



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων μηχανικών

ΔΠΜΣ Συστήματα αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β: Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

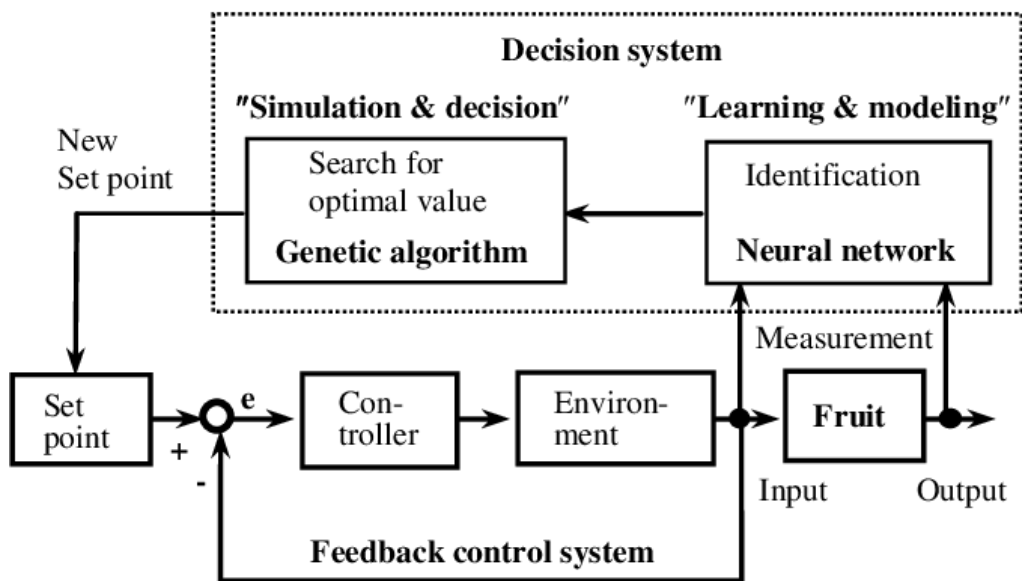
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Ευφυή Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής

Ονομ/νυμο - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων: Backstepping and Adaptive Backstepping Control



Αθήνα, 2024

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων	2
Κατάλογος Πινάκων	3
Έλεγχος Ρομποτικού Βραχίονα Περιστροφικών Αρθρώσεων	4
Ερώτημα 1: Ελεγκτής Ρομποτικού Βραχίονα με την Μέθοδο Οπισθοδρόμησης .	5
Ερώτημα 2: Ελεγκτής Ρομποτικού βραχίονα με την Μέθοδο Προσαρμοστικής Οπισθοδρόμησης	7
Ερώτημα 3: Προσομοίωση Ρομποτικού Βραχίονα 2 Βαθμών Ελευθερίας	8
Παραμετροποίηση Ρομποτικού Βραχίονα	9
Προσομοίωση Ρομποτικού Βραχίονα	10
Προσομοίωση Ελεγκτή Οπισθοδρόμησης	11
Προσομοίωση Ελεγκτή Προσαρμοστικής Οπισθοδρόμησης	12
Α' Κώδικας Προσομοίωσης	15
Βιβλιογραφία	25

Κατάλογος Σχημάτων

1	Ρομποτικός βραχίονας n βαθμών ελευθερίας.	4
2	Ρομποτικός βραχίονας δύο βαθμών ελευθερίας.	8
3	Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_1	11
4	Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_2	11
5	Σφάλματα παρακολούθησης γωνιακών θέσεων και ταχυτήτων στροφικών αρ- θρώσεων.	12
6	Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_1	13
7	Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_2	13
8	Σφάλματα παρακολούθησης γωνιακών θέσεων και ταχυτήτων στροφικών αρ- θρώσεων.	13
9	Εκτίμηση παραμέτρων ρομποτικού βραχίονα.	14

Κατάλογος Πινάκων

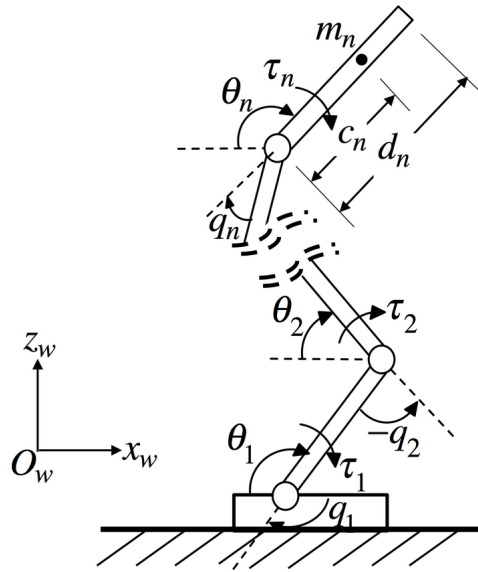
1	Περιγραφή συμβόλων ρομποτικού βραχίονα.	8
2	Τιμές παραμέτρων ρομποτικού βραχίονα	10

Έλεγχος Ρομποτικού Βραχίονα Περιστροφικών Αρθρώσεων

Μας δίνεται ένας ρομποτικός βραχίονας n βαθμών ελευθερίας περιστροφικών αρθρώσεων που περιγράφεται από το ακόλουθο δυναμικό μοντέλο:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

όπου τα $q, \tau \in \mathcal{R}^n$ περιγράφουν τις γωνίες και τις ροπές εισόδου κάθε άρθρωσης, $M(q)$ είναι ο πίνακας μάζας του βραχίονα, $C(q, \dot{q})$ είναι ο πίνακας φυγόκεντρων και *Coriolis* δυνάμεων και ο $G(q)$ αποτελεί το διάνυσμα των βαρυτικών δυνάμεων (βλ. Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Ρομποτικός βραχίονας n βαθμών ελευθερίας.

Επιπλέον, ο παραπάνω βραχίονας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο πίνακας $M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.
2. Ο πίνακας $N(q) := \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι αντισυμμετρικός και ισχύει $q^T N(q)q = 0$.
3. Το δυναμικό μοντέλο της σχέσης (1) του βραχίονα παραμετροποιείται γραμμικά ως εξής:

$$M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\pi$$

όπου το $\pi \in \mathcal{R}^m$ αποτελεί το διάνυσμα των άγνωστων σταθερών παραμέτρων και η $Y : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$ είναι μια γνωστή συνάρτηση των παραπάνω σημάτων.

Ερώτημα 1: Ελεγκτής Ρομποτικού Βραχίονα με τη Μέθοδο Οπισθοδρόμησης

Το πρώτο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε τη σχέση (1) σε μητρική μορφή, για να μπορέσουμε να κάνουμε παρακολούθηση τροχιάς. Συνεπώς, θέτουμε το διάνυσμα κατάστασης $x = [q, \dot{q}]^T$. Οπότε Το σύστημα θα γίνει

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Η αντιστροφή του πίνακα μάζας έγινε με βάση την ιδιότητά του, ο οποίος είναι θετικά ορισμένος. Καθώς γνωρίζουμε την επιθυμητή τροχιά που θέλουμε να εφαρμόσουμε στο σύστημα, ορίζουμε τα παρακάτω σφάλματα

$$e_1 = q - q_d$$

$$e_2 = \dot{q} - \dot{q}_d$$

Έτσι, η δυναμική του σφάλματος που θα προκύψει θα είναι η εξής

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}_d \\ \ddot{q} - \ddot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ M^{-1}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - \ddot{q}_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_2 \\ M^{-1}(q) (\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - M^{-1}(q) (Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_d)\pi - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_2 \\ M^{-1}(q) (\tau - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_d)\pi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Συνεπώς, με βάση τη σχέση (3) θα μπορέσουμε να σχεδιάσουμε τον ελεγκτή οπισθοδρόμησης. Η αρχική κατάσταση του συστήματος θα είναι $z_1 = e_1$. Οπότε

$$\dot{z}_1 = \dot{e}_1 = e_2 = e_2 \pm K_1 e_1 = -K_1 z_1 + (e_2 + K_1 z_1)$$

όπου ο πίνακας $K_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Θεωρούμε τη μεταβλητή e_2 ως είσοδο ελέγχου στο σύστημα. Για να έχουμε ευστάθεια στην πρώτη κατάσταση, ορίζουμε το $e_2 = -K_1 z_1$. Έτσι θα προκύψει

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1$$

το οποίο σημαίνει πως θα προκύψει ευστάθεια λόγω του ορισμού του πίνακα K_1 . Έτσι, θα ορίσουμε τη νέα μεταβλητή κατάστασης ως $z_2 = e_2 + K_1 z_1$. Θα παραγωγίσουμε τη σχέση αυτή, με αποτέλεσμα να προκύψει

$$\dot{z}_2 = \dot{e}_2 + K_1 \dot{z}_1 = M^{-1}(q)(\tau - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_d)\pi) + K_1(z_2 - K_1 z_1) \quad (4)$$

Οπότε, τώρα θα κάνουμε χρήση της υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^T z_1 + \frac{1}{2} z_2^T M(q) z_2 \quad (5)$$

Η παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε πως είναι θετικά ορισμένη στο πεδίο ορισμού της και ακτινικά μη φραγμένη. Οπότε, το επόμενο βήμα είναι να την παραγωγίσουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2) &= z_1^T \dot{z}_1 + \frac{1}{2} \dot{z}_2^T M(q) z_2 + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 + \frac{1}{2} z_2^T M(q) \dot{z}_2 \\ &= z_1^T (z_2 - K_1 z_1) + \frac{1}{2} (M^{-1}(q)(\tau - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_d)\pi) + K_1(z_2 - K_1 z_1))^T M(q) z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 + \frac{1}{2} z_2^T M(q) (M^{-1}(q) (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi) + K_1(z_2 - K_1 z_1)) \\
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_1^T (z_2 - K_1 z_1) + z_2^T M(q) (M^{-1}(q) (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi) + K_1(z_2 - K_1 z_1)) + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_1^T z_2 + z_2^T M(q) (M^{-1}(q) (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi) + K_1(z_2 - K_1 z_1)) + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi + z_1 + M(q) K_1 (z_2 - K_1 z_1)) + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi + z_1 + M(q) K_1 (z_2 - K_1 z_1)) + \frac{1}{2} z_2^T \dot{M}(q) z_2 \pm z_2^T C(q, \dot{q}) z_2 \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi + z_1 + M(q) K_1 (z_2 - K_1 z_1)) + \frac{1}{2} z_2^T (\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})) z_2 + z_2^T C(q, \dot{q}) z_2
\end{aligned}$$

Καθώς ο πίνακας $N(q) := \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ είναι αντισυμμετρικός, τότε το $z_2^T N(q) z_2 = 0$. Έτσι, η παράγωγος θα πάρει την μορφή

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi + z_1 + M(q) K_1 (z_2 - K_1 z_1)) + z_2^T C(q, \dot{q}) z_2 \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q}_d) \pi + z_1 + C(q, \dot{q}) z_2 + M(q) K_1 (z_2 - K_1 z_1)) \\
&= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - M(q) (\ddot{q}_d + K_1 (z_2 - K_1 z_1)) - C(q, \dot{q}) (\dot{q} - z_2) - G(q) + z_1)
\end{aligned}$$

Επειδή γνωρίζουμε τις παραμέτρους του συστήματος, θα επιλέξουμε τον εξής νόμο ελέγχου

$$\tau = M(q) (\ddot{q}_d + K_1 (z_2 - K_1 z_1)) - C(q, \dot{q}) (\dot{q} - z_2) + G(q) - z_1 - K_2 z_2 \quad (6)$$

με τον πίνακα $K_2 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ωστόσο, θα τροποποιήσουμε την σχέση (6) ώστε να χρησιμοποιήσουμε την γραμμική παραμετροποίηση. Έτσι θα ορίσουμε κάποιες ποσότητες που σχετίζονται με το παραμετρικό μοντέλο

$$\dot{q}_r = \dot{q} - z_2 = \dot{q} - e_2 + K_1 e_1 = \dot{q}_d + K_1 (q - q_d)$$

$$\ddot{q}_r = \ddot{q}_d + K_1 (z_2 - K_1 z_1) = \ddot{q}_d + K_1 (\dot{q} - \dot{q}_d)$$

Συνεπώς, ο νόμος ελέγχου που επιλέγεται θα είναι

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \pi - z_1 - K_2 z_2 \quad (7)$$

Άρα, η παράγωγος θα γίνει

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -z_1^T K_1 z_1 - z_2^T K_2 z_2 \leq 0 \quad (8)$$

Από το αποτέλεσμα της σχέσης (8) προκύπτει πως η παράγωγος είναι αρνητικά ορισμένη στο πεδίο ορισμού της με το σημείο ισορροπίας να είναι το $(z_1, z_2) = (0, 0)$, $0 \in \mathcal{R}^n$. Επιπλέον, το σημείο αυτό αντιστοιχεί και στο αρχικό σημείο ισορροπίας $(e_1, e_2) = (0, 0)$. Συνεπώς, αυτό που συμπεραίνουμε είναι πως θα έχουμε ολική σταθεροποίηση με τον παραπάνω νόμο ελέγχου. Έτσι, το σημείο ισορροπίας θα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές και θα έχουμε σωστή παρακολούθηση της τροχιάς.

Ερώτημα 2: Ελεγκτής Ρομποτικού βραχίονα με τη Μέθοδο Προσαρμοστικής Οπισθοδρόμησης

Έστω πως τώρα δε γνωρίζουμε τις παραμέτρους του δυναμικού μοντέλου. Τότε θα ορίσουμε την προσέγγιση των παραμέτρων ως $\hat{\pi}$. Έτσι, το παραμετρικό σφάλμα σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\tilde{\pi} = \hat{\pi} - \pi$$

Οπότε, ο νέος προσαρμοστικός νόμος ελέγχου θα γίνει

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) \hat{\pi} - z_1 - K_2 z_2 \quad (9)$$

Η ανάλυση είναι παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα, με τη μόνη διαφορά πως θα τροποποιηθεί η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Οπότε η νέα συνάρτηση θα γίνει

$$V(z_1, z_2, \tilde{\pi}) = \frac{1}{2} z_1^T z_1 + \frac{1}{2} z_2^T M(q) z_2 + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \tilde{\pi} \quad (10)$$

με τον πίνακα Γ_π να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης θα γίνει μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_1, z_2, \tilde{\pi}) &= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (\tau - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) \pi + z_1) + \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}} \\ &= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) \hat{\pi} - z_1 - K_2 z_2 - Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) \pi + z_1) + \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}} \\ &= -z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) (\hat{\pi} - \pi) - K_2 z_2) + \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}} \\ &= -z_1^T K_1 z_1 - z_2^T K_2 z_2 + z_2^T Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) \tilde{\pi} + \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}} \\ &= -z_1^T K_1 z_1 - z_2^T K_2 z_2 + \tilde{\pi}^T Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)^T z_2 + \tilde{\pi}^T \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}} \\ \dot{V}(z_1, z_2, \tilde{\pi}) &= -z_1^T K_1 z_1 - z_2^T K_2 z_2 + \tilde{\pi}^T (Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)^T z_2 + \Gamma_\pi^{-1} \dot{\tilde{\pi}}) \end{aligned} \quad (11)$$

Με βάσει την σχέση (11) θα επιλέξουμε την εξής προσαρμοστικό νόμο

$$\dot{\hat{\pi}} = -\Gamma_\pi Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)^T z_2 \quad (12)$$

Έτσι, η παράγωγος θα γίνει

$$\dot{V}(z_1, z_2, \tilde{\pi}) = -z_1^T K_1 z_1 - z_2^T K_2 z_2 \leq -\lambda_{\min}(K_1) \|z_1\|^2 - \lambda_{\min}(K_2) \|z_2\|^2 \leq 0 \quad (13)$$

Η παράγωγος της V που προέκυψε είναι αρνητικά ημιορισμένη. Η παράγωγος έχει ένα άνω φράγμα το οποίο σημαίνει πως η $\dot{V} \in \mathcal{L}_\infty$, το οποίο συνεπάγεται πως ότι και τα $z_1, z_2 \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, καθώς η παράγωγος είναι αρνητικά ημιορισμένη, διαπιστώνουμε πως ότι και η συνάρτηση V είναι φθίνουσα και μάλιστα θα το όριο της θα είναι πεπερασμένο. Δηλαδή:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty < \infty$$

Συνεπώς, έχουμε ότι η $V \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, θα έχουμε πως και το $\tilde{\pi} \in \mathcal{L}_\infty$. Άρα και η εκτίμηση θα είναι φραγμένη, $\hat{\pi} \in \mathcal{L}_\infty$. Συμπερασματικά, μπορούμε να εγγυηθούμε ασυμπτωτική παρακολούθηση του σφάλματος στο $0 \in \mathcal{R}^n$ με τις φραγμένες εκτιμήσεις των παραμέτρων. Έτσι το σημείο ισορροπίας $(e_1, e_2) = (0, 0)$ θα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ερώτημα 3: Προσομοίωση Ρομποτικού Βραχίονα 2 Βαθμών Ελευθερίας

Στην περίπτωση που έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, το δυναμικό μοντέλο θα γίνει:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G_0(q) = \tau$$

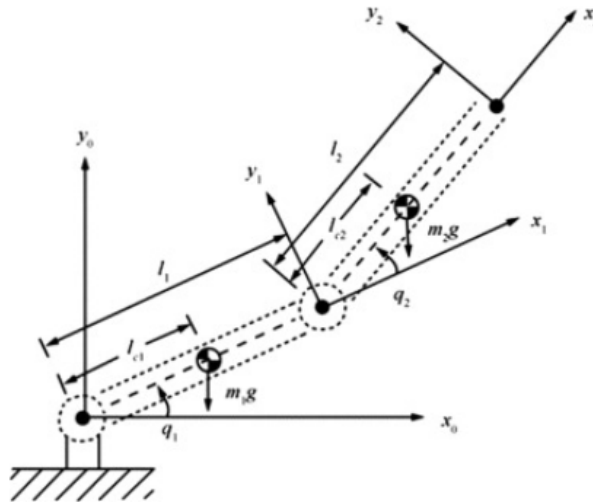
$$\begin{bmatrix} I_{z1} + I_{z2} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 l_2 c_2) & I_{z2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2) \\ I_{z2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2} l_1 l_2 c_2) & I_{z2} + m_2 \frac{l_2^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c\dot{q}_2 + k_1 & -c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ c\dot{q}_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 g l_1 c_1 + m_2 g(l_1 c_1 + \frac{1}{2} l_2 c_{12}) \\ \frac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

όπου κάθε στοιχείο της εξίσωσης παρουσιάζεται στον πίνακα 1.

Σύμβολο	Περιγραφή
q_i	Γωνιακή Θέση i -οστης άρθρωσης (rad)
\dot{q}_i	Γωνιακή Ταχύτητα i -οστης άρθρωσης (rad/sec)
τ_i	Εφαρμοσμένη Ροπή στην i -οστη άρθρωση (Nm)
m_i	Μάζα i -οστού συνδέσμου (kg)
l_i	Μήκος i -οστού συνδέσμου (m)
I_{Z_i}	Ροπή Αδράνειας i -οστού συνδέσμου (kgm^2)
k_i	Συντελεστής Ιξώδους Τριβής i -οστού συνδέσμου (kgm^2/sec)
g	Επιτάχυνση της Βαρύτητας (m/sec^2)

Πίνακας 1: Περιγραφή συμβόλων ρομποτικού βραχίονα.

και έχουμε και τις παρακάτω θεωρήσεις $c = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2$, $c_1 = \cos(q_1)$, $c_2 = \cos(q_2)$, $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$, $s_1 = \sin(q_1)$, $s_2 = \sin(q_2)$. Επίσης, οπτικά βλέπουμε και τον ρομποτικό βραχίονα στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Ρομποτικός βραχίονας δύο βαθμών ελευθερίας.

Παραμετροποίηση Ρομποτικού Βραχίονα

Η δυναμική εξίσωση ενός ρομποτικού βραχίονα μπορεί να αναπαρασταθεί παραμετρικά με την εξής μορφή

$$M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G_0(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\pi \quad (14)$$

Θα πρέπει να βρούμε τον πίνακα Y και το διάνυσμα π που αναπαριστούν την παραμετρική μορφή του βραχίονα. Έτσι θα μπορέσουμε να εφαρμόσουμε και τους παραπάνω νόμους ελέγχου που σχεδιάστηκαν. Θα πάρουμε κάθε όρο της εξίσωσης και θα τον αναλύσουμε σε δύο πίνακες, όπου ο ένας θα εξαρτάται από τις γωνίες του βραχίονα και ο άλλος από τις παραμέτρους του. Ας αναλύσουμε πρώτα τον πίνακα μάζας με το επιθυμητό σήμα επιτάχυνσης. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q}_r &= \begin{bmatrix} I_{z_1} + I_{z_2} + m_1\frac{l_1^2}{4} + m_2(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1l_2c_2) & I_{z_2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2}l_1l_2c_2) \\ I_{z_2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2}l_1l_2c_2) & I_{z_2} + m_2\frac{l_2^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} \\ \ddot{q}_{r2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I_{z_1} + I_{z_2} + m_1\frac{l_1^2}{4} + m_2(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1l_2c_2))\ddot{q}_{r1} + (I_{z_2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2}l_1l_2c_2))\ddot{q}_{r2} \\ (I_{z_2} + m_2(\frac{l_2^2}{4} + \frac{1}{2}l_1l_2c_2))\ddot{q}_{r1} + (I_{z_2} + m_2\frac{l_2^2}{4})\ddot{q}_{r2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I_{z_1} + m_1\frac{l_1^2}{4} + m_2l_1^2)\ddot{q}_{r1} + (I_{z_2} + m_2\frac{l_2^2}{4})(\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) + (\frac{1}{2}l_1l_2)c_2(2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) \\ 0\ddot{q}_{r1} + (I_{z_2} + m_2\frac{l_2^2}{4})(\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) + (\frac{1}{2}m_2l_1l_2)c_2\ddot{q}_{r1} \end{bmatrix} \\ M(q)\ddot{q}_r &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & c_2(2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) \\ 0 & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & c_2\ddot{q}_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{z_1} + m_1\frac{l_1^2}{4} + m_2l_1^2 \\ I_{z_2} + m_2\frac{l_2^2}{4} \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \end{bmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να αναλύσουμε τον πίνακα των φυγόκεντρων - *Coriolis* δυνάμεων. Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C(q, \dot{q})\dot{q}_r &= \begin{bmatrix} -c\dot{q}_2 + k_1 & -c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ c\dot{q}_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2\dot{q}_2 + k_1)\dot{q}_{r1} - \frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2} \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2\dot{q}_1\dot{q}_{r1} + k_2\dot{q}_{r2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2l_1l_2s_2(\dot{q}_2\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2}) + k_1\dot{q}_{r1} + 0k_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2(s_2\dot{q}_1\dot{q}_{r1}) + 0k_1 + k_2\dot{q}_{r2} \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q})\dot{q}_r &= \begin{bmatrix} -s_2(\dot{q}_2\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2}) & \dot{q}_{r1} & 0 \\ s_2\dot{q}_1\dot{q}_{r1} & 0 & \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

Τέλος, θα αναλύσουμε και το διάνυσμα της βαρύτητας του βραχίονα. Οπότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1gl_1c_1 + m_2g(l_1c_1 + \frac{1}{2}l_2c_{12}) \\ \frac{1}{2}m_2gl_2c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}m_1gl_1 + m_2gl_1)c_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2c_{12} \\ 0(\frac{1}{2}m_1gl_1 + m_2gl_1) + \frac{1}{2}m_2gl_2c_{12} \end{bmatrix} \\ G_0(q) &= \begin{bmatrix} c_1 & c_{12} \\ 0 & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1gl_1 + m_2gl_1 \\ \frac{1}{2}m_2gl_2 \end{bmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις σχέσεις (15) (16) και (17) μπορούμε να βρούμε μια παραμετρική έκφραση του βραχίονα, με τον πίνακα Y να εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές των αρθρώσεων και το διάνυσμα π που εξαρτάται από τις παραμέτρους του βραχίονα. Οπότε, έχουμε

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & c_2(2\ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2}) - s_2(\dot{q}_2\dot{q}_{r1} + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_{r2}) & \dot{q}_{r1} & 0 & c_1 & c_{12} \\ 0 & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & c_2\ddot{q}_{r1} + s_2\dot{q}_1\dot{q}_{r1} & 0 & \dot{q}_{r2} & 0 & c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} I_{z_1} + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 l_1^2 \\ I_{z_2} + m_2 \frac{l_2^2}{4} \\ \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \\ k_1 \\ k_2 \\ \frac{1}{2} m_1 g l_1 + m_2 g l_1 \\ \frac{1}{2} m_2 g l_2 \end{bmatrix}$$

Προσομοίωση Ρομποτικού Βραχίονα

Με την επίτευξη της παραμετροποίησης του βραχίονα, μπορούμε να προσομοιώσουμε τα δύο παραπάνω σχήματα ελέγχου. Θα εφαρμόσουμε δύο ημιτονοειδείς τροχιές στο σύστημα και θα δούμε πως αποκρύνονται οι αρθρώσεις. Οι επιθυμητές τροχιές που θα προσομοιώσουμε είναι οι εξής:

Για την πρώτη στροφική άρθρωση με αρχική συνθήκη $q_1(0) = \frac{80\pi}{180}$:

$$q_{1_d}(t) = \frac{90\pi}{180} + \frac{30\pi}{180} \cos(t)$$

$$\dot{q}_{1_d}(t) = -\frac{30\pi}{180} \sin(t)$$

$$\ddot{q}_{1_d}(t) = -\frac{30\pi}{180} \cos(t)$$

Για την δεύτερη στροφική άρθρωση με αρχική συνθήκη $q_1(0) = \frac{130\pi}{180}$:

$$q_{2_d}(t) = \frac{90\pi}{180} - \frac{30\pi}{180} \sin(t)$$

$$\dot{q}_{2_d}(t) = -\frac{30\pi}{180} \cos(t)$$

$$\ddot{q}_{2_d}(t) = -\frac{30\pi}{180} \sin(t)$$

Με την εφαρμογή των παραπάνω τροχιών θα μπορέσουμε να δούμε την απόκριση του βραχίονα. Επίσης, στον πίνακα 2 βλέπουμε τις τιμές που έχουν οι παράμετροι του συστήματος.

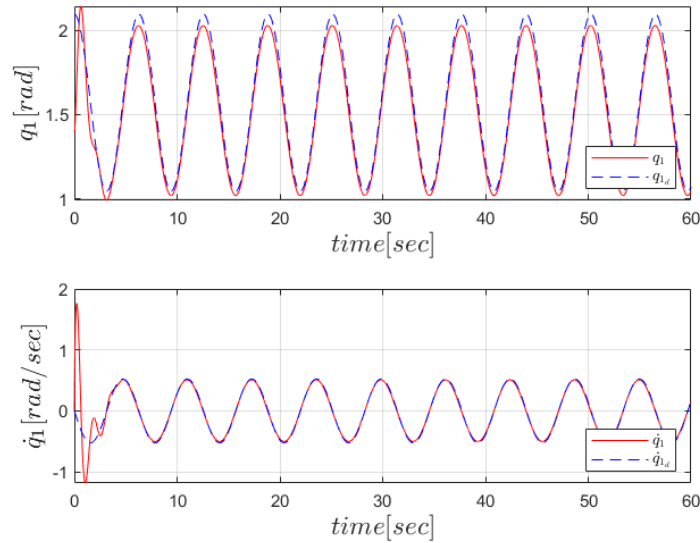
Παράμετρος	Τιμή
m_1	3.2 (kg)
l_1	0.5 (m)
I_{Z_1}	0.96 (kgm ²)
k_1	1 (kgm ² /sec)
m_2	2.0 (kg)
l_1	0.4 (m)
I_{Z_1}	0.81 (kgm ²)
k_1	1 (kgm ² /sec)
g	9.81 (m/sec ²)

Πίνακας 2: Τιμές παραμέτρων ρομποτικού βραχίονα

Επομένως, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιώσουμε τα δύο αυτά σχήματα.

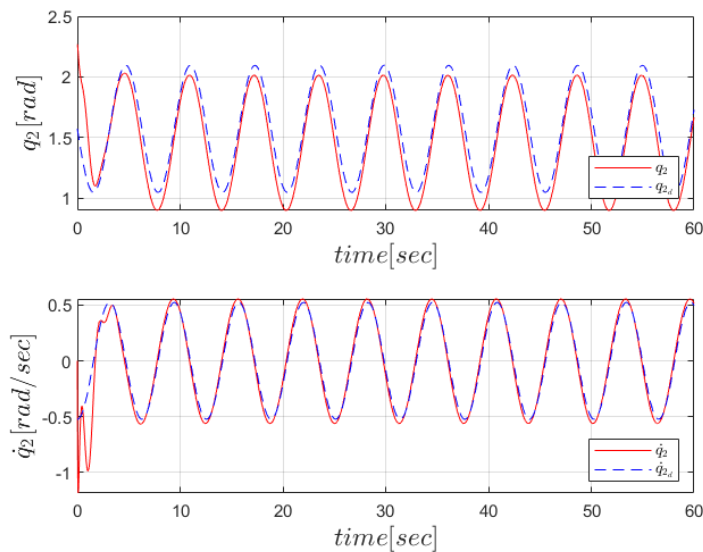
Προσομοίωση Ελεγκτή Οπισθοδρόμησης

Ο πρώτος ελεγκτής που εφαρμόστηκε στο σύστημα είναι αυτός της οπισθοδρόμησης. Ως κέρδη του ελεγκτή επιλέχθηκαν τα $K_1 = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ και $K_2 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$. Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε μετά από προσομοιώσεις, καθώς η επιλογή των μεγάλων κερδών στο K_1 είχε σοβαρές επιπτώσεις στη σωστή παρακολούθηση. Έτσι, οι τιμές του είναι μικρές για να μην υπάρχουν αποκλίσεις κατά την εφαρμογή των εισόδων. Αντιθέτως, ο πίνακας K_2 χρειάστηκε μεγάλες τιμές για να μπορέσουν οι ταχύτητες να παρακολουθήσουν σωστά τις επιθυμητές τροχιές.



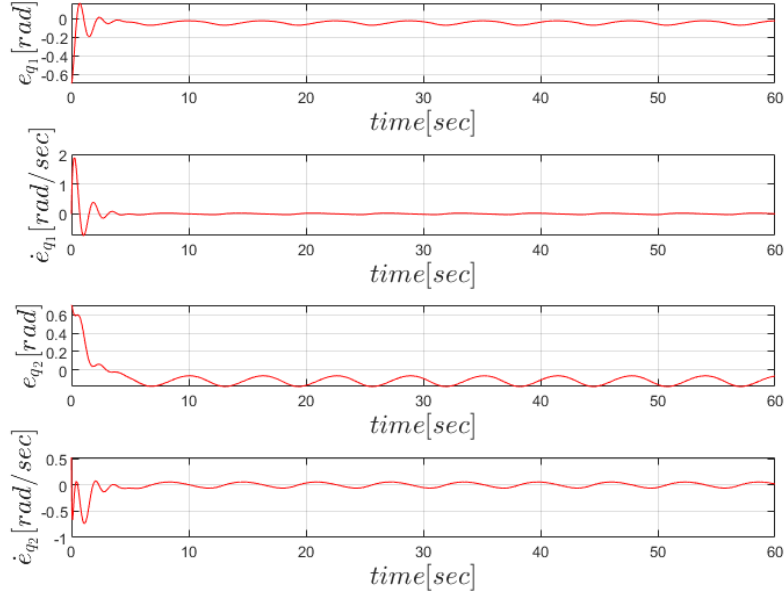
Σχήμα 3: Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_1 .

Στο σχήμα 3 παρατηρούμε την απόκριση της πρώτης άρθρωσης. Η άρθρωση παρακολουθεί σωστά και ασυμπτωτικά την επιθυμητή τροχιά που της τέθηκε. Επίσης, το ίδιο ισχύει και για τη δεύτερη άρθρωση (βλ. σχήμα 4).



Σχήμα 4: Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_2 .

Τέλος, στο σχήμα 5 βλέπουμε τα σφάλματα παρακολούθησης των αρθρώσεων. Βλέπουμε πως όλα τα σφάλματα συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν, με αποτέλεσμα να αποδεικνύεται και οπτικά η ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος.



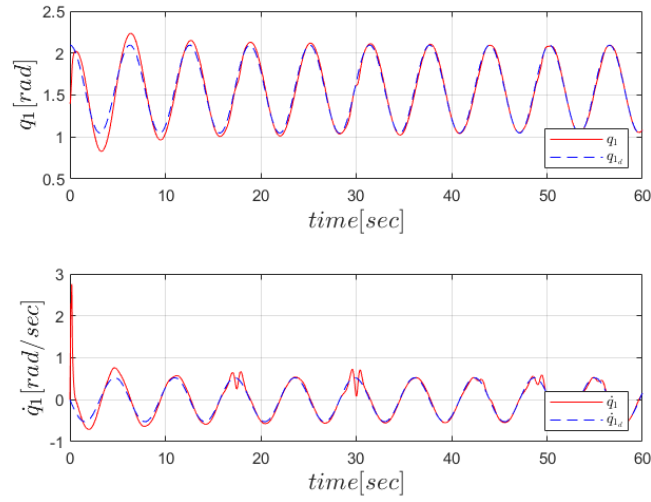
Σχήμα 5: Σφάλματα παρακολούθησης γωνιακών θέσεων και ταχυτήτων στροφικών αρθρώσεων.

Προσομοίωση Ελεγκτή Προσαρμοστικής Οπισθοδρόμησης

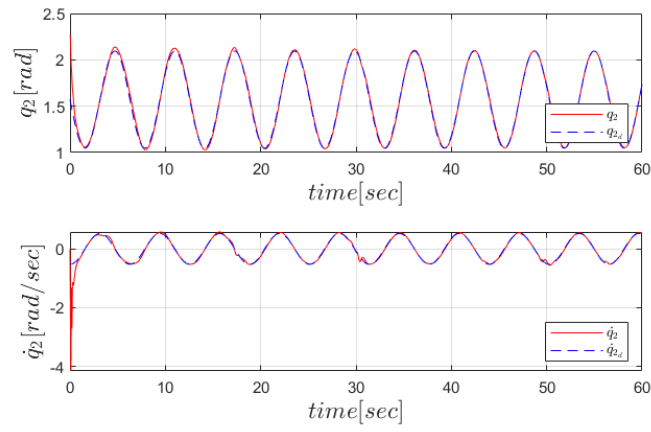
Ο δεύτερος ελεγκτής που σχεδιάστηκε είναι αυτός της προσαρμοστικής οπισθοδρόμησης. Σε αυτή την περίπτωση δε γνωρίζουμε το διάνυσμα των παραμέτρων π . Έτσι, θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος προσαρμογής που αποδείχθηκε προηγουμένως. Ο πίνακας κερδών των παραμέτρων επιλέχθηκε ως $\Gamma_\pi = 5I_7$. Τα υπόλοιπα κέρδη του ελεγκτή επιλέχθηκαν ως $K_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ και

$K_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$. Η επιλογή αυτών των τιμών έγινε μετά από πλήθος προσομοιώσεων, έτσι ώστε να έχουμε και σωστή παρακολούθηση των κερδών αλλά και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων να συγκλίνουν κοντά στις ιδανικές τιμές των παραμέτρων του βραχίονα. Στα σχήματα 6 και 7 παρατηρούμε την απόκριση των δύο στροφικών αρθρώσεων. Αυτό που παρατηρούμε είναι πως οι αρθρώσεις παρακολουθούν σωστά τις επιθυμητές τροχιές με λιγότερα σφάλματα. Επίσης, παρατηρούμε τα σφάλματα παρακολούθησης να συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 8). Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως οι εκτιμήσεις μας είναι φραγμένες και συγκλίνουν κοντά στις ιδανικές τιμές όπως παρατηρείται και στο σχήμα 9.

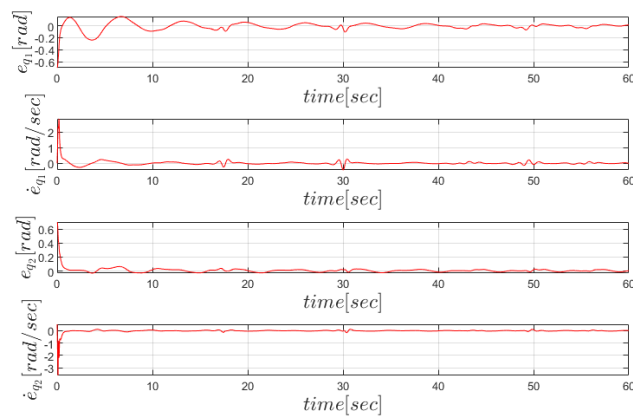
Τέλος, αυτό που συμπεραίνουμε είναι πως και τα δύο σχήματα ελέγχου έχουν αξιοποιηθεί σωστά και παράχθηκαν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Έχουμε και στις δύο περιπτώσεις ασυμπτωτική παρακολούθηση της τροχιάς, με τα σήματα του κλειστού βρόχου να είναι φραγμένα. Έτσι, οι αρθρώσεις του βραχίονα προσομοίωσαν σωστά τις τροχιές που τους ανατέθηκαν, με μικρές απώλειες ενέργειας κατά την εκτέλεση της κίνησής του.



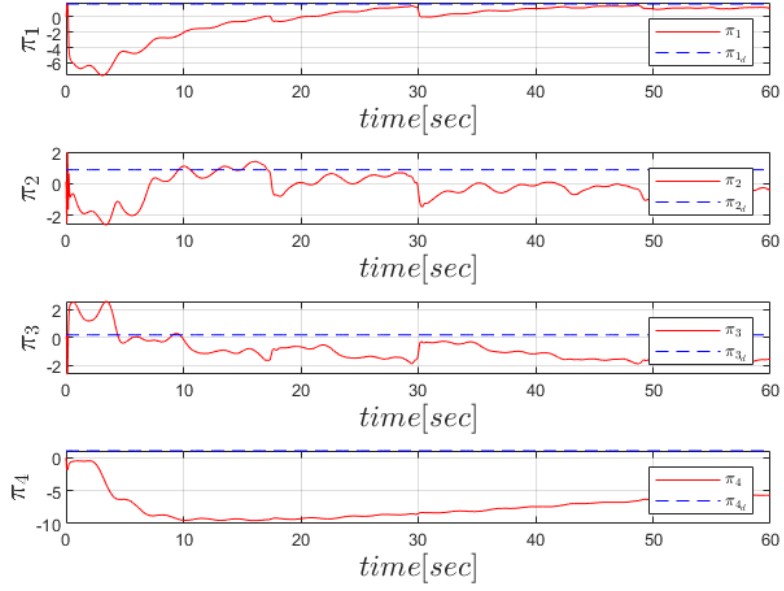
Σχήμα 6: Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_1 .



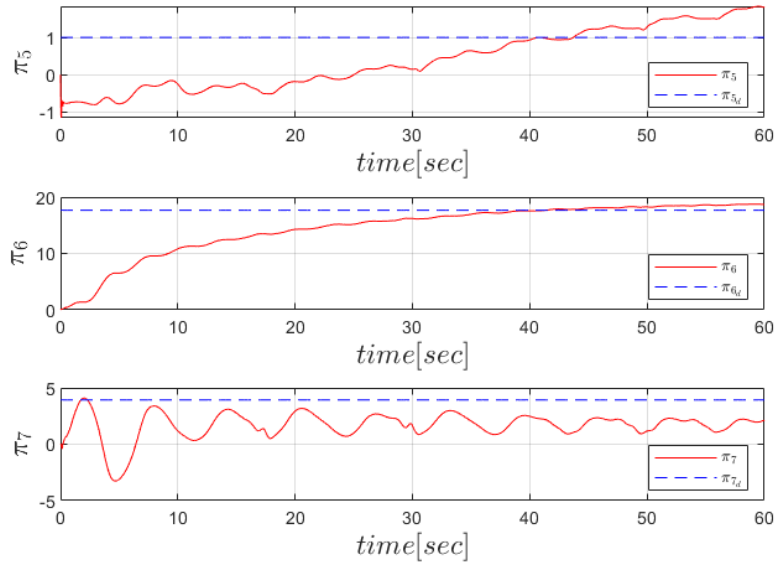
Σχήμα 7: Γωνιακή θέση και ταχύτητα στροφικής άρθρωσης q_2 .



Σχήμα 8: Σφάλματα παρακολούθησης γωνιακών θέσεων και ταχυτήτων στροφικών αρθρώσεων.



(α') Εκτιμήσεις παραμέτρων $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.



(β') Εκτιμήσεις παραμέτρων π_5, π_6, π_7 .

Σχήμα 9: Εκτίμηση παραμέτρων ρομποτικού βραχίονα.

Παράρτημα Α΄

Κώδικας Προσομοίωσης

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο πηγαίος κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσο-
μοίωση των δύο ελεγκτών.

```
%% Two DoF Robotic Manipulator Backstepping and Adaptive Backstepping
%      Assignment 4
%      Name: George Krommydas
%      A.M.: 02121208

clear;
clc;

global m1
global l1
global Iz1
global k1
global m2
global l2
global Iz2
global k2
global g
global parvar

%% Parameter Setting

m1 = 3.2;           % kg
l1 = 0.5;           % m
Iz1 = 0.96;         % kg m^2
k1 = 1;             % kg m^2/sec
m2 = 2.0;           % kg
l2 = 0.4;           % m
Iz2 = 0.81;         % kg m^2
k2 = 1;             % kg m^2/sec
g = 9.81;           % m/s^2

tstart = 0;         % sec
tend = 60;          % sec
tspan = [tstart, tend];
q1_0 = 80*pi/180;
```

```

q2_0 = 130*pi/180;
x0 = [q1_0;q2_0;0;0];
parvar = [Iz1+m1*(l1^2/4)+m2*l1^2;
          Iz2 + m2*(l2^2/4);
          0.5*m2*l1*l2;
          k1;
          k2;
          0.5*m1*g*l1+m2*g*l1;
          0.5*m2*g*l2];

% Simulation

[t,x] = ode45(@BacksteppingControl, tspan, x0);

q1_d = 90*pi/180 + (30*pi/180)*cos(t);
q1_dot_d = -(30*pi/180)*sin(t);
q1_ddot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
q2_d = 90*pi/180 - (30*pi/180)*sin(t);
q2_dot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
q2_ddot_d = (30*pi/180)*sin(t);

% Plots
figure(1);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,1), 'r-');
hold on;
plot(t, q1_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$q_1$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$q_1$', '$q_{1_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,3), 'r-');
hold on;
plot(t, q1_dot_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\dot{q}_1$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\dot{q}_1$', '$\dot{q}_{1_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

figure(2);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t, x(:,2), 'r-');
hold on;
plot(t, q2_d, 'b--');

```

```

xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $q_{-2}$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend(' $q_{-2}$ ', ' $q_{-2\_d}$ ', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast ');

subplot(2,1,2);
plot(t, x(:,4), 'r-');
hold on;
plot(t, q2_dot_d, 'b--');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $\dot{q}_{-2}$ [rad/sec]$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend(' $\dot{q}_{-2}$ ', ' $\dot{q}_{-2\_d}$ ', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast ');

figure(3);
clf;

subplot(4,1,1);
plot(t, x(:,1) - q1_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $e_{-1}$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

subplot(4,1,2);
plot(t, x(:,3) - q1_dot_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $\dot{e}_{-1}$ [rad/sec]$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

subplot(4,1,3);
plot(t, x(:,2) - q2_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $e_{-2}$ [rad]$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

subplot(4,1,4);
plot(t, x(:,4) - q2_dot_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel(' $\dot{e}_{-2}$ [rad/sec]$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;

% Simulation Adaptive Backstepping
x01 = [x0; zeros(size(parvar))];
[t1, x1] = ode45(@AdaptiveBacksteppingControl, tspan, x01);

```

```

q1_d = 90*pi/180 + (30*pi/180)*cos(t1);
q1_dot_d = -(30*pi/180)*sin(t1);
q1_ddot_d = -(30*pi/180)*cos(t1);
q2_d = 90*pi/180 - (30*pi/180)*sin(t1);
q2_dot_d = -(30*pi/180)*cos(t1);
q2_ddot_d = (30*pi/180)*sin(t1);

% Plots
figure(4);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t1, x1(:,1), 'r-');
hold on;
plot(t1, q1_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$q_1$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$q_1$', '$q_{1_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(2,1,2);
plot(t1, x1(:,3), 'r-');
hold on;
plot(t1, q1_dot_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\dot{q}_1$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\dot{q}_1$', '$\dot{q}_{1_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

figure(5);
clf;

subplot(2,1,1);
plot(t1, x1(:,2), 'r-');
hold on;
plot(t1, q2_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$q_2$ [rad]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$q_2$', '$q_{2_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(2,1,2);
plot(t1, x1(:,4), 'r-');
hold on;
plot(t1, q2_dot_d, 'b--');
xlabel('$time$ [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\dot{q}_2$ [rad/sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

```

```

grid on;
legend(' $\dot{q}_2$ ', ' $\dot{q}_{2_d}$ ', 'Interpreter ', 'latex ',
Location='southeast ');

figure(6);
clf;

subplot(4,1,1);
plot(t1, x1(:,1) - q1_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $e_{q_1}$ [rad]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

subplot(4,1,2);
plot(t1, x1(:,3) - q1_dot_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $\dot{e}_{q_1}$ [rad/sec]$', 'Interpreter ',
'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

subplot(4,1,3);
plot(t1, x1(:,2) - q2_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $e_{q_2}$ [rad]$', 'Interpreter ',
'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

subplot(4,1,4);
plot(t1, x1(:,4) - q2_dot_d, 'r-');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $\dot{e}_{q_2}$ [rad/sec]$', 'Interpreter ',
'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;

figure(7);
clf;

subplot(4,1,1);
plot(t1, x1(:,5), 'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(1).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel(' $time$ [sec]$', 'Interpreter ', 'latex ', 'FontSize ', 14);
ylabel(' $\pi_1$', 'Interpreter ',
'latex ', 'FontSize ', 14);
grid on;
legend(' $\pi_1$', ' $\pi_{1_d}$ ', 'Interpreter ',
'latex ', Location='southeast ');

subplot(4,1,2);
plot(t1, x1(:,6), 'r-');
hold on;

```

```

plot(t1, parvar(2).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\pi_2$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\pi_2$', '$\pi_{2_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(4,1,3);
plot(t1, x1(:,7), 'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(3).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\pi_3$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\pi_3$', '$\pi_{3_d}$', 'Interpreter', 'latex', Location='southe

subplot(4,1,4);
plot(t1, x1(:,8), 'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(4).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\pi_4$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\pi_4$', '$\pi_{4_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

figure(8);
clf;

subplot(3,1,1);
plot(t1, x1(:,9), 'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(5).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\pi_5$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\pi_5$', '$\pi_{5_d}$', 'Interpreter',
'latex', Location='southeast');

subplot(3,1,2);
plot(t1, x1(:,10), 'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(6).*ones(size(t1)), 'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
ylabel('$\pi_6$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize', 14);
grid on;
legend('$\pi_6$', '$\pi_{6_d}$', 'Interpreter',

```

```

'latex ',Location='southeast ');

subplot(3,1,3);
plot(t1, x1(:,11),'r-');
hold on;
plot(t1, parvar(7).*ones(size(t1)),'b--');
xlabel('$time [sec]$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',14);
ylabel('$\pi_7$', 'Interpreter',
'latex', 'FontSize',14);
grid on;
legend('$\pi_7$', '$\pi_{7_d}$', 'Interpreter',
'latex',Location='southeast ');

function dstate = BacksteppingControl(t, state)
% BACKSTEPPING CONTROL Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
    global m1
    global l1
    global Iz1
    global k1
    global m2
    global l2
    global Iz2
    global k2
    global g
    global parvar

% Desired trajectories
q1_d = 90*pi/180 + (30*pi/180)*cos(t);
q1_dot_d = -(30*pi/180)*sin(t);
q1_ddot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
q2_d = 90*pi/180 - (30*pi/180)*sin(t);
q2_dot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
q2_ddot_d = (30*pi/180)*sin(t);

% Gain matrices
K1 = [3.5 0;
      0 .8];
K2 = [15 0;
      0 15];

q_d = [q1_d;
       q2_d];
q_dot_d = [q1_dot_d;
           q2_dot_d];
q_ddot_d = [q1_ddot_d;
            q2_ddot_d];

% States
state = state(:);
q1 = state(1);
q2 = state(2);

```

```

q1_dot = state(3);
q2_dot = state(4);

q = [q1;
      q2];

q_dot = [q1_dot;
          q2_dot];

c1 = cos(q1);
c2 = cos(q2);
c12 = cos(q1 + q2);
s2 = sin(q2);

q_dot_r = q_dot_d + K1*(q - q_d);
q_ddot_r = q_ddot_d + K1*(q_dot - q_dot_d);

% Mass Matrix
M11 = Iz1 + Iz2 + m1*(l2^2/4) + m2*(l1^2 + l2^2/4 + l1*l2*c2);
M12 = Iz2 + m2*(l2^2/4 + l1*l2*c2);
M22 = Iz2 + m2*l2^2/4;
M = [M11 M12;
      M12 M22];

% Coriolis Matrix
c = 0.5*m2*l1*l2*s2;
C11 = -c*q2_dot + k1;
C12 = -c*(q1_dot + q2_dot);
C21 = c*q1_dot;
C22 = k2;
C = [C11 C12;
      C21 C22];

% Gravity vector
G1 = 0.5*m1*g*l1*c1 + m2*g*(l1*c1 + 0.4*l2*c12);
G2 = 0.5*m2*g*l2*c12;
G_0 = [G1;
        G2];

Y = [q_ddot_r(1) q_ddot_r(1)+q_ddot_r(2)...
      c2*(2*q_ddot_r(1)+q_ddot_r(2))-s2*(q_dot(2)*q_dot_r(1)...
      +(q_dot(1)+q_dot(2)*q_dot_r(2)))...
      q_dot_r(1) 0 c1 c12;
      0 q_ddot_r(1)+q_ddot_r(1)...
      c2*q_ddot_r(1)+s2*q_dot(1)*q_dot_r(1)...
      0 q_dot_r(2) 0 c12];

% Control law
z1 = q - q_d;
e2 = q_dot - q_dot_d;
z2 = e2 + K1*z1;

```



```

    tau = Y*parvar - z1 - K2*z2;
    q_ddot = inv(M)*(tau - C*q - G_0);

    dstate = [q_dot; q_ddot];
end

function dstate = AdaptiveBacksteppingControl(t, state)
% ADAPTIVE BACKSTEPPING CONTROL Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
    global m1
    global l1
    global Iz1
    global k1
    global m2
    global l2
    global Iz2
    global k2
    global g
    global parvar

% Desired trajectories
    q1_d = 90*pi/180 + (30*pi/180)*cos(t);
    q1_dot_d = -(30*pi/180)*sin(t);
    q1_ddot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
    q2_d = 90*pi/180 - (30*pi/180)*sin(t);
    q2_dot_d = -(30*pi/180)*cos(t);
    q2_ddot_d = (30*pi/180)*sin(t);

% Gain matrices
    K1 = [4 0;
          0 3];
    K2 = [8 0;
          0 12];
    Gp = 5*eye(7);
    q_d = [q1_d;
           q2_d];
    q_dot_d = [q1_dot_d;
               q2_dot_d];
    q_ddot_d = [q1_ddot_d;
                q2_ddot_d];

% States
    state = state(:);
    q1 = state(1);
    q2 = state(2);
    q1_dot = state(3);
    q2_dot = state(4);
    parvar_est = state(5:11);
    q = [q1;
         q2];

    q_dot = [q1_dot;

```

```

        q2_dot ];

c1 = cos(q1);
c2 = cos(q2);
c12 = cos(q1 + q2);
s2 = sin(q2);

q_dot_r = q_dot_d + K1*(q - q_d);
q_ddot_r = q_ddot_d + K1*(q_dot - q_dot_d);

% Mass Matrix
M11 = Iz1 + Iz2 + m1*(l2^2/4) + m2*(l1^2 + l2^2/4 + l1*l2*c2);
M12 = Iz2 + m2*(l2^2/4 + l1*l2*c2);
M22 = Iz2 + m2*l2^2/4;
M = [M11 M12;
      M12 M22];

% Coriolis Matrix
c = 0.5*m2*l1*l2*s2;
C11 = -c*q2_dot + k1;
C12 = -c*(q1_dot + q2_dot);
C21 = c*q1_dot;
C22 = k2;
C = [C11 C12;
      C21 C22];

% Gravity vector
G1 = 0.5*m1*g*l1*c1 + m2*g*(l1*c1 + 0.4*l2*c12);
G2 = 0.5*m2*g*l2*c12;
G_0 = [G1;
        G2];

Y = [q_ddot_r(1) q_ddot_r(1)+q_ddot_r(2)...
      c2*(2*q_ddot_r(1)+q_ddot_r(2))-s2*(q_dot(2)*q_dot_r(1)...
      +(q_dot(1)+q_dot(2)*q_dot_r(2)))...
      q_dot_r(1) 0 c1 c12;
      0 q_ddot_r(1)+q_ddot_r(1)...
      c2*q_ddot_r(1)+s2*q_dot(1)*q_dot_r(1)...
      0 q_dot_r(2) 0 c12];

% Control law
z1 = q - q_d;
e2 = q_dot - q_dot_d;
z2 = e2 + K1*z1;
parvar_dot = -Gp*Y'*z2;
tau = Y*parvar_est - z1 - K2*z2;
q_ddot = inv(M)*(tau - C*q - G_0);

dstate = [q_dot; q_ddot; parvar_dot];
end

```

Βιβλιογραφία

- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [4] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [5] Mohammed M'Saad Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [6] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.
- [7] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [10] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [11] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [12] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.
- [13] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [14] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [15] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.