Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Πολυτεχνική Σχολή

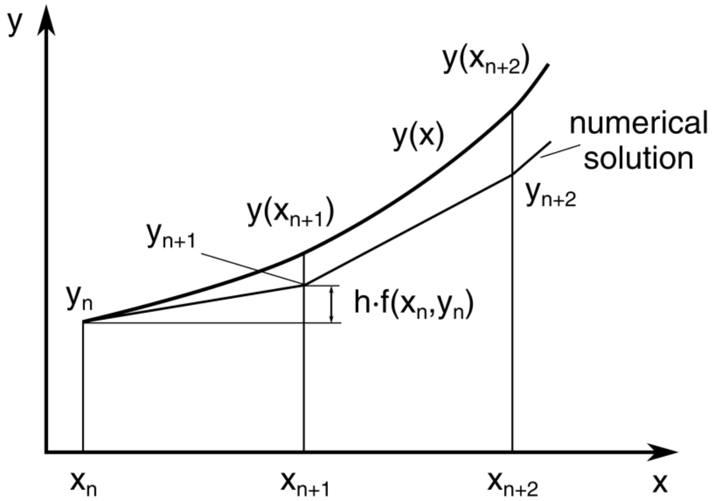
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Προπτυχιακό Μάθημα: «Υπολογιστικά Μαθηματικά»

2ο Σετ Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Κρομμύδας

Α.Μ.: 3260



Ιωάννινα, 2018

Άσκηση 1:

Έχουμε το εξής Π.Α.Τ. : $\begin{cases} \dot{y} = \frac{y + x^2 - 2}{x+1} = f(x,y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ με αναλυτική λύση

$y(x) = x^2 + 2x + 2 - 2(x+1)\ln(x+1)$. Θα προσεγγίσουμε την λύση με την μέθοδο του Euler και την μέθοδο του Taylor β’ τάξης.

(α) (Ι) Εφαρμόζουμε πρώτα την μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}_n = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\frac{y_n + x_n^2 - 2}{x_n + 1}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{(x_n + h + 1)}{x_n + 1} y_n + h\frac{(x_n^2 - 2)}{x_n + 1}$$

(ΙΙ) Πριν εφαρμόσουμε την μέθοδο του Taylor β’ τάξης, θα βρούμε πρώτα την δεύτερη παράγωγο. Άρα έχουμε:

$$\ddot{y}(x) = \left(\dot{y}(x)\right)' = \left(\frac{y + x^2 - 2}{x+1}\right)' =$$

$$= \frac{(y + x^2 - 2)'(x+1) - (x+1)'(y + x^2 - 2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(\dot{y} + 2x)(x+1) - y - x^2 + 2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y + x^2 - 2}{x+1} + 2x\right)(x+1) - y - x^2 + 2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{y + x^2 - 2 + 2x(x+1) - y - x^2 + 2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{y}(x) = \frac{2\chi}{(x+1)}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας την μέθοδο του Taylor β’ τάξης θα πάρουμε το εξής αποτέλεσμα:

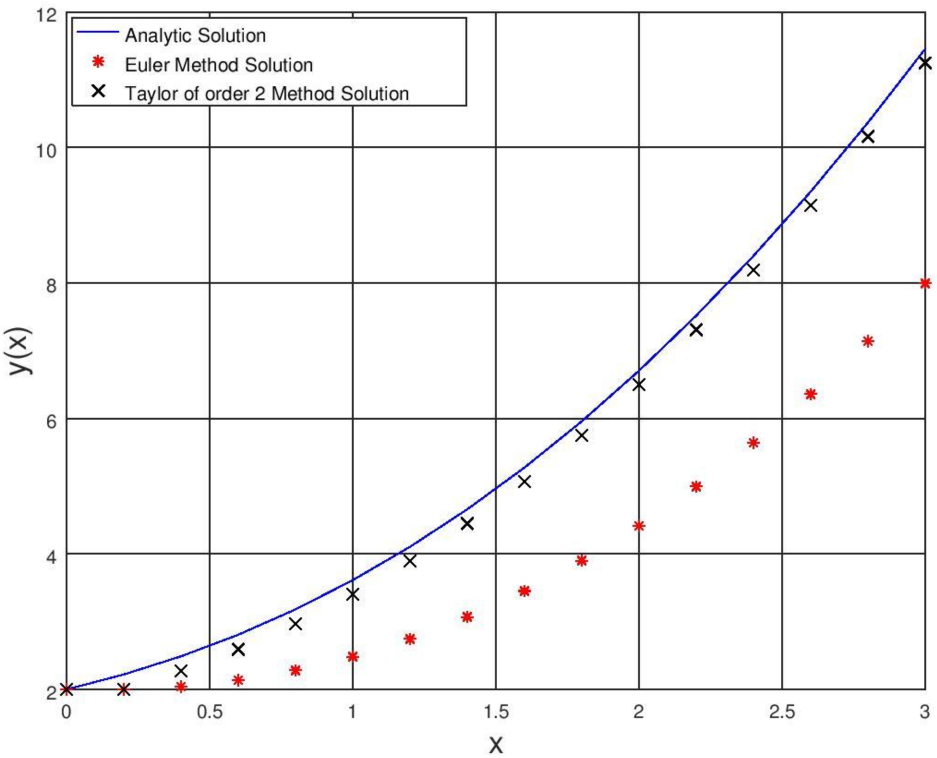
$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_n = y_n + h\frac{(y_n + x_n^2 - 2)}{x_n + 1} + \frac{h^2}{2}\frac{2x_n}{x_n + 1} \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{(x_n + h + 1)}{x_n + 1}y_n + h\frac{(x_n^2 + hx_n - 2)}{x_n + 1}$$

(β) Σε αυτό το ερώτημα είχαμε να προγραμματίσουμε τις παραπάνω μεθόδους. Παρακάτω φαίνεται το πρόγραμμα σε GNU Octave:

```
% First script
% Numerical solve of ordinary differental equation
% with the method of Euler and Taylor order 2
% We have the problem
h = 0.2;
x = 0:h:3;
n = length(x);
y = x.^2 + 2*x + 2 - (x+1).*log(x+1)
y0 = 2;
f = @(x,y) (y + x.^2 - 2)./(x+1) ;
df = @(x,y) (2*x./(x+1));
% Euler Method
yE = zeros(size(x),1);
yE(1) = y0;
for( i = 1:n-1)
  yE(i+1) = yE(i) + h.*f(x(i),y(i));
end
% Taylor Method of order 2
yT = zeros(size(x),1);
yT(1) = y0;
for(i = 1:n-1)
 yT(i+1) = y(i) + h.*f(x(i),y(i)) + h^2/2.*df(x(i),y(i)) ;
end
% Graph of solutions
figure();
plot(x, y,'b-');
xlabel('x','fontsize',16);
ylabel('y(x)','fontsize',16);
hold on
plot(x,yE,'r*');
plot(x,yT,'kx');
legend('Analytic Solution','Euler Method Solution','Taylor of order 2 Method
Solution','Location','northwest');
hold off
```

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα του προγράμματος:



Άσκηση 2:

Έχουμε το εξής Π.Α.Τ. : $\begin{cases} \dot{y} = x + y = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ με αναλυτική λύση

$y(x) = e^x - x - 1$. Θα προσεγγίσουμε την λύση με την μέθοδο του Euler, με την τροποποιημένη μέθοδο του Euler και με την βελτιωμένη μέθοδο του Euler.

(α) (I) Εφαρμόζουμε πρώτα την μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}_n = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n + y_n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = (1+h)y_n + hx_n$$

(II) Τώρα θα εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\dot{y}_n\right) = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) =$$

$$= y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}(x_n + y_n)\right) = y_n + h\left(x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}(x_n + y_n)\right) \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)y_n + \left(h + \frac{h^2}{2}\right)x_n + \frac{h^2}{2}$$

(III) Τέλος, θα εφαρμόσουμε την βελτιωμένη μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h\dot{y}_n)] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[(x_n + y_n) + f\big(x_n + h, y_n + h(x_n + y_n)\big)\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[(x_n + y_n) + \big(x_n + h + y_n + h(x_n + y_n)\big)\right]$$

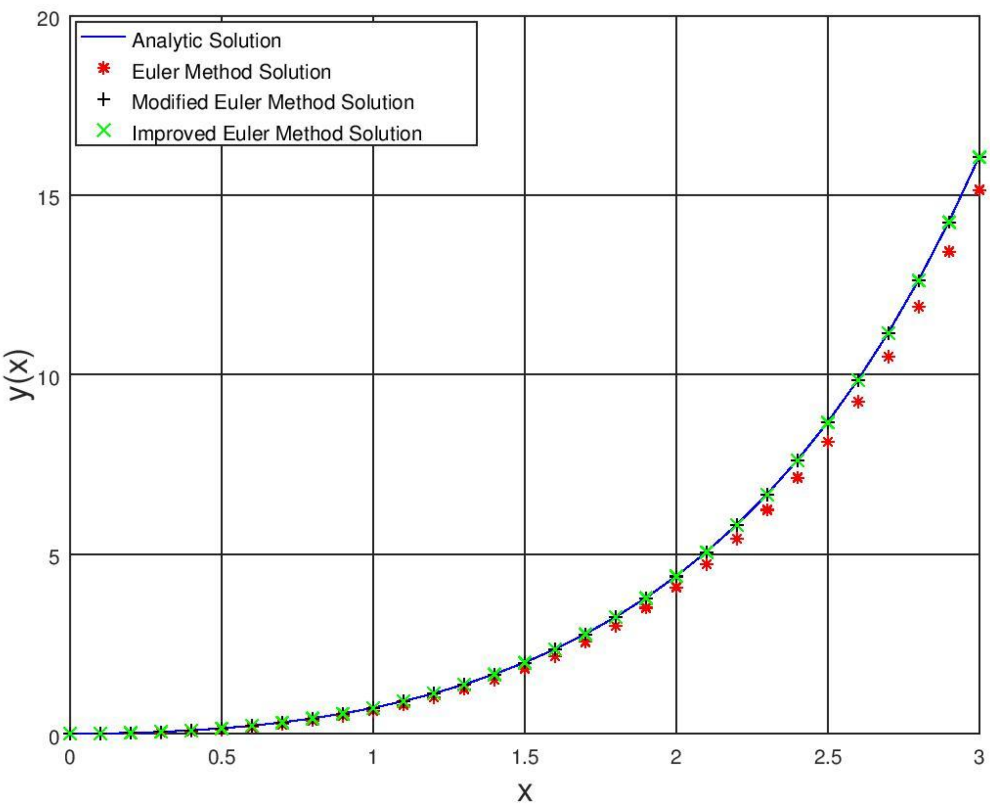
$$\Rightarrow y_{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)y_n + \left(h + \frac{h^2}{2}\right)x_n + \frac{h^2}{2}$$

(β) Σε αυτό το ερώτημα είχαμε να προγραμματίσουμε τις παραπάνω μεθόδους. Παρακάτω φαίνεται το πρόγραμμα σε GNU Octave:

```
% Second Script
% Numerical solve of ordinary differental equation
% with the method of Euler, the improved method and the modified
% We have the problem
h = 0.1;
x = 0:h:3;
n = length(x);
y = exp(x) - x - 1;
y0 = 0;
f = @(x,y) x + y ;
% Euler Method
yE = zeros(size(x),1);
yE(1) = y0;
for( i = 1:n-1)
  yE(i+1) = yE(i) + h.*f(x(i),y(i));
end
% Modified Euler Method
yM = zeros(size(x),1);
yM(1) = y0;
for ( i = 1:n-1 )
  yM(i+1) = yM(i) + h.* f(x(i) + h/2, y(i) + h/2.*f(x(i),y(i)));
end
% Improved Euler Method
yI = zeros(size(x),1);
yI(1) = y0;
for ( i = 1:n-1 )
  yI(i+1) = yI(i) + h/2.*(f(x(i),y(i)) + f(x(i) + h, y(i) + h.*f(x(i),y(i))));
end
```

```
% Graph of solutions
figure();
plot(x, y, 'b-');
xlabel('x','fontsize',16);
ylabel('y(x)','fontsize',16);
hold on
plot(x,yE,'r*');
plot(x,yM,'k+');
plot(x,yI,'gx');
legend('Analytic Solution','Euler Method Solution','Modified Euler Method
Solution','Improved Euler Method Solution','Location','northwest');
hold off
```

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα του προγράμματος:



Άσκηση 3:

Έχουμε το εξής Π.Α.Τ. : $\begin{cases} \dot{y} = x/y = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ με αναλυτική λύση

$y(x) = \sqrt{x^2+1}$. Θα προσεγγίσουμε την λύση με την μέθοδο του Euler, με την τροποποιημένη μέθοδο του Euler και με την βελτιωμένη μέθοδο του Euler.

(α) (Ι) Εφαρμόζουμε πρώτα την μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}_n = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\frac{x_n}{y_n}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\frac{x_n}{y_n}$$

(ΙΙ) Τώρα θα εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\dot{y}_n\right) = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) =$$

$$= y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\frac{x_n}{y_n}\right) =$$

$$= y_n + h\frac{x_n + \frac{h}{2}}{y_n + \frac{h}{2}\frac{x_n}{y_n}} = y_n + h\frac{\frac{2x_n + h}{2}}{\frac{2y_n^2 + hx_n}{2y_n}} = y_n + h\frac{y_n(2x_n + h)}{2y_n^2 + hx_n}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\frac{y_n(2x_n + h)}{2y_n^2 + hx_n}$$

(ΙΙΙ) Τέλος, θα εφαρμόσουμε την βελτιωμένη μέθοδο του Euler:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h\dot{y}_n)] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[\frac{x_n}{y_n} + f\left(x_n + h, y_n + h\frac{x_n}{y_n}\right)\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[\frac{x_n}{y_n} + \frac{x_n + h}{y_n + h\frac{x_n}{y_n}}\right] = y_n + \frac{h}{2}\left[\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n(x_n + h)}{y_n^2 + hx_n}\right] =$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left[\frac{x_n(y_n^2 + hx_n)}{y_n(y_n^2 + hx_n)} + \frac{y_n^2(x_n + h)}{y_n(y_n^2 + hx_n)}\right]$$

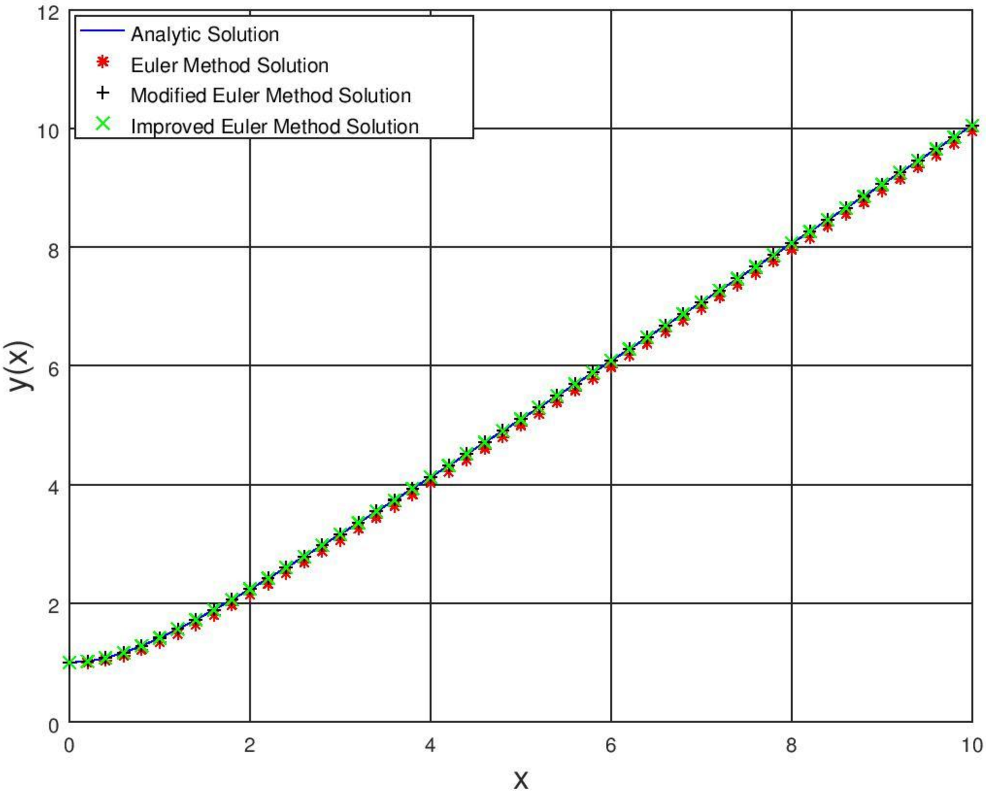
$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\frac{x_n(y_n^2 + hx_n) + y_n^2(x_n + h)}{y_n(y_n^2 + hx_n)}\right]$$

(β) Σε αυτό το ερώτημα είχαμε να προγραμματίσουμε τις παραπάνω μεθόδους. Παρακάτω φαίνεται το πρόγραμμα σε GNU Octave:

```
% Third Script
% Numerical solve of ordinary differental equation
% with the method of Euler, the improved method and the modified
% We have the problem
h = 0.2;
x = 0:h:10;
n = length(x);
y = sqrt(x.^2 + 1);
y0 = 1;
f = @(x,y) x./y;
% Euler Method
yE = zeros(size(x),1);
yE(1) = y0;
for( i = 1:n-1)
  yE(i+1) = yE(i) + h.*f(x(i),y(i));
end
% Modified Euler Method
yM = zeros(size(x),1);
yM = y0;
for ( i = 1:n-1 )
  yM(i+1) = yM(i) + h.* f(x(i) + h/2, y(i) + h/2.*f(x(i),y(i)));
end
% Improved Euler Method
yI = zeros(size(x),1);
yI = y0;
for ( i = 1:n-1 )
  yI(i+1) = yI(i) + h/2.*(f(x(i),y(i)) + f(x(i) + h, y(i) + h.*f(x(i),y(i))));
end
% Graph of solutions
figure();
plot(x, y, 'b-');
xlabel('x','fontsize',16);
ylabel('y(x)','fontsize',16);
hold on
plot(x,yE,'r*');
plot(x,yM,'k+');
plot(x,yI,'gx');
legend('Analytic Solution','Euler Method Solution','Modified Euler Method Solution','Improved Euler Method Solution','Location','northwest');
hold off
% Graph of errors
figure();
plot(x,abs(yE-y),'r-');
xlabel('x','fontsize',16);
```

```
ylabel('en','fontsize',16);
hold on
plot(x,abs(yM-y),'k-');
plot(x,abs(yI-y),'g-');
legend('Euler Method Error','Modified Euler Method Error','Improved Euler Method','Location','northwest');
hold off
```

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα του προγράμματος:



(γ) Σε αυτό το ερώτημα είχαμε να αναπαραστήσουμε τα σφάλματα των μεθόδων. Παρακάτω φαίνεται το γράφημα: