Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Πολυτεχνική Σχολή

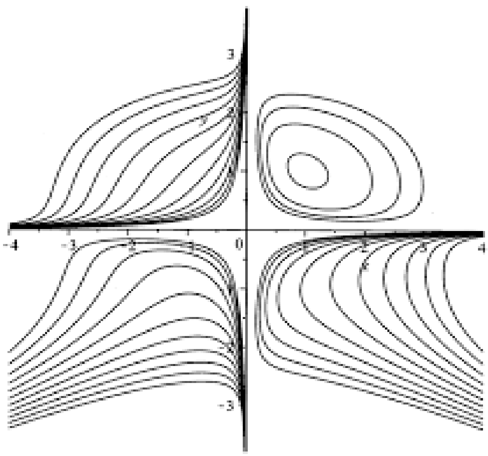
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Προπτυχιακό Μάθημα: «Υπολογιστικά Μαθηματικά»

1^{o} Σετ Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Κρομμύδας Γεώργιος

Α.Μ.:3260



Ιωάννινα, 2018

Άσκηση – 1:

(α) Μας Δίνεται το Π.Α.Τ. $\dot{y} - y = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση η οποία μας δίνεται είναι ομογενής, γραμμική 1ης τάξης και είναι της μορφής:

$$\dot{y} + p(t)y = g(t)$$

όπου το $p(t) = -1$ και το $g(t) = 2te^{t}$.

Το παραπάνω πρόβλημα θα λυθεί με την μέθοδο των ολοκληρώνων παραγόντων. Άρα ο ολοκληρώνων παράγοντας είναι:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{-\int dt} = e^{-t} \Rightarrow \mu(t) = e^{-t}$$

Οπότε πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση με το $\mu(t)$.

$$\dot{y}e^{-t} - ye^{-t} = 2te^{t}$$

$$\Rightarrow (ye^{-t})' = 2te^{t}$$

$$\Rightarrow ye^{-t} = \int 2te^{t}\,dt$$

$$\Rightarrow ye^{-t} = 2te^{t} - \int 2e^{t}dt$$

$$\Rightarrow ye^{-t} = 2te^{t} - 2e^{t} + c$$

$$\Rightarrow y(t) = 2te^{2t} - 2e^{2t} + ce^{t}$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά.

Από την αρχική συνθήκη ισχύει:

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0 - 2 + c \Rightarrow c = 3$$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι:

$$y(t) = 2(t-1)e^{2t} + 3e^{t}$$

(β) Μας δίνεται το Π.Α.Τ. $\dot{y} + 2y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση είναι ομογενής γραμμική 1ης τάξης και είναι της μορφής:

$$\dot{y} + p(t)y = g(t)$$

όπου το $p(t) = 2$ και το $g(t) = te^{-2t}$.

Το παραπάνω πρόβλημα θα λυθεί με την μέθοδο των ολοκληρώνων παραγόντων. Άρα ο ολοκληρώνων παράγοντας είναι:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2\,dt} = e^{2t} \Rightarrow \mu(t) = e^{2t}$$

Οπότε πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση με το $\mu(t)$.

$$\dot{y}e^{2t} + 2ye^{2t} = t$$

$$\Rightarrow (ye^{2t})' = t$$

$$\Rightarrow ye^{2t} = \int tdt$$

$$\Rightarrow ye^{2t} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-2t} + ce^{-2t}$$

Από την αρχική συνθήκη ισχύει:

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}e^{-2} + ce^{-2} \Rightarrow c + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι:

$$y(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)e^{-2t}$$

Άσκηση – 2:

(α) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ. $\dot{y} = (1-2x)y^2$, $y(0) = -\frac{1}{6}$

Η παραπάνω συνήθη διαφορική εξίσωση είναι μη γραμμική 1ης τάξης και είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Άρα ισχύει:

$$\frac{dy}{dx} = (1-2\chi)y^2$$

Εφόσον το $y \neq 0$ τότε έχουμε:

$$\frac{1}{y^2}dy = (1-2x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int (1-2x)dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x - x^2 + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2 - x - c}$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Από την αρχική συνθήκη ισχύει:

$$y(0) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{0^2 - 0 - c} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{-c} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c = 6.$$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι :

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

(β) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ.: $x\,dx + ye^{-x}\,dy = 0,\ y(0) = 1.$

Η παραπάνω συνήθης διαφορική εξίσωση είναι μη γραμμική 1ης τάξης και είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Άρα ισχύει:

$$x\,dx + ye^{-x}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow y\,dy = -xe^{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = -\int xe^{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -xe^x + \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -xe^x + e^x + c$$

$$\Rightarrow y^2 = 2(1-x)e^x + 2c$$

$$\Rightarrow y^2 = 2(1-x)e^x + c_1$$

Από την αρχική συνθήκη ισχύει:

$$y(0) = 1 \Rightarrow y^2(0) = 1 \Rightarrow 2(1-0) + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι :

$$y(x) = \pm\sqrt{2(1-x)e^x - 1}$$

Ωστόσο, το $y(0) = 1$. Συνεπώς, δέκτη γίνεται η θετική λύση:

$$y(x) = \sqrt{2(1-x)e^x - 1}.$$

Άσκηση – 3:

(α) Μας δίνεται η διαφορική εξίσωση $(2x+3) + (2y-2)\dot{y} = 0$.

Έχουμε ότι η $M(x,y) = 2x+3$ και $N(x,y) = 2y-2$.

Θα εξετάσουμε αν η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβής λύση.

- $M_y(x,y) = \frac{\partial M}{\partial y} = 0$
- $N_x(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

Από την στιγμή που ισχύει $M_y(x,y) = N_x(x,y) = 0$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει ακριβής λύση. Από το γνωστό Θεώρημα ισχύει ότι η $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y)$ και η $\frac{\partial \psi}{\partial x} = N(x,y)$. Συνεπώς, ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς x, τότε θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

- $\psi(x,y) = x^2 + 3x + h(y)$

Τώρα θα διαφορίσουμε την εξίσωση ως προς y για να βρούμε την συνάρτηση $h(y)$.

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = 0 + h'(y) = h'(y) = 2y - 2$$

$$\Rightarrow h'(y) = 2y - 2$$

Οπότε, θα βρούμε την $h(y)$:

$$h(y) = \int (2y-2)dy = y^2 - 2y \Rightarrow h(y) = y^2 - 2y$$

Θεωρούμε ότι το $c = 0$.

Οπότε η συνάρτηση είναι η εξής:

$$\psi(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y$$

Άρα από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\big(\psi(x,y)\big) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + y^2 - 2y) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$$

Συνεπώς, η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι πεπλεγμένη.

(β) Μας δίνεται η διαφορική εξίσωση $(2x + 4y) + (2x - 2y)\dot{y} = 0$.

Έχουμε ότι $M(x,y) = 2x + 4y$ και $N(x,y) = 2x - 2y$.

Θα εξετάσουμε αν η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβής λύση.

- $M_y(x,y) = \frac{\partial M}{\partial y} = 4$
- $N_x(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x} = -2$

Από το γνωστό θεώρημα προκύπτει ότι:

$$M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$$

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση δεν έχει ακριβής λύση.

Άσκηση – 4:

(α) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ. $\begin{cases} 4\ddot{y} - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = \beta \end{cases}$.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ομογενής, γραμμική $2^{ης}$ τάξης και είναι της μορφής:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

με $(a, b, c) = (4, 0, -1)$.

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow 4r^2 - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 * 4 * (-1) = 16 > 0$$
$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm 4}{8} = \frac{\pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες. Συνεπώς, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-t/2}$$

Η $\dot{y}(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{t/2} - c_2 \frac{1}{2} e^{-t/2}$.

Από τις αρχικές συνθήκες ισχύει:

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2 \quad (1)$$
$$\dot{y}(0) = \beta \Rightarrow \frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2} c_2 = \beta \Rightarrow c_1 - c_2 = 2\beta \quad (2)$$

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι: $(c_1, c_2) = (1 + \beta, 1 - \beta)$. Άρα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = (1 + \beta)e^{t/2} + (1 - \beta)e^{-t/2}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την σταθερά β. Γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει ο όρος με τον θετικό εκθέτη να μηδενιστεί. Οπότε θα πρέπει να ισχύει:

$$1 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

Οπότε η λύση της διαφορικής εξίσωση είναι:

$$y(t) = 2e^{-t/2}.$$

(β) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ. $\begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(\pi/3) = 2 \\ \dot{y}(\pi/3) = -4 \end{cases}$.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ομογενής, γραμμική $2^{ης}$ τάξης και είναι της μορφής:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

με $(a, b, c) = (1, 0, 1)$.

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 * 1 * 1 = -4 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

Οι ρίζες τις χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές, οπότε θα έχουν την μορφή:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ και } r_2 = \lambda - i\mu$$

Συνεπώς, οι σταθερές είναι: $(\lambda, \mu) = (0, 1)$

Άρα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 cost + c_2 sint$$

Η $\dot{y}(t) = -c_1 sint + c_2 cost.$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$y(\pi/3) = 2 \Rightarrow c_1 \cos(\pi/3) + c_2 \sin(\pi/3) = 2$$

$$\Rightarrow c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \Rightarrow c_1 + \sqrt{3} c_2 = 4 \ \ (1)$$

$$\dot{y}(\pi/3) = -4 \Rightarrow -c_1 \sin(\pi/3) + c_2 \cos(\pi/3) = -4$$

$$\Rightarrow -c_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + c_2 \frac{1}{2} = -4$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} c_1 - c_2 = 8 \ \ (2)$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι: $(c_1, c_2) = (1 + 2\sqrt{3},\ \sqrt{3} - 2)$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι:

$$y(t) = \left(1 + 2\sqrt{3}\right) cost + \left(\sqrt{3} - 2\right) sint$$

(γ) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ.: $\begin{cases} 3\ddot{y} - \dot{y} + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ομογενής, γραμμική 2ης τάξης και είναι της μορφής:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

με $(a, b, c) = (3, -1, 2)$.

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow 3r^2 - r + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 * 3 * 2 = -23 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{6} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{6}$$

Οι ρίζες τις χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές, οπότε θα έχουν την μορφή:

$$r_1 = \lambda + i\mu \ \ \text{και} \ \ r_2 = \lambda - i\mu$$

Συνεπώς, οι σταθερές είναι: $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{23}}{6})$

Άρα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{t/6}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right) + c_2 e^{t/6}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right)$$

Η παράγωγος είναι η εξής:

$$\dot{y}(t) = c_1\left[\frac{1}{6}e^{t/6}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right) - \frac{\sqrt{23}}{6}e^{t/6}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right)\right] + c_2\left[\frac{1}{6}e^{t/6}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right) + \frac{\sqrt{23}}{6}e^{t/6}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right)\right]$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 * 1 * 1 + c_2 * 1 * 0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2 \qquad (1)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow c_1 * \tfrac{1}{6} * 1 * 1 - 0 + 0 + c_2 * \tfrac{\sqrt{23}}{6} * 1 * 1 = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2}{6} + \frac{\sqrt{23}}{6}c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{2\sqrt{23}}{23}$$

Συνεπώς, η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι:

$$y(t) = 2e^{t/6}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right) - \frac{2\sqrt{23}}{23}e^{t/6}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}t\right)$$

Άσκηση-5:

(α) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ.: $\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 3te^{2t} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μη ομογενής, γραμμική 2ης τάξης. Η διαφορική εξίσωση και είναι της μορφής:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$$

όπου $(a, b, c) = (1, -2, -3)$ και $g(t) = 3te^{2t}$

Άρα η λύση θα έχει την μορφή:

$$y(t) = y_O(t) + Y(t)$$

όπου η $y_O(t)$ είναι η ομογενής λύση και η $Y(t)$ η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Αρχικά θα βρούμε την μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Έστω ότι η $Y(t) = (At + B)e^{2t}$.

- $\dot{Y}(t) = Ae^{2t} + 2(At + B)e^{2t}$
- $\ddot{Y}(t) = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4(At + B)e^{2t} = 4Ae^{2t} + 4(At + B)e^{2t}$

Τώρα θα αντικαταστήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην διαφορική εξίσωση για να βρούμε τις σταθερές Α, Β.

$$\ddot{Y}(t) - 2\dot{Y}(t) - 3Y(t) = 3te^{2t}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2t} + 4(At + B)e^{2t} - 2[Ae^{2t} + 2(At + B)e^{2t}] - 3(At + B)e^{2t} = 3te^{2t}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{2t} + 4(At + B)e^{2t} - 2Ae^{2t} - 4(At + B)e^{2t} - 3(At + B)e^{2t} = 3te^{2t}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{2t} - 3(At + B)e^{2t} = 3te^{2t}$$

$$\Rightarrow 2A - 3At - 3B = 3t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 3 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$Y(t) = -(t + \tfrac{2}{3})e^{2t}.$$

Τώρα θα βρούμε την λύση της ομογενούς εξίσωσης. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 * 1 * (-3) = 16 > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow r_1 = 3,\ r_2 = -1$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες. Όποτε η διαφορική εξίσωση έχει λύση:

$$y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - (t + \frac{2}{3})e^{2t}$$

Η $\dot{y}(t) = 3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - e^{2t} - 2(t + \frac{2}{3})e^{2t}$

Από τις αρχικές συνθήκες ισχύει ότι:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{5}{3} \ (1)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow 3c_1 - c_2 - 1 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 3c_1 - c_2 = \frac{7}{3} (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, τότε θα πάρουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$4c_1 = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$1 + c_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$$

Συνεπώς η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι το εξής:

$$y(t) = e^{3t} - \frac{1}{3}(3t + 2)e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}.$$

(β) Μας δίνεται το εξής Π.Α.Τ.: $\begin{cases} \ddot{y} + 4y = t^2 + 3e^t \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases}.$

Η διαφορική εξίσωση είναι μη ομογενής γραμμική β' τάξης και είναι της μορφής:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$$

όπου $(a, b, c) = (1,0,4)$ και $g(t) = g_1(t) + g_2(t) = t^2 + 3e^t$.

Άρα η λύση θα έχει την μορφή:

$$y(t) = y_O(t) + Y(t)$$

όπου η $y_O(t)$ είναι η ομογενής λύση και η $Y(t)$ η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Επίσης, η μερική λύση είναι $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$, όπου $Y_1(t)$ η μερική λύση της επιμέρους διαφορικής εξίσωσης $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g_1(t)$ και $Y_2(t)$ η μερική λύση της επιμέρους διαφορικής εξίσωσης $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g_2(t)$.

Έστω ότι η $Y_1(t) = At^2 + Bt + C$. Τότε:

- $\dot{Y}_1(t) = 2At + B$
- $\ddot{Y}_1(t) = 2A$

Αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση για να βρούμε την μερική λύση:

$$\ddot{Y}_1(t) + 4Y_1(t) = t^2$$

$$\Rightarrow 2A + 4(2At^2 + Bt + C) = t^2$$

$$\Rightarrow 2A + 4At^2 + 4Bt + 4C = t^2$$

$$\Rightarrow (4A-1)t^2 - 4Bt - 4C - 2A = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A - 1 = 0 \\ -4B = 0 \\ -4C - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 0 \\ C = -1/8 \end{cases}$$

Οπότε η μερική λύση της διαφορικής είναι $Y_1(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}$.

Έστω ότι $Y_2(t) = De^t$. Τότε:

- $\dot{Y}_2(t) = De^t$
- $\ddot{Y}_2(t) = De^t$

Αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση για να βρούμε την μερική λύση:

$$\ddot{Y}_2(t) + 4Y_2(t) = 3e^t$$

$$\Rightarrow De^t + 4De^t = 3e^t \Rightarrow 5D = 3 \Rightarrow D = \frac{3}{5}$$

Οπότε η μερική λύση της διαφορικής είναι $Y_2(t) = \frac{3}{5}e^t$.

Συνεπώς, η συνολική μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$Y(t) = \frac{3}{5}e^t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}$$

Τώρα θα βρούμε την λύση της ομογενούς εξίσωσης. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 * 1 * (-4) = -16 < 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm i4}{2} = \pm i2 \Rightarrow r_1 = i2,\ r_2 = -i2$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές πραγματικές ρίζες και άνισες, οι οποίες έχουν την εξής μορφή:

$$r_1 = \lambda + i\mu = i2$$

$$r_2 = \lambda - i\mu = -i2$$

Άρα το *λ = 0* και το *μ = 2*.

Όποτε η διαφορική εξίσωση έχει λύση:

$$y(t) = \ c_1 \cos(2t) + \ c_2 \sin(2t) + \ \frac{3}{5}e^t + \frac{1}{4}t^2 - \ \frac{1}{8}$$

Η $\quad \dot{y}(t) = \ -2c_1 \sin(2t) + \ 2c_2 \cos(2t) + \ \frac{3}{5}e^t + \frac{1}{2}t$.

Από τις αρχικές συνθήκες ισχύουν τα εξής:

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 * 1 + \ c_2 * 0 + \frac{3}{5} * 1 + 0 - \ \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \ c_1 = \ -\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \ c_1 = \ -\frac{19}{40}$$

$$\dot{y}(0) = 2 \ \Rightarrow -2c_1 * 0 + 2c_2 * 1 + \frac{3}{5} * 1 + 0 = 2 \Rightarrow \ 2c_2 = \ 2 - \ \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \ c_2 = \ \frac{7}{10}$$

Συνεπώς η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι το εξής:

$$y(t) = -\frac{19}{40}\cos(2t) + \ \frac{7}{10}\sin(2t) + \ \frac{3}{5}e^t + \frac{1}{4}t^2 - \ \frac{1}{8}$$