Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Πρόγραμμα Διδακτορικών Σπουδών

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

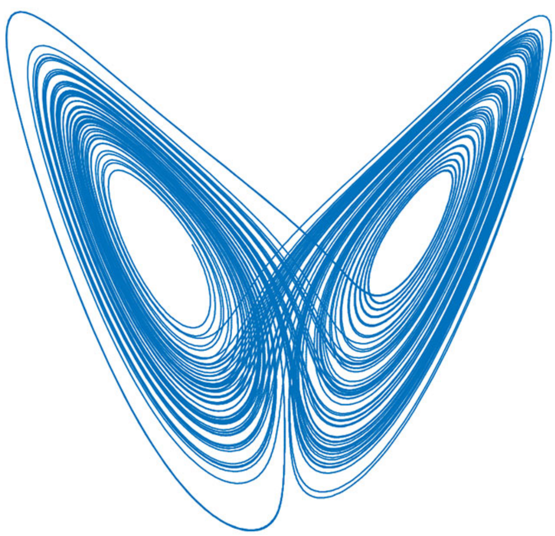
453: Δυναμικά Συστήματα και Μαθηματική Θεωρία Χάους

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - Δεν έχει εκδοθεί

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων:

Ποιοτική Αναλυτική Θεωρία - Θεωρία Floquet - Ποιοτική Γεωμετρική Θεωρία



Αθήνα, 2025

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Ποιοτική Αναλυτική Θεωρία

Άσκηση 1

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$y'' + g(t,y) = 0,\ \ y(0) = y_0,\ \ y'(0) = y_1$$

όπου η $g(t,y)$ είναι συνεχής στο πεδίο $D \subset \mathbb{R}^2$ που περιέχει το σημείο $(0, y_0)$. Τότε, θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον πρόβλημα σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Συνεπώς, θέτοντας ως $x_1 = y$ και $x_2 = y'$, το Π.Α.Τ. θα μετασχηματιστεί σε μορφή Cauchy ($x' = f(x)$), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(t, x_1) \end{cases}$$

με τις εξής αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} x_1(0) = y(0) = y_0 \\ x_2(0) = y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Συνεπώς, το νέο διανυσματικό πεδίο f θα έχει την εξής μορφή:

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g(t, x_1) \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας το Πρώτο θεώρημα (ή Θεώρημα Ισοδύναμης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης) θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(t, t_0, x_0))ds$$

όπου το $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ για κάποιο $r > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το $t_0 = 0$. Επομένως έχουμε:

$$x(t, 0, x_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} x_2(s) \\ -g(s, x_1(s)) \end{bmatrix} ds$$

Άσκηση 2

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$y' = f(x,y) = e^x + y^2,\ \ y(0) = y^0 = 0$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Piccard για να υπολογιστούν οι τρείς πρώτες επαναλήψεις της ισοδύναμης ολοκληρωικής σχέσης. Συνεπώς, έχουμε την εξής ακολουθία λύσεων:

$$y_{m+1}(x) = y^0 + \int_0^x f(s, y_m(s))ds,\ y_0(x) = 0$$

Για $m = 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y^0 + \int_0^x e^s + y_0(s)^2 ds \\ &= \int_0^x e^s ds = e^s\Big|_0^x = e^x - 1 \\ &\Rightarrow y_1(x) = e^x - 1 \end{aligned}$$

Για $m = 1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y^0 + \int_0^x e^s + y_1(s)^2 ds \\ &= \int_0^x e^s ds + \int_0^x (e^x - 1)^2 ds \\ &= e^s\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x 2e^{2s} ds - 2\int_0^x e^s ds + \int_0^x 1 ds \\ &= e^x - 1 + \frac{1}{2}e^{2s}\Big|_0^x - 2e^s\Big|_0^x + s\Big|_0^x \\ &\Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Για $m = 2$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y^0 + \int_0^x e^s + y_2(s)^2 ds \\ &= \int_0^x e^s ds + \int_0^x \left(\frac{1}{2}e^{2s} - e^s + s - \frac{3}{2}\right)^2 ds \\ &= e^s\Big|_0^x + \int_0^x \left(\frac{1}{4}e^{4s} - e^{3s} - \frac{1}{2}e^{2s} + se^{2s} - 2se^s + 3e^s + s^2 - 3s - \frac{9}{4}\right) ds \\ &= e^x - 1 + \frac{1}{16}e^{4s}\Big|_0^x - \frac{1}{3}e^{3s}\Big|_0^x - \frac{1}{4}e^{2s}\Big|_0^x + \frac{1}{2}se^{2s}\Big|_0^x - \frac{1}{4}e^{2s}\Big|_0^x - 2se^s\Big|_0^x + 2e^s\Big|_0^x + \frac{1}{3}s^3\Big|_0^x - \frac{3}{2}s^2\Big|_0^x - \frac{9}{4}s\Big|_0^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_3(x) = \frac{1}{16}(e^{4x} - 1) - \frac{1}{3}(e^{3x} - 1) - \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) + \frac{1}{2}xe^{2x} - 2xe^x + 5(e^x - 1) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$$

Άσκηση 3

Έστω πως έχουμε το παρακάτω Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

$$\begin{cases} x''' + \left(\frac{1}{1+t^2}\right)x'' + \sin(t)x' + \frac{t}{x^2+y^2+1} = 0 \\ \\ y'' + e^{-t}y' + cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες τις $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 5$, $y(0) = 0$ και $y'(0) = 5$. Θα θέσουμε ως $u_1 = x$, $u_2 = x'$, $u_3 = x''$, $u_4 = y$ και $u_5 = y'$. Επομένως, το νέο σύστημα εξισώσεων θα έχει διανυσματικό πεδίο

$$f(t,u) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -\frac{1}{1+t^2}u_3 - sin(t)u_2 - \frac{t}{u_1^2+u_4^2+1} \\ u_5 \\ -e^{-t}u_5 - \cos(u_1 + u_4) \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως το διανυσματικό πεδίο είναι συνεχές ως προς το $t \in \mathbb{R}$ και ως προς τις μεταβλητές $u = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4 \;\; u_5]^T \in \mathbb{R}^5$, καθώς αποτελείτε από συνεχείς συναρτήσεις, με τον παρονομαστή του τρίτου στοιχείου να είναι πάντα θετικός. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε τις παραγώγους του διανυσματικού πεδίου ως προς τα u_i με $i = 1, ..., 5$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή μήτρα $J_f(u) = \frac{\partial f}{\partial u}$. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ανά συνιστώσα:

Για τη συνιστώσα $f_1 = u_2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = [0, 1, 0, 0, 0]$$

Για τη συνιστώσα $f_2 = u_3$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = [0, 0, 1, 0, 0]$$

Για τη συνιστώσα $f_3 = -\frac{1}{1+t^2}u_3 - \sin(t)u_2 - \frac{t}{u_1^2+u_4^2+1}$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = \left[\frac{2tu_1}{(u_1^2+u_4^2+1)^2},\; -\sin(t),\; -\frac{1}{1+t^2},\; \frac{2tu_4}{(u_1^2+u_4^2+1)^2},\; 0\right]$$

Για τη συνιστώσα $f_4 = u_5$:

$$\frac{\partial f_4}{\partial u} = [0, 0, 0, 0, 1]$$

Για τη συνιστώσα $f_5 = -e^{-t} - \cos(u_1 + u_4)$:

$$\frac{\partial f_5}{\partial u} = [\sin(u_1 + u_4),\; 0,\; 0,\; \sin(u_1 + u_4),\; 0]$$

Συνεπώς, η Jacobian μήτρα $J_f(u) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ είναι:

$$J_f(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2tu_1}{(u_1^2+u_4^2+1)^2} & -\sin(t) & -\dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{2tu_4}{(u_1^2+u_4^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin(u_1+u_4) & 0 & 0 & \sin(u_1+u_4) & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, παρατηρούμε πως όλες οι παράγωγοι ως προς τα u_i είναι συνεχείς. Οπότε, το διανυσματικό πεδίο είναι τοπικά Lipschitz ως προς το διάνυσμα των μεταβλητών. Καθώς, έχουμε βρει πως γύρω από τη γειτονιά του $t = 0$ το διανυσματικό πεδίο είναι συνεχές και Lipschitz, τότε από το θεώρημα Picard - Lindelöf υπάρχει μοναδική λύση γύρω από την γειτονιά του $t = 0$.

Άσκηση 4

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = xy^{-1}, \;\; y(0) = 1$$

Θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσης γύρω από το σημείο $(0, 1)$. Ορίζουμε το ανοιχτό χωρίο $D = \{(x, y) : |x| < a, |y - 1| < b\}$, με $a, b > 0$. Επιπλέον, σε αυτό το διάστημα παρατηρούμε πως η $f(x, y)$ είναι συνεχής για $y \neq 0$. Συνεπώς, από Θεώρημα Peano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση κοντά στο $x = 0$. Η $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. Καθώς το x είναι μικρό κοντά στο 0 και το y είναι κοντά στο 1, τότε το y^2 θα απομακρύνεται από το 0. Οπότε, προκύπτει πως η $f(x, y)$ είναι τοπίκα Lipschitz ως προς το y γύρω από το σημείο $(0, 1)$. Άρα, από το Θεώρημα Picard - Lindelöf υπάρχει μοναδικότητα της λύσης. Οπότε, λύνοντας τη παραπάνω διαφορική προκύπτει:

$$dy = xdx \Rightarrow \int dy = \int xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y^2 = x^2 + 2c \Rightarrow y^2 = x^2 + c_1$$

Καθώς εντός του χωρίου προκύπτει πως το $y > 0$ και έχουμε ως αρχική συνθήκη το $y(0) = 1$, τότε η μοναδική λύση της διαφροικής εξίσωσης είναι:

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Άσκηση 5

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = \ln(1 + y^2), \;\; y(0) = 1$$

Θα εξετάσουμε την ύπαρξη λύσης γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Ορίζουμε το ανοιχτό χωρίο $D = \{(x, y) : |x| < a, |y| < b\}$, με $a, b > 0$. Επιπλέον, σε αυτό το διάστημα παρατηρούμε πως η $f(x, y)$ είναι συνεχής. Συνεπώς, από Θεώρημα Peano υπάρχει τουλάχιστον μια λύση κοντά στο $x = 0$.
Η $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+y^2}$. Καθώς εντός του χωρίου έχουμε ότι το $|y| < b$, τότε θα προκύψει πως η μερική παράγωγος είναι φραγμένη. Συνεπώς, προκύπτει πως είναι τοπικά Lipschitz γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Άρα, από το Θεώρημα Picard - Lindelöf υπάρχει μοναδικότητα της λύσης. Επιπλέον, από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει η πεπλεγμένη μορφή:

$$\frac{1}{\ln(1 + y^2)} dy = dx \Rightarrow x = \int \frac{1}{\ln(1 + y^2)} dy + c$$

Παρατηρούμε ευθύς ότι η σταθερή συνάρτηση

$$y(x) = 0$$

ικανοποιεί την αρχική συνθήκη, καθώς $\ln(1 + 0^2) = 0$. Συνεπώς, μέσα στο χωρίο αυτό η λύση αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση 6

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$y' = y^2 + \cos(x^2), \;\; y(0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Αρχικά, η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της. Η $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, η οποία είναι επίσης συνεχής για όλα τα y. Επομένως,

$$|f(x, y) - f(x, 0)| = |y^2 + \cos(x^2) - 0 - \cos(x^2)| = |y^2| = y|y - 0|$$

Καθώς βρισκόμαστε εντός του διαστήματος $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, έχουμε πως η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι τοπικά Lipschitz για όλα τα y που βρίσκονται σε αυτό το διάστημα. Συνεπώς, από το Θεώρημα Picard - Lindelöf υπάρχει μοναδικότητα της λύσης.
Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση $|\cos(x^2)| \leq 1$. Επομένως, η διαφορική εξίσωση θα γίνει:

$$y' = y^2 + cos(x^2) \leq y^2 + 1$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι πως η παράγωγος είναι φραγμένη από τη παράγωγο της συνάρτησης $\arctan(y(x))$. Συνεπώς αυτό που θα προκύψει είναι πως σε αυτό το διάστημα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι φραγμένη από την $\tan(x)$. Καθώς η εαφπτομένη ορίζεται στο $|x| < \frac{\pi}{2}$, τότε αποδεικνύεται πως υπάρχει λύση σε αυτό το διάστημα.

Άσκηση 8

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$y' = x(1+y), \;\; y(0) = -1$$

Θα ελέγξουμε αρχικά, εάν η $y(x) = -1$ αποτελεί λύση. Την εισάγωγη στη διαφορική και προκύπτει ότι $y'(x) = 0$. Επομένως, αποτελεί λύση. Τώρα θα εξετάσουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Έχουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, οπότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Επειδή η $f(x, y)$ και η παράγωγός του είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού, τότε από το Θεώρημα Picard - Lindelöf προκύπτει πως η $y(x) = -1$ είναι μοναδική λύση γύρω από την αρχική συνθήκη.

Άσκηση 11

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{x_2}{x_3^2} \\ x_2' = \frac{x_1}{x_3^2} \\ x_3' = 1 \end{cases}$$

Θα το μετασχηματίσουμε σε πολικές συντεταγμένες (r, ϑ, z). Συνεπώς, έχουμε τους μετασχηματισμούς $x_1 = r\cos(\vartheta)$, $x_2 = r\sin(\vartheta)$ και $x_3 = z$. Επομένως,

$$\begin{cases} x_1' = r'\cos(\vartheta) - r\vartheta'\sin(\vartheta) \\ x_2' = r'\sin(\vartheta) + r\vartheta'\sin(\vartheta) \end{cases}$$

Επομένως, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι το εξής:

$$\begin{cases} r'\cos(\vartheta) - r\vartheta'\sin(\vartheta) = -\frac{r\sin(\vartheta)}{z^2} \\ r'\sin(\vartheta) + r\vartheta'\cos(\vartheta) = \frac{r\cos(\vartheta)}{z^2} \\ z' = 1 \end{cases}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε με $\cos(\vartheta)$ την πρώτη εξίσωση και με $\sin(\vartheta)$ τη δεύτερη σχέση και τις προσθέτουμε κατά μέλη. Οπότε, αυτό που θα προκύψει θα είναι:

$$r' = 0$$

Θα πολλαπλασιάσουμε με $-\sin(\vartheta)$ τη πρώτη σχέση και με $\cos(\vartheta)$ τη δεύτερη σχέση και τις προσθέτουμε κατά μέλη. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει θα είναι:

$$r\vartheta' = \frac{r\sin^2(\vartheta)}{z^2} + \frac{r\cos^2(\vartheta)}{z^2} \Rightarrow r\vartheta' = \frac{r}{z^2} \Rightarrow \vartheta' = \frac{1}{z^2}$$

Συνεπώς, το νέο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών που προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{cases} r' = 0 \\ \vartheta' = \frac{1}{z^2} \\ z' = 1 \end{cases}$$

με αρχικές τιμές $r(0) = 1$, $\vartheta(0) = -\pi$ και $z(0) = \frac{1}{\pi}$. Οπότε, θα ολοκληρώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις. Άρα,

$$\int_0^t r'(s)ds = \int_0^t 0ds \Rightarrow r(t) - r(0) = 0 \Rightarrow r(t) = 1$$

$$\int_0^t z'(s)ds = \int_0^t 1ds \Rightarrow z(t) - z(0) = t \Rightarrow z(t) = t + \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^t \vartheta'(s)ds = \int_0^t \frac{1}{\left(s+\frac{1}{\pi}\right)}ds \Rightarrow \vartheta(t)-\vartheta(0) = -\frac{1}{t+\frac{1}{\pi}}+\pi \Rightarrow \vartheta(t) = -\frac{1}{t+\frac{1}{\pi}}$$

Συνεπώς, η τελική λύση σε πολικές συντεταγμένες που προέκυψε είναι:

$$\begin{cases} r(t) = 1 \\ \vartheta(t) = -\frac{1}{t+\frac{1}{\pi}} \\ z(t) = t+\frac{1}{\pi} \end{cases}$$

Η διαφορική εξίσωση $\vartheta' = \frac{1}{\left(t+\frac{1}{\pi}\right)^2}$ ορίζεται μόνο για τις χρονικές στιγμές $t > -\frac{1}{\pi}$. Η αρχική συνθήκη είναι $t_0 = 0$. Συνεπώς, το μέγιστο διάστημα ύπαρξης θα είναι το $t \in \left(-\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

Θεωρία Floquet

Άσκηση 1

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(2t) & 0 \\ 0 & \cos^2(3t) \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\sin^3(2t)$ έχει ελάχιστη περίοδο $T_1 = \pi$ (γιατί $\sin(2t)$ έχει περίοδο π και η κύβωση δεν μειώνει την περίοδο), ενώ $\cos^2(3t)$ έχει ελάχιστη περίοδο $T_2 = \pi/3$ (γιατί $\cos(3t)$ έχει περίοδο $2\pi/3$ και το τετράγωνο δίνει περίοδο $\pi/3$). Άρα η ελάχιστη κοινή περίοδος είναι

$$T = \mathrm{lcm}(\pi, \tfrac{\pi}{3}) = \pi.$$

Άσκηση 2

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(2t) & 0 \\ 0 & \cos^2(3t) \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\sin^3(2t)$ έχει ελάχιστη περίοδο $T_1 = \pi$ (γιατί $\sin(2t)$ έχει περίοδο π και η κύβωση δεν μειώνει την περίοδο), ενώ $\cos^2(3t)$ έχει ελάχιστη περίοδο $T_2 = \pi/3$ (γιατί $\cos(3t)$ έχει περίοδο $2\pi/3$ και το τετράγωνο δίνει περίοδο $\pi/3$). Άρα η ελάχιστη κοινή περίοδος είναι

$$T = \mathrm{lcm}(\pi, \tfrac{\pi}{3}) = \pi.$$

Άσκηση 3

$$A(t) = \begin{pmatrix} 99 + \dfrac{\cos t}{10 + \sin t} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Η συνιστώσα $\dfrac{\cos t}{10 + \sin t}$ είναι περίοδος 2π και γράφεται ως παράγωγη $\dfrac{d}{dt} \ln(10 + \sin t)$ (πράγματι $\frac{d}{dt} \ln(10 + \sin t) = \frac{\cos t}{10 + \sin t}$). Άρα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{10 + \sin t}\, dt = \ln(10 + \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Η ελάχιστη περίοδος είναι $T = 2\pi$.

Άσκηση 4

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(4t) & 0 \\ \sin(4t) & -5 + \cos(4t) \end{pmatrix}.$$

Εδώ η ελάχιστη κοινή περίοδος των στοιχείων είναι $T = \pi/2$ (γιατί οι $\cos(4t), \sin(4t)$ έχουν περίοδο $\frac{\pi}{2}$). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων σε μία περίοδο, παίρνουμε

$$\int_0^T \cos(4s)\, ds = 0, \qquad \int_0^T \sin(4s)\, ds = 0.$$

Άσκηση 5

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{pmatrix} x(t).$$

Το $\sin^2 t$ έχει περίοδο π. Επομένως, η ελάχιστη περίοδος του πίνακα είναι $T = \pi$. Οι χαρακτηριστικοί αριθμοί είναι

$$\mu_1 = exp\left(\int_0^\pi 3\, dt\right) = e^{3\pi}, \qquad \mu_2 = exp\left(\int_0^\pi \sin^2 t\, dt\right) = e^{\pi/2},$$

γιατί $\int_0^\pi \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$, κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$.

Άσκηση 6

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Ο πίνακας είναι κάτω-τριγωνικός και τα διαγώνια στοιχεία έχουν περίοδο 2π. Επομένως με $T = 2\pi$ οι χαρακτηριστικοί αριθμοί είναι

$$\mu_1 = \exp\Big(\int_0^{2\pi} (-1 + \cos s)\, ds\Big) = e^{-2\pi}, \qquad \mu_2 = \exp\Big(\int_0^{2\pi} -1\, ds\Big) = e^{-2\pi}.$$

Άσκηση 7

Θεωρούμε το περιοδικό ομογενές σύστημα

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} + \sin t \end{pmatrix}.$$

με ελάχιστη περίοδο $T = 2\pi$. Έστω $\Phi(t)$ η θεμελιώδης μήτρα με $\Phi(0) = I$. Από το θεώρημα Ambel για ομογενή συστήματα ισχύει

$$\det \Phi(2\pi) = \exp\Big(\int_0^{2\pi} \operatorname{tr} A(s)\, ds\Big).$$

Υπολογίζουμε το ίχνος:

$$\operatorname{tr} A(t) = \tfrac{1}{2} - \cos t + \tfrac{3}{2} + \sin t = 2 - \cos t + \sin t,$$

οπότε

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tr} A(s)\, ds = \int_0^{2\pi} 2\, ds + \int_0^{2\pi} (-\cos s + \sin s)\, ds = 4\pi.$$

Άρα

$$\det \Phi(2\pi) = e^{4\pi} > 1.$$

Έστω μ_1, μ_2 οι δύο χαρακτηριστικοί αριθμοί του συστήματος. Τότε

$$\mu_1 \mu_2 = \det \Phi(2\pi) = e^{4\pi} > 1.$$

Παρατηρούμε πως δεν είναι δυνατό και οι δύο χαρακτηριστικοί αριθμοί να έχουν μέτρο μικρότερο από 1, δηλαδή δεν ισχύει $|\mu_1| < 1$ και $|\mu_2| < 1$ ταυτόχρονα, διότι τότε $|\mu_1\mu_2| < 1$. ΆΤΟΠΟ. Συνεπώς τουλάχιστον ένας από τους χαρακτηριστικούς αριθμούς έχει $|\mu_i| \geq 1$.
Οπότε, αν για κάποιο μ ισχύει $|\mu| \geq 1$, τότε η αντίστοιχη Floquet–λύση (η οποία προέρχεται από ιδιοδιάνυσμα της $\Phi(2\pi)$) δεν φθίνει στο 0 για $t \to \infty$:

- αν $|\mu| > 1$ η αντίστοιχη λύση αυξάνει εκθετικά (άρα σαφώς δεν φθίνει),
- αν $|\mu| = 1$ η αντίστοιχη λύση είναι (τουλάχιστον) φραγμένη και δεν τείνει στο 0 γενικά (μη-φθίνουσα / οριακά σταθερή).

Επομένως, από το γεγονός ότι $\mu_1\mu_2 = e^{4\pi} > 1$ προκύπτει τουλάχιστον ένας χαρακτηριστικός αριθμός με $|\mu_i| \geq 1$, και άρα το σύστημα διαθέτει τουλάχιστον μία λύση που δεν φθίνει όταν $t \to \infty$.

Ποιοτική Γεωμετρική Θεωρία

Άσκηση 1

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - 2xy \\ y' = 2y - 2y^2 - 3xy \end{cases}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος, θα θέσουμε $(x', y') = (0, 0)$. Οπότε, θα προκύψει ότι:

$$\begin{cases} 0 = x(1 - x - 2y) \\ 0 = y(2 - 2y - 3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \eta \quad 1 - x - 2y = 0 \\ y = 0 \quad \eta \quad 2 - 2y - 3x = 0 \end{cases}$$

Αρχικά, παρατηρούμε πως το πρώτο κρίσιμο σημείο είναι το $(x, y) = (0, 0)$. Στην περίπτωση που μόνο το $x = 0$, τότε χρησιμοποιώντας τη δεύτερη εξίσωση θα προκύψει ότι το $y = 1$. Οπότε το δεύτερο κρίσιμο σημείο είναι το $(x, y) = (0, 1)$.Στην περίπτωση που μόνο το $y = 0$, τότε χρησιμοποιώντας τν πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι το $x = 1$. Οπότε το τρίτο κρίσιμο σημείο είναι το $(x, y) = (0, 1)$. Στην περίπτωση που δεν είναι κανένα από τα δύο μηδέν, τότε λύνουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} 1 - x - 2y = 0 \\ 2 - 2y - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2 - 2y + 6y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ -1 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Το τέταρτο και τελευταίο κρίσιμο σημείο του παραπάνω συστήματος είναι το $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Άσκηση 2

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ z' = z + x^2 + y^2 \end{cases}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος, θα θέσουμε $(x', y', z') = (0, 0, 0)$. Οπότε, θα προκύψει ότι:

$$\begin{cases} 0 = ax - bxy \\ 0 = -cy + dxy \\ 0 = z + x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \\ z = -x^2 - y^2 \end{cases}$$

Το πρώτο κρίσιμο σημείο που παρατηρούμε είναι το $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Επίσης, παρατηρούμε πως έχει και δεύτερο το οποίο υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} a - by = 0 \\ -c + dx = 0 \\ z = -x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{b} \\ x = \frac{c}{d} \\ z = -\frac{c^2}{d^2} - \frac{a^2}{b^2} \end{cases}$$

Οπότε, προκύπτει και το δεύτερο κρίσιμο σημείο, το οποίο είναι $(x, y, z) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}, -\frac{c^2}{d^2} - \frac{a^2}{b^2}\right)$.

Άσκηση 3

Έχουμε την εξής διαφορική εξίσωση

$$y' = y(y^2 - 1)(y^2 - 4)$$

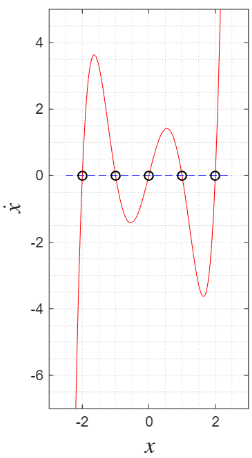
Αρχικά, θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας της παραπάνω σχέσης. Θέτουμε την παράγωγο ίση με μηδέν και προκύπτουν τα σημεία ισορροπίας:

$$y_{e_1} = -2,\ y_{e_2} = -1,\ y_{e_3} = 0,\ y_{e_4} = 1,\ y_{e_5} = 2,$$

Κάνοντας χρήση της ανάλυσης προσήμου για την συγκεκριμένη εξίσωση, μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά των σημείων ισορροπίας. Οπότε, έχουμε ότι:

1. Αν $y(t) < -2$, τότε $y'(t) < 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -2$
2. Αν $-2 < y(t) < -1$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -2$
3. Αν $-1 < y(t) < 0$, τότε $y'(t) < 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$
4. Αν $0 < y(t) < 1$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$
5. Αν $1 < y(t) < 2$, τότε $y'(t) < 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$
6. Αν $y(t) > 2$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$

Αναλυτικά μπορούμε να δούμε και τα πρόσημα της λύσης στο σχήμα 1. Αυτό που παρατηρούμε από την ανάλυση προσήμου είναι πως τα σημεία ισορροπίας $y_e = \{-1, 1\}$ είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθή, διότι η λύση έλκεται από αυτα τα σημεία. Αντιθέτως, στα σημεία ισορροπίας $y_e = \{-2, 0, 2\}$ παρατηρείται πως η λύση απομακρύνεται από αριστερά και δεξιά. Συνεπώς, διαπιστώνεται πως τα σημεία αυτά είναι Ασταθή.



Σχήμα 1: Πεδίο Φάσεων Συνάρτησης.

Άσκηση 4

Έχουμε την εξής διαφορική εξίσωση

$$y' = y^2(y^2-1)(y^2-4)$$

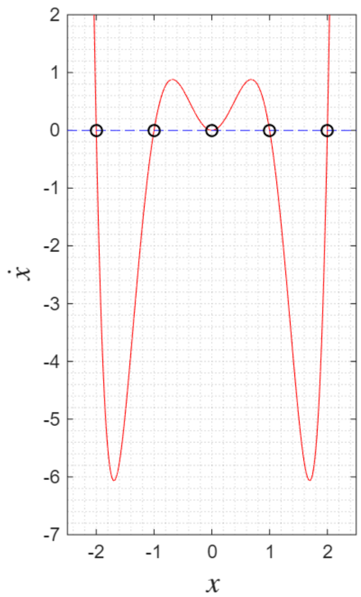
Αρχικά, θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας της παραπάνω σχέσης. Θέτουμε την παράγωγο ίση με μηδέν και προκύπτουν τα σημεία ισορροπίας:

$$y_{e_1} = -2,\ y_{e_2} = -1,\ y_{e_3} = 0,\ y_{e_4} = 1,\ y_{e_5} = 2,$$

Κάνοντας χρήση της ανάλυσης προσήμου για την συγκεκριμένη εξίσωση, μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά των σημείων ισορροπίας. Οπότε, έχουμε ότι:

1. Αν $y(t) < -2$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -2$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$
2. Αν $-2 < y(t) < -1$, τότε $y'(t) < 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -2$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -1$
3. Αν $-1 < y(t) < 0$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -1$
4. Αν $0 < y(t) < 1$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$
5. Αν $1 < y(t) < 2$, τότε $y'(t) < 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$
6. Αν $y(t) > 2$, τότε $y'(t) > 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$

Αναλυτικά μπορούμε να δούμε και τα πρόσημα της λύσης στο σχήμα 2. Αυτό που παρατηρούμε από την ανάλυση προσήμου είναι πως τα σημεία ισορροπίας $y_e = \{-1, 0, 1\}$ είναι Ασταθή, διότι η λύση απομακρύνεται από αυτα τα σημεία. Αντιθέτως, στα σημεία ισορροπίας $y_e = \{-2, 2\}$ παρατηρείται πως η λύση έλκεται από αριστερά και δεξιά. Συνεπώς, διαπιστώνεται πως τα σημεία αυτά είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθή.



Σχήμα 2: Πεδίο Φάσεων Συνάρτησης.

Άσκηση 5

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = 7x + 10y + 3 \\ y' = -5x - 7y + 1 \end{cases}$$

Αρχικά, θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε τα $x' = 0$, $y' = 0$. Οπότε, θα προκύψει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} 0 = 7x + 10y + 3 \\ 0 = -5x - 7y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 10y = -3 \\ -5x - 7y = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (31, -22)$$

Το $(x, y) = (31, -22)$ αποτελεί στάσιμο σημείο του παραπάνω συστήματος. Το επόμενο βήμα είναι να το φέρουμε σε μορφή Cauchy και να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

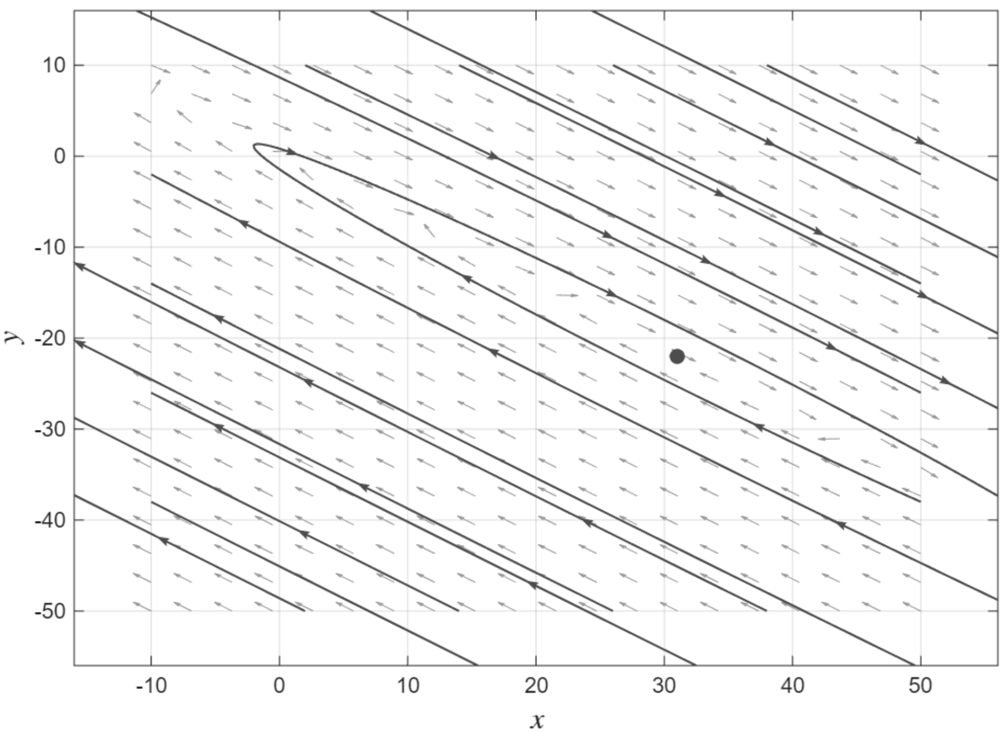
Το ίχνος του πίνακα A είναι $tr(A) = 7-7 = 0$ και η ορίζουσά του είναι $det(A) = 7(-7) - 10(-5) = 1$. Οπότε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω συστήματος είναι:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι:

$$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, -3)$$

Από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου προκύπτουν μία μηδενική και μία αρνητική. Συνεπώς, το παραπάνω στάσιμο σημείο που υπολογίστηκε αποτελεί σημείο Ευστάθειας. Το τελευταίο βήμα είναι να εξετάσουμε το είδος του σημείου. Η διακρίνουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχει τιμή $\Delta = tr(A)^2 - 4det(A) = 0 - 4 * 1 = -4 < 0$. Επειδή η διακρίνουσα είναι αρνητική και το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι μηδέν, τότε το στάσιμο σημείο που υπολογίστηκε προηγουμένος αποτελεί κέντρο. Στο σχήμα 3 βλέπουμε το πορτραίτο φάσεων του παραπάνω συστήματος. Παρατηρούμε πως το σημείο $(x, y) = (31, -22)$ αποτελεί κέντρο του συστήματος.



Σχήμα 3: Πορτραίτο Φάσεων Συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Άσκηση 6

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = -9x + 18y \\ y' = -3x + 6y \end{cases}$$

Αρχικά, θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε τα $x' = 0$, $y' = 0$. Οπότε, θα προκύψει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{cases} 0 = -9x + 18y \\ 0 = -3x + 6y \end{cases} \Rightarrow 2y = x$$

Η ευθεία $2y = x$ περιέχει όλα τα στάσιμα σημεία του παραπάνω συστήματος. Το επόμενο βήμα είναι να το φέρουμε σε μορφή Cauchy και να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 18 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

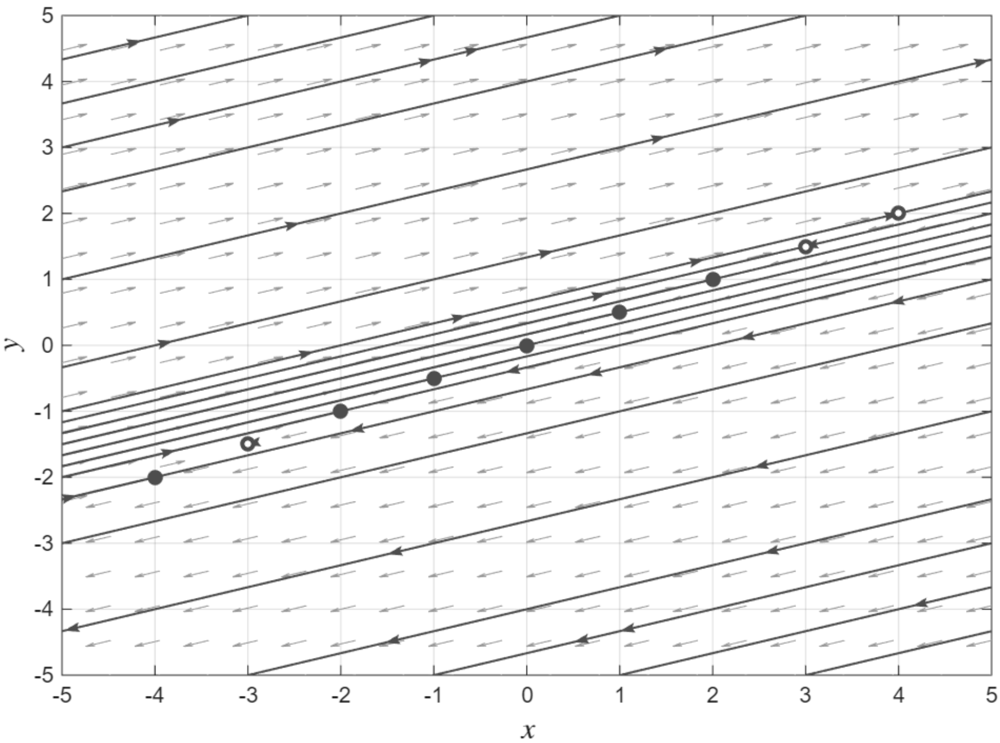
Το ίχνος του πίνακα A είναι $tr(A) = -9+6 = -3$ και η ορίζουσά του είναι $det(A) = -9*6-(-5)*3 = 0$. Οπότε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω συστήματος είναι:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι:

$$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (i, -i)$$

Από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου προκύπτουν δύο συζηγείς μιγαδικές. Συνεπώς, οι λύσεις του παραπάνω συστήματος θα συγκλίνουν πάνω στην ευθεία και μάλιστα ασυμπτωτικά. Στο σχήμα 4 βλέπουμε το πορτραίτο φάσεων του παραπάνω συστήματος. Παρατηρούμε πως τα στάσιμα σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $2y = x$.



Σχήμα 4: Πορτραίτο Φάσεων Συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Άσκηση 7

Έστω πως έχουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t)-x_0) + b(y(t)-y_0) \\ y'(t) = c(x(t)-x_0) + d(y(t)-y_0) \end{cases}$$

Θα γράψουμε το παραπάνω σύστημα σε μορφή Cauchy, για να εξετάσουμε το σημείο (x_0, y_0).

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t)-x_0 \\ y(t)-y_0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος θα θέσουμε το διάνυσμα της παραγώγου ίσο με το μηδέν. Συνεπώς, οι λύσεις του ομογενούς συστήματος $Az = 0$ θα μας δώσει τα κρίσιμα σημεία. Οπότε, θα εξετάσουμε τις ιδιότητες του πίνακα A.

- Αν η $det(A) = ad - bc \neq 0$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση $z = 0$. Συνεπώς, το σημείο (x_0, y_0) αποτελεί το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

- Αν η $det(A) = ad - bc = 0$, τότε ο πίνακας A έχει μη μηδενικό πυρήνα, δηλαδή υπάρχει $z \neq 0$ για το οποίο ισχύει $Az = 0$. Με αποτέλεσμα να υπάρχουν άπειρα κρίσιμα σημεία. Οπότε, το σημείο (x_0, y_0) δεν αποτελεί το μοναδικό κρίσιμο σημείο

Συνεπώς, προκύπτει πως το $ad-bc \neq 0$ αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το το σημείο (x_0, y_0) μοναδικό.

Άσκηση 8

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = x(1+x-2y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$$

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τα κρίσιμα σημεία του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε $(x', y') = (0, 0)$:

$$\begin{cases} 0 = x(1+x-2y) \\ 0 = y(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x + x^2 - 2xy \\ y = 0 \;\; \eta \;\; x = 1 \end{cases}$$

Για $x = 1$ προκύπτει το σημείο $(x, y) = (1, 1)$. Τώρα θα εξεταστεί και η άλλη περίπτωση που το $y = 0$. Οπότε έχουμε:

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; \eta \;\; x = -1$$

Οπότε, προέκυψαν τρία σημεία ισορροπίας για το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Θα εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το κάθε σημείο ισορροπίας για να εξετάσουμε το είδος του σημείου, αλλά και την ευστάθειά του.

Έστω πως έχουμε το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (0, 0)$. Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = 1, \;\; , b = 0, \;\; , c = 0, \;\; , d = -1$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \;\; y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{f(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} r(\cos^2(\vartheta) - \sin(2\vartheta)) = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{g(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} \tfrac{r\sin(2\vartheta)}{2} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (0, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Καθώς ο πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα αποτελούν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου. Οπότε, το $\lambda_1 = 1$ και το $\lambda_2 = -1$. Επιπλέον, το $p = a + d = 1 - 1 = 0$ και το $\Delta = tr(A)^2 - 4det(A) = 4 > 0$. Αρχικά, έχουμε πως το σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές, διότι υπάρχει θετική ιδιοτιμή. Επιπλέον, με τον υπολογισμό των p, Δ διαπιστώνουμε πως το σημείο αυτό αποτελεί Άστρο.

Έστω πως έχουμε το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (-1, 0)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x + 1, \;\; y_1 = y$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 - 1)(1 + x_1 - 1 - 2y_1) \\ y_1' = y_1(x_1 - 1 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = -x_1 + y_1^2 + x_1^2 - 2x_1y_1 \\ y_1' = -2y_1 + x_1y_1 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = 1, \; , b = 2, \; , c = 0, \; , d = -2$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \;\; y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} r(1 - \sin(2\vartheta)) = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r\sin(2\vartheta)}{2} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (-1, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Καθώς ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα αποτελούν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου. Οπότε, το $\lambda_1 = -1$ και το $\lambda_2 = -2$. Επιπλέον, το $p = a + d = -1 - 1 = -2 < 0$, το $\Delta = tr(A)^2 - 4det(A) = 2 > 0$ και το $q = ad - bc = (-1) * (-2) - 2 * 0 = 2 > 0$. Αρχικά, έχουμε πως το σημείο ισορροπίας είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές, διότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές. Επίσης, ο πίνακας A είναι Hurwitz. Επιπλέον, με τον υπολογισμό των p, Δ διαπιστώνουμε πως το σημείο αυτό αποτελεί Κόμβος.

Έστω πως έχουμε το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (1, 1)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_2 = x - 1, \;\; y_2 = y - 1$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_2' = (x_2 - 1)(1 + x_2 - 1 - 2(y_2 - 1)) \\ y_2' = (y_2 - 1)(x_1 - 1 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2' = x_2 + 2y_1 + x_2^2 - 2x_2y_2 - 2 \\ y_2' = -x_2 - 2y_2 + x_2y_2 + 2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = 1, \ ,b = 2, \ ,c = -1, \ ,d = -2$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} r(\cos^2(\vartheta) - \sin(2\vartheta)) = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r\sin(2\vartheta)}{2} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (-1, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα τπυ πίνακα A είναι $q = det(A) = 1 * (-2) - 2 * (-1) = -2 + 2 = 0$. Το ίχνος του πίνακα είναι $p = tr(A) = 1 - 2 = -1 < 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που θα προκύψει είναι το εξής:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

Θέτοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίσο με μηδέν, θα προκύψουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -1$. Επιπλέον, το $\Delta = 1 - 4 * 0 = 1 > 0$. Αρχικά, καθώς υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή, τότε το σημείο είναι Ασταθές. Επιπλέον, αφού το $q = 0$, $p < 0$ και $\Delta > 0$, τότε το σημείο είναι Εστία.

Άσκηση 9

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = \sin(y) \\ y' = -\sin(x) \end{cases}$$

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε $(x', y') = (0, 0)$. Οπότε, έχουμε ότι

$$\begin{cases} 0 = \sin(y) \\ 0' = -\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = n\pi, & n \in \mathbf{Z} \\ y = m\pi, & m \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Επομένως, γύρω από τα σημεία $(n\pi, m\pi)$ θα εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση με χρήση του παραπάνω αναπτύγματος. Επομένως, θα υπολογίσουμε την Ιακωβιανή Μήτρα του παραπάνω συστήματος.

$$J[f, g] = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(y) \\ -\sin(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, στο στα σημεία $(n\pi, m\pi)$ ο πίνακας θα γίνει:

$$J[f, g](n\pi, m\pi) = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^m \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα έχει τιμή $det(J[f, g](n\pi, m\pi)) = -(-1)^{n+m+1}$. Επιπλέον, το $p = 0$. Οπότε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προκύπτει είναι:

$$\lambda^2 - 0\lambda - (-1)^{n+m+1} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = (-1)^{n+m+1}$$

Έστω ότι το $n + m = 2k$. τότε θα προκύψει $\lambda^2 = (-1)^{2k+1}$. Καθώς η δύναμη είναι περιττή τότε το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικό. Οπότε, θα προκύψουν δύο συζηγές μιγαδικές ιδιοτιμές, με αποτέλεσμα να έχουμε Ευστάθεια. Επιπλέον, παρατηρούμε πως αυτά είναι και κέντρα.

Έστω ότι το $n + m = 2k + 1$. τότε θα προκύψει $\lambda^2 = (-1)^{2(k+1)}$. Καθώς η δύναμη είναι άρτια τότε το αποτέλεσμα θα είναι θετικά. Οπότε, θα προκύψει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, με αποτέλεσμα να έχουμε Αστάθεια. Επιπλέον, παρατηρούμε πως αυτά είναι και σάγματα.

Άσκηση 10

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - 6y^2) \\ y' = y(1 - 3x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος. Θέτουμε $(x', y') = (0, 0)$. Οπότε, έχουμε ότι

$$\begin{cases} 0 = x(1 - x^2 - 6y^2) \\ 0 = y(1 - 3x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

Αρχικά προκύπτει το $x = 0$ ή $y = 0$. Συνεπώς έχουμε ως πρώτο σημείο ισορροπίας το $(0, 0)$. Αν μόνο το $x = 0$, τότε από τη δεύτερη σχέση προκύπτει πως το $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Στην περίπτωση που μόνο το $y = 0$, τότε το $x = \pm 1$. Σε διαφορετική περίπτωση, λύνουμε το παρπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και προκύπτουν τα σημεία $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$.
Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = 1, \ , b = 0, \ , c = 0, \ , d = 1$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^3(\vartheta) - 6\sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)) = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = \lim_{r\to 0} r^2(-3\cos^3(\vartheta)\sin(\vartheta) - 3\sin^3(\vartheta)) = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (0, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι διαγώνιος, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς είναι ίδιες και θετικές, προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 0$. Το $q = 1 > 0$ και το $p = 2 > 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Κόμβο.
Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = (1, 0)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x - 1, \ \ y_1 = y$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_1^3 + 3x_1^2 - 6y_1^2x_1 - 6y_1^2 + 2 \\ y_1' = -2y_1 - 3x_1^2y_1 - 6x_1y_1 - 3y_1^3 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -2, \ , b = 0, \ , c = 0, \ , d = -2$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (1, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι διαγώνιος, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητικές, τότε προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 0$. Το $q = 4 > 0$ και το $p = 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Κόμβο.
Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = (-1, 0)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x + 1, \;\; y_1 = y$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_1^3 - 3x_1^2 - 6y_1^2 x_1 - 6y_1^2 \\ y_1' = -2y_1 - 3x_1^2 y_1 - 6x_1 y_1 - 3y_1^3 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -2, \; ,b = 0, \; ,c = 0, \; ,d = -2$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \;\; y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (-1, 0)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι διαγώνιος, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητικές, τότε προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 0$. Το $q = 4 > 0$ και το $p = 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Κόμβο.
Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x, \;\; y_1 = y - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_1^3 - 6y_1^2 x_1 - 4\sqrt{3} y_1 x_1 \\ y_1' = -\frac{2}{\sqrt{3}} y_1 - 3y_1^3 - \sqrt{3} y_1^2 - \sqrt{3} x_1^2 - 3x_1^2 y_1 - 2y_1^2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -1, \; ,b = 0, \; ,c = 0, \; ,d = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \;\; y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι διαγώνιος, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητικές, τότε προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 0.02 > 0$. Το $q = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ και το $p = \frac{-3-\sqrt{3}}{3} < 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Κόμβο.

Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x, \ \ y_1 = y + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_1^3 - 6y_1^2 x_1 + 4\sqrt{3} y_1 x_1 \\ y_1' = -4y_1 + 3y_1^3 + \sqrt{3} y_1^2 + \sqrt{3} x_1^2 - 3x_1^2 y_1 + 4\sqrt{3} y_1^2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -1, \ ,b = 0, \ ,c = 0, \ ,d = -4$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι διαγώνιος, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητικές, τότε προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 9 > 0$. Το $q = -5 < 0$ και το $p = 4 > 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Κόμβο.

Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x + \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \ y_1 = y + \sqrt{\frac{2}{15}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = \left(\frac{2}{5} + 6\sqrt{\frac{2}{15}}\right) x_1 + \frac{6}{\sqrt{5}} y_1 - x_1^3 + \frac{3}{\sqrt{5}} \chi_1^2 - 6y_1 x_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 - 6\sqrt{\frac{2}{15}} \\ y_1' = -\frac{4}{5} y_1 - 3y_1^3 - 9\sqrt{\frac{2}{15}} y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}} x_1 y_1 - 3x_1^2 y_1 + 3\left(\sqrt{\frac{2}{15}}\right)^3 - \sqrt{\frac{2}{15}} \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = \frac{2}{5} + 6\sqrt{\frac{2}{15}}, \ ,b = \frac{6}{\sqrt{5}}, \ ,c = 0, \ ,d = -\frac{4}{5}$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + 6\sqrt{\frac{2}{15}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας A που προκύπτει είναι άνω τριγωνικός, με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Καθώς υπάρχει θετική ιδιοτιμή στον πίνακα, τότε προκύπτει πως το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές. Επιπλέον, το $\Delta = 10.2041 > 0$. Το $q = 1.79 > 0$ και το $p = -1.75 < 0$. Συνεπώς το παρών σημείο ισορροπίας αποτελεί Σάγμα.

Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x - \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \ y_1 = y + \sqrt{\frac{2}{15}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = 12\sqrt{\frac{2}{75}}y_1 - x_1^3 + \frac{1}{\sqrt{5}}x_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}y_1^2 - 6y_1^2x_1 + 12\sqrt{\frac{2}{15}}y_1x_1 - 2\sqrt{5} \\ y_1' = 6\sqrt{\frac{2}{75}}x_1 - 6\sqrt{\frac{2}{15}}y_1 - 3y_1^3 - 9\sqrt{\frac{2}{15}}y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1y_1 - 3x_1y_1^2 - 3\sqrt{\frac{2}{15}}x_1^2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = 0, \ ,b = 12\sqrt{\frac{2}{75}}, \ ,c = 6\sqrt{\frac{2}{75}}, \ ,d = -6\sqrt{\frac{2}{15}}$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta), \ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \tfrac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12\sqrt{\frac{2}{75}} \\ 6\sqrt{\frac{2}{75}} & -6\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Αρχικά, το $q = tr(A) = 2.19 > 0$ και το $p = det(A) = -1.92 < 0$. Επίσης, το $\Delta = 12.48 > 0$. Οπότε, οι ιδιοτιμές που θα προκύψουν είναι $\lambda_1 = 2.86$ και $\lambda_2 = -0.67$. Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες και άνισες. Επιπλέον, παρατηρούμε πως μία ιδιοτιμή είναι θετική. Συνεπώς το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές. Επιπλέον, αποτελεί και Σάγμα.

Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x + \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ y_1 = y - \sqrt{\frac{2}{15}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{2}{5}x_1 + 18\sqrt{\frac{2}{75}}y_1 - x_1^3 + \frac{3}{\sqrt{5}}x_1^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}y_1^2 - 6y_1^2x_1 - 18\sqrt{\frac{2}{15}}y_1x_1 \\ y_1' = 6\sqrt{\frac{2}{15}}x_1 - 6\sqrt{\frac{2}{15}}y_1 - 3y_1^3 - 9\sqrt{\frac{2}{15}}y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1y_1 - 3\sqrt{\frac{2}{15}}x_1^2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -\frac{2}{5},\ \ ,b = 18\sqrt{\frac{2}{75}},\ \ ,c = 6\sqrt{\frac{2}{15}},\ \ ,d = -6\sqrt{\frac{2}{15}}$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta),\ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 18\sqrt{\frac{2}{75}} \\ 6\sqrt{\frac{2}{15}} & -6\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Αρχικά, το $q = tr(A) = -13.54 < 0$ και το $p = det(A) = -33.29676 < 0$. Επίσης, το $\Delta = 316.522 > 0$. Οπότε, οι ιδιοτιμές που θα προκύψουν είναι $\lambda_1 = 2.125$ και $\lambda_2 = -15.665$. Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες και άνισες. Επιπλέον, παρατηρούμε πως μία ιδιοτιμή είναι θετική. Συνεπώς το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές. Επιπλέον, αποτελεί και Σάγμα.

Έστω ότι γραμμικοπούμε γύρω από το σημείο $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Θα μετασχηματίσουμε το υπάρχον σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως εξής:

$$x_1 = x - \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ y_1 = y - \sqrt{\frac{2}{15}}$$

Τότε, το νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει είναι τα εξής:

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{2}{5}x_1 - 18\sqrt{\frac{2}{75}}y_1 - x_1^3 - \frac{3}{\sqrt{5}}x_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}y_1^2 - 6y_1^2x_1 - 18\sqrt{\frac{2}{15}}y_1x_1 \\ y_1' = -6\sqrt{\frac{2}{75}}x_1 - \frac{18}{15}y_1 - 3y_1^3 - 3\sqrt{\frac{2}{15}}x_1^2 - 6\sqrt{\frac{2}{15}}y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1y_1 - 3y_1x_1^2 \end{cases}$$

Τότε από τη θεωρία προκύπτει πως τα $a = -\frac{2}{5},\ \ ,b = -18\sqrt{\frac{2}{75}},\ \ ,c = -6\sqrt{\frac{2}{75}},\ \ ,d = -\frac{18}{15}$. Επιπλέον, θέτοντας $x = r\cos(\vartheta),\ \ y = r\sin(\vartheta)$ θα μετασχηματίσουμε τους μη γραμμικούς όρους για να εξετάσουμε τα όριά τους.

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x,y)}{r} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{g(x,y)}{r} = 0$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Το γραμμικό σύστημα το οποίο προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -18\sqrt{\frac{2}{75}} \\ -6\sqrt{\frac{2}{75}} & -\frac{18}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Αρχικά, το $q = tr(A) = -1.6 < 0$ και το $p = det(A) = -2.4 < 0$. Επίσης, το $\Delta = 12.16 > 0$. Οπότε, οι ιδιοτιμές που θα προκύψουν είναι $\lambda_1 = 0.4$ και $\lambda_2 = -2.54$. Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες και άνισες. Επιπλέον, παρατηρούμε πως μία ιδιοτιμή είναι θετική. Συνεπώς το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι Ασταθές. Επιπλέον, αποτελεί και Σάγμα.

Άσκηση 11

Έστω η οικογένεια των συστημάτων

$$\begin{cases} x' = X\cos\omega - Y\sin\omega, \\ y' = X\sin\omega + Y\cos\omega, \end{cases} \qquad X = ax + by,\ Y = cx + dy,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Θα μελετήσουμε το στάσιμο σημείο $(0,0)$ καθώς το ω μεταβάλλεται στο $[0,\pi]$.

Θέτουμε

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad R(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}.$$

Τότε το σύστημα γράφεται:

$$z' = R(\omega)Az,$$

οπότε ο πίνακας του συστήματος είναι $M(\omega) = R(\omega)A$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα:

$$\det M(\omega) = \det R(\omega) \cdot \det A = 1 \cdot (ad - bc) = ad - bc,$$

άρα η ορίζουσα δεν εξαρτάται από το ω.Το ίχνος είναι:

$$\mathrm{tr}(M(\omega)) = (a+d)\cos\omega + (b-c)\sin\omega.$$

Θέτουμε $T = a + d$, $S = b - c$, ώστε:

$$\tau(\omega) = T\cos\omega + S\sin\omega.$$

Η ποσότητα αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$\tau(\omega) = R\cos(\omega - \varphi), \qquad R = \sqrt{T^2 + S^2} = \sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2},$$

οπότε καθώς $\omega \in [0,\pi]$, η $\tau(\omega)$ λαμβάνει όλες τις τιμές του διαστήματος $[-R,R]$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - \tau(\omega)\lambda + \det A = 0,$$

και η διακρίνουσα:

$$\Delta(\omega) = \tau(\omega)^2 - 4\det A.$$

Υποθέτουμε $\det A = ad - bc > 0$, ώστε το σύστημα να επιτρέπει κόμβους, έστιες και κέντρο. Καθώς η $\tau(\omega)$ μεταβάλλεται συνεχώς στο $[-R,R]$, διασχίζει διαδοχικά τις τιμές:

$$-2\sqrt{\det A}, \quad 0, \quad 2\sqrt{\det A},$$

οπότε το είδος του κρίσιμου σημείου αλλάζει ως εξής:

- Αν $\tau(\omega) < -2\sqrt{\det A} \ \Rightarrow\ \Delta > 0,\ \tau < 0 \ \Rightarrow$ Κόμβος ΑΕ.
- Αν $-2\sqrt{\det A} < \tau(\omega) < 0 \ \Rightarrow\ \Delta < 0,\ \tau < 0 \ \Rightarrow$ Εστία ΑΕ.
- Αν $\tau(\omega) = 0 \ \Rightarrow\ \Delta < 0 \ \Rightarrow$ Κέντρο Ε.
- Αν $0 < \tau(\omega) < 2\sqrt{\det A} \ \Rightarrow\ \Delta < 0,\ \tau > 0 \ \Rightarrow$ Εστία Α.
- Αν $\tau(\omega) > 2\sqrt{\det A} \ \Rightarrow\ \Delta > 0,\ \tau > 0 \ \Rightarrow$ Κόμβος Α.

Καθώς το ω αυξάνεται από 0 έως π, το σημείο $(0,0)$ περνά διαδοχικά από:

$$\boxed{\text{Κόμβος ΑΕ} \longrightarrow \text{Εστία ΑΕ} \longrightarrow \text{Κέντρο Ε} \longrightarrow \text{Εστία Α} \longrightarrow \text{Κόμβος Α.}}$$

Άσκηση 12

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.

$$\begin{cases} x' = \sin y, \\ y' = -2x - 3y, \end{cases} \qquad V(x,y) = 15x^2 + 6xy + 3y^2.$$

Υπολογίζουμε

$$\partial_x V = 30x + 6y, \qquad \partial_y V = 6x + 6y,$$

οπότε

$$\dot{V} = (30x + 6y)\sin y + (6x + 6y)(-2x - 3y).$$

Γράφουμε την ανάπτυξη $\sin y = y + R(y)$ με $R(y) = \mathcal{O}(y^3)$. Ο δευτεροβάθμιος όρος είναι

$$(30x + 6y)y + (6x + 6y)(-2x - 3y) = -12(x^2 + y^2),$$

οπότε

$$\dot{V} = -12(x^2 + y^2) + (30x + 6y)R(y).$$

Υπάρχει $r > 0$ και $C > 0$ τέτοια ώστε για $\|(x,y)\| < r$ έχουμε $|R(y)| \leq C\|(x,y)\|^3$, άρα το υπόλοιπο είναι $O(\|(x,y)\|^3)$ και επομένως για μικρό r γίνεται μικρότερο από $6\|(x,y)\|^2$. Συνεπώς για $\|(x,y)\| < r$ ισχύει

$$\dot{V} \leq -6(x^2 + y^2).$$

Επομένως V είναι θετικά ορισμένη τοπικά και $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη τοπικά, οπότε $(0,0)$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές (AE)**.

Άσκηση 13

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.

$$\begin{cases} x' = -x + 6y, \\ y' = 4x + y, \end{cases} \qquad V(x,y) = 3x^2 + 14xy + 8y^2.$$

Υπολογίζουμε

$$\partial_x V = 6x + 14y, \qquad \partial_y V = 14x + 16y,$$

οπότε

$$\dot{V} = (6x + 14y)(-x + 6y) + (14x + 16y)(4x + y).$$

Απλοποιώντας παίρνουμε

$$\dot{V} = 50x^2 + 100xy + 100y^2 = 50\big(x^2 + 2xy + 2y^2\big).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ ισχύει $\dot{V} > 0$ (το πολυώνυμο $x^2 + 2xy + 2y^2$ είναι θετικά ορισμένο). Συνεπώς V αυξάνεται κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς που ξεκινά κοντά στο 0, άρα $(0,0)$ είναι **ασταθές (A)**.

Άσκηση 14

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.

$$\begin{cases} x' = -x^3, \\ y' = -x^2 y, \end{cases} \qquad V(x,y) = x^2 + y^2.$$

Υπολογίζουμε
$$\dot V = 2x(-x^3) + 2y(-x^2y) = -2x^2(x^2+y^2) \le 0.$$
Το V είναι θετικά ορισμένο και $\dot V \le 0$. Το σύνολο όπου $\dot V = 0$ είναι $\{x=0\}$, το οποίο περιέχει σημεία με $y \neq 0$ που δεν συγκλίνουν στο 0. Επομένως με το θεώρημα Lyapunov το $(0,0)$ είναι **ευσταθές (Ε)** αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Άσκηση 15

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.
$$\begin{cases} x' = y^2 - x^2, \\ y' = 2xy, \end{cases} \qquad V(x,y) = 3xy^2 - x^3.$$
Υπολογίζουμε
$$\partial_x V = 3y^2 - 3x^2, \qquad \partial_y V = 6xy,$$
οπότε
$$\dot V = (3y^2-3x^2)(y^2-x^2) + (6xy)(2xy).$$
Απλοποιώντας:
$$\dot V = 3(y^2-x^2)^2 + 12x^2y^2 = 3(x^2+y^2)^2 \ge 0,$$
και $\dot V > 0$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Επομένως V αυξάνεται σε κάθε μη-μηδενική τροχιά κοντά στο 0, άρα $(0,0)$ είναι **ασταθές (Α)**.

Άσκηση 16

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.
$$\begin{cases} x' = -(1-y)\,x, \\ y' = -(1-x)\,y, \end{cases} \qquad V(x,y) = x^2 + y^2.$$
Υπολογίζουμε
$$\dot V = 2xx' + 2yy' = -2(1-y)x^2 - 2(1-x)y^2 = -2(x^2+y^2) + 2xy(x+y).$$
Θέτουμε $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Έχουμε $2|xy(x+y)| \le 2|x||y|(|x|+|y|) \le 2r^3$. Επομένως
$$\dot V \le -2r^2 + 2r^3 = -2(1-r)r^2 = -2(1-r)V.$$
Για κάθε $r \in (0,1)$ ο παράγοντας $2(1-r) > 0$, άρα στο δίσκο $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ ισχύει $\dot V \le -cV$ με $c = 2(1-r) > 0$. Συμπέρασμα: το 0 είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. $S = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

Άσκηση 17

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.
$$\begin{cases} x' = (x-a)x, \\ y' = (y-b)y, \end{cases} \qquad a>0,\ b>0, \qquad V(x,y) = \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2.$$
Υπολογίζουμε
$$\dot V = \frac{2x}{a^2}x' + \frac{2y}{b^2}y' = \frac{2x^2}{a^2}(x-a) + \frac{2y^2}{b^2}(y-b).$$

Αν περιοριστούμε στην έλλειψη $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1$ τότε $|x| < a$ και $|y| < b$, άρα $x - a < 0$ και $y - b < 0$. Συνεπώς κάθε όρος της $\dot{V}$ είναι αρνητικός εκτός του σημείου 0, και υπάρχουν σταθερές $c > 0$, $\rho > 0$ τέτοιες ώστε για $\|(x, y)\| < \rho$ ισχύει $\dot{V} \leq -cV$. Άρα το 0 είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. $S = \{(x, y) : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$.

Άσκηση 18

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων και η προτεινόμενη συνάρτηση Lyapunov.

$$\begin{cases} x' = y - x(1 - r^2)(r^2 + 1), \\ y' = -x - y(1 - r^2)(r^2 + 1), \end{cases} \qquad r^2 := x^2 + y^2, \qquad V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Υπολογίζουμε

$$\dot{V} = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2x^2F - 2xy - 2y^2F = -2r^2F,$$

όπου $F = (1 - r^2)(r^2 + 1)$. Άρα

$$\dot{V} = -2r^2(1 - r^2)(r^2 + 1).$$

Για $r^2 < 1$ έχουμε $(1 - r^2) > 0$ και $(r^2 + 1) > 0$, οπότε $\dot{V} < 0$ για κάθε $r \in (0, 1)$. Συνεπώς το 0 είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές και μπορούμε να πάρουμε ως πεδίο έλξης $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Βιβλιογραφία

[1] Ν. Μ. Σταυρακάκης. *Διαφορικές εξισώσεις: Συνήθεις Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. 3η Έκδοση. Εκδόσεις Τσότρας, 2019.

[2] Yu Zhang. *Phase Portrait Plotter on 2D phase plane*. MATLAB Central File Exchange, 2025. URL: `https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/110785-phase-portrait-plotter-on-2d-phase-plane`.