



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων μηχανικών

ΔΠΜΣ Συστήματα αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

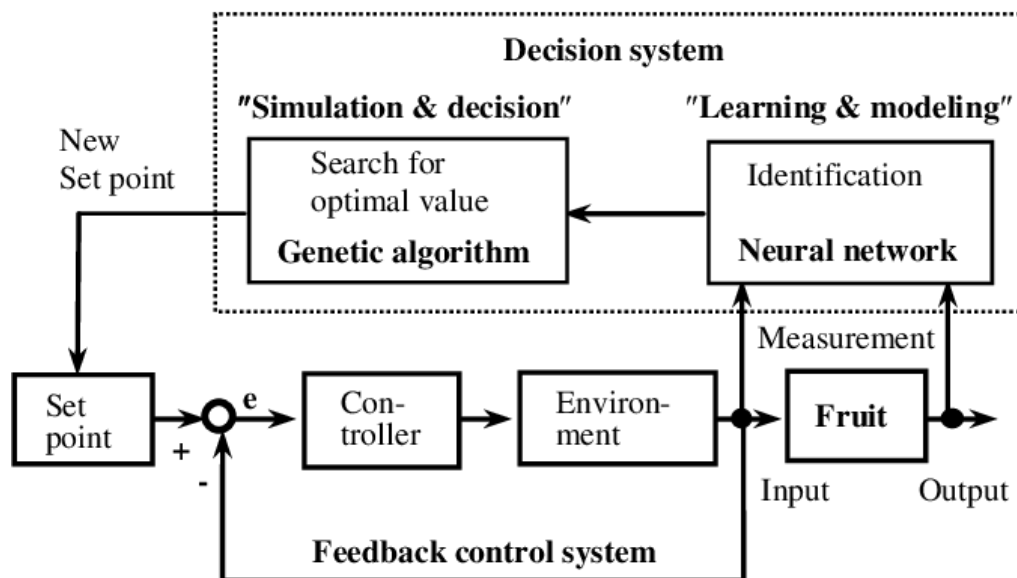
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Ευφυή Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων: Σχεδίαση Προσαρμοστικών Συστημάτων
Ελέγχου



Αθήνα, 2023

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων	2
Κατάλογος Πινάκων	3
Έλεγχος Διφασικού Βηματικού Κινητήρα Μόνιμου Μαγνήτη	4
Ερώτημα - 1: MRAC Σύστημα	5
Σχεδίαση Ελεγκτή	5
Προσομοίωση Ελεγκτή	8
Ερώτημα - 2: MRAC Σύστημα με Παραμετρικές Αβεβαιότητες	11
Ερώτημα - 3: MRAC Σύστημα και Προσέγγιση Άγνωστης Εξωτερικής Ροπής με	
Νευρωνικό Δίκτυο	16
Σχεδίαση Ελεγκτή	16
Προσομοίωση Ελεγκτή	20
Α' Κώδικας Προσομοίωσης	23
Βιβλιογραφία	32

Κατάλογος Σχημάτων

1	Διφασικός Βηματικός Κινητήρας Μόνιμου Μαγνήτη	4
2	Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων	9
3	Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων	9
4	Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων	10
5	Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων	11
6	Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων	11
7	Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων	12
8	Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων	12
9	Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων	13
10	Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων	13
11	Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων	14
12	Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων	14
13	Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων	15
14	Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με <i>RBF</i> δίκτυο	20
15	Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με <i>RBF</i> δίκτυο	21
16	Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με <i>RBF</i> δίκτυο	21
17	Εκτίμηση Βαρών Νευρωνικού Δικτύου με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με <i>RBF</i> δίκτυο	22

Κατάλογος Πινάκων

1	Παραμέτροι Διφασικού Κινητήρα Μόνιμου Μαγνήτη	4
---	---	---

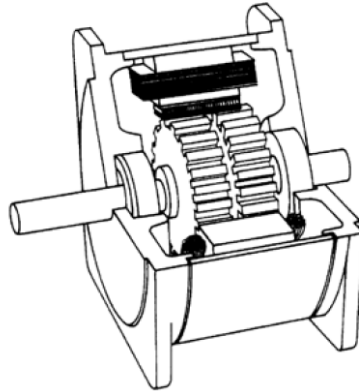
Έλεγχος Διφασικού Βηματικού Κινητήρα Μόνιμου Μαγνήτη

Μας δίνεται το μη γραμμικό μοντέλο ενός διφασικού βηματικού κινητήρα μόνιμου μαγνήτη (βλ. Σχήμα 1) που περιγράφεται από την σχέση (1). Επιπλέον, στον πίνακα 1 εμφανίζονται οι τιμές των παραμέτρων του βηματικού κινητήρα.

$$\dot{\vartheta} = \omega$$

$$J\dot{\omega} = -K_m i_a \sin(N\vartheta) + K_m i_b \cos(N\vartheta) - B\omega - T_L(\vartheta) \quad (1)$$

όπου η $T_L(\vartheta)$ είναι η εξωτερική ροπή του φορτίου στον άξονα του κινητήρα, $\vartheta(rad)$ είναι η γωνιακή θέση του άξονα, $\omega(rad/sec)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του άξονα και $i_a(A)$, $i_b(A)$ είναι τα δύο ρεύματα φάσεων του κινητήρα (είσοδοι ελέγχου).



Σχήμα 1: Διφασικός Βηματικός Κινητήρας Μόνιμου Μαγνήτη

Παράμετρος	Τιμή
J	$4.5 \times 10^{-5} \text{ kgr } m^2$
K_m	0.19 Nm/A
B	$8.0 \times 10^{-4} \text{ Nm sec/rad}$
N	50

Πίνακας 1: Παραμέτροι Διφασικού Κινητήρα Μόνιμου Μαγνήτη

Θα σχεδιάσουμε προσαρμοστικούς νόμους ελέγχου ώστε το μοντέλο του κινητήρα να παρακολουθεί το μοντέλο αναφοράς της σχέσης (2)

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix} \vartheta_c \quad (2)$$

Πριν ξεκινήσουμε την σχεδίαση του ελεγκτή, θα κάνουμε έναν σχηματισμό στις εξισώσεις του μοντέλου, έτσι ώστε να έρθει σε μια πιο απλή μορφή. Θέτουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}i_a &= -u \sin(N\vartheta) \\ i_b &= u \cos(N\vartheta)\end{aligned}$$

Με την αντικατάσταση των ραυμάτων στην σχέση (1b) θα προκύψει το εξής μοντέλο:

$$\begin{aligned}J\dot{\omega} &= -K_m(-u \sin(N\vartheta)) \sin(N\vartheta) + K_m(u \cos(N\vartheta)) \cos(N\vartheta) - B\omega - T_L(\vartheta) \\ \Rightarrow J\dot{\omega} &= uK_m \sin^2(N\vartheta) + uK_m \cos^2(N\vartheta) - B\omega - T_L(\vartheta) \\ \Rightarrow J\dot{\omega} &= uK_m(\sin^2(N\vartheta) + \cos^2(N\vartheta)) - B\omega - T_L(\vartheta) \\ \Rightarrow J\dot{\omega} &= -B\omega + uK_m - T_L(\vartheta)\end{aligned}\tag{3}$$

Ερώτημα - 1: MRAC Σύστημα

Αρχικά, θεωρούμε πως έχουμε μηδενικό φορτίο στον άξονα περιστροφής του κινητήρα. Συνεπώς το $T_L(\vartheta) = 0$. Έτσι οι εξισώσεις κατάστασης θα έχουν την εξής μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J} \end{bmatrix} u\tag{4}$$

Οπότε, τώρα θα σχεδιάσουμε το προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου με την άμεση μέθοδο.

Σχεδίαση Ελεγκτή

Ως σήμα ελέγχου θα ορίσουμε την εξής σχέση:

$$u = K_x^T x + K_r \vartheta_c\tag{5}$$

όπου τα K_x, K_r είναι τα κέρδη του ελεγκτή που πρέπει να εκτιμήσουμε και $x = [\vartheta, \omega]^T$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος. Έστω ότι γνωρίζαμε τα ιδανικά κέρδη για την σχέση (5). Τότε:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x} &= Ax + B(K_x^{T*} x + K_r^* \vartheta_c) \\ \dot{x} &= (A + BK_x^{T*})x + BK_r^* \vartheta_c\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε και το μοντέλο αναφοράς του συστήματος:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m \vartheta_c$$

Γνωρίζοντας τα ιδεατά κέρδη προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}A + BK_x^{T*} &= A_m \\ BK_r^* &= B_m\end{aligned}$$

Έστω πως δεν γνωρίζαμε τα ιδεατά κέρδη για το σύστημα. Οπότε, θα έχουμε κάποιες εκτιμήσεις των κερδών \hat{K}_x, \hat{K}_r . Το επόμενο βήμα είναι να βγάλουμε το δυναμικό μοντέλο

σφάλματος $e = x - x_m$. Στη συνέχεια θα βρούμε τους κατάλληλους προσαρμοστικούς νόμους για τον υπολογισμό των κερδών. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_m \\ \dot{e} &= Ax + B(\hat{K}_x^T x + \hat{K}_r \vartheta_c) - A_m x - B_m \vartheta_c \\ \dot{e} &= Ax + B(\hat{K}_x^T x + \hat{K}_r \vartheta_c) - A_m x - B_m \vartheta_c + A_m x - A_m x \\ \dot{e} &= A_m(x - x_m) + (A + B\hat{K}_x^T - A_m)x + (B\hat{K}_r - B_m)\vartheta_c \\ \dot{e} &= A_m e + (A + B\hat{K}_x^T - A - BK_x^{T*})x + (B\hat{K}_r - BK_r^*)\vartheta_c \\ \dot{e} &= A_m e + B(\hat{K}_x - K_x^*)^T x + B(\hat{K}_r - K_r^*)\vartheta_c\end{aligned}$$

Ορίζουμε τα σφάλματα των κερδών ως:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_x &= \hat{K}_x - K_x^* \\ \tilde{K}_r &= \hat{K}_r - K_r^*\end{aligned}$$

Έτσι, η δυναμική εξίσωση του σφάλματος θα έχει την εξής μορφή:

$$\dot{e} = A_m e + B(\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r \vartheta_c) \quad (6)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος και να παράγουμε τους προσαρμοστικούς νόμους ελέγχου. Έχουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r) = e^T P e + \tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x + \frac{1}{\gamma_3} \tilde{K}_r^2 \quad (7)$$

όπου ο πίνακας $P = P^T > 0$ αποτελεί την λύση της εξίσωσης Lyapunov $PA_m + A_m^T P = -Q$, όπου η $Q = Q^T > 0$. Επίσης, έχουμε τον πίνακα κέρδους $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0$ και το κέρδος προσαρμογής $\gamma_3 > 0$. Εξ ορισμού διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την παράγωγο της συνάρτησης αυτής. Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r \\ \dot{V} &= (A_m e + B(\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r \vartheta_c))^T P e + e^T P (A_m e + B(\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r \vartheta_c)) + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r \\ \dot{V} &= e^T (A_m^T P + P A_m) e + 2e^T P B(\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r \vartheta_c) + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r \\ \dot{V} &= -e^T Q e + 2\tilde{K}_x^T (\Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + x e^T P B) + 2\tilde{K}_r (\gamma_3^{-1} \dot{\tilde{K}}_r + \vartheta_c e^T P B)\end{aligned} \quad (8)$$

Η σχέση (8) αποτελείται από έναν αρνητικό όρο και δύο θετικούς. Για να είναι αρνητικά ημιορισμένη η παράγωγος θα πρέπει οι θετικοί όροι να είναι μηδέν. Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}2\tilde{K}_x^T (\Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + x e^T P B) &= 0 \\ \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + x e^T P B &= 0 \\ \dot{\tilde{K}}_x &= -\Gamma_x x e^T P B\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}2\tilde{K}_r (\gamma_3^{-1} \dot{\tilde{K}}_r + \vartheta_c e^T P B) &= 0 \\ \gamma_3^{-1} \dot{\tilde{K}}_r + \vartheta_c e^T P B &= 0 \\ \dot{\tilde{K}}_r &= -\gamma_3 \vartheta_c e^T P B\end{aligned} \quad (10)$$

Οι σχέσεις (9) και (10) αποτελούν τους προσαρμοστικούς νόμους ανανέωσης των κερδών του σήματος ελέγχου. Με βάσει αυτές και την ιδιότητα των θετικά συμμετρικών πινάκων έχουμε ότι

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r) = -e^T Q e \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 \quad (11)$$

Η παράγωγος έχει ένα άνω φράγμα το οποίο σημαίνει πως η $\dot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, το οποίο συνεπάγεται πως ότι και το $e \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον καθώς η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη, διαπιστώνουμε πως ότι η συνάρτηση V είναι φθίνουσα και μάλιστα θα το όριο της θα είναι πεπερασμένο. Δηλαδή:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty < \infty$$

Συνεπώς, έχουμε ότι η $V \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, από την σχέση (7) θα προκύψει επίσης πως τα σφάλματα των κερδών θα είναι επίσης φραγμένα, δηλαδή $\tilde{K}_x, \tilde{K}_r \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον και οι εκτιμήσεις θα είναι φραγμένες, $\hat{K}_x, \hat{K}_r \in \mathcal{L}_\infty$. Εξ ορισμού έχουμε πως το σήμα εισόδου $\theta_c \in \mathcal{L}_\infty$, το οποίο συνεπάγεται πως η κατάσταση $x_m \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως και η κατάσταση του συστήματος θα είναι και αυτή φραγμένη από τον ορισμό του σφάλματος παρακολούθησης. Οπότε το $x \in \mathcal{L}_\infty$. Οπότε, θα έχουμε πως και τα $\dot{\hat{K}}_x, \dot{\hat{K}}_r \in \mathcal{L}_\infty$ και κατ' επέκταση ισχύει ότι $\dot{\tilde{K}}_x, \dot{\tilde{K}}_r \in \mathcal{L}_\infty$. Από την σχέση (6) θα προκύψει πως το $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ ως άθροισμα φραγμένων σημάτων. Καθώς αποδείξαμε πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα, τότε θα προκύψει ευστάθεια. Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ασυμπτωτική ευστάθεια για το σύστημα. Ολοκληρώνοντας την σχέση (11), μπορούμε να διαπιστώσουμε το εξής:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r) dt &= V_\infty - V(0) \\ \int_0^\infty -e^T Q e dt &= V_\infty - V(0) \\ - \int_0^\infty \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 dt &\geq V_\infty - V(0) \\ \int_0^\infty \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 dt &\leq V(0) - V_\infty \\ \int_0^\infty \|e\|^2 dt &\leq \frac{V(0) - V_\infty}{\lambda_{\min}(Q)} \end{aligned}$$

Συνεπώς θα προκύψει πως το $e \in \mathcal{L}_2$. Καθώς το $e \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ και το $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$, τότε από το Λήμμα *Barbalát* θα προκύψει πως το $e \rightarrow 0$, καθώς το $t \rightarrow \infty$, θα συγκλίνει ασυμπτωτικά.

Τέλος, λόγω της παραμετρικής αβεβαιότητας, θα πρέπει να τροποποιηθούν οι προσαρμοστικοί νόμοι. Θα χρησιμοποιηθεί ο τελεστής προβολής, έτσι ώστε να μην επηρεαστεί το σύστημα από την αβεβαιότητα των παραμέτρων. Ο τελεστής αυτός θα δώσει ευστροφία στο σύστημα, χωρίς να επηρεάζεται η ανάλυση της ευστάθειας. Έτσι, θα έχουμε φραγμένη παρακολούθηση των εκτιμήσεων των κερδών του συστήματος. Άρα οι προσαρμοστικοί νόμοι θα γίνουν ως εξής:

$$\dot{\hat{K}}_x = \Gamma_x \text{Proj}(\hat{K}_x, -xe^T P B)$$

$$\dot{\hat{K}}_x = \begin{cases} -\Gamma_x x e^T P B + \Gamma_x \frac{\nabla f(\hat{K}_x)(\nabla f(\hat{K}_x))^T}{\|\nabla f(\hat{K}_x)\|^2} x e^T P B f(\hat{K}_x), & \text{if } f(\hat{K}_x) > 0 \text{ and } (-xe^T P B)^T \nabla f(\hat{K}_x) > 0 \\ -\Gamma_x x e^T P B, & \text{if not} \end{cases} \quad (12)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \gamma_3 \text{Proj}(\hat{K}_r, -\vartheta_c e^T P B)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \begin{cases} -\gamma_3 \vartheta_c e^T P B + \gamma_3 (1 - f(\hat{K}_r)), & \text{if } f(\hat{K}_r) > 0 \text{ and } (-\vartheta_c e^T P B) f'(\hat{K}_r) > 0 \\ -\gamma_3 \vartheta_c e^T P B, & \text{if not} \end{cases} \quad (13)$$

όπου η συνάρτηση f είναι η εξής:

$$f(\theta) = \frac{\|\theta\|^2 - \theta_{max}^2}{\epsilon_\theta \theta_{max}^2} \quad (14)$$

και έχει παράγωγο

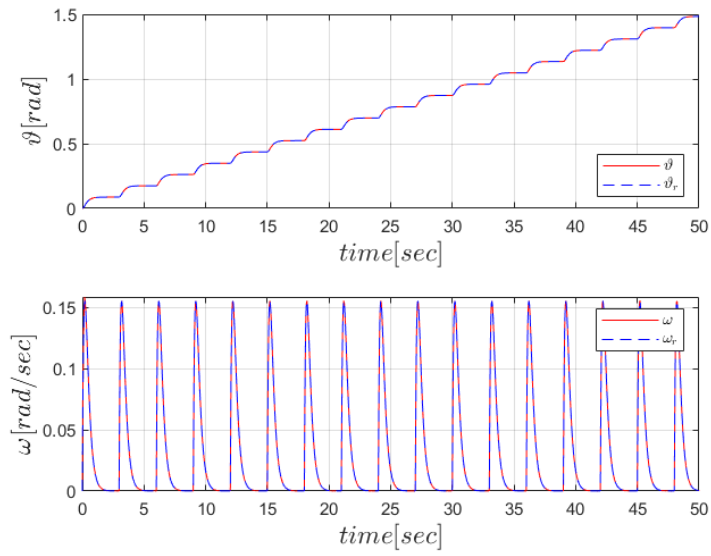
$$\nabla f(\theta) = \frac{2\theta}{\epsilon_\theta \theta_{max}^2} \quad (15)$$

με το θ_{max} να εποτελεί το όριο του κυρτού συνόλου προβολής και το ϵ_θ αποτελεί το σφάλμα ανοχής του κυρτού συνόλου του τελεστή της προβολής.

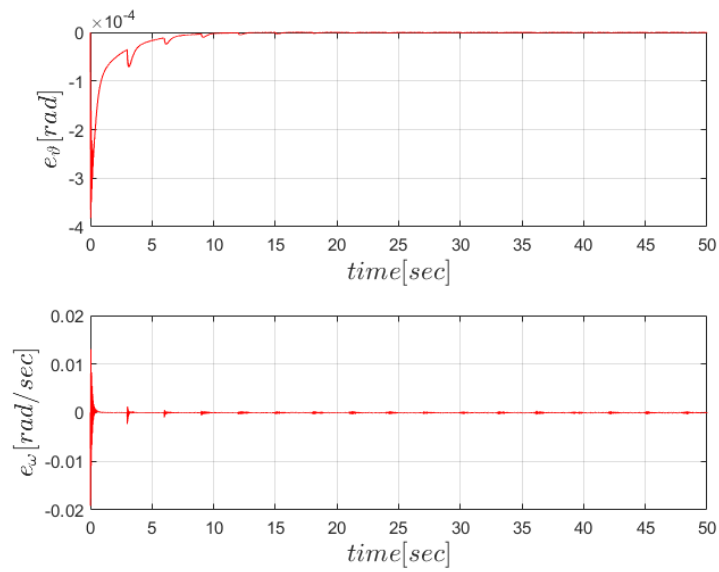
Προσομοίωση Ελεγκτή

Το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί το παραπάνω σύστημα με είσοδο $\vartheta_c = 5 \text{ deg}$. Κάθε 3 sec θα αυξάνεται το σήμα εισόδου. Επομένως, κατά την προσομοίωση θα έχουμε κάποιες ταλαντώσεις στις εκτιμήσεις των κερδών. Επιπλέον, στο παρών παράδειγμα έχουμε αβεβαιότητα στις παραμέτρους του κινητήρα $\pm 5\%$. Κατά την προσομοίωση επιλέχθηκαν κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους των ρυθμών ανάνεωσης, έτσι ώστε η εκτίμηση να συγκλίνει κοντά σε μια περιοχή της ιδανικής τιμής. Για την προσομοίωση επιλέχθηκε ο πίνακας $Q = I_2$ και με βάση την εξίσωση Lyapunov βρέθηκε πως ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1.4583 & 0.02083 \\ 0.02083 & 0.052083 \end{bmatrix}$. Επίσης, ως κέρδη

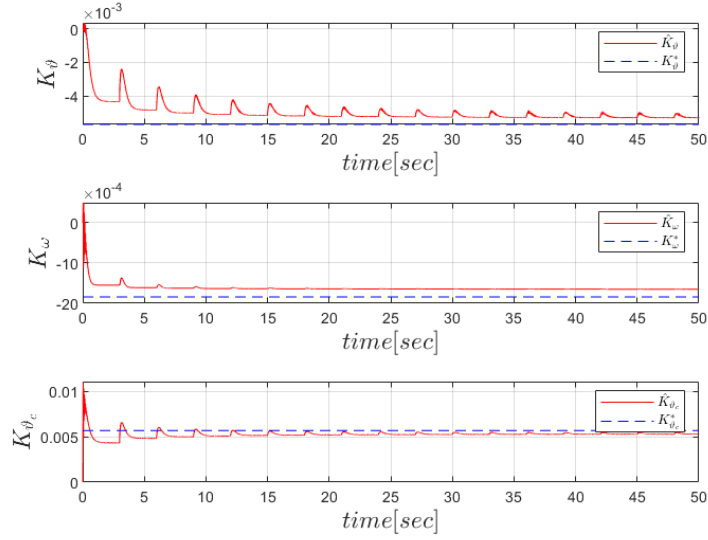
προσαρμογής επιλέχθηκαν τα $\Gamma_x = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$ και $\gamma_3 = 1.5$. Με βάσει αυτές τις τιμές και με αβεβαιότητα 5% στις παραμέτρους του κινητήρα, παράχθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα. Στο σχήμα 2 παρατηρούμε την θέση και την γωνιακή ταχύτητα του πραγματικού μοντέλου και του μοντέλου αναφοράς. Διαπιστώνουμε πως το πραγματικό μοντέλο ακολουθεί ασυμπτωτικά το επιθυμητό μοντέλο, αποδεικνύοντας έτσι και την θεωρητική ανάλυση του προσαρμοστικού σχήματος. Επιπλέον, παρατηρώντας το σχήμα 3, διαπιστώνουμε πως τα σφάλματα συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0. Ωστόσο, παρατηρούμε στα σφάλματα κάποιες ταλαντώσεις. Οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται αρχικά στην μεταβολή της εισόδου, που αυξάνεται ανά τρία δευτερόλεπτα. Επιπλέον, αυτές οι ταλαντώσεις οφείλονται και στην αβεβαιότητα των πραγματικών παραμέτρων του μοντέλου. Ωστόσο, δεν επηρεάζει την λειτουργία του συστήματος.



Σχήμα 2: Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων



Σχήμα 3: Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων

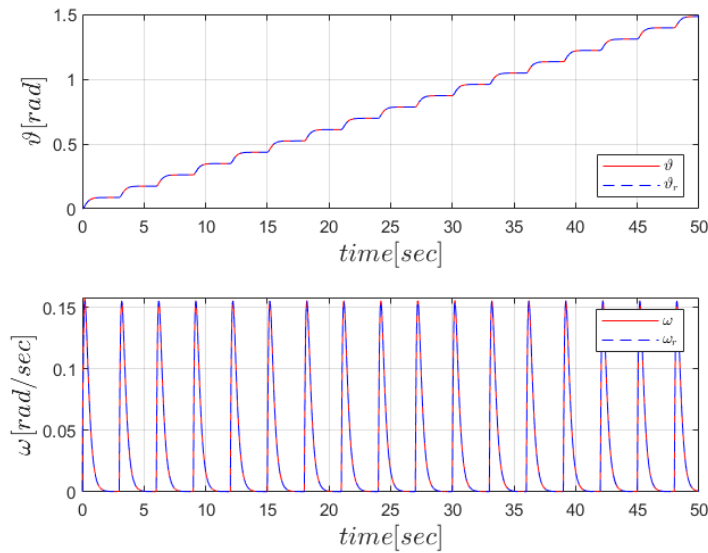


Σχήμα 4: Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων

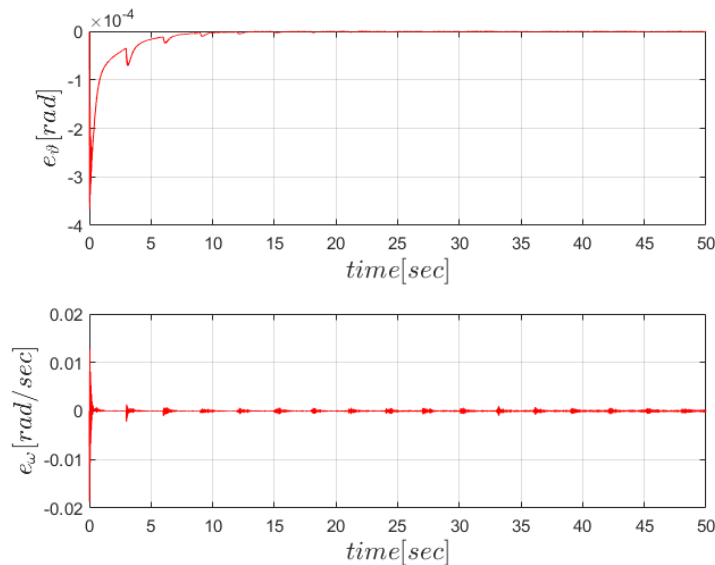
Τέλος, στο σχήμα 4 βλέπουμε την εκτίμηση των κερδών του ελεγκτή. Λόγω της παραμετρικής αβεβαιότητας χρησιμοποιήθηκε ο τελεστής της προβολής, με αποτέλεσμα να έχουμε τις εκτιμήσεις φραγμένες και μάλιστα σε μια περιοχή κοντά στα ιδεατά κέρδη. Επιπλέον, παρατηρούμε πως οι εκτιμήσεις έχουν κάποιες μικρές υπερυψώσεις λόγω της αλλαγής της εισόδου. Τέλος, παρατηρούμε πως η αβεβαιότητα προκαλεί κάποιες ταλαντώσεις στα σήματα, ωστόσο δεν προκαλεί μεγάλο θόρυβο.

Ερώτημα - 2: MRAC Σύστημα με Παραμετρικές Αβεβαιότητες

Το σύστημα θα το προσομοιώσουμε για αβεβαιότητα παραμέτρων 25%. Παρατηρούμε πως το πραγματικό μοντέλο παρακολουθεί ασυμπτωτικά το μοντέλο αναφοράς στο σχήμα 5. Ωστόσο κατά την προσομοίωση παρατηρούμε πως η παραμετρική αβεβαιότητα επιρεάζει την σύγκλιση του σφάλματος της ταχύτητας (βλ. σχήμα 6). Παρατηρούμε κάποιες ταλαντώσεις κατά τη σύγκλιση που επιρεάζεται από τις παραμέτρους.

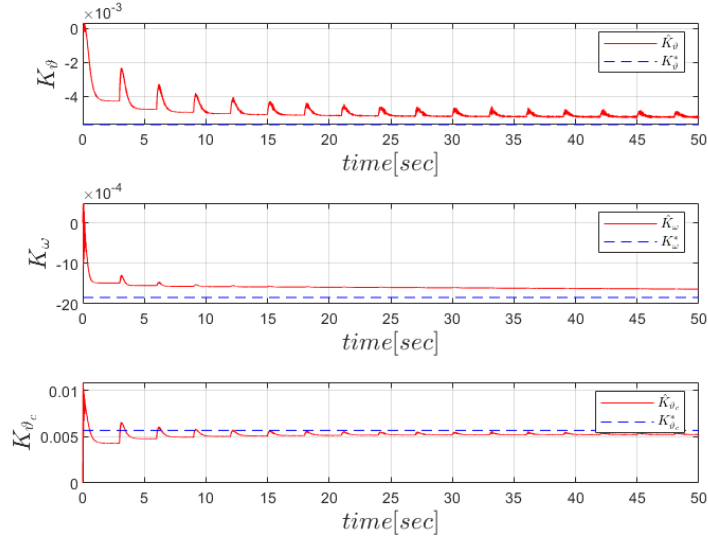


Σχήμα 5: Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων



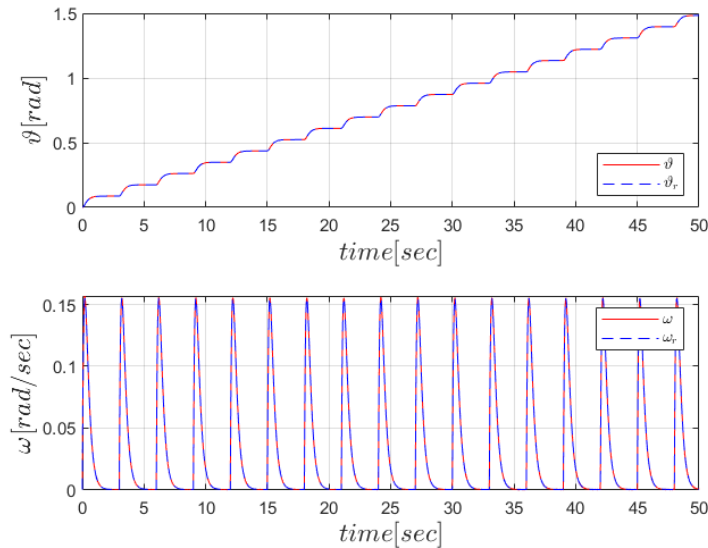
Σχήμα 6: Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων

Επίσης, στο σχήμα 7 βλέπουμε πως η παραμετρική αβεβαιότητα επηρεάζει τις εκτιμήσεις των κερδών. Σε κάθε αύξηση της εισόδου βλέπουμε να αυξάνονται οι ταλαντώσεις στις εκτιμήσεις, προκαλώντας έτσι θόρυβο.

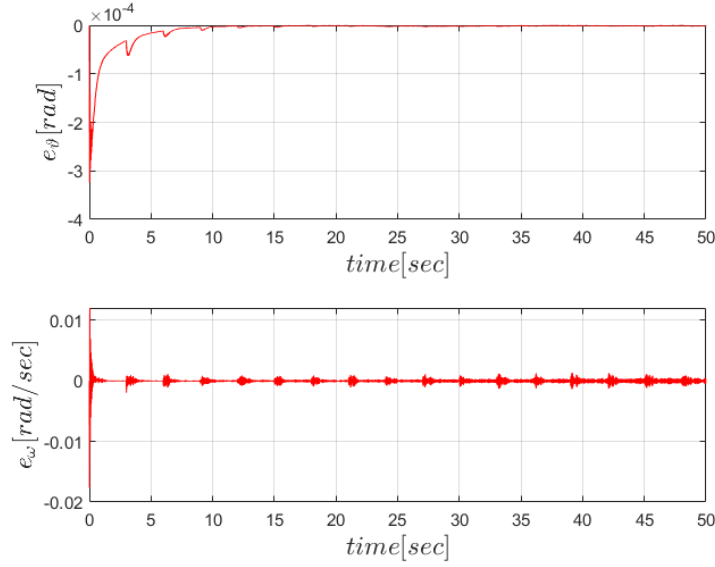


Σχήμα 7: Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 25% αβεβαιότητα παραμέτρων

Θα αυξήσουμε την παραμετρική αβεβαιότητα στο 50% και θα προσομοιώσουμε το σύστημα. Στο σχήμα 8 βλέπουμε την απόκριση του μοντέλου. Διαπιστώνουμε πως έχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του πραγματικού μοντέλου στο επιθυμητό. Ωστόσο, βλέποντας το σχήμα 9, παρατηρούμε πως η παραμετρική αβεβαιότητα έχει επηρεάσει την στίγλιση των σφαλμάτων. Ειδικότερα παρατηρούμε στο σφάλμα ταχύτητας πως οι ταλαντώσεις έχουν αυξηθεί κατά την πάροδο του χρόνου.

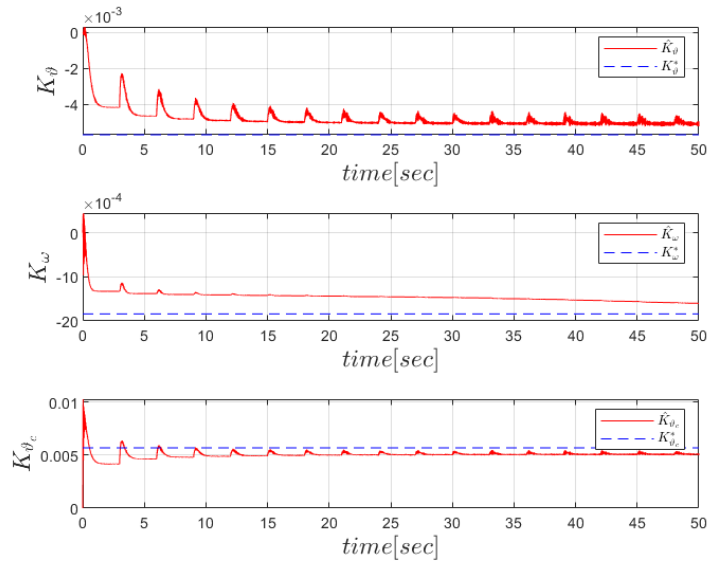


Σχήμα 8: Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων



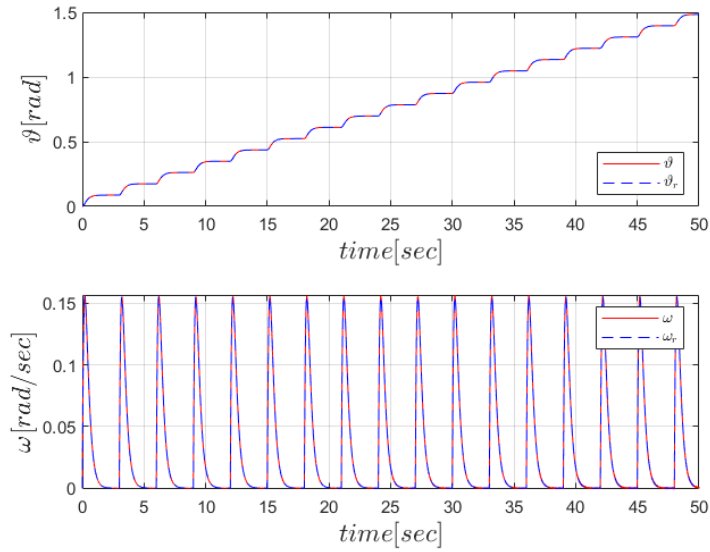
Σχήμα 9: Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων

Στο σχήμα 10 παρατηρούμε τις εκτιμήσεις των κερδών του ελεγκτή. Συγκριτικά με τις προηγούμενες προσομοιώσεις, διαπιστώνουμε πως η παραμετρική αβεβαιότητα έχει επιρεάσει περισσότερο τις εκτιμήσεις. Τα σήματα των εκτιμήσεων έχουν παραπάνω θόρυβο, ωστόσο παραμένουν στην περιοχή σύγκλισης των αντίστοιχων ιδεατών τιμών. Άξιο σχολιασμού είναι το γεγονός πως το κέρδος της γωνιακή ταχύτητας έχει μία κλίση που το οδηγεί πιο κοντά στην ιδεατή τιμή. Ωστόσο, λόγω του τελεστή προβολής θα παραμείνει σε αυτή την περιοχή.

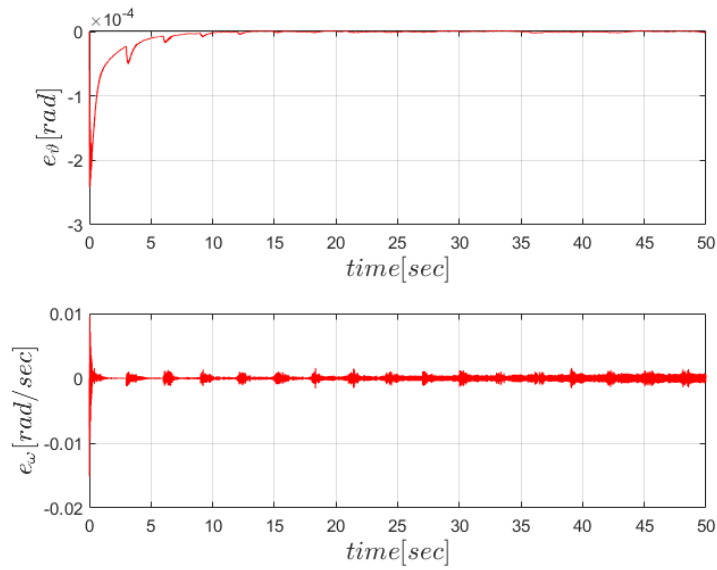


Σχήμα 10: Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 50% αβεβαιότητα παραμέτρων

Τέλος, θα αυξήσουμε το ποσοστό της παραμετρικής αβεβαιότητας στο 75% και θα προσομοιώσουμε το σύστημα. Διαπιστώνουμε από το σχήμα 11 πως έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς. Ωστόσο, σύμφωνα με το σχήμα 12 παρατηρούμε πως στο σφάλμα της ταχύτητας έχουν προκύψει περισσότερες και μεγαλύτερες ταλαντώσεις.

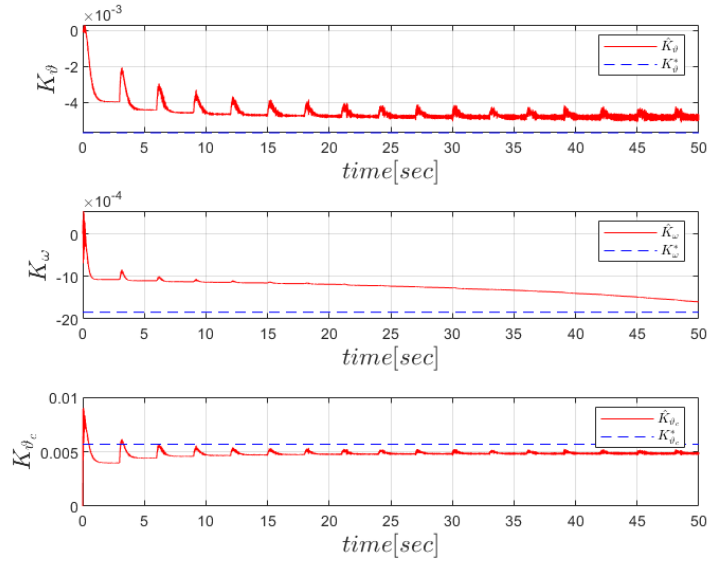


Σχήμα 11: Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων



Σχήμα 12: Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων

Στο σχήμα 13 παρατηρούμε τις εκτιμήσεις των κερδών του ελεγκτή. Βλέπουμε πως το ποσοστό της αβεβαιότητας έχει επιρεάσει περισσότερο τις εκτιμήσεις. Παρατηρούμε περισσότερες ταλαντώσεις στα σήματα. Ειδικότερα, η εκτίμηση του κέρδους της γωνιακής ταχύτητας έχει επιρεαστεί περισσότερη από την μεταβολή των παραμέτρων καθώς φαίνεται να μειώνεται με πιο αργό ρυθμό συγκριτικά με τα υπόλοιπα κέρδη.



Σχήμα 13: Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 75% αβεβαιότητα παραμέτρων

Συμπερασματικά διαπιστώνουμε πως με την αύξηση του ποσοστού της παραμετρικής αβεβαιότητας ως προς τις πραγματικές παραμέτρους του κινητήρα, τα σημάτα του κλειστού βρόχου επηρεάζονται. Προκαλείται θόρυβος κατά την λειτουργία του συστήματος, σε συνδυασμό και με την μεταβολή της εισόδο σε μικρές χρονικές περιόδους. Ωστόσο, παρατηρούμε πως η σύγκλιση του σφάλματος παρακολούθησης παραμένει ασυμπτωτική. Αυτό οφείλεται στην ευρωστέια των προσαρμοστικών νόμων. Η τελεστής της προβολής κρατά τις εκτιμήσεις των κερδών φραγμένες. Έτσι, προκρίπτει πως το πραγματικό μοντέλο θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μοντέλο αναφοράς, ανεξαρτήτως του ποσοστού της παραμετρικής αβεβαιότητας.

Ερώτημα - 3: MRAC Σύστημα και Προσέγγιση Άγνωστης Εξωτερικής Ροπής με Νευρωνικό Δίκτυο

Σε αυτό το ερώτημα θα επανασχεδιάσουμε το προσαρμοστικό σχήμα με την διαφορά πως θα κάνουμε και αναγνώριση της άγνωστης συνάρτησης του εξωτερικού φορτίου. Για την αναγνώριση θα χρησιμοποιηθεί ένα νευρωνικό δίκτυο RBF με K νευρώνες. Οπότε, το μοντέλο θα γίνει:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J} \end{bmatrix} \left(u - \frac{1}{K_m} T_L(\vartheta) \right) \quad (16)$$

Έτσι, θα σχεδιάσουμε το προσαρμοστικό σχήμα με την άμεση μέθοδο και θα κάνουμε αναγνώριση της άγνωστης συνάρτησης.

Σχεδίαση Ελεγκτή

Το αρχικό βήμα είναι να ορίσουμε την εκτίμηση της άγνωστης συνάρτησης του εξωτερικού φόρτου ροπής.

$$\hat{T}_L(\vartheta) = \hat{\Theta}^T \Phi(x) \quad (17)$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το νευρωνικό δίκτυο που θα αποτιμήσει την παραπάνω εκτίμηση. Έχουμε τον ορισμό του δικτύου ως $NN(x) = W^T \Phi(x)$, όπου $\Phi(x)$ αποτελεί τους εκπαιδευμένους RBF νευρώνες και το διάνυσμα W αποτελεί τα βάρη του στρώματος εξόδου του νευρωνικού. Συνεπώς, τώρα θα έχουμε το εξής δυναμικό μοντέλο

$$\dot{x} = Ax + B(u - f(x)) \quad (18)$$

όπου η $f(x) = \Theta^T \Phi(x) + \epsilon_f(x)$. Έχουμε πως το διάνυσμα παραμέτρων $\Theta \in \mathcal{R}^K$, όπου το K αποτελεί το πλήθος των νευρώνων του κρυμμένο επιπέδου του δικτύου. Επιπλέον, το $\epsilon_f(x)$ αποτελεί το σφάλμα προσέγγισης της άγνωστης συνάρτησης του νευρωνικού, για το οποίο ισχύει η εξής ιδιότητα:

$$\|\epsilon_f(x)\| = \|f(x) - \Theta^T \Phi(x)\| \leq \epsilon \quad \forall x \in X \subset \mathcal{R}^2$$

Συνεπώς, έχουμε την εκτίμηση $\hat{f}(x) = \hat{\Theta}^T \Phi(x)$. Επομένως, το σφάλμα της άγνωστης συνάρτησης θα είναι

$$NN(x) - f(x) = (\hat{\Theta} - \Theta)^T \Phi(x) = \tilde{\Theta}^T \Phi(x) - \epsilon_f(x)$$

Επιπλέον, έχουμε και το επιθυμητό μοντέλο της σχέσης (2). Οπότε, θα ορίσουμε οτ εξής σήμα ελέγχου

$$u = \hat{K}_x^T x + \hat{K}_r \vartheta_c + \hat{\Theta}^T \Phi(x) \quad (19)$$

Οπότε, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u - f(x)) \\ \dot{x} &= Ax + B(\hat{K}_x^T x + \hat{K}_r \vartheta_c + \hat{\Theta}^T \Phi(x) - f(x)) \\ \dot{x} &= Ax + B(\hat{K}_x^T x + \hat{K}_r \vartheta_c + \tilde{\Theta}^T \Phi(x) - \epsilon_f(x)) \\ \dot{x} &= Ax + B\hat{K}_x^T x + B(\hat{K}_r \vartheta_c + \tilde{\Theta}^T \Phi(x) - \epsilon_f(x)) \\ \dot{x} &= (A + B\hat{K}_x^T)x + B(\hat{K}_r \vartheta_c + \tilde{\Theta}^T \Phi(x) - \epsilon_f(x)) \end{aligned} \quad (20)$$

Επίσης έχουμε

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m \vartheta_c \quad (21)$$

Για να βρούμε τα ιδεατά κέρδη πρέπει να ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$\begin{cases} A + BK_x^{T*} = A_m \\ BK_r^* = B_m \end{cases} \quad (22)$$

Συνεπώς, με αυτές τις σχέσεις θα υπολογίσουμε και τα σφάλματα εκτίμησης των κερδών. Οπότε

$$\begin{aligned} \tilde{K}_x &= \hat{K}_x - K_x^* \\ \tilde{K}_r &= \hat{K}_r - K_r^* \end{aligned} \quad (23)$$

Οπότε, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A + B\hat{K}_x^T - A_m &= A + B\hat{K}_x^T - A - BK_x^{T*} = B(\hat{K}_x - K_x^*)^T = B\tilde{K}_x^T \\ B\hat{K}_r - B_m &= B\hat{K}_r - BK_r^* = B(\hat{K}_r - K_r^*) = B\tilde{K}_r \end{aligned}$$

Τώρα θα ορίσουμε το σφάλμα παρακολούθησης ως

$$e = x - x_m \quad (24)$$

Θα παραγωγίσουμε το σφάλμα έτσι ώστε να βρούμε την δυναμική του σφάλματος

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_m \\ \dot{e} &= (A + B\hat{K}_x^T)x + B(\hat{K}_r\vartheta_c + \tilde{\Theta}^T\Phi(x) - \epsilon_f(x)) - A_mx_m - B_m\vartheta_c \pm A_mx \\ \dot{e} &= A_m(x - x_m) + (A + B\hat{K}_x^T - A_m)x + B(\hat{K}_r - K_r^*) + B(\tilde{\Theta}^T\Phi(x) - \epsilon_f(x)) \\ \dot{e} &= A_me + B(\tilde{K}_x^Tx + \tilde{K}_r\vartheta_c + \tilde{\Theta}^T\Phi(x) - \epsilon_f(x)) \end{aligned} \quad (25)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε πως η εκτίμηση σφάλματος προσέγγισης $\epsilon_f(x)$ είναι φραγμένη, εφόσον το $x \in X$. Δηλαδή πρέπει να κρατήσουμε το διάνυσμα κατάστασης εσωτερικά του συνόλου X για να έχουμε σωστά αποτελέσματα. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την ευστάθεια του συστήματος και να παράγουμε τους προσαρμοστικούς νόμους ελέγχου. Έχουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) = e^T Pe + \tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x + \frac{1}{\gamma_3} \tilde{K}_r^2 + \tilde{\Theta}^T \Gamma_\Theta^{-1} \tilde{\Theta} \quad (26)$$

όπου ο πίνακας $P = P^T > 0$ αποτελεί την λύση της εξίσωσης Lyapunov $PA_m + A_m^T P = -Q$, όπου η $Q = Q^T > 0$. Επίσης, έχουμε τον πίνακα κέρδους $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0$ και το κέρδος προσαρμογής $\gamma_3 > 0$. Επιπλέον, έχουμε και τον πίνακα κέρδους $\Gamma_\Theta = \Gamma_\Theta^T > 0$. Εξ ορισμού διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε την παράγωγο της συνάρτησης αυτής. Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) &= \dot{e}^T Pe + e^T P \dot{e} + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r + 2\tilde{\Theta}^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \\ \dot{V} &= (A_me + B(\tilde{K}_x^Tx + \tilde{K}_r\vartheta_c) + \tilde{\Theta}^T\Phi(x) - \epsilon_f(x))^T Pe + e^T P(A_me + B(\tilde{K}_x^Tx + \tilde{K}_r\vartheta_c) + \tilde{\Theta}^T\Phi(x) - \epsilon_f(x)) \\ &\quad + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r + 2\tilde{\Theta}^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \\ \dot{V} &= e^T (A_m^T P + PA_m)e - 2e^T PB\epsilon_f(x) + 2e^T PB(\tilde{K}_x^Tx + \tilde{K}_r\vartheta_c + \tilde{\Theta}^T\Phi(x)) \\ &\quad + 2\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + 2\gamma_3^{-1} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r + 2\tilde{\Theta}^T \Gamma_\Theta^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \\ \dot{V} &= -e^T Qe - 2e^T PB\epsilon_f(x) + 2\tilde{K}_x^T (\Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + xe^T PB) \\ &\quad + 2\tilde{K}_r (\gamma_3^{-1} \dot{\tilde{K}}_r + \vartheta_c e^T PB) + 2\tilde{\Theta}^T (\Gamma_\Theta^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} + \Phi(x)e^T PB) \end{aligned} \quad (27)$$

Η σχέση (27) αποτελείται από έναν αρνητικό όρο και δύο θετικούς. Για να είναι αρνητικά ημιορισμένη η παράγωγος θα πρέπει οι θετικοί όροι να είναι μηδέν. Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
2\tilde{K}_x^T(\Gamma_x^{-1}\dot{\hat{K}}_x + xe^T PB) &= 0 \\
\Gamma_x^{-1}\dot{\hat{K}}_x + xe^T PB &= 0 \\
\dot{\hat{K}}_x &= -\Gamma_x xe^T PB
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
2\tilde{K}_r(\gamma_3^{-1}\dot{\hat{K}}_r + \vartheta_c e^T PB) &= 0 \\
\gamma_3^{-1}\dot{\hat{K}}_r + \vartheta_c e^T PB &= 0 \\
\dot{\hat{K}}_r &= -\gamma_3 \vartheta_c e^T PB
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
2\tilde{\Theta}^T(\Gamma_{\Theta}^{-1}\dot{\hat{\Theta}} + \Phi(x)e^T PB) &= 0 \\
\Gamma_{\Theta}^{-1}\dot{\hat{\Theta}} + \Phi(x)e^T PB &= 0 \\
\dot{\hat{\Theta}} &= -\Gamma_{\Theta}\Phi(x)e^T PB
\end{aligned} \tag{30}$$

Οι σχέσεις (28), (29) και (30) αποτελούν τους προσαρμοστικούς νόμους ανανέωσης των κερδών του σήματος ελέγχου. Με βάσει αυτές και την ιδιότητα των θετικά συμμετρικών πινάκων έχουμε ότι

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) = -e^T Q e - 2e^T P B \epsilon_f(x) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\|e\| \|PB\| \epsilon \tag{31}$$

Παρατηρούμε πως η παράγωγος είναι φραγμένη από έναν αρνητικό όρο και από έναν όρο ο οποίος εξαρτάται από την νόρμα του σφάλματος. Για να έχουμε την $\dot{V} < 0$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}
\dot{V} < 0 &\Rightarrow -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\|e\| \|PB\| \epsilon < 0 \\
\|e\| &> \frac{\|PB\| \epsilon}{\lambda_{\min}(Q)}
\end{aligned} \tag{32}$$

Συνεπώς η παράγωγος θα έχει αρνητικές τιμές έξω από το υποσύνολο

$$E = \left\{ e \mid \|e\| \leq \frac{\|PB\| \epsilon}{\lambda_{\min}(Q)} \right\}$$

Πρέπει να διατηρήσουμε το σφάλμα μεγαλύτερο από την οριακή τιμή του συνόλου E . Έτσι, θα έχουμε ότι η παράγωγος έχει αρνητικό πρόσημο και πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου θα είναι φραγμένα. Για να αποτρέψουμε την είσοδο του σφάλματος σε αυτή την περιοχή, θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της προβολής στους προσαρμοστικούς νόμους. Έτσι, αυτοί θα γίνουν

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{K}}_x &= \Gamma_x \text{Proj}(\hat{K}_x, -xe^T PB) \\
\dot{\hat{K}}_x &= \begin{cases} -\Gamma_x xe^T PB + \Gamma_x \frac{\nabla f(\hat{K}_x)(\nabla f(\hat{K}_x))^T}{\|\nabla f(\hat{K}_x)\|^2} xe^T P B f(\hat{K}_x), & \text{if } f(\hat{K}_x) > 0 \text{ and } (-xe^T P B)^T \nabla f(\hat{K}_x) > 0 \\ -\Gamma_x xe^T P B, & \text{if not} \end{cases}
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \gamma_3 \text{Proj}(\hat{K}_r, -\vartheta_c e^T P B)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \begin{cases} -\gamma_3 \vartheta_c e^T P B + \gamma_3 (1 - f(\hat{K}_r)), & \text{if } f(\hat{K}_r) > 0 \text{ and } (-\vartheta_c e^T P B) f'(\hat{K}_r) > 0 \\ -\gamma_3 \vartheta_c e^T P B, & \text{if not} \end{cases} \quad (34)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma_{\Theta} \text{Proj}(\hat{\Theta}, -\Phi(x) e^T P B)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \begin{cases} -\Gamma_{\Theta} \Phi(x) e^T P B + \Gamma_{\Theta} \frac{\nabla f(\hat{\Theta})(\nabla f(\hat{\Theta}))^T}{\|\nabla f(\hat{\Theta})\|^2} \Phi(x) e^T P B f(\hat{\Theta}), & \text{if } f(\hat{\Theta}) > 0 \text{ and } (-\Phi(x) e^T P B)^T \nabla f(\hat{\Theta}) > 0 \\ -\Gamma_{\Theta} \Phi(x) e^T P B, & \text{if not} \end{cases} \quad (35)$$

όπου η συνάρτηση f είναι η εξής:

$$f(\theta) = \frac{\|\theta\|^2 - \theta_{max}^2}{\epsilon_{\theta} \theta_{max}^2} \quad (36)$$

και έχει παράγωγο

$$\nabla f(\theta) = \frac{2\theta}{\epsilon_{\theta} \theta_{max}^2} \quad (37)$$

με το θ_{max} να εποτελεί το όριο του κυρτού συνόλου προβολής και το ϵ_{θ} αποτελεί το σφάλμα ανοχής του κυρτού συνόλου του τελεστή της προβολής.

Καθώς με τους προσαρμοστικούς νόμους έχουμε καθορίσει το κυρτό σύνολο στο οποίο λειτουργεί το σύστημα, τότε εξασφαλίζουμε πως σε κάθε βήμα του αλγορίθμου θα έχουμε αρνητική παράγωγο. Η παράγωγος έχει ένα άνω φράγμα το οποίο σημαίνει πως η $\dot{V} \in \mathcal{L}_{\infty}$, το οποίο συνεπάγεται πως ότι και το $e \in \mathcal{L}_{\infty}$. Επιπλέον καθώς η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη, διαπιστώνουμε πως ότι και η συνάρτηση V είναι φθίνουσα και μάλιστα θα το όριο της θα είναι πεπερασμένο. Δηλαδή:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_{\infty} < \infty$$

Συνεπώς, έχουμε ότι η $V \in \mathcal{L}_{\infty}$. Επιπλέον, από την σχέση (7) θα προκύψει επίσης πως τα σφάλματα των κερδών θα είναι επίσης φραγμένα, δηλαδή $\tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta} \in \mathcal{L}_{\infty}$. Επιπλέον και οι εκτιμήσεις θα είναι φραγμένες, $\hat{K}_x, \hat{K}_r \in \mathcal{L}_{\infty}$. Εξ όρισμού έχουμε πως το σήμα εισόδου $\vartheta_c \in \mathcal{L}_{\infty}$, το οποίο συνεπάγεται πως η κατάσταση $x_m \in \mathcal{L}_{\infty}$. Άρα, θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως και η κατάσταση του συστήματος θα είναι και αυτή φραγμένη από τον ορισμό του σφάλματος παρακολούθησης. Οπότε το $x \in \mathcal{L}_{\infty}$. Οπότε, θα έχουμε πως και τα $\dot{\hat{K}}_x, \dot{\hat{K}}_r, \dot{\hat{\Theta}} \in \mathcal{L}_{\infty}$ και κατ' επέκταση ισχύει ότι $\dot{\hat{K}}_x, \dot{\hat{K}}_r, \dot{\hat{\Theta}} \in \mathcal{L}_{\infty}$. Από την σχέση (6) θα προκύψει πως το $\dot{e} \in \mathcal{L}_{\infty}$ ως άθροισμα φραγμένων σημάτων. Καθώς αποδείξαμε πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα, τότε θα προκύψει ευστάθεια. Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ασυμπτωτική ευστάθεια για το σύστημα. Επειδή έχουμε αποδείξει ένα κάτω φράγμα για το σφάλμα, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα *UUB* (*Uniform Ultimate Boundedness*). Σύμφωνα με το φράγμα αυτό, αποδείξαμε πως η τροχιά του e θα κινείται εντός του δακτυλίου με κάτω όριο το $C = \frac{\|PB\|_{\epsilon}}{\lambda_{\min}(Q)}$. Συνεπώς έχουμε

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) < 0, \forall C < \|e\|$$

Συνεπώς, αφού το $e_e = 0$ είναι *UUB* τότε θα έχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν. Επιπλέον, η παραπάνω ιδιότητα ισχύει καθώς το σφάλμα είναι φραγμένο ($e \in \mathcal{L}_{\infty}$).

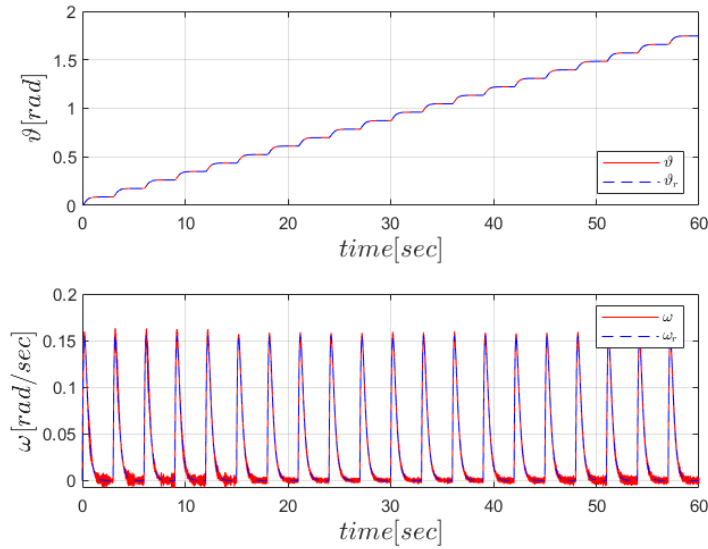
Προσομοίωση Ελεγκτή

Το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί το παραπάνω σύστημα με είσοδο $\vartheta_c = 5 \text{ deg}$. Κάθε 3 sec θα αυξάνεται το σήμα εισόδου. Επομένως, κατά την προσομοίωση θα έχουμε κάποιες ταλαντώσεις στις εκτιμήσεις των κερδών. Επιπλέον, στο παρών παράδειγμα έχουμε αβεβαιότητα στις παραμέτρους του κινητήρα $\pm 5\%$. Κατά την προσομοίωση επιλέχθηκαν κατάλληλες τιμές στις παραμέτρους των ρυθμών ανάνεωσης, έτσι ώστε η εκτίμηση να συγκλίνει κοντά σε μια περιοχή της ιδανικής τιμής. Για την προσομοίωση επιλέχθηκε ο πίνακας $Q = I_2$ και με βάση την εξίσωση Lyapunov βρέθηκε πως ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1.4583 & 0.02083 \\ 0.02083 & 0.052083 \end{bmatrix}$. Επίσης,

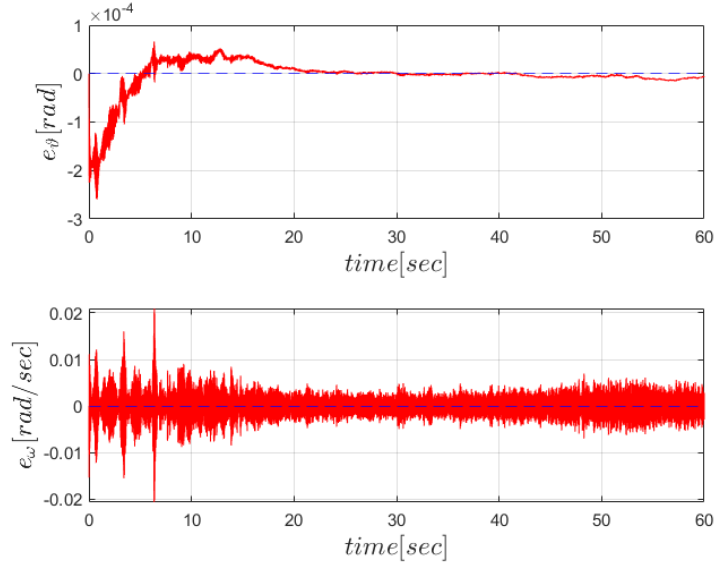
ως κέρδη προσαρμογής επιλέχθηκαν τα $\Gamma_x = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$ και $\gamma_3 = 1.5$. Επιπλέον, έχουμε και τον πίνακα προσαρμογής των βαρών του εξωτερικού στρώματος του νευρωνικού δικτύου

$$\Gamma_\Theta = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3 \end{bmatrix}. \text{ Με βάσει αυτές τις τιμές και με αβεβαιότητα } 5\% \text{ στις παρα-}$$

μέτρους του κινητήρα, παράχθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα. Στο σχήμα 14 παρατηρούμε την απόκριση του πραγματικού μοντέλου μαζί με την προσέγγιση της συνάρτησης της ροπής. Βλέπουμε πως έχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του πραγματικού μοντέλου στο επιθυμητό, με αυτό μάλιστα να φαίνεται και στο σχήμα 15. Ωστόσο λόγω της προσέγγισης που γίνεται μέσω του δικτύου, βλέπουμε πως υπάρχουν περισσότερες ταλαντώσεις που προσθέτονται σε αυτές που δημιουργούνται από την παραμετρική αβεβαιότητα.

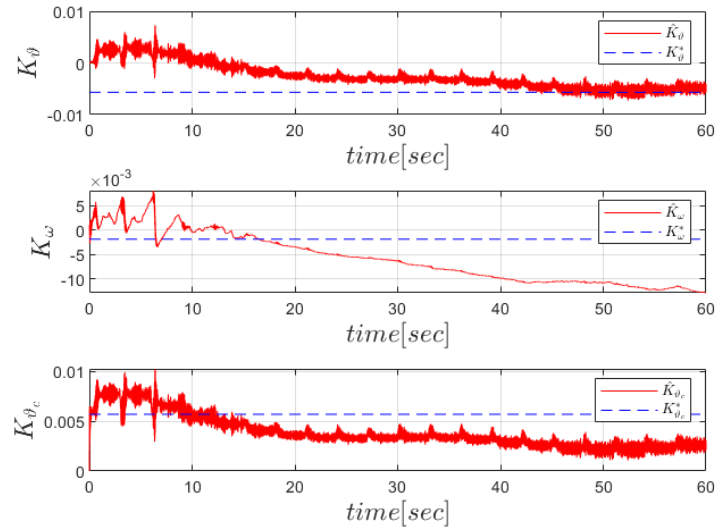


Σχήμα 14: Γωνία περιστροφής και γωνιακή ταχύτητα βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με *RBF* δίκτυο

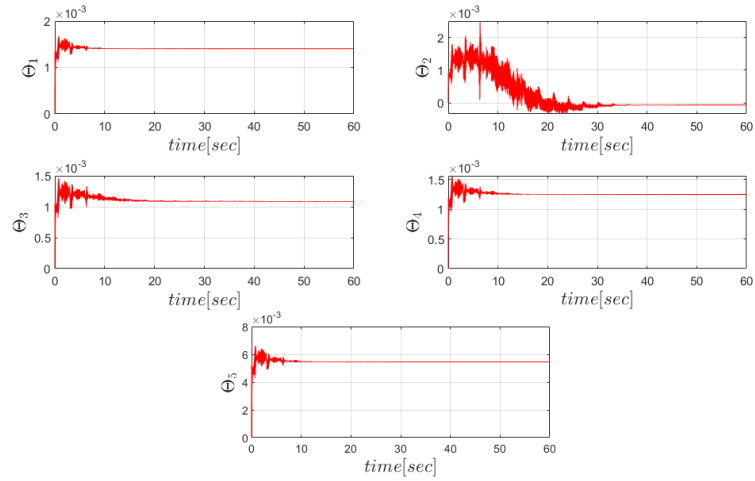


Σχήμα 15: Σφάλματα γωνίας περιστροφής και γωνιακής ταχύτητας βηματικού κινητήρα με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με *RBF* δίκτυο

Εν συνεχεία, στα σχήματα 16 και 17 παρατηρούμε την προσαρμογή των εκτιμήσεων των κερδών και των βαρών του επιπέδου εξόδου του νευρωνικού. Διαπιστώνουμε πως οι εκτιμήσεις συγκλίνουν στις ιδεατές τιμές, με αποτέλεσμα να έχουμε την ασυμπτωτική σύγκλιση που χρειαζόμαστε εσωτερικά του συνόλου $X \subset \mathcal{R}^2$. Έτσι, γνωρίζουμε πως το διάνυσμα κατάστασης θα κινείται εντός του επιθυμητού συνόλου για να κρατάει αρνητική την παράγωγο της υποψήφιας συνάρτησης *Lyapunov*.



Σχήμα 16: Εκτίμηση Παραμέτρων Ελεγκτή με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με *RBF* δίκτυο



Σχήμα 17: Εκτίμηση Βαρών Νευρωνικού Δικτύου με 5% αβεβαιότητα παραμέτρων και προσέγγιση συνάρτησης εξωτερικής ροπής με *RBF* δίκτυο

Τέλος, παρόλο που οι αποκρίσεις περιέχουν τόσες πολλές ταλαντώσεις, τα σήματα των εκτιμήσεων μας εγγυάντε πως η παράγωγος θα παραμένει αρνητική και θα βρισκόμαστε εκτός του συνόλου E . Έτσι, θα έχουμε την επιθυμητή ασυμπτωτική ευστάθεια στο σύστημα κλειστού βρόχου.

Παράρτημα Α΄

Κώδικας Προσομοίωσης

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας προσομοίωσης της παρούσας άσκησης.

```
%% Stepper Motor Adaptive Control
% Assignment 3
% Name: George Krommydas
% A.M.: 02121208

clear;
clc;

global B
global J
global Km
global r
global count
global P
global Am
global Q
global Bm
global K
global net

%% Parameter setting
B = 8*1e-4; % Nm sec/rad
J = 4.5*1e-5; % kgr m^2
Km = 0.19; % N m/A
N = 50;
Am = [0 1;
      -24 -10];
Bm = [0;
      24];
Q = eye(2);
P = lyap(Am',Q);

tstart = 0;
tend = 50;
tspan = [tstart, tend];
n = 7;
```

```

x0 = zeros(n,1);
opt = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', 1e-6);
count = 1;
K = 5;
r = 0.087266;

theta = 0:1e-5:pi;
T_L = 1e-3*((cos(2*theta)).^2).*sin(3*theta);
%% Neural Network Training

disp(" Training ....");
disp(" ")
net = fitrnet(theta', T_L', "LayerSizes", K, "Activations", "sigmoid");
disp(" Training stoped ....");
disp(" ")

%% Ode simulation

[t,x] = ode45(@MRACStepper, tspan, x0, opt);

% Ideal Gains
K_theta_star = -24*(J/Km).*ones(size(t));
K_omega_star = (10 - B/J)*(J/Km).*ones(size(t));
K_theta_c_star = -K_theta_star;

% Plots
figure(1);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,1), 'r-');
hold on;
plot(t, x(:,3), 'b--');
xlabel('$time$ [sec]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\vartheta$ [rad]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\vartheta$', '$\vartheta_r$', 'Interpreter', 'latex', 'Location='southeast');

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,2), 'r-');
hold on;
plot(t, x(:,4), 'b--');
xlabel('$time$ [sec]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\omega$ [rad/sec]', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\omega$', '$\omega_r$', 'Interpreter', 'latex', 'Location='northeast');

figure(2);

```

```

clf;

subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,1)-x(:,3), 'r-');
hold on;
yline(0, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$e_{\vartheta}$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,2)-x(:,4), 'r-');
hold on;
yline(0, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$e_{\omega}$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

figure(3);
clf;

subplot(3,1,1);
plot(t, x(:,5), 'r-');
hold on;
plot(t, K_theta_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\vartheta}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\vartheta}$', '$K_{\vartheta}^*$',
'Interpreter', 'latex', Location='northeast');

subplot(3,1,2);
plot(t, x(:,6), 'r-');
hold on;
plot(t, K_omega_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\omega}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\omega}$', '$K_{\omega}^*$',
'Interpreter', 'latex', Location='northeast');

subplot(3,1,3);
plot(t, x(:,7), 'r-');
hold on;
plot(t, K_theta_c_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\vartheta_c}$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\vartheta_c}$', '$K_{\vartheta_c}^*$',
'Interpreter', 'latex', Location='northeast');

```

```

%% Ode Simulation 2
x1 = zeros(n+K,1);

[t1,x1] = ode45(@MRACStepperNeuralNetwork, tspan, x1, opt);

K_theta_star = -24*(J/Km).*ones(size(t1));
K_omega_star = (-10 + B/J)*(J/Km).*ones(size(t1));
K_theta_c_star = -K_theta_star;

% Plots
figure(4);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t1, x1(:,1), 'r-');
hold on;
plot(t1, x1(:,3), 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\vartheta$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\vartheta$', '$\vartheta_r$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(2,1,2);
plot(t1, x1(:,2), 'r-');
hold on;
plot(t1, x1(:,4), 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\omega$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\omega$', '$\omega_r$', 'Interpreter',
'latex', Location='northeast');

figure(5);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t1, x1(:,1) - x1(:,3), 'r-');
hold on;
yline(0, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$e_{\vartheta}$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(t1, x1(:,2) - x1(:,4), 'r-');
hold on;
yline(0, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$e_{\omega}$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

```

```

figure(6);
clf;

subplot(3,1,1);
plot(t1, x1(:,5), 'r-');
hold on;
plot(t1, K_theta_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\vartheta}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\vartheta}$', '$K_{\vartheta}^*$',
'Interpreter', 'latex', Location='northeast');

subplot(3,1,2);
plot(t1, x1(:,6), 'r-');
hold on;
plot(t1, K_omega_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\omega}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\omega}$', '$K_{\omega}^*$', 'Interpreter',
'latex', Location='northeast');

subplot(3,1,3);
plot(t1, x1(:,7), 'r-');
hold on;
plot(t1, K_theta_c_star, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$K_{\vartheta_c}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\hat{K}_{\vartheta_c}$', '$K_{\vartheta_c}^*$',
'Interpreter', 'latex', Location='northeast');

figure(7);
clf;
subplot(5,2,1);
plot(t1, x1(:,8), 'r-');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\Theta_1$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

subplot(5,2,2);
plot(t1, x1(:,9), 'r-');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\Theta_2$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

subplot(5,2,3);
plot(t1, x1(:,10), 'r-');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

```

```

ylabel(' $\Theta_3$ ', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

subplot(5,2,4);
plot(t1, x1(:,11), 'r-');
xlabel(' $time [sec]$ ', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $\Theta_4$ ', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

subplot(5,2,5);
plot(t1, x1(:,12), 'r-');
xlabel(' $time [sec]$ ', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $\Theta_5$ ', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

function dstate = MRACStepper(t, state)

global B
global J
global Km
global r
global count
global P
global Am
global Q
global Bm

period = t(:,1);
disp("Time Loop t = " + period + "sec");
r0 = 0.087266;

% Parameter Uncertainties
per = 0.75;
B_un = (B - B*per) + ((B + B*per) - (B - B*per))*rand(1);
J_un = (J - J*per) + ((J + J*per) - (J - J*per))*rand(1);
Km_un = (Km - Km*per) + ((Km + Km*per) - (Km - Km*per))*rand(1);

% Plant State Space Matrices
A = [0 1;
     0 -B_un/J_un];
b = [0;
     Km_un/J_un];
% Adaptation Gains
g1 = 2.5;
g2 = 0.4;
g3 = 1.5;
Gx = [g1 0;
     0 g2];

% Increment input signal

```

```

    if (count == floor(period/3))
        r = r + r0;
        count = count + 1;
    end

    % States
    state = state(:);

    x = state(1:2);
    x_m = state(3:4);
    Kx_est = state(5:6);
    Kr_est = state(7);
    % Estimated Error
    e = x - x_m;
    % disp("Calculated Error");

    % Simulation of the system
    % Control Signal
    u = Kx_est'*x + Kr_est*r;
    dx = A*x + b*u;
    dxm = Am*x_m + Bm*r;

    % Adaptive laws
    % dKx = -Gx*x*e'*P*b;
    % dKr = -g3*r*e'*P*b;
    dKx = Gx*Proj(Kx_est, -x*e'*P*b, 1, 1e-2);
    dKr = g3*Proj(Kr_est, -r*e'*P*b, 1, 1e-2);
    dstate = [dx; dxm; dKx; dKr];
end

function dstate = MRACStepperNeuralNetwork(t, state)

    global B
    global J
    global Km
    global r
    global count
    global P
    global Am
    global Q
    global Bm
    global K
    global net

    period = t(:,1);
    disp("Time Loop t = " + period + "sec");
    r0 = 0.087266;

    % Parameter Uncertainties
    per = 0.05;
    B_un = (B - B*per) + ((B + B*per) - (B - B*per))*rand(1);

```

```

J_un = (J - J*per) + ((J + J*per) - (J - J*per))*rand(1);
Km_un = (Km - Km*per) + ((Km + Km*per) - (Km - Km*per))*rand(1);

% Plant State Space Matrices
A = [0 1;
      0 -B_un/J_un];
b = [0;
      Km_un/J_un];
% Adaptation Gains
g3 = 8;
Gx = [10 0;
      0 15];
Gtheta = [.4 0 0 0 0;
           0 .5 0 0 0;
           0 0 .3 0 0;
           0 0 0 .5 0;
           0 0 0 0 .8];

% Increment input signal
if (count == floor(period/3))
    r = r + r0;
    count = count + 1;
    disp("Input has increase by 5 deg!");
end

% States
state = state(:);

x = state(1:2);
x_m = state(3:4);
Kx_est = state(5:6);
Kr_est = state(7);
Ktheta_est = state(8:8+K-1);
T_L1 = 1e-3*(cos(2*x(1))).^2*sin(3*x(1)); % Nm
% Estimated Error
e = x - x_m;
% disp("Calculated Error");
hidden_layer_out = (net.LayerWeights{1})*x(1)
+ net.LayerBiases{1};
for i = 1:K
    phi(i,:) = gaussmf(hidden_layer_out(i),[0.2, 0.5]);
end

% Simulation of the system
% Control Signal
% u = Kx_est'*x + Kr_est*r;
u = Kx_est'*x + Kr_est*r + Ktheta_est'*phi;
% dx = A*x + b*u;
dx = A*x + b*(u - (1/Km_un)*T_L1);
dxm = Am*x_m + Bm*r;

```



```

% Adaptive laws
% dKx = -Gx*x*e'*P*b;
% dKr = -g3*r*e'*P*b;
% dKtheta = -Gtheta*phi*e'*P*b;
dKx = Gx*Proj(Kx_est, -x*e'*P*b, 2, 1e-3);
dKr = g3*Proj(Kr_est, -r*e'*P*b, 5, 1e-3);
dKtheta = Gtheta*Proj(Ktheta_est, -phi*e'*P*b, 1, 1e-4);

dstate = [dx; dxm; dKx; dKr; dKtheta];

end

function out = f(theta, theta_max, e_theta_tol_bound)
%F Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
out = (norm(theta)^2 - theta_max^2)
/(e_theta_tol_bound*theta_max^2);
end

function out = df(theta, theta_max, e_theta_tol_bound)
%DF Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
out = (2*theta)/
(e_theta_tol_bound*theta_max^2);
end

function projectionOperator = Proj(K, y, k_max, e_tol_bound)
% Projection Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
if(f(K, k_max, e_tol_bound) > 0 &&
y'*df(K, k_max, e_tol_bound) > 0)
    projectionOperator = (y - ((df(K, k_max, e_tol_bound)*
df(K, k_max, e_tol_bound)'))
/(norm(df(K, k_max, e_tol_bound))^2))
*y*f(K, k_max, e_tol_bound));
else
    projectionOperator = y;
end
end
end

```

Βιβλιογραφία

- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [4] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [5] Mohammed M'Saad Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [6] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.
- [7] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [10] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [11] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [12] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.
- [13] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [14] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [15] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.