Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Πρόγραμμα Διδακτορικών Σπουδών

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

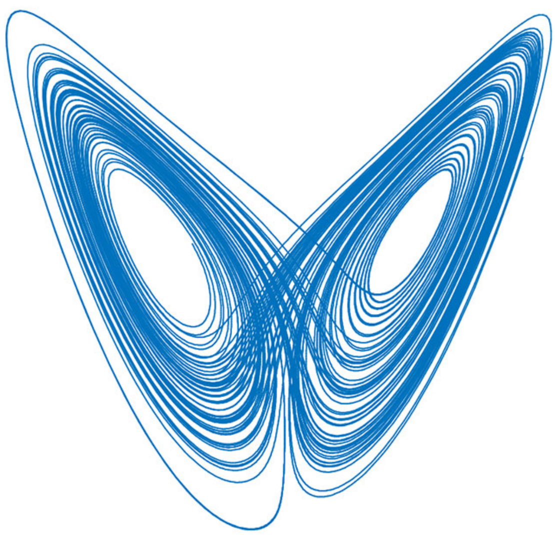
453: Δυναμικά Συστήματα και Μαθηματική Θεωρία Χάους

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 03003331

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:

Θεωρία Διακλαδώσεων - Μηδενική Ιδιοτιμή - Ευσταθής, Ασταθής και Κεντρική Πολλαπλότητα



Αθήνα, 2026

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Θεωρία Διακλαδώσεων

Άσκηση 1

(i) Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \lambda x^2 - 2x^6.$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη συνθήκη

$$\lambda x^2 - 2x^6 = x^2(\lambda - 2x^4) = 0,$$

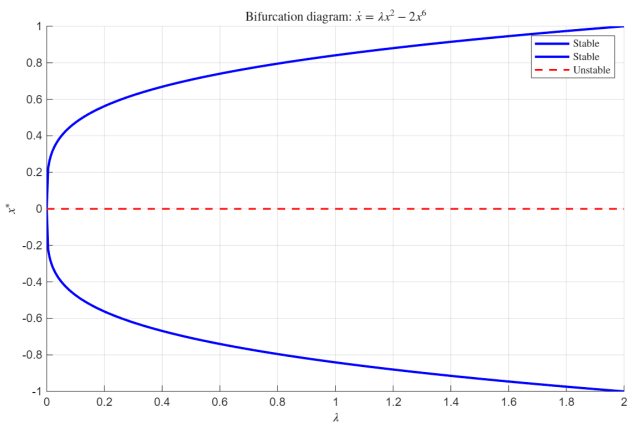
οπότε έχουμε πάντα το σημείο $x = 0$, ενώ για $\lambda \geq 0$ εμφανίζονται επιπλέον τα σημεία

$$x = \pm \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/4}.$$

Η παράγωγος ως προς x είναι

$$f_x(x, \lambda) = 2\lambda x - 12x^5.$$

Στο σημείο $x = 0$ ισχύει $f_x(0, \lambda) = 0$ για κάθε λ, άρα το σημείο είναι μη υπερβολικό και μπορεί να δώσει διακλάδωση. Για $\lambda < 0$ το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και είναι ασυμπτωτικά σταθερό. Για $\lambda > 0$ το σημείο $x = 0$ γίνεται ασταθές, ενώ τα δύο μη μηδενικά σημεία είναι ασυμπτωτικά σταθερά. Συνεπώς στο $\lambda = 0$ λαμβάνει χώρα υπερκρίσιμη διακλάδωση τύπου pitchfork, με δημιουργία δύο σταθερών κλάδων ισορροπίας για θετικές τιμές της παραμέτρου.



Σχήμα 1: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος.

(ii) Εξετάζουμε το σύστημα

$$\dot{x} = \lambda^2 + 2a\lambda x - 3x^2.$$

Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$3x^2 - 2a\lambda x - \lambda^2 = 0,$$

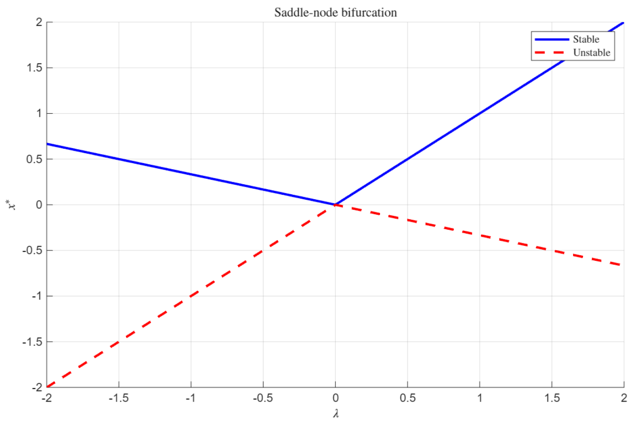
η οποία έχει δύο πραγματικές λύσεις για κάθε $\lambda \neq 0$,

$$x = \frac{a\lambda \pm \lambda\sqrt{a^2 + 3}}{3}.$$

Για $\lambda = 0$ οι δύο λύσεις συγχωνεύονται στο $x = 0$. Η παράγωγος του δεξιού μέλους ως προς x είναι

$$f_x(x,\lambda) = 2a\lambda - 6x.$$

Για $\lambda \neq 0$ το ένα σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά σταθερό και το άλλο ασταθές, ενώ στο $\lambda = 0$ προκύπτει μη υπερβολικό σημείο. Επομένως στο $\lambda = 0$ εμφανίζεται διακλάδωση τύπου saddle–node, κατά την οποία ένα σταθερό και ένα ασταθές σημείο ισορροπίας συγχωνεύονται και εξαφανίζονται.



Σχήμα 2: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος.

(iii) Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \lambda x^2 + (\lambda + 2)x^4.$$

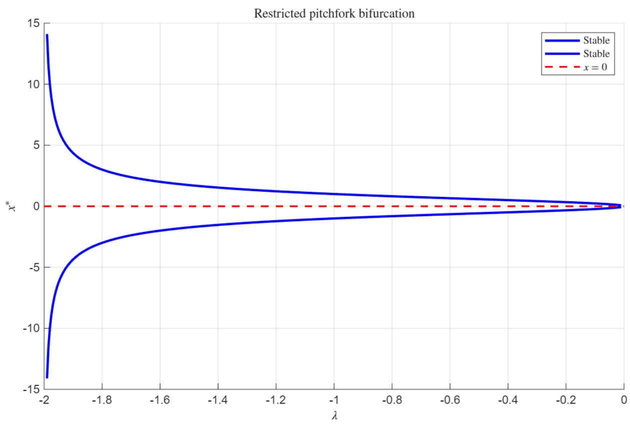
Η εξίσωση ισορροπίας γράφεται

$$x^2(\lambda + (\lambda + 2)x^2) = 0.$$

Άρα υπάρχει πάντοτε το σημείο $x = 0$, ενώ επιπλέον σημεία ισορροπίας δίνονται από

$$x = \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{\lambda + 2}},$$

τα οποία υπάρχουν μόνο όταν $-2 < \lambda < 0$. Τα μη μηδενικά σημεία είναι ασυμπτωτικά σταθερά στο διάστημα αυτό. Το σημείο $x = 0$ αλλάζει τη σταθερότητά του στο $\lambda = 0$, ενώ στο $\lambda = -2$ εξαφανίζονται τα μη μηδενικά σημεία. Συνεπώς το σύστημα παρουσιάζει διακλάδωση τύπου pitchfork περιορισμένης περιοχής ύπαρξης, με δύο τιμές διακλάδωσης στις $\lambda = -2$ και $\lambda = 0$.



Σχήμα 3: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος.

(iv) Τέλος, εξετάζουμε το σύστημα

$$\dot{x} = 1 + \lambda^2 + 2\lambda x - x^3.$$

Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν την κυβική εξίσωση

$$x^3 - 2\lambda x - (1 + \lambda^2) = 0.$$

Για τον εντοπισμό των σημείων διακλάδωσης λύνουμε ταυτόχρονα τις συνθήκες

$$f(x,\lambda) = 0, \qquad f_x(x,\lambda) = 0,$$

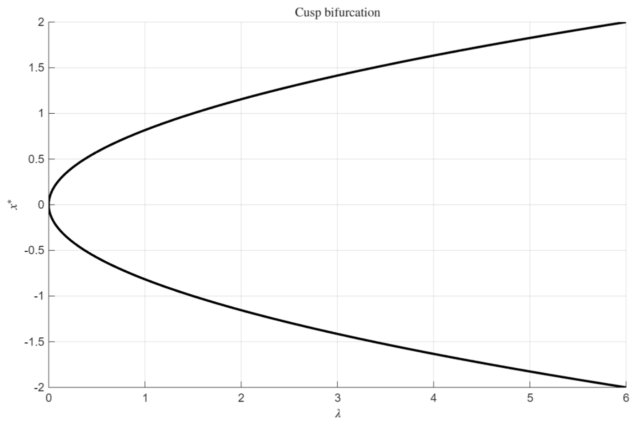
όπου

$$f_x(x,\lambda) = 2\lambda - 3x^2.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$\lambda = \frac{3}{2}x^2.$$

Η σχέση αυτή περιγράφει την καμπύλη διακλάδωσης στο επίπεδο (λ, x). Η διακλάδωση είναι τύπου cusp, δηλαδή πρόκειται για διπλή διακλάδωση saddle–node, όπου το πλήθος των σημείων ισορροπίας αλλάζει από ένα σε τρία ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου.



Σχήμα 4: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος.

Άσκηση 2

(i) Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = \lambda + 2\mu + \mu x^2 + 3x^4.$$

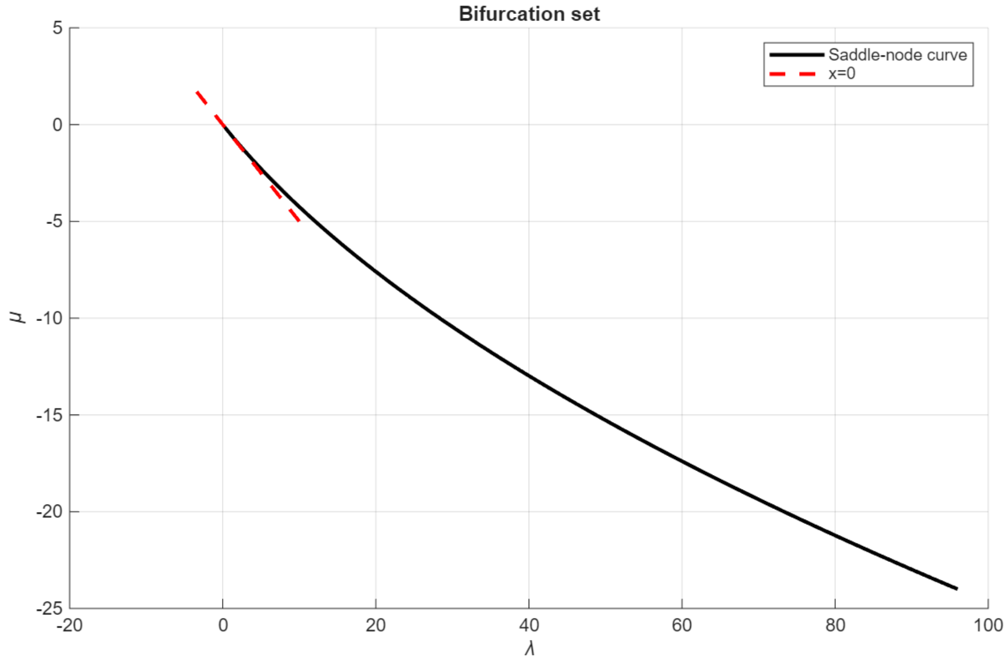
Η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\lambda + 2\mu + \mu x^2 + 3x^4 = 0,$$

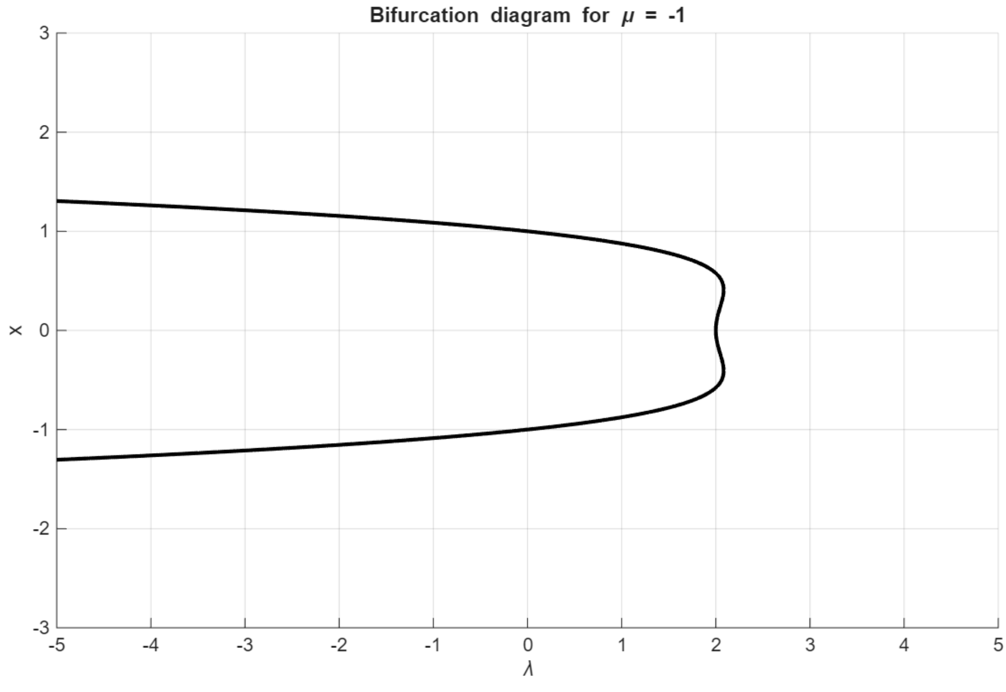
ενώ η παράγωγος ως προς x δίνεται από

$$f_x(x,\lambda,\mu) = 2\mu x + 12x^3 = 2x(\mu + 6x^2).$$

Η διακλάδωση προκύπτει είτε για $x = 0$, οπότε από την εξίσωση ισορροπίας παίρνουμε $\lambda = -2\mu$, είτε για $\mu = -6x^2$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση ισορροπίας προκύπτει $\lambda = 12x^2 + 3x^4$. Οι καμπύλες αυτές στο επίπεδο (λ, μ) αποτελούν το σύνολο διακλάδωσης. Σε περιοχές του επιπέδου παραμέτρων υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας, ενώ εκτός αυτών υπάρχει μοναδικό σημείο, γεγονός που αντιστοιχεί σε διακλάδωση τύπου saddle–node.



Σχήμα 5: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 6: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος

(ii) Για το σύστημα

$$\dot{x} = \lambda - \mu x + x^4$$

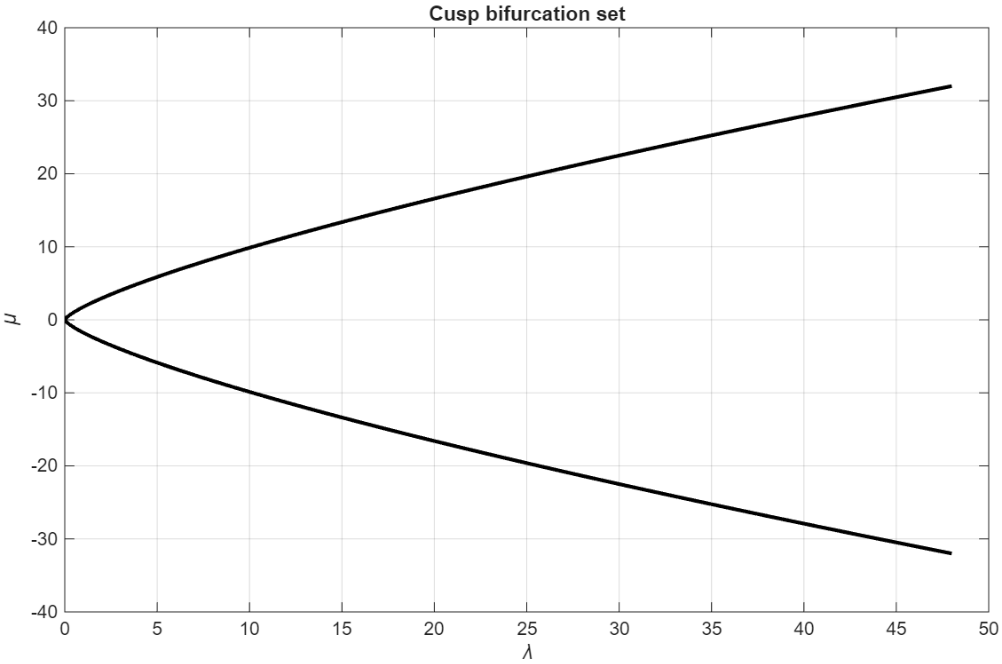
η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$\lambda - \mu x + x^4 = 0,$$

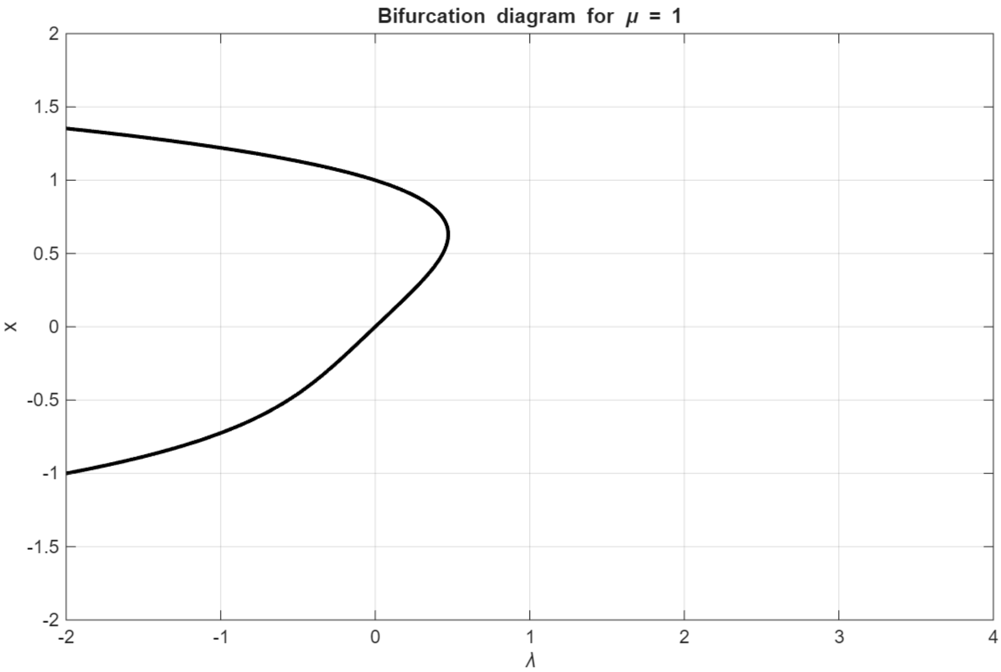
και η παράγωγος ως προς x δίνεται από

$$f_x(x, \lambda, \mu) = -\mu + 4x^3.$$

Η συνθήκη $f_x = 0$ οδηγεί στη σχέση $\mu = 4x^3$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ισορροπίας παίρνουμε $\lambda = 3x^4$. Οι σχέσεις αυτές περιγράφουν καμπύλη διακλάδωσης τύπου cusp στο επίπεδο (λ, μ). Στο εσωτερικό της καμπύλης υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας, ενώ εκτός αυτής υπάρχει μοναδικό σημείο.



Σχήμα 7: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 8: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος

(iii) Τέλος, εξετάζουμε το σύστημα

$$\dot{x} = \frac{1}{x + \lambda\mu} + \lambda x - 2,$$

το οποίο ορίζεται για $x + \lambda\mu \neq 0$. Η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\frac{1}{x + \lambda\mu} + \lambda x - 2 = 0,$$

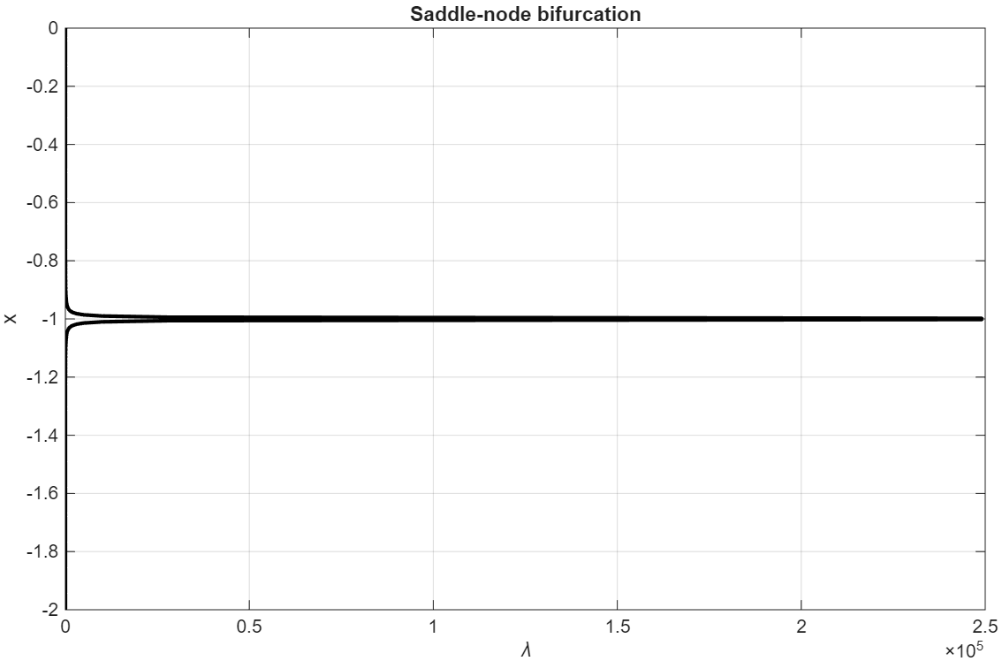
και η παράγωγος ως προς x δίνεται από

$$f_x(x, \lambda, \mu) = -\frac{1}{(x + \lambda\mu)^2} + \lambda.$$

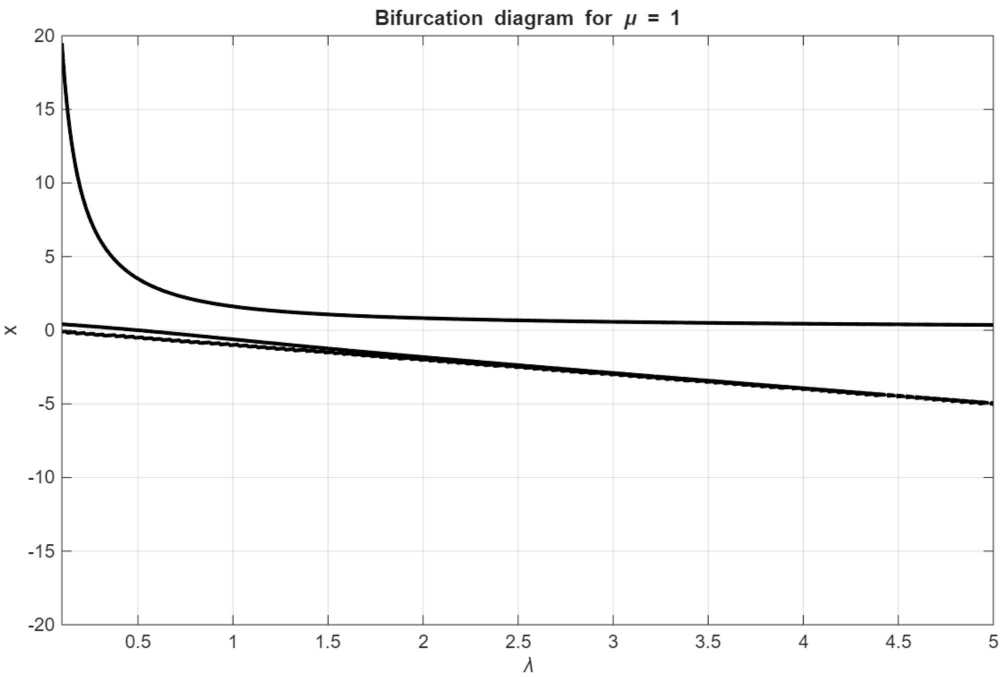
Η συνθήκη διακλάδωσης $f_x = 0$ οδηγεί στη σχέση

$$\lambda = \frac{1}{(x + \lambda\mu)^2},$$

η οποία, σε συνδυασμό με την εξίσωση ισορροπίας, ορίζει έμμεσα την καμπύλη διακλάδωσης στο επίπεδο των παραμέτρων. Η διακλάδωση είναι τύπου saddle–node και η τροχιακή δομή επηρεάζεται έντονα από την παρουσία της απαγορευμένης ευθείας $x = -\lambda\mu$, η οποία χωρίζει το πεδίο ορισμού.



Σχήμα 9: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 10: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος

Άσκηση 3

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για να δείξουμε ότι σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις η εξίσωση $F(\lambda, x) = 0$ ορίζει μοναδικά μια συνάρτηση $x = x(\lambda)$ σε γειτονιά του σημείου $(\lambda, x) = (0, 0)$.

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(\lambda, x) = \lambda + 3\sin x.$$

Έχουμε

$$F(0, 0) = 0.$$

Υπολογίζοντας τη μερική παράγωγο ως προς x προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = 3\cos x,$$

οπότε

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 3 \neq 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, υπάρχει μοναδική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $x = x(\lambda)$ ορισμένη σε γειτονιά του $\lambda = 0$ τέτοια ώστε $F(\lambda, x(\lambda)) = 0$ και $x(0) = 0$. Άρα η εξίσωση $\lambda + 3\sin x = 0$ δέχεται μοναδική λύση κοντά στο $(0, 0)$.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(\lambda, x) = \frac{1}{2} + 2\lambda - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Υπολογίζουμε

$$F(0, 0) = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων μετακινούμε το σημείο αναφοράς στο (λ_0, x_0) που ικανοποιεί την εξίσωση. Πράγματι, για $\lambda_0 = 0$ υπάρχει μοναδικό x_0 κοντά στο 0 τέτοιο ώστε

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x_0\right) = \frac{1}{2}.$$

Στο σημείο αυτό υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right),$$

και επειδή

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x_0\right) \neq 0,$$

το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων εξασφαλίζει την ύπαρξη και μοναδικότητα συνεχώς παραγωγίσιμης συνάρτησης $x = x(\lambda)$ σε γειτονιά του $\lambda = 0$, με $x(0) = x_0$, που ικανοποιεί

$$\frac{1}{2} + 2\lambda - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x(\lambda)\right) = 0.$$

Άρα η εξίσωση δέχεται μοναδική λύση κοντά στο σημείο $(0, 0)$.

(iii) Τέλος, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(\lambda, x) = \sin\lambda + 3\sinh x.$$

Έχουμε

$$F(0, 0) = 0.$$

Η μερική παράγωγος ως προς x είναι

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = 3\cosh x,$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 3 \neq 0.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $x = x(\lambda)$, ορισμένη σε γειτονιά του $\lambda = 0$, τέτοια ώστε $F(\lambda, x(\lambda)) = 0$ και $x(0) = 0$. Άρα η εξίσωση $\sin\lambda + 3\sinh x = 0$ έχει μοναδική λύση κοντά στο $(0,0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = -2y + x\Big[\lambda + 2\mu\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\Big], \qquad \dot{y} = x + y\Big[3\lambda + \mu\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\Big].$$

Θέτουμε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Με τυπικούς υπολογισμούς προκύπτει ότι το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\dot{r} = r\big(\lambda + \mu r - r^2\big), \qquad \dot{\theta} = 1.$$

Η γωνιακή εξίσωση περιγράφει ομοιόμορφη περιστροφή και δεν επηρεάζει τη δομή των διακλαδώσεων, οπότε η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος καθορίζεται αποκλειστικά από την ακτινική εξίσωση.

Τα ακτινικά σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη συνθήκη

$$r(\lambda + \mu r - r^2) = 0,$$

η οποία δίνει πάντοτε τη λύση $r = 0$ και επιπλέον μη μηδενικές λύσεις που ικανοποιούν

$$r^2 - \mu r - \lambda = 0.$$

Οι λύσεις αυτές είναι

$$r_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\lambda}}{2},$$

και υπάρχουν αν και μόνο αν $\mu^2 + 4\lambda \geq 0$. Η συγχώνευση των δύο μη μηδενικών ακτινικών ισορροπιών συμβαίνει όταν

$$\mu^2 + 4\lambda = 0,$$

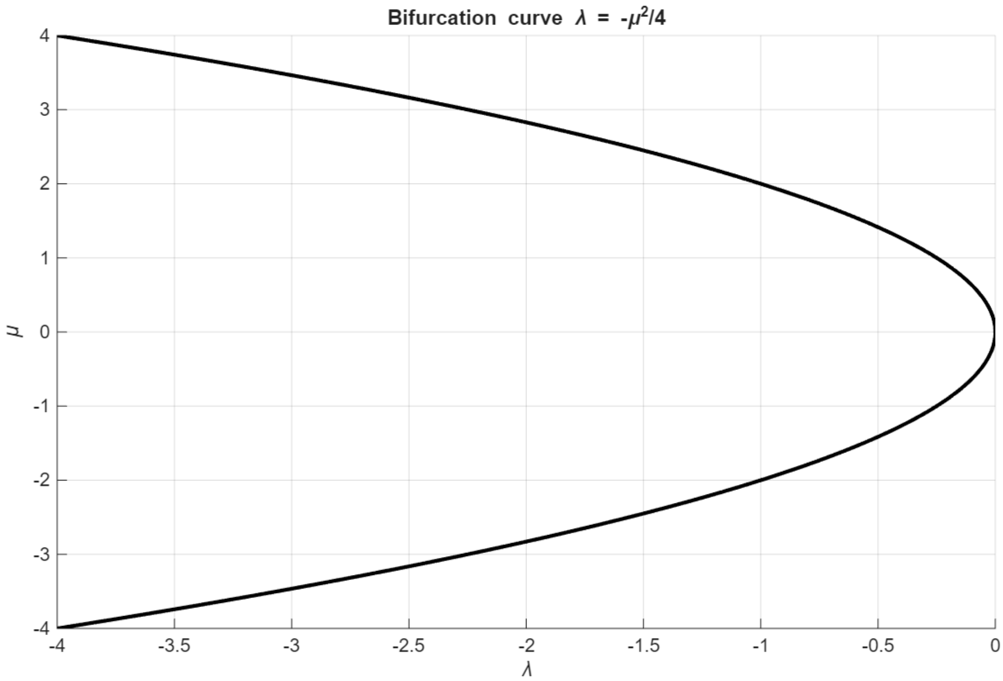
δηλαδή όταν

$$\lambda = -\frac{\mu^2}{4}.$$

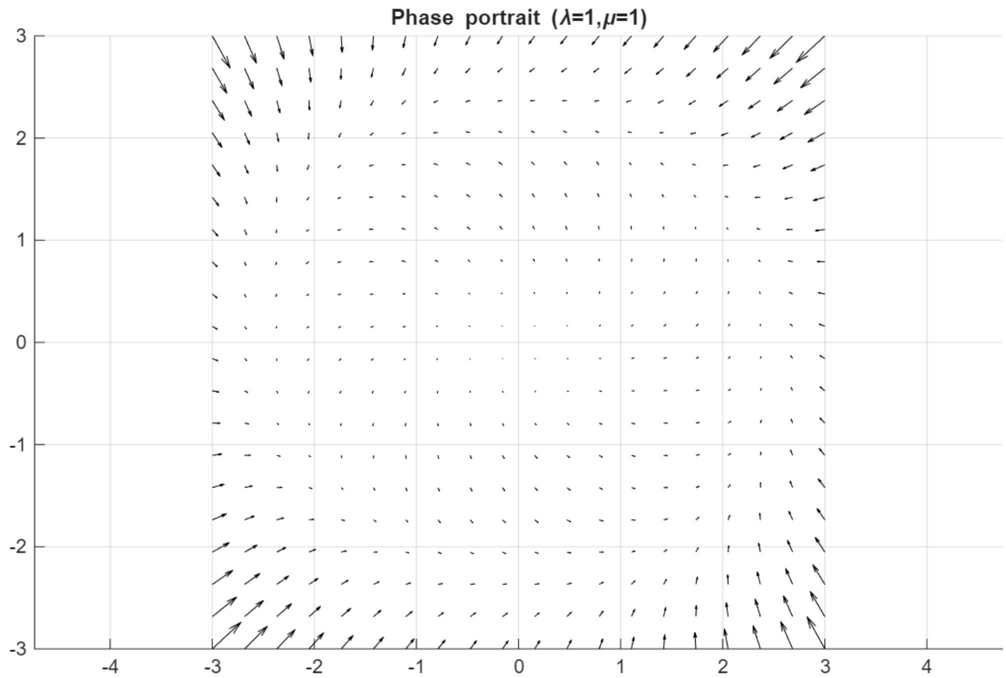
Η παραπάνω σχέση ορίζει την καμπύλη διακλάδωσης στο επίπεδο των παραμέτρων (λ, μ), η οποία είναι παραβολή.

Για $\lambda < 0$ το σημείο $r = 0$ είναι ασυμπτωτικά σταθερό και δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές. Όλες οι τροχιές στο επίπεδο φάσης σπειροειδώς συγκλίνουν στην αρχή, η οποία είναι σταθερή εστία. Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 + 4\lambda > 0$ το σημείο $r = 0$ γίνεται ασταθές, ενώ εμφανίζεται θετική ακτινική ισορροπία $r = r_+$, η οποία είναι ασυμπτωτικά σταθερή. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα παρουσιάζει σταθερό κύκλο ορίου (limit cycle) ακτίνας r_+, προς τον οποίο συγκλίνουν όλες οι μη μηδενικές τροχιές. Πάνω στην καμπύλη $\lambda = -\mu^2/4$ οι δύο ακτινικές ισορροπίες συγχωνεύονται και προκύπτει ημι-σταθερός κύκλος ορίου, γεγονός που αντιστοιχεί σε διακλάδωση τύπου saddle–node κύκλων. Για $\mu^2 + 4\lambda < 0$ δεν υπάρχουν μη μηδενικές ακτινικές ισορροπίες και το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $r = 0$.

Συνεπώς, το σύστημα παρουσιάζει διακλάδωση saddle–node περιοδικών τροχιών, με καμπύλη διακλάδωσης την παραβολή $\lambda = -\mu^2/4$, και η τροχιακή δομή μεταβάλλεται από σταθερή εστία σε ύπαρξη σταθερού κύκλου ορίου καθώς οι παράμετροι διασχίζουν την καμπύλη αυτή.



Σχήμα 11: Διάγραμμα Διακλάδωσης Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 12: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος

Άσκηση 5

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = (\lambda + 1)x + y^2, \qquad \dot{y} = 2(\lambda - 1)y + x + y^2.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Για τη μελέτη των διακλαδώσεων γραμμικοποιούμε το σύστημα γύρω από την αρχή. Ο

Ιακωβιανός πίνακας στο $(0,0)$ είναι

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & 2(\lambda-1) \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα δίνονται από

$$\sigma_1 = \lambda + 1, \qquad \sigma_2 = 2(\lambda - 1).$$

Το σημείο $(0,0)$ είναι υπερβολικό για κάθε $\lambda \neq -1, 1$ και παύει να είναι υπερβολικό στις τιμές

$$\lambda = -1, \qquad \lambda = 1.$$

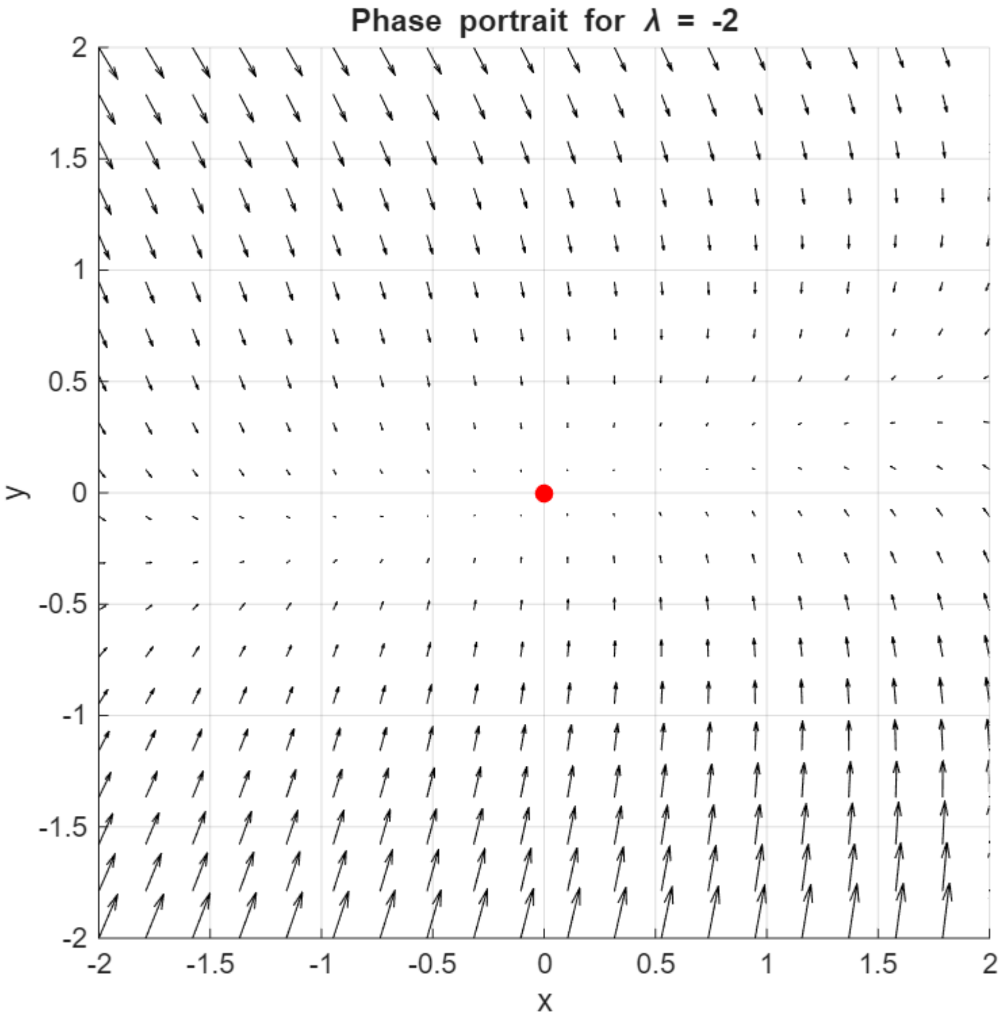
Επομένως οι τιμές αυτές αποτελούν υποψήφια σημεία διακλάδωσης.

Για $\lambda < -1$ ισχύει $\sigma_1 < 0$ και $\sigma_2 < 0$, οπότε η αρχή είναι ασυμπτωτικά σταθερός κόμβος. Για $-1 < \lambda < 1$ έχουμε $\sigma_1 > 0$ και $\sigma_2 < 0$, άρα η αρχή είναι σάγμα. Για $\lambda > 1$ και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές και η αρχή είναι ασταθής κόμβος.

Εξετάζουμε πρώτα τη διακλάδωση στο $\lambda = -1$. Για $\lambda = -1$ ο Ιακωβιανός έχει μία μηδενική ιδιοτιμή και μία αρνητική, οπότε το σύστημα διαθέτει μονοδιάστατη κεντρική πολλαπλότητα. Η κεντρική κατεύθυνση αντιστοιχεί στον άξονα x. Περιορίζοντας τη δυναμική πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα, η εξίσωση για το x γράφεται, στον πρώτο μη μηδενικό όρο,

$$\dot{x} = y^2,$$

με το y να εκφράζεται ως ομαλή συνάρτηση του x. Η μη γραμμική συνεισφορά είναι θετική και δεν αλλάζει πρόσημο, γεγονός που δείχνει ότι στο $\lambda = -1$ λαμβάνει χώρα διακλάδωση τύπου saddle–node.



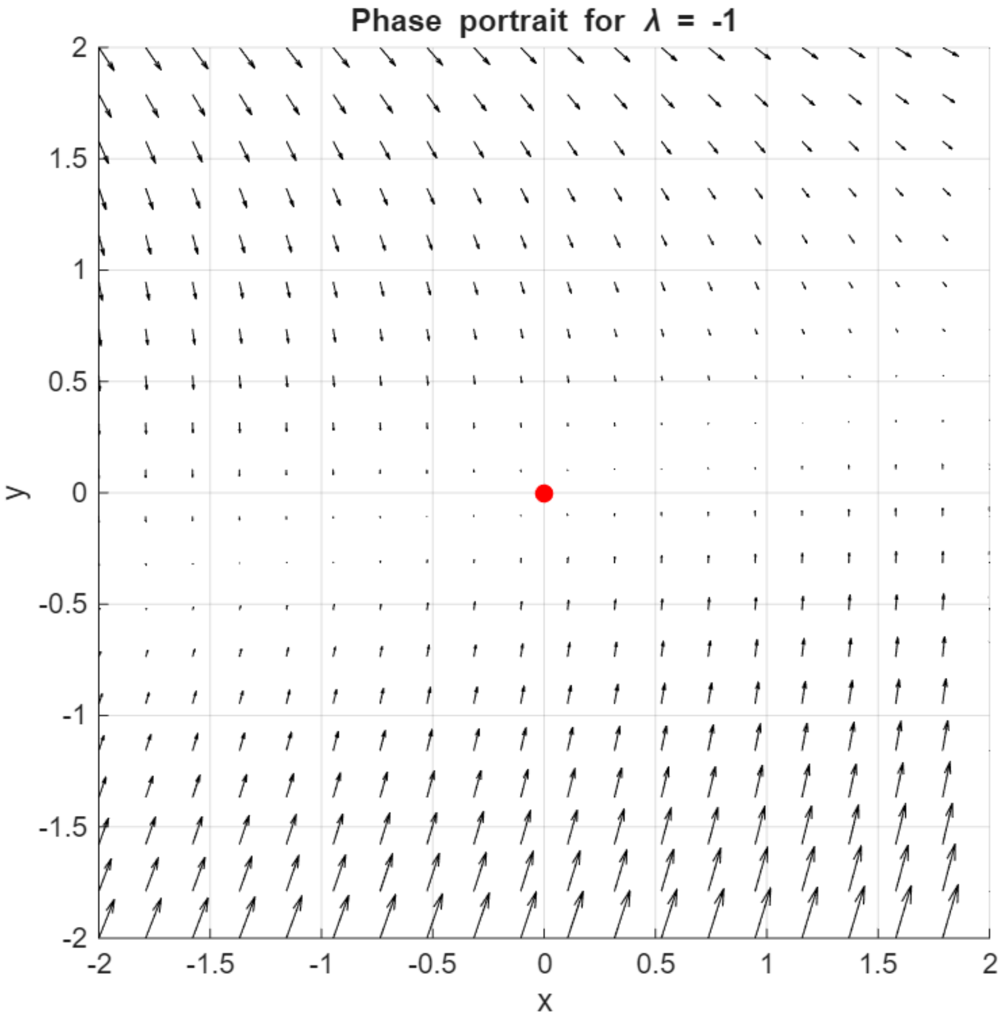
Σχήμα 13: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος

Αντίστοιχα, στο $\lambda = 1$ η μία ιδιοτιμή μηδενίζεται ενώ η άλλη είναι θετική. Και εδώ υπάρχει μονοδιάστατη κεντρική πολλαπλότητα, η οποία ευθυγραμμίζεται με τον άξονα y. Η περιορισμένη δυναμική πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα καθορίζεται από τους μη γραμμικούς όρους y^2, οι οποίοι καθιστούν το μηδενικό σημείο μη υπερβολικό και οδηγούν εκ νέου σε διακλάδωση τύπου saddle–node.

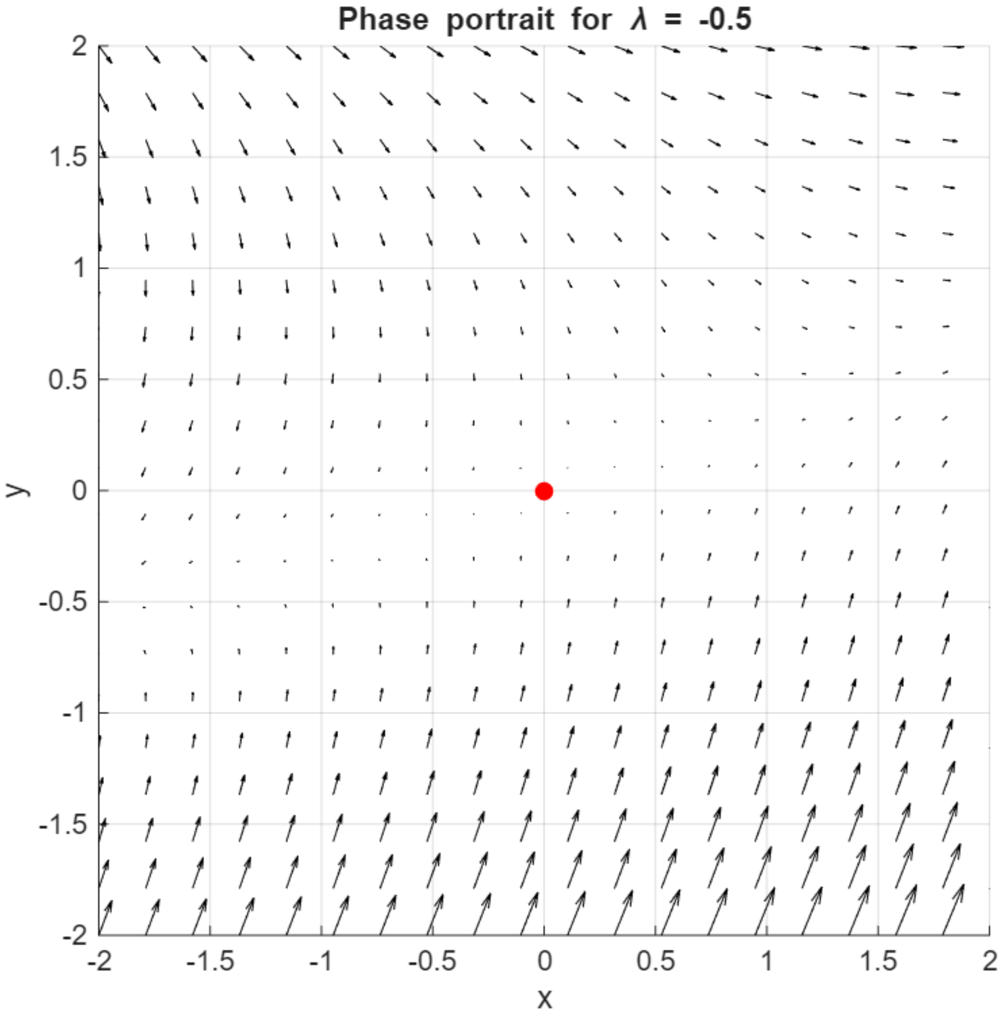
Συνοψίζοντας, το σύστημα παρουσιάζει σημεία διακλάδωσης στις τιμές

$$\lambda = -1 \quad \text{και} \quad \lambda = 1.$$

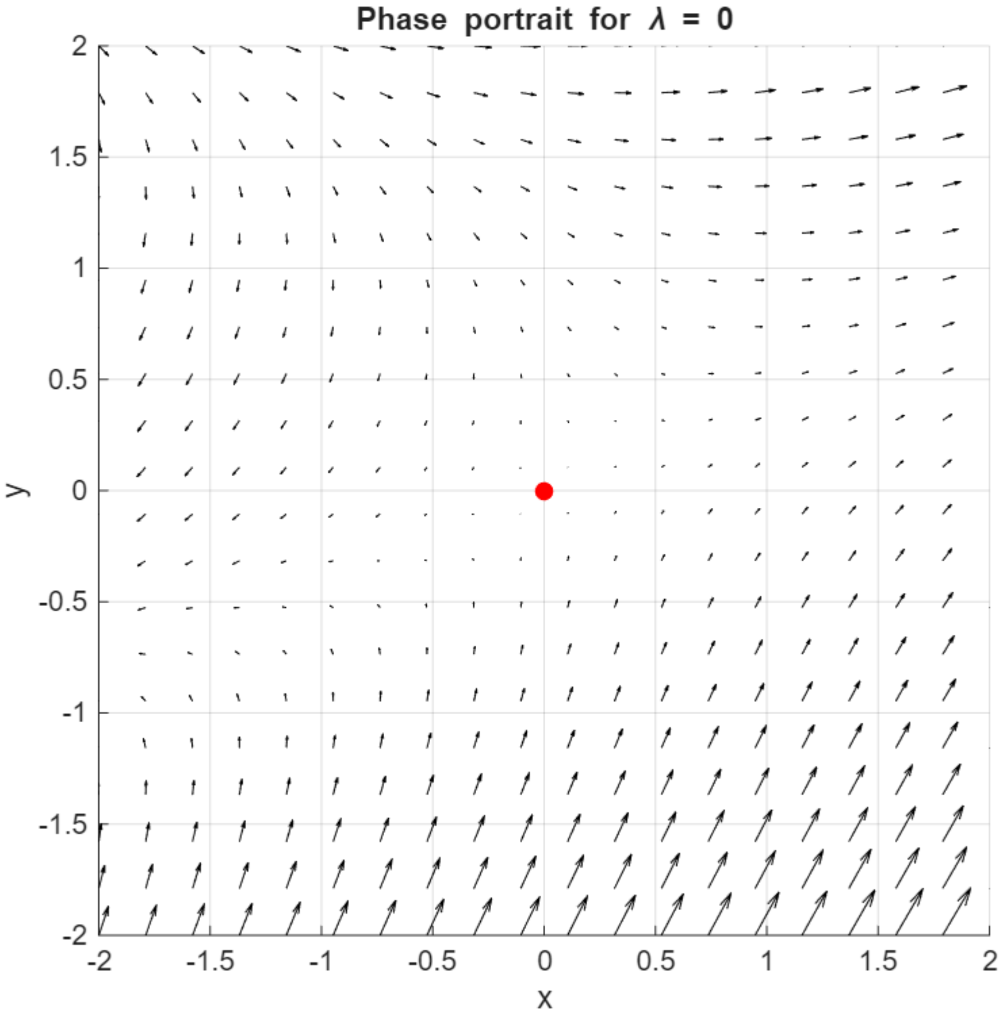
Για $\lambda < -1$ η αρχή είναι ασυμπτωτικά σταθερός κόμβος, για $-1 < \lambda < 1$ είναι σάγμα, ενώ για $\lambda > 1$ είναι ασταθής κόμβος. Και στις δύο κρίσιμες τιμές της παραμέτρου εμφανίζεται διακλάδωση τύπου saddle–node, κατά την οποία μεταβάλλεται ποιοτικά η τροχιακή δομή του συστήματος στο επίπεδο φάσης.



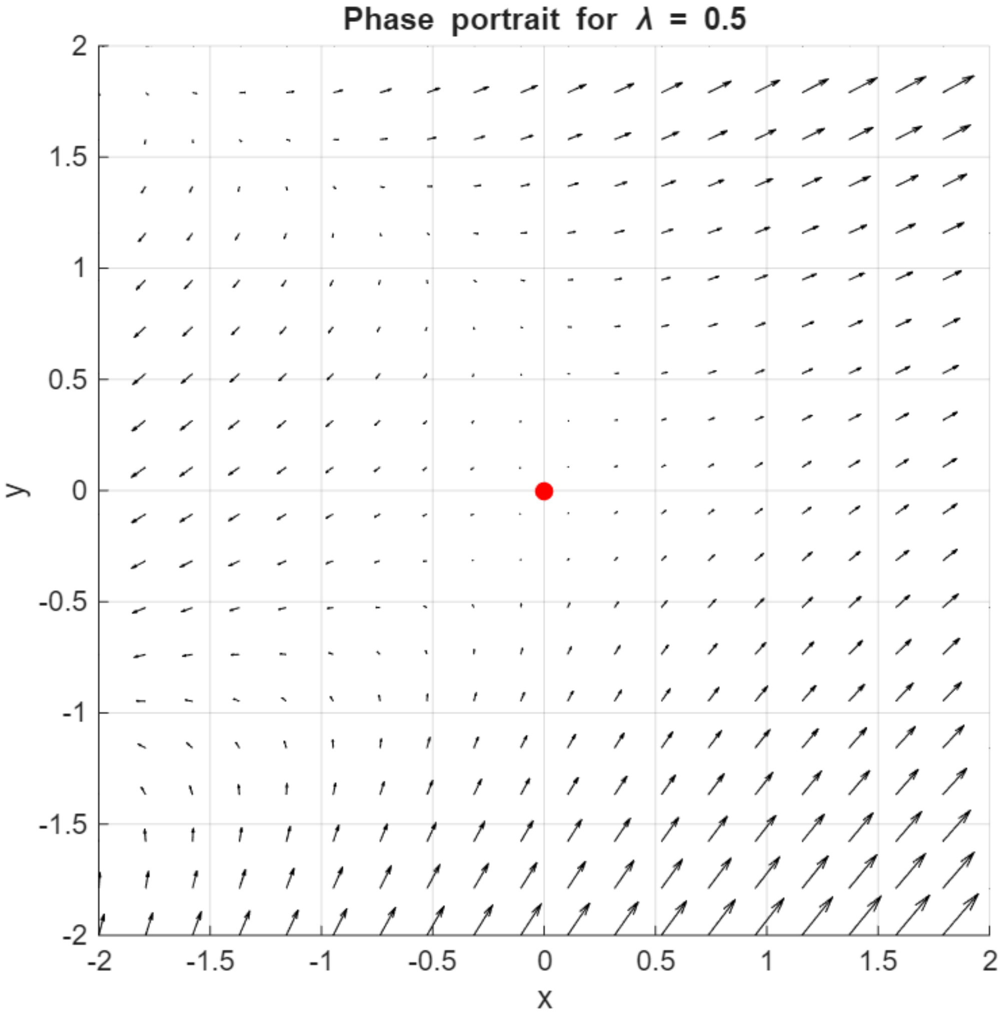
Σχήμα 14: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος



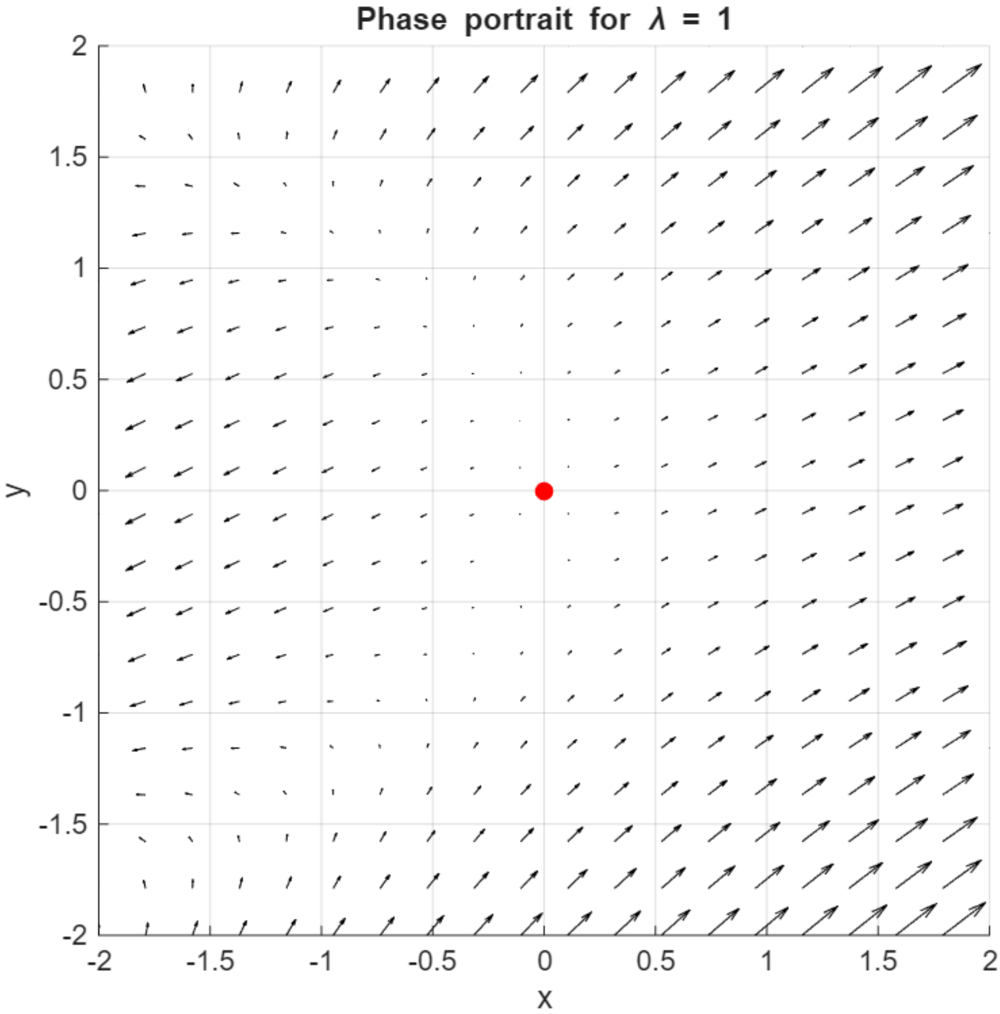
Σχήμα 15: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 16: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 17: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος



Σχήμα 18: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού Συστήματος

Μηδενική Ιδιοτιμή - Ευσταθής, Ασταθής και Κεντρική Πολλαπλότητα

Άσκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = 8x + 6y + \sin^2 x - y^2, \qquad \dot{y} = 8x - 6y + x^2 + xy.$$

Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας. Για τη μελέτη των τοπικά ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων γραμμικοποιούμε το σύστημα στην αρχή. Ο Ιακωβιανός πίνακας στο $(0,0)$ είναι

$$J = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του J προκύπτουν από την εξίσωση

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 - 100 = 0,$$

οπότε

$$\lambda_1 = 10, \qquad \lambda_2 = -10.$$

Επομένως η αρχή είναι υπερβολικό σημείο τύπου σάγμα και διαθέτει μονοδιάστατη τοπικά ευσταθή και μονοδιάστατη τοπικά ασταθή πολλαπλότητα.

Η ιδιοδιεύθυνση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 10$ προκύπτει από

$$(J - 10I)v = 0,$$

και δίνει διάνυσμα $v_u = (2,1)$. Αντίστοιχα, για την ιδιοτιμή $\lambda = -10$ έχουμε

$$(J + 10I)v = 0,$$

και ιδιοδιεύθυνση $v_s = (1,-3)$.

Θα προσεγγίσουμε τις πολλαπλότητες ως γραφήματα συναρτήσεων. Για την τοπικά ασταθή πολλαπλότητα υποθέτουμε ότι μπορεί να γραφεί ως

$$y = h_u(x) = \frac{1}{2}x + ax^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

ώστε η εφαπτομένη στην αρχή να ταυτίζεται με την ασταθή ιδιοδιεύθυνση.

Η συνθήκη αναλλοιωσιμότητας της πολλαπλότητας δίνει

$$h_u'(x)\dot{x} = \dot{y},$$

όπου οι $\dot{x}, \dot{y}$ αντικαθίστανται από το σύστημα και το y από $h_u(x)$. Αναπτύσσοντας μέχρι όρους δεύτερης τάξης και χρησιμοποιώντας ότι

$$\sin^2 x = x^2 + \mathcal{O}(x^4),$$

προκύπτει, μετά από ταύτιση συντελεστών, ότι

$$a = -\frac{3}{20}.$$

Άρα η τοπικά ασταθής πολλαπλότητα προσεγγίζεται από

$$W^u_{\text{loc}} : \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{20}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Αντίστοιχα, για την τοπικά ευσταθή πολλαπλότητα υποθέτουμε ανάπτυξη της μορφής

$$y = h_s(x) = -3x + bx^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

ώστε η εφαπτομένη στην αρχή να συμπίπτει με την ευσταθή ιδιοδιεύθυνση. Εφαρμόζοντας και πάλι τη συνθήκη αναλλοιωσιμότητας

$$h_s'(x)\dot{x} = \dot{y}$$

και ταυτίζοντας τους όρους μέχρι δεύτερης τάξης, προκύπτει

$$b = \frac{1}{5}.$$

Συνεπώς η τοπικά ευσταθής πολλαπλότητα προσεγγίζεται από

$$W^s_{\text{loc}} : \qquad y = -3x + \frac{1}{5}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Συμπερασματικά, το σύστημα διαθέτει υπερβολικό σημείο ισορροπίας στην αρχή, με τοπικά ασταθή πολλαπλότητα εφαπτόμενη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ και τοπικά ευσταθή πολλαπλότητα εφαπτόμενη στην ευθεία $y = -3x$, ενώ οι παραπάνω καμπύλες αποτελούν προσεγγίσεις δεύτερης τάξης των αντίστοιχων αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\theta} - 4\lambda\dot{\theta} + \sin\theta = 0, \qquad \lambda > 0.$$

Θέτουμε $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ και τη γράφουμε ως σύστημα πρώτης τάξης

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = 4\lambda x_2 - \sin x_1.$$

Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν $x_2 = 0$ και $\sin x_1 = 0$, άρα δίνονται από

$$(x_1, x_2) = (k\pi, 0), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Γραμμικοποιούμε το σύστημα γύρω από ένα τέτοιο σημείο. Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 4\lambda \end{pmatrix}.$$

Για $x_1 = k\pi$ ισχύει $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Επομένως οι ιδιοτιμές ικανοποιούν

$$\mu^2 - 4\lambda\mu + (-1)^k = 0.$$

Αν k είναι άρτιος, δηλαδή $x_1 = 2m\pi$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται

$$\mu^2 - 4\lambda\mu + 1 = 0,$$

οπότε και οι δύο ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Τα σημεία αυτά είναι ασταθή (κόμβοι ή εστίες) και δεν είναι σαγματικά.

Αν k είναι περιττός, δηλαδή $x_1 = (2m+1)\pi$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται

$$\mu^2 - 4\lambda\mu - 1 = 0,$$

η οποία έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή. Συνεπώς τα σημεία

$$(\theta, \dot{\theta}) = ((2m+1)\pi, 0)$$

είναι σαγματικά για κάθε $\lambda > 0$.

Θα προσεγγίσουμε τις τοπικά ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες γύρω από ένα τέτοιο σαγματικό σημείο. Θέτουμε $\theta = (2m+1)\pi + u$ και $v = \dot{\theta}$, ώστε το σαγματικό σημείο να μεταφερθεί στην αρχή. Επειδή

$$\sin\big((2m+1)\pi + u\big) = -\sin u = -u + \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^5),$$

το σύστημα γράφεται

$$\dot{u} = v, \qquad \dot{v} = 4\lambda v + u - \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^5).$$

Ο γραμμικός μέρος του συστήματος είναι

$$\dot{u} = v, \qquad \dot{v} = 4\lambda v + u,$$

με ιδιοτιμές

$$\mu_\pm = 2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + 1}.$$

Η ιδιοτιμή $\mu_+ > 0$ αντιστοιχεί στην ασταθή διεύθυνση, ενώ η $\mu_- < 0$ στην ευσταθή.

Υποθέτουμε ότι η τοπικά ασταθής πολλαπλότητα μπορεί να γραφεί ως γράφημα

$$v = h_u(u) = \mu_+ u + a u^3 + \mathcal{O}(u^5),$$

ώστε η εφαπτομένη στην αρχή να ταυτίζεται με την ασταθή ιδιοδιεύθυνση. Η συνθήκη αναλλοιωσιμότητας

$$h_u'(u)\dot{u} = \dot{v}$$

δίνει, μετά από αντικατάσταση και ταύτιση των όρων τάξης u^3, τον συντελεστή

$$a = \frac{1}{6(3\mu_+ - 4\lambda)}.$$

Αντίστοιχα, για την τοπικά ευσταθή πολλαπλότητα υποθέτουμε ανάπτυξη

$$v = h_s(u) = \mu_- u + b u^3 + \mathcal{O}(u^5),$$

και από την ίδια διαδικασία προκύπτει

$$b = \frac{1}{6(3\mu_- - 4\lambda)}.$$

Συνεπώς, για κάθε σαγματικό σημείο $((2m+1)\pi, 0)$ οι τοπικά ασταθείς και ευσταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζονται αντίστοιχα από τις καμπύλες

$$W^u_{\text{loc}}: \quad \dot{\theta} = \mu_+\big(\theta - (2m+1)\pi\big) + \frac{1}{6(3\mu_+ - 4\lambda)}\big(\theta - (2m+1)\pi\big)^3 + \mathcal{O}(|\theta - (2m+1)\pi|^5),$$

$$W^s_{\text{loc}}: \quad \dot{\theta} = \mu_-\big(\theta - (2m+1)\pi\big) + \frac{1}{6(3\mu_- - 4\lambda)}\big(\theta - (2m+1)\pi\big)^3 + \mathcal{O}(|\theta - (2m+1)\pi|^5).$$

Οι παραπάνω καμπύλες αποτελούν προσεγγίσεις τρίτης τάξης των τοπικά ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων όλων των σαγματικών σημείων της εξίσωσης.

Άσκηση 3

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = -x + y + x^2 + ax^3, \qquad \dot{y} = x - y + ax^2 + 2bxy + 3y^3.$$

Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας για κάθε τιμή των παραμέτρων a, b. Για τον καθορισμό του τύπου ευστάθειας γραμμικοποιούμε το σύστημα γύρω από την αρχή. Ο Ιακωβιανός πίνακας στο $(0,0)$ είναι

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του J προκύπτουν από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(J - \lambda I) = (\lambda + 2)\lambda = 0,$$

οπότε

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Η παρουσία μηδενικής ιδιοτιμής δείχνει ότι η αρχή είναι μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας και η γραμμικοποίηση δεν επαρκεί για τον καθορισμό της ευστάθειας. Επομένως εφαρμόζουμε τη θεωρία κεντρικής πολλαπλότητας.

Η κεντρική ιδιοδιεύθυνση αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ και δίνεται από το διάνυσμα $v_c = (1,1)$, ενώ η ευσταθής ιδιοδιεύθυνση από το $v_s = (1,-1)$. Εισάγουμε νέες μεταβλητές

$$u = \frac{x+y}{2}, \qquad v = \frac{x-y}{2},$$

οπότε η ευσταθής διεύθυνση αντιστοιχεί στο v και η κεντρική στο u. Σε αυτές τις μεταβλητές το σύστημα γράφεται, μέχρι όρους τρίτης τάξης,

$$\dot{u} = u^2 + 2(a+b)u^3 + \mathcal{O}(4),$$

$$\dot{v} = -2v + \mathcal{O}(2).$$

Η κεντρική πολλαπλότητα έχει τη μορφή $v = h(u)$ με $h(0) = h'(0) = 0$ και η περιορισμένη δυναμική πάνω σε αυτήν δίνεται από την εξίσωση για το u.

Η εξίσωση

$$\dot{u} = u^2 + 2(a+b)u^3$$

καθορίζει τον τύπο ευστάθειας της αρχής. Ο κυρίαρχος όρος είναι ο όρος u^2, ο οποίος είναι θετικός για κάθε $u \neq 0$. Συνεπώς, για μικρές θετικές τιμές του u οι τροχιές απομακρύνονται από την αρχή, ενώ για μικρές αρνητικές τιμές του u κατευθύνονται προς αυτήν σε πεπερασμένο χρόνο.

Επομένως, ανεξαρτήτως των τιμών των παραμέτρων a και b, η αρχή δεν είναι ούτε ασυμπτωτικά σταθερή ούτε ασταθής με την έννοια του Lyapunov. Η αρχή είναι ημι-ευσταθής: είναι ευσταθής από τη μία πλευρά της κεντρικής διεύθυνσης και ασταθής από την άλλη. Οι παράμετροι a και b επηρεάζουν μόνο τους όρους ανώτερης τάξης και δεν αλλάζουν τον ποιοτικό τύπο ευστάθειας του σημείου ισορροπίας.

Άσκηση 4

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = -2x^3 - \kappa xy^3 + 4xy, \qquad \dot{y} = -y + yx^2 - 4x^2 + \lambda,$$

το οποίο εξαρτάται από τις παραμέτρους κ και λ. Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν το σύστημα

$$-2x^3 - \kappa xy^3 + 4xy = 0,$$

$$-y + yx^2 - 4x^2 + \lambda = 0.$$

Αναζητούμε σημεία ισορροπίας κοντά στο $(x, y) = (0, 0)$ για μικρές τιμές των παραμέτρων. Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$y = \lambda - 4x^2 + \mathcal{O}(x^2 y),$$

οπότε για μικρά x και y έχουμε κατά προσέγγιση

$$y = \lambda - 4x^2 + \mathcal{O}(3).$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην πρώτη εξίσωση και κρατώντας τους κυρίαρχους όρους, παίρνουμε

$$-2x^3 + 4x(\lambda - 4x^2) + \mathcal{O}(4) = 0,$$

δηλαδή

$$4\lambda x - 18x^3 + \mathcal{O}(4) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται ως

$$x(4\lambda - 18x^2) = 0.$$

Επομένως, κοντά στην αρχή υπάρχουν τα σημεία ισορροπίας

$$(x, y) = (0, \lambda)$$

και, όταν $\lambda > 0$,

$$x = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{9}}, \qquad y = \lambda - \frac{8\lambda}{9} = \frac{\lambda}{9}.$$

Η μετάβαση από ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας σε τρία σημεία ισορροπίας συμβαίνει όταν

$$\lambda = 0.$$

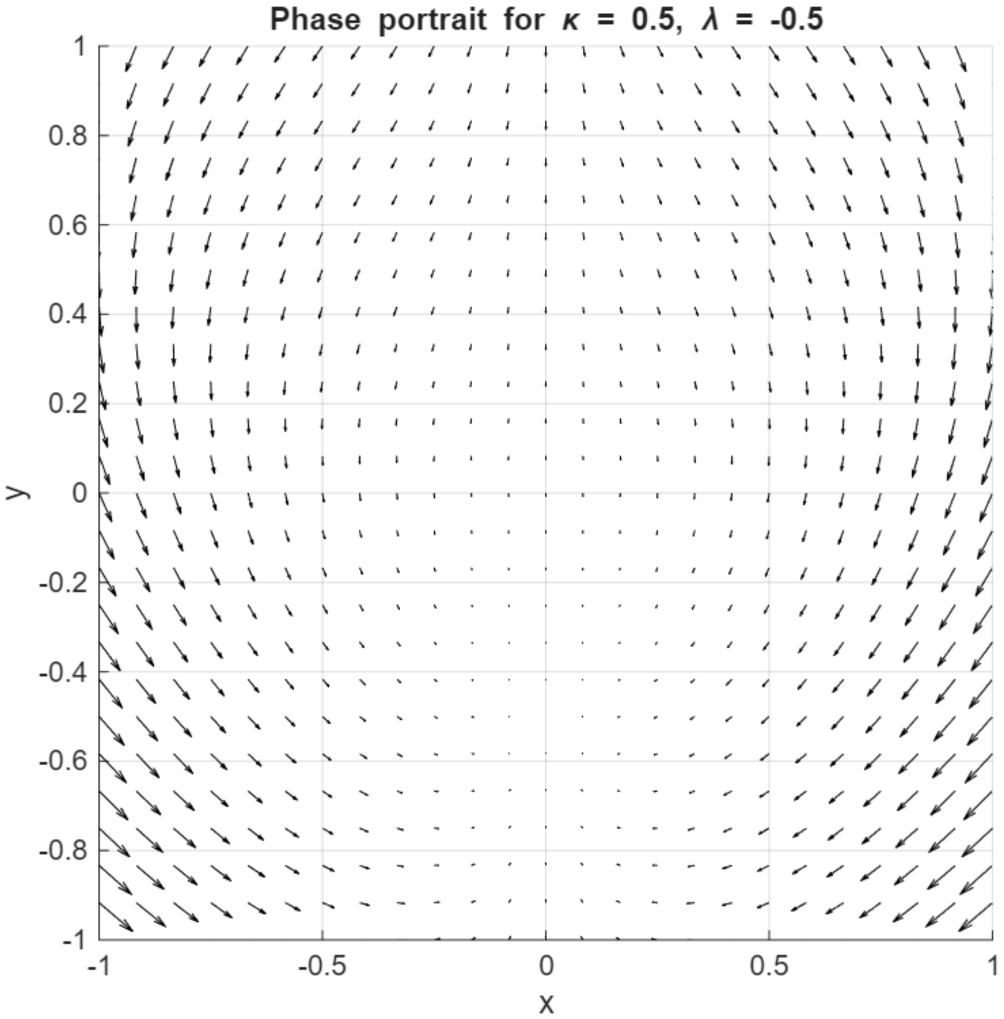
Συνεπώς, η καμπύλη διακλάδωσης στο χώρο των παραμέτρων (κ, λ), σε περιοχή της αρχής, είναι η ευθεία

$$\lambda = 0,$$

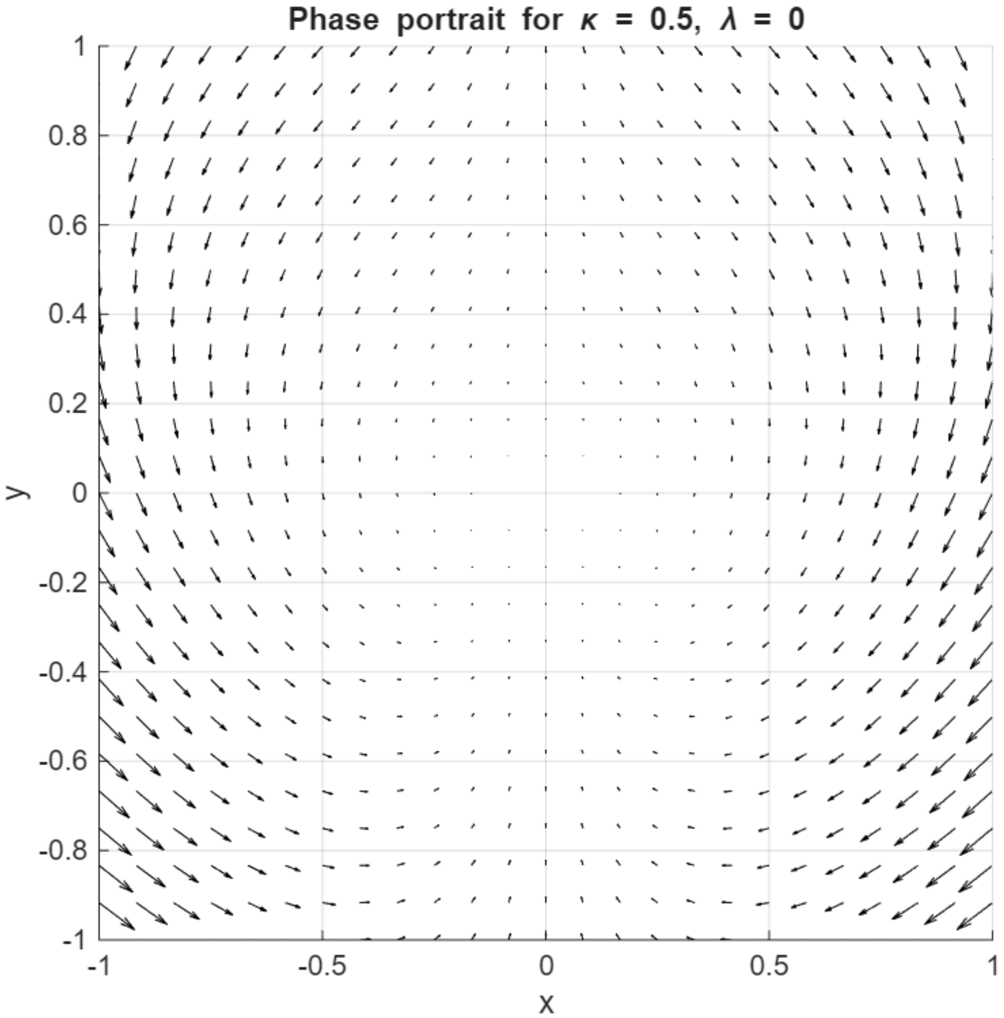
η οποία είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου κ στο τοπικό αυτό επίπεδο προσέγγισης.

Για $\lambda < 0$ το σύστημα διαθέτει μοναδικό σημείο ισορροπίας κοντά στο $(0, 0)$. Για $\lambda > 0$ εμφανίζονται δύο επιπλέον συμμετρικά σημεία ισορροπίας, γεγονός που χαρακτηρίζει διακλάδωση τύπου pitchfork. Η παράμετρος κ επηρεάζει τη μη γραμμική σύζευξη των μεταβλητών και μεταβάλλει την ποιοτική γεωμετρία των τροχιών, χωρίς να αλλάζει την τοπική καμπύλη διακλάδωσης.

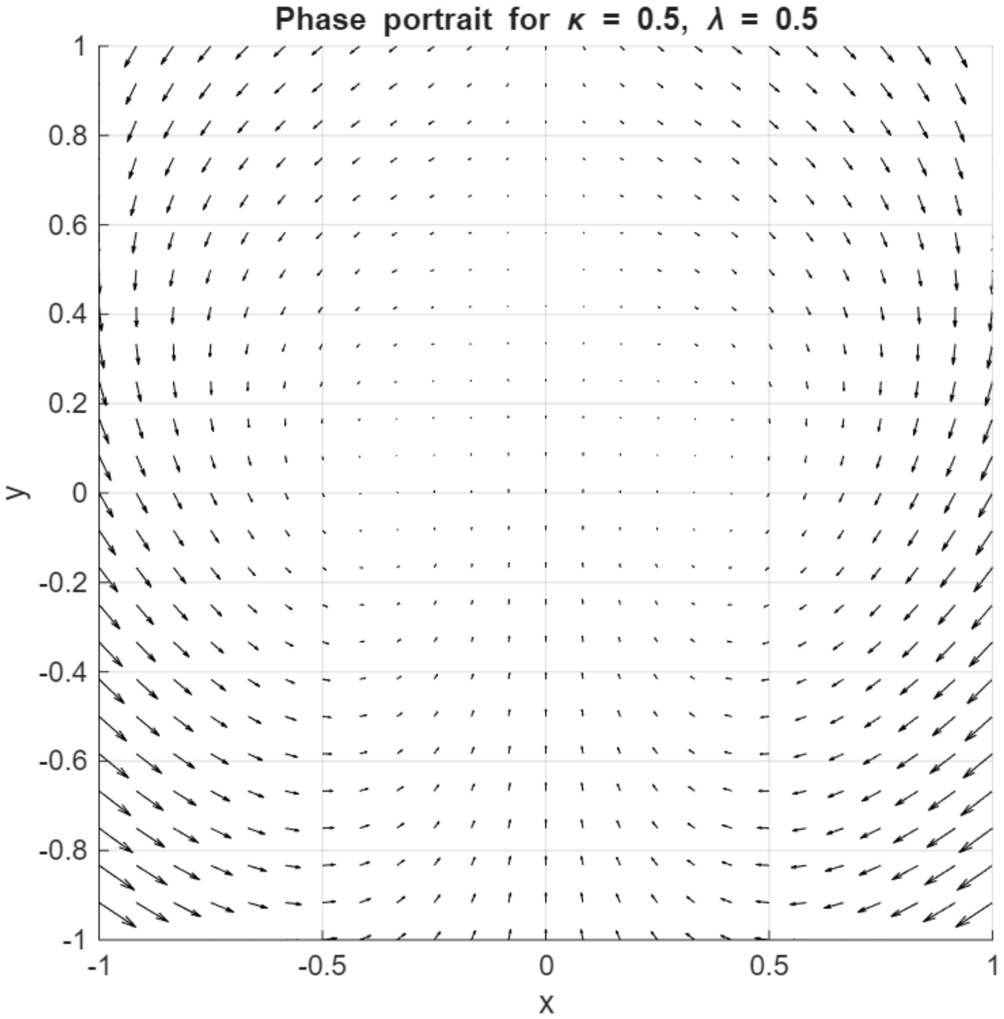
Συνεπώς, το σύστημα παρουσιάζει τοπικά διακλάδωση pitchfork με καμπύλη διακλάδωσης $\lambda = 0$, ενώ τα πορτραίτα φάσης διαφέρουν ποιοτικά στις περιοχές $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ και $\lambda > 0$.



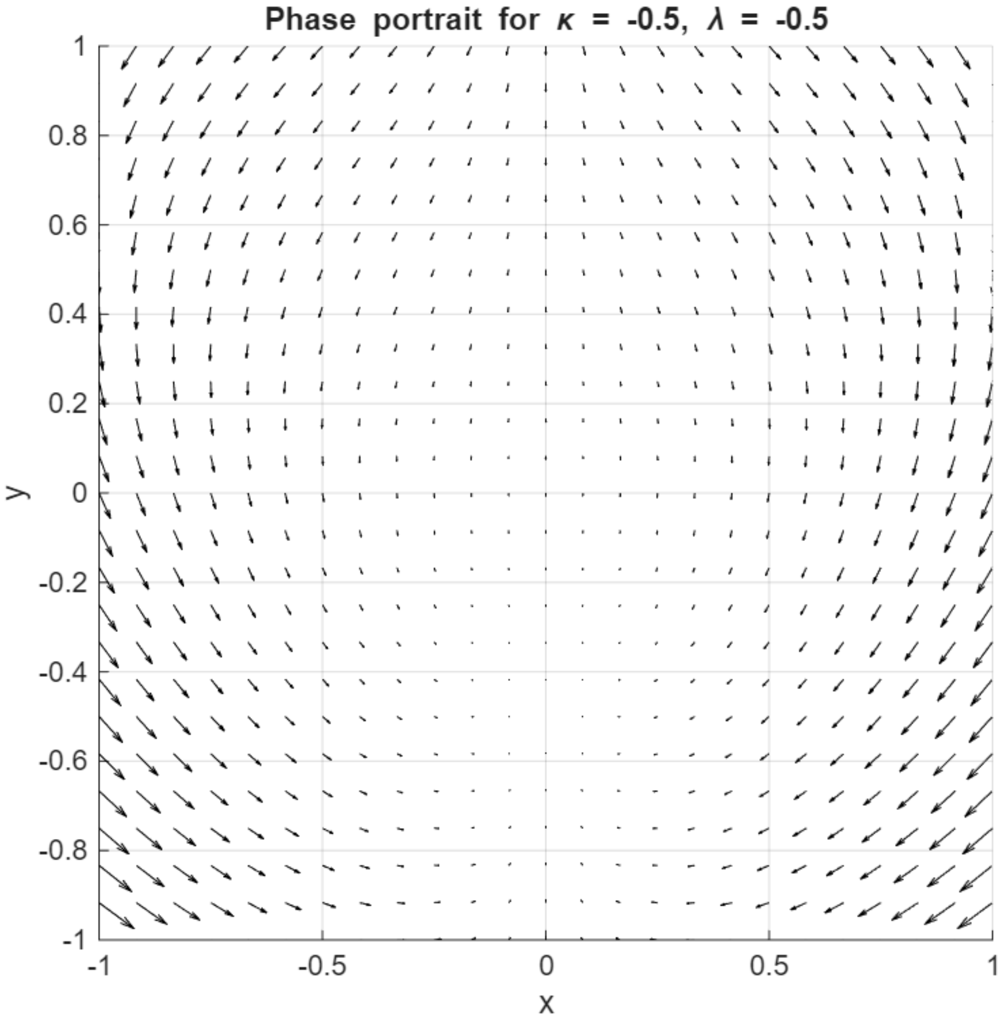
Σχήμα 19: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού συστήματος



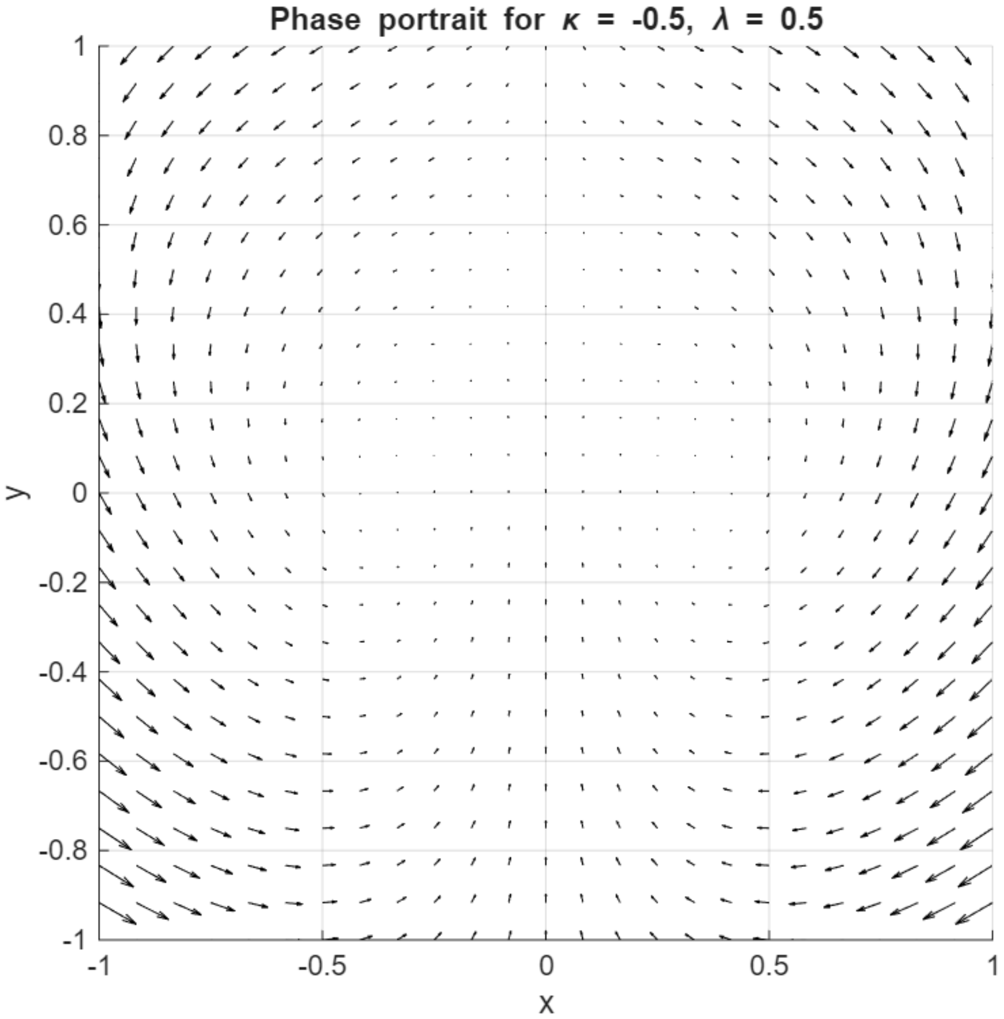
Σχήμα 20: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού συστήματος



Σχήμα 21: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού συστήματος



Σχήμα 22: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού συστήματος



Σχήμα 23: Πορτραίτο Φάσεων Δυναμικού συστήματος

Άσκηση 5

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = 3x^8, \qquad \dot{y} = -2y.$$

Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας. Ο Ιακωβιανός πίνακας στο σημείο αυτό είναι

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

οπότε οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Η παρουσία μίας μηδενικής ιδιοτιμής και μίας αρνητικής δείχνει ότι το σύστημα διαθέτει μονοδιάστατη κεντρική πολλαπλότητα και μονοδιάστατη ευσταθή πολλαπλότητα. Η κεντρική υποχώρος ταυτίζεται με τον άξονα x, ενώ ο ευσταθής με τον άξονα y.

Μία κεντρική πολλαπλότητα μπορεί να παρασταθεί ως γράφημα

$$y = h(x),$$

όπου $h(0) = 0$ και $h'(0) = 0$. Η συνθήκη αναλλοιωσιμότητας της κεντρικής πολλαπλότητας δίνει

$$h'(x)\dot{x} = \dot{y}.$$

Αντικαθιστώντας από το σύστημα προκύπτει

$$h'(x)\,3x^8 = -2h(x).$$

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς $h(x)$, η οποία γράφεται

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{2}{3}x^{-8}.$$

Ολοκληρώνοντας για $x \neq 0$ λαμβάνουμε

$$\ln|h(x)| = \frac{2}{21}x^{-7} + C,$$

ή ισοδύναμα

$$h(x) = C\,\exp\left(\frac{2}{21}x^{-7}\right),$$

όπου $C \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Για να αποτελεί η καμπύλη $y = h(x)$ κεντρική πολλαπλότητα απαιτείται να διέρχεται από την αρχή και να είναι εφαπτόμενη στον κεντρικό υποχώρο. Η μόνη επιλογή που ικανοποιεί τη συνθήκη $h(0) = 0$ είναι

$$h(x) \equiv 0.$$

Κάθε άλλη επιλογή της σταθεράς $C \neq 0$ οδηγεί σε συνάρτηση που δεν ορίζεται ή δεν τείνει στο μηδέν καθώς $x \to 0$, άρα δεν μπορεί να αποτελεί κεντρική πολλαπλότητα.

Συνεπώς, η μοναδική κεντρική πολλαπλότητα του συστήματος είναι ο άξονας

$$W^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0\}.$$

Πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα η δυναμική περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x} = 3x^8,$$

η οποία δείχνει ότι το μηδενικό σημείο είναι ασταθές κατά μήκος της κεντρικής διεύθυνσης.

Άσκηση 6

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = 4x - 10y - 2\lambda x^3, \qquad \dot{y} = 2x - 5y - 3\mu x^2 y,$$

το οποίο εξαρτάται από τις παραμέτρους λ και μ. Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας για κάθε τιμή των παραμέτρων.

Γραμμικοποιούμε το σύστημα γύρω από την αρχή. Ο Ιακωβιανός πίνακας στο $(0,0)$ είναι

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του J είναι

$$\det(J - \xi I) = \xi^2 + \xi = 0,$$

οπότε οι ιδιοτιμές είναι

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = -1.$$

Η παρουσία μηδενικής ιδιοτιμής δείχνει ότι η αρχή είναι μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας και η γραμμικοποίηση δεν επαρκεί για τον καθορισμό της ευστάθειας. Επομένως εφαρμόζουμε τη θεωρία κεντρικής πολλαπλότητας.

Η κεντρική ιδιοδιεύθυνση αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\xi_1 = 0$ και δίνεται από το διάνυσμα $v_c = (5, 2)$, ενώ η ευσταθής ιδιοδιεύθυνση από το $v_s = (1, 1)$. Θεωρούμε μετασχηματισμό συντεταγμένων ώστε η κεντρική διεύθυνση να ταυτιστεί με τον άξονα u. Η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται ως

$$y = h(x),$$

με $h(0) = 0$ και $h'(0) = \frac{2}{5}$.

Η συνθήκη αναλλοιωσιμότητας

$$h'(x)\dot{x} = \dot{y}$$

δίνει, μετά από αντικατάσταση από το σύστημα και ανάπτυξη μέχρι όρους τρίτης τάξης, ότι

$$h(x) = \frac{2}{5}x + \mathcal{O}(x^3).$$

Περιορίζοντας τη δυναμική πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα προκύπτει η εξίσωση

$$\dot{x} = -2\lambda x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

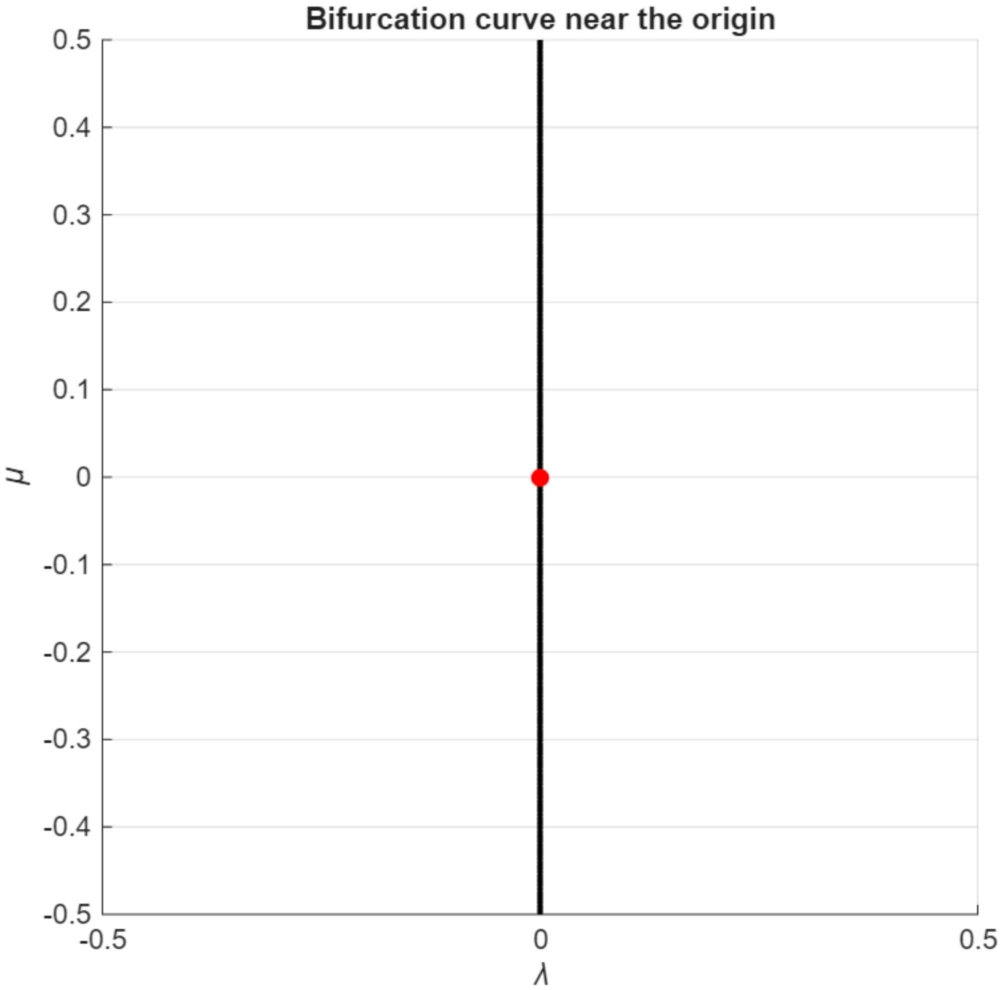
Η παραπάνω εξίσωση καθορίζει τον τύπο ευστάθειας της αρχής. Αν $\lambda > 0$, τότε $\dot{x} < 0$ για μικρά $x \neq 0$ και η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Αν $\lambda < 0$, τότε $\dot{x} > 0$ για μικρά $x \neq 0$ και η αρχή είναι ασταθής. Αν $\lambda = 0$, τότε ο κυρίαρχος μη γραμμικός όρος εξαφανίζεται και απαιτείται εξέταση όρων ανώτερης τάξης, γεγονός που υποδηλώνει αλλαγή της ποιοτικής συμπεριφοράς.

Συνεπώς, η ευστάθεια της αρχής εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο της παραμέτρου λ, ενώ η παράμετρος μ δεν επηρεάζει την τοπική ευστάθεια κοντά στο $(0, 0)$.

Η καμπύλη διακλάδωσης στο χώρο των παραμέτρων (λ, μ) προκύπτει από τη συνθήκη εξαφάνισης του κυρίαρχου όρου στην εξίσωση της κεντρικής δυναμικής και δίνεται από

$$\lambda = 0.$$

Πρόκειται για ευθεία που διέρχεται από την αρχή και χωρίζει το παραμετρικό επίπεδο σε περιοχή ασυμπτωτικής ευστάθειας ($\lambda > 0$) και περιοχή αστάθειας ($\lambda < 0$).



Σχήμα 24: Γράφημα Διακλάδωσης Συστήματος

Άσκηση 7

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = xy + ax^3 + bxy^2, \qquad \dot{y} = -y + cx^2 + dx^2 y,$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας. Ο Ιακωβιανός πίνακας στην αρχή είναι

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

οπότε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -1$. Η αρχή είναι μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας με μονοδιάστατη κεντρική και μονοδιάστατη ευσταθή διεύθυνση.

Αρχικά χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της συνάρτησης διακλάδωσης. Από τη δεύτερη εξίσωση, για σημεία ισορροπίας κοντά στο $(0,0)$, απαιτείται

$$-y + cx^2 + dx^2 y = 0,$$

δηλαδή

$$y = \frac{cx^2}{1 - dx^2} = cx^2 + cdx^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση αυτή στην πρώτη εξίσωση και λαμβάνουμε

$$\dot{x} = x\big(cx^2 + cdx^4\big) + ax^3 + bx\big(cx^2\big)^2 + \mathcal{O}(x^7).$$

Αναπτύσσοντας, προκύπτει

$$\dot{x} = (a+c)x^3 + (cd + bc^2)x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση διακλάδωσης. Αν $a + c < 0$, τότε ο κυρίαρχος όρος είναι αρνητικός και το μηδενικό σημείο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν $a + c > 0$, τότε ο κυρίαρχος όρος είναι θετικός και το μηδενικό σημείο είναι ασταθές. Στην οριακή περίπτωση $a + c = 0$, ο όρος τρίτης τάξης εξαφανίζεται και ο όρος πέμπτης τάξης καθορίζει τη δυναμική. Αν $cd + bc^2 < 0$, τότε $\dot{x} < 0$ για μικρά $x \neq 0$ και η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, ενώ αν $cd + bc^2 > 0$ η αρχή είναι ασταθής.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των κεντρικών πολλαπλοτήτων. Η κεντρική πολλαπλότητα μπορεί να γραφεί ως

$$y = h(x),$$

όπου $h(0) = 0$ και $h'(0) = 0$. Η συνθήκη αναλλοιωσιμότητας

$$h'(x)\dot{x} = \dot{y}$$

δίνει, μετά από αντικατάσταση από το σύστημα και ανάπτυξη σε σειρά Taylor,

$$h(x) = cx^2 + cdx^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Περιορίζοντας τη δυναμική πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα, προκύπτει

$$\dot{x} = xh(x) + ax^3 + bxh(x)^2,$$

δηλαδή

$$\dot{x} = (a+c)x^3 + (cd + bc^2)x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Η δυναμική πάνω στην κεντρική πολλαπλότητα είναι ισοδύναμη με αυτήν που προέκυψε με τη μέθοδο της συνάρτησης διακλάδωσης. Επομένως, τα συμπεράσματα για την ευστάθεια της αρχής είναι τα ίδια.

Συμπερασματικά, το σημείο $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν

$$a + c < 0 \quad \text{ή} \quad a + c = 0 \text{ και } cd + bc^2 < 0,$$

και είναι ασταθές αν

$$a + c > 0 \quad \text{ή} \quad a + c = 0 \text{ και } cd + bc^2 > 0.$$

Βιβλιογραφία

[1] Ν. Μ. Σταυρακάκης. *Διαφορικές εξισώσεις: Συνήθεις Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. 3η Έκδοση. Εκδόσεις Τσότρας, 2019.

[2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3rd Edition. CRC Press, 2024.

[3] Yu Zhang. *Phase Portrait Plotter on 2D phase plane*. MATLAB Central File Exchange, 2025. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/110785-phase-portrait-plotter-on-2d-phase-plane.