Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Προπτυχιακό Μάθημα: «Υπολογιστική Όραση»

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Όνομα Φοιτητή – Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας – 3260

Ιωάννινα,

2020

Άσκηση – 2η

Αρχικά, το Α.Μ. είναι 3260. Συνεπώς το $\alpha = 3$, το $\beta = 2$, το $\gamma = 6$ και το $\delta = 0$. Οπότε θα γίνουν οι αντίστοιχες αλλαγές στις παραμέτρους των συναρτήσεων. Για να παραγωγίσουμε μία συνάρτηση θα πρέπει πρώτα να διαπιστώσουμε αν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(α) Έστω η συνάρτηση $g(\boldsymbol{x}) = \beta \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} + 3$ με το $\beta = 2$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, καθώς είναι πολυδιάστατη πολυωνυμική συνάρτηση. Τότε η παράγωγός της θα είναι η εξής:

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(2\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + 3) = 2\boldsymbol{f} \Rightarrow \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{f}$$

Καθώς γνωρίζουμε από την θεωρία πως η μερική παράγωγος $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}$.

(β) Έστω η συνάρτηση $g(\boldsymbol{x}) = \gamma\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D} + \beta\boldsymbol{I})\boldsymbol{f} + \delta\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{f}$, όπου το $\gamma = 6$, το $\beta = 2$ και το $\delta = 0$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, καθώς είναι πολυδιάστατη πολυωνυμική συνάρτηση. Αρχικά γνωρίζουμε ότι

$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(6\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f} + 0\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{f})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(6\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f})$$

$$= 6\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}) + 2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f})$$

$$= 6 * 2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(x)}{\partial x} = 12\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}$$

Όπου το $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$, το $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}$ και το

$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}$.

(γ) Έστω η συνάρτηση $g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + \alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + 10$ όπου το $\alpha = 3$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, καθώς είναι πολυδιάστατη πολυωνυμική συνάρτηση.

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} + 10\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(10)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f} + 0$$

$$= \frac{1}{2}\ [(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\ [(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

όπου η $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}) = [(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]\boldsymbol{x}$, η $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}$, και η $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(10) = 0$.

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης θα πρέπει να θέσουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν. Όποτε έχουμε:

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f} = 0$$

$$\Rightarrow [(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]\widehat{\boldsymbol{x}} = -2\boldsymbol{f}$$

$$\Rightarrow \widehat{\boldsymbol{x}} = -2[(\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} + 3\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{3I})^T]^{-1}\boldsymbol{f}$$