



# *Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών*

*ΔΠΜΣ Συστήματα Αυτοματισμού*

---

## **Ευφυή Συστήματα Ελέγχου και Ρομποτικής**

---

### *Απαλλακτική Εργασία Προσαρμοστικός Έλεγχος Συστήματος Πολλαπλών Δεξαμενών*

<i>Ονοματεπώνυμο</i>	<i>Αριθμός Μητρώου</i>
Κασσαβετάκης Γεώργιος	02121203
Κρομμύδας Γεώργιος	02121208
Παπακώστας Λάμπης	02121211

Ακαδημαϊκό Έτος 2023 - 2024

# Περιεχόμενα

<b>Περιεχόμενα</b>	<b>i</b>
<b>Εισαγωγή</b>	<b>2</b>
Δομή Εργασίας . . . . .	2
Στόχοι Εργασίας . . . . .	2
Κατασκευή Διάταξης . . . . .	3
Βάσεις Δεξαμενών . . . . .	3
Ηλεκτρονικά - Ηλεκτρολογικά Υλικά . . . . .	3
Υδραυλικά Υλικά . . . . .	4
Συνολική Διάταξη Συστήματος . . . . .	5
<b>Μοντελοποίηση Συστήματος Δεξαμενών</b>	<b>6</b>
Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών . . . . .	6
Γραμμικοποιημένο Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών . . . . .	7
<b>Σχεδιασμός Συστήματος Ελέγχου Δεξαμενών</b>	<b>10</b>
Έλεγχος MIT Rule . . . . .	10
Σχεδίαση Ελεγκτή MIT Rule . . . . .	10
Προσομοίωση Ελεγκτή MIT Rule . . . . .	12
Έλεγχος MRAC . . . . .	19
Σχεδίαση Ελεγκτή MRAC . . . . .	19
Προσομοίωση Ελεγκτή MRAC . . . . .	21
Έλεγχος Feedback Linearization . . . . .	27
Σχεδίαση Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	28
Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	30
Προσομοίωση Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	32
Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Feedback Linearization . . . . .	35
Έλεγχος Backstepping . . . . .	41

Σχεδίαση Ελεγκτή Backstepping . . . . .	42
Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Backstepping . . . . .	43
Προσομοίωση Ελεγκτή Backstepping . . . . .	44
Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Backstepping . . . . .	49
<b>Αποτελέσματα Πειραματικής Διάταξης</b>	<b>56</b>
Περιγραφή υλοποίησης . . . . .	56
Εφαρμογή MIT Rule στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	57
Εφαρμογή MRAC στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	57
Εφαρμογή Feedback Linearization στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	57
Εφαρμογή Backstepping στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	57

# Εισαγωγή

## Δομή Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αφορά την εισαγωγή του θέματος, στο οποίο παρουσιάζονται οι στόχοι της εργασίας, η δομή της και τέλος το κατασκευαστικό κομμάτι της διάταξης και καθώς και τα επιμέρους εξαρτήματα που χρησιμοποιήθηκαν.

Το δεύτερο κεφάλαιο εμπεριέχει τη μοντελοποίηση του συστήματος δεξαμενών. Συγκεκριμένα, παράγεται το αρχικό μη γραμμικό μοντέλο των δεξαμενών και έπειτα αυτό γραμμικοποιείται κατάλληλα γύρω από το σημείο ισοροπίας για την εφαρμογή των ελεγκτών.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά τη σχεδίαση του συστήματος ελέγχου που θα δίνει τις κατάλληλες εντολές στην αντλία για να γίνεται ο έλεγχος των στάθμεων, μέσω προσαρμοστικών αλγορίθμων ελέγχου.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά τα πειράματα και τα αποτελέσματα που παράχθηκαν κατά τη λειτουργία του συστήματος δεξαμενών, με την κατάλληλη εφαρμογή των σχημάτων ελέγχου.

Τέλος, το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί τη σύνοψη και τα συμπεράσματα της εργασίας, μαζί με μελλοντικές επεκτάσεις που μπορούν να γίνουν στο παραπάνω σύστημα.

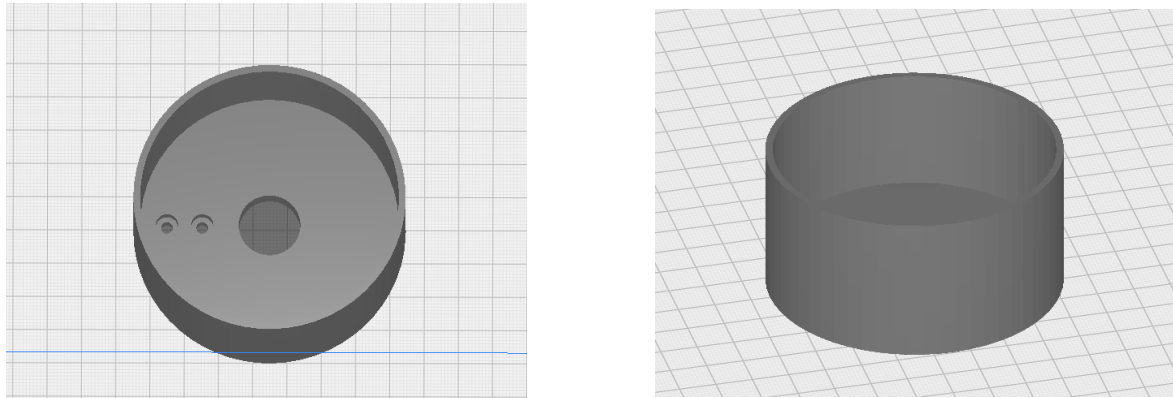
## Στόχοι Εργασίας

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η κατασκευή και ο έλεγχος μιας διάταξης δεξαμενών νερού. Η διάταξη μοντελοποιήθηκε και κατασκευάστηκε σύμφωνα με το [3]. Αναλυτικότερα, γίνεται έλεγχος της αντλίας νερού, η οποία θα εκρέει στην πρώτη δεξαμενή που βρίσκεται πάνω από τη δεύτερη. Εν συνεχεία, το ρευστό εκρέει από τη δεξαμενή 1 στη δεξαμενή 2 με φυσικό τρόπο. Με λίγα λόγια γίνεται έλεγχος της στάθμης της δεύτερης δεξαμενής. Τέλος, το ρευστό θα εκρέει από τη δεξαμενή 2 στην πισίνα που βρίσκεται κάτω από τις δεξαμενές. Έτσι, η αντλία θα ανακυκλώνει το νερό στις δεξαμενές, μέσω κατάλληλων εντολών, όσπου να επέλθει ισοροπία στο σύστημα.

# Κατασκευή Διάταξης

## Βάσεις Δεξαμενών

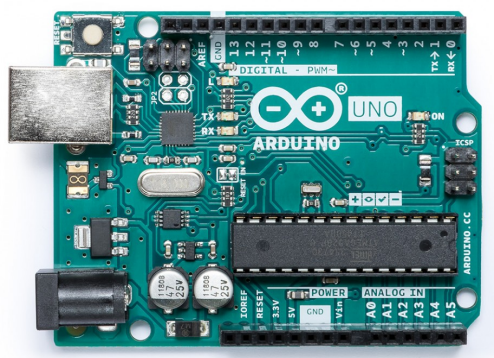
Το πρώτο βήμα κατά την κατασκευή του συστήματος ήταν ο σχεδιασμός και εκτύπωση των βάσεων των δεξαμενών (Εικόνα 1). Από την κεντρική οπή της βάσης εκρέει το ρευστό στην επόμενη δεξαμενή ή πιόσινα αντίστοιχα. Στις άλλες δύο οπές θα βιδωθούν οι αισθητήρες βάρους, στους οποίους θα στέκονται οι δεξαμενές.



Εικόνα 1: Ενισχυτής Σήματος Αισθητήρα Βάρους

## Ηλεκτρονικά - Ηλεκτρολογικά Υλικά

Τα επόμενα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για τη διάταξη αφορούν το ηλεκτρονικό υποσύστημα. Αναλυτικότερα, χρησιμοποιήθηκε ο μικροελεγκτής Arduino που φαίνεται στην εικόνα 2. Η συγκεκριμένη υπολογιστική πλατφόρμα θα παρέχει κατάλληλες εντολές στο σύστημα για την επίτευξη της ισορροπίας του συστήματος.



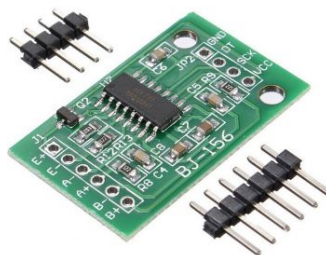
Εικόνα 2: Πλατφόρμα Μικροελεγκτή Arduino UNO Rev3.

Στις βάσεις των δεξαμενών τοποθετήθηκαν δύο αισθητήρες φορτίου του ενός κιλού (Εικόνα 3). Οι συγκεκριμένοι αισθητήρες αποτελούνται από Strain Gauges (Γέφυρες Wheatstone) οι οποίοι κατά την παραμόρφωση και μεταβολή των μηχανικών τάσεων, στέλνουν τα σήματα των μετρήσεων

στον μικροελεγκτή. Η αποστολή γίνεται μέσω των ενισχυτών HX711 οι οποίοι καθιστούν εύκολη την ανάγνωση των μετρήσεων από τα Strain Gauges (Σχήμα 4).



Εικόνα 3: Αισθητήρας Βάρους 1 Kg.

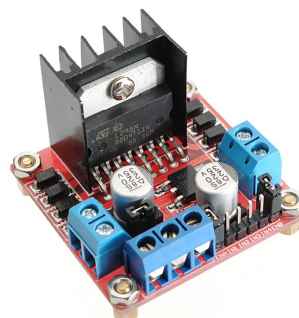


Εικόνα 4: Ενισχυτής Σήματος Αισθητήρα Βάρους

Τέλος, στο υποσύστημα αυτό υπάγεται η αντλία νερού συνεχούς ρεύματος (Εικόνα 5), η οποία με κατάλληλες εντολές περιστρέφεται έτσι ώστε να ωθήσει το ρευστό μέσα στη δεξαμενή 1. Για να μπορέσει να λειτουργήσει η αντλία νερού, χρειάζεται έναν Driver (Εικόνα 6) ο οποίος θα κωδικοποιεί τα σήματα ηλεκτρικών τάσεων σε ροπή για να περιστρέφεται ο δρομέας της αντλίας και να προωθεί το ρευστό στη δεξαμενή.



Εικόνα 5: Αντλία Νερού Συνεχούς Ρεύματος.



Εικόνα 6: Driver Αντλίας Νερού.

Γενικότερα, το ηλεκτρονικό υποσύστημα θα παράγει τα απαραίτητα σήματα ελέγχου και θα τα προωθεί στην αντλία για να μπορέσουμε να ελέγξουμε τη στάθμη της δεξαμενής 2 και να υπάρχει ισορροπία στο σύστημα.

## Υδραυλικά Υλικά

Τέλος, τα τελευταία υλικά που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της διάταξης, αποτελούν το υδραυλικό υποσύστημα. Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις δεξαμενές, τις βαλβίδες και τις σωληνώσεις (Εικόνα 7 και Εικόνα 8).



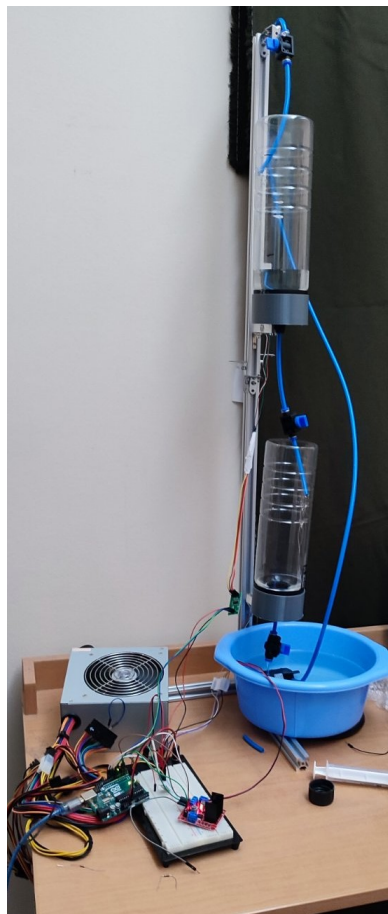
Εικόνα 7: Βαλβίδα Ροής Υγρού.



Εικόνα 8: Σωλήνας Παροχής Υγρού.

## Συνολική Διάταξη Συστήματος

Με τη χρήση των παραπάνω υλικών κατασκευάστηκε η συνολική διάταξη που φαίνεται στην Εικόνα 9. Μέσω του μικροελεγκτή παράγονται τα κατάλληλα σήματα με τη χρήση προσαρμοστικών σχημάτων ελέγχου και μεταδίδονται στην αντλία μέσω του PWM του Driver. Έπειτα η αντλία λειτουργεί και προωθεί το ρευστό στις δεξαμενές μέχρι να επιστραφεί σήμα από τους αισθητήρες στον μικροελεγκτή. Κατά τη λήψη των κατάλληλων σημάτων, ο μικροελεγκτής σταματά τη μετάδοση σημάτων στην αντλία, με αποτέλεσμα να αποκόπτεται η παροχή στη δεξαμενή 1. Έτσι, θα έχουμε ισορροπία στο σύστημα.

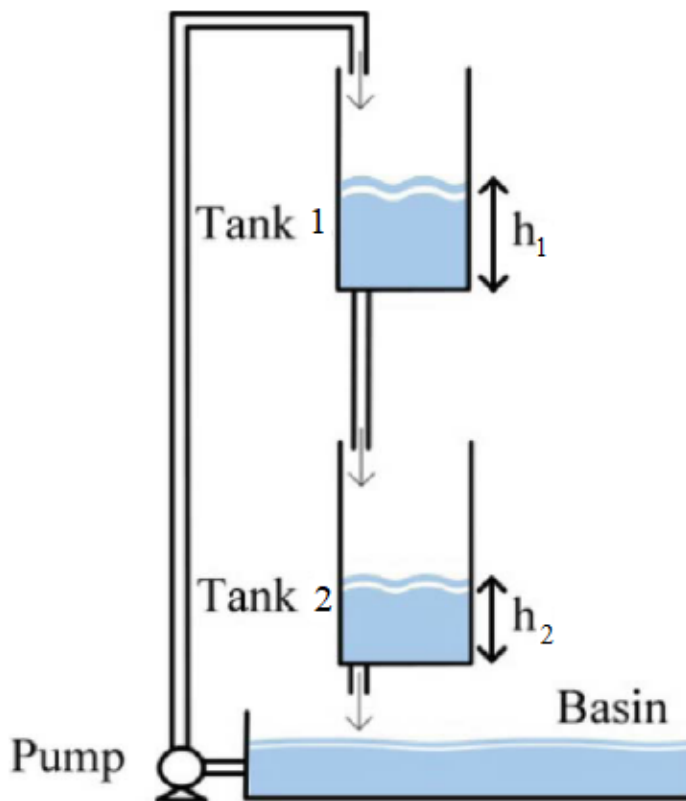


Εικόνα 9: Διάταξη δεξαμενών.

# Μοντελοποίηση Συστήματος Δεξαμενών

## Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Μια σχηματική απεικόνιση του συστήματος δεξαμενών παρουσιάζεται στην Εικόνα 10. Η αντλία θα παρέχει το ρευστό στην πρώτη δεξαμενή και ύστερα το ρευστό θα εκρέει στη δεύτερη με φυσικό τρόπο. Τέλος, το ρευστό της δεύτερης δεξαμενής θα εκρέει στην πισίνα που είναι τοποθετημένη κάτω από τη δεξαμενή.



Εικόνα 10: Διάταξη συστήματος δεξαμενών

Για το κομμάτι της μοντελοποίησης θα χρησιμοποιηθούν ο νόμος Bernoulli και ο νόμος της αρχής διατήρησης της μάζας. Συνεπώς, με τον συνδυασμό των παραπάνω νόμων προκύπτει η εξής γενική διαφορική εξίσωση

$$A(h)\dot{h} = Q_{in} - Q_{out} \quad (1)$$



Συνεπώς, τώρα θα δούμε για την κάθε δεξαμενή ξεχωριστά. Για την πρώτη δεξαμενή έχουμε την είσοδο  $u$  η οποία θα παρέχει το ρευστό στην πρώτη δεξαμενή. Συνεπώς

$$\begin{aligned} A\dot{h}_1 &= k_m k_c u - a_1 \sqrt{2gh_1} \\ \dot{h}_1 &= -\frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A} u \end{aligned} \quad (2)$$

Στη δεξαμενή δύο έχουμε ως είσοδο την εκροή της δεξαμενής 1 και η έξοδος εκρέει στην πισίνα. Επομένως, η διαφορική θα πάρει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} A\dot{h}_2 &= a_1 \sqrt{2gh_1} - a_2 \sqrt{2gh_2} \\ \dot{h}_2 &= \frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1} - \frac{a_2}{A} \sqrt{2gh_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Το τελικό μη γραμμικό σύστημα προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = f(h_1, h_2, u) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A} u \\ \frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1} - \frac{a_2}{A} \sqrt{2gh_2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Το παραπάνω σύστημα διαθέτει σημείο ισορροπίας

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} u_e = \frac{a_1}{K} \sqrt{2gh_{1,e}} \\ \theta_1 \sqrt{h_{1,e}} = \theta_2 \sqrt{h_{2,e}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_e = \frac{a_1}{K} \sqrt{2gh_{1,e}} = \frac{\theta_1}{b} \sqrt{h_{1,e}} \\ h_{1,e} = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} h_{2,e} \end{cases} \\ &\Rightarrow h_{1,e} = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} h_{2,e} = \frac{(bu_e)^2}{\theta_1^2} \end{aligned} \quad (5)$$

## Γραμμικοποιημένο Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Για την εφαρμογή ελεγκτών με βάση ένα γραμμικό μοντέλο μπορεί να γραμμικοποιηθεί το σύστημα γύρω από το επιθυμητό σημείο ισορροπίας. Έστω το επιθυμητό σημείο ισορροπίας του συστήματος να είναι της μορφής  $[h_1, h_2]^T = [h_{1,e}, h_{2,e}]^T$ . Το σύστημα με βάση το ανάπτυγμα Taylor γραμμικοποιείται ως:

$$\dot{h} = A_l \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + B_l (u - u_e) \quad (6)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_l &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{array} \right] \bigg|_{(h=[h_{1,e}, h_{2,e}]^T, u=u_e)} \\ B_l &= \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right] \bigg|_{(h=[h_{1,e}, h_{2,e}]^T, u=u_e)} \end{aligned}$$

Οι πίνακες  $A_l$  και  $B_l$ , με την εύρεση των μερικών παραγώγων της (4) προκύπτουν:

$$A_l = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & 0 \\ \frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & -\frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_2}} \end{bmatrix} \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στο σημείο ισορροπίας  $h = [h_{1,e}, h_{2,e}]^T$ ,  $u = u_e$ , οι πίνακες  $A_l$  και  $B_l$  έχουν τιμή:

$$A_l = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{1,e}}} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{1,e}}} & -\frac{\alpha_2}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{2,e}}} \end{bmatrix} \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Για απλοποίηση των σχέσεων, ορίζοντας  $\omega_i = \frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{i,e}}}$  και  $b = \frac{K}{A}$ , το γραμμικοποιημένο σύστημα προκύπτει:

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u_e)$$

Η παραπάνω σχέση, με μετασχηματισμό του σημείου ισορροπίας στο  $(0, 0)$  γίνεται:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (8)$$

Η σχέση (8) για λόγους εφαρμογής κάποιων από των μεθοδολογιών ελέγχου μπορεί να μετασχηματιστεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$\frac{X(s)}{V(s)} = (sI_2 - A_l)^{-1} B = \begin{bmatrix} s + \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & s + \omega_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} \begin{bmatrix} s + \omega_2 & 0 \\ \omega_1 & s + \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Έτσι, προκύπτουν οι δύο συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\frac{X_1(s)}{V(s)} = \frac{b}{s + \omega_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

Χρήσιμη επιπλέον είναι η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στις δύο στάθμες η οποία ορίζεται ως

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{\omega_1}{(s + \omega_2)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς της στάθμης  $h_2$  ως προς την είσοδο μπορεί να εκφραστεί σε μεταβλητές χώρου κατάστασης ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1\omega_2 & -\omega_1 - \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b\omega_1 \end{bmatrix} v$$

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στη μέτρηση της ταχύτητας μεταβολής της στάθμης  $h_2$  αμελώντας τη μέτρηση της στάθμης  $h_1$  και θα χρησιμοποιηθεί κατά την εφαρμογή της μεθόδου *MRAC* για να μπορούν να επιτευχθούν οι συνθήκες ταύτισης του μοντέλου αναφοράς.

Με βάση τα παραπάνω, το γραμμικοποιημένο σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (u - u_e) \quad (10)$$

όπου  $z = [x_2, \dot{x}_2]$  και  $\tilde{a}_1 = -\omega_1\omega_2$ ,  $\tilde{a}_2 = -\omega_1 - \omega_2$ ,  $\tilde{b} = b\omega_1$ .

# Σχεδιασμός Συστήματος Ελέγχου Δεξαμενών

## Έλεγχος MIT Rule

Για τη σχεδίαση του ελεγκτή MIT Rule θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης (8)

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

η οποία εκφράζεται ως

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v$$

με την αλλαγή μεταβλητών  $x_i = h_i - h_{i,e}$ . Η παραπάνω έκφραση έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή MIT Rule

Για τη σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς

$$M(s) = \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}$$

Λόγω της ανάδρασης της στάθμης  $h_1$  και  $h_2$  ορίζουμε τον νόμο ελέγχου

$$v = \theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2 \quad (11)$$

Το σήμα αναφοράς  $r$  είναι τέτοιο ώστε η έξοδος του  $M(s)r$  να δίνει την τιμή  $x_m$ , η οποία αναφέρεται στη διαφορά της επιθυμητής τιμή της στάθμης  $h_{2,d}$  με αυτή του σημείου του οποίου γίνεται η γραμμικοποίηση  $h_{2,e}$ .

Έτσι, ορίζουμε το σήμα αναφοράς  $r$  ως:

$$r = h_{2,d} - h_{2,e}$$

Ο ελεγκτής αυτός προσφέρει το σύστημα κλειστού βρόγχου ως

$$x_2 = \frac{b\omega}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} (\theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2)$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r - \frac{b\omega_1\theta_2}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_1 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 \\
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r - \frac{b\theta_2}{(s+\omega_1)}x_2 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 \\
\left(1 + \frac{b\theta_2}{s+\omega_1} + \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}\right)x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
\frac{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r
\end{aligned}$$

Με βάση τον στόχο ελέγχου της δεξαμενής 2 ορίζουμε το σφάλμα ελέγχου:

$$\begin{aligned}
e = x_2 - x_m &= \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}v - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r \\
e = x_2 - x_m &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r
\end{aligned}$$

Για την εύρεση του προσαρμοστικού νόμου είναι απαραίτητη η εύρεση των μερικών παραγώγων του σφάλματος. Η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_1$  προκύπτει ως

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r$$

Η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_2$  με τη χρήση της συνάρτησης μεταφοράς  $\frac{H_2(s)}{H_1(s)}$  προκύπτει ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b^2\omega_1\theta_1(s+\omega_2)}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{(s+\omega_2)}{\omega_1} \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2 \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_1
\end{aligned}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_3$  προκύπτει ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} &= -\frac{b^2\omega_1^2\theta_1}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} &= -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2
\end{aligned}$$

Με χρήση της προσέγγισης

$$(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3 \approx s^2 + a_{1m}s + a_{2m} \quad (12)$$

προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι ως:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} r = \frac{b\omega}{a_{2m}} \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) r \quad (13)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} h_1 = -\frac{b\omega}{a_{2m}} \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_3} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} h_2 = -\frac{b\omega}{a_{2m}} \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_2 \quad (15)$$

Έτσι, από τη γενική σχέση των νόμων προσαρμογής

$$\dot{\theta}_i = -\tilde{\gamma}_i e \frac{\partial e}{\partial \theta_i} \quad (16)$$

προκύπτουν οι νόμοι προσαρμογής

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) r \quad (17)$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_1 \quad (18)$$

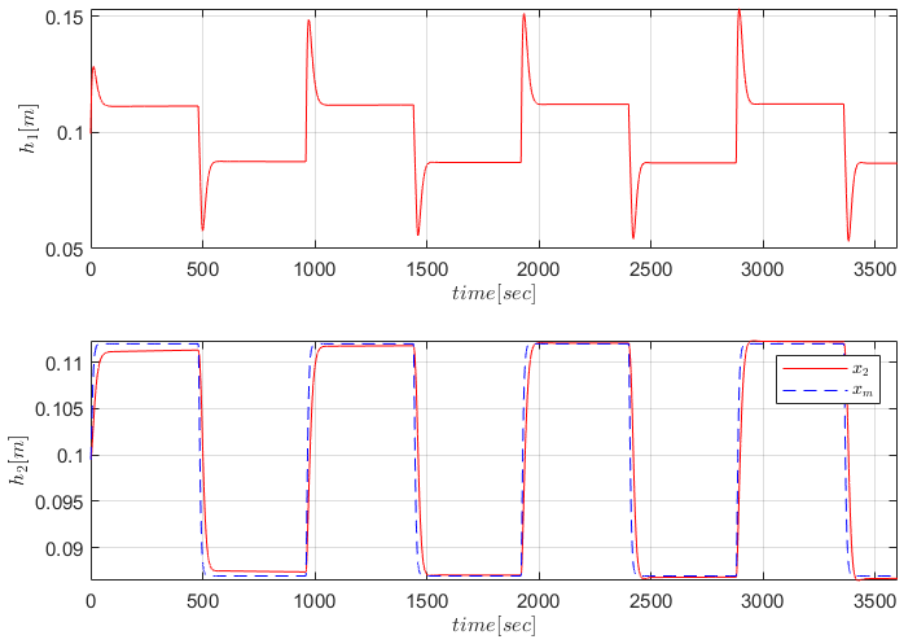
$$\dot{\theta}_3 = \gamma_3 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_2 \quad (19)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι το κέρδος  $\gamma_i$  δεν ταυτίζεται με αυτό της σχέσης 16, καθώς προκύπτει από την εξίσωση  $\gamma_i = \frac{b\omega_1}{a_{2m}} \tilde{\gamma}_i$ . Ο λόγος αυτής της επιλογής είναι η χρήση φίλτρου μοναδιαίου  $DC$  κέρδους και οι άγνωστες τιμές των παραμέτρων του συστήματος  $b, \omega_1$ .

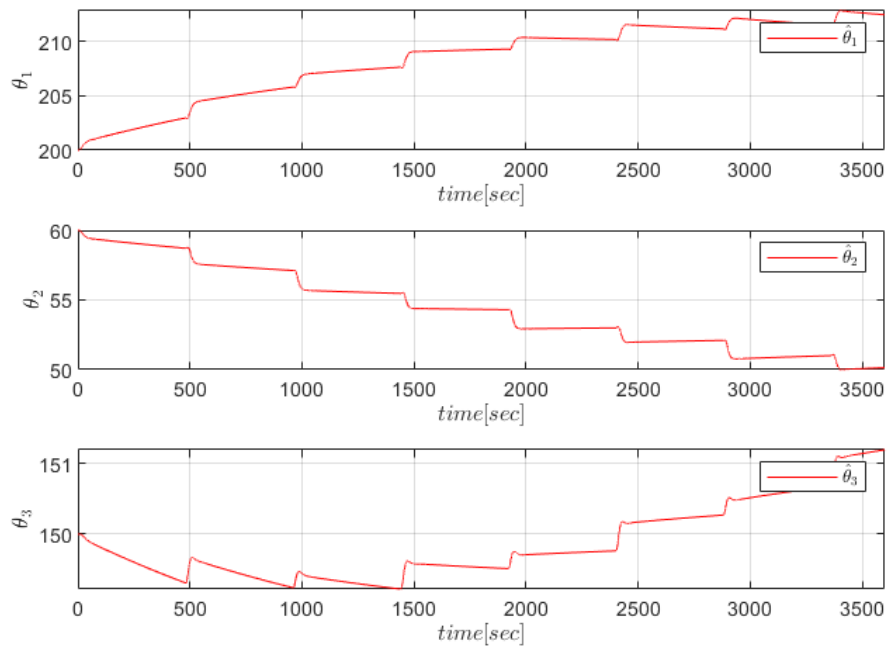
## Προσομοίωση Ελεγκτή MIT Rule

Καθώς σχεδιάστηκε ο ελεγκτής, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί, έτσι ώστε να δούμε εάν θα γίνει σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς. Μετά από πληθώρα προσομοιώσεων, βρέθηκαν τα κατάλληλα κέρδη προσαρμογής να είναι  $\gamma_1 = 500$ ,  $\gamma_2 = 180$  και  $\gamma_3 = 150$ . Κατά την προσομοίωση εφαρμόστηκαν τρία διαφορετικά σήματα αναφοράς. Ένας τετραγωνικός παλμός, ένας ημιτονοειδής παλμός και ένας τραπεζοειδής παλμός. Όλα τα σήματα έχουν σχεδιαστεί ώστε να ξεκινάνε από το σημείο ισορροπίας  $(h_{1,e}, h_{2,e})$ . Άρα θα δούμε την απόκριση των σημάτων.

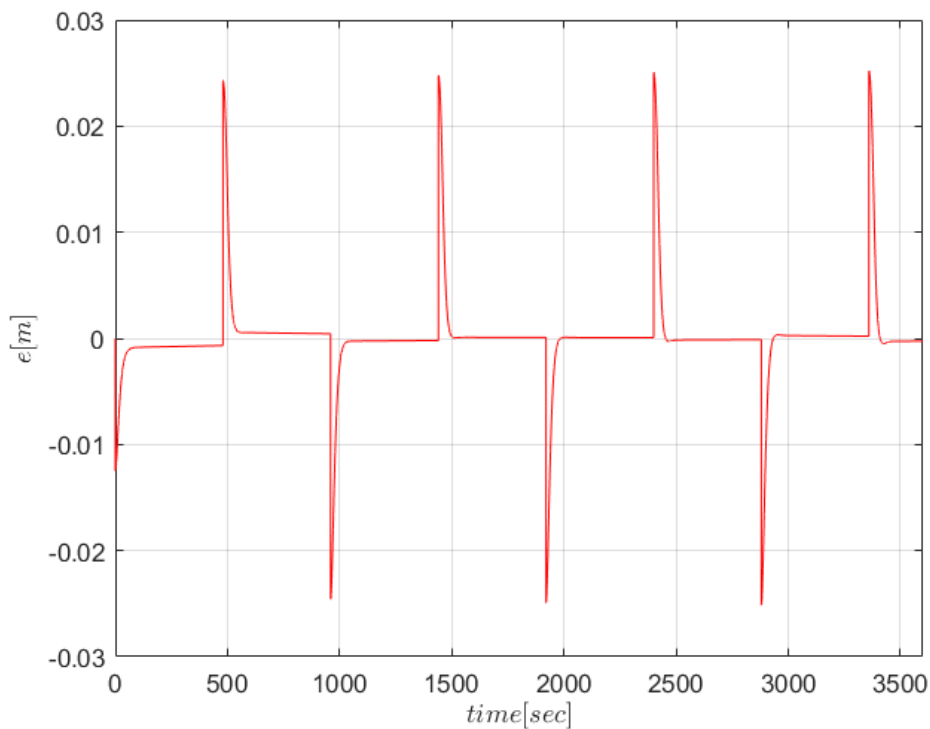
Έστω ότι έχουμε το πρώτο σήμα που αποτελεί τον τετραγωνικό παλμό. Στην εικόνα 11 παρατηρούμε πως αποκρίνεται το σύστημα κατά την εφαρμογή του παρόντος σήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση κατά την προσομοίωση του ελεγκτή, με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 13). Τέλος, στην εικόνα 12 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή. Βλέπουμε πως ξεκινάν από μια τιμή κοντά στην πραγματική τιμή, λόγω των διαστάσεων των μεγεθών του συστήματος. Με αυτό τον τρόπο επετεύχθη η σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς.



Εικόνα 11: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



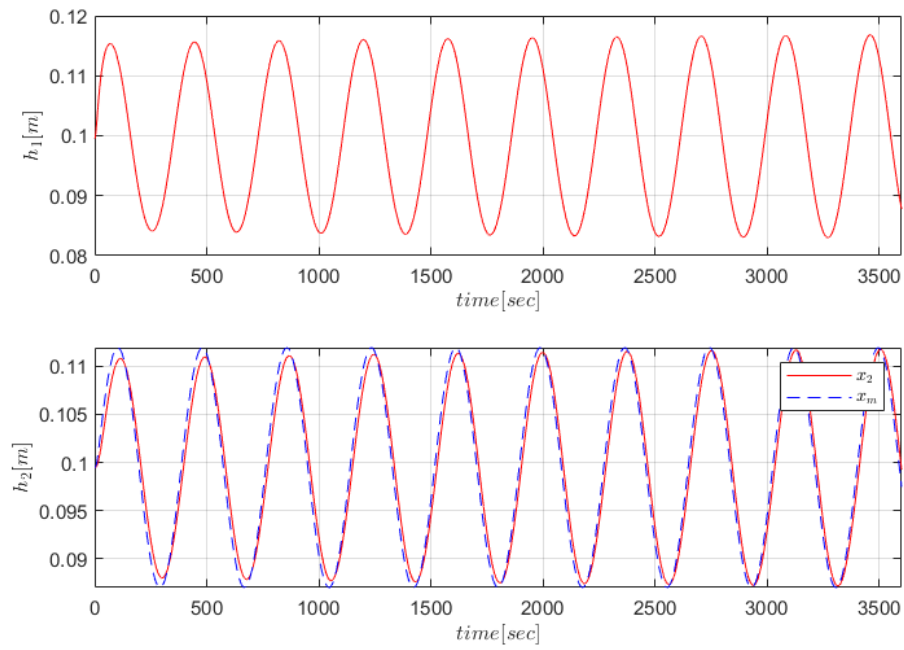
Εικόνα 12: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



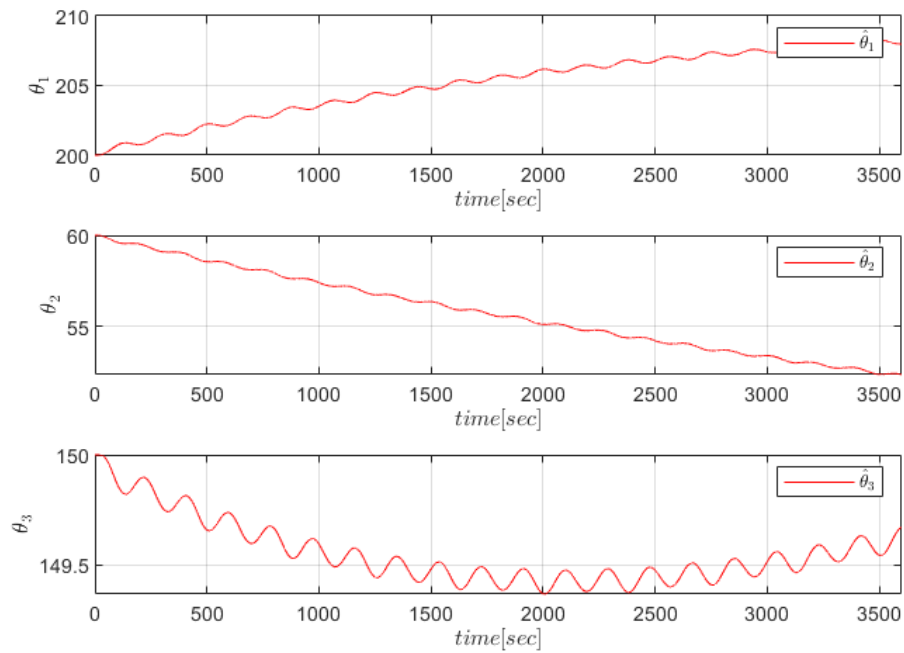
Εικόνα 13: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Τώρα θα δούμε την απόκριση του συστήματος με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, που είναι ένας ημιτονοειδής παλμός. Στην εικόνα 14 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος κατά την εφαρμογή του παλμού αυτού. Διαπιστώνουμε πως το παρακολουθεί σωστά με το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο 0, όπως εμφανίζεται και στην εικόνα 16. Τέλος, στην εικόνα 15 βλέπουμε την εκτίμηση των παραμέτρων του ελεγκτή. Παρατηρούμε πως προσαρμόζονται ωστόσο δε φτάνουν στην ιδεατή τιμή.

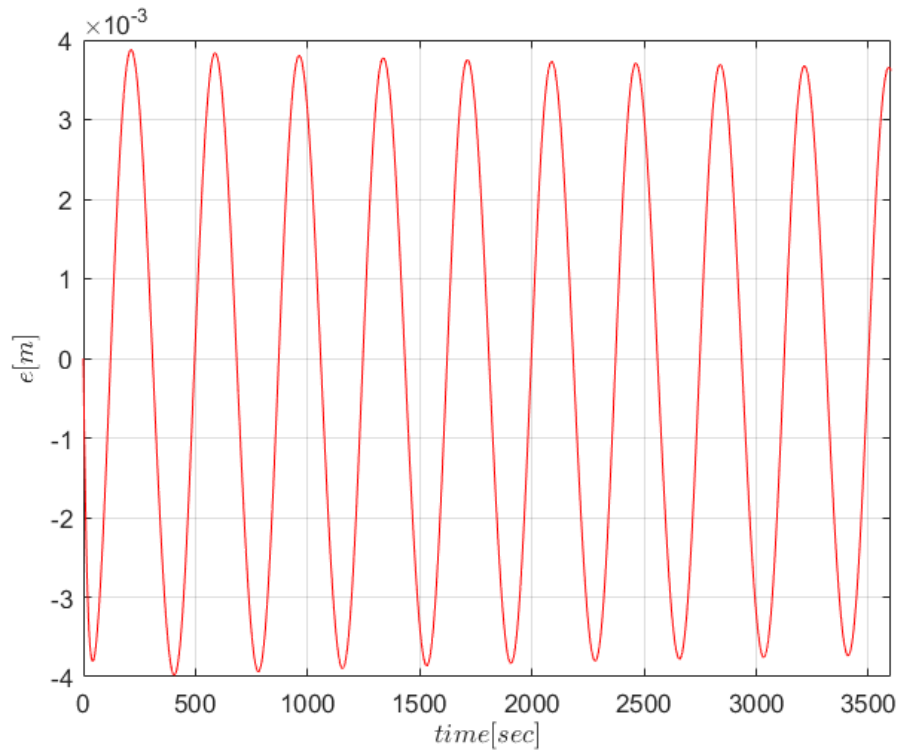




Εικόνα 14: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

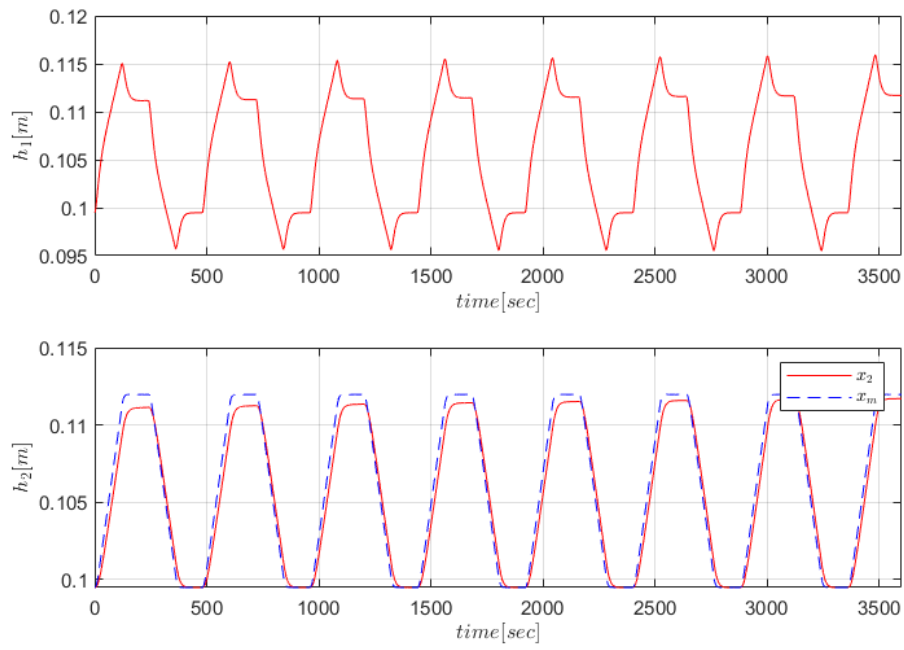


Εικόνα 15: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

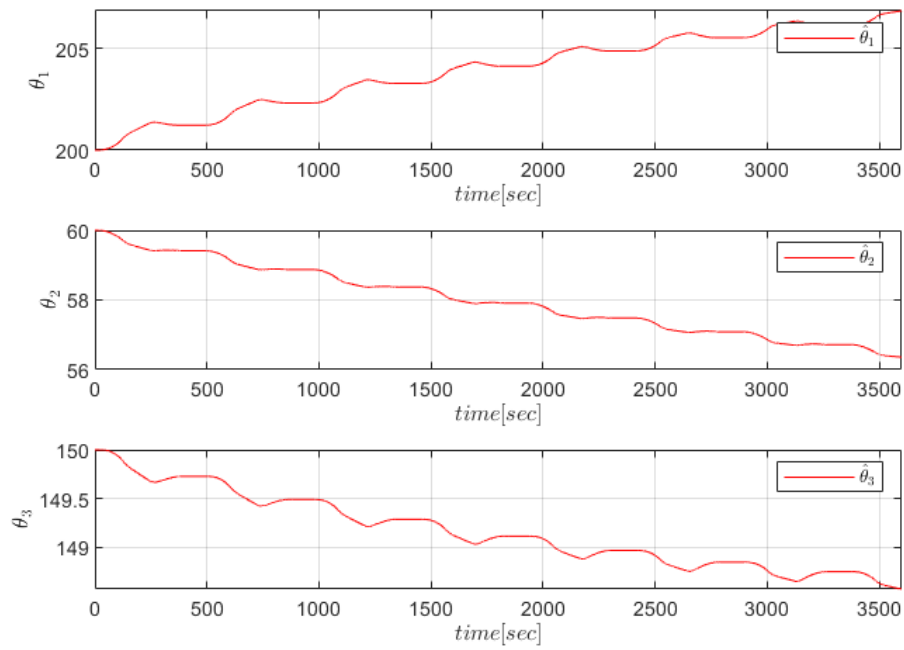


Εικόνα 16: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

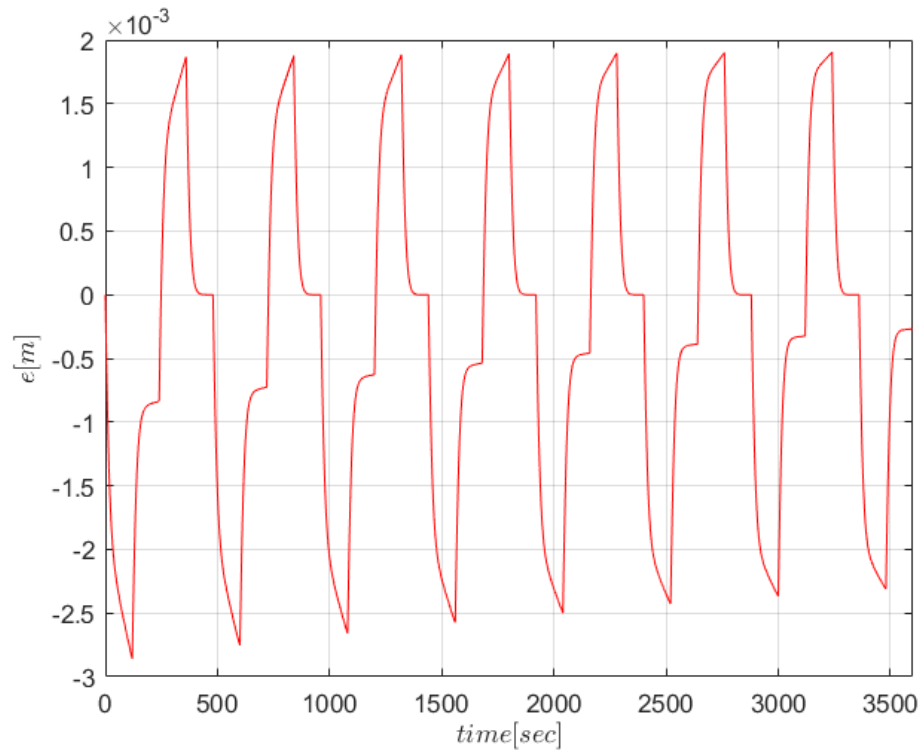
Τέλος, θα εφαρμόσουμε τον τραπεζοειδή παλμό για να δούμε πως κυμαίνεται η απόκριση του συστήματος. Στην εικόνα 17 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, δίχως να ξεφυλάζει η δεξαμενή 1. Το σφάλμα παρακολούθησης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στην εικόνα 19. Επιπλέον, στην εικόνα 18 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή.



Εικόνα 17: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 18: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 19: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συνοπτικά, διαπιστώνουμε πως η εφαρμογή του MITRule στο σύστημα δεξαμενών επιτυγχάνει τη σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, με αποτέλεσμα να ελέγχεται σωστά η στάθμη της δεξαμενής 2, χωρίς να ξεχυλίζει η στάθμη της δεξαμενής 1.

## Έλεγχος MRAC

Για τη σχεδίαση του ελεγκτή MRAC θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης (10)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (u - \theta^* \Phi)$$

Η σχεδίαση αυτή δε χρειάζεται τη μεταφορά του συστήματος στον χώρο Laplace. Έτσι, επαρκεί η χρήση του μοντέλου κατάστασης. Η επιλογή της χρήσης αυτού του γραμμικοποιημένου μοντέλου και όχι αυτού της εξίσωσης (8) γίνεται για λόγους συμβατότητας του μοντέλου με αντίστοιχο μοντέλο αναφοράς.

Για τη σχεδίαση του MRAC θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά η ανάδραση της στάθμης της δεύτερης δεξαμενής και θα προσεγγιστεί με βάση τα δεδομένα η παράγωγος της. Έτσι, θεωρούμε ότι η μέτρηση γίνεται στις ποσότητες  $h_2, \dot{h}_2$ , τα οποία συνεπάγονται τη μέτρηση του διανύσματος  $x$  της δεύτερης γραμμικοποίησης.

## Σχεδίαση Ελεγκτή MRAC

Για τη σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς

$$M(s) = \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}$$

Το μοντέλο αναφοράς στον χώρο κατάστασης δίνεται ως

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{2m} & -a_{1m} \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2m} \end{bmatrix} r = A_m x_m + B_m r \quad (20)$$

Και σε αυτήν τη σχεδίαση με όμοιο τρόπο με την περίπτωση του MIT, η μεταβλητή  $x_1$  ορίζεται ως  $x_1 = h_2 - h_{2,e}$  ενώ το σήμα αναφοράς  $r$  ορίζεται ως  $r = h_{2,d} - h_{2,e}$ .

Έστω ο νόμος ελέγχου

$$u = K_x^T x + K_r r + \theta \Phi(x) \quad (21)$$

Για τον παραπάνω ελεγκτή το σύστημα κλειστού βρόγχου έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (K_x^T x + K_r r + \theta \Phi(x) - \theta^* \Phi) \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 + \tilde{b} K_{x,1} & \tilde{a}_2 + \tilde{b} K_{x,2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} K_r \end{bmatrix} r + (\theta - \theta^*) \Phi \end{aligned}$$

Θεωρούμε τα ιδανικά κέρδη  $K_x^*, K_r^*$  τα οποία δίνουν τις *Model Matching* συνθήκες

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 + \tilde{b} K_{x,1}^* & \tilde{a}_2 + \tilde{b} K_{x,2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{2m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ bK_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2m} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Για τη συνέχεια της ανάλυσης ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{K}_x = \hat{K}_x - K_x^*$ ,  $\tilde{K}_r = \hat{K}_r - K_r^*$ ,  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ . Με βάση αυτά υπολογίζουμε τη δυναμική του σφάλματος παρακολούθησης  $e = x - x_m$  ως

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m = \dots = A_m e + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r r + \tilde{\theta} \Phi(x)) \quad (24)$$

Θεωρούμε γνωστό επιπλέον ότι  $\tilde{b} > 0$ . Η θεώρηση αυτή είναι προφανής καθώς από τη φυσική μοντελοποίηση του προβλήματος μπορούμε να δούμε ότι ο θετικός έλεγχος  $u$  επιφέρει αύξηση της ταχύτητας και κατά συνέπεια της στάθμης  $u$ .

Λόγω της ευστάθειας του μοντέλου αναφοράς, ορίζεται ο θετικά ορισμένος και συμμετρικός πίνακας  $P$  ως η λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (25)$$

Με βάση τον πίνακα  $P$  ορίζεται η συνάρτηση Lyapunov προβλήματος ως

$$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\theta}) = e^T P e + (\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x + \frac{1}{\gamma_r} \tilde{K}_r^2 + \frac{1}{\gamma_\theta} \tilde{\theta}^2) \tilde{b} \quad (26)$$

Η παράγωγο της συνάρτησης δίνεται από

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^T (A_m^T P + P A_m) e + 2e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r r + \tilde{\theta} \Phi(x)) \\ &\quad + 2\tilde{b} (\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + \frac{1}{\gamma_r} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r + \frac{1}{\gamma_\theta} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned}$$

Με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων

$$\dot{\tilde{K}}_x = -\Gamma_x x e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\dot{\tilde{K}}_r = -\gamma_r r e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_\theta \Phi(x) e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\gamma_\theta e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov δίνεται από

$$\frac{dV}{dt} = e^T (A_m^T P + P A_m) e = -e^T Q e \leq 0$$

Η αρνητικά ημιορισμένη παράγωγος της  $V$  εγγυάται μέσω του Λήμματος Barbalat τη σύγκλιση του σφάλματος στο 0.

Η επιλογή των παραπάνω νόμων όμως δε λαμβάνει υπόψη της το φαινόμενο της γραμμικοποίησης και των μη μοντελοποιημένων μη γραμμικοτήτων. Έτσι, τροποποιούμε τους παραπάνω νόμους ως:

$$\dot{\hat{K}}_x = -\Gamma_x \text{Proj}(\hat{K}_x, x e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \quad (30)$$

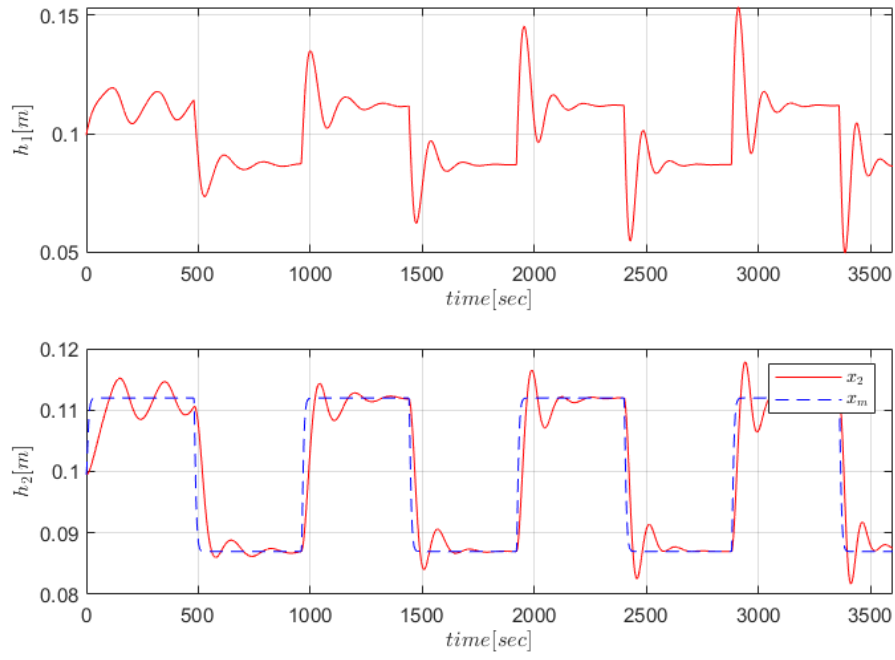
$$\dot{\hat{K}}_r = -\gamma_r \text{Proj}(\hat{K}_r, r e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \quad (31)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma_\theta \text{Proj}(\hat{\theta}, e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \quad (32)$$

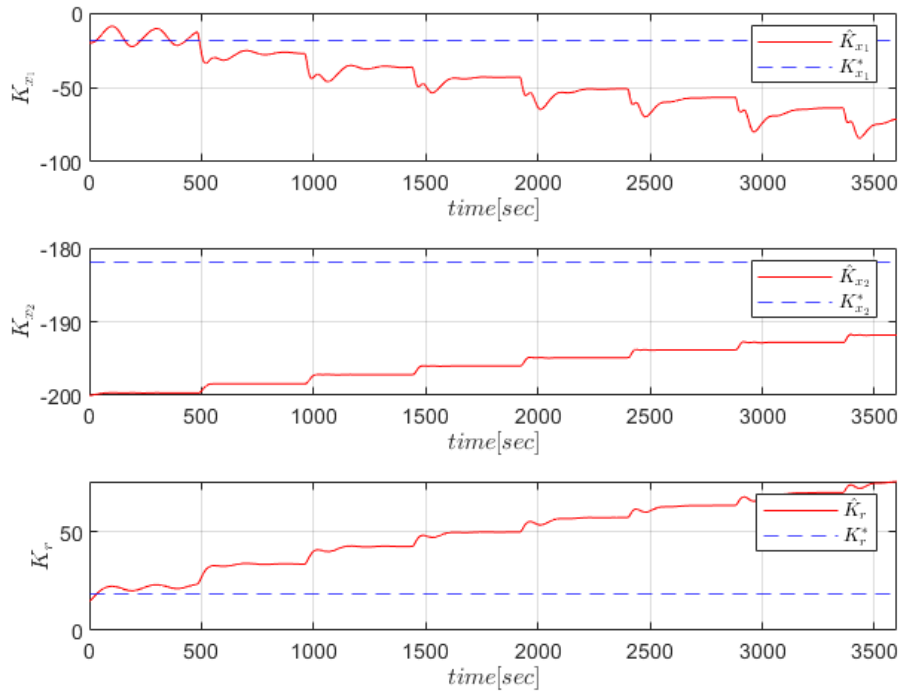
## Προσομοίωση Ελεγκτή MRAC

Καθώς σχεδιάστηκε ο ελεγκτής, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί, έτσι ώστε να δούμε εάν θα γίνει σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς. Μετά από πληθώρα προσομοιώσεων, βρέθηκαν τα κατάλληλα κέρδη προσαρμογής να είναι  $\Gamma_x = 500I_2$  και  $\gamma_r = 100$ . Κατά την προσομοίωση εφαρμόστηκαν τρία διαφορετικά σήματα αναφοράς. Ένας τετραγωνικός παλμός, ένας ημιτονοειδής παλμός και ένας τραπεζοειδής παλμός. Όλα τα σήματα έχουν σχεδιαστεί ώστε να ξεκινάνε από το σημείο ισορροπίας ( $h_{1,e}, h_{2,e}$ ). Άρα θα δούμε την απόκριση των σημάτων.

Έστω ότι έχουμε το πρώτο σήμα που αποτελεί τον τετραγωνικό παλμό. Στην εικόνα 20 παρατηρούμε πως αποκρίνεται το σύστημα κατά την εφαρμογή του παρόντος σήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση κατά την προσομοίωση του ελεγκτή, με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 22). Τέλος, στην εικόνα 21 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή. Βλέπουμε πως ξεκινάν από μια τιμή κοντά στην πραγματική τιμή, λόγω των διαστάσεων των μεγεθών του συστήματος. Με αυτό τον τρόπο επετεύχθη η σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς.

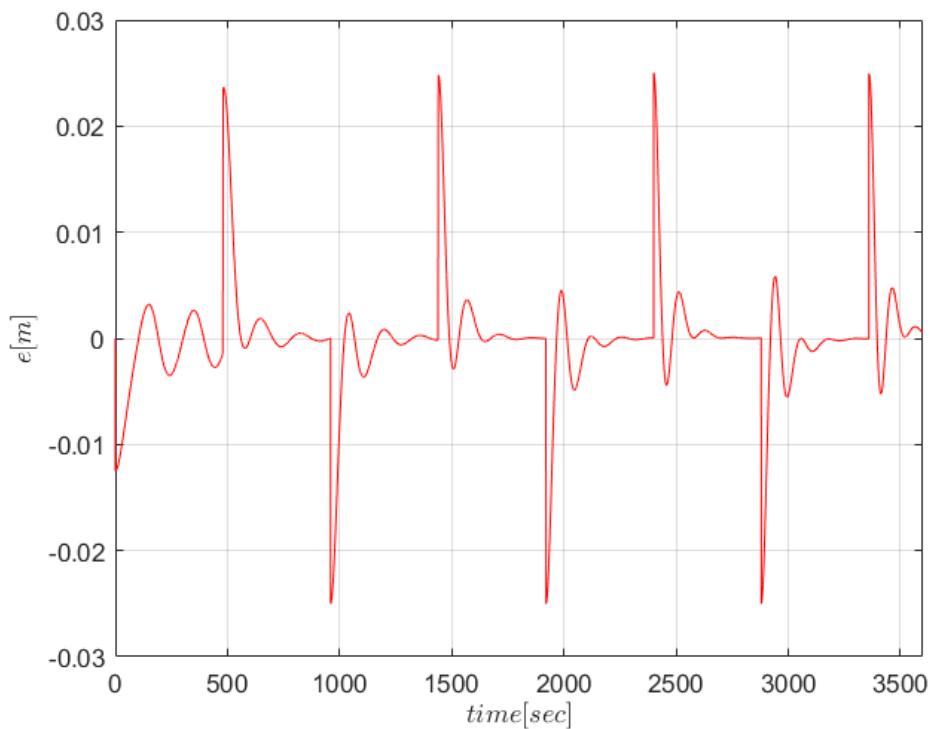


Εικόνα 20: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



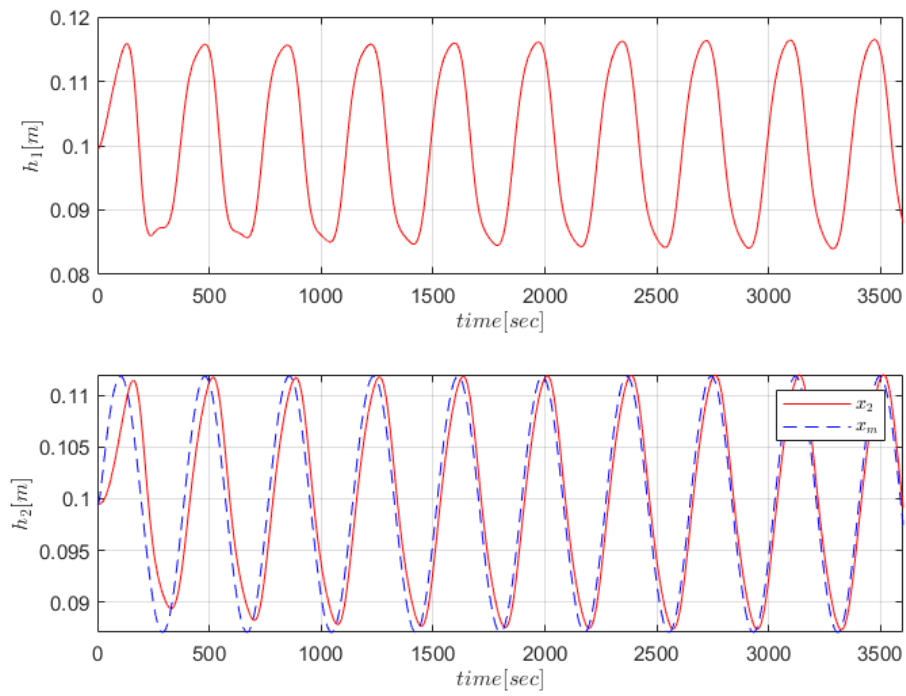
Εικόνα 21: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



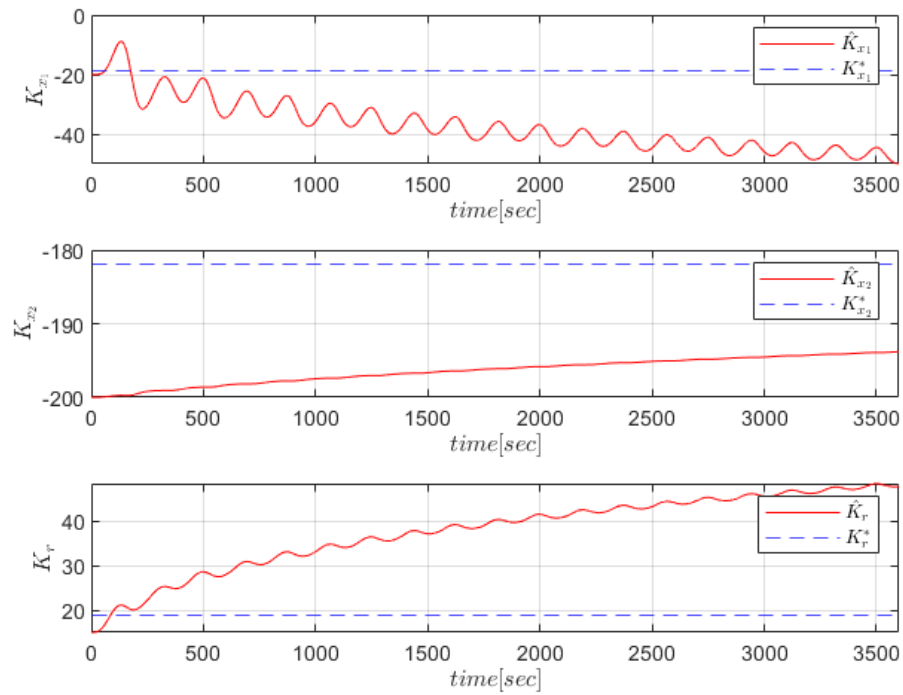


Εικόνα 22: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

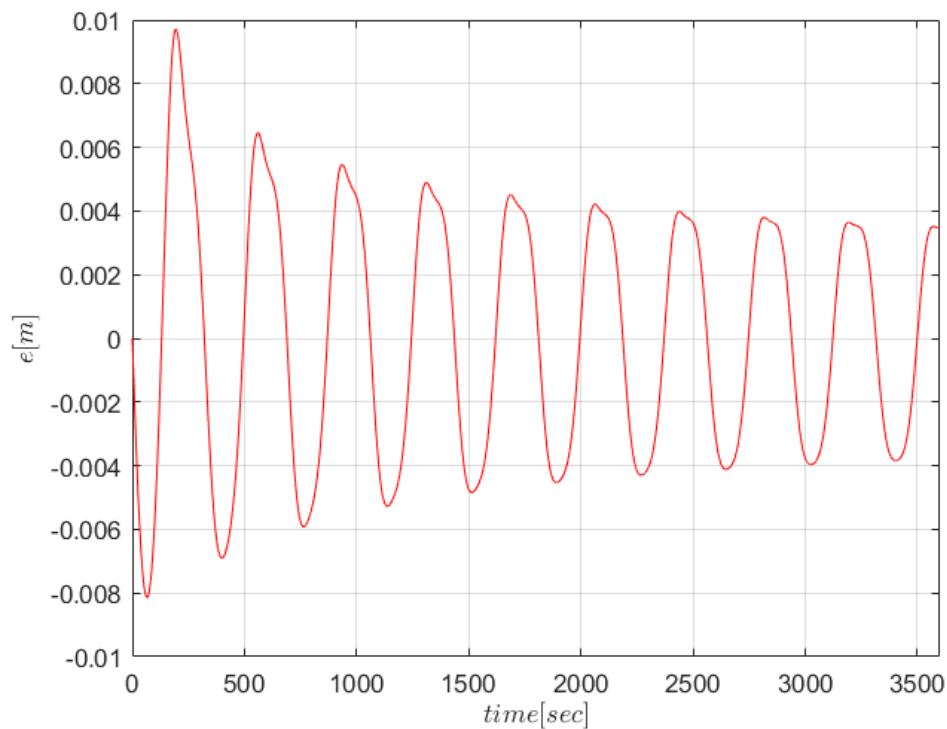
Τώρα θα δούμε την απόκριση του συστήματος με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, που είναι ένας ημιτονοειδής παλμός. Στην εικόνα 23 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος κατά την εφαρμογή του παλμού αυτού. Διαπιστώνουμε πως το παρακολουθεί σωστά με το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο 0, όπως εμφανίζεται και στην εικόνα 25. Τέλος, στην εικόνα 24 βλέπουμε την εκτίμηση των παραμέτρων του ελεγκτή. Παρατηρούμε πως προσαρμόζονται ωστόσο δε φτάνουν στην ιδεατή τιμή.



Εικόνα 23: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

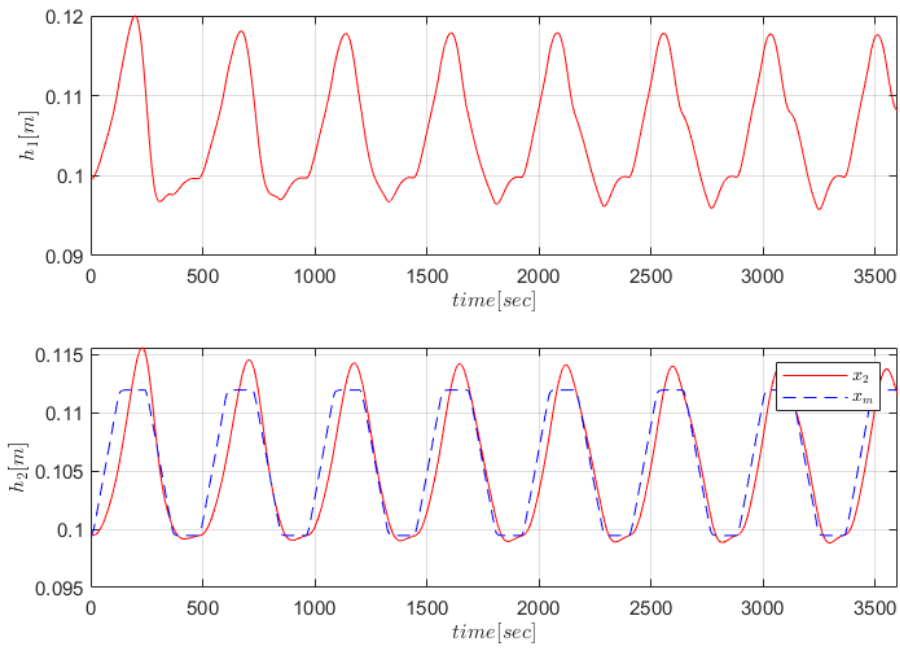


Εικόνα 24: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

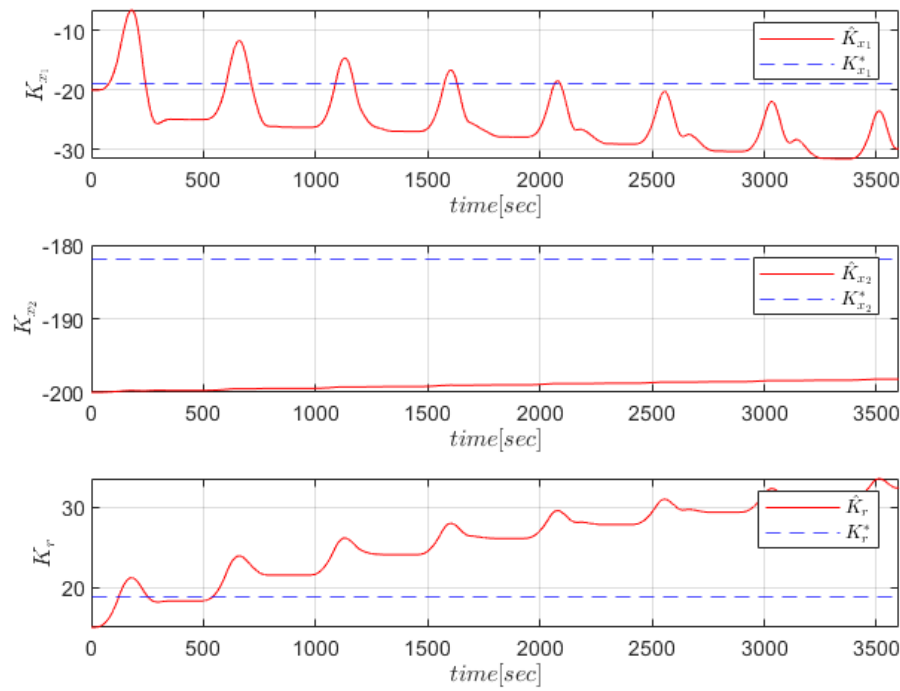


Εικόνα 25: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

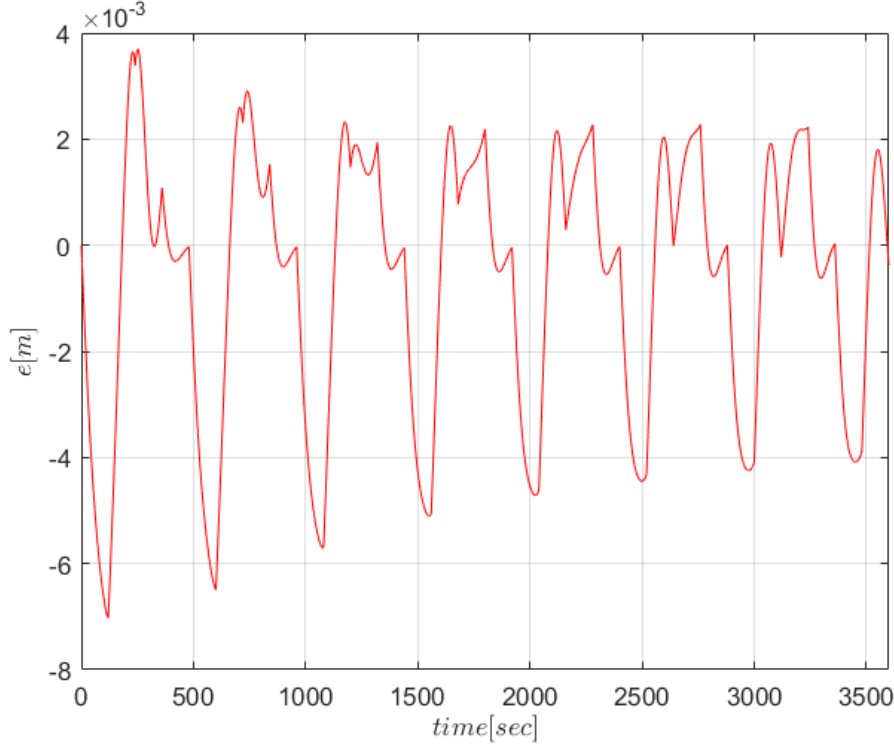
Τέλος, θα εφαρμόσουμε τον τραπεζοειδή παλμό για να δούμε πως κυμαίνεται η απόκριση του συστήματος. Στην εικόνα 26 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, δίχως να ξεφυλάξει η δεξαμενή 1. Το σφάλμα παρακολούθησης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στην εικόνα 28. Επιπλέον, στην εικόνα 27 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή.



Εικόνα 26: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 27: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 28: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συνοπτικά, διαπιστώνουμε πως η εφαρμογή του MRAC στο σύστημα δεξαμενών επιτυγχάνει τη σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, με αποτέλεσμα να ελέγχεται σωστά η στάθμη της δεξαμενής 2, χωρίς να ξεχυλίζει η στάθμη της δεξαμενής 1.

## Έλεγχος Feedback Linearization

Για τον έλεγχο με τη διαδικασία Feedback Linearization χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης (4)

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Αρχικά θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου και έπειτα η προσαρμοστική εκδοχή αυτού. Για τη χρήση του συμβολισμού Lie ορίζουμε τις συναρτήσεις  $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$  και  $\theta = \frac{\alpha}{A}\sqrt{2g}$ . Για λόγους αβεβαιότητας ορίζουμε δύο διαφορικά  $\theta$ , αντίστοιχα με κάθε διατομή  $a$ . Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση  $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$ . Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_1(h_1, h_2)} + g(h)u \quad (33)$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τη γραμμικοποίηση με ανάδραση, αρχικά ελέγχουμε τις συνθήκες ελεγχσιμότητας και ενελικτικού συνόλου:

$$C = [g \quad ad_{f_1}g] = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} & \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ 0 & -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \quad (34)$$

καθώς η αγκύλη *Lie* προκύπτει ως:

$$ad_{f_1}g = \nabla g f_1 - \nabla f_1 g = - \begin{bmatrix} -\theta_1\dot{\phi}(h_1) & 0 \\ \theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\theta_2\dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{με } \dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2\sqrt{h_i}}.$$

Η συνθήκη ελεγχσιμότητας αφορά τη γραμμική ανεξαρτησία του πίνακα της σχέσης (34). Ο πίνακας αυτός διαθέτει ορίζουσα:

$$\det(C) = -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\dot{\phi}(h_1)$$

η οποία για  $K, \theta_1 \neq 0$  και από την ιδιότητα της συνάρτησης  $\dot{\phi} > 0$ , είναι  $\det(C) \neq 0$ . Άρα η συνθήκη ελεγχσιμότητας επαληθεύεται τοπικά λόγω μη ορισμού της  $\dot{\phi}$  στο σημείο  $h = 0$ .

Για το σύνολο να είναι ενελικτικό, εξετάζουμε τι συμβαίνει για την αγκύλη *Lie* των δύο διανυσματικών πεδίων  $g, d_{f_1}g$ .

Για την επιλογή της πρώτης νέας μεταβλητής  $z_1$  πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\nabla_{z_1}g = 0 \quad (35)$$

$$\nabla_{z_1}ad_{f_1}g \neq 0 \quad (36)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, η Εξίσωση (35) δίνει τη σχέση:

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_1} = 0$$

Έτσι, η Εξίσωση (36) δίνει τον περιορισμό

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_2} \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) \neq 0 \implies \frac{\partial z_1}{\partial h_2} \neq 0$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή  $z_1 = h_2$ . Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_1 = L_f z_1 = \nabla_{z_1} f(h_1, h_2) = \theta_1 \dot{\phi}(h_1) - \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \quad (37)$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή  $z_2 = L_f z_1$ . Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_2 = L_f z_2 = \nabla_{z_2} f(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) & -\theta_2 \dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_1 \dot{\phi}(h_1) + \frac{K}{A} u \\ \theta_1 \dot{\phi}(h_1) - \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Για λόγους πληρότητας ορίζουμε και τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \phi^{-1}(\frac{1}{\theta_1}(z_2 + \theta_2\phi(z_1))) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\dot{z}_2 = \alpha(h) + \beta(h)u$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha(h) &= -\theta_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2)) - \theta_1^2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_1) \\ \beta(h) &= \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{aligned}$$

Μέσω της ιδιότητας  $\phi(h_i)\dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2}$  της συνάρτησης  $\sqrt{x}$ , προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha(h) &= -\theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \\ \beta(h) &= \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{aligned}$$

Έτσι, ορίζουμε τον έλεγχο γραμμικοποίησης

$$u = \frac{1}{\beta(h)}(-\alpha(h) + v) \quad (40)$$

με  $v$  το σήμα ελέγχου του γραμμικοποιημένου συστήματος. Τότε, το μετασχηματισμένο σύστημα μετατρέπεται στο:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ v \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ορίζουμε τον έλεγχο για παρακολούθηση τροχιάς:

$$v = \dot{z}_{2,d} - k_1(z_2 - z_{2,d}) - k_2(z_1 - z_{1,d}) \quad (42)$$

με  $z_{1,d}$  την επιθυμητή τροχιά του συστήματος ως προς  $z_1 = h_2$  και τη θετική σταθερά  $k$ . Σε περίπτωση επιλογής μίας σταθερής τιμής ως τροχιά χρησιμοποιείται η παράγωγος  $\dot{z}_{1,d} = 0$ .

Η δυναμική του σφάλματος διαθέτει χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^2 + k_1s + k_2 = 0$$

η οποία είναι ευσταθής για  $k_1, k_2 > 0$ .

## Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τροποποίηση του παραπάνω ελεγκτή με χρήση προσαρμοστικού νόμου και της αλλαγής των μεταβλητών  $z_1, z_2$  από την Εξίσωση (37) με βάση την αρχή της Βεβαιότητας ως:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) \end{bmatrix} \quad (43)$$

Η παράγωγος της μεταβλητής  $z_1$  προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{h}_2 = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) = \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \end{aligned} \quad (44)$$

Με την ίδια λογική, η παράγωγος της μεταβλητής  $z_2$  προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2)) \end{aligned}$$

Λόγω της άγνωστης παραμέτρου  $b$  ορίζουμε την εκτίμηση της με παραμετρικό σφάλμα  $\tilde{b} = b - \hat{b}$ . Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\dot{z}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + \hat{b}u + \tilde{b}u) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου:

$$u = \frac{1}{\hat{b}}(\hat{\theta}_1\phi(h_1) + \frac{1}{\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(v - \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2))))$$

Με αυτόν τον νόμο ελέγχου προκύπτει η παράγωγος του  $z_2$ :

$$\dot{z}_2 = v - \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\tilde{b}u \quad (45)$$

Με την επιλογή  $v = -k_1z_1 - k_2z_2 + k_r r$  και την ιδιότητα  $\phi(x)\dot{\phi}(x) = 0.5$ , η δυναμική παίρνει τη μορφή:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ k_r \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \phi(h_1) & -\phi(h_2) & 0 \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) & 0.5\hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Για λόγους σύμπτυξης των εξισώσεων ορίζουμε τα διανύσματα

$$\begin{aligned} H_1(h_1, h_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &= \begin{bmatrix} \phi(h_1) \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) \end{bmatrix} \\ H_2(h_2, \hat{\theta}_2) &= \begin{bmatrix} -\phi(h_2) \\ 0.5\hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$H_3(h_1, \hat{\theta}_1, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\theta}_1 \dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix}$$

Το μοντέλο αναφοράς του συστήματος ορίζεται ως

$$\dot{z}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} z_m + \begin{bmatrix} 0 \\ k_r \end{bmatrix} r = A_m z_m + B_m r \quad (47)$$

Ορίζουμε τη δυναμική του σφάλματος  $e = z - z_m$ , η οποία παίρνει μορφή

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} e + \tilde{\theta}_1 \begin{bmatrix} \phi(h_1) \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) \end{bmatrix} + \tilde{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\phi(h_2) \\ 0.5\hat{\theta}_2 \end{bmatrix} + \tilde{b} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{h}_1 \dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix} \quad (48)$$

Καθώς ο πίνακας  $A_m$  είναι Hurwitz, επαληθεύει την εξίσωση Lyapunov

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

Για την εύρεση των προσαρμοστικών νόμων ορίζεται η συνάρτηση Lyapunov:

$$V(e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{b}) = e^T P e + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{\gamma_3} \tilde{b}^2 \quad (49)$$

Η παράγωγος αυτής προκύπτει ως

$$\frac{dV}{dt} = -e^T Q e + 2\tilde{\theta}_1 H_1^T P e + 2\tilde{\theta}_2 H_2^T P e + 2\tilde{b} H_3^T P e - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3} \tilde{b} \dot{\tilde{b}}$$

Με την επιλογή

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = Proj(\hat{\theta}_1, \gamma_1 H_1^T P e) \quad (50)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = Proj(\hat{\theta}_2, \gamma_2 H_2^T P e) \quad (51)$$

$$\dot{\tilde{b}} = Proj(\hat{b}, \gamma_3 H_3^T P e) \quad (52)$$

Η χρήση της προβολής γίνεται για να βεβαιωθούμε ότι η τιμή των  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{b}$  δε θα περάσει από την τιμή 0. Επιπλέον, θεωρούμε γνωστό το θετικό τους πρόσημο.

Η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* γίνεται

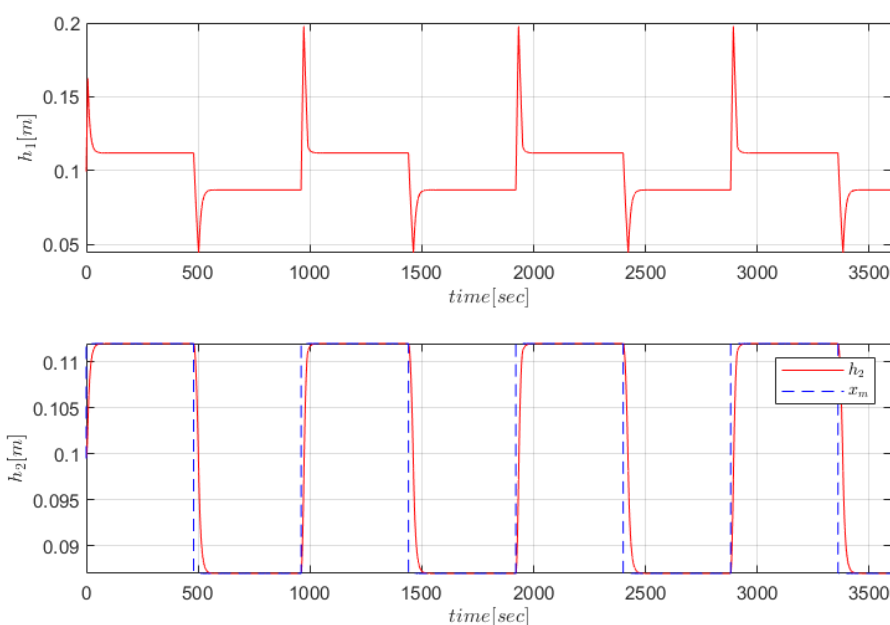
$$\frac{dV}{dt} \leq -e^T Q e \leq 0$$

και ο στόχος παρακολούθησης του μοντέλου αναφοράς επιτυγχάνεται.

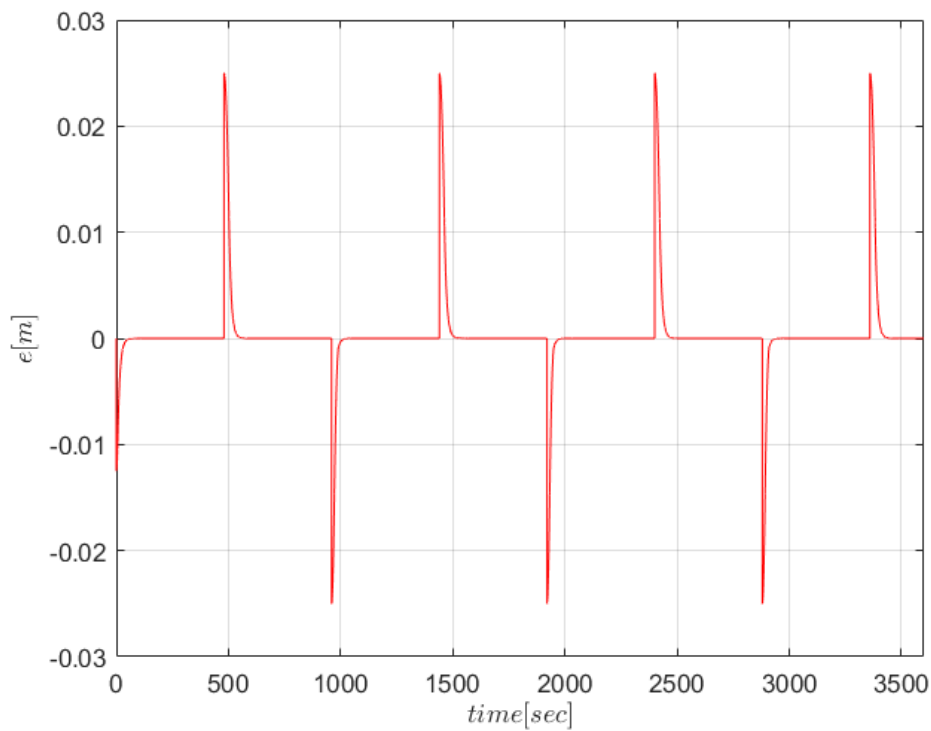
## Προσομοίωση Ελεγκτή Feedback Linearization

Ο παρών ελεγκτής προσομοιώθηκε με διάφορες τιμές στα κέρδη του έτσι ώστε να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ως κέρδη είναι τα  $K_1 = 1$  και  $K_2 = 10$ . Αυτή η επιλογή είναι με βάση το γεγονός πως χρειαζόμαστε τον ρυθμό μεταβολής της στάθμης να αυξάνεται γρηγορότερα, έτσι ώστε η στάθμη να γεμίζει με φυσική ροή χωρίς να υπερχειλίζει η στάθμη 1. Έτσι, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα. Θα εκτελέσουμε προσομοιώσεις με τα προαναφερθέντα σήματα, τα οποία εφαρμόστηκαν και στους προηγούμενους δύο ελεγκτές.

Επομένως, θα εφαρμόσουμε πρώτα τον τετραγωνικό παλμό στο σύστημα. Παρατηρούμε στην εικόνα 29 πως το σύστημα προσομοιώνει σωστά το σήμα αναφοράς. Επιπλέον, στην εικόνα 30 βλέπουμε και το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς. Παρατηρούμε πως προκύπτει ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν.

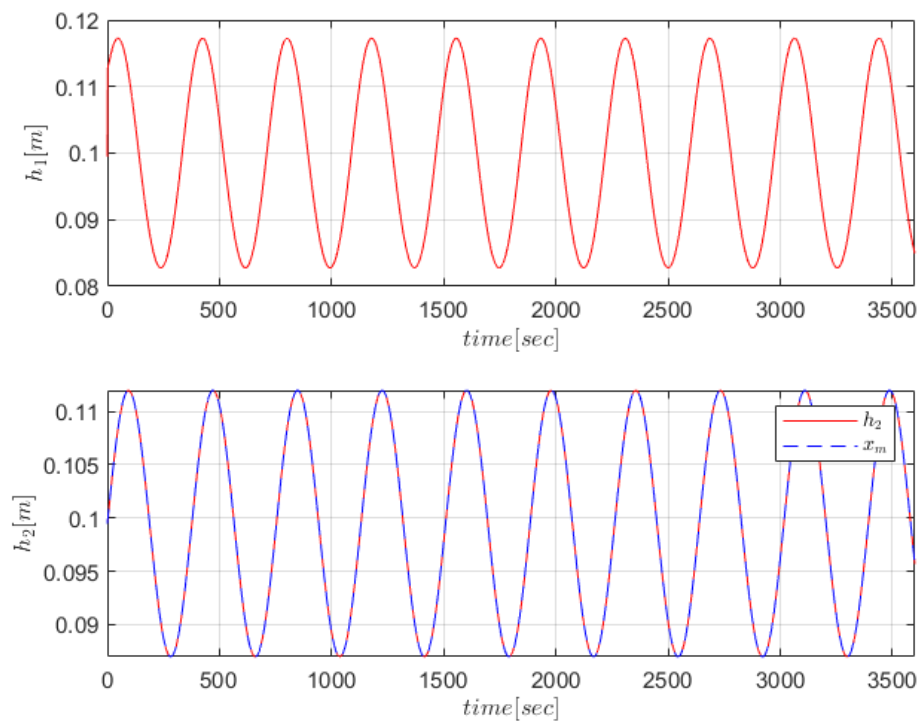


Εικόνα 29: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

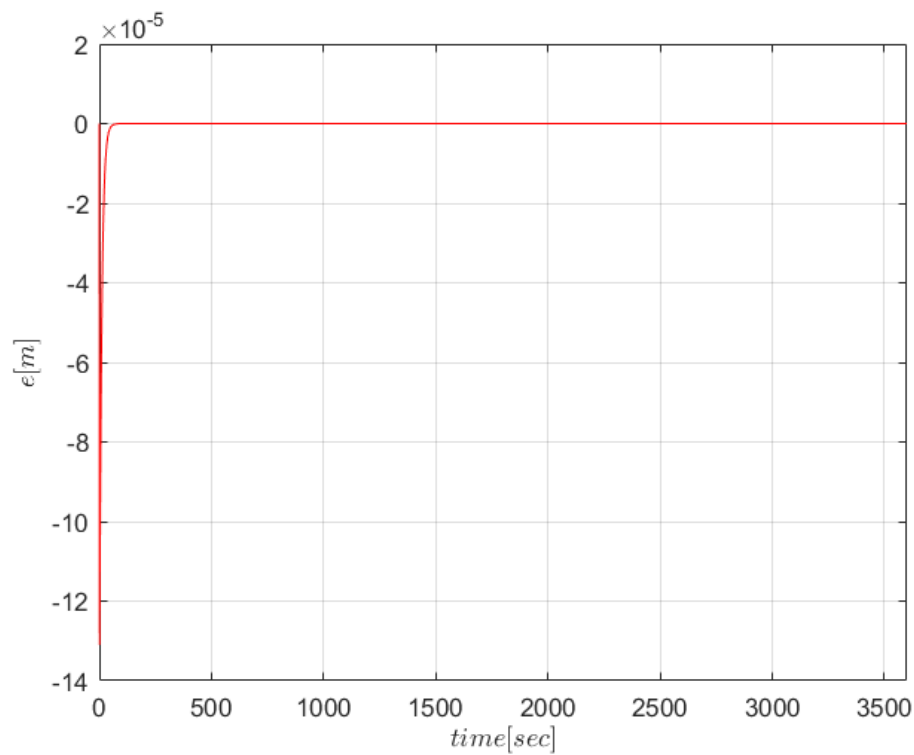


Εικόνα 30: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Το δεύτερο σήμα που θα εφαρμόσουμε είναι ένας απλός ημιτονοειδής παλμός. Στο εικόνα 31 βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 32).



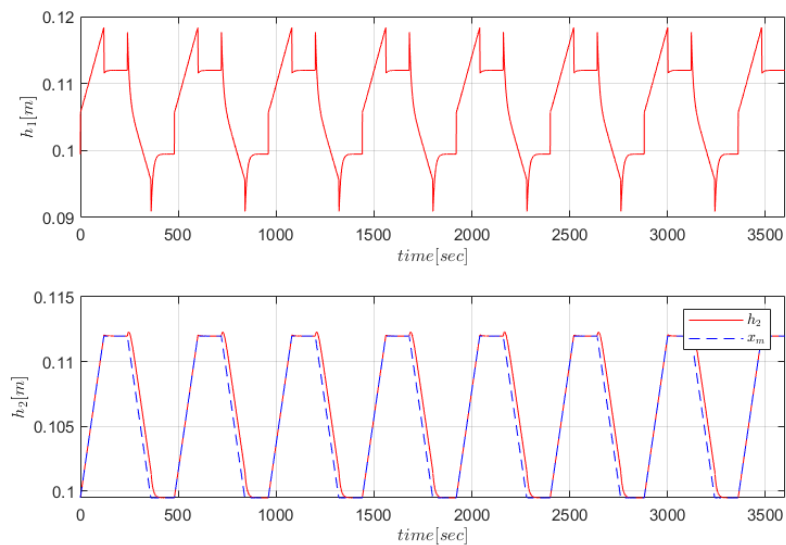
Εικόνα 31: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



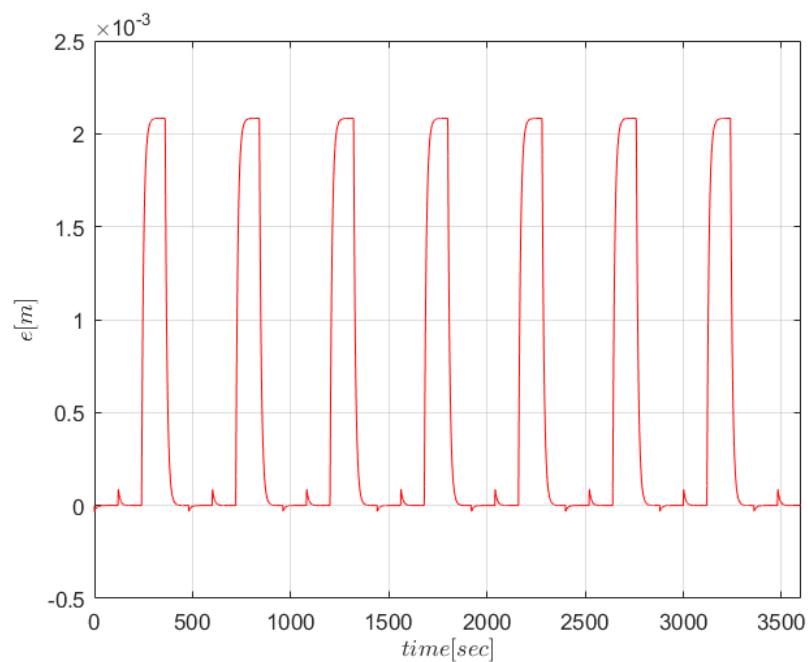
Εικόνα 32: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, το τρίτο σήμα που εφαρμόστηκε είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στην εικόνα 33

βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 34).



Εικόνα 33: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



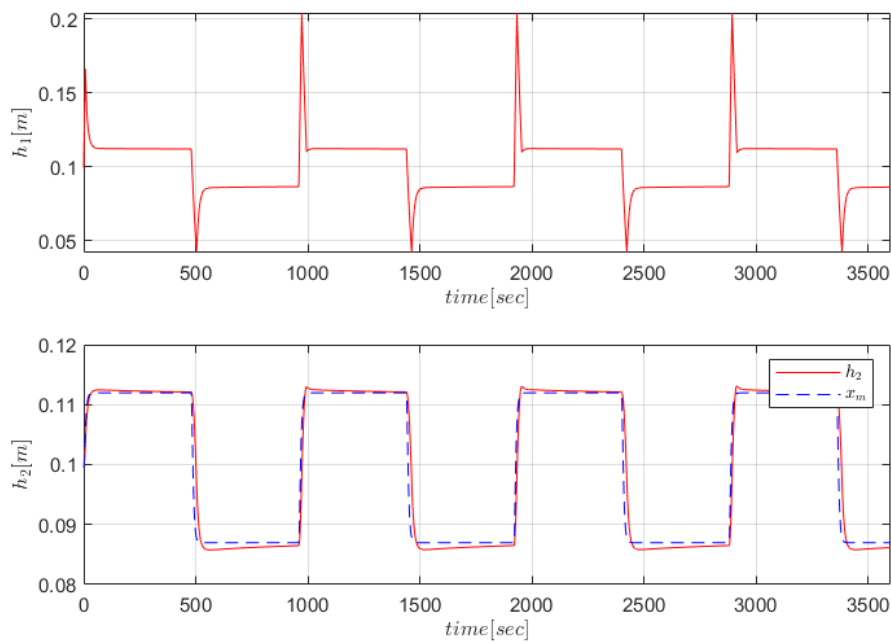
Εικόνα 34: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

## Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Feedback Linearization

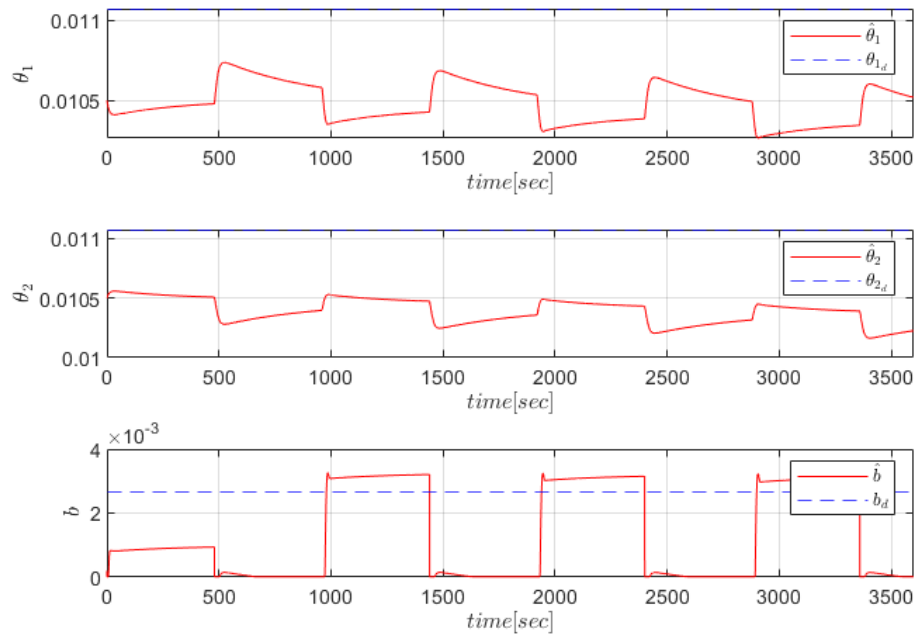
Με την προσομοίωση και επαλήθευση του απλού Feedback Linearization μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχεδίαση του ελεγκτή, θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος.

Δηλαδή, δε γνωρίζουμε τα  $\theta_i$  αλλά ούτε και το  $b$ . Έτσι, επεκτάθηκε η προσομοίωση με την πρόσθεση προσαρμοστικών νόμων. Κατά την προσομοίωση διαπιστώθηκε πως τα κέρδη του γραμμικού ελεγκτή παρέμειναν ίδια με την απλή εκδοχή του συστήματος. Οι ρυθμοί προσαρμογής που επιλέχθηκαν είναι οι  $\gamma_1 = 0.00035$ ,  $\gamma_2 = 0.00025$  και  $\gamma_3 = 0.0055$ . Με αυτές τις τιμές το σύστημα παρακολούθησε το μοντέλο αναφοράς που του τέθηκε.

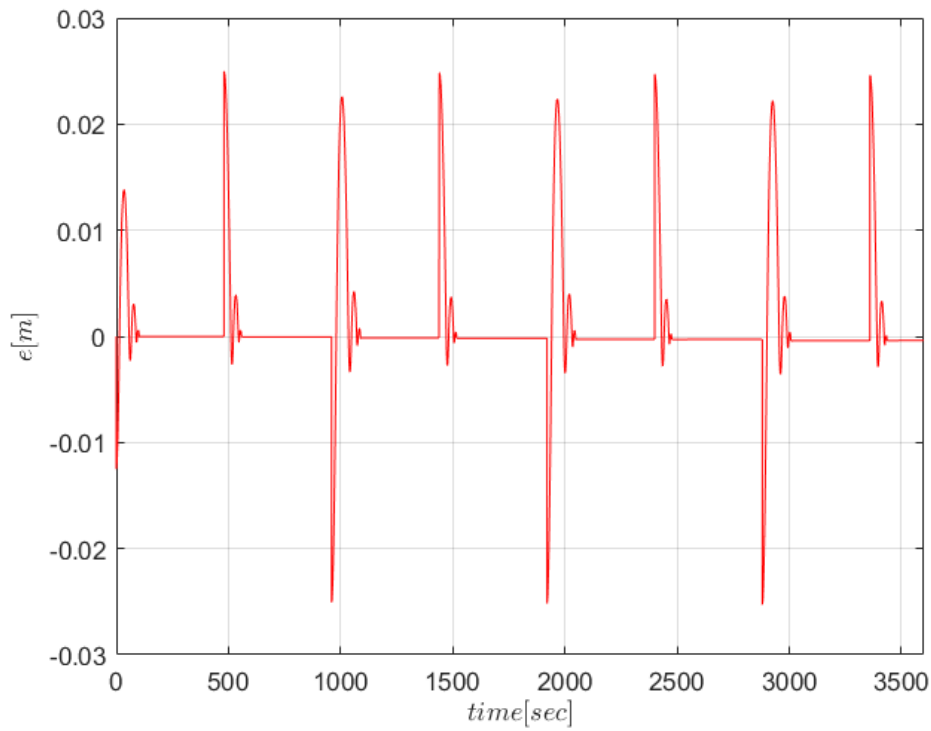
Κατά την εφαρμογή του πρώτου σήματος, διαπιστώθηκε πως το σύστημα παρακολουθεί ασυμπτωτικά το μοντέλο αναφοράς (Εικόνα 35) με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης του μοντέλου να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στην εικόνα 37. Τέλος, βλέπουμε στην εικόνα 36 την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος.



Εικόνα 35: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



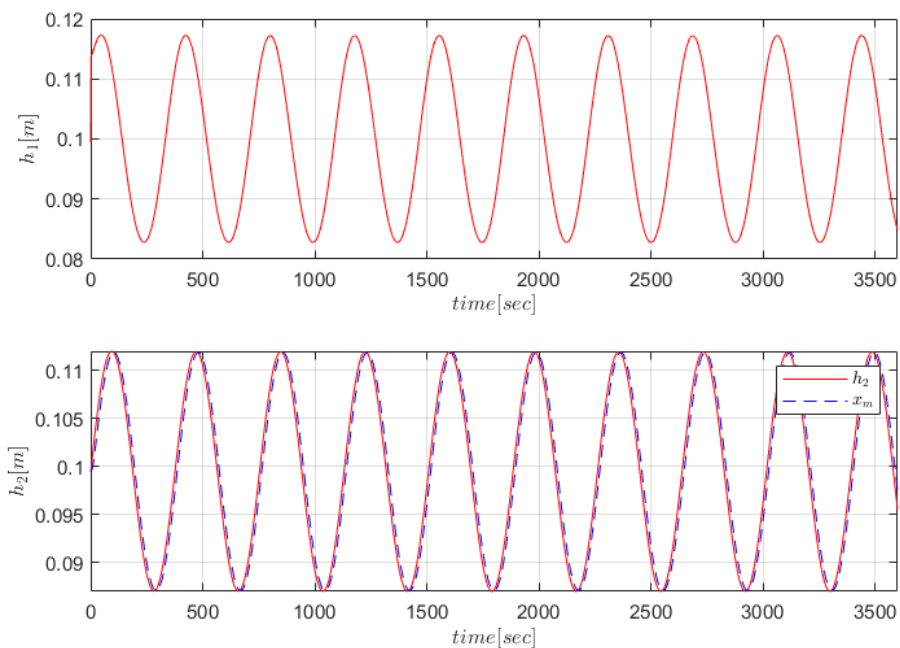
Εικόνα 36: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



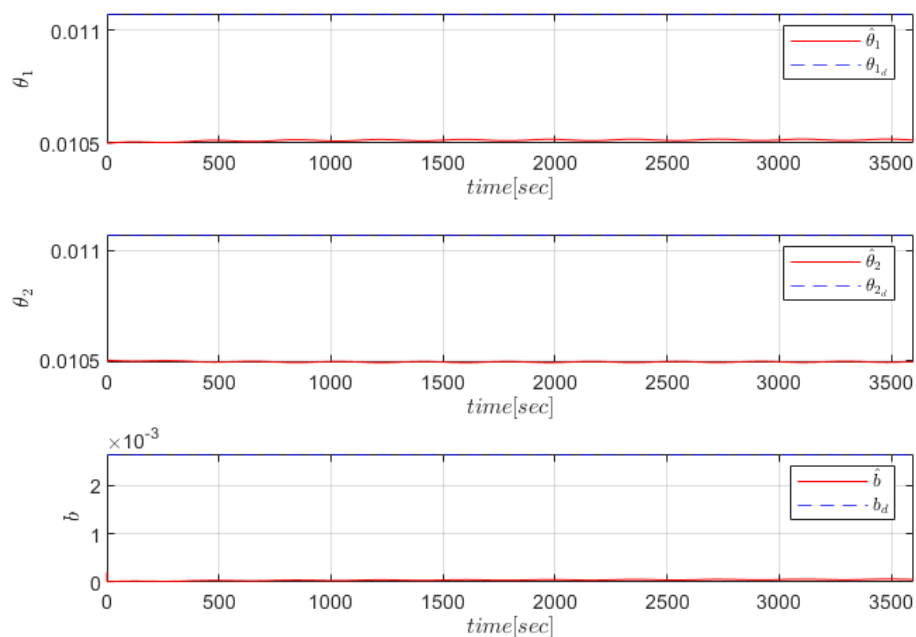
Εικόνα 37: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, διαπιστώνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα με

προηγούμενως. Δηλαδή έχουμε ξανά ασυμπτωτική παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς (Εικόνα 38). Στην εικόνα 39 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Παρατηρούμε πως υπάρχει μια μικρή αύξηση των τιμών ωστόσο λόγω της ταχύτητας σύγκλισης δεν αυξάνεται ώστε να προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή. Τέλος, στην εικόνα 39 παρατηρούμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

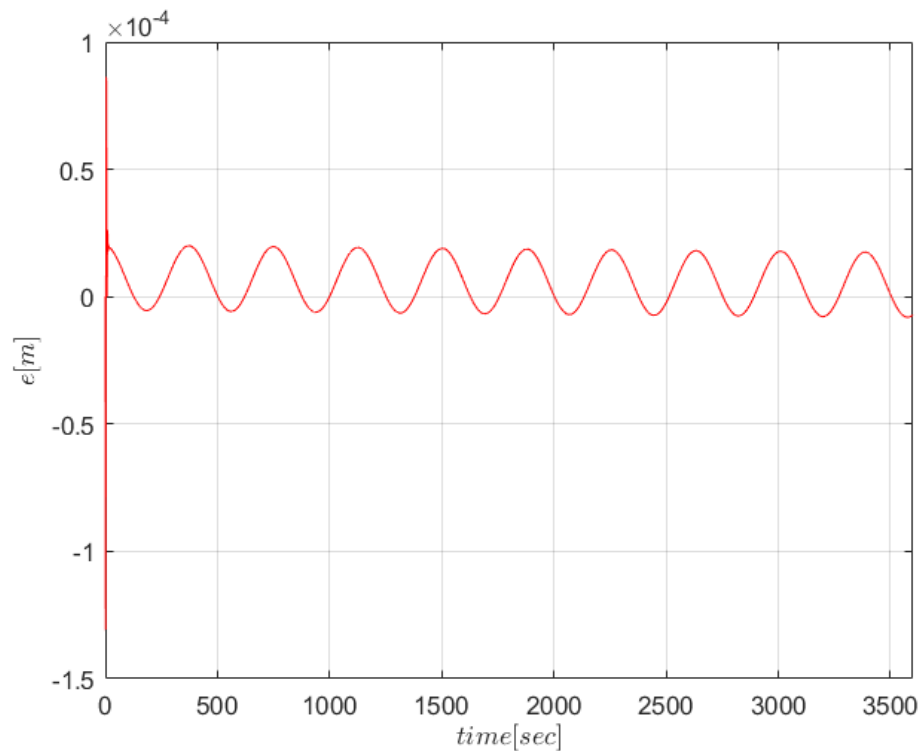


Εικόνα 38: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



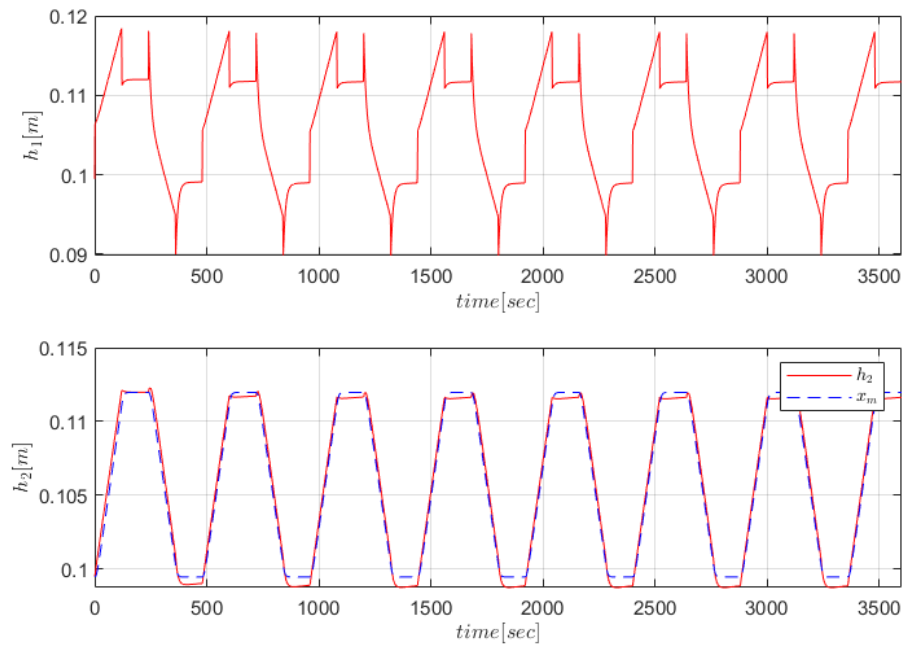
Εικόνα 39: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



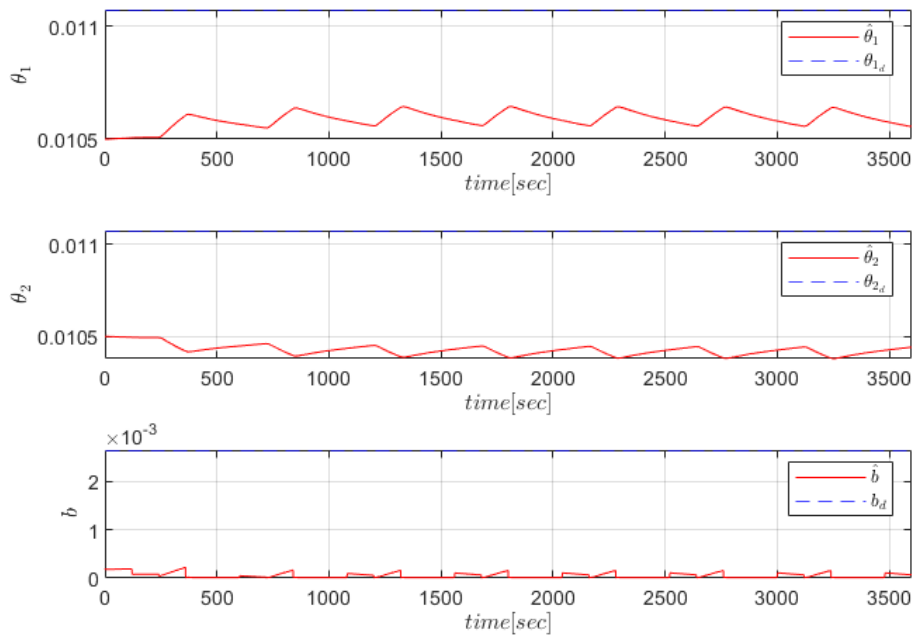


Εικόνα 40: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

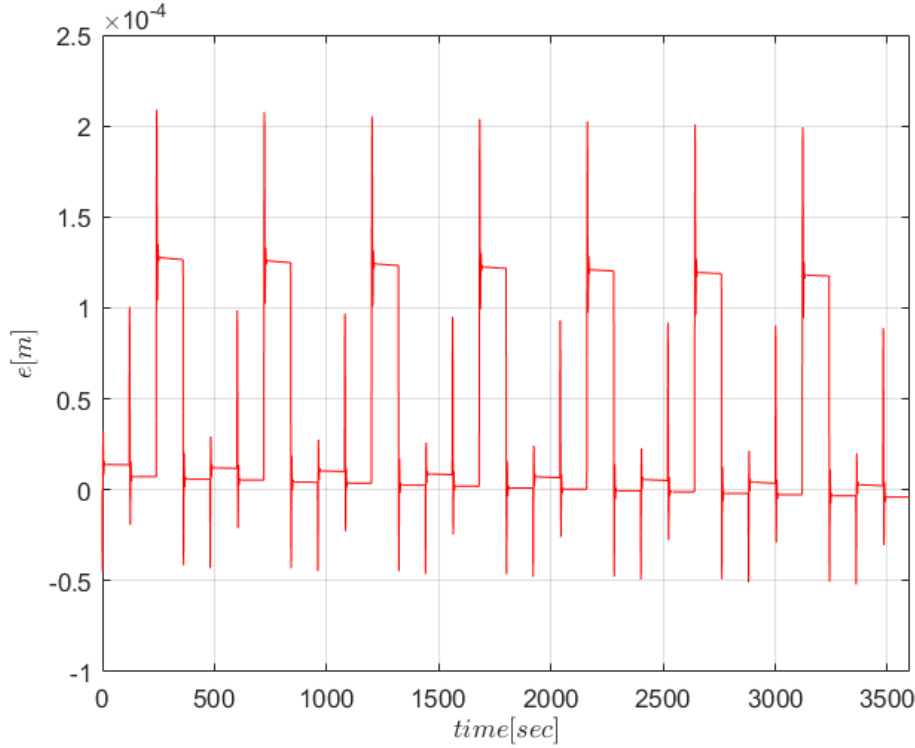
Τέλος, έγινε η εφαρμογή του τρίτου σήματος αναφοράς που είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στην εικόνα 41 βλέπουμε πως αποκρίνεται το σύστημα. Διαπιστώνουμε πως παρακολουθεί το σήμα αναφοράς ασυμπτωτικά, με αποτέλεσμα να γίνει σωστή παρακολούθηση. Έτσι το σφάλμα τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν όπως παρουσιάζεται και στην εικόνα 43. Τέλος, στην εικόνα 42 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές είναι κοντά στις ιδανικές με αποτέλεσμα το πραγματικό σύστημα να την τροχιά που του τέθηκε.



Εικόνα 41: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 42: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 43: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε πως και οι δύο μορφές ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη, με καλύτερα αποτελέσματα να έχει ο προσαρμοστικός έλεγχος.

## Έλεγχος Backstepping

Για τον έλεγχο με τη διαδικασία Backstepping χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης (4)

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου ενώ στη συνέχεια θα βρεθεί η προσαρμοστική εκδοχή αυτού. Ορίζουμε τις συναρτήσεις  $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$  και  $\theta_i = \frac{\alpha_i}{A}\sqrt{2g}$ . Για λόγους αβεβαιότητας ορίζουμε δύο διαφορικά  $\theta$ , αντίστοιχα με κάθε διατομή  $a$ . Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση  $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$ . Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_1(h_1, h_2)} + g(h)u$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή Backstepping

Έστω το σημείο αναφοράς του συστήματος  $(h_{1,d}, h_{2,d})$ . Ορίζουμε το σύστημα σφάλματος ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 - \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_2 - \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_l(h_1, h_2)} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Σε πρώτο βήμα ορίζουμε την εικονική είσοδο ελέγχου  $h_1$  και τη νέα μεταβλητή κατάστασης  $\xi_1 = e_2 = h_2 - h_{2,d}$ . Για τα παραπάνω, η δεύτερη εξίσωση της (53) γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = \dot{e}_2 = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση  $\phi^{-1}(x) = x^2$ . Με βάση αυτή, επιλέγουμε τον έλεγχο

$$h_1 = \phi^{-1}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1} + \dot{h}_{2,d} - k_1(h_2 - h_{2,d})\right)$$

ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση της δυναμικής του  $\xi_1$  σε:

$$\dot{\xi}_1 = -k_1\xi_1$$

η οποία είναι ευσταθής για  $k_1 > 0$ .

Με προσθαφαίρεση του  $k_1\xi_1$  στη δεύτερη εξίσωση της (53) έχουμε την πραγματική δυναμική του σφάλματος:

$$\dot{\xi}_1 = -k_1\xi_1 + k_1\xi_1 + \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \quad (54)$$

Σε δεύτερο βήμα χρησιμοποιούμε την είσοδο ελέγχου  $u$  και τη νέα μεταβλητή κατάστασης  $\xi_2 = k_1\xi_1 + \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$ . Για τα παραπάνω, η εξίσωση της 54 γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = -k_1\xi_1 + \xi_2 \quad (55)$$

Παραγωγίζοντας την κατάσταση  $\xi_2$  προκύπτει η δυναμική της ως:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= k_1\dot{\xi}_1 + \theta_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2 - \ddot{h}_{2,d} \\ \dot{\xi}_2 &= k_1(-k_1\xi_1 + \xi_2) + \theta_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \theta_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}) - \ddot{h}_{2,d} \\ \dot{\xi}_2 &= k_1(-k_1\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1\dot{\phi}(h_1)bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) + \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d} \\ \dot{\xi}_2 &= k_1(-k_1\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1\dot{\phi}(h_1)bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) + \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d} \end{aligned} \quad (56)$$

Επιλέγουμε τον έλεγχο:

$$u = \frac{1}{b\theta_1\dot{\phi}(h_1)} \left( k_1^2\xi_1 - k_2\xi_2 + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{2} + \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) - \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} + \ddot{h}_{2,d} \right) \quad (57)$$

με  $k_2 > k_1 > 0$ . Τότε, η εξίσωση (53) γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -(k_2 - k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

η οποία είναι μία ευσταθής δυναμική καθώς  $k_2 > k_1 > 0$ . Έτσι, το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές με μοναδικό σημείο ισορροπίας το  $\xi = (0, 0)$ , το οποίο είναι αντίστοιχο με το σημείο ισορροπίας  $e = (0, 0)$  της εξίσωσης (53).

## Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Backstepping

Για την προσαρμοστική τροποποίηση του ελεγκτή Backstepping χρησιμοποιούμε και πάλι τη δυναμική του σφάλματος η οποία δίνεται από την εξίσωση 53. Όμοια με την παραπάνω προσέγγιση επιλέγουμε  $\xi_1 = e_2$  και με προσθαφαίρεση των  $\xi_2$  και της εκτίμησης της παραμέτρου  $\theta_1, \theta_2$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \dot{e}_2 = (\theta_1 \pm \hat{\theta}_1)\phi(h_1) - (\theta_2 \pm \hat{\theta}_2)\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \pm k\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= -k\xi_1 + \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \end{aligned}$$

με  $k > 0$  και

$$\alpha_1(\xi_1, h_1, h_2, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\xi_1 - \dot{h}_{2,d} + \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2)$$

Με την επιλογή  $\xi_2 = \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , ορίζοντας τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$  η δυναμική της μεταβλητής  $\xi_1$  παίρνει τη μορφή

$$\dot{\xi}_1 = -k_1\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \quad (59)$$

Για τη δυναμική του  $\xi_2$  παίρνουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $\alpha_1$  ως

$$\dot{\xi}_2 = \frac{d\alpha_1}{dt} = k_1\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2$$

$$\dot{\xi}_2 = k_1\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Με τη χρήση της σχέσης  $\theta_i = \tilde{\theta}_i + \hat{\theta}_i$  προκύπτει η δυναμική

$$\dot{\xi}_2 = \alpha_2 + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\hat{b}u + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \tilde{b}\beta_3 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) \quad (60)$$

με

$$\alpha_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ddot{h}_{2,d}) = k_1(-k_1\xi_1 + \xi_2) - \ddot{h}_{2,d} + \frac{\hat{\theta}_2^2 - \hat{\theta}_1^2}{2} - \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_1(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k_1\phi(h_1) - \frac{\hat{\theta}_1}{2} - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -k_1\phi(h_2) + \frac{\hat{\theta}_2}{2}$$

$$\beta_3(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, u) = \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)u$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov

$$V(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}^2) \quad (61)$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει παράγωγο :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}\dot{\hat{b}} \\ \frac{dV}{dt} &= \xi_1(-k_1\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}\dot{\hat{b}} \\ &\quad + \xi_2(\alpha_2 + \hat{\theta}_1\phi(h_1)\hat{b}u + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \tilde{b}\beta_3 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2)) \end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας κατάλληλα τα παραμετρικά σφάλματα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -k_1\xi_1^2 + (\xi_1 + \alpha_2 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2))\xi_2 + \xi_2\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\hat{b}u \\ &\quad + \tilde{\theta}_1(\xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1}) + \tilde{\theta}_2(-\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2}) + \tilde{b}(\xi_2\beta_3 - \frac{\dot{\hat{b}}}{\gamma_3}) \end{aligned}$$

Με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 Proj(\hat{\theta}_1, \xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1) \quad (62)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 Proj(\hat{\theta}_2, -\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2) \quad (63)$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_3 Proj(\hat{b}, \xi_2\beta_3) \quad (64)$$

και τον νόμο ελέγχου

$$u = \frac{1}{b\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(-\xi_1 - \alpha_2 - \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) - k_2\xi_2) \quad (65)$$

η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov γίνεται

$$\frac{dV}{dt} = -k_1\xi_1^2 - k_2\xi_2^2 \quad (66)$$

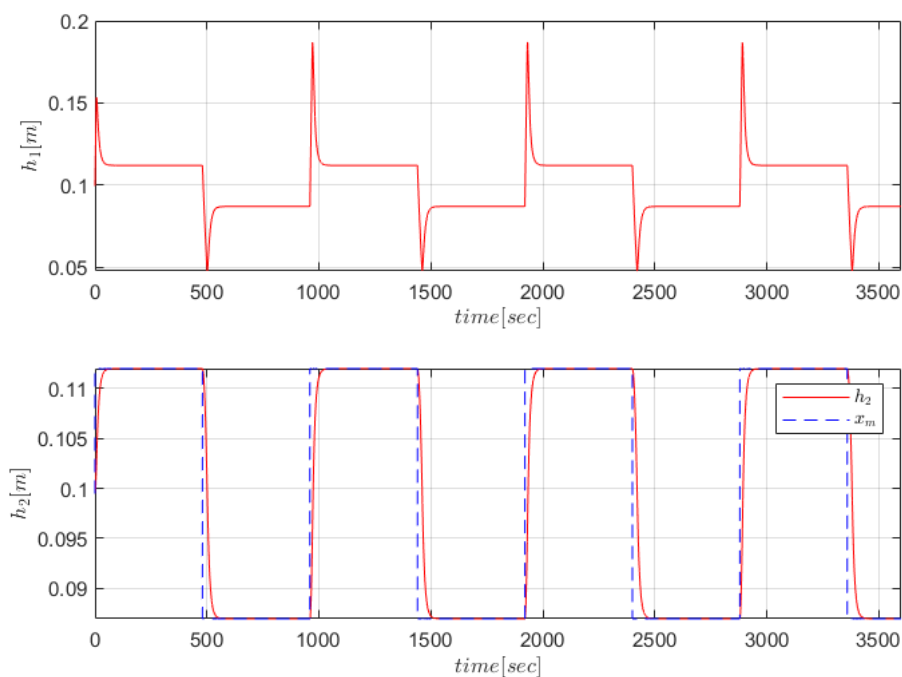
η οποία είναι αρνητικά ημιορισμένη.

## Προσομοίωση Ελεγκτή Backstepping

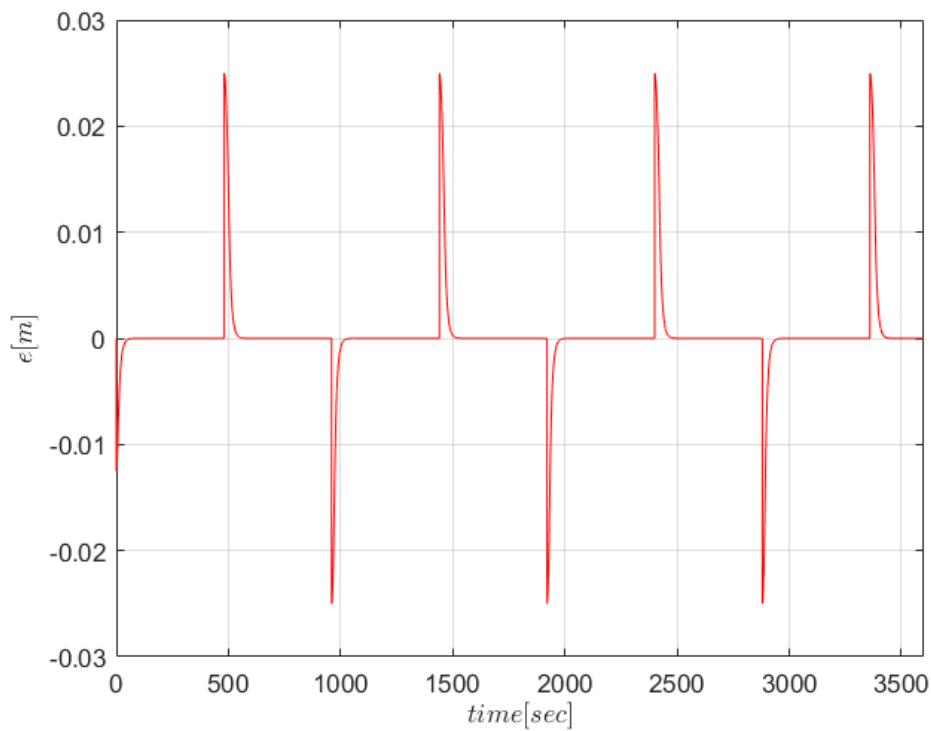
Ο παρών ελεγκτής προσομοιώθηκε με διάφορες τιμές στα κέρδη του έτσι ώστε να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ως κέρδη είναι τα  $K_1 = 1$  και  $K_2 = 10$ . Αυτή η επιλογή είναι με βάση το γεγονός πως χρειαζόμαστε τον ρυθμό μεταβολής της στάθμης να αυξάνεται γρηγορότερα, έτσι ώστε η στάθμη να γεμίζει με φυσική ροή χωρίς να υπερχειλίζει η στάθμη 1. Έτσι, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω

γραφήματα. Θα εκτελέσουμε προσομοιώσεις με τα προαναφερθέντα σήματα, τα οποία εφαρμόστηκαν και στους προηγούμενους δύο ελεγκτές.

Επομένως, θα εφαρμόσουμε πρώτα τον τετραγωνικό παλμό στο σύστημα. Παρατηρούμε στην εικόνα 44 πως το σύστημα προσομοιώνει σωστά το σήμα αναφοράς. Επιπλέον, στην εικόνα 45 βλέπουμε και το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς. Παρατηρούμε πως προκύπτει ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν.



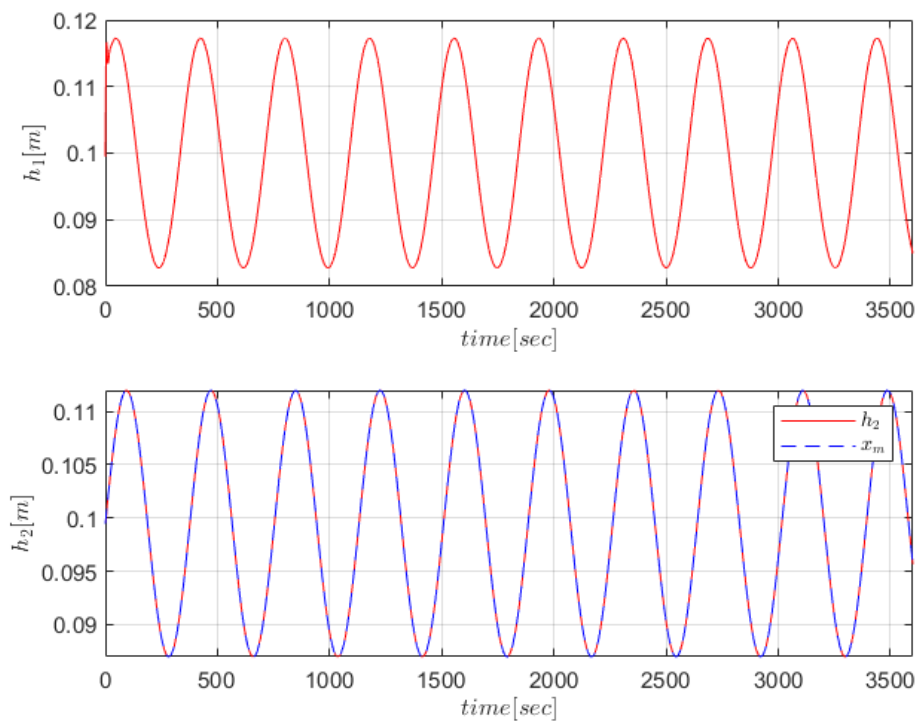
Εικόνα 44: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



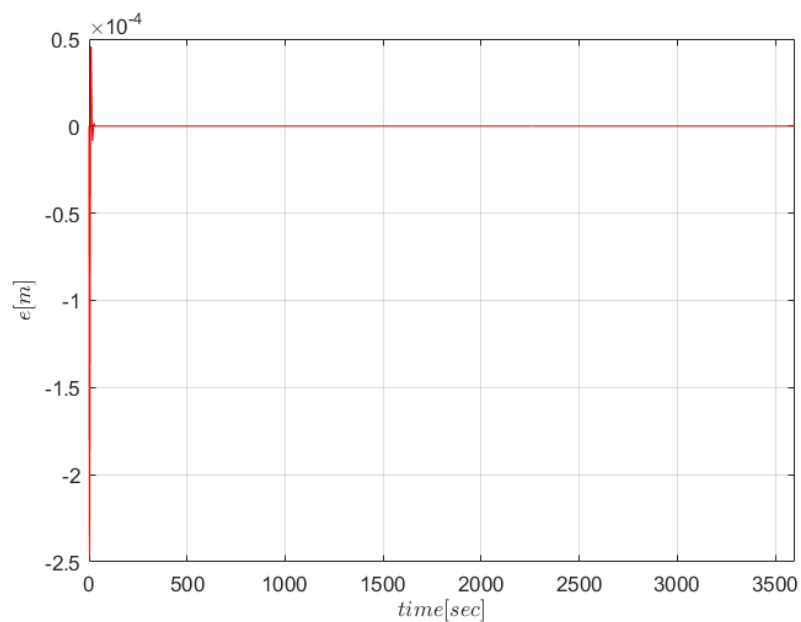
Εικόνα 45: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Το δεύτερο σήμα που θα εφαρμόσουμε είναι ένας απλός ημιτονοειδής παλμός. Στην εικόνα 46 βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 47).



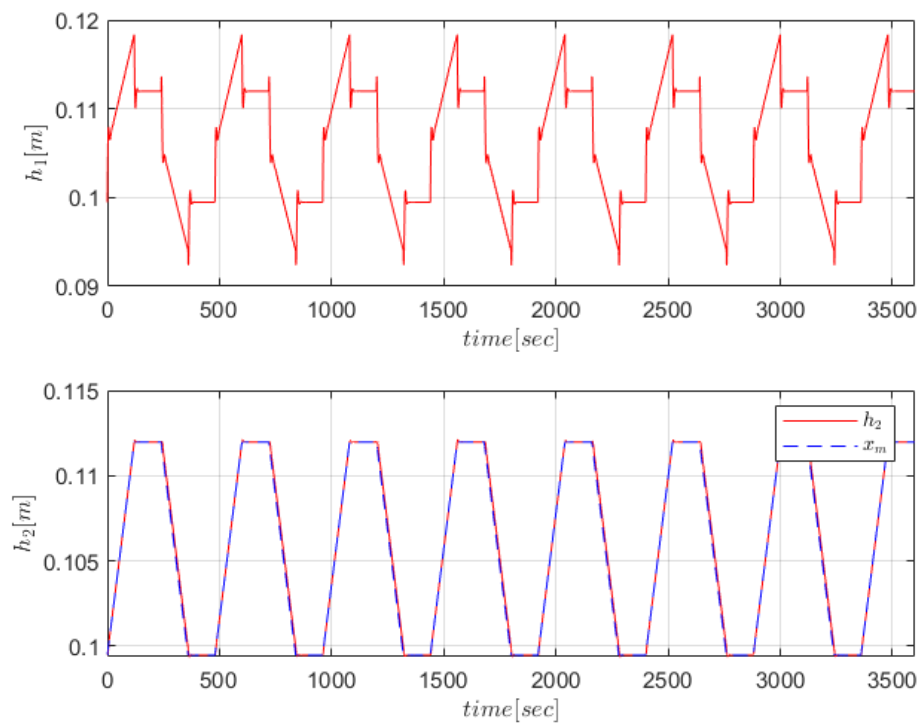


Εικόνα 46: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

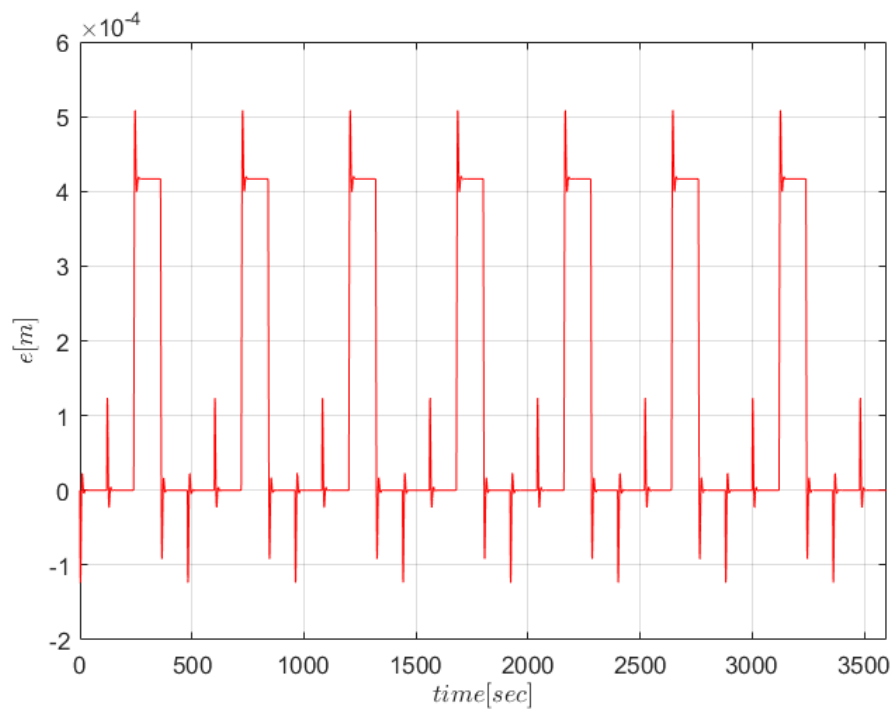


Εικόνα 47: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, το τρίτο σήμα που εφαρμόστηκε είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στην εικόνα 48 βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (Εικόνα 49).



Εικόνα 48: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

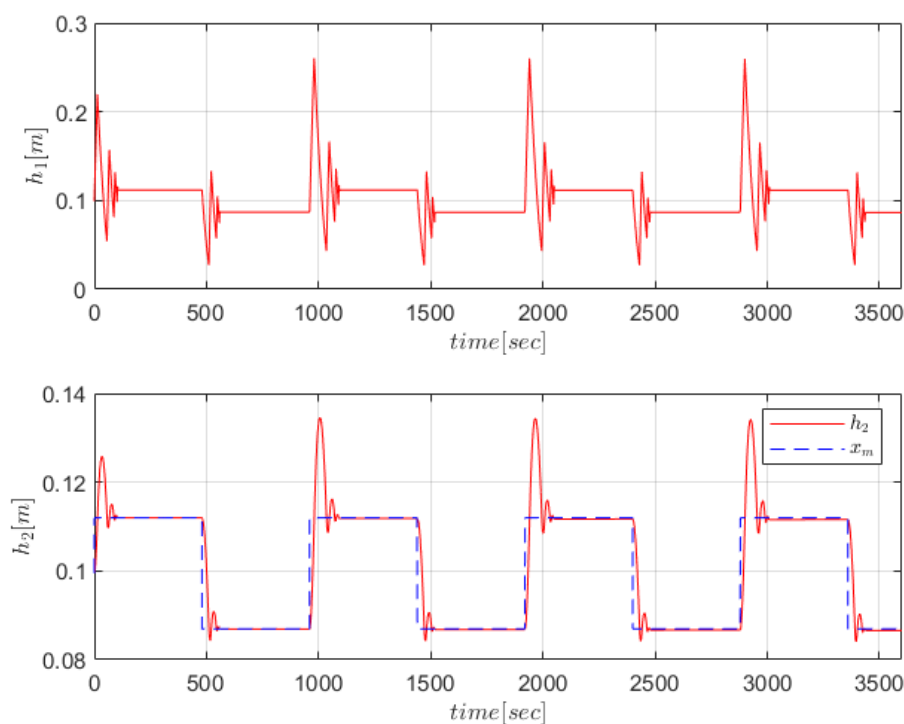


Εικόνα 49: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

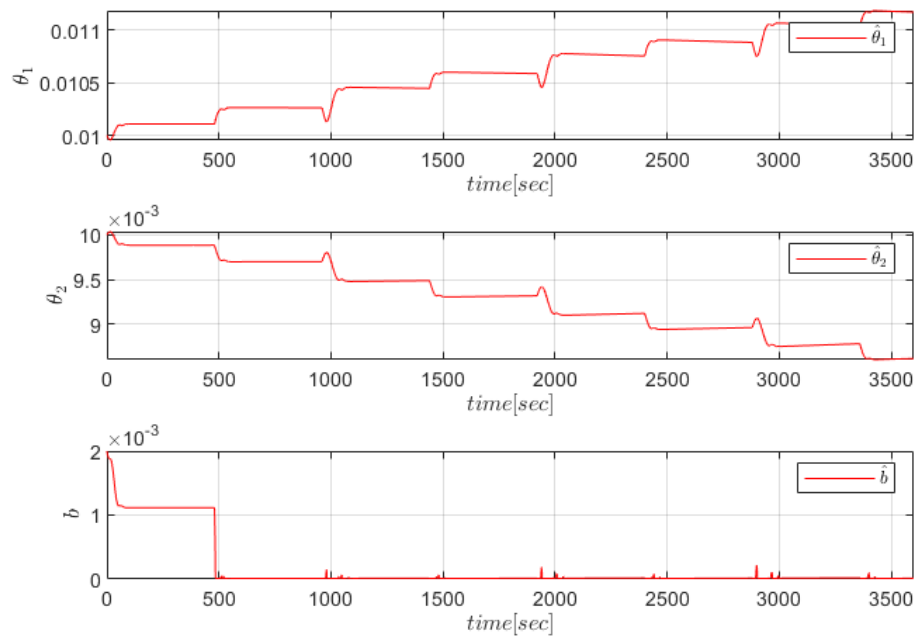
## Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Backstepping

Με την προσομοίωση και επαλήθευση του απλού Backstepping μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχεδίαση του ελεγκτή, θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος. Δηλαδή, δε γνωρίζουμε τα  $\theta_i$  αλλά ούτε και το  $b$ . Έτσι, επεκτάθηκε η προσομοίωση με την πρόσθεση προσαρμοστικών νόμων. Κατά την προσομοίωση διαπιστώθηκε πως τα κέρδη του γραμμικού ελεγκτή παρέμειναν ίδια με την απλή εκδοχή του συστήματος. Οι ρυθμοί προσαρμογής που επιλέχθηκαν είναι οι  $\gamma_1 = 0.00035$ ,  $\gamma_2 = 0.00025$  και  $\gamma_3 = 0.0055$ . Με αυτές τις τιμές το σύστημα παρακολούθησε το μοντέλο αναφοράς που του τέθηκε.

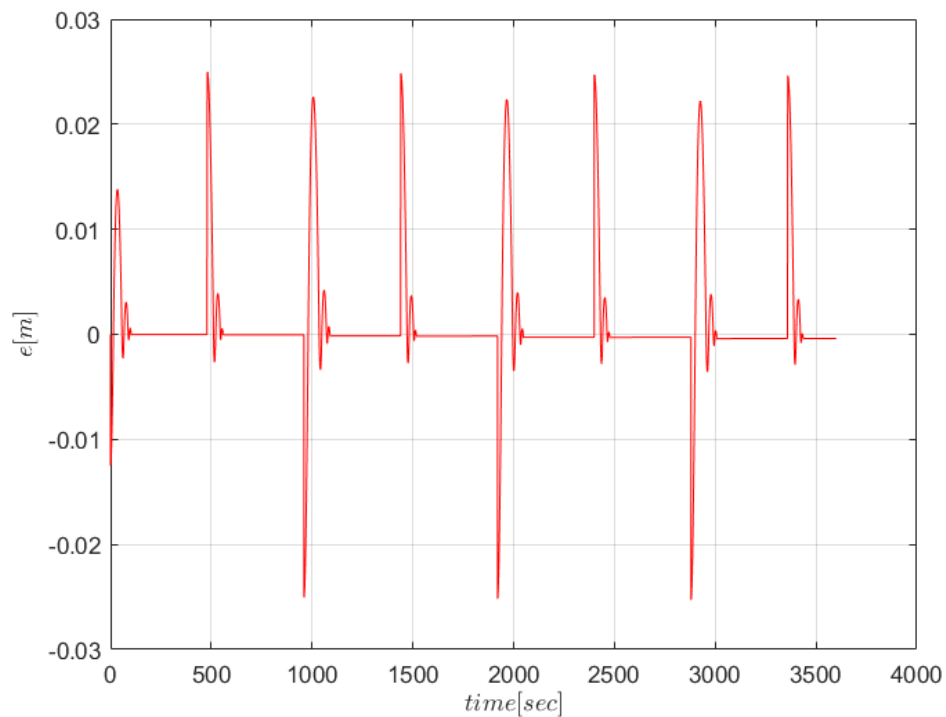
Κατά την εφαρμογή του πρώτου σήματος, διαπιστώθηκε πως το σύστημα παρακολουθεί ασυμπτωτικά το μοντέλο αναφοράς (Εικόνα 50) με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης του μοντέλου να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στην εικόνα 52. Τέλος, βλέπουμε στην εικόνα 51 την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος.



Εικόνα 50: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



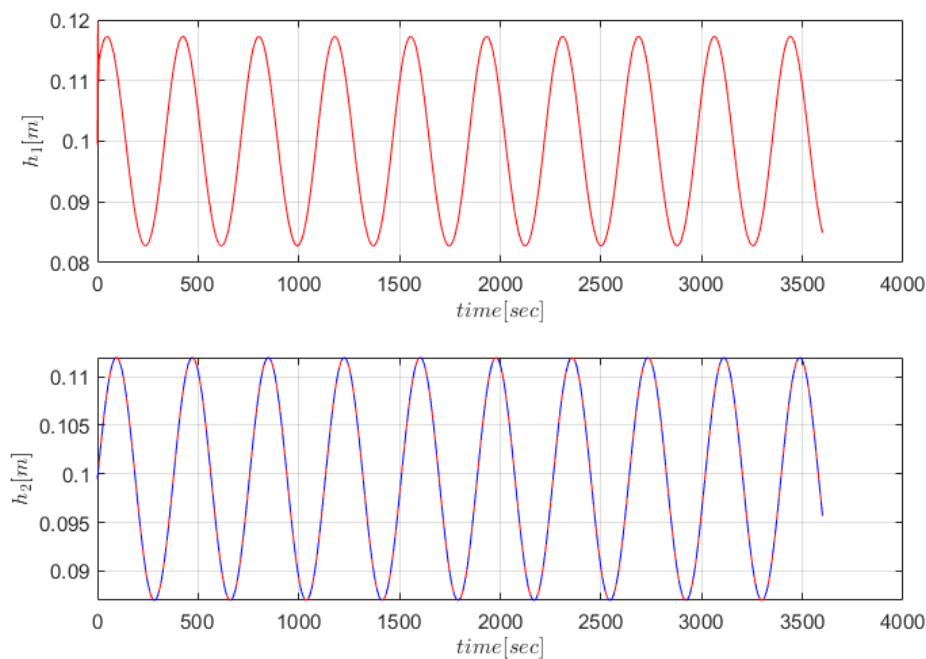
Εικόνα 51: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.



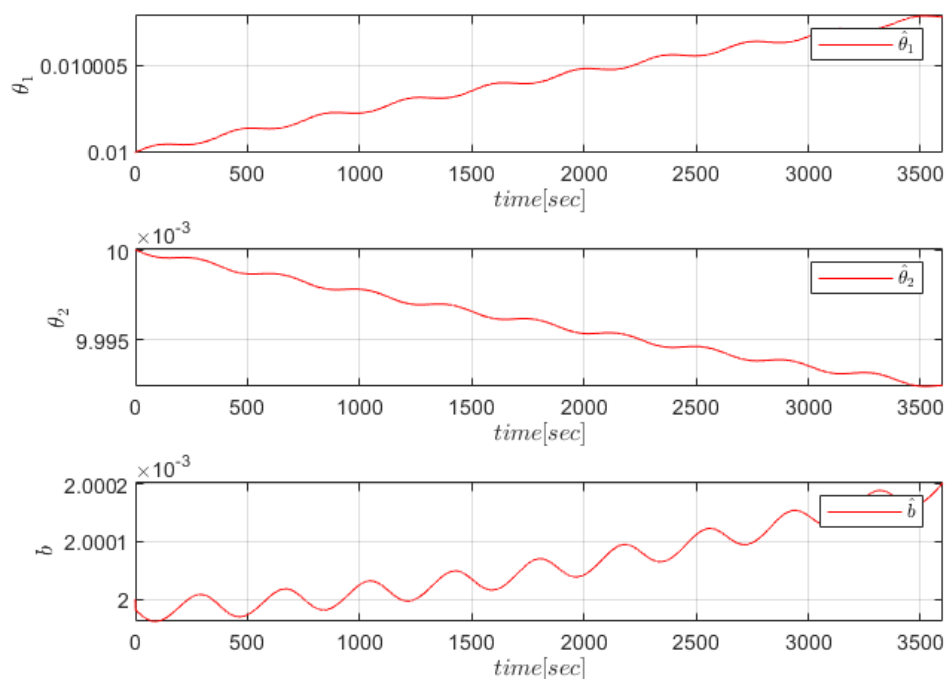
Εικόνα 52: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, διαπιστώνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα με προηγουμένως. Δηλαδή έχουμε ξανά ασυμπτωτική παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς

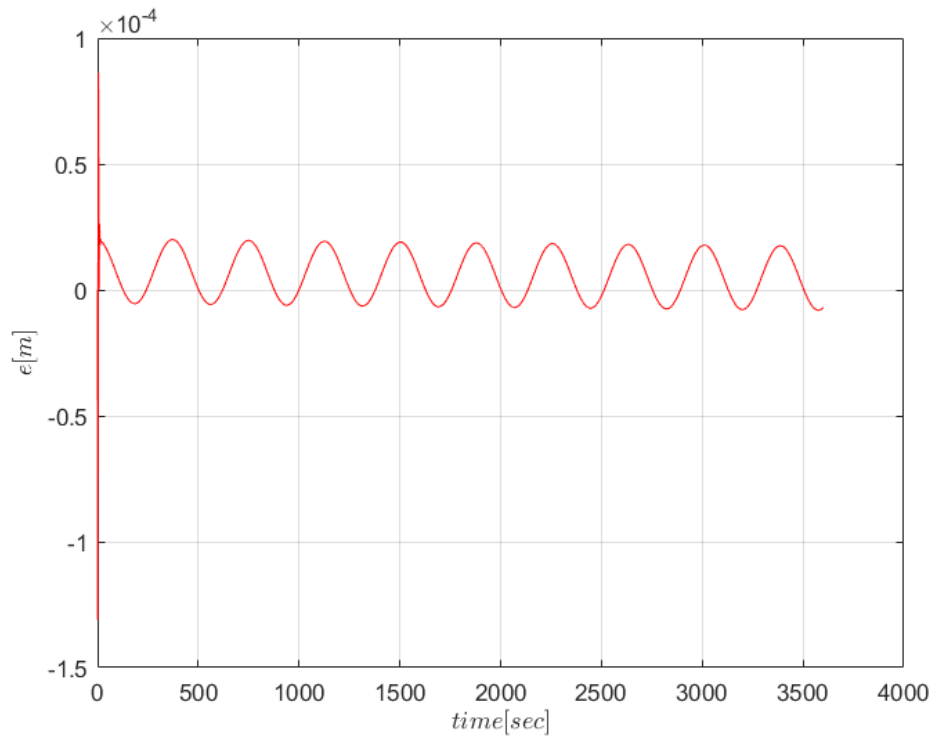
(Εικόνα 53). Στην εικόνα 54 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Παρατηρούμε πως υπάρχει μια μικρή αύξηση των τιμών ωστόσο λόγω της ταχύτητας σύγκλισης δεν αυξάνεται ώστε να προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή. Τέλος, στην εικόνα 54 παρατηρούμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Εικόνα 53: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

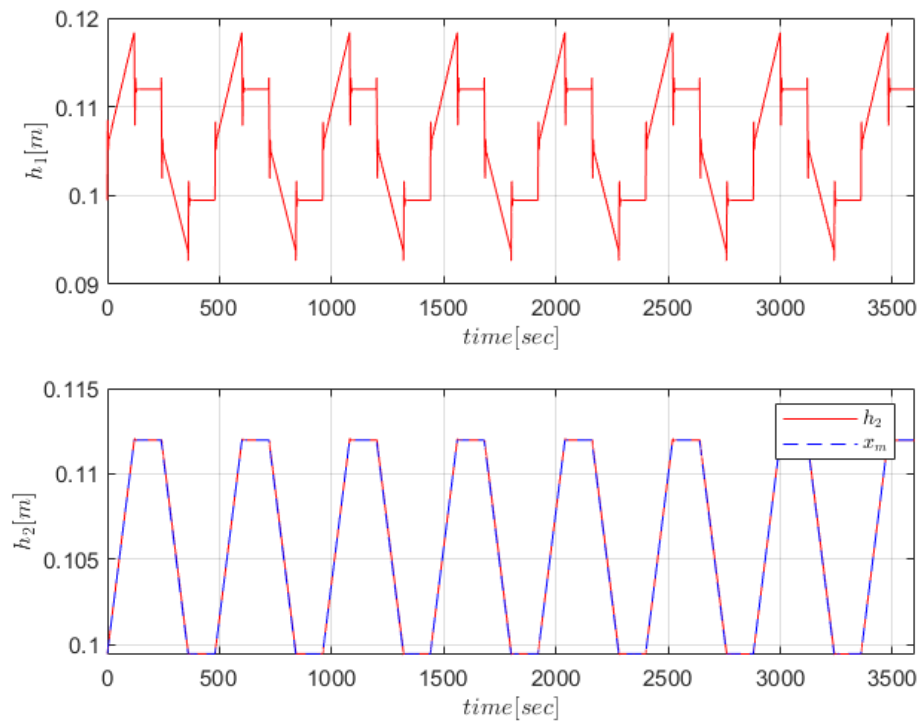


Εικόνα 54: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

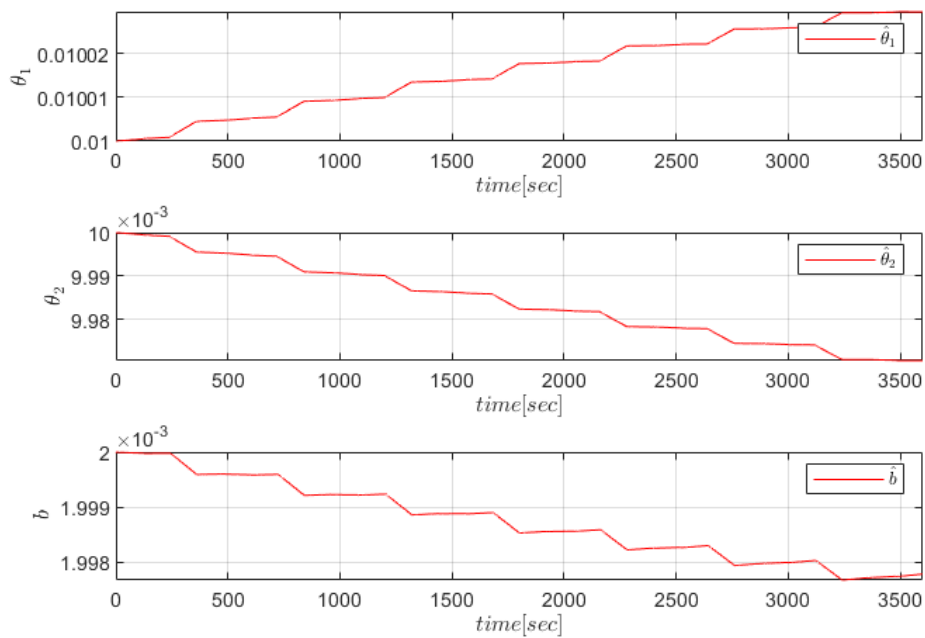


Εικόνα 55: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

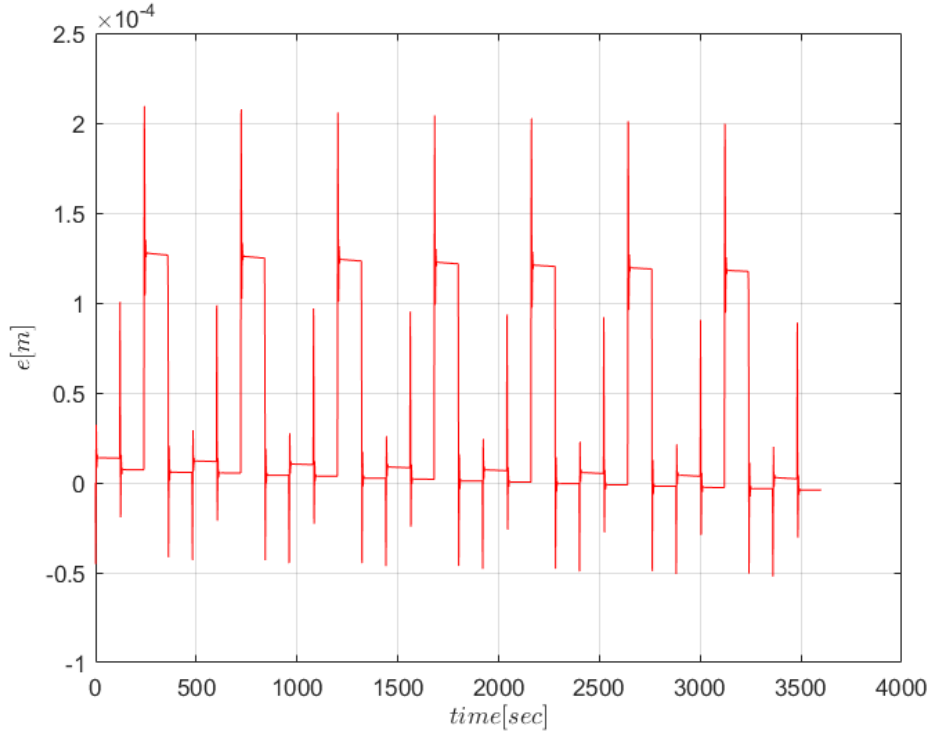
Τέλος, έγινε η εφαρμογή του τρίτου σήματος αναφοράς που είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στην εικόνα 56 βλέπουμε πως αποκρίνεται το σύστημα. Διαπιστώνουμε πως παρακολουθεί το σήμα αναφοράς ασυμπτωτικά, με αποτέλεσμα να γίνει σωστή παρακολούθηση. Έτσι το σφάλμα τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν όπως παρουσιάζεται και στην εικόνα 58. Τέλος, στην εικόνα 57 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές είναι κοντά στις ιδανικές με αποτέλεσμα το πραγματικό σύστημα να την τροχιά που του τέθηκε.



Εικόνα 56: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 57: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Εικόνα 58: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε πως και οι δύο μορφές ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη, με καλύτερα αποτελέσματα να έχει ο προσαρμοστικός έλεγχος.

## Τροποποίηση Ελεγκτών

Λόγω του προβλήματος του περιορισμένου χώρου κατάστασης του συστήματος από τα όρια 0 και  $h_{max}$ , δημιουργείται σε όλες τις μεθοδολογίες ένα όριο για την αρχική τιμή της συνάρτησης Lyapunov. (Να πω για σφάλμα).

Για να παρουσιαστεί αυτό ορίζουμε το συμπαγές σύνολο  $\mathcal{D} = [0, h_{max}] \times [0, h_{max}]$ . Το σύνολο αυτό αποτελεί τον χώρο τον οποίο μπορούν οι καταστάσεις  $h_1, h_2$  να βρεθούν.

Για την ανάλυση θα μελετηθεί το σύστημα σε δύο τμήματα, στη δυναμική του  $h_1$  και στη δυναμική του  $h_2$ . Για τη δυναμική του  $h_1$ , μπορούμε να δούμε ότι για αρχικές συνθήκες  $h_{1,0}$  και  $h_{2,0}$ , η μέγιστη τιμή όπου παίρνει το  $h_1$  για  $u = 0$  είναι η τιμή  $h_{1,0}$ . Για τη δυναμική του  $h_2$ , η μέγιστη τιμή δίνεται για την περίπτωση όπου  $\dot{h}_2 = 0$  ή για την αρχική τιμή του  $h_2$ . Πιο αναλυτικά, η μέγιστη τιμή του  $h_2$  συναντάται τη χρονική στιγμή  $t_{max} > 0$  και για αυτήν ισχύει ότι:

$$\theta_1 \sqrt{h_1(t_{max})} = \theta_2 \sqrt{h_2^{max}} \implies h_2^{max} = \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} h_1(t_{max}) \leq \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} h_{1,0}$$



Για να εγγυηθούμε την παραμονή του συστήματος στο σύνολο  $\mathcal{D}$ , πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2} h_{1,0} \leq h_{max}$$

Στην περίπτωση όπου  $\frac{\theta_1}{\theta_2} \leq 1$ , η παραπάνω σχέση ισχύει καθώς  $h_{1,0} \leq h_{max}$ . Στην περίπτωση όπου  $\frac{\theta_1}{\theta_2} > 1$ , η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται αναγκαστικά. Όμως, υπάρχει κάποιο  $h_{1,0}^*$  το οποίο μπορεί να ικανοποιήσει την παραπάνω σχέση για οποιοδήποτε λόγο  $\frac{\theta_1}{\theta_2} > 1$ . Η ύπαρξη αυτής της αρχικής συνθήκης μπορεί να επιτρέψει την απενεργοποίηση του νόμου ελέγχου για στάθμη  $h_1 = \delta \leq h_{1,0}^*$ . Με την απενεργοποίηση του ελέγχου σε αυτήν την περιοχή, μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το σύστημα δε θα υπερβεί τα φυσικά όρια του συστήματος, κρατώντας το σφάλμα παρακολούθησης εντός των επιτρεπτών ορίων.

# Αποτελέσματα Πειραματικής Διάταξης

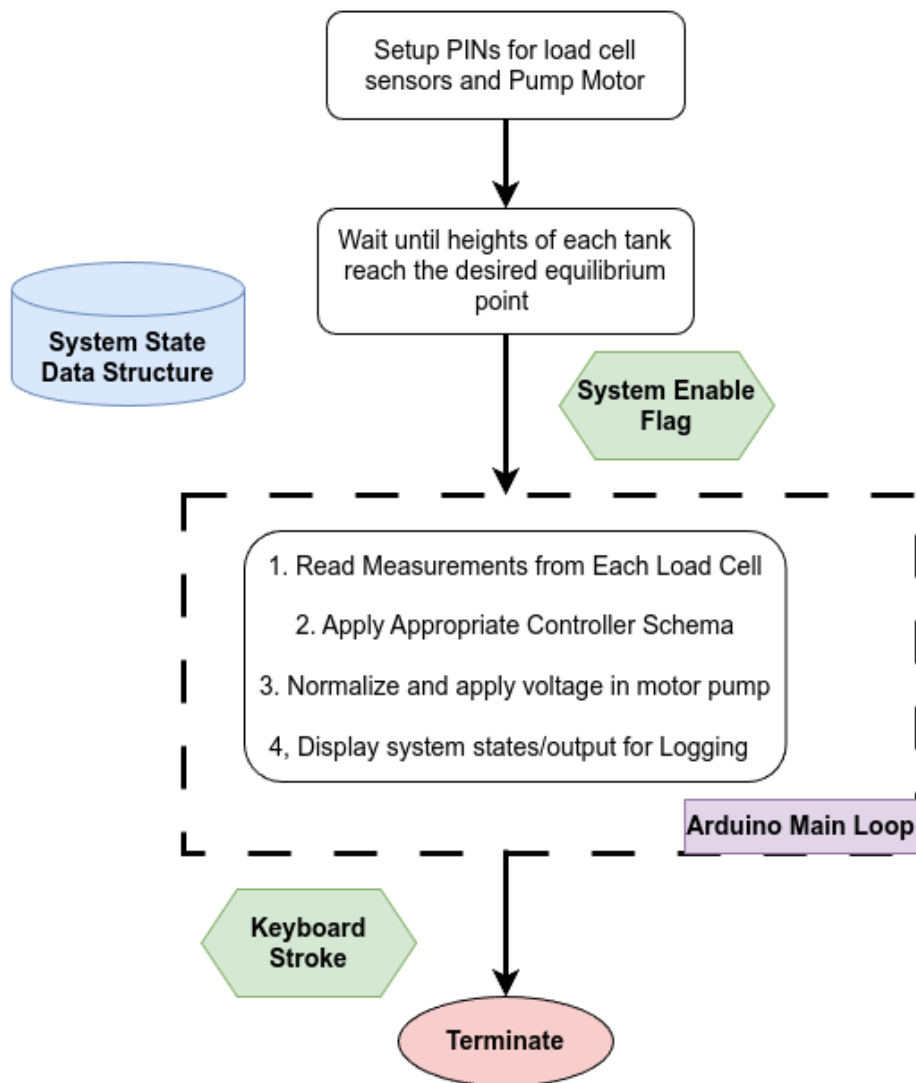
## Περιγραφή υλοποίησης

Για την απόκτηση μετρήσεων της συνολικής διάταξης, έγινε μια διαδικασία κανονικοποίησης των αισθητήρων load cell. Για κάθε έναν από τους αισθητήρες load cell, εκτελούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Μηδενίζουμε το offset του αισθητήρα υπό την απουσία αντικειμένου.
- Ορίζουμε το scaling του αισθητήρα ίσο με τη μονάδα.
- Κατά το πέρας κάποιου χρονικού διαστήματος, τοποθετούμε ένα αντικείμενο με γνωστό βάρος.
- Η απόλυτη μέτρηση που λαμβάνουμε από τον αισθητήρα διαιρείται με το βάρος του αντικειμένου για την απόκτηση της παραμέτρου scale.

Κατά την αρχικοποίηση ορίζουμε τα αντίστοιχα pin του μικροεπεξεργαστή για τους δύο αισθητήρες load cell καθώς και τα αντίστοιχα pin για τον κινητήρα της βαλβίδας. Καθώς για την εφαρμογή των ελεγκτών απαιτείται το σύστημα να βρίσκεται κοντά στην κατάσταση ισορροπίας, μια συνάρτηση αρχικοποίησης έχει οριστεί ώστε να γεμίζει τις δεξαμενές με ρευστό παρέχοντας τάση στη βαλβίδα και καθώς ικανοποιηθεί η απαραίτητη συνθήκη, να ξεκινάει η εφαρμογή του αντίστοιχου νόμου ελέγχου. Οι μεταβλητές των καταστάσεων του συστήματος αποθηκεύονται σε μια ορισμένη δομή δεδομένων και ενημερώνεται από την εκάστοτε συνάρτηση του νόμου ελέγχου.

Με τη χρήση της σειριακής του μικροεπεξεργαστή, αποθηκεύουμε την απόκριση τους συστήματος καθώς και απαραίτητες τιμές για την απεικόνιση της απόδοσης των νόμων ελέγχου και τη σύγκριση τους σε σχέση με τις προσομοιώσεις. Τέλος, με το πάτημα του κατάλληλου πλήκτρου, κλείνει η παροχή της αντλίας και σταματάει η εφαρμογή του ελέγχου.



Εικόνα 59: Διάγραμμα ροής λογισμικού

**Εφαρμογή MIT Rule στο Σύστημα Δεξαμενών**

**Εφαρμογή MRAC στο Σύστημα Δεξαμενών**

**Εφαρμογή Feedback Linearization στο Σύστημα Δεξαμενών**

**Εφαρμογή Backstepping στο Σύστημα Δεξαμενών**

# Βιβλιογραφία

- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] K. Astrom and A.-B. Ostberg. «A teaching laboratory for process control». In: *IEEE Control Systems Magazine* 6.5 (1986), pp. 37–42. DOI: 10.1109/MCS.1986.1105142.
- [4] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [5] Juri Belikov and Eduard Petlenkov. «Model based control of a water tank system». In: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014). 19th IFAC World Congress, pp. 10838–10843. ISSN: 1474-6670. DOI: <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.00695>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016433379>.
- [6] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [7] Frank Ferrese et al. «Decentralized control of coupled nonlinear dynamic systems with application to quadruple-tank process». In: *IECON 2014 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. 2014, pp. 3657–3661. DOI: 10.1109/IECON.2014.7049043.
- [8] Y. Fu et al. «Dual-Rate Adaptive Decoupling Controller and Its Application to a Dual-Tank Water System». In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 28.6 (2020), pp. 2515–2522. DOI: 10.1109/TCST.2019.2930044.
- [9] Bhagyashri Gurjar, Vinita Chaudhari, and Shailaja Kurode. «Parameter estimation based robust liquid level control of quadruple tank system — Second order sliding mode approach». In: *Journal of Process Control* 104 (2021), pp. 1–10. ISSN: 0959-1524. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.05.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152421000780>.
- [10] Mohammed M'Saad & Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [11] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.
- [12] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.

- [13] Iasson Karafyllis, Filippos Vokos, and Miroslav Krstic. «Output-feedback control of viscous liquid–tank system and its numerical approximation». In: *Automatica* 149 (2023), p. 110827. ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110827>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109822006938>.
- [14] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [15] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [16] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [17] Anca Maxim, Clara Ionescu, and Robin De Keyser. «Modelling and identification of a coupled sextuple water tank system». In: *2016 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*. 2016, pp. 1–6. DOI: 10.1109/AQTR.2016.7501360.
- [18] Xiangxiang Meng et al. «Liquid Level Control of Four-Tank System Based on Active Disturbance Rejection Technology». In: *Measurement* 175 (2021), p. 109146. ISSN: 0263-2241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109146>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026322412100169X>.
- [19] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley & Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [20] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.
- [21] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [22] Rim Rammal et al. «Nonlinear three-tank system fault detection and isolation using differential flatness». In: *IFAC Journal of Systems and Control* 21 (2022), p. 100197. ISSN: 2468-6018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2022.100197>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468601822000086>.
- [23] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [24] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.
- [25] Zegao Yin et al. «Hydrodynamic and aeration characteristics of an aerator of a surging water tank with a vertical baffle under a horizontal sinusoidal motion». In: *Ocean Engineering* 278 (2023), p. 114396. ISSN: 0029-8018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114396>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801823007801>.