Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Πρόγραμμα Διδακτορικών Σπουδών

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

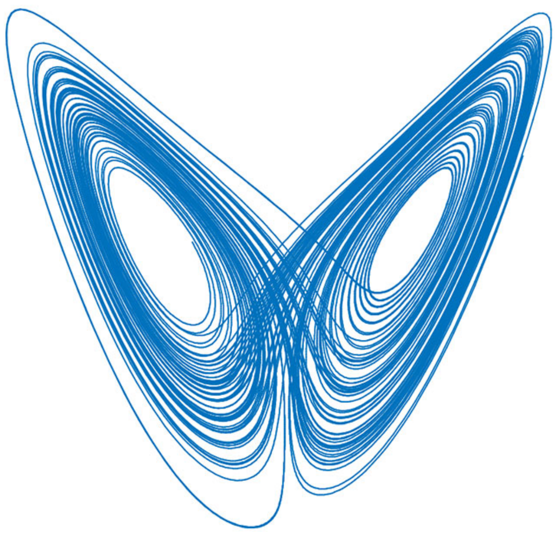
453: Δυναμικά Συστήματα και Μαθηματική Θεωρία Χάους

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 03003331

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:

Διακριτά Δυναμικά Συστήματα



Αθήνα, 2026

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Άσκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = X(x,y) = -x + y, \qquad \dot{y} = Y(x,y) = \frac{4x^2}{1+3x^2} - y.$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων

$$X(x,y) = 0, \qquad Y(x,y) = 0.$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$-x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = x.$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$x = \frac{4x^2}{1+3x^2},$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$x(1+3x^2) = 4x^2 \;\Rightarrow\; x + 3x^3 - 4x^2 = 0$$

ή

$$x(3x^2 - 4x + 1) = 0.$$

Άρα τα σημεία ισορροπίας είναι

$$(0,0), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad (1,1).$$

Για την ταξινόμησή τους υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα του συστήματος

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{8x}{(1+3x^2)^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Στο σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Επομένως το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (εκφυλισμένος σταθερός κόμβος).

Στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ προκύπτει

$$J\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{8/3}{(1+1/3)^2} & -1 \end{pmatrix},$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, οπότε το σημείο αυτό αποτελεί σάγμα.

Στο σημείο $(1,1)$ έχουμε

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{8}{16} & -1 \end{pmatrix},$$

με ιδιοτιμές πραγματικές και αρνητικές, άρα το $(1,1)$ είναι επίσης ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Οι ισοκλίνες του συστήματος δίνονται από τις εξισώσεις

$$X(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ y = x,$$

και

$$Y(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ y = \frac{4x^2}{1+3x^2}.$$

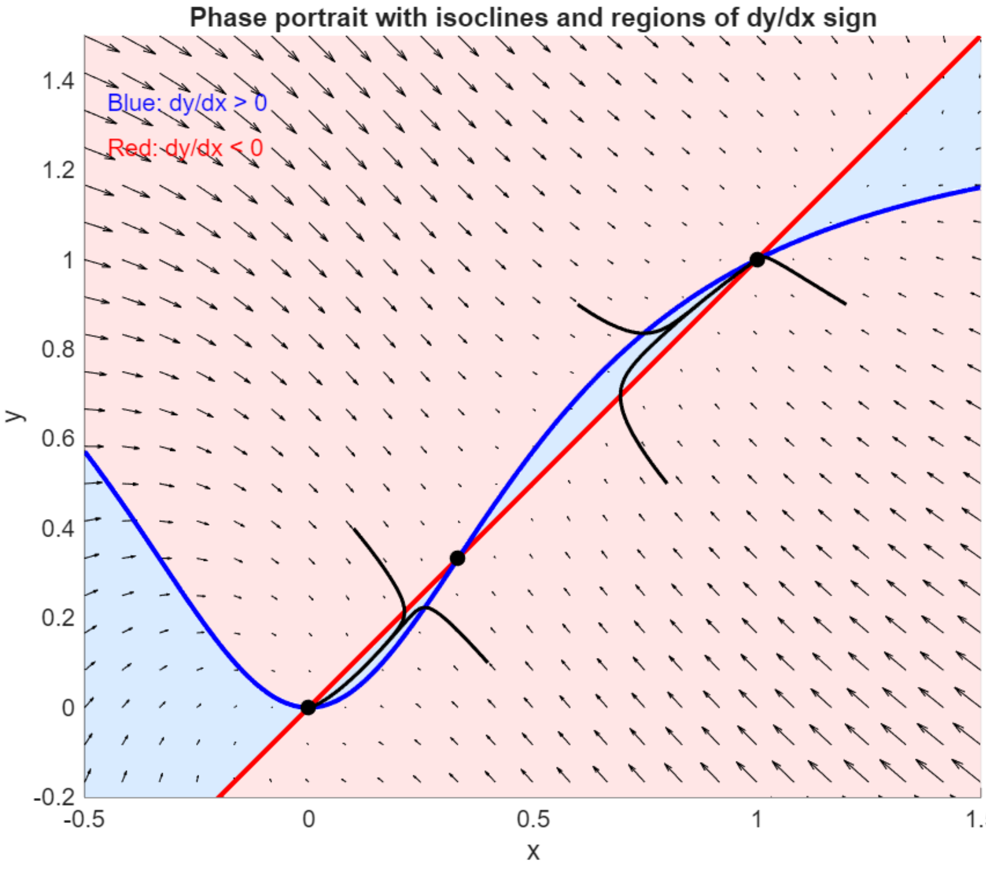
Οι καμπύλες αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε περιοχές όπου το πρόσημο της κλίσης των τροχιών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

είναι θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα, στις περιοχές όπου $X(x,y)$ και $Y(x,y)$ έχουν το ίδιο πρόσημο ισχύει $\frac{dy}{dx} > 0$, ενώ όταν έχουν αντίθετο πρόσημο ισχύει $\frac{dy}{dx} < 0$.

Ο συνδυασμός του διανυσματικού πεδίου, των ισοκλινών και των περιοχών πρόσημου της κλίσης οδηγεί στο πορτραίτο φάσης του συστήματος, στο οποίο φαίνεται καθαρά ότι οι τροχιές κατευθύνονται προς τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$, ενώ απωθούνται από το σαγματικό σημείο $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ κατά μήκος της ασταθούς πολλαπλότητάς του.

Το πορτραίτο φάσης του συστήματος, μαζί με τις ισοκλίνες $X(x,y) = 0$ και $Y(x,y) = 0$, καθώς και τις περιοχές όπου η κλίση των τροχιών $\frac{dy}{dx}$ είναι θετική ή αρνητική, παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Το σχήμα έχει παραχθεί με αριθμητική προσομοίωση στο `MATLAB` και επιβεβαιώνει την αναλυτική ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας και τη συνολική τροχιακή δομή του συστήματος.



Σχήμα 1: Πορτραίτο φάσης του συστήματος με τις ισοκλίνες $X(x,y) = 0$, $Y(x,y) = 0$ και τις περιοχές όπου $\frac{dy}{dx} > 0$ (μπλε) και $\frac{dy}{dx} < 0$ (κόκκινο).

Άσκηση 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση διαφορών

$$u_{n+1} = 2u_n^2 - 1.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία

$$u_n = \cos(2^n C\pi), \qquad 0 \leq C \leq 1,$$

είναι ακριβής λύση της εξίσωσης. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση διαφορών, έχουμε

$$u_{n+1} = \cos(2^{n+1} C\pi).$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

προκύπτει

$$\cos(2^{n+1}C\pi) = 2\cos^2(2^n C\pi) - 1 = 2u_n^2 - 1,$$

οπότε η δοθείσα μορφή της λύσης ικανοποιεί την εξίσωση για κάθε n και για κάθε $C \in [0, 1]$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε για ποιες τιμές της σταθεράς C υπάρχουν q-περιοδικές λύσεις. Μία λύση λέγεται q-περιοδική αν ισχύει

$$u_{n+q} = u_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Με βάση την ακριβή μορφή της λύσης, η συνθήκη αυτή γράφεται

$$\cos(2^{n+q}C\pi) = \cos(2^n C\pi).$$

Η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν

$$2^{n+q}C\pi = \pm 2^n C\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Διαιρώντας με $2^n\pi$ προκύπτει

$$2^q C = \pm C + 2k.$$

Εξετάζοντας τις δύο περιπτώσεις, στην περίπτωση με το θετικό πρόσημο έχουμε

$$(2^q - 1)C = 2k,$$

ενώ στην περίπτωση με το αρνητικό πρόσημο

$$(2^q + 1)C = 2k.$$

Άρα οι q-περιοδικές λύσεις αντιστοιχούν σε τιμές της παραμέτρου C της μορφής

$$C = \frac{2k}{2^q - 1} \quad \text{ή} \quad C = \frac{2k}{2^q + 1},$$

όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq C \leq 1$.

Συνεπώς, q-περιοδικές λύσεις της εξίσωσης διαφορών υπάρχουν ακριβώς για εκείνες τις τιμές του C που είναι ρητοί αριθμοί της παραπάνω μορφής, και ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος για κάθε δεδομένο q.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον μονοδιάστατο λογιστικό απεικονισμό

$$L_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \qquad x \in [0,1],\ \lambda \in (0,4).$$

Τα σταθερά σημεία του L_λ προκύπτουν από την εξίσωση

$$L_\lambda(x) = x,$$

δηλαδή

$$\lambda x(1-x) = x.$$

Η εξίσωση αυτή ισοδυναμεί με

$$x(\lambda - \lambda x - 1) = 0,$$

οπότε τα σταθερά σημεία είναι

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Για τη μελέτη της ευστάθειας υπολογίζουμε την παράγωγο

$$L_\lambda'(x) = \lambda(1-2x).$$

Στο σημείο $x_0 = 0$ έχουμε

$$|L_\lambda'(0)| = |\lambda|,$$

οπότε το x_0 είναι ελκτικό για $0 < \lambda < 1$ και απωστικό για $\lambda > 1$. Στο σημείο

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

προκύπτει

$$L_\lambda'(x_1) = \lambda\Big(1 - 2\Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)\Big) = 2 - \lambda,$$

και συνεπώς

$$|L_\lambda'(x_1)| < 1 \iff 1 < \lambda < 3.$$

Άρα για $\lambda \in (1,3)$ το σύστημα διαθέτει ελκτικό σταθερό σημείο στο x_1.

Για την εύρεση τροχιάς περιόδου δύο εξετάζουμε την εξίσωση

$$L_\lambda(L_\lambda(x)) - x = 0.$$

Είναι φανερό ότι τα σταθερά σημεία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, επομένως διαιρούμε με τον παράγοντα $L_\lambda(x) - x$ και γράφουμε

$$L_\lambda(L_\lambda(x)) - x = R_\lambda(x)\big(L_\lambda(x) - x\big),$$

όπου $R_\lambda(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Οι ρίζες του $R_\lambda(x)$ δίνουν τα σημεία της τροχιάς περιόδου δύο,

$$\{p_1, p_2\}.$$

Η ευστάθεια της τροχιάς περιόδου δύο καθορίζεται από το γινόμενο των παραγώγων

$$\left|L'_\lambda(p_1)L'_\lambda(p_2)\right|.$$

Με άμεσο υπολογισμό προκύπτει ότι

$$\left|L'_\lambda(p_1)L'_\lambda(p_2)\right| < 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad 3 < \lambda < \lambda^*,$$

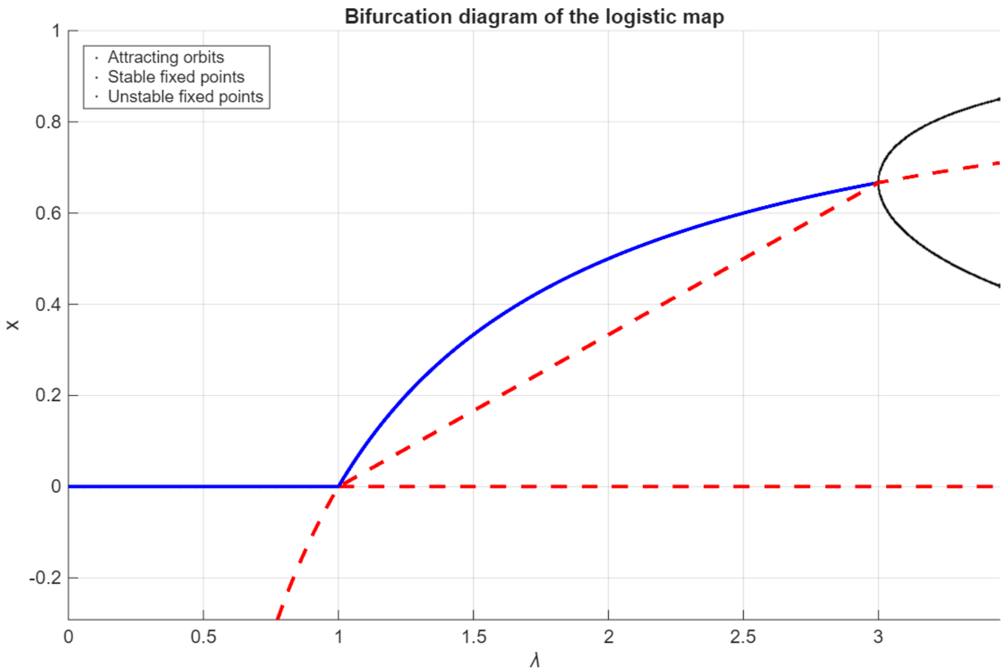
όπου

$$\lambda^* = 1 + \sqrt{6}.$$

Επομένως, για $\lambda \in (3, \lambda^*)$ η τροχιά περιόδου δύο είναι ελκτική.

Συμπερασματικά, το σύστημα παρουσιάζει διακλάδωση τύπου flip (period-doubling) στο $\lambda = 3$, όπου το ελκτικό σταθερό σημείο χάνει την ευστάθειά του και εμφανίζεται ελκτική τροχιά περιόδου δύο. Το διάγραμμα διακλάδωσης για $\lambda \in (0, \lambda^*)$, συμπεριλαμβανομένων και των ασταθών σταθερών σημείων, αποτυπώνει καθαρά τη μετάβαση αυτή.

Το διάγραμμα διακλάδωσης του λογιστικού απεικονισμού για $\lambda \in (0, \lambda^*)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Παρατηρείται η απώλεια ευστάθειας του σταθερού σημείου στο $\lambda = 3$ και η γέννηση τροχιάς περιόδου δύο.



Σχήμα 2: Διάγραμμα Διακλάδωσης Συστήματος.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον μονοδιάστατο απεικονισμό κύκλου

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + a - b\cos x_n, \qquad x_n \in [0, 2\pi],$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $b > 0$.

Τα σταθερά σημεία x^* του απεικονισμού ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x^*) = x^*,$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$x^* + a - b\cos x^* = x^*.$$

Άρα προκύπτει η σχέση

$$a = b\cos x^*,$$

η οποία συνδέει τα σταθερά σημεία με τις παραμέτρους a και b.

Η παράγωγος του απεικονισμού είναι

$$f'(x) = 1 + b\sin x.$$

Για να προκύψει συνθήκη όπου $f'(x^*) = 1$, απαιτείται

$$1 + b\sin x^* = 1 \;\Rightarrow\; \sin x^* = 0.$$

Άρα τα αντίστοιχα σταθερά σημεία είναι

$$x^* = 0,\ \pi,\ 2\pi,$$

και από τη σχέση $a = b\cos x^*$ προκύπτει

$$a = b \quad \text{ή} \quad a = -b.$$

Από εδώ και στο εξής θέτουμε $a = 0$. Η εξίσωση σταθερών σημείων γίνεται

$$b\cos x^* = 0,$$

και επειδή $b > 0$, έχουμε

$$\cos x^* = 0.$$

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ προκύπτουν δύο σταθερά σημεία,

$$x_1^* = \frac{\pi}{2}, \qquad x_2^* = \frac{3\pi}{2}.$$

Ένα σταθερό σημείο λέγεται υπερσταθερό (superstable) όταν

$$f'(x^*) = 0.$$

Με χρήση της παραγώγου, η συνθήκη αυτή γράφεται

$$1 + b \sin x^* = 0.$$

Για το $x_1^* = \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\sin x_1^* = 1$, οπότε

$$1 + b = 0,$$

που δεν έχει λύση για $b > 0$. Για το $x_2^* = \frac{3\pi}{2}$ ισχύει $\sin x_2^* = -1$, οπότε

$$1 - b = 0 \ \Rightarrow \ b_s = 1.$$

Άρα το σταθερό σημείο $x_2^* = \frac{3\pi}{2}$ γίνεται υπερσταθερό για $b = 1$.

Τέλος, ένα σταθερό σημείο υφίσταται διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου όταν

$$f'(x^*) = -1.$$

Η συνθήκη αυτή γράφεται

$$1 + b \sin x^* = -1 \ \Rightarrow \ b \sin x^* = -2.$$

Για το $x_1^* = \frac{\pi}{2}$ δεν υπάρχει λύση με $b > 0$. Για το

$$x_2^* = \frac{3\pi}{2}, \qquad \sin x_2^* = -1,$$

προκύπτει

$$1 - b = -1 \ \Rightarrow \ b_p = 2.$$

Επομένως, το σταθερό σημείο $x_2^* = \frac{3\pi}{2}$ υφίσταται διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου για $b = 2$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη μέθοδο Newton για την εύρεση ριζών της εξίσωσης

$$g(x) = 0,$$

η οποία ορίζεται μέσω του απεικονισμού

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Στην παρούσα άσκηση έχουμε

$$g(x) = x^2 - 4,$$

οπότε

$$g'(x) = 2x.$$

Ο αντίστοιχος απεικονισμός Newton είναι

$$f(x) = x - \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right),$$

ο οποίος είναι ο Newton map για την εξίσωση $x^2 - 4 = 0$.

Τα σταθερά σημεία του απεικονισμού προκύπτουν από την εξίσωση

$$f(x^*) = x^*,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}\left(x^* + \frac{4}{x^*}\right) = x^*.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $2x^*$ προκύπτει

$$x^{*2} + 4 = 2x^{*2},$$

ή ισοδύναμα

$$x^{*2} = 4.$$

Άρα τα σταθερά σημεία του Newton map είναι

$$x^* = \pm 2,$$

τα οποία συμπίπτουν με τις ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Για να εξετάσουμε την ευστάθεια των σταθερών σημείων, υπολογίζουμε την παράγωγο του απεικονισμού

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right).$$

Στα σημεία $x^* = \pm 2$ έχουμε

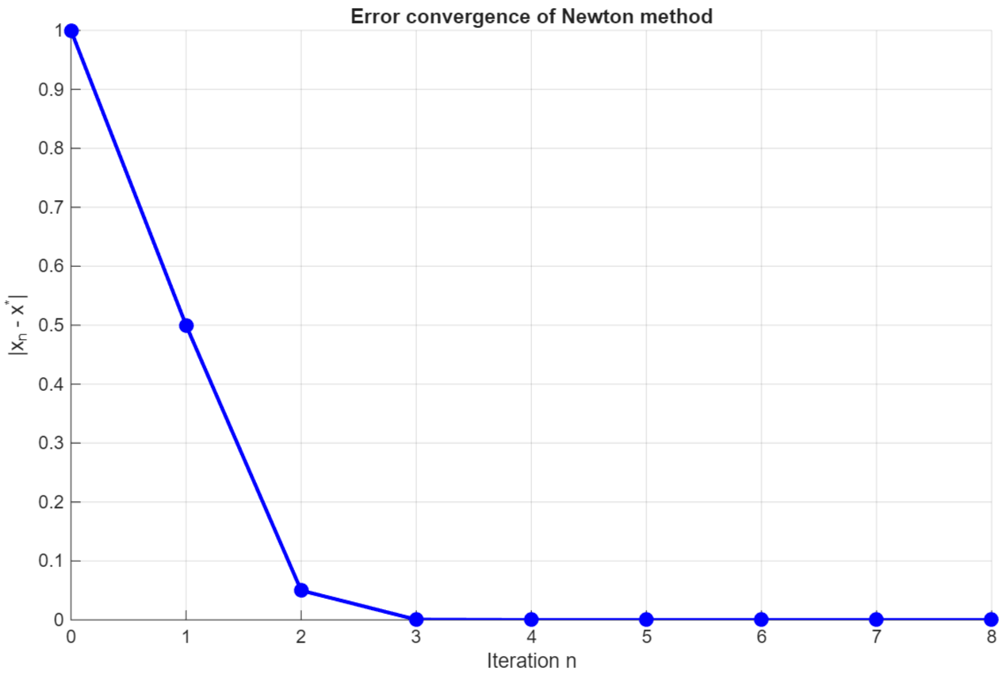
$$f'(x^*) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{4}\right) = 0.$$

Επομένως,

$$|f'(x^*)| = 0 < 1,$$

και τα σταθερά σημεία είναι όχι μόνο ασυμπτωτικά ευσταθή, αλλά υπερσταθερά (superstable). Το γεγονός αυτό εξηγεί τη χαρακτηριστικά ταχεία σύγκλιση της μεθόδου Newton κοντά στη ρίζα.

Τέλος, αν επαναλάβουμε αριθμητικά τον απεικονισμό ξεκινώντας από αρχική τιμή $x_0 = 1$, η παραγόμενη ακολουθία x_n συγκλίνει πολύ γρήγορα στο σταθερό σημείο $x^* = 2$, επιβεβαιώνοντας στην πράξη την υπερσταθερότητα του αντίστοιχου σημείου ισορροπίας.



Σχήμα 3: Σφάλμα Αριθμητικής Υλοποίησης Μεθόδου Newton

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται η εξέλιξη του σφάλματος $|x_n - x^*|$ της μεθόδου Newton με αρχική τιμή $x_0 = 1$. Παρατηρείται εξαιρετικά ταχεία μείωση του σφάλματος, η οποία οφείλεται στην υπερσταθερότητα του σταθερού σημείου $x^* = 2$, αφού $f'(x^*) = 0$.

Βιβλιογραφία

[1] N. M. Σταυρακάκης. *Διαφορικές εξισώσεις: Συνήθεις Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. 3η Έκδοση. Εκδόσεις Τσότρας, 2019.

[2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3rd Edition. CRC Press, 2024.

[3] Yu Zhang. *Phase Portrait Plotter on 2D phase plane*. MATLAB Central File Exchange, 2025. URL: `https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/110785-phase-portrait-plotter-on-2d-phase-plane`.