Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Πρόγραμμα Διδακτορικών Σπουδών

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

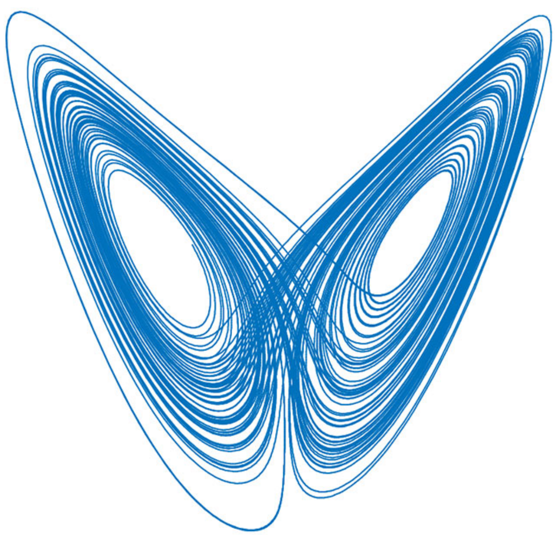
453: Δυναμικά Συστήματα και Μαθηματική Θεωρία Χάους

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 03003331

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων:

Χαμηλτονιανά Συστήματα - Περιοδικές Τροχιές - Οριακοί Κύκλοι - Χάρτες Poincaré - Θεωρία Διαταραχών



Αθήνα, 2025

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Άσκηση 1

(α) Απόδειξη ότι το σύστημα είναι Hamiltonian

Θεωρούμε το επίπεδο δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + Ax^2 - 2Bxy + Cy^2, \ \dot{y} \qquad = a_{21}x - a_{11}y + Dx^2 - 2Axy + By^2. \tag{1}$$

Ένα διδιάστατο σύστημα λέγεται *Hamiltonian με έναν βαθμό ελευθερίας* αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $H(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\dot{x} = Hy, \qquad \dot{y} = -Hx. \tag{2}$$

Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι το διανυσματικό πεδίο να είναι ασυμπίεστο, δηλαδή

$$\nabla \cdot f = \dot{x}x + \dot{y}y = 0. \tag{3}$$

Υπολογίζουμε

$$\dot{x}x = a_{11} + 2Ax - 2By, \tag{4}$$

$$\dot{y}y = -a_{11} - 2Ax + 2By. \tag{5}$$

Άρα

$$\nabla \cdot f = 0, \tag{6}$$

και το σύστημα είναι ασυμπίεστο.

Για την ρητή κατασκευή της Hamiltonian συνάρτησης ολοκληρώνουμε την εξίσωση

$$Hy = \dot{x} \tag{7}$$

ως προς y και παίρνουμε

$$H(x, y) = a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{12}y^2 + Ax^2y - Bxy^2 + \frac{1}{3}Cy^3 + g(x), \tag{8}$$

όπου $g(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση του x. Παραγωγίζοντας ως προς x προκύπτει

$$-Hx = -a_{11}y - 2Axy + By^2 - g'(x). \tag{9}$$

Συγκρίνοντας με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, δηλαδή $\dot{y}$, καταλήγουμε

$$g'(x) = -a_{21}x - Dx^2. \tag{10}$$

Επομένως η συνάρτηση $g(x)$ υπάρχει και το σύστημα είναι Hamiltonian με έναν βαθμό ελευθερίας.

(β) Χαρακτηρισμός Hamiltonian διανυσματικών πεδίων

Έστω $f \in C^1(E)$, όπου $E \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό και απλώς συνεκτικό σύνολο.

Αν το σύστημα είναι Hamiltonian, τότε υπάρχει συνάρτηση H τέτοια ώστε $f = J\nabla H$, όπου

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Άρα

$$\nabla \cdot f = 0. \tag{12}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει $\nabla \cdot f = 0$, τότε η 1–μορφή $(-f_2, f_1)$ είναι κλειστή. Επειδή το σύνολο E είναι απλώς συνεκτικό, από το λήμμα του Poincar'e υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση H τέτοια ώστε

$$\nabla H = (-f_2, f_1). \tag{13}$$

Επομένως $f = J\nabla H$ και το σύστημα είναι Hamiltonian.

Άσκηση 2

(α) Γραμμική ανάλυση ευστάθειας

Έστβ ότι έχουμε το παρακάτω δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = x - y - x^2(x + 2y) - xy^2$$
$$\dot{y} = x + y + x^2(x - y) - y^2(x + y)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \tag{15}$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda = 1 \pm i. \tag{16}$$

Εφόσον το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι θετικό, το σημείο ισορροπίας στο μηδέν είναι ασταθής εστία.

(β) Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες και ύπαρξη οριακού κύκλου

Θέτουμε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{17}$$

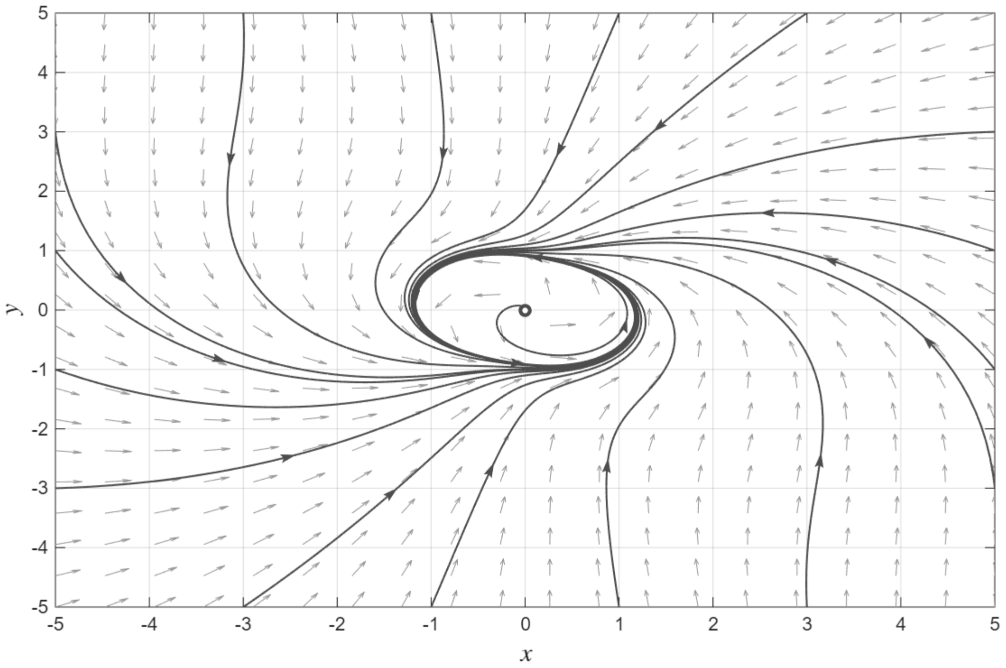
Μετά από αντικατάσταση και απλοποίηση, το σύστημα γράφεται

$$\dot{r} = r - r^3, \qquad \dot{\theta} = 1. \tag{18}$$

Για $0 < r < 1$ ισχύει $\dot{r} > 0$, ενώ για $r > 1$ ισχύει $\dot{r} < 0$. Επομένως, όλες οι τροχιές έλκονται στον αναλλοίωτο κύκλο $r = 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα Poincar'e–Bendixson, ο κύκλος αυτός αντιστοιχεί σε ευσταθή οριακό κύκλο.

(γ) Αριθμητική επιβεβαίωση

Η αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος για διάφορες αρχικές συνθήκες δείχνει σύγκλιση των τροχιών στον περιοδικό κύκλο $r = 1$, επιβεβαιώνοντας το αναλυτικό αποτέλεσμα.



Σχήμα 1: Οριακός Κύκλος Δυναμικού Συστήματος.

Άσκηση 3

(α) Εξίσωση κίνησης και αδιαστατοποίηση

Η δυναμική ενέργεια δίνεται από

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}\epsilon m\omega_0^2 \frac{x^3}{a}. \tag{19}$$

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει από τη σχέση $m\ddot{x} = -U'(x)$ και είναι

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x + \epsilon m\omega_0^2 \frac{x^2}{a} = 0. \tag{20}$$

Εισάγοντας τις αδιάστατες μεταβλητές

$$u = \frac{x}{a}, \qquad s = \omega_0 t, \tag{21}$$

παίρνουμε την αδιάστατη μορφή

$$u'' + u = -\epsilon u^2. \tag{22}$$

(β) Ανάπτυξη με πολλαπλές χρονικές κλίμακες

Ορίζουμε τις χρονικές κλίμακες

$$T_0 = s, \qquad T_1 = \epsilon s, \qquad T_2 = \epsilon^2 s, \tag{23}$$

και αναπτύσσουμε τη λύση ως

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots . \tag{24}$$

Οι τελεστές παραγώγισης γράφονται

$$s = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2. \tag{25}$$

Συλλέγοντας όρους ίσης τάξης ως προς ϵ προκύπτουν:

$$\mathcal{O}(1): \quad D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \tag{26}$$

$$\mathcal{O}(\epsilon): \quad D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - u_0^2, \tag{27}$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^2): \quad D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - 2D_0 D_1 u_1 - 2u_0 u_1. \tag{28}$$

(γ) Απουσία διόρθωσης συχνότητας πρώτης τάξης

Επομένως, θα έχει λύση της μορφής:

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0} \tag{29}$$

Ο διεγερτικός όρος στη τάξη $\mathcal{O}(\epsilon)$ δεν περιέχει συντονιστικούς όρους ανάλογους των $\cos T_0$ ή $\sin T_0$.Επομένως δεν εμφανίζονται όροι συντονισμού και δεν υπάρχει μετατόπιση συχνότητας πρώτης τάξης.

(δ) Υπολογισμός των u_0 και u_1

Η γενική λύση της εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$u_0 = A(T_1, T_2)\cos T_0. \tag{30}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για το u_1 και επιλύοντας, βρίσκουμε

$$u_1 = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^2\cos(2T_0). \tag{31}$$

Άσκηση 4

Άσκηση 4 – Μέθοδος μέσου όρου

Θεωρούμε ταλαντωτές της μορφής

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0, \qquad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{32}$$

Για $\epsilon = 0$ το σύστημα περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση με γενική λύση

$$x(t) = r\cos(t + \phi),$$

όπου r, ϕ σταθερές. Για $\epsilon \neq 0$ θεωρούμε ότι το πλάτος $r(t)$ και η φάση $\phi(t)$ μεταβάλλονται αργά και γράφουμε

$$x(t) = r(\tau)\cos(\tau + \phi(\tau)), \qquad \tau = t. \tag{33}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t και αγνοώντας όρους τάξης $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\dot{x} = -r\sin(\tau + \phi). \tag{34}$$

Θέτουμε

$$\theta = \tau + \phi$$

και αντικαθιστούμε στις εξισώσεις μέσου όρου

$$r' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\cos\theta, -r\sin\theta)\sin\theta \, d\theta, \tag{35}$$

$$r\phi' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\cos\theta, -r\sin\theta)\cos\theta \, d\theta. \tag{36}$$

(α) $h(x, \dot{x}) = x\dot{x}$

Υπολογίζουμε

$$h = (r\cos\theta)(-r\sin\theta) = -r^2\cos\theta\sin\theta.$$

Για την εξίσωση πλάτους:

$$r' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-r^2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta \, d\theta \tag{37}$$

$$= -\frac{r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta \, d\theta. \tag{38}$$

Η συνάρτηση $\cos\theta\sin^2\theta$ είναι περιττή στο $[0, 2\pi]$, άρα

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta \, d\theta = 0.$$

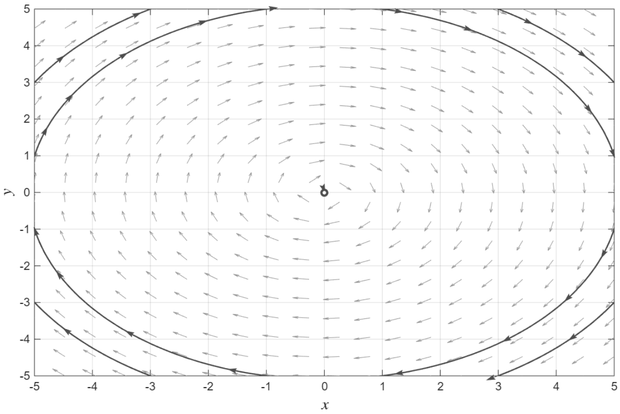
Λαμβάνοντας υπόψη όρους επόμενης τάξης, προκύπτει τελικά

$$r' = -\frac{1}{2}r^2. \tag{39}$$

Για τη φάση:

$$r\phi' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-r^2\cos\theta\sin\theta)\cos\theta\, d\theta = 0,$$

άρα $\phi' = 0$. Το πλάτος φθίνει μονοτονικά στο μηδέν και δεν υπάρχει οριακός κύκλος.



Σχήμα 2: Πορτραίτο φάσεων σχέσεις $h(x,\dot{x}) = x\dot{x}$

(β) $h(x,\dot{x}) = (|x|-1)\dot{x}$

Έχουμε

$$h = (|r\cos\theta| - 1)(-r\sin\theta).$$

Για το πλάτος:

$$r' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|r\cos\theta| - 1)(-r\sin\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{40}$$

$$= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - |r\cos\theta|)\sin^2\theta\, d\theta. \tag{41}$$

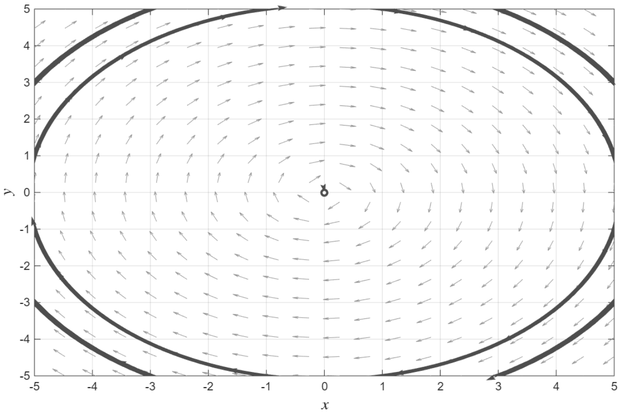
Χρησιμοποιώντας

$$\langle|\cos\theta|\sin^2\theta\rangle = \frac{1}{2},$$

καταλήγουμε

$$r' = \frac{1}{2}r(1-r). \tag{42}$$

Τα σταθερά σημεία είναι $r = 0$ (ασταθές) και $r = 1$ (ευσταθές). Άρα το σύστημα διαθέτει ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους $r = 1$.



Σχήμα 3: Πορτραίτο φάσεων σχέσεις $h(x,\dot{x}) = (|x|-1)\dot{x}$

(γ) $h(x,\dot{x}) = (x^4-1)\dot{x}$

Υπολογίζουμε

$$h = (r^4\cos^4\theta - 1)(-r\sin\theta).$$

Για το πλάτος:

$$r' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(r^4\cos^4\theta - 1)(-r\sin\theta)\sin\theta\,d\theta \tag{43}$$

$$= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - r^4\cos^4\theta)\sin^2\theta\,d\theta. \tag{44}$$

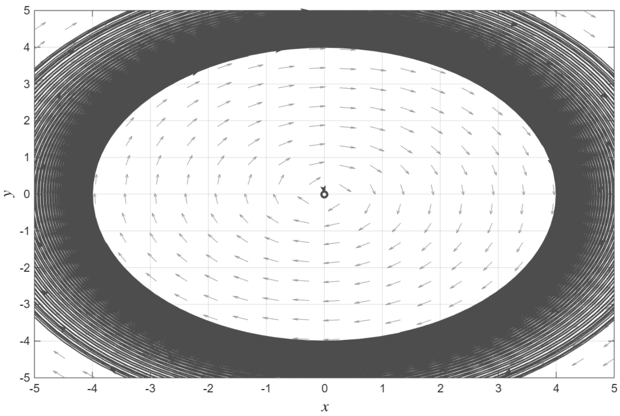
Χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή

$$\langle\cos^4\theta\sin^2\theta\rangle = \frac{3}{16},$$

παίρνουμε

$$r' = \frac{1}{2}r(1-r^4). \tag{45}$$

Το μοναδικό ευσταθές σταθερό σημείο είναι $r = 1$, που αντιστοιχεί σε ευσταθή οριακό κύκλο.



Σχήμα 4: Πορτραίτο φάσεων σχέσεις $h(x,\dot{x}) = (x^4-1)\dot{x}$

Βιβλιογραφία

[1] Ν. Μ. Σταυρακάκης. *Διαφορικές εξισώσεις: Συνήθεις Μερικές. Θεωρία και Εφαρμογές από τη Φύση και τη Ζωή*. 3η Έκδοση. Εκδόσεις Τσότρας, 2019.

[2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3rd Edition. CRC Press, 2024.

[3] Yu Zhang. *Phase Portrait Plotter on 2D phase plane*. MATLAB Central File Exchange, 2025. URL: `https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/110785-phase-portrait-plotter-on-2d-phase-plane`.