 6371 km的正球体,则引力值为 9.8 m/s<sup>2</sup>,在赤道上惯性离心力最大约为0.0339 m/s<sup>2</sup>。

惯性离心力约为引力的 1/300 左右, 地球引力是组成重力的主要部分。

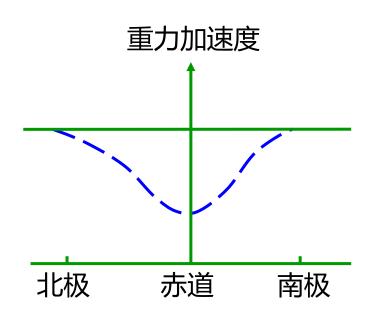
在地球表面上,

全球重力平均值约为9.8 m/s²,

赤道重力平均值为9.780 m/s²,

两极平均值为9.832 m/s<sup>2</sup>,

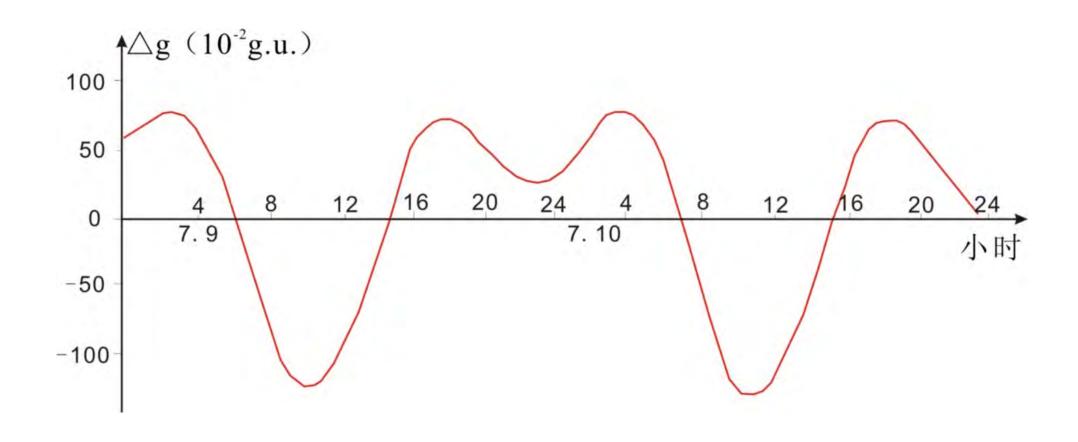
从赤道到两极重力变化大约为0.05 m/s²。



重力的变化包括随不同测点位置的空间变化以及同一测点的重力随时间的变化。

#### 时间上:

- ✓ 潮汐变化:太阳、月亮等天体引力引起的重力的周期性变化,其大小可达0.3 mGal
- ✓ 非潮汐变化: 地球形状的变化和地下物质运动等引起的非周期性变化, 其变化大小一般不超过 0.1 mGal



海水每天有两次涨落运动,其中早晨出现的潮涨称为潮,晚上出现的潮落称为汐,总称潮汐。

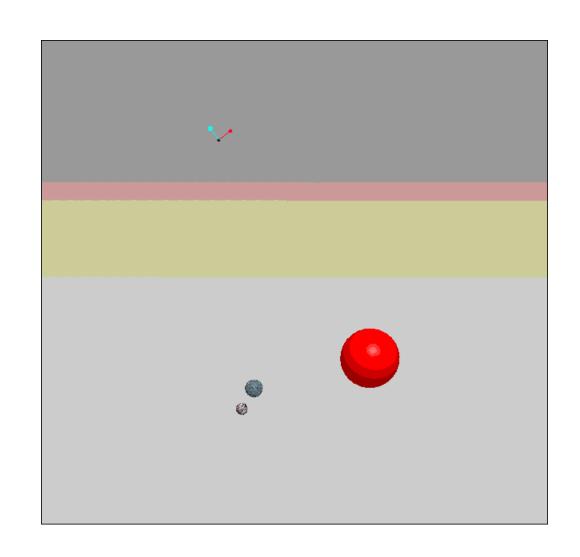
#### 地球上海潮涨落主要是由月球还是太阳引起的?

- ✓太阳的质量虽比月球的质量大得多,但月球同地球的距离比太阳同地球的距离近,月球的引潮力比太阳的引潮力大。
- ✓ 月球和太阳对地球的引力不但可以引起地球表面流体的潮汐(如海潮、大气潮),还能引起地球固体部分的周期性形变(固体潮)。

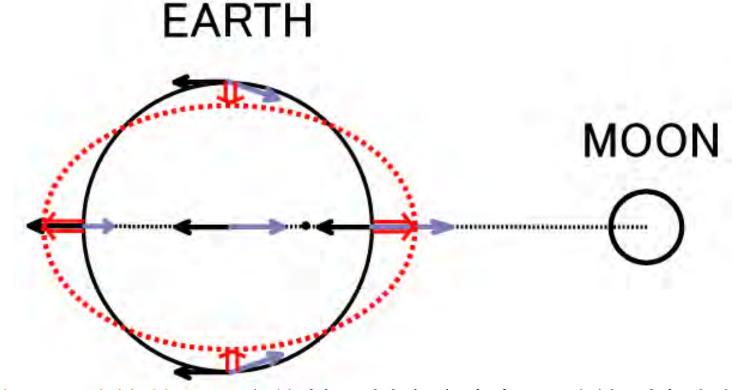
太阳、地球与月亮的运动关系

地球围着太阳转 月亮围着地球转 ???

地球和月球围绕它们的 共同质心做旋转运动!



引潮力



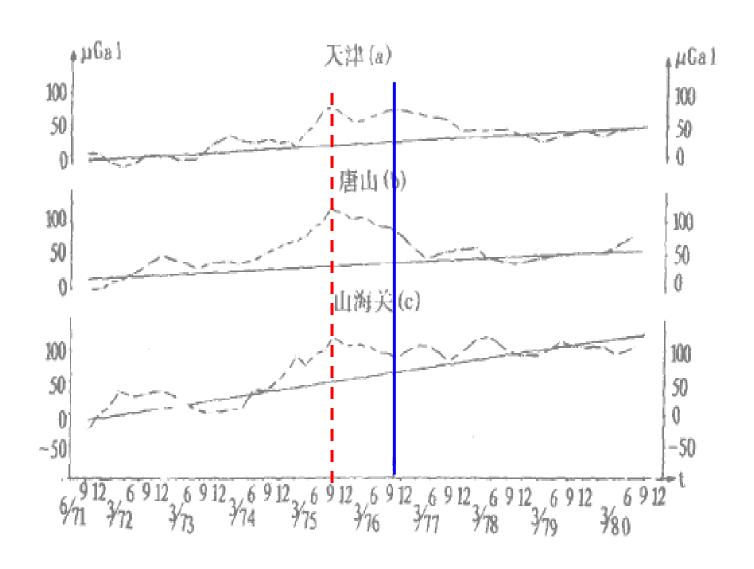
- ◆地球围绕<mark>地球和月球的共同重心</mark>旋转,其离心力与月球的引力在地球质心大小相等、方向相反。
- ◆但在非质心的地方,二者就不一致,其合力就是引潮力

在日、月引力作用下,地球固体表面也会像海水一样产生周期性的涨落,这就是地球的潮汐现象,称为地球固体潮。

#### 固体潮随时间和空间变化

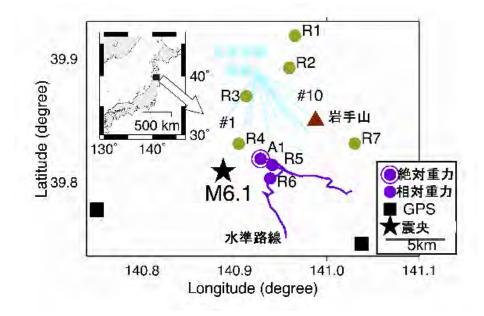
- 时间上,与地球、日、月三者相对位置的变化有关
- 空间上,与地球内部物质物理性质和构造运动有关,主要反映地壳和上地幔区域结构的变化,可能与某些灾难性的地震有直接和间接联系



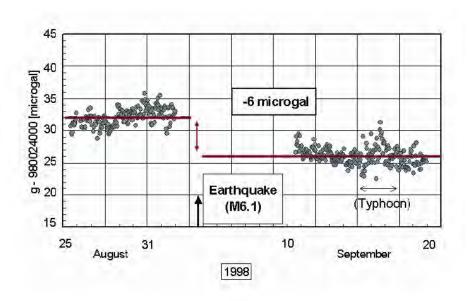




#### 地震引起的同震重力变化



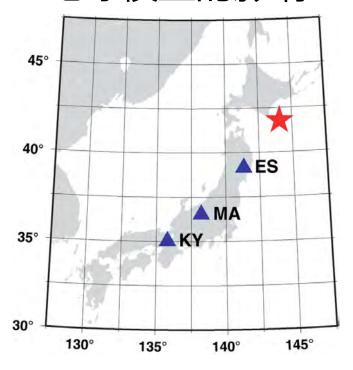
- 1998/9/3 M6.1
- 星号表示震源
- 震中距: 约3公里



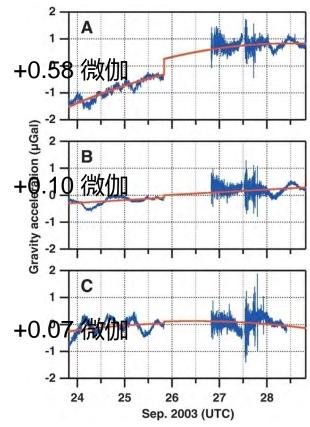
- 地震引起的重力变化
- 8天间隔, 6微伽的变化
- 观测误差为1微伽.
- 位错理论 (Okubo, 1992) **✓**

Tanaka et al., GRL, 2001

## 地球模型的影响



- 绝对重力观测
- 2003/9/25,
- 北海道地震, M8.0



- 球体位错理论 🗸
- 平面位错理论 🔀
- 3.0 地球模型的影响很重要 Imanishi et al., *Science*, 2004

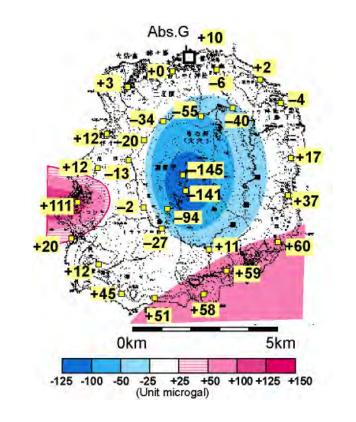
# 山活动时的 重力变化



2000年火山口塌陷前的日本三宅岛



火山口塌陷后的样子。出现直 径1500米,深500米的大坑。



塌前天量的力化陷两测到重变

#### 塌陷与重力测量结果预测吻合

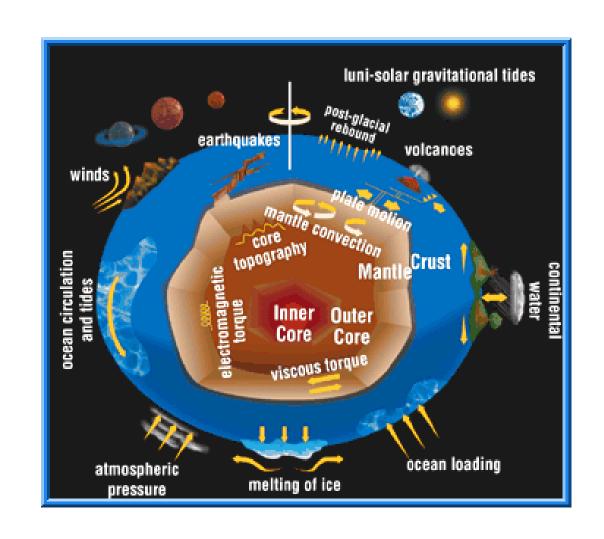
Furuya et al., Journal of Geography, 2001

重力在时间上的变化要比在空间上的变化小很多,需要高精度测量。从1968年美国制成灵敏度达到0.1 g.u.的超导重力仪后,重力学从静态向动态过渡,地球重力场研究开始从三维向四维过渡。我们不仅可利用不同地点重力变化来研究地质构造,还可利用不同时间重力变化来研究地质构造的运动。

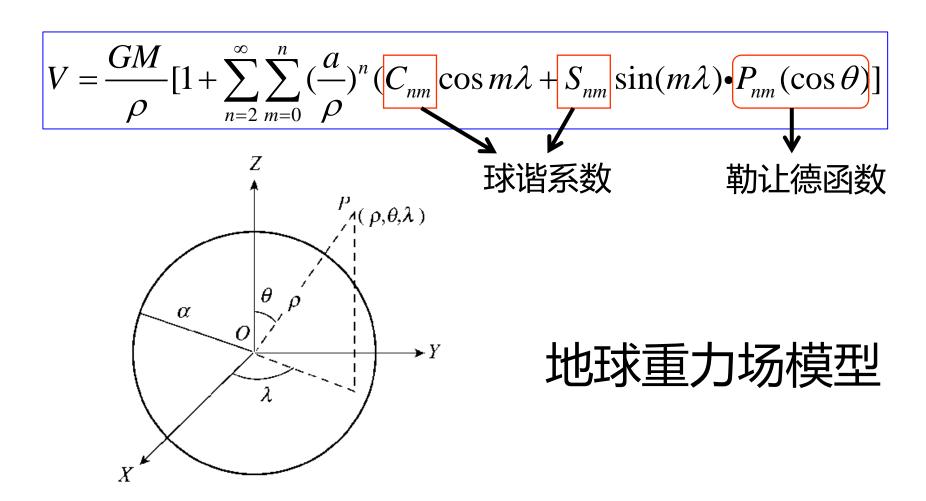
## 重力变化的原因-质量变化

$$V = G \iint_{\sigma} \int_{0}^{r_s} \frac{\rho}{l} r^2 dr d\sigma$$

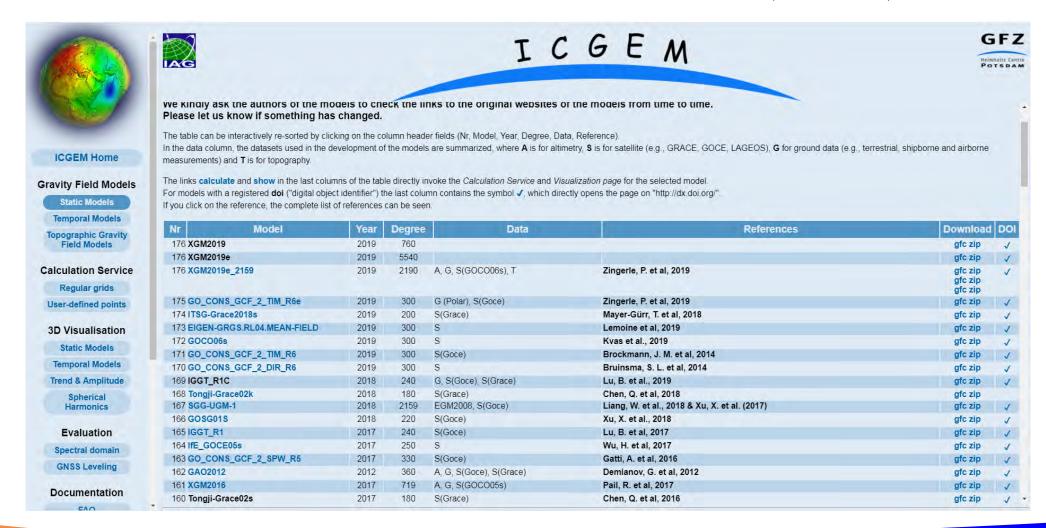
$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} + f(\omega, p)$$



• 以球谐函数级数形式表示的地球引力位为:



#### **International Centre for Global Earth Models (ICGEM)**



- ✓由一组位系数 $C_{nm}$ 和 $S_{nm}$ 可以表达相应的地球重力场,称为地球重力场模型。
- ✓利用地球重力场模型的位系数,可以计算全球范围的重力异常、 大地水准面高程异常,用于研究地球内部结构。
- ✓类似地,可得到月球重力场模型和火星重力场模型,这对行星地质的研究也有重要意义。

# 目 录

第一节 人们对地球重力场的认识

第二节 地球重力场

第三节 重力等位面

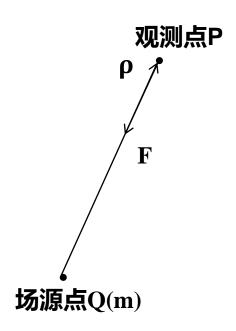


#### 场论知识复习

1、引力场强度:引力场中某点的场强度等于一单位质点在该处所受的力,即Q(m)

点质量引力场: 
$$\mathbf{F} = -G \frac{m}{\rho^2} \frac{\mathbf{\rho}}{\rho}$$

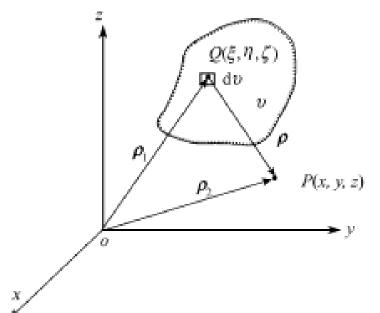
多个点质量叠加: 
$$\mathbf{F} = -G\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i^2} \frac{\mathbf{\rho}_i}{\rho_i}$$





#### 体质量分布的引力场强度:

$$\mathbf{F} = -G \int_{M} \frac{dm}{\rho^{2}} \frac{\mathbf{\rho}}{\rho} = -G \int_{v} \frac{\sigma}{\rho^{2}} \frac{\mathbf{\rho}}{\rho} dv$$

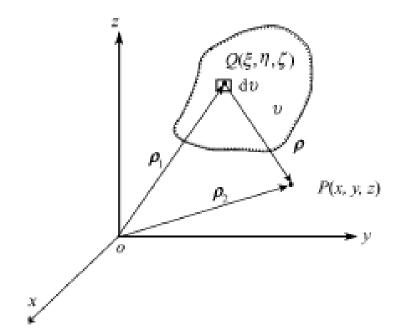


#### 体质量分布的引力场强度: 直角坐标系三分量投影

$$F_{x} = -G \int_{v} \frac{\sigma(x - \xi)}{\rho^{3}} dv$$

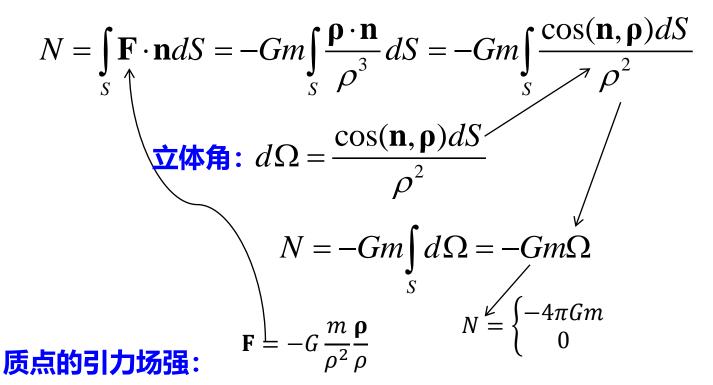
$$F_{y} = -G \int_{v} \frac{\sigma(y - \eta)}{\rho^{3}} dv$$

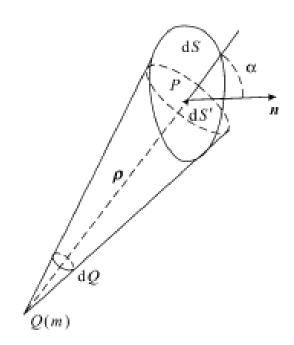
$$F_z = -G \int_{v} \frac{\sigma(z - \zeta)}{\rho^3} dv$$





- 2、引力场的第一基本定律: 高斯定律
  - (1) 质点的引力场强度通量





点质量位于闭合曲面内 点质量位于闭合曲面外

#### 场论知识复习

- 2、引力场的第一基本定律:高斯定律
  - (2) 任意质量分布的引力场强度通量(质量分布位于闭合曲面内) 累加形式:

$$N = \oint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi G \sum_{i} m_{i}$$

积分形式:

$$N = \oint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi G \int_{V} \sigma dV$$

高斯定律:在任意质量分布的引力场中,场强F对于任一闭合曲面 S的通量等于S面所包围的全部在质量的-4πG倍



- 2、引力场的第一基本定律:高斯定律
  - (3) 引力场强度的散度

散度用于研究场强度在某一点上的空间微分变化:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta v}$$

$$\mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G \sigma$$

散度公式表明:场中每一点引力场强度的散度只与该点的密度成正比。



#### 场论知识复习

 $\cos \beta dl = d\rho$ 

3、引力场的第二基本定律(1)引力做功与路径无关

$$A = \int_{L} \mathbf{F} \cdot dl$$

$$\mathbf{F} \cdot dl = -G \frac{m}{\rho^{3}} \mathbf{\rho} \cdot dl = -G \frac{m}{\rho^{2}} \cos \beta dl$$

$$\mathbf{F} \cdot dl = -G \frac{m}{\rho^{2}} d\rho$$

$$A = \int_{L} \mathbf{F} \cdot dl = \int_{rA}^{rB} G \frac{m}{\rho^{2}} d\rho = Gm(\frac{1}{\rho_{R}} - \frac{1}{\rho_{A}})$$

- 3、引力场的第二基本定律
  - (2) 引力场强度的环流 沿闭合曲线做功:

$$A = \oint_{L} \mathbf{F} \cdot dl = 0$$

场强度的环流等于0是引力场的第二基本定律。

- 3、引力场的第二基本定律
  - (3) 引力场强度的旋度 定义为环流与面积之比的极限:

$$\oint_{\Delta s \to 0} \mathbf{F} \cdot dl$$

$$\cot \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{L}{\Delta s} = 0$$

引力场所有各点的场强度的旋度恒等于0

- 4、引力位
  - (1) 引力位的定义

由引力场强度做功与路径无关,只与起止点有关:

$$A = \int_{L} \mathbf{F} \cdot dl = \int_{rA}^{rB} G \frac{m}{\rho^{2}} d\rho = Gm(\frac{1}{\rho_{B}} - \frac{1}{\rho_{A}})$$

• 定义引力位表达式:

$$V = G \frac{m}{\rho}$$

引力位物理意义:引力场强度在两点之间所做的功等于引力位之差

- 4、引力位
- (2) 任意质量分布的引力位 离散质量引力位表达式:

$$V = G \sum_{i} \frac{m_i}{\rho_i}$$

体质量引力位表达式:

$$V = G \int_{v}^{\infty} \frac{\sigma dv}{\rho}$$

- 4、引力位
  - (3) 引力位的梯度与引力场强度的关系 引力场中自A点至B点点位的增量(做功):

$$V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot dl$$

当B无限靠近A时:

$$dV = \mathbf{F} \cdot dl = F_l dl \qquad \Longrightarrow \qquad F_l = \frac{\partial V}{\partial l}$$

即,场强沿dl方向的分量等于位在该方向的方向导数



- 4、引力位
  - (3) 引力位的梯度与引力场强度的关系在直角坐标系:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

根据梯度定义:

$$\mathbb{RP}: \qquad \operatorname{grad} V = \mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{F}$$
=grad $V$ 

引力场中任一点 的场强度F等于该 点引力位的梯度

5、等位面

位值相等的各点构成的曲面, 称为等位面。

$$V(x,y,z) = C(常数)$$

取不同的C值就得到不同的等位面。

#### 引力位

一单位质量体在引力场中移动,引力场对它所做的功A:

$$A = \int_{L} \mathbf{F} \cdot dl = \int_{rA}^{rB} G \frac{m}{\rho^{2}} d\rho = Gm(\frac{1}{\rho_{B}} - \frac{1}{\rho_{A}})$$
 质量m与终点B的距离 质量m与起点A的距离

以距离 $\rho$ 为变量构建一个单值函数V

V是一个标量函数

$$V = G \frac{m}{\rho}$$
 计算点距质量m的距离

这个单值函数V就称为引力位。

引力位物理意义:单位质量在引力场强度中的两点之间移动,引力所做的功等于这两点的引力位之差

引力位的数学意义:引力位的梯度与引力场强度的关系

引力场中自A点至B点点位的增量(做功):

$$V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot dl$$

当B无限靠近A时:

$$dV = \mathbf{F} \cdot dl = F_l dl \qquad \Longrightarrow F_l = \frac{\partial V}{\partial l}$$

即引力场强度沿引方向的分量等于引力位在该方向的方向导数



#### 引力位

进一步表示:引力位V的梯度与引力场强度F的关系

在直角坐标系:

V是一个标量函数

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

根据梯度定义:

矢量函数F

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_x \mathbf{j} + F_x \mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z) = \text{grad}V$$

引力场中任一点的场强度 F 等于该点引力位的梯度

离心力位的梯度U与离心力场的场强度C的关系在直角坐标系:

$$C_x = \frac{\partial U}{\partial x}, C_y = \frac{\partial U}{\partial y}, C_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

根据梯度定义:

grad
$$U = \nabla U = \mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\mathbf{C}$$
=grad $U$ 

离心力场中任一点的场强度 C 等于该点离心力位的梯度



引力  
$$\mathbf{F} = -G \int_{v} \frac{\sigma}{\rho^{2}} \frac{\mathbf{\rho}}{\rho} dv$$

惯性离心力

$$\mathbf{C} = \omega^2 \mathbf{r}$$

重力

$$g = \mathbf{F} + \mathbf{C}$$

求原函数

求导数

引力位 
$$V = G \int_{v}^{\infty} \frac{\sigma dv}{\rho}$$

惯性离心力位

$$U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

重力位

$$W = G \int_{v}^{\infty} \frac{\sigma dv}{\rho} + \frac{1}{2} \omega^{2} (x^{2} + y^{2})$$



#### 引力和惯性离心力各分量:

#### 场强沿任意方向的分量等于位在该方向的方向导数

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_{(x)} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = C_{(x)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_{(y)} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = C_{(y)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F_{(z)} \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = C_{(z)}$$

#### 重力各分量:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = G \int_{M_E} \frac{x - \xi}{\rho^3} dm + \omega^2 x$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = G \int_{M_E} \frac{y - \eta}{\rho^3} dm + \omega^2 y$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = G \int_{M_E} \frac{z - \zeta}{\rho^3} dm$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = G \int_{M_E} \frac{z - \zeta}{\rho^3} dm$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g_z$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g_z$$





重力是一个矢量

重力加速度9.8?

#### 重力矢量:

$$\mathbf{g} = g_{x}\mathbf{i} + g_{y}\mathbf{j} + g_{z}\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= gradW$$

$$= \nabla W$$

#### 重力等于重力位的梯度

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \mathbf{l} \cdot gradW = grad_{l}W \qquad \qquad g_{(l)} = \frac{\partial W}{\partial l} = grad_{l}W$$

重力沿任意 l 方向的分量等于重力位梯度沿该方向的投影。

重力位函数不仅一阶可导,而且具有二阶、三阶、......可导。

在重力勘探中,除了需要用到的重力位一阶导数(梯度)外,有时还用到重力位的二阶、三阶、甚至更高阶的偏导数。

$$W_{xx}$$
,  $W_{yy}$ ,  $W_{zz}$ ,  $W_{xz}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{yz}$ 

$$W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} g_{(x)}$$

$$W_{xz} = \frac{\partial^{2}W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} g_{(x)} = \frac{\partial}{\partial x} g_{(z)}$$

$$W_{yx} \quad W_{yy} \quad W_{yz}$$

$$W_{zx} \quad W_{zy} \quad W_{zz}$$

#### 重力梯度

$$egin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}$$

重力位二阶导数是重力在某一坐标轴的分量沿同一或另一 坐标轴的变化率。

#### 重力位二阶导数(重力梯度)的单位

■ 单位: 1/s², "厄缶"或 "E"

 $1 E = 10^{-9} 1/s^2$ 

■ 相当于在1 m的距离内,重力变化0.001 g.u.或在1 km 的距离内,重力变化了1 g.u.

# 3

#### 3. 重力等位面

#### 重力位三阶导数

■ 经常用到的是W<sub>zzz</sub>

$$W_{(zzz)} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} W_{zz}$$

■ 它表示重力垂向梯度沿铅垂方向的变化率。

#### 重力位三阶导数的单位

单位: 1/(m·s²), 1 MKS

$$1MKS = 1/(m \cdot s^2)$$

#### 实用中用

$$1 \text{ nMKS} = 10^{-9} \text{ 1/(m·s}^2)$$
  
或 
$$1 \text{ pMKS} = 10^{-12} \text{ 1/(m·s}^2)$$

1 nMKS相当于在1m的距离上重力位二阶导数变化了1E。



#### 重力位满足的偏微分方程

#### 引力场的第一和第二定律:

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = -4\pi G \sigma$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

#### 引力位和引力场的关系:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} V = \nabla V$$

#### 因此, 泊松方程:

$$\nabla \bullet \nabla V = \nabla^2 V = -4\pi G\sigma$$

#### 直角坐标系中表示位:

$$\operatorname{grad}V = \nabla V = \mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$F_{x} = \frac{\partial V}{\partial x}, F_{y} = \frac{\partial V}{\partial y}, F_{z} = \frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_{x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{z}}{\partial z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma$$

引力场中无质量分布时  $\sigma = 0$  , 泊松方程就变成 拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = 0$$

在直角坐标系中可表示为:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

#### 重力位满足的偏微分方程

离心力位的二次导数可表示为:

$$U = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \omega^2 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

在直角坐标系中可表示为:

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2$$



#### ■ 在物体的内部,引力位V满足泊松方程

$$\nabla^2 V = -4\pi G\sigma$$

■ 在物体的外部,引力位V满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

■ 离心力位U不满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

重力位W具有以下性质:

在地球内部:

$$\nabla^2 W = -4\pi G \sigma + 2\omega^2$$

在地球外部:

$$\nabla^2 W = 2\omega^2$$

重力位及其一阶导数是处处连续的,但其二阶导数是不连续的。重力位函数不是调和函数,只有在物体外部空间引力位函数是调和函数。

重力位之值相等的各点所构成的曲面称为等位面。因为位是空

间坐标(x, y, z)的函数, 因此等位面:

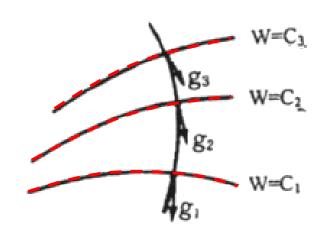
$$W(x, y, z) = C(常数)$$

给定不同的C值就是不同的等位面。

当位移方向 l 与重力 g 的方向垂直时

$$\frac{\partial W}{\partial l} = grad_l W = 0$$

$$W(x, y, z)=C$$
 (常数)



在W(x, y, z) = C方程所确定的曲面上,重力位各处都等于常数C,称这曲面叫重力等位面。

水准面是重力等位面。人们将与平均海洋面相重合的水准面称为 大地水准面(geoid)。

> 在研究地球形状时,人们把平均海洋面顺势延伸到大陆所形成的封闭曲面

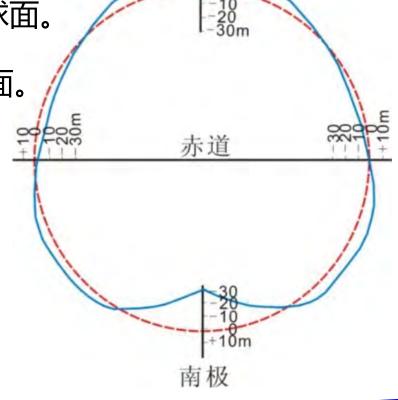
(即大地水准面)的形状,作为地球的基本形状。

▶ 地球形状的一级近似为平均半径为6376 km的正球面。

> **二级近似**是两极半径略小于赤道半径的二轴椭球面。

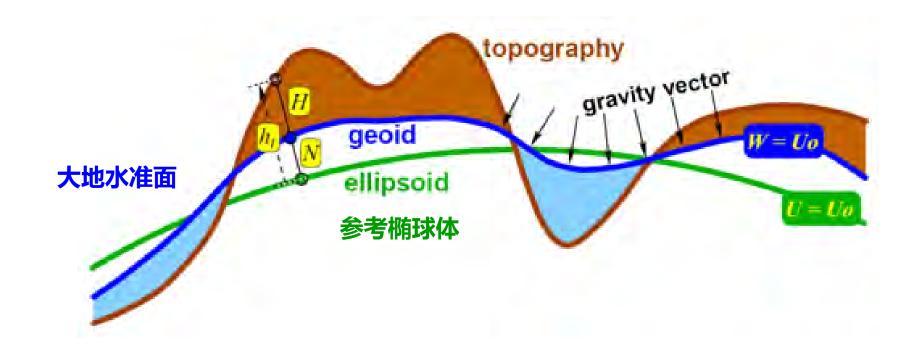
极半径 
$$c = 6356.755$$
 km

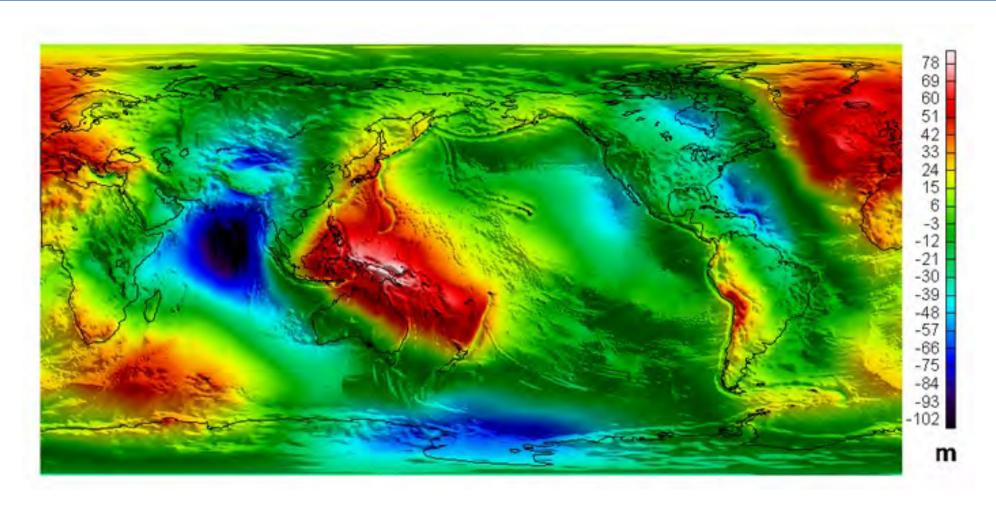
地球扁率 
$$\varepsilon = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{298}$$



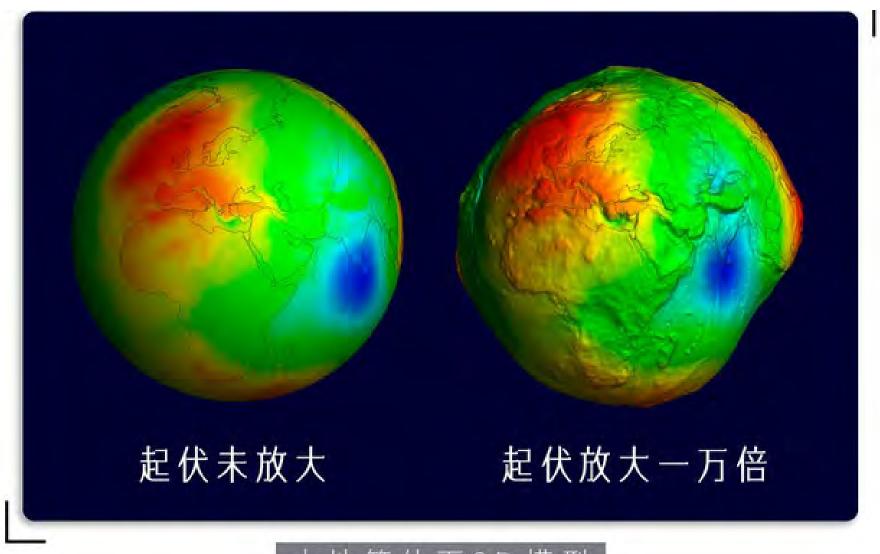
北极

- 全在地面上某点的<mark>高度并不是从大地水准面起算,而是从某一个参考椭球面起算。</mark>
- 大地水准面到参考椭球面法线方向的距离, 称为大地水准面的高程异常。



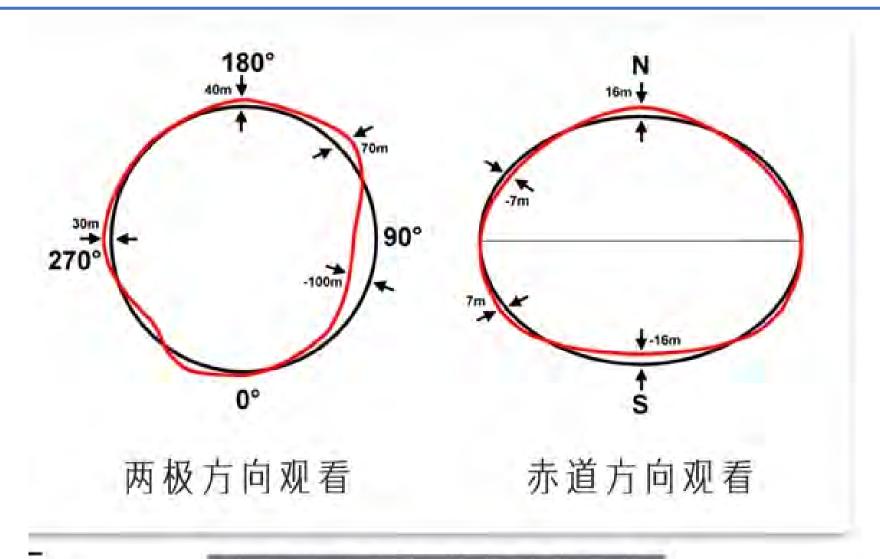


全球大地水准面高度图(据Lemoine等, 1998)



大地等位面3D模型

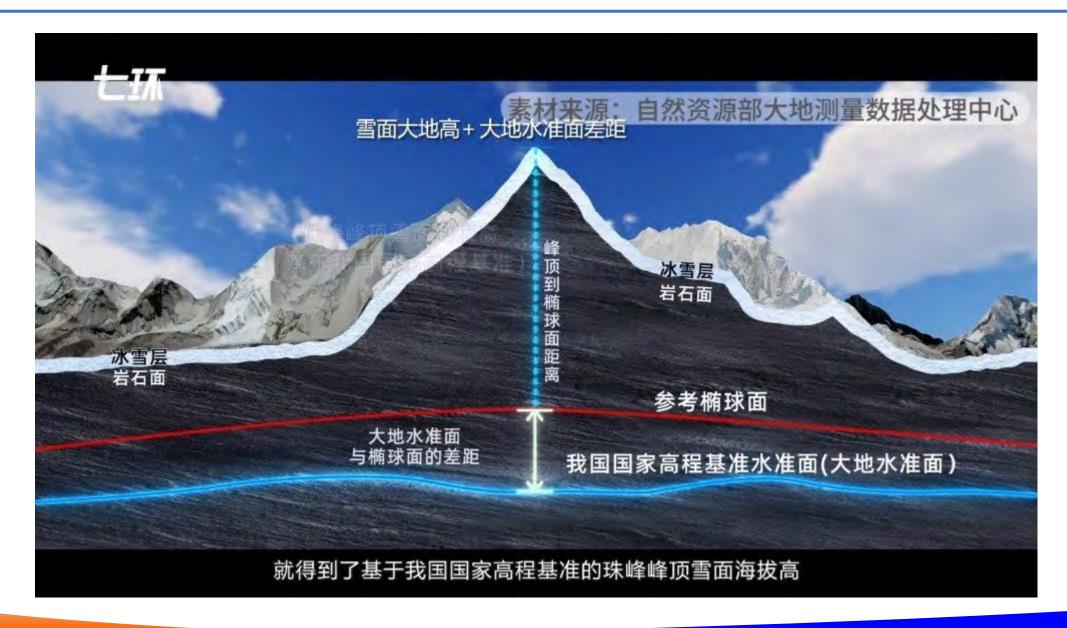




大地水准面与参考椭球对比



# 地球的形状



当位移方向 l 与重力 g 的方向一致时(图中红色线所示),即

$$\frac{\partial W}{\partial l} = g_{(l)} = g$$

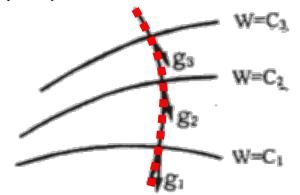
将上式微分换成有限量进行表示:

$$\Delta W = g \cdot \Delta l$$

取两个相邻的等位面或水准面,则两个等位面的重力位之差为常数:

$$C = g \cdot \Delta l$$

- 重力等位面上的重力与等位面之间的距离成反比。若等位面上点的重力值大,则其法线方向的距离就小;反之重力值小,其距离就大。
- 2. 重力值 g 不可能无限大,所以  $\Delta l$  就不可能为0,因此,两个水准面无论相隔多近,都不会相交或相切。

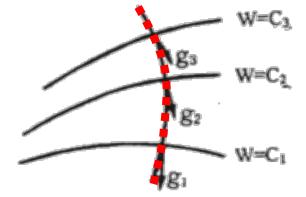


当位移方向 l 与重力 g 的方向一致时(图中红色线所示),即

$$\frac{\partial W}{\partial l} = g_{(l)} = g$$

将上式微分换成有限量进行表示:

$$\Delta W = g \cdot \Delta l$$



- 3. 由于等位面上各点的重力值并不是处处相等,因而两个相邻的重力等位面不一定互相平行。
- 4. 由于重力的大小和方向随地而异,故重力等位面应是一簇互不平行、又不交 叉的曲面。

# 目 录

第一节 人们对地球重力场的认识

第二节 地球重力场

第三节 重力等位面

第四节 正常重力公式

重力存在空间和时间上的变化,其中<mark>空间变化因素</mark>:地球形状和地形、 地球自转、地下物质密度分布不均匀、人类的历史活动遗迹和建筑物等。

要根据地表重力变化来推测地下的密度分布以达到探查矿产、研究地质构造的目的,就必须知道单纯由于地下介质密度分布横向不均匀所引起的重力变化,就必须知道地下介质密度横向均匀情形下重力在地面上的分布规律。

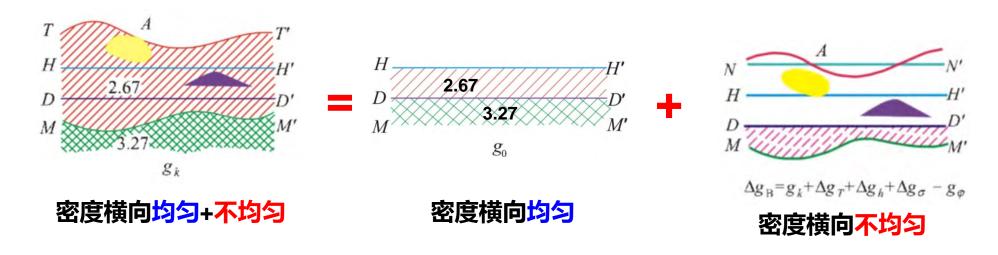


表 1-1

#### 地球内部的分层结构

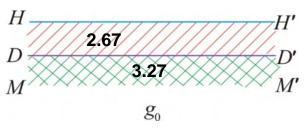
图层					深度	$\hat{V}_{p}$	V.	密度	特 征	其他	
名		称	代号		km	km/s	km/s	g/cm³	14 (11.		
地		上地壳		A <sub>1</sub>	陆洋壳壳	5.8	3.2	2.65	固态,陆壳区横向变化大, 许多地区夹有中间低速层	岩	LL
์ 	克	下地壳	A	A <sub>2</sub>	12; 0~2 33; 10 60~200	6.8	3.9	2.90	固态 <b>莫霍</b> 面 固态	石圏	构 造 圏
地幔	上	盖层	В	$\mathbf{B_1}$		<b>8.</b> 1	4.5	3.37			
	地	低速层		B <sub>2</sub>	200	8.0	4.4	3.36	塑性为主	软流圈	
	幔	均匀层		B <sub>3</sub>	400	8.7	4.7	3.48	固态,波速较均匀		
	过渡层		С		670	9.1 10.3	4.9 5.6	3.72 3.99	固态,波速梯度大	中间	
	下地幔		D	D' D"	2891	11.7	6.5	4.73	固态,下部波速梯度大 古登堡面		
		外核	E		4771	8.0 10.0	0	9.90 11.87	液态		
	也 亥	过渡层	F		5150	10.2	0	12.06	液态,波速梯度小	内圈	
<b>1</b> 5	<b>Д</b>	内核	G		6371	11.0	3.5 3.7	12.77 13.09	固态		

据"初步地球参考模型 (PREM)" 改编

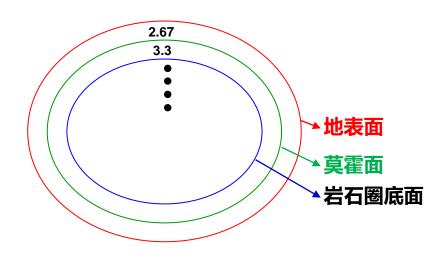
假设地球是密度成层的光滑椭球体,在同一层内密度是均匀的,各层的界面

也都是共焦旋转椭球面

- ✓其表面与大地水准面接近;
- ✓ 其质量与地球的总质量相等;
- ✓物质呈相似旋转椭球层状分布;
- ✓旋转轴与地球自转轴重合;
- ✓ 旋转角速度与地球自转角速度相等。



#### 密度横向均匀



则地球椭球体球面上各点的重力位或重力值可以根据地球的引力参数、地球长

半径、扁率、自转角速度等计算得出。

$$W_{(x,y,z)} = V + U = G \int_{M_E} \frac{dm}{R} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

- ✓ 由此计算的重力位及重力值称为正常重力位及正常重力值
- ✓ 这种情况下的重力场称正常重力场
- ✓ 表示正常重力场的数学解析式称为正常重力公式。

#### 正常重力公式基本形式

 $\varepsilon = \frac{a-c}{}$ 

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi)$$

$$\varphi$$
 为计算点的地理纬度 
$$\beta = \frac{(g_p - g_e)}{g_e}$$
  $g_e$  为赤道上的平均重力值; 
$$\beta_1 = \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \varepsilon \beta$$
  $g_p$ 为两极上的重力值。

 $\boldsymbol{\omega}$ 

为地球的扁率, a, c分别为地球的赤道半径和极半径。

当  $g_p, g_e, \varepsilon$  已知,则可得到计算不同纬度上正常重力值的具体公式。

#### > 1901-1909年赫尔默特公式

$$g_{\varphi} = 9.78030(1 + 0.005302\sin^2\varphi - 0.000007\sin^22\varphi) \quad m/s^2$$

采用的地球参数为 a=6378200 m, c=6356818 m,  $\varepsilon=1/298.2$ 

#### > 1930年卡西尼国际正常重力公式

$$g_{\varphi} = 9.78049(1 + 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) \ m/s^2$$
 采用的地球参数为  $a = 6378388 \ m_{e} \ c = 6356909 \ m_{e} \ \varepsilon = 1/297.0$ 

#### > 1979年国际地球物理及大地测量联合会推荐的正常重力公式

$$g_{\varphi} = 9.780327(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.000005 \sin^2 2\varphi) \quad m/s^2$$

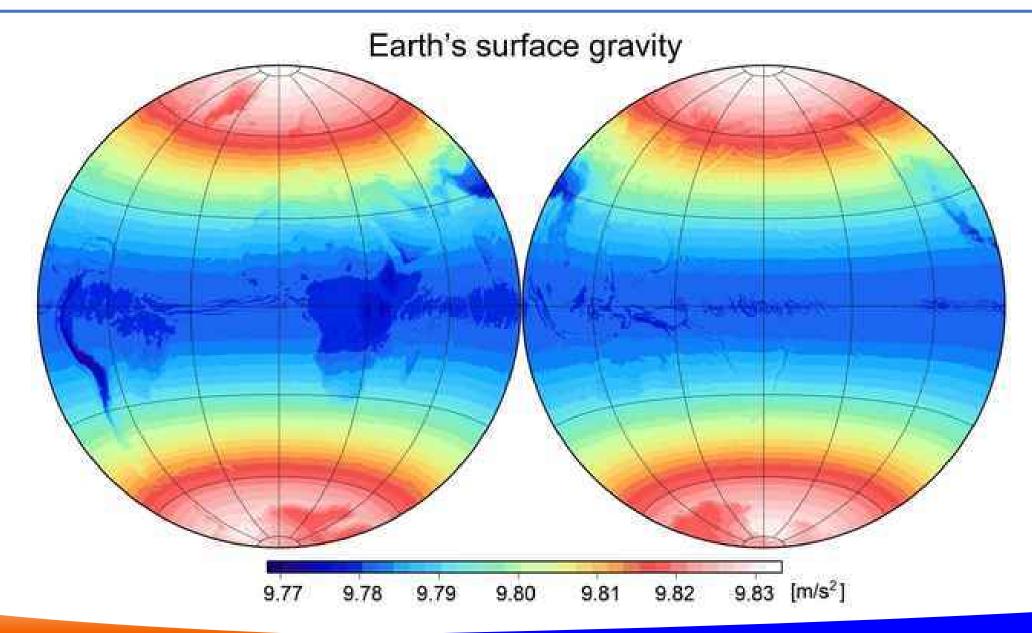
采用的地球参数为 a=6378137 m,  $\varepsilon=1/298.255$ 

#### 正常重力值性质:

$$g_{\varphi} = g_{e}(1 + \beta \sin^{2} \varphi - \beta_{1} \sin^{2} 2\varphi)$$

- 地球的正常重力是人们根据研究的需要而确定的,并不是客观上存在的正常重力场;
- 只与计算点的纬度有关,沿经度方向没有变化;
- 在赤道处最小,而在两极处数值最大,相差约5千 mGal;
- > 沿纬度方向的变化率与纬度有关, 在纬度45度处的变化率最大。

### 4. 正常重力公式



### 目 录

第一节 人们对地球重力场的认识

第二节 地球重力场

第三节 重力等位面

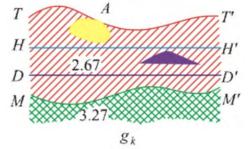
第四节 正常重力公式

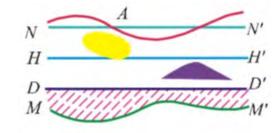
第五节 重力异常

在应用重力学中,由地下岩矿石密度分布不均匀所引起的重力变化,或地 质体与围岩密度的差异引起的重力变化,称为重力异常

广义上,将实测重力值减去正常重力值,其差值称为重力异常

$$\Delta g = g_{\text{sym}} - g_{\varphi}$$





密度横向均匀+不均匀

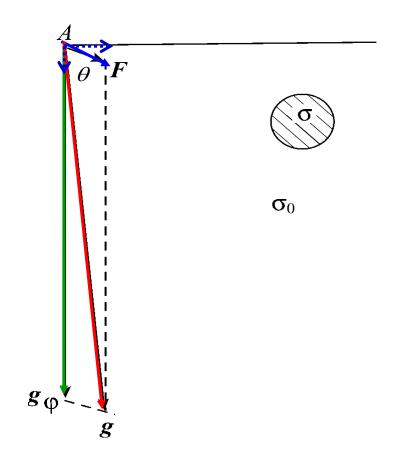
密度横向不均匀

以某一点重力值作为正常值,而以其他测点重力值与之比较得到的差值称 为相对重力异常

$$\Delta g = g_{\text{MA}} - g_{\text{AA}}$$



#### 重力异常与剩余质量引力的关系



剩余密度  $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0$ 

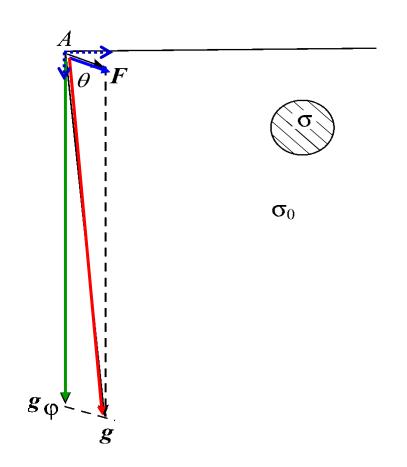
剩余质量  $\Delta \sigma \cdot V$ 

正常重力  $\mathbf{g}_{\varphi}$  (假设密度均匀)

剩余质量产生的引力F

重力  $\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{g}_{\varphi}$ 

#### 重力异常与剩余质量引力的关系



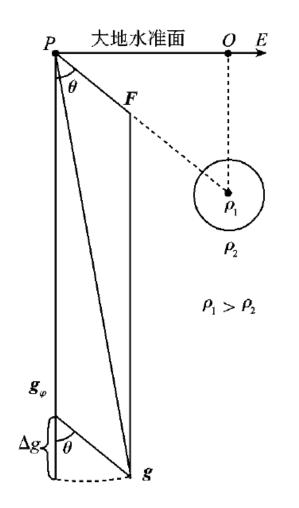
A点的重力异常为: F

$$\Delta g = \left| \mathbf{g} \right| - \left| \mathbf{g}_{\varphi} \right| = F \cos \theta$$

 $\theta$ 为引力 $\mathbf{F}$ 与重力 $\mathbf{g}_{\varphi}$ 之间的夹角

重力异常就是地质体的剩余质量所产生的引力在正常重力方向的分量。

#### 重力异常与剩余质量引力的关系



$$\Delta g = |\mathbf{g}| - |\mathbf{g}_{\varphi}| = g - g_{\varphi}$$

由余弦定理,有

$$g = (g_{\varphi}^2 + 2g_{\varphi}F\cos\theta + F^2)^{1/2}$$

式中:  $\theta$  为 F 与  $g_{\omega}$  的夹角。

将上式代入(1-48)式,可得

$$\Delta g + g_{\varphi} = (g_{\varphi}^2 + 2g_{\varphi}F\cos\theta + F^2)^{1/2}$$

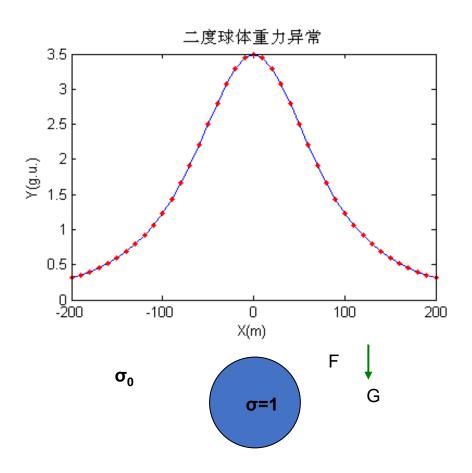
将上式等号两边平方后再除以 $g_{\alpha}^2$ ,得

$$\left(\frac{\Delta g}{g_{\varphi}}\right)^{2} + 2\left(\frac{\Delta g}{g_{\varphi}}\right) = \left(\frac{F}{g_{\varphi}}\right)^{2} + 2\left(\frac{F}{g_{\varphi}}\right)\cos\theta$$

因  $F \ll g_{\varphi}$ ,  $(\Delta g/g_{\varphi})^2$  和  $(F/g_{\varphi})^2$  可忽略, 故

$$\Delta g = F \cos \theta$$

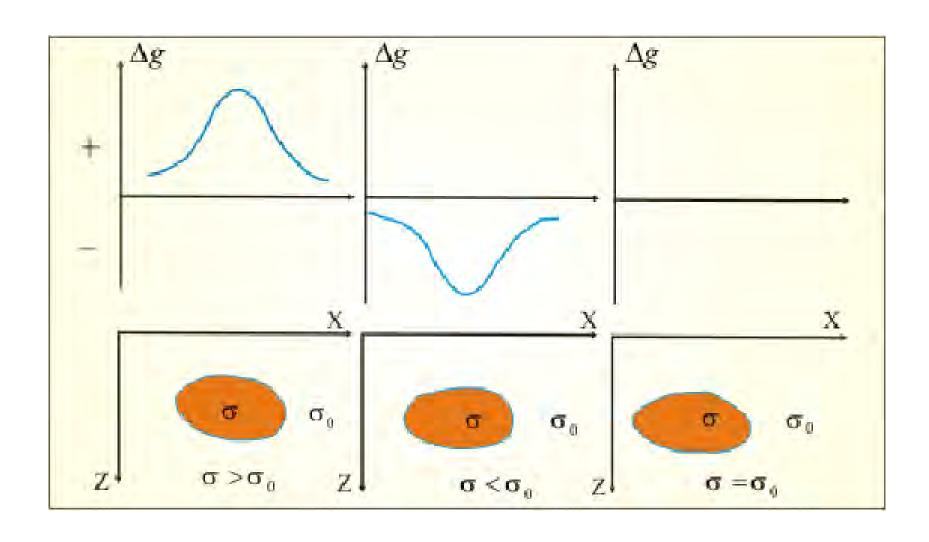
- 引起重力异常的必要条件是岩层密度必须在横向上有变化,即岩层要有一定的构造形态,或岩层内要有密度不同的地质体赋存。
- 对于一组横向上密度均匀分布的岩层,则无论它们在纵向上密度变化有多大,也不能引起重力异常。



$$\Delta g = g - g_{\varphi} = F \bullet \cos \theta$$

$$F = \frac{GM_1 \cdot M_2}{R^2}$$

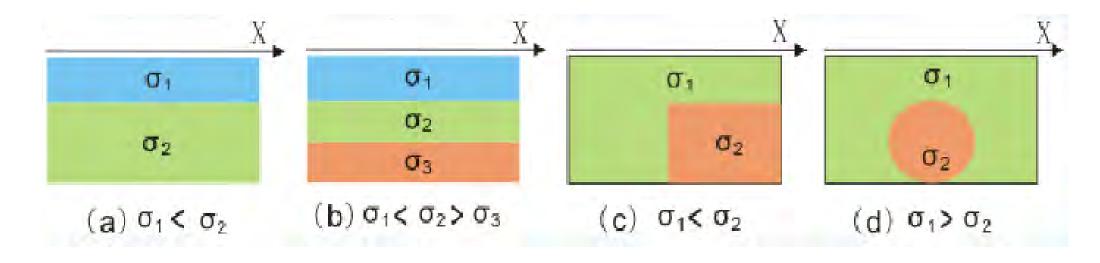








### 下面模型能引起重力异常吗?



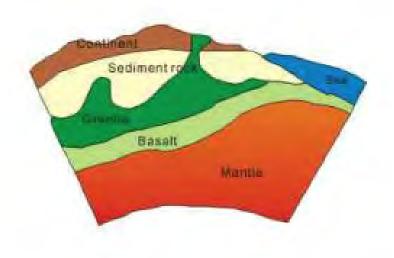
### 引起重力异常的主要地质因素

重力异常包含了从地表到深部所有密度不均匀引起的重力效应,是 所有这些重力效应的叠加:

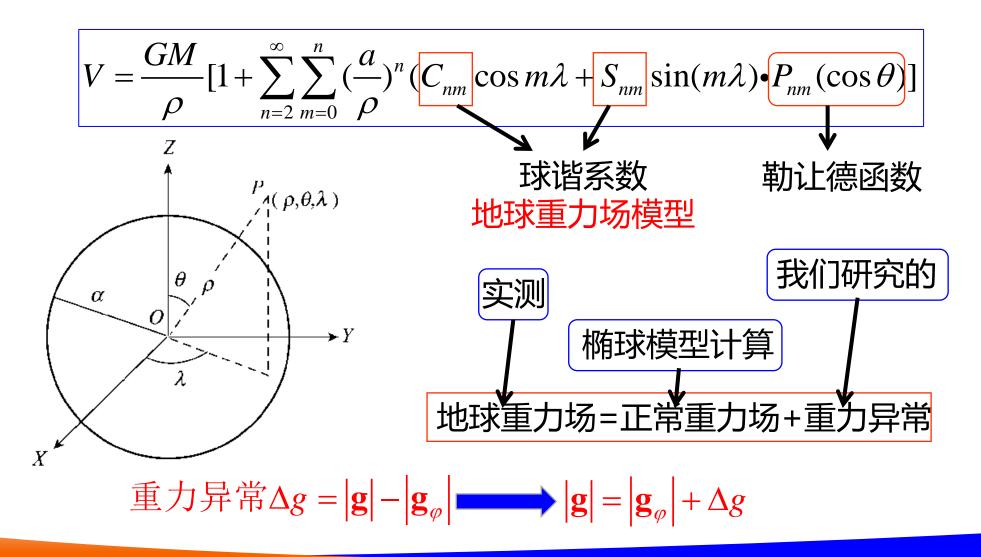
- ◆ 地球深部的因素
- ◆ 地壳深部的因素
- ◆ 结晶基岩内部的密度变化
- ◆ 结晶基底顶面的起伏
- ◆ 沉积岩的构造和成分变化等

- ✓ 在大陆区从地表直至前震旦 系结晶基底的顶面,是厚度 从零到十几公里的沉积岩层, 密度在2.0~2.7 g/cm³左右;
- ✓ 结晶基底以下几十公里的范围内,是花岗岩类和玄武岩类的物质层,其密度约为2.8~3.0 g/cm³之间;
- ✓ 再往下则是橄榄岩类,其密度约为3.3~3.5 g/cm³。





#### 以球谐函数级数形式表示的地球引力位为:



### 小 节

- 地球重力场
- 重力等位面
- 大地水准面、地球形状
- 正常重力场
- 重力异常
- 引起重力异常的必要条件



### 课后习题

□ 为什么层状地层不会引起重力异常

□ 地球的形状是什么样子,由什么决定



# 课程结束

陈涛

