Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

ΔΠΜΣ Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

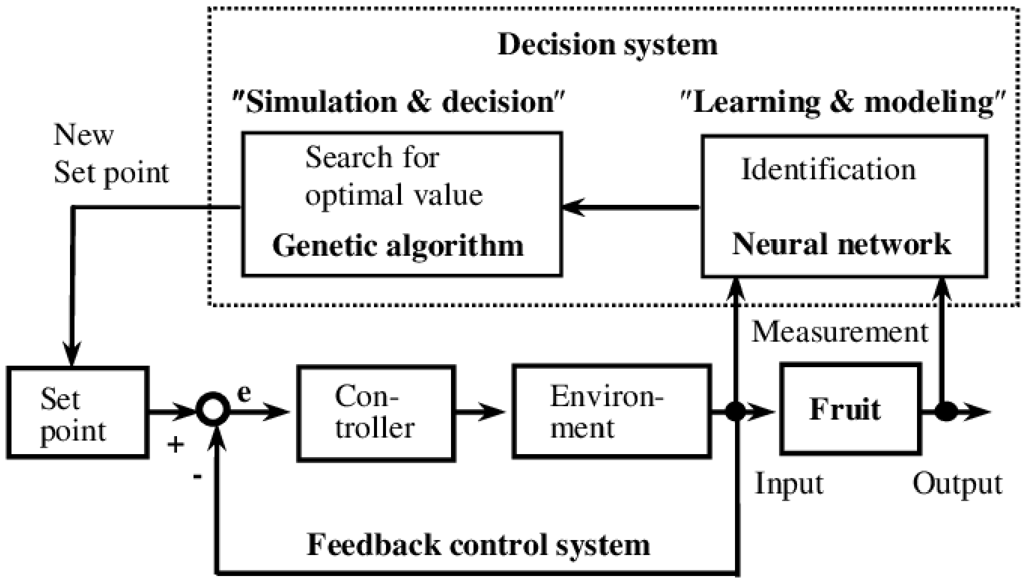
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Ευφυή Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων: Θεωρία Ευστάθειας



Αθήνα, 2023

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 1

Σε αυτή την άσκηση έχουμε να μελετήσουμε ένα μοντέλο της τροχιάς ενός δορυφόρου που κινείται γύρω από τη γη. Η μοντελοποίηση της τροχιάς βασίζεται στη μελέτη της εξίσωσης κίνησης μιας σημειακής μάζας σε ένα ακτινικό πεδίο δυναμικού (βαρυτικό πεδίο), υπακούοντας στο νόμο του αντίστροφου τετραγώνου της απόστασης. Ορίζουμε ως ϱ η ακτινική απόσταση του δορυφόρου από τη Γη, ως ϑ η γωνία περιστροφής και ως f_a , f_e οι μη βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτόν (Σχήμα 1.1).

Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης δίνεται από τον τύπο k/ϱ^2, με το $k > 0$ και για λόγους απλότητας θεωρούμε πως η $m = 1kg$. Οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από:

$$\ddot{\varrho} = \varrho\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{\varrho^2} + f_a \tag{1.1}$$

$$\ddot{\vartheta} = -2\frac{\dot{\vartheta}\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}f_e \tag{1.2}$$

Δοθέντος των παραπάνω εξισώσεων, θα απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα.

Σχήμα 1.1: Τροχιά του δορυφόρου γύρω από την Γη

(α) Αρχικά, θα γραφούν οι εξισώσεις (1.1) και (1.2) στην μορφή του χώρου κατάστασης. Δηλαδή στην μορφή Cauchy. Επομένως, ορίζουμε το διάνυσμα κατάταστης, με διάσταση $n = 4$ ως $x = [\varrho, \dot{\varrho}, \vartheta, \dot{\vartheta}]^T$. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$x_1 = \varrho \tag{1.3}$$

$$x_2 = \dot{\varrho} \tag{1.4}$$

$$x_3 = \vartheta \tag{1.5}$$

$$x_4 = \dot{\vartheta} \tag{1.6}$$

Το επόμενο βήμα είναι να ληφθούν οι παράγωγοι των εξισώσεων (1.3), (1.4), (1.5) και (1.6) , προκειμένου να βρεθεί η αναπαράσταση του χώρου κατάστασης του μη γραμμικού συστήματος.

$$\dot{x}_1 = \dot{\varrho} = x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \tag{1.7}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\varrho} = \varrho\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{\varrho^2} + f_a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - \frac{k}{x_1^2} + u_1 \tag{1.8}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\vartheta} = x_4$$

$$\Rightarrow \dot{x}_3 = x_4 \tag{1.9}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\vartheta} = -2\frac{\dot{\vartheta}\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} f_e$$

$$\Rightarrow \dot{x}_4 = -2\frac{x_2 x_4}{x_1} + \frac{1}{x_1} u_2 \tag{1.10}$$

(β) Μας δόθηκε η αρχική κατάσταση του συστήματος. Αυτή είναι $\varrho(0) = \varrho_0$, $\dot{\varrho}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$ και $\dot{\vartheta}(0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\varrho^3}}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι μόνο η βαρυτική δύναμη δρα στον δορυφόρο, δηλαδή $f_a = f_e = 0$. Για να υπάρχει κυκλική τροχιά, το δυναμικό σύστημα θα πρέπει να λειτουργεί με σταθερή ακτίνα γύρω από τη γη και να περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό γωνίας. Μπορούμε να το πετύχουμε αν ορίσουμε $\ddot{\varrho} = 0$ και $\ddot{\vartheta} = 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} &= 0 \\ \Rightarrow \varrho\dot{\vartheta}^2 - \frac{k}{\varrho^2} &= 0 \\ \Rightarrow \varrho\dot{\vartheta}^2 &= \frac{k}{\varrho^2} \\ \Rightarrow \dot{\vartheta} &= \sqrt{\frac{k}{\varrho^3}} \\ \Rightarrow \dot{\vartheta} &= \omega_0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= 0 \\ \Rightarrow -2\frac{\dot{\vartheta}\dot{\varrho}}{\varrho} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\varrho} &= 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ολοκληρώνουμε την έκφραση (1.11) για να λάβουμε γωνία ϑ. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{\vartheta} du &= \int_0^t \omega_0 du \\ \Rightarrow \vartheta(t) - \vartheta_0 &= \omega_0 t \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0 + \omega_0 t \end{aligned} \tag{1.13}$$

Επιπλέον, ολοκληρώνουμε την έκφραση (1.12) για να λάβουμε μια έκφραση για την ακτίνα.

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{\varrho} du &= \int_0^t 0 du \\ \Rightarrow \varrho(t) - \varrho_0 &= 0 \\ \Rightarrow \varrho(t) &= \varrho_0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Επομένως, οι εξισώσεις (1.11), (1.12), (1.13) και (1.14) είναι υπεύθυνες για την κυκλική τροχιά του ο δορυφόρος. Η ακτίνα της τροχιάς πρέπει να είναι $\varrho(t) = \varrho_0$ για να επιτευχθούν γεωστατικές συνθήκες.

(γ) Το επόμενο βήμα είναι να γραμμικοποιηθεί το μη γραμμικό μοντέλο γύρω από την ονομαστική τροχιά, προκειμένου να ληφθεί ένα απλοποιημένο γραμμικό μοντέλο για το σύστημα. Το ονομαστικό μοντέλο θα είναι:

$$x_0(t) = \begin{bmatrix} \varrho_0 \\ 0 \\ \vartheta_0 + \omega_0 t \\ \omega_0 \end{bmatrix}, u_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Γύρω από αυτήν την ονομαστική τροχιά θα λάβουμε ένα γραμμικό μοντέλο που θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho(t) - \varrho_0 \\ \dot{\varrho}(t) \\ \vartheta(t) - \vartheta_0 - \omega_0 t \\ \dot{\vartheta}(t) - \omega_0 \end{bmatrix} = x(t) - x_0(t) \tag{1.16}$$

Προκειμένου να λύσουμε (1.16), θα εισαγάγουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$z(t) = x_0(t) + \delta z(t), u(t) = u_0(t) + \delta u(t) \tag{1.17}$$

Διαφορίζουμε την εξίσωση του (1.17α), προκειμένου να λάβουμε μια κατά προσέγγιση μορφή για το μοντέλο. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_0(t) + \frac{d}{dt}\delta z(t) &= f(x_0(t) + \delta z(t), u_0(t) + \delta u(t)) \\ \approx f(x_0(t), u_0(t)) &+ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0(t),u_0(t)} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0(t),u_0(t)} \delta u(t) \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι, από την κατασκευή έχουμε

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = f(x_0(t), u_0(t))$$

το γραμμικοποιημένο σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt}\delta z(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0(t),u_0(t)} \delta z(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0(t),u_0(t)} \delta u(t) \tag{1.18}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τους πίνακες του γραμμικού συστήματος του(1.18).

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4^2 + 2\frac{k}{x_1^3} & 0 & 0 & 2x_1x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\frac{x_2x_4}{x_1^2} - \frac{u_2}{x_1^2} & -2\frac{x_4}{x_1} & 0 & -2\frac{x_2}{x_1} \end{bmatrix}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/x_1 \end{bmatrix}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/\varrho_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0(t),u_0(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/\varrho_0 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Η τελική μορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης θα είναι:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/\varrho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_e \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

(δ) Για να ελέγξουμε τη ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος, Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & 0 & -2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Ορίζουμε την εξίσωση (1.22) με 0 για να λάβουμε τις ιδιοτιμές του συστήματος. Έχουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 4×4. Θα την απλοποιήσουμε επιλέγοντας την τρίτη στήλη για να υπολογίσουμε την ορίζουσα.

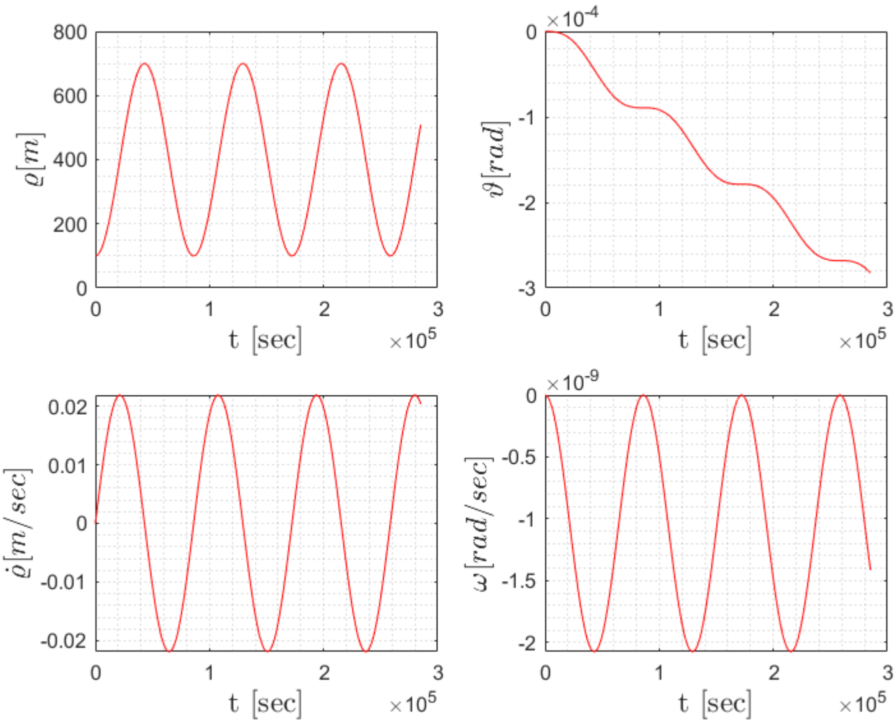
$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & 0 & -2\varrho_0\omega_0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & -2\varrho\omega_0 \\ 0 & 2\frac{\omega_0}{\varrho_0} & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I_4 - A) = \lambda[\lambda(\lambda^2 + 4\omega_0^2) - (-1)(-3\omega_0^2\lambda)]$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I_4 - A) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega_0^2) \quad (1.23)$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.23). Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $\{0, 0, +j\omega_0, -j\omega_0\}$. Παρατηρούμε ότι οι ρίζες του πολυωνύμου βρίσκονται στον φανταστικο άξονα. Έτσι μπορούμε να δούμε ότι δεν έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια. Επομένως το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών δεν είναι αρνητικό. Επίσης το σύστημα δεν είναι ασταθές καθώς οι ιδιοτιμές δεν έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Έτσι, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από τη γραμμική προσέγγιση για τη ευστάθεια.

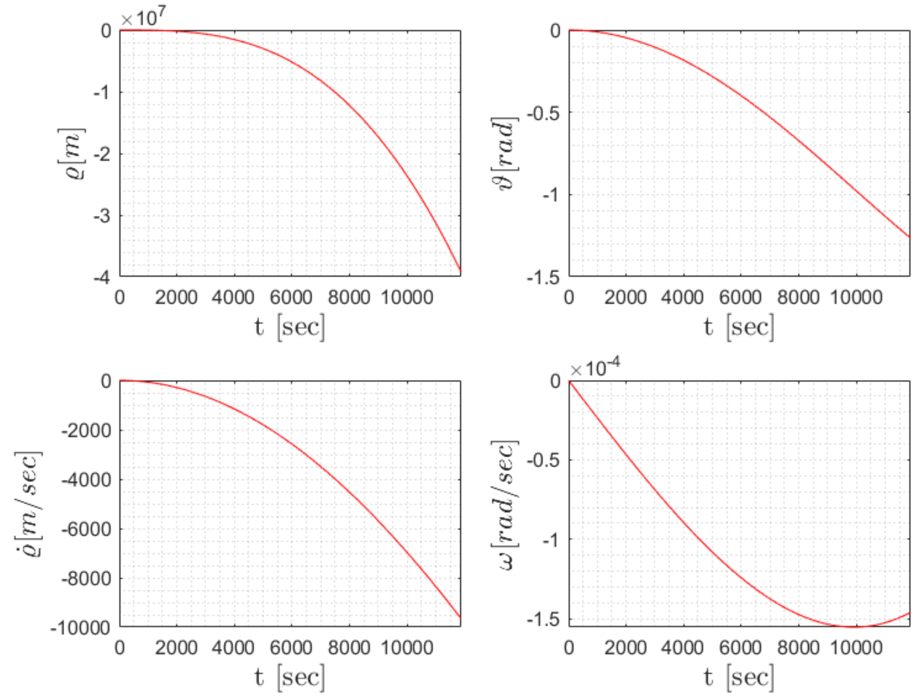
(ε) Γνωρίζουμε ότι $\varrho_0 = 4,218709065 \times 10^7 m$ και $\omega_0 = 7,29219108 \times 10^{-5} rad/sec$. Θα προσομοιώσουμε το γραμμικό σύστημα για αρχικές συνθήκες $z(0) = [100, 0, 0, 0]^T$ και $f_a = f_e = 0$ για τη χρονική περίοδο των $3,3hmern = 285120sec$. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Προσομοίωση τροχιάς γραμμικού μοντέλου για 3, 3 ημέρες, με $f_a = f_e = 0$.

Κατά την προσομοίωση, παρατηρούμε πως ο δορυφόρος εκτελεί ταλάντωση εκτός της ονομαστικής του τροχιάς στην αντίθετη κατεύθυνση. Αυτό οφείλεται στην μη επίδραση των μη βαρυτικών δυνάμεων, καθώς δεν εκτρέπουν τον δορυφόρο να ξεφύγει πολύ. Επίσης, οφείλεται και στις αρχικές συνθήκες του συστήματος που ορίστικαν. Καθώς ο δορυφόρος αρχικοποιείται σε σημείο εκτός της ονομαστικής του τροχιάς, δεν μπορεί να επιστρέψει σε αυτό χωρίς την επίδραση των δυνάμεων στο σώμα.

(στ) Τώρα θα προσομοιώσουμε το γραμμικό σύστημα για αρχικές συνθήκες $z(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ και $f_a = 0$, $f_e = -1$ για τη χρονική περίοδο των $3.3 hours = 11880 sec$. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Προσομοίωση τροχιάς γραμμικού μοντέλου για 3.3 ώρες, με $f_a = 0, f_e = -1$.

Από το σχήμα 1.3 μπορούμε να καταλάβουμε ότι το σύστημα εκτρέπεται από την ονομαστική του τροχιά και κατευθύνεται προς την γη. Αυτό οφείλεται στην μη βαρυτική δύναμη που επιδρά στο σώμα, η οποία το περιστρέφει με αντίθετη γωνία. Έτσι, η ταχύτητα περιστροφής του σώματος μειώνεται, με αποτέλεσμα η απόσταση από την γη να μειώνεται.

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2

Σε αυτή την άσκηση θα αναλύσουμε τη ευστάθεια των μη γραμμικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του Lyapunov.

(α) Έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα στη μορφή Cauchy. :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_1^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο του Λψαπυνο στην εξίσωση (2.1). Οι συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2)$ και $f_2(x_1, x_2)$ είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμες. Το πρώτο βήμα είναι να βρεθεί το σημείο ισορροπίας του συστήματος και στη συνέχεια να πραγματοποιηθεί γραμμικοποίηση γύρω από αυτό το σημείο.

$$f(\boldsymbol{x_e}) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ -\gamma x_1^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Έτσι, θα προκύψουν άπειρα σημεία ισορροπίας για το σύστημα. Ένσ σημείο ισορροπίας που θα εξετάσουμε είναι το $x_e = [0, 1]^T$. Τώρα θα πραγματοποιήσουμε γραμμοποίηση γύρω από αυτό το σημείο και η νέα έκφραση του συστήματος θα περιγραφεί από την εξίσωση (2.3).

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x=[0,1]} x + f_{h.o.t}(x) \cong Ax \tag{2.3}$$

Ο πίνακας A θα υπολογιστεί από την παρακάτω έκφραση:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+x_2 & 1 \\ -2\gamma x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} -1+x_2 & 1 \\ -2\gamma x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Γύρω από το σημείο ισορροπίας ο πίνακας θα πάρει τη μορφή

$$A = \left. \begin{bmatrix} -1+x_2 & 1 \\ -2\gamma x_1 & 0 \end{bmatrix} \right|_{x=[0,1]}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα το γραμμικό σύστημα θα είναι

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{2.4}$$

Ο πίνακας της εξίσωσης (2.4) είναι το άνω τρίγωνο. Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται στη διαγώνιο. Έτσι, οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

Παρατηρούμε πως και οι δύο ιδιοτιμές είναι μηδενικές. Οπότε, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του συτήματος τοπικά.

Έστω ότι έχουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση Lyapunov.

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{2.5}$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι θετική και ακτινικά μη φραγμένη. Τώρα θα εξετάσουμε την παράγωγό της. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(-x_1 + x_1x_2) + x_2(-\gamma x_1^2) \\ &= -x_1^2 + x_1^2x_2 - \gamma x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2 - (\gamma - 1)x_1^2 x_2 \tag{2.6}$$

Η παράγωγος που προκύπτει είναι αρνητικά ημιορισμένη σε μία μικρή περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας. Καθώς και η συνάρτηση είναι θετική, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως έχουμε τοπική ευστάθεια γύρω από το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας, εφόσον το $\gamma \geq 1$. Σε γενικές γραμμές, διαπιστώνουμε πως υπάρχει τοπική ευστάθεια μόνο σε μπάλες B_R με κέντρα τα σημεία ισορροπίας με μικρό ϵ.

(β) Έχουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{x} + 2\dot{x}^3 + 2x = 0 \tag{2.7}$$

Το πρώτο βήμα είναι να φέρετε την εξίσωση (2.7) σε μορφή Cauchy, να βρείτε το σημείο ισορροπίας και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε την πρώτη μέθοδο Lyapunov.Ορίσαμε ως $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$ για να λάβουμε το διάνυσμα του χώρου κατάστασης $z = [x, \dot{x}]^T$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \Rightarrow \dot{x}_1 &= x_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -2\dot{x}^3 - 2x \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2^3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Έτσι το σύστημα στη μορφή Cauchy θα είναι

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2^3 \end{cases} \tag{2.10}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο του Λψαπυνο στην εξίσωση (2.10). Οι συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2)$ και $f_2(x_1, x_2)$ είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμες. Το πρώτο βήμα είναι να βρεθεί το σημείο ισορροπίας του συστήματος και στη συνέχεια να πραγματοποιηθεί γραμμικοποίηση γύρω από αυτό το σημείο.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x_e}) &= 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2^3 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Έτσι, το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι $x_e = [0, 0]^T$. Τώρα θα πραγματοποιήσουμε γραμμοποίηση γύρω από αυτό το σημείο και η νέα έκφραση του συστήματος θα περιγραφεί από την εξίσωση (2.3). Ο πίνακας A θα υπολογιστεί από την παρακάτω έκφραση:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -6x_2^2 \end{bmatrix}$$

Γύρω από το σημείο ισορροπίας ο πίνακας θα πάρει τη μορφή

$$A = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -6x_2^2 \end{bmatrix}\right|_{x=[0,0]}$$
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα το γραμμικό σύστημα θα είναι

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x \tag{2.12}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρείτε τις ιδιοτιμές του συστήματος. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right|$$
$$\Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + 2 \tag{2.13}$$

Θέτουμε την εξίσωση (2.13) ίση με το μηδέν, για να βρούμε τις ιδιοτιμές. Ετσι,

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + 2 = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{2}i$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος βρίσκονται στον φανταστικό άξονα. Άρα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για τη σταθερότητα του συστήματος από τη γραμμική προσέγγιση. Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη μέθοδο *Lyapunov* για να εξετάσουμε την ευστάθεια. Έστω, ότι έχουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 \tag{2.14}$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Θα την παραγωγίσουμε, για να δούμε τις ιδιοτητες της παραγώγου. Άρα έχουμε ότι:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_2\dot{x}_2$$
$$= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2(-2x_1 - 2x_2^3)$$
$$= x_1x_2 - x_2x_1 - x_2^4$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^4 \leq 0 \tag{2.15}$$

Η παράγωγός της είναι αρνητικά ημιορισμένη. Συνεπώς Αυτό που προκύπτει είναι πως έχουμε ευστάθεια. Καθώς προέκυψαν και οι παραπάνω ιδιότητες της υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov, τότε θα έχουμε καθολική ευστάθεια. Ωστόσο, μπορούμε να επεκτήνουμε την διαδικασία, χρησιμοποιώντας το θεώρημα LaSalle . Θα δούμε σε ποιο σημείο μηδενίζεται η παράγωγος της V. Οπότε, έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= 0 \\
\Rightarrow x_2 &= 0 \\
\Rightarrow \dot{x} &= 0
\end{aligned}
$$

Για $\dot{x} = 0$ και $x \neq 0$ Θα προκύψει από την σχέση (2.7) το εξής:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + 2x &= 0 \\
\Rightarrow \ddot{x} &= -2x \neq 0
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε πως για αυτές τις τιμές του x δεν προκύπτει σημείο ισορροπίας, καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι διάφορη του μηδενός. Όταν και το $\dot{x} = 0$ και το $x = 0$, τότε θα προκύψει το σημείο ισορροπίας. Με λίγα λόγια το σύστημα δεν κολλάει στην περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο τιμών $\boldsymbol{S} = \{\dot{x} = 0 \vee x \in \mathbf{R}\}$. Συνπώς, αυτό που θα προκείψει από το θεώρημα LaSalle είναι πως θα προκύψει ασυμπτωτική ευστάθεια. Επίσης, καθώς η υποψήφια συνάρτηση που ορίσαμε είναι ακτινικά μη φραγμένη, τότε το σημείο ισορροπίας είναι Καθολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές.

(γ) Έχουμε το σύστημα σε μορφή χώρου κατάστασης

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x \tag{2.16}
$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I_2 - A) &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \right| \\
\Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 5) + 6 \\
&= \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\
&= \lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda + 6 \\
&= +\lambda(\lambda + 3) + 2(\lambda + 3)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \tag{2.17}
$$

Θέτουμε την εξίσωση (2.17) ίση με το μηδέν, για να βρούμε τις ιδιοτιμές. Ετσι,

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I_2 - A) &= 0 \\
\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 3) &= 0 \\
\lambda_1 = -2, \lambda_2 &= -3
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα ο πίνακας A είναι Hurwirtz. Έτσι έχουμε τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος.

(δ) Έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα με τη μορφή Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - \sigma x_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο του Lyapunov στην εξίσωση (2.18). Οι συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2)$ και $f_2(x_1, x_2)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες. Το πρώτο βήμα είναι να βρεθεί το σημείο ισορροπίας του συστήματος και στη συνέχεια να πραγματοποιηθεί γραμμικοποίηση γύρω από αυτό το σημείο.

$$f(\boldsymbol{x_e}) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ -x_1^2 - \sigma x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Έτσι, το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι $x_e = [0, 0]^T$. Τώρα θα πραγματοποιήσουμε γραμμοποίηση γύρω από αυτό το σημείο και η νέα έκφραση του συστήματος θα περιγραφεί από την εξίσωση (2.3). Ο πίνακας A θα υπολογιστεί από την παρακάτω έκφραση:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + x_2 & x_1 \\ -2x_1 & -\sigma \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = \begin{bmatrix} -2 + x_2 & x_1 \\ -2x_1 & -\sigma \end{bmatrix}$$

Γύρω από το σημείο ισορροπίας ο πίνακας θα πάρει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} -2 + x_2 & x_1 \\ -2x_1 & -\sigma \end{bmatrix}\Bigg|_{x=[0,0]}$$
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, το σύστημα θα γίνει

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} x \tag{2.20}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος. Ο πίνακας A είναι σε διαγώνια μορφή, επομένως οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -\sigma$. Για να υπάρχει ασυμπτωτική τοπική ευστάθεια, οι ιδιοτιμές πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα πρέπει η παράμετρος $\sigma > 0$, για να έχουμε τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια.

Επιπλέον, θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο Lyapunov , για να συμπεράνουμε σχετικά με τη ευστάθεια. Έχουμε την εξής υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{2.21}$$

Από τον ορισμό, η συνάρτηση υποψήφιος είναι θετική και ριζικά απεριόριστη. Θα βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov, έτσι ώστε να ελεγθεί η ευστάθεια του συστήματος.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(-2x_1 + x_1x_2) + x_2(-x_1^2 - \sigma x_2) \\ &= -2x_1^2 + x_1^2x_2 - x_1^2x_2 - \sigma x_2^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2 - \sigma x_2^2 < 0 \tag{2.22}$$

Για την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov, (2.21), με τις ιδιότητές της και με το αποτέλεσμα της (2.22), εάν $\sigma > 0$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 3

Έχουμε το εξής βαθμωτό σύστημα

$$\dot{x} = -(x-1)(x-2)^2 \tag{3.1}$$

Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Οπότε, θα θέσουμε το $\dot{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \Rightarrow -(x-1)(x-2)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} (x-1) = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας στο $x = 1$ και $x = 2$. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε και τις δύο μεθόδους ψαπυνο .

Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο Lyapunov. Η μερική διαφορική εξίσωση που θα προκείψει θα είναι η εξής:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -(x-2)^2 - 2(x-1)(x-2) \tag{3.2}$$

Τώρα θα ελέγξουμε τα δύο σημεία ισορροπίας του συστήματος. Για το σημείο ισορροπίας $x = 1$ ισχύει ότι:

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=1} = -1 < 0$$

Οπότε, η λύση του συστήματος θα γίνει

$$\dot{x} = -x \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-t} \tag{3.3}$$

Παρατηρούμε πως με το $a = -1$, προκύπτει τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Για το σημείο ισορροπίας $x = 2$ ισχύει ότι:

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=2} = 0$$

Προκύπτει πως το $\dot{x} = 0$. Συνεπώς, δεν μπορούμε να διακρίνουμε την ευστάθεια του συστήματος για το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας, διότι το $a = 0$.

Το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιηθεί η δεύτερη μέθοδος Lyapunov και στα δύο σημεία ισορροπίας. Για να το χρησιμοποιήσουμε, θα μεταμορφώσουμε το σύστημα, δημιουργώντας έτσι το 0 ως νέο σημείο ισορροπίας. Η ίδια μέθοδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί και στα δύο σημεία ισορροπίας.

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $y = x - 1$. Οπότε $x = y + 1$ και η νέα δυναμική του συστήματος θα γίνει

$$\dot{y} = f(y+1)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = -y(y-1)^2 \tag{3.4}$$

Τώρα το νέο σημείο ισορροπίας είναι στο $y = 0$. Έχουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov παρακάτω:

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2 \tag{3.5}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Τότε θα πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιότητες της παραγώγου.

$$\dot{V}(y) = y\dot{y}$$
$$\Rightarrow \dot{V}(y) = y(-y(y-1)^2)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(y) = -y^2(y-1)^2 < 0 \tag{3.6}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ορισμένη. Άρα, συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το επόμενο βήμα είναι να ελέγξουμε το άλλο σημείο ισορροπίας. Ορίζουμε μια νέα μεταβλητή $k = x - 2$. Τότε $x = k + 2$ και η νέα δυναμική του συστήματος θα είναι

$$\dot{k} = f(k+2)$$

$$\Rightarrow \dot{k} = -(k+1)k^2 \tag{3.7}$$

Τώρα το νέο σημείο ισορροπίας είναι το $k = 0$. Το επόμενο βήμα είναι η μελέτη της συμπεριφοράς του νέου συστήματος γύρω από αυτό. Έχουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov παρακάτω:

$$V(k) = \frac{1}{2}k \tag{3.8}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη και ακτινικά μη φραγμένη. Τότε θα πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιότητες της παραγώγου.

$$\dot{V}(k) = k\dot{k}$$
$$\Rightarrow \dot{V}(k) = k(-(k+1)k^2)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(k) = -k^3(k+1) \tag{3.9}$$

Για να έχουμε ευστάθεια, η παράγωγος θα πρέπει να αρνητική. Οπότε οι παράγοντες θα πρέπει να είναι ομόσιμοι. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$k(k+1) > 0$$

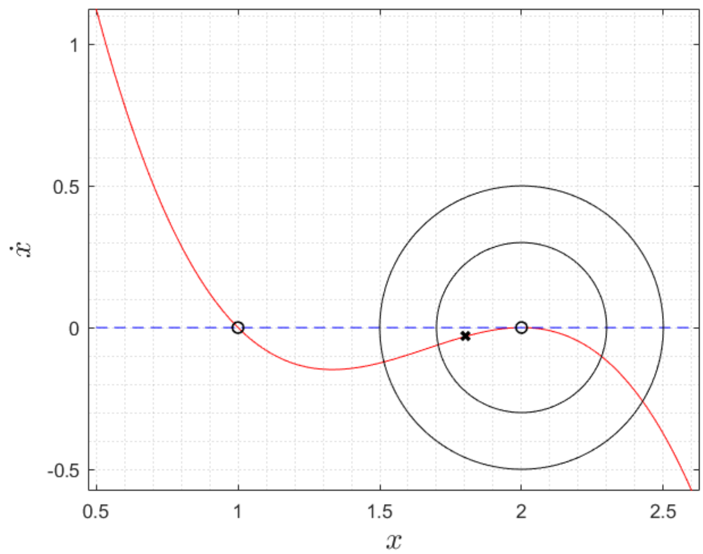
$$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ευστάθειας, θα ορίσουμε δύο ομόκεντρους κύκλους γύρω από το σημείο ισορροπίας O_2. Έστω πως υπάρχει ένας κύκλος με ακτίνα R. Τότε θα πάρουμε ακόμα έναν κύκλο με ακτίνα r μικρότερος του άλλου. Έστω ότι ως αρχική συνθήκη έχουμε το x_0 το οπόιο βρίσκεται εσωτερικά του μικρού κύκλου. Τότε, καθώς σε εκείνη την περιοχή έχουμε ότι το x θα ξεκινήσει να κινείται με αρνητική κλίση, τότε θα φύγει από τον κύκλο ακτίνας R και θα κινηθεί προς το πεδίο έλξης του άλλου σημείου ισορροπίας. Έτσι, δεν θα ισχύει ο ορισμός της ευστάθειας για το παρόν σημείο ισορροπίας. Συνεπώς, δεν μπορεί το σημείο ισορροπίας να είναι ευσταθές. Ενδεικτικά το παράδειγμα το βλέπουμε και στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σημεία ισορροπίας δυναμικού συστήματος

Κεφάλαιο 4

Άσκηση 4

Έχουμε το παρακάτω δυναμικό σύστημα

$$\mathbf{A}\ddot{x} + \mathbf{B}\dot{x} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.1}$$

όπου οι πίνακες $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ και το διάνυσμα κατάστασης είναι $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x}^T, \dot{\boldsymbol{x}}^T]^T \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$.

Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{z}_2 = \dot{\boldsymbol{x}}$. Συνεπώς, η μορφή στον χώρο κατάστασης θα είναι:

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1 = \dot{\boldsymbol{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{z}_2 \tag{4.2}$$

Οι πίνακες είναι θετικά ορισμένοι, το οποίο σημείναι πως είναι συμμετρικοί και έχουν αντίστροφο. Μπορούμε λοιπόν να αντιστρέψουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$, για να βρούμε τη μορφή του χώρου κατάστασης του συστήματος.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_2 &= \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{z}}_2 &= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 &= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.2) και (4.3), θα σχηματιστεί το σύστημα στον χώρο κατάστασης, ο οποίος περιγράφεται από την εξίσωση (4.4)

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & I \\ -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \tag{4.4}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Θέτουμε το $\dot{\boldsymbol{z}} = 0$. Ετσι:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x_e}) &= \boldsymbol{0} \\ \Rightarrow \{\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{4.5}$$

Έτσι το σύστημα έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας που είναι $\boldsymbol{x}_e = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]^T$. Το επόμενο και τελευταίο βήμα είναι να ελέγξετε εάν το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά σταθερό. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη μέθοδο Lyapunov για αυτήν την εργασία. Έχουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov παρακάτω:

$$V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T A\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} \tag{4.6}$$

Η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση, καθώς οι πίνακες A, C είναι θετικά ορισμένοι. Επίσης, είναι και ακτινικά μη φραγμένη συνάρτηση. Θα παραγωγίσουμε την σχέση 4.6, έτσι ώστε να δούμε εάν το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) &= \dot{\boldsymbol{x}}^T A\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T C\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \dot{\boldsymbol{x}}^T(-B\dot{\boldsymbol{x}} - C\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^T C\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= -\dot{\boldsymbol{x}}^T B\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^T C\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T C\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= -\dot{\boldsymbol{x}}^T B\dot{\boldsymbol{x}} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \leq -\lambda_{min}(B)\,|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 \tag{4.7}$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σχέσης (4.7), παρατηρούμε πως η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμενη. Συνεπώς, έχουμε ευστάθεια γύρω από το σημείο ισορροπίας. Ωστόσο, μπορούμε να αποδείξουμε και ασυμπτωτική ευστάθεια για το παρών σημείο ισορροπίας. Θα μελετήσουμε τι γίνεται όταν η παράγωγος είναι 0. Οπότε, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0 \\ \Rightarrow -\dot{\boldsymbol{x}}^T B\dot{\boldsymbol{x}} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{x}} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} &= -A^{-1}C\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Για $\boldsymbol{x}^T \neq 0$ προκύπτει πως δεν βρισκόμαστε στο σημείο ισορροπίας. Ενώ, αν $\boldsymbol{x}^T = 0$, τότε βρισκόμαστε στο σημείο ισορροπίας. Με λίγα λόγια το σύστημα δεν κολλάει στην περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας. Επιπλέον, καθώς οι πίνακες A, C είναι πλήρους τάξης, αυτό που θα προκύψει είναι ότι το σημείο ισορροπίας θα είναι μοναδικό. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο τιμών $\boldsymbol{S} = \{\dot{\boldsymbol{x}}^T = 0 \vee \boldsymbol{x}^T \in \mathbf{R}^{2n\times 1}\}$. Συνεπώς, αυτό που θα προκείψει από το θεώρημα LaSalle είναι πως θα προκύψει ασυμπτωτική ευστάθεια. Επίσης, καθώς η υποψήφια συνάρτηση που ορίσαμε είναι ακτινικά μη φραγμένη, τότε το σημείο ισορροπίας είναι Καθολικά Ασυμπτωτικά Ευσταθές.

Παράρτημα Α'

Κώδικας Προσομοίωσης

Στο παράρτημα Α παρουσιάζεται ο κώδικας της προσομοίωσης της πρώτης άσκησης και η ανάλυση της ευστάθειας της τρίτης άσκησης.

```
%% Orbit simulation of a satellite with its linear and nonlinear system
% Assignment 1
% Exercise 1
%       Name: George Krommydas
%       A.M.: 02121208
clear;
clc;

%% Parameters
global fe
global fa
global k


fa = 0;                          % N
fe = -1;                          % N
r0 = 4.218709065*1e7;            % m
w0 = 7.29219108*1e-5;            % rad/sec
k = w0^2*r0^3;                   % N
t_span = 0:dt:285120;             % sec
%t_span = 0:dt:11880;             % sec
%% Nonlinear System Solving
x0 = [r0; 0; 0; w0];

[t,x] = ode45(@equations, t_span, x0);

%% Linear System Solving

A = [0          1           0   0;
     3*w0^2  0           0   2*r0*w0;
     0          0           0   1;
     0       -2*w0/r0   0   0];
B = [0   0;
     1   0;
     0   0;
     0   1/r0];
```

```
C = eye(4)';
D = 0;
u = [fa; fe].*ones(size(t_span));
z0 = [100; 0; 0; 0];
%z0 = [0; 0; 0; 0];
sys = ss(A,B,C,D);
z = lsim(sys,u,t_span,z0);

%% Nonlinear Model Simulation

figure(1);
clf;
subplot(2,2,1);
plot(t, x(:,1),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\varrho  [m]$', "Interpreter","latex","FontSize",14);
grid minor;

subplot(2,2,3);
plot(t, x(:,2),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\dot{\varrho}  [m/sec]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

subplot(2,2,2);
plot(t, x(:,3),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\vartheta  [rad]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

subplot(2,2,4);
plot(t, x(:,4),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\omega  [rad/sec]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

%% Linear Model Simulation

figure(2);
clf;
subplot(2,2,1);
plot(t_span, z(:,1),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\varrho  [m]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

subplot(2,2,3);
plot(t_span, z(:,2),'b--');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\dot{\varrho}  [m/sec]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;
```

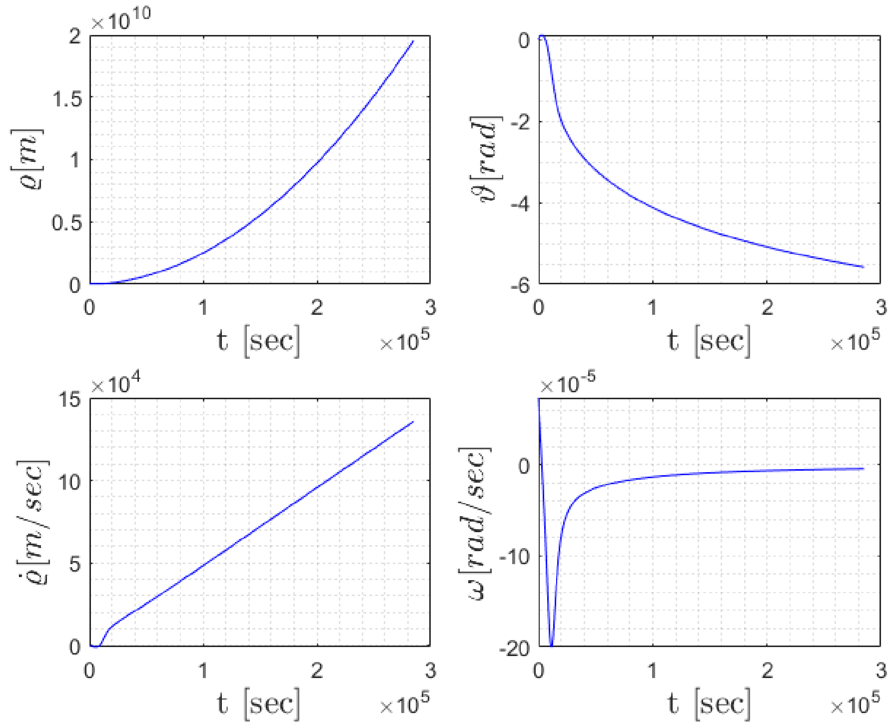
```
subplot(2,2,2);
plot(t_span, z(:,3), 'b-');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\vartheta  [rad]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

subplot(2,2,4);
plot(t_span, z(:,4), 'b-');
xlabel('t [sec]', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
ylabel('$\omega  [rad/sec]$', "Interpreter", "latex","FontSize",14);
grid minor;

function dx = equations(t,x)
%% State spece form of the nonlinear model
     global fa
    global fe
    global k
    dx = [x(2); x(1)*x(4)^2 - k/x(1)^2 + fa; x(4);
        -(2*x(4)*x(2))/x(1) + (1/x(1))*fe];
end

%% Stability Analysis Exable
% Assignment 1 - Exercise 3
%       Name: George Krommydas
%       A.M.: 02121208

clc;
clear;
close all;
syms z y k l


%% Dynamical System
x = 0.5:0.0000001:2.6;
x_dot = -(x-1).*((x-2).^2);

% Circle Parameters
R = 0.5;
r = 0.3;
z0 = 0;
y0 = 2;

% Plot
figure(1);
plot(x, x_dot,'r-');
hold on;
plot(x, zeros(size(x)),'b--');
fimplicit((y-y0).^2 + (z-z0).^2 - R^2,'k-');
fimplicit((k-y0).^2 + (l-z0).^2 - r^2,'k-');
plot(1.80279,-0.0312219, 'kx','LineWidth',2);
plot(1,0,'ko','LineWidth',1);
```

```
plot(2,0,'ko','LineWidth',1);
axis equal;
grid minor;
xlabel("$x$","Interpreter","latex","FontSize",16);
ylabel("$\dot{x}$","Interpreter","latex","FontSize",16)
```

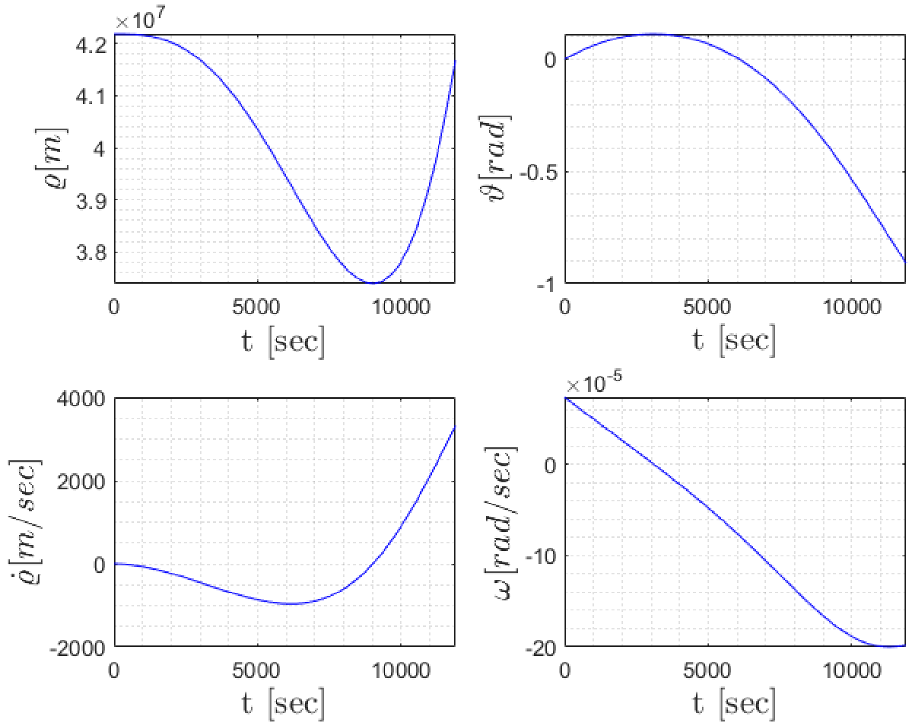
Παράρτημα Β΄

Προσομοίωση Μη Γραμμικού Μοντέλου

Στο Παράρτημα Β έχουμε την προσομοίωση για το μη γραμμικό μοντέλο. Στα σχήματα Β΄.1 και Β΄.2 βλέπουμε τις προσομοιώσεις για το μη γραμμικό μοντέλο.



Σχήμα Β΄.1: Μη γραμμικό μοντέλο προσομοίωσης τροχιάς για 3.3 μέρες με $f_a = f_e = 0$.



Σχήμα Β΄.2: Μη γραμμικό μοντέλο προσομοίωσης τροχιάς για 3.3 ώρες με $f_a = 0, f_e = -1$.

Βιβλιογραφία

[1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: `10.1007/978-94-015-9261-1`.

[2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.

[3] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.

[4] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: `10.1007/978-0-471-72788-0`.

[5] Mohammed M'Saad Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: `10.1007/978-0-85729-664-1`.

[6] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.

[7] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: `10.1007/978-1-84628-615-5`.

[8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.

[9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: `10.1007/978-1-118-28945-7`.

[10] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7`.

[11] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.

[12] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: `10.1007/978-0-89871-615-3`.

[13] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: `10.1007/978-981-15-8045-1`.

[14] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.

[15] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: `10.1007/978-94-011-5498-7`.