



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων μηχανικών

ΔΠΜΣ Συστήματα αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

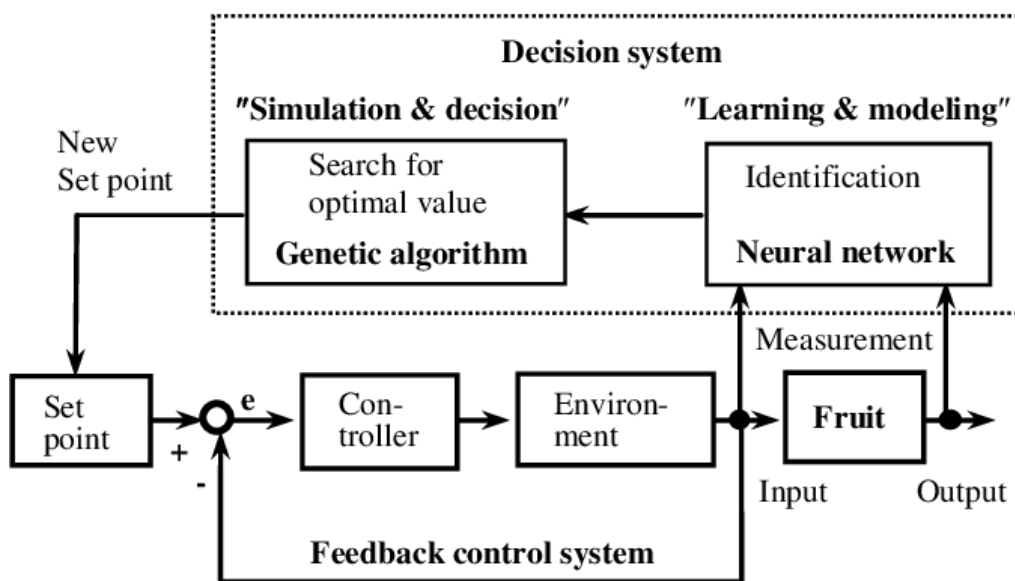
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Ευφυή Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων: MIT Rule



Αθήνα, 2023

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων	2
1 Άσκηση 1	3
1.1 Σχεδίαση Ελεγκτή	3
1.2 Προσομοίωση Ελεγκτή	6
2 Άσκηση 2	10
2.1 Σχεδίαση Ελεγκτή	10
2.2 Προσομοίωση Ελεγκτή	13
Α' Κώδικας Προσομοίωσης	19
Α'.1 Κώδικας Πρώτης Άσκησης	19
Α'.2 Κώδικας Προσομοίωσης Δεύτερης Άσκησης	21
Βιβλιογραφία	24

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Μπλοκ διαγραμμα ελεγκτή MIT Rule.	5
1.2	Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.2, \zeta = 0.707$ και $\omega = 1$	6
1.3	Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.2, \zeta = 0.707$ και $\omega = 10$	7
1.4	Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.5, \zeta = 0.707$ και $\omega = 10$	8
1.5	Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 1, \zeta = 1$ και $\omega = 10$	9
2.1	Μπλοκ διαγραμμα ελεγκτή MIT Rule.	12
2.2	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2, b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 0.2$	13
2.3	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2, b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 0.5$	14
2.4	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2, b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 1.0$	15
2.5	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5, b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 0.2$	16
2.6	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5, b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 0.5$	17
2.7	Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5, b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 1.0$	18

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 1

Μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς μιας διεργασίας η οποία είναι:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+a)} \quad (1.1)$$

όπου η παράμετρος a είναι μια άγνωστη σταθερά. Θα σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή για το παραπάνω σύστημα που θα βασιστεί στον νόμο προσαρμογής MIT Rule. Ο στόχος του ελεγκτή είναι να παρακολουθήσει το μοντέλο αναφοράς:

$$M(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (1.2)$$

όπου τα $\zeta, \omega > 0$ είναι οι παράμετροι της συνάρτησης μεταφοράς.

1.1 Σχεδίαση Ελεγκτή

Γνωρίζουμε πως το σύστημα προς έλεγχο είναι δεύτερης τάξης. Συνεπώς, μια καλή λύση για το σύστημα είναι ο ελεγκτής που θα χρησιμοποιήσουμε να είναι τύπου PD μαζί με *feedforward*. Έτσι, δεν θα έχουμε αστάθεια στο σύστημα κλειστού βρόχου. Αυτή η λύση αποτελεί καλύτερη επιλογή καθώς μόνο με την χρήση του P όρου θα έπεφτε σε αστάθεια. Αυτό θα οφειλόταν στο γεγονός πως δεν θα είχαν τοποθετηθεί σωστά και οι δύο πόλοι του συστήματος στο αρνητικό ημιεπίπεδο του φανταστικού άξονα. Έτσι, με αυτό το σκεπτικό έχουμε τον εξής νόμο ελέγχου:

$$u = \vartheta_1 r - \vartheta_2 y_p - \vartheta_3 \dot{y}_p \quad (1.3)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την έξοδο των συστημάτων αναφοράς και διεργασίας. Οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} y_p &= P(s)u \\ \Rightarrow y_p &= \frac{1}{s(s+a)}(\vartheta_1 r - \vartheta_2 y_p - \vartheta_3 \dot{y}_p) \\ \Rightarrow (s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2)y_p &= \vartheta_1 r \\ \Rightarrow y_p &= \frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r \end{aligned} \quad (1.4)$$

Τώρα θα βρούμε και την σχέση της εξόδου του μοντέλου αναφοράς:

$$\begin{aligned} y_m &= M(s)r \\ \Rightarrow y_m &= \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \end{aligned} \quad (1.5)$$

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το σφάλμα παρακολούθησης του συστήματος και να ορίσουμε τους νόμους προσαρμογής των παραμέτρων. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$e_0 = y_p - y_m \quad (1.6)$$

Ο γενικός νόμος προσαρμογής της μεθόδου MIT Rule είναι ο:

$$\dot{\vartheta} = -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta} e_0 \quad (1.7)$$

Οπότε, Θα συνδυάσουμε τις σχέσεις (1.4), (1.5) και (1.6) και θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους του σφάλματος παρακολούθησης ως προς τις παραμέτρους του ελεγκτή. Για την πρώτη παράμετρο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r - \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r \end{aligned} \quad (1.8)$$

Για την δεύτερη παράμετρο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r - \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \right) \\ &= -\frac{\vartheta_1}{(s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2)^2} r \\ &= -\frac{1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} \left(\frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r \right) \\ \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} &= -\frac{1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} y_p \end{aligned} \quad (1.9)$$

Για την τρίτη παράμετρο ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_3} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_3} \left(\frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r - \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \right) \\ &= -\frac{s\vartheta_1}{(s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2)^2} r \\ &= -\frac{s}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} \left(\frac{\vartheta_1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} r \right) \\ &= -\frac{s}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} y_p \\ \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_3} &= -\frac{1}{s^2 + (a + \vartheta_3)s + \vartheta_2} \dot{y}_p \end{aligned} \quad (1.10)$$

Τώρα θα κάνουμε την εξής προσέγγιση:

$$s^2 + (\vartheta_3 + a)s + \vartheta_2 \approx s^2 + (\vartheta_3^* + a)s + \vartheta_2^* = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 \quad (1.11)$$

Το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.7) και να βρούμε τους νόμους προσαρμογής. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε και την προσέγγιση της σχέσης (1.11). Ως

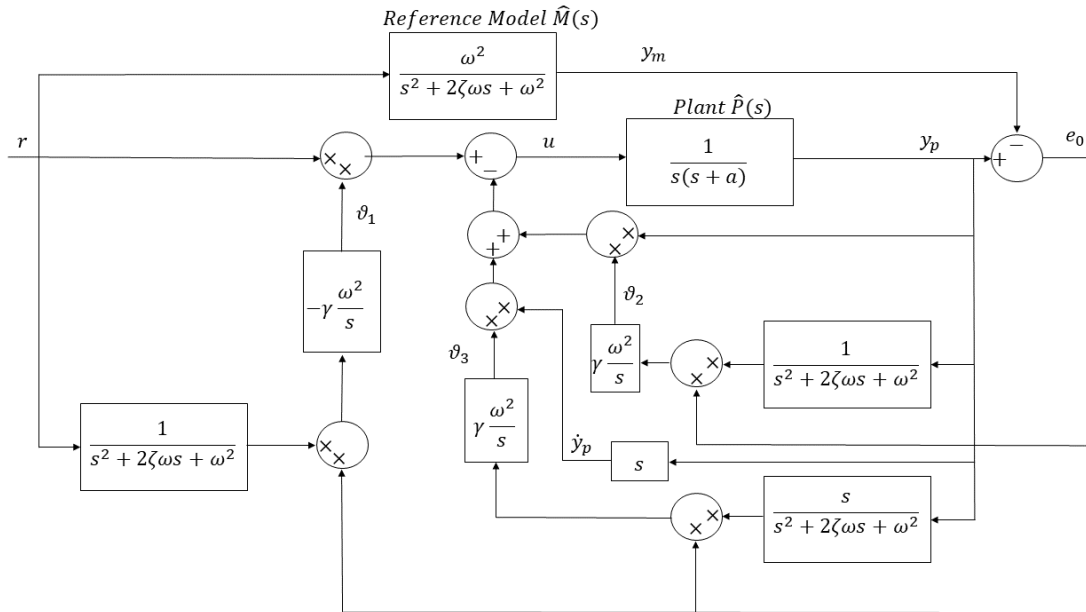
κέρδος θα ορίσουμε την ποσότητα $\gamma' = \gamma\omega^2$, έτσι ώστε να σχηματιστεί το κατάλληλο φίλτρο για τος νόμους ελέγχου. Οπότε, οι νόμοι ελέγχου θα γίνουν οι εξής:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1 &= -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} e_0 \\ \dot{\vartheta}_1 &= -\gamma \left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \right) e_0\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_2 &= -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} e_0 \\ \dot{\vartheta}_2 &= \gamma \left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} y_p \right) e_0\end{aligned}\quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_3 &= -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_3} e_0 \\ \dot{\vartheta}_3 &= \gamma \left(\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \dot{y}_p \right) e_0\end{aligned}\quad (1.14)$$

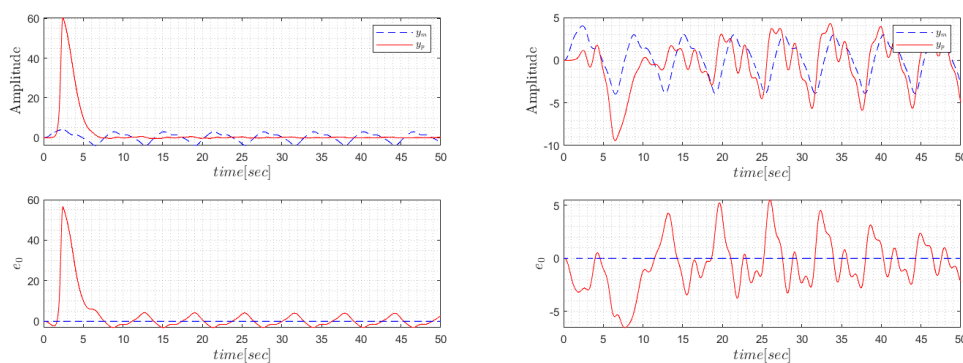
Με τους νόμους (1.12), (1.13) και (1.14) μπορούμε να αλλάξουμε τους πόλλους και τα μηδενικά του συστήματος, έτσι ώστε να προσεγγίζει το μοντέλο αναφοράς. Ένα μπλοκ διαγράμμα του συστήματος φαίνεται και στο σχήμα 1.1



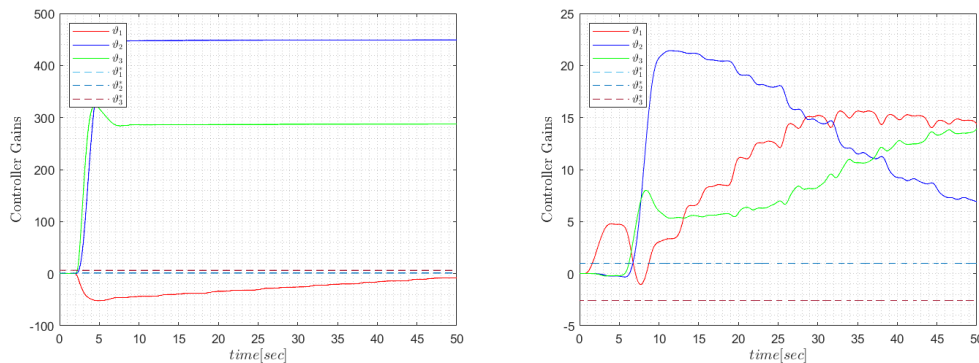
Σχήμα 1.1: Μπλοκ διαγράμμα ελεγκτή MIT Rule.

1.2 Προσομοίωση Ελεγκτή

Το επόμενο βήμα είναι να προσομοιώσουμε το παραπάνω σύστημα με τους νόμους αυτούς, έτσι ώστε να δούμε εάν λειτουργεί σωστά. Τα πειράματα έγιναν με διάφορες τιμές των παραμέτρων και διαφορετικές εισόδους. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν παρακάτω τα αποτελέσματα με ένα σύνολο παραμέτρων, το οποίο είχε ενδιαφέρον αποτελέσματα ως προς την σύγκλιση των παραμέτρων στις επιθυμητές τιμές και της εξόδου στο μοντέλο αναφοράς. Η παράμετρος a προσομοιώθηκε με τιμές 4 και -5 . Η παράμετρος ζ προσομοιώθηκε με τις τιμές 0.707 και 1. Τέλος, η παράμετρος ω προσομοιώθηκε με τις τιμές 1rad/sec και 10rad/sec . Στο σύστημα κλειστού βρόχου εφαρμόστηκαν τρεις διαφορετικές εισόδους. Η πρώτη είσοδος αποτελείται από μία βηματική συνάρτηση. Η δεύτερη είσοδος που εφαρμόστηκε αποτελείται από μία ημιτονοειδής συνάρτηση. Τέλος, η τρίτη είσοδος που εφαρμόστηκε αποτελείται από άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων διαφορετικών συχνοτήτων.



(α') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = -5$. (β') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = 4$.

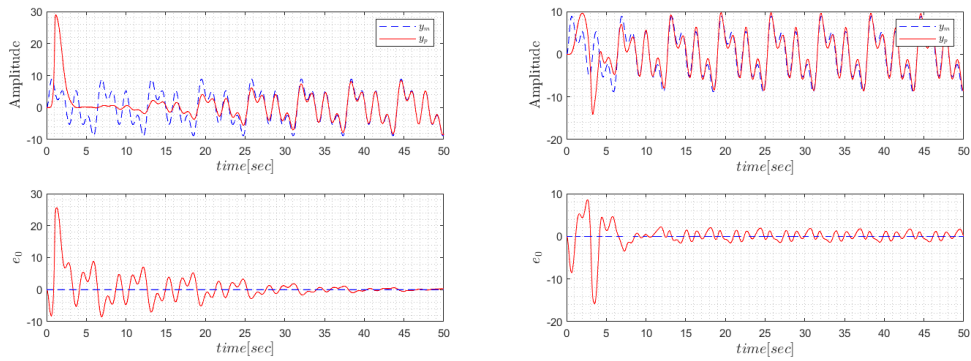


(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = -5$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = 4$.

Σχήμα 1.2: Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.2, \zeta = 0.707$ και $\omega = 1$.

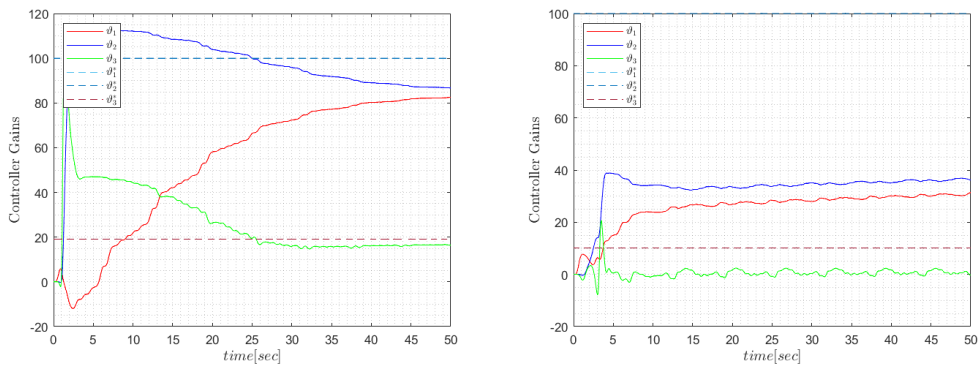
Στο σχήμα 1.2 παρατηρούμε την προσομοίωση του συστήματος με τις ίδιες παραμέτρους, ωστόσο με διαφορετικές τιμές στους πόλους της διεργασίας. Με το επιλεγμένο σενάριο παραμέτρων παρατηρούμε πως στην πρώτη περίπτωση η έξοδος δεν συγκλίνει ακριβώς στο μοντέλο αναφοράς και οι παράμετροι του ελεγκτή δεν συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές του. Ένα πρόβλημα εμφανίζεται στην επιλογή της συχνότητας ω . Μία μεγαλύτερη τιμή θα μπορούσε να εξομαλύνει την λειτουργία του ελεγκτή και να αποκόψει τις υψηλές συχνότητες του συστήματος. Έτσι, το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με την αλλαγή των παραμέτρων. Εάν αντί για $\omega = 1$ επιλέξουμε $\omega = 10$, τότε θα έχουμε ένα καλύτερο αποτέλεσμα ως προς την

τοποθέτηση των πόλων του συστήματος.



(α') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = -5$.

(β') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = 4$.

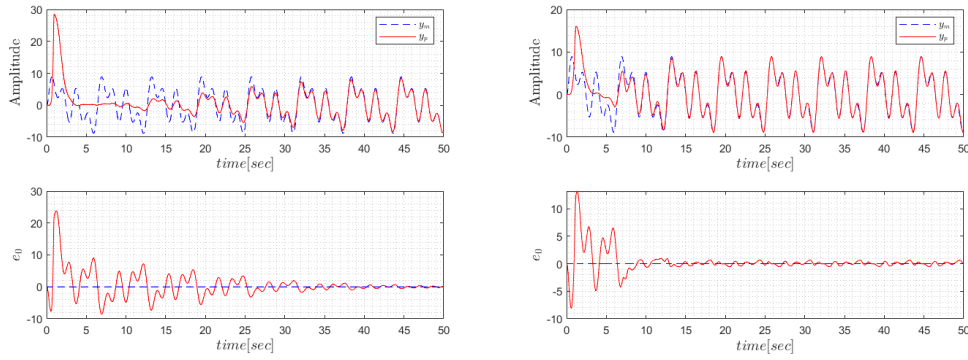


(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = -5$.

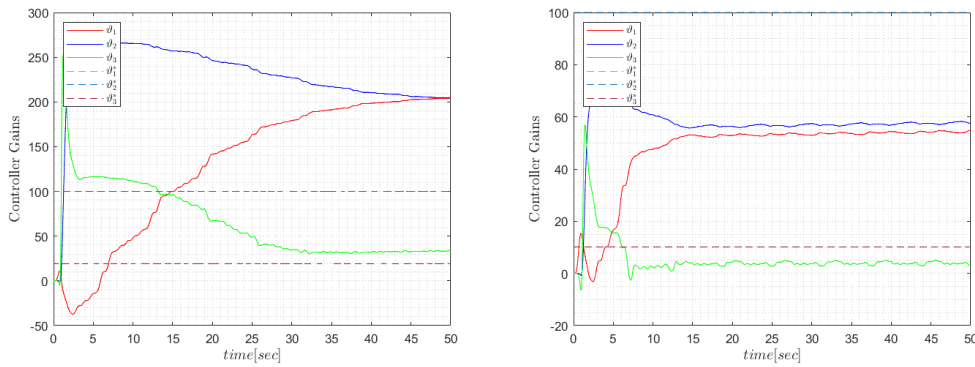
(δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = 4$.

Σχήμα 1.3: Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.2, \zeta = 0.707$ και $\omega = 10$.

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα 1.3 το πραγματικό σύστημα προσεγγίζει καλύτερα το μοντέλο αναφοράς και μάλιστα με μικρότερα σφάλματα. Ωστόσο αυτό δεν συνεπάγεται πως και οι παράμετροι του συστήματος συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές. Μία λύση είναι να αυξήσουμε το κέρδος γ στον ελεγκτή μας. Την επιλέγουμε την τιμή ως 0.5. Το αποτέλεσμα της προσομοίωσης παρουσιάζεται στο σχήμα 1.4. Το σφάλμα παρακολούθησης σύγκλινε γρηγορότερα στο μηδέν, ωστόσο οι παράμετροι δεν πήγαν στις επιθυμητές τιμές.



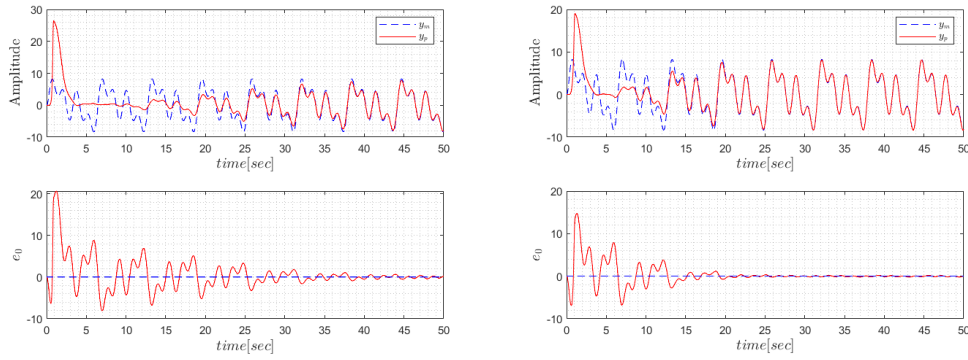
(α') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = -5$. (β') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = 4$.



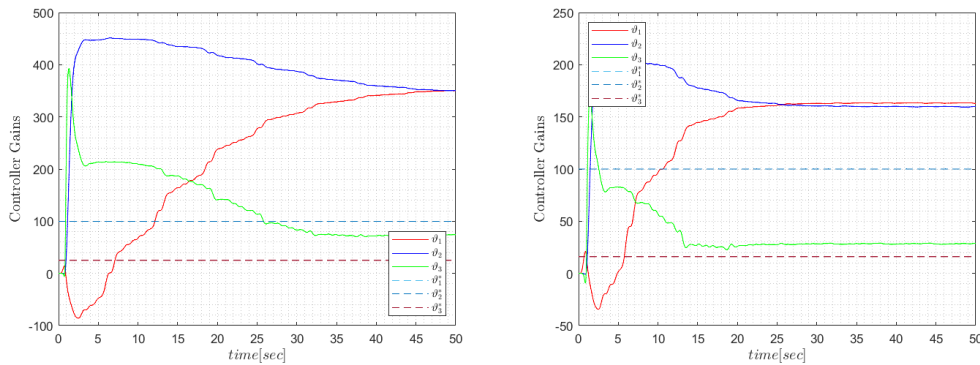
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = -5$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = 4$.

Σχήμα 1.4: Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 0.5, \zeta = 0.707$ και $\omega = 10$.

Ακόμα ένα τελευταίο βήμα είναι να αυξήσουμε και την παράμετρο ζ από το 0.707 στο 1. Επίσης, αυξάνουμε και το κέρδος γ στην τιμή 1. Στο σχήμα 1.5 παρατηρείται η προσομοίωση του συστήματος. Βλέπουμε πως η σύγκλιση του σφάλματος παρακολούθησης γίνεται σε μικρότερο χρόνο. Ωστόσο οι παράμετροι θ_i δεν συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές.



(α') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = -5$. (β') Έξοδοι συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με τον πόλο στο $a = 4$.



(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = -5$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με τον πόλο στο $a = 4$.

Σχήμα 1.5: Προσομοίωση Συστήματος κλειστού βρόχου με τιμές $\gamma = 1, \zeta = 1$ και $\omega = 10$.

Το πρόβλημα της σύγκλισης των παραμέτρων πηγάζει από την ίδια την ευστάθεια του συστήματος. Καθώς οι προσαρμοστικοί νόμοι εγγυούνται μόνο ευστάθεια στο σύστημα και όχι ασυμπτωτική, τότε η μόνη λύση είναι να κανονικοποιήσουμε τα σήματα του συστήματος. Έτσι, θα έχουμε μια πιο ισχυρή συνθήκη *PE*. Επιπλέον, η αύξηση του κέρδους γ θα είχε αρνητικές επιπτώσεις στο σύστημα, καθώς οι παράμετροι του συστήματος θα έχουν μεγάλες τιμές και η λύση του συστήματος θα εκτοξευθεί ακαριαία. Συνεπώς, μια καλή λύση του προβλήματος αποτελεί η επιλογή των παραμέτρων $(\gamma, \zeta, \omega) = (1, 1, 10)$. Έτσι, το σύστημα θα συγκλίνει στο μοντέλο αναφοράς και οι παράμετροι του ελεγκτή θα βρίσκονται κοντά στις περιοχές των επιθυμητών τους τιμών.

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2

Μας δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς μιας διεργασίας η οποία είναι:

$$P(s) = \frac{b}{s} \quad (2.1)$$

όπου η παράμετρος b είναι μια άγνωστη σταθερά. Θα σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή για το παραπάνω σύστημα που θα βασιστεί στον νόμο προσαρμογής MIT Rule. Ο στόχος του ελεγκτή είναι να παρακολουθήσει το μοντέλο αναφοράς:

$$M(s) = \frac{a_m}{s + b_m} \quad (2.2)$$

όπου τα $a_m > 0$, $b_m > 0$ αποτελούν τις παραμέτρους του μοντέλου αναφοράς.

2.1 Σχεδίαση Ελεγκτή

Το σύστημα το οποίο θέλουμε να ελέγξουμε είναι πρώτης τάξης. Οπότε, ως σύστημα ελέγχου θα ορίσουμε τον εξής:

$$u = \vartheta_1 r - \vartheta_2 y_p \quad (2.3)$$

όπου οι παράμετροι ϑ_1 και ϑ_2 αποτελούν τις παραμέτρους του ελεγκτή οι οποίοι νασίζονται στον προσαρμοστικό νόμο του *MIT Rule*. Η μορφή του ελεγκτή είναι τύπου P και *feedforward*, καθώς θέλουμε να τοποθετήσουμε τον πόλο του συστήματος στο 0 και να ρυθμίσουμε κατάλληλα το κέρδος του αριθμητή. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την έξοδο των συστημάτων αναφοράς και διεργασίας. Οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} y_p &= P(s)u \\ \Rightarrow y_p &= \frac{b}{s}(\vartheta_1 r - \vartheta_2 y_p) \\ \Rightarrow (s + b\vartheta_2)y_p &= b\vartheta_1 r \\ \Rightarrow y_p &= \frac{b\vartheta_1}{s + b\vartheta_2} r \end{aligned} \quad (2.4)$$

Τώρα θα βρούμε και την σχέση της εξόδου του μοντέλου αναφοράς:

$$\begin{aligned} y_m &= M(s)r \\ \Rightarrow y_m &= \frac{a_m}{s + b_m} r \end{aligned} \quad (2.5)$$

Συνεπώς θα ορίσουμε το σφάλμα παρακολούθησης των μοντέλων ως εξής:

$$e_0 = y_p - y_m \quad (2.6)$$

Ο γενικός νόμος προσαρμογής της μεθόδου MIT Rule είναι ο:

$$\dot{\vartheta} = -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta} e_0 \quad (2.7)$$

Οπότε, Θα συνδυάσουμε τις σχέσεις (2.4), (2.5) και (2.6) και θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους του σφάλματος παρακολούθησης ως προς τις παραμέτρους του ελεγκτή. Για την πρώτη παράμετρο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left(\frac{b\vartheta_1}{s + b\vartheta_2} r - \frac{a_m}{s + b_m} r \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} = \frac{b}{s + b\vartheta_2} r \end{aligned} \quad (2.8)$$

Για την δεύτερη παράμετρο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left(\frac{b\vartheta_1}{s + b\vartheta_2} r - \frac{a_m}{s + b_m} r \right) \\ &= -\frac{b^2 \vartheta_1}{(s + b\vartheta_2)^2} r \\ &= -\frac{b}{s + b\vartheta_2} \left(\frac{b\vartheta_1}{s + b\vartheta_2} r \right) \\ \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} &= -\frac{b}{s + b\vartheta_2} y_p \end{aligned} \quad (2.9)$$

Οι εξισώσεις που προέκυψαν δεν μπορούν να υλοποιηθούν λόγω της άγνωστης παραμέτρου b . Έτσι, θα κάνουμε την εξής προσέγγιση:

$$s + b\vartheta_2 \approx s + b\vartheta_2^* = s + a_m \quad (2.10)$$

Με την σχέση (2.10) μπορούμε να τροποποιήσουμε τις σχέσεις (2.8) και (2.9) ως εξής:

$$\frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} = \frac{b}{s + a_m} r \quad (2.11)$$

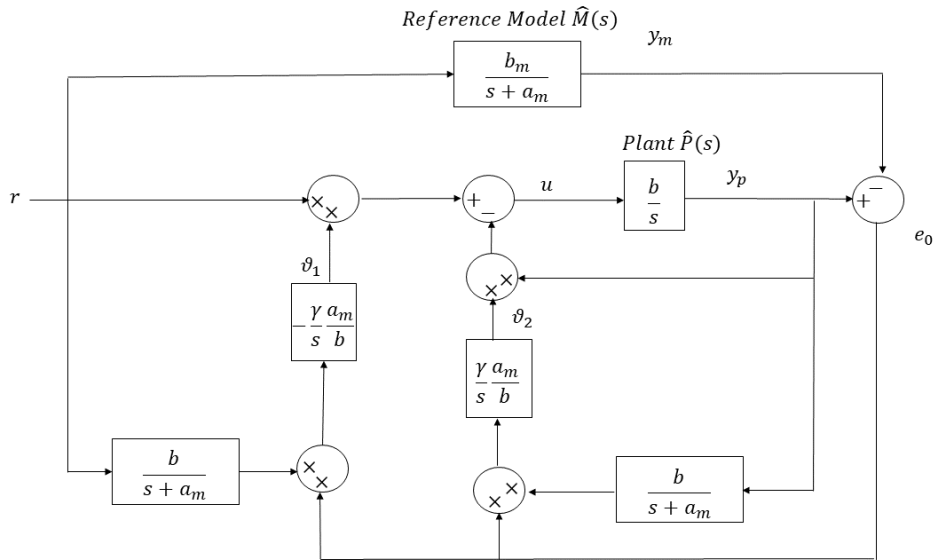
$$\frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} = -\frac{b}{s + a_m} y_p \quad (2.12)$$

Το επόμενο βήμα είναι να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.7) και να βρούμε τους νόμους προσαρμογής. Ως κέρδος θα ορίσουμε την ποσότητα $\gamma' = \gamma \frac{a_m}{b}$, έτσι ώστε να σχηματιστεί το κατάλληλο φίλτρο για τους νόμους ελέγχου. Οπότε, οι νόμοι ελέγχου θα γίνουν οι εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_1 &= -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_1} e_0 \\ \dot{\vartheta}_1 &= -\gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} r \right) e_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_2 &= -\gamma' \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta_2} e_0 \\ \dot{\vartheta}_2 &= \gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} y_p \right) e_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Με τους νόμους (2.13) και (2.14) μπορούμε να αλλάξουμε τον πόλο του συστήματος, έτσι ώστε να προσεγγίζει το μοντέλο αναφοράς. Επιπλέον, για να έχει νόημα η παραπάνω ανάλυση και λειτουργεί σωστά ο ελεγκτής, θα πρέπει να υποθέσουμε πως η άγνωστη παράμετρος του συστήματος b , θα πρέπει να είναι θετική και διαφορετική του μηδενός. Διαφορετικά, οι νόμοι αυτοί δεν θα μπορέσουν να λειτουργήσουν σωστά. Ένα μπλοκ διάγραμμα του συστήματος φαίνεται και στο σχήμα 2.1.

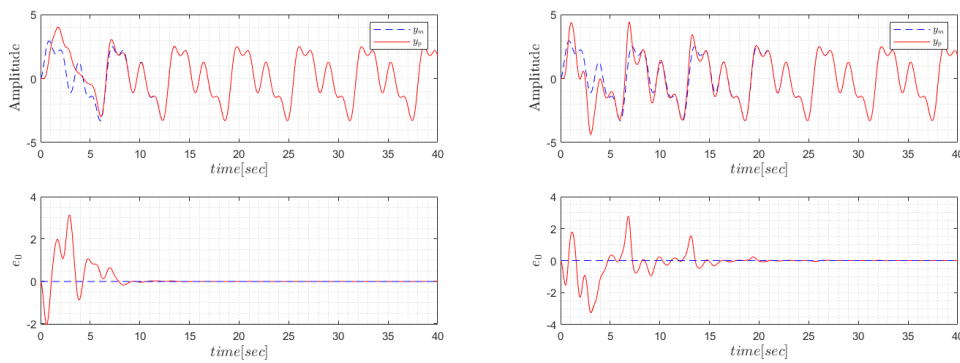


Σχήμα 2.1: Μπλοκ διάγραμμα ελεγκτή MIT Rule.

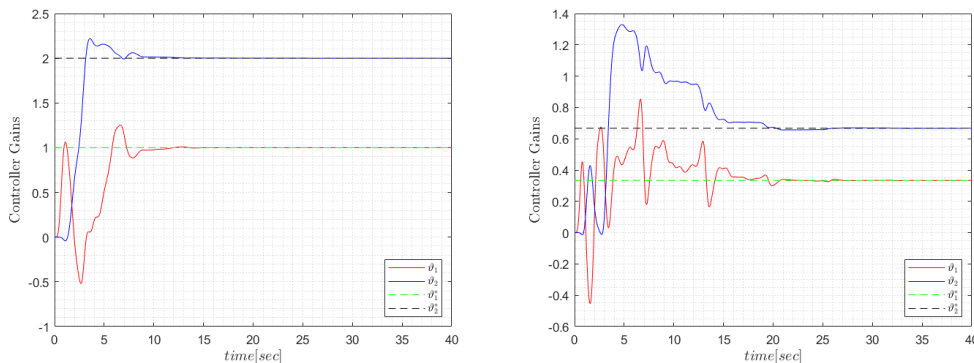
2.2 Προσομοίωση Ελεγκτή

Έχουμε σχεδιάσει τον ελεγκτή μας και το επόμενο βήμα είναι να τον προσομοιώσουμε με επιλογή των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου αναφοράς. Μετά από προσομοιώσεις και επιλογή των παραμέτρων, χρησιμοποιήθηκαν για το $b = 1$ και $b = 3$. Για το μοντέλο αναφοράς χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $a_m = 2$, $a_m = 5$ και $b_m = 1$, $b_m = 12$. Επίσης, για το κέρδος γ χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές 0.2, 0.5 και 1. Τέλος, ως είσοδο στο σύστημα εφαρμόστηκε μια βηματική, μία ημιτονοειδής και μία ημιτονοειδής με τρεις διαφορετικές συχνότητες.

Εξ αρχής διαπιστώνουμε πως η βηματική απόκριση δεν πρόκειται να επιφέρει σύγκλιση στις παραμέτρους καθώς δεν ισχύει η συνθήκη PE . Έτσι, με τις άλλες δύο εισόδους θα εμφανίζονται καλύτερα αποτελέσματα. Παρακάτω, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Ως αρχική επιλογή για το μοντέλο αναφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές $a_m = 2$ και $b_m = 1$. Θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την πραγματική παράμετρος του συστήματος μα έχει τις τιμές 1 και 3. Στο σχήμα 2.2 βλέπουμε την απόκριση του συστήματος με κέρδος προσαρμογής $\gamma = 0.2$. Αυτό που παρατηρούμε στις αποκρίσεις είναι πως το σφάλμα παρακολούθησης μηδενίζεται γρήγορα και στις δύο περιπτώσεις. Επίσης, παρατηρούμε πως και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές. Στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε πως γίνεται πιο ομαλή η σύγκλιση σε σχέση με την δεύτερη περίπτωση.



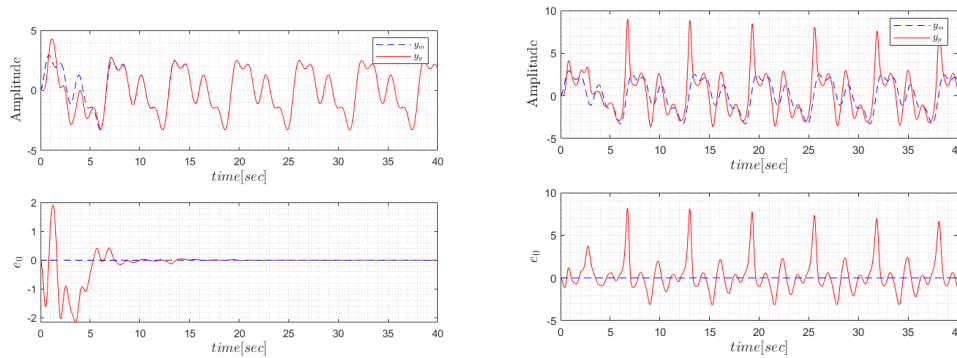
(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



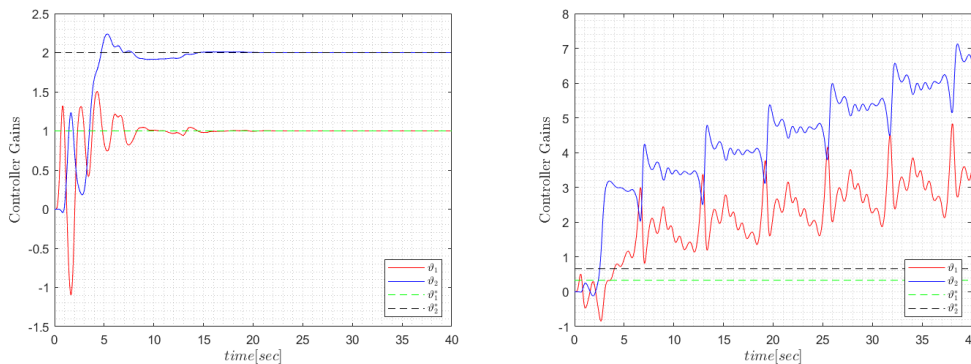
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.2: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2$, $b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 0.2$.

Τώρα θα αυξήσουμε το κέρδος του προσαρμοστικού νόμου, έτσι ώστε να αντικρίσουμε τις επιπτώσεις που εμφανίζονται στο σχήμα 2.3. Πράγματι αυτό που παρατηρούμε είναι πως στην δεύτερη περίπτωση δεν έχουμε σύγκλιση ούτε του πραγματικού μοντέλου στο επιθυμητό αλλά ούτε και των εκτιμήσεων των παραμέτρων. Η αύξηση του ρυθμού στην ουσία δεν αφήνει το φίλτρο να δράσει σωστά και να αποκόψει τις υψηλές συχνότητες του συστήματος. Αντιθέτως, το σύστημα με παράμετρο $b = 1$ λειτουργεί σωστά και συγκλίνουν κανονικά οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στις πραγματικές τιμές. Επιπλέον, η απόκριση του πραγματικού συστήματος συγκλίνει σωστά και παρακολουθεί την απόκριση του μοντέλου αναφοράς.



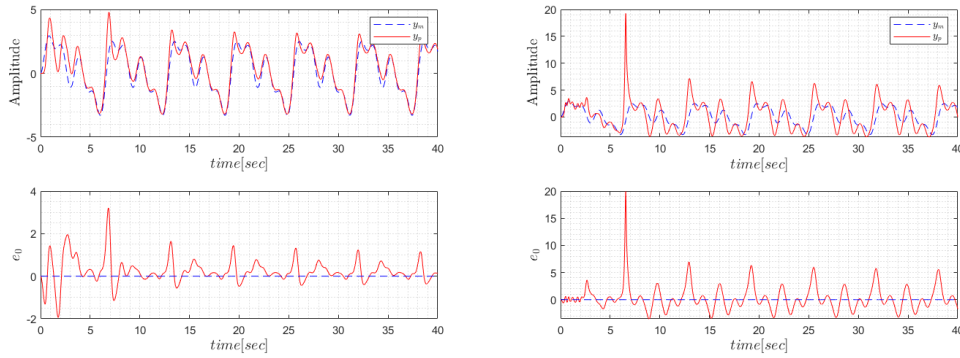
(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



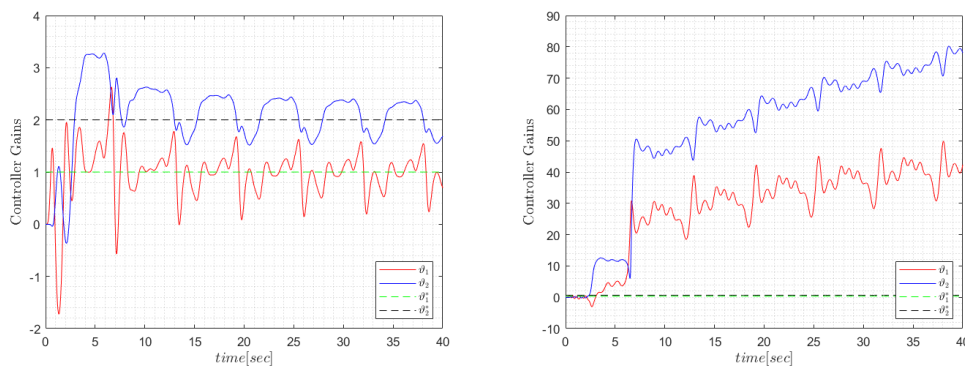
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.3: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2$, $b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 0.5$.

Το επόμενο βήμα είναι να αυξήσουμε ξανά το κέρδος των προσαρμοστικών νόμων σε $\gamma = 1$. Η προσομοίωση εμφανίζεται στο σχήμα 2.4. Με την αύξηση του κέρδους βλέπουμε πως και στις δύο περιπτώσεις δεν έχουμε σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τιμές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως τα σήματα του συνολικού συστήματος κλειστού βρόχου δεν είναι φραγμένα. Αυτό το διαπιστώνουμε από το σφάλμα παρακολούθησης που εκτελεί ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας. Παρόλο που έχουμε εισάγει στο σύστημα ένα ικανά πλούσιο σήμα διακριτών συχνοτήτων, ο ελεγκτής δεν μπορεί να λειτουργήσει σωστά. Η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι να κανονικοποιηθούν όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου, έτσι ώστε να έχουμε και σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς αλλά και η εκτίμηση των παραμέτρων να γίνεται σωστά στις πραγματικές τιμές.



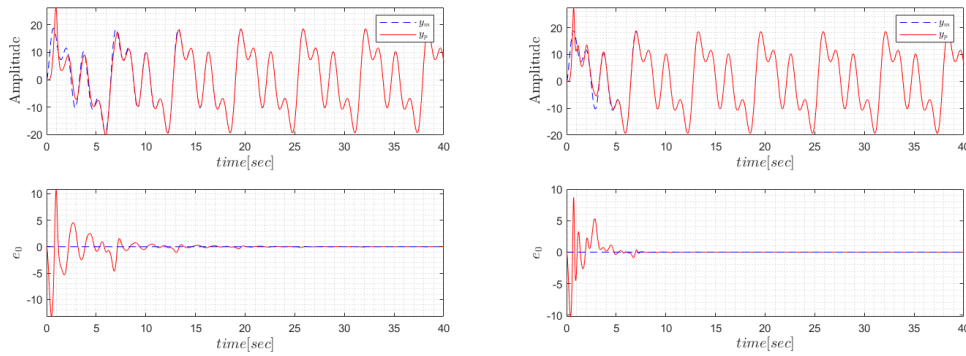
(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



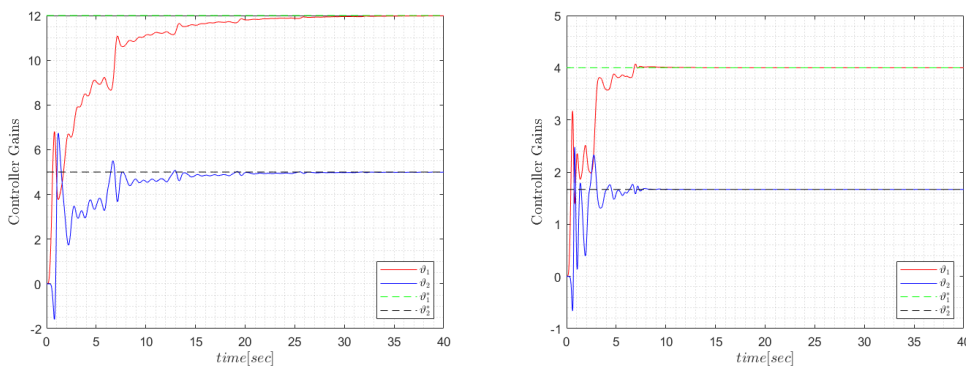
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.4: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 2$, $b_m = 1$ και κέρδους $\gamma = 1.0$.

Το επόμενο βήμα είναι να τροποποιηθούν οι παράμετροι του μοντέλου αναφοράς. Για διαφορετικό μοντέλο θα έχουμε και τα αντίστοιχα φίλτρα στους προσαρμοστικούς νόμους. Με την επιλογή των παραμέτρων ως $a_m = 5$ και $b_m = 12$, διαπιστώνουμε πως ο ελεγκτής λειτουργεί πιο ομαλά και έχουμε στις περισσότερες περιπτώσεις καλύτερα αποτελέσματα. Έτσι, και πάλι με τις τιμές του πραγματικού μοντέλου ως $b = 1$ και $b = 3$, προσομοιώθηκε το σύστημα με μία βηματική είσοδο, με μία ημιτονοειδή και μία ημιτονοειδή διακριτών και διαφορετικών συχνοτήτων. Ως πρώτη επιλογή για το κέρδος των προσαρμοστικών νόμων είναι το $\gamma = 0.2$. Στο σχήμα 2.5 παρατηρούμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε πως έχουμε στην ουσία ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος παρακολούθησης στο μηδέν. Λόγω της επιλογής των παραμέτρων των φίλτρων έχουμε καλή εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος. Επίσης ισχύει και η συνθήκη PE όπου μας εγγυάται ασυμπτωτική σύγκλιση. Τέλος, παρατηρούμε πως κατά την απόκριση του συστήματος υπάρχουν λίγες ταλαντώσεις.



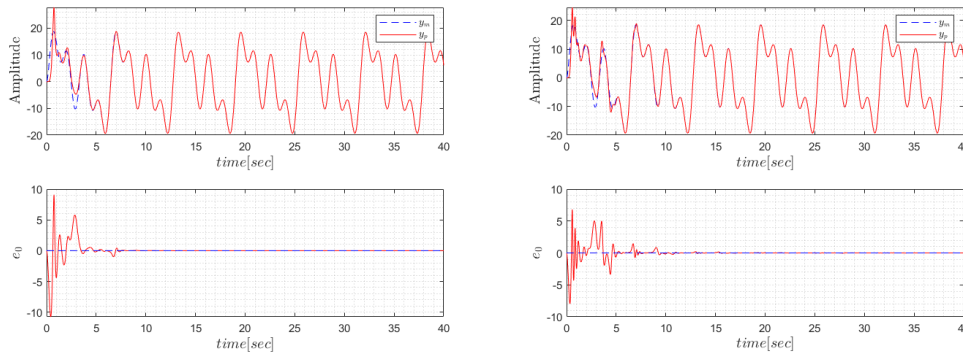
(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



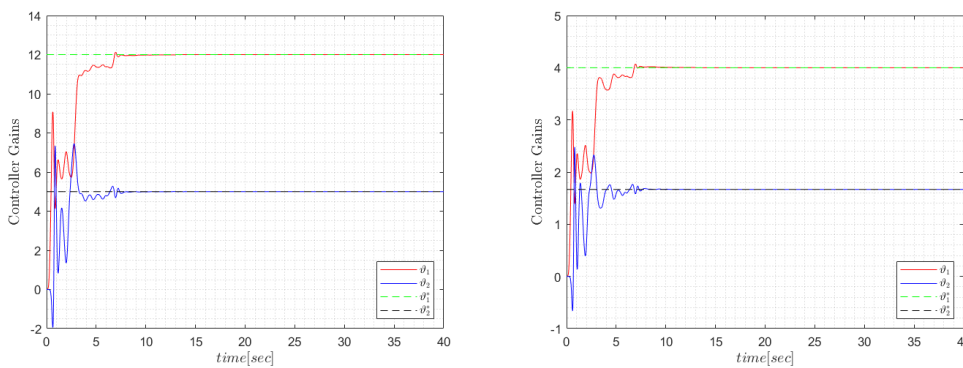
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.5: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5$, $b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 0.2$.

Τώρα, θα αυξήσουμε λίγο την τιμή του κέρδους γ από 0.2 σε 0.5 για να δούμε τις επιπτώσεις πάνω στο σύστημα. Στο σχήμα 2.6 παρατηρούμε την εκτίμηση των παραμέτρων και την απόκριση του συστήματος. Η απόκριση και στις δύο περιπτώσεις έχει βελτιωθεί με το σφάλμα παρακολούθησης να συγκλίνει γρηγορότερα στο μηδέν. Επίσης, έχουν μειωθεί οι ταλαντώσεις στο σύστημα, με τα φίλτρα να κόπτουν τις υψηλές συχνότητες. Τέλος, βλέπουμε πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν ασυμπτωτικά στις πραγματικές τιμές.



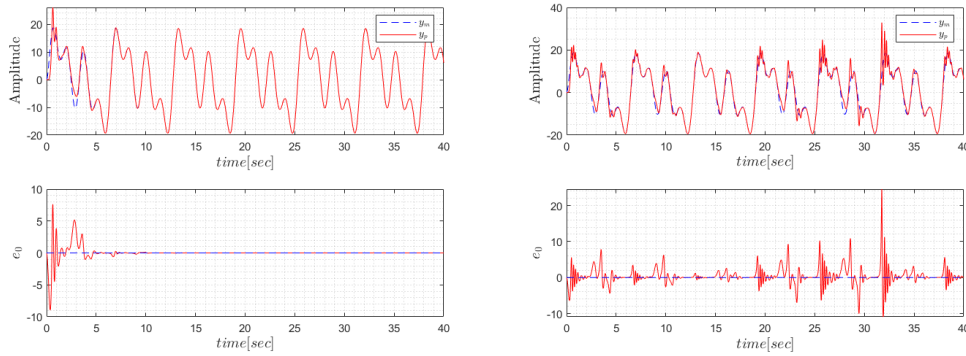
(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



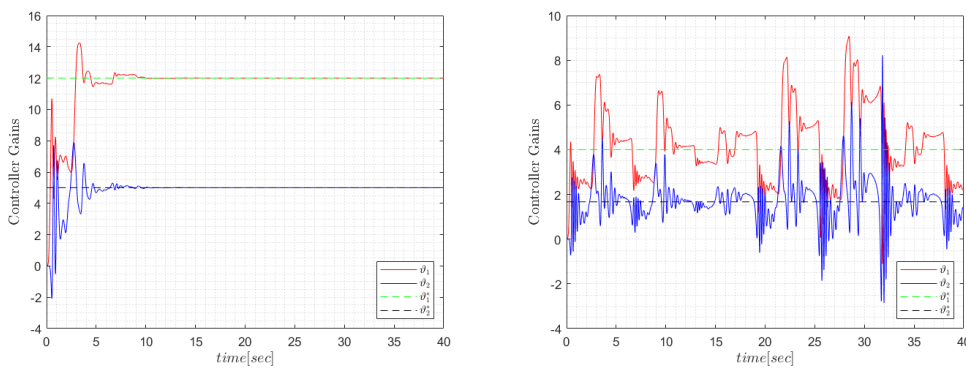
(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.6: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5$, $b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 0.5$.

Τέλος, θα κάνουμε ακόμα μια αύξηση στο κέρδος γ από το 0.5 στο 1 για να δούμε πως θα ανταποκριθεί το σύστημα (βλ. σχήμα 2.7). Στην πρώτη περίπτωση διαπιστώνουμε πως το πραγματικό σύστημα συγχλίνει στο σύστημα αναφοράς γρήγορα, με την εκτίμηση των παραμέτρων να συγχλίνουν στις πραγματικές. Παρόλο που αυξήθηκε η τιμή του κέρδους, δεν επηρεάστηκε η λειτουργία του φίλτρου κατά την προσαρμογή των παραμέτρων. Αντιθέτως, στην δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε παροδικές ταλαντώσεις στην απόκριση της εξόδου και του σφάλματος παρακολούθησης. Επιπλέον, παρατηρούμε πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγχλίνουν κοντά σε μια περιοχή των πραγματικών τιμών. Ωστόσο, έχουμε περιοδικές εκρήξεις των εκτιμήσεων (ειδικά της παραμέτρου θ_2). Γνωρίζουμε πως η είσοδος είναι ικανά πλούσια έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη PE . Ωστόσο, το πρόβλημα εμφανίζεται στην απόκριση των φίλτρων κατά την ανανέωση των παραμέτρων. Καθώς τα φίλτρα δεν μπορούν αποκόψουν όλες τις υψηλές συχνότητες, λόγω της παραμέτρου ανανέωσης, το σύστημα έχει την απόκριση αυτή. Η λύση σε αυτή την περίπτωση είναι να κανονικοποιηθούν τα σήματα έτσι ώστε να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα και οι εκτιμήσεις να συγχλίνουν πιο ομαλά στις επιθυμητές τιμές.



(α') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (β') Απόκριση εξόδου συστήματος και σφάλμα παρακολούθησης με παράμετρο συστήματος $b = 3$.



(γ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 1$. (δ') Εκτίμηση παραμέτρων ελεγκτή με παράμετρο συστήματος $b = 3$.

Σχήμα 2.7: Προσομοίωση συστήματος με παραμέτρους μοντέλου αναφοράς $a_m = 5$, $b_m = 12$ και κέρδους $\gamma = 1.0$.

Το πρόβλημα της σύγκλισης των παραμέτρων πηγάζει από την ίδια την ευστάθεια του συστήματος. Καθώς οι προσαρμοστικοί νόμοι εγγυούνται μόνο ευστάθεια στο σύστημα και όχι ασυμπτωτική. Τότε η μόνη λύση είναι να κανονικοποιήσουμε τα σήματα του συστήματος. Έτσι, θα έχουμε μια πιο ισχυρή συνθήκη PE . Επιπλέον, η αύξηση του κέρδους γ θα είχε αρνητικές επιπτώσεις στο σύστημα, καθώς οι παράμετροι του συστήματος θα έχουν μεγάλες τιμές και η λύση του συστήματος θα εκτοξευθεί αχαριαία. Συνεπώς, για να μπορεί να αξιοποιηθεί η συγκεκριμένη μέθοδος ελέγχου και να έχουμε και σύγκλιση των εκτιμήσεων, πλην του σφάλματος παρακολούθησης στο μηδέν, χρειαζόμαστε την εφαρμογή της κανονικοποίησης. Έτσι, θα τροποποιηθούν οι προσαρμοστικοί νόμοι ελέγχου και θα προκύψουν ποιοτικότερα αποτελέσματα.

Παράρτημα Α΄

Κώδικας Προσομοίωσης

Στο παράρτημα Α παρουσιάζονται οι κώδικες προσομοίωσης που χρησιμοποιήθηκαν για τις ασκήσεις.

Α΄.1 Κώδικας Πρώτης Άσκησης

```
%% MIT Rule Simulation
% Assignment 2
% Exercise 1
% Name: George Krommydas
% A.M.: 02121208

clear;
clc;

% Parameter setting

global a
global w
global zeta
global r
global gamma

a = 4;
w = 10; % rad/sec
zeta = 1;
tspan = [0 50];
n = 13;
x0 = zeros(n,1);
gamma = 1;

%% Simulation

[t, x] = ode45(@MITClosedLoop, tspan, x0);

%% Plots
theta1_desired = (w^2).*ones(size(t));
theta2_desired = (w^2).*ones(size(t));
```

```

theta3_desired = (2*zeta*w-a).*ones(size(t));
figure(1);
clf;
subplot(2,1,1);
plot(t,x(:,1),'b—');
hold on
plot(t, x(:,3), 'r—');
ylabel(" Amplitude","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
xlabel("$time$ [sec]","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
legend("$y_m$","$y_p$","Location","northeast","Interpreter","latex");

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,3) - x(:,1),"r—");
hold on
plot(t, zeros(size(t)), "b—");
xlabel("$time$ [sec]","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
ylabel("$e_0$","Interpreter","latex", "FontSize", 12);

figure(2);
clf;
plot(t,x(:,5),"r—");
hold on
plot(t, x(:,6), "b—");
plot(t, x(:,7), "g—");
plot(t, theta1_desired, "Color", [0.3010 0.7450 0.9330],
"LineStyle","--");
plot(t, theta2_desired, "Color", [0 0.4470 0.7410],
"LineStyle","--");
plot(t, theta3_desired, "Color", [0.6350 0.0780 0.1840],
"LineStyle","--");
xlabel("$time$ [sec]","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
ylabel(" Controller Gains","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
legend("$\vartheta_1$","$\vartheta_2$","$\vartheta_3$","
"$\vartheta_1^*$","$\vartheta_2^*$","$\vartheta_3^*$",
"Location","northwest","Interpreter","latex");

%% Plant and Model Dynamics

function dx = MITClosedLoop(t, x)
% Plant Dynamics

global a
global w
global zeta
global r
global gamma

```

```

M = 4;
r = M*sin(t)+M*sin(4*t)+M*sin(2*t);
% r = 1;
% r = sin(t);
dx = [x(2);
      -w.^2*x(1) - 2*zeta*w*x(2) + w.^2.*r;
      x(4);
      -x(6)*x(3) - (a + x(7))*x(4) + x(5).*r;
      -gamma*x(8)*(x(3) - x(1));
      gamma*x(10)*(x(3) - x(1));
      gamma*x(12)*(x(3) - x(1));
      x(9);
      -w.^2*x(8) - 2*zeta*w*x(9) + w.^2.*r;
      x(11);
      -w.^2*x(10) - 2*zeta*w*x(11) + w.^2.*x(3);
      x(13);
      -w.^2*x(12) - 2*zeta*w*x(13) + w.^2.*x(4)];
end

```

A'.2 Κώδικας Προσομοίωσης Δεύτερης Άσκησης

```

%% MIT Rule Simulation
% Assignment 2
% Exercise 2
% Name: George Krommydas
% A.M.: 02121208

clear;
clc;

% Parameter setting

global am
global bm
global b
global r
global gamma

am = 5;
bm = 12;
b = 3;
tspan = [0 40];
n = 6;
x0 = zeros(n,1);
gamma = 0.5;

%% Simulation

[t, x] = ode45(@MITClosedLoop, tspan, x0);

```

```

%% Plots
theta1_desired = (bm/b).*ones(size(t));
theta2_desired = (am/b).*ones(size(t));
figure(1);
clf;
subplot(2,1,1);
plot(t,x(:,1),'b--');
hold on
plot(t, x(:,2), 'r-');
ylabel("Amplitude","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
xlabel("$time$ [sec]$", "Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
legend("$y_m$", "$y_p$", "Location","northeast","Interpreter","latex");

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,2) - x(:,1),"r-");
hold on
plot(t, zeros(size(t)), "b--");
xlabel("$time$ [sec]$", "Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
ylabel("$e_0$", "Interpreter","latex", "FontSize", 12);

figure(2);
clf;
plot(t,x(:,3),"r-");
hold on
plot(t, x(:,4), "b-");
plot(t, theta1_desired, "g--");
plot(t, theta2_desired, "k--");
xlabel("$time$ [sec]$", "Interpreter","latex", "FontSize", 12);
grid minor;
ylabel("Controller Gains","Interpreter","latex", "FontSize", 12);
legend("$\vartheta_1$", "$\vartheta_2$", "$\vartheta_1^*$",
"$\vartheta_2^*$", "Location","southeast","Interpreter","latex");

%% Plant and Model Dynamics

function dx = MITClosedLoop(t, x)
    % Plant Dynamics

    global am
    global bm
    global b
    global r
    global gamma

    M = 4;
    r = M*sin(t)+M*sin(4*t)+M*sin(2*t);
    % r = 1;

```



```
% r = sin(t);  
dx = [-am*x(1) + bm*r;  
      -b*x(4)*x(2) + b*x(3)*r;  
      -gamma*x(5)*(x(2) - x(1));  
      gamma*x(6)*(x(2) - x(1));  
      -am*x(5) + am*r;  
      -am*x(6) + am*x(2)];  
end
```

Βιβλιογραφία

- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [4] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [5] Mohammed M'Saad Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [6] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.
- [7] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [10] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [11] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [12] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.
- [13] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [14] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [15] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.