



National  
Technical  
University  
of Athens

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
Συστήματα Αυτοματισμού  
Κατεύθυνση Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

Ομαδική Εργασία  
Έλεγχος Συστήματος Πολλαπλών Δεξαμενών

Γεώργιος Κασσαβετάκης - 02121203  
Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208  
Λάμπης Παπακώστας - 02121211

Διδάσκων: Μπεχλιούλης Χαράλαμπος

3 Φεβρουαρίου 2024

# Πίνακας Περιεχομένων

<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>4</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	<b>5</b>
<b>Εισαγωγή</b>	<b>6</b>
Στόχοι Εργασίας . . . . .	6
Κατασκευή Διάταξης . . . . .	6
Δομή Εργασίας . . . . .	6
<b>Μοντελοποίηση Συστήματος Δεξαμενών</b>	<b>7</b>
Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών . . . . .	7
Γραμμικοποιημένο Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών . . . . .	7
<b>Σχεδιασμός Συστήματος Ελέγχου Δεξαμενών</b>	<b>10</b>
Έλεγχος MIT Rule . . . . .	10
Σχεδίαση Ελεγκτή MIT Rule . . . . .	10
Προσομοίωση Ελεγκτή MIT Rule . . . . .	12
Έλεγχος MRAC . . . . .	18
Σχεδίαση Ελεγκτή MRAC . . . . .	18
Προσομοίωση Ελεγκτή MRAC . . . . .	20
Έλεγχος Feedback Linearization . . . . .	25
Σχεδίαση Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	25
Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	27
Προσομοίωση Ελεγκτών . . . . .	29
Προσομοίωση Ελεγκτή Feedback Linearization . . . . .	29
Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Feedback Linearization . . . . .	32
Έλεγχος Backstepping . . . . .	37
Σχεδίαση Ελεγκτή Backstepping . . . . .	37
Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Backstepping . . . . .	39
Προσομοίωση Ελεγκτών . . . . .	41
Προσομοίωση Ελεγκτή Backstepping . . . . .	41
Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Backstepping . . . . .	44
<b>Πειράματα και Αποτελέσματα</b>	<b>50</b>
Εφαρμογή MIT Rule στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	50
Εφαρμογή MRAC στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	50
Εφαρμογή Feedback Linearization στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	50
Εφαρμογή Backstepping στο Σύστημα Δεξαμενών . . . . .	50

<b>Επίλογος</b>	<b>51</b>
Σύνοψη Εργασίας . . . . .	51
Μελλοντικές Επεκτάσεις . . . . .	51
<b>Κώδικας Προσομοίωσης Συστήματος Δεξαμενών</b>	<b>52</b>
<b>Κώδικας Arduino Συστήματος Δεξαμενών</b>	<b>53</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>54</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

1	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	13
2	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	13
3	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	14
4	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	14
5	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	15
6	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	15
7	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	16
8	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	16
9	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	17
10	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	20
11	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	21
12	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	21
13	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	22
14	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	22
15	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	23
16	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	23
17	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	24
18	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	24
19	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	29
20	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	30
21	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	30
22	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	31
23	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	31
24	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	32

25	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	33
26	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	33
27	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	34
28	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	34
29	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	35
30	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	35
31	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	36
32	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	36
33	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	37
34	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	41
35	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	42
36	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	42
37	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	43
38	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	43
39	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	44
40	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.	45
41	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	45
42	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό. . . . .	46
43	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. .	46
44	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	47
45	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό. . . . .	47
46	Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. .	48
47	Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	48
48	Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό. . . . .	49

# Κατάλογος Πινάκων

# Εισαγωγή

## Στόχοι Εργασίας

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η κατασκευή και ο έλεγχος μιας διάταξης δεξαμενών νερού. Η διάταξη μοντελοποιήθηκε και κατασκευάστηκε σύμφωνα με το [3]. Αναλυτικότερα, γίνεται έλεγχος της αντλίας νερού, η οποία θα εκρέει στην πρώτη δεξαμενή που βρίσκεται πάνω από τη δεύτερη. Εν συνεχεία, το ρευστό εκρέει από τη δεξαμενή 1 στη δεξαμενή 2 με φυσικό τρόπο. Με λίγα λόγια γίνεται έλεγχος της στάθμης της δεύτερης δεξαμενής. Τέλος, το ρευστό θα εκρέει από τη δεξαμενή 2 στην πισίνα που βρίσκεται κάτω από τις δεξαμενές. Έτσι, η αντλία θα ανακυκλώνει το νερό στις δεξαμενές, μέσω κατάλληλων εντολών.

## Κατασκευή Διάταξης

### Δομή Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αφορά την εισαγωγή του θέματος, στο οποίο παρουσιάζονται οι στόχοι της εργασίας, δηλαδή τον σκοπό του θέματος προς μελέτη, το κατασκευαστικό κομμάτι που αφορά την κατασκευή της διάταξης και των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν και τέλος, τη δομή που έχει η εργασία αυτή.

Το δεύτερο κεφάλαιο εμπεριέχει τη μοντελοποίηση του συστήματος δεξαμενών. Συγκεκριμένα, παράγεται το αρχικό μη γραμμικό μοντέλο των δεξαμενών και έπειτα αυτό γραμμικοποιείται κατάλληλα γύρω από το σημείο ισορροπίας για την εφαρμογή των ελεγκτών.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά τη σχεδίαση του συστήματος ελέγχου που θα δίνει τις κατάλληλες εντολές στην αντλία για να γίνεται ο έλεγχος των στάθμινων.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά τα πειράματα και τα αποτελέσματα που παράχθηκαν κατά τη λειτουργία του συστήματος δεξαμενών, με την κατάλληλη εφαρμογή των σχημάτων ελέγχου.

Τέλος, το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί τη σύνοψη και τα συμπεράσματα της εργασίας, μαζί με μελλοντικές επεκτάσεις που μπορούν να γίνουν στο παραπάνω σύστημα.

# Μοντελοποίηση Συστήματος Δεξαμενών

## Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Το τελικό μη γραμμικό σύστημα προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = f(h_1, h_2, u) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{A} \sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A} u \\ \frac{\alpha_1}{A} \sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha_2}{A} \sqrt{2gh_2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Το παραπάνω σύστημα διαθέτει σημείο ισορροπίας

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = 0 &\implies \begin{cases} u^* = \frac{\alpha}{K} \sqrt{2gh_1^*} \\ \theta_1 \sqrt{h_1^*} = \theta_2 \sqrt{h_2^*} \end{cases} \implies \begin{cases} u^* = \frac{\alpha_1}{K} \sqrt{2gh_1^*} = \frac{\theta_1}{b} \sqrt{h_1^*} \\ h_1^* = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} h_2^* \end{cases} \\ &\implies h_1^* = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} h_2^* = \frac{(bu^*)^2}{\theta_1^2} \end{aligned} \quad (2)$$

## Γραμμικοποιημένο Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Για την εφαρμογή ελεγκτών με βάση ένα γραμμικό μοντέλο μπορεί να γραμμικοποιηθεί το σύστημα γύρω από το επιθυμητό σημείο ισορροπίας. Έστω το επιθυμητό σημείο ισορροπίας του συστήματος να είναι της μορφής  $[h_1, h_2]^T = [h_{1e}, h_{2e}]^T$ . Το σύστημα με βάση το ανάπτυγμα *Taylor* γραμμικοποιείται ως:

$$\dot{h} = A_l \begin{bmatrix} h_1 - h_{1e} \\ h_2 - h_{2e} \end{bmatrix} + B_l(u - u^*) \quad (3)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_l &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix} \bigg|_{(h=[h_{1e}, h_{2e}]^T, u=u^*)} \\ B_l &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{(h=[h_{1e}, h_{2e}]^T, u=u^*)} \end{aligned}$$

Οι πίνακες  $A_l$  και  $B_l$ , με την εύρεση των μερικών παραγώγων της (1) προκύπτουν:

$$A_l = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & 0 \\ \frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & -\frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_2}} \end{bmatrix} \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Στο σημείο ισορροπίας  $h = [h_{1,e}, h_{2,e}]^T, u = u^*$ , οι πίνακες  $A_l$  και  $B_l$  έχουν τιμή:

$$A_l = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{0,1}}} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{0,1}}} & -\frac{\alpha_2}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{0,2}}} \end{bmatrix} \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Για απλοποίηση των σχέσεων, ορίζοντας  $\omega_i = \frac{\alpha}{A} \frac{g}{\sqrt{2gh_{i,e}}}$  και  $b = \frac{K}{A}$ , το γραμμικοποιημένο σύστημα προκύπτει:

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

Η παραπάνω σχέση, με μετασχηματισμό του σημείου ισορροπίας στο  $(0, 0)$  γίνεται:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (5)$$

Η σχέση (5) για λόγους εφαρμογής κάποιων από των μεθοδολογιών ελέγχου μπορεί να μετασχηματιστεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$\frac{X(s)}{V(s)} = (sI_2 - A_l)^{-1} B = \begin{bmatrix} s + \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & s + \omega_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} \begin{bmatrix} s + \omega_2 & 0 \\ \omega_1 & s + \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Έτσι, προκύπτουν οι δύο συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\frac{X_1(s)}{V(s)} = \frac{b}{s + \omega_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

Χρήσιμη επιπλέον είναι η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στις δύο στάθμες η οποία ορίζεται ως

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{\omega_1}{(s + \omega_2)}$$

Με τη χρήση της άλγεβρας *Lie* και του μετασχηματισμού αυτού της ενότητας *Feedback Linearization*, με  $z_1 = h_2, z_2 = \dot{h}_2$  προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_1 \theta_2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_2) - \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) u \end{bmatrix}$$

Με χρήση της αντίστροφης μετατροπής  $h_1 = \phi^{-1}(\frac{1}{\theta_1}(z_2 + \theta_2 \phi(z_1)))$ , προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2(z_2 + \theta_2 \phi(z_1)) \dot{\phi}(z_1) + \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2} + \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2 z_2 - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) u \end{bmatrix}$$

Καθώς  $\dot{\phi}(h_1) = \frac{1}{2\phi(h_1)} = \frac{\theta_1}{2(z_2 + \theta_2 \phi(z_1))}$ , το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2 z_2 - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A} \frac{\theta_1^2}{2(z_2 + \theta_2 \phi(z_1))} u \end{bmatrix}$$

Η γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο  $z_1 = h_{2,d}, z_2 = 0$  γίνεται στο μετασχηματισμένο σύστημα ως:

$$\dot{z} = f_z(z_1, z_2, u) = A_l(z - z^*) + B_l(u - u^*)$$

με τους πίνακες

$$A_l = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_{z,1}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{z,1}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_{z,2}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{z,2}}{\partial z_2} \end{array} \right] \bigg|_{(z=[h_{2,d},0]^T, u=u^*)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2} \frac{\theta_2 \dot{\phi}(h_{2,d})}{(\theta_2 \phi(h_{2,d}))^2} u^* & -\frac{b\theta_1^2}{2\theta_2} \frac{1}{(\theta_2 \phi(h_{2,d}))^2} u^* \end{array} \right]$$

$$B_l = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_{z,1}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{z,2}}{\partial u} \end{array} \right] \bigg|_{(h=[h_{2,d},0]^T, u=u^*)} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2 \phi(h_{2,d})} \end{array} \right]$$

Με αντικατάσταση της συνάρτησης  $\phi$  προκύπτουν οι πίνακες

$$A_l = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2 u^*}{4\theta_2^2 h_{2,d} \sqrt{h_{2,d}}} & -\frac{b\theta_1^2 u^*}{2\theta_2^3 h_{2,d}} \end{array} \right]$$

$$B_l = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2 \sqrt{h_{2,d}}} \end{array} \right]$$

Για ευκολία στην εφαρμογή των ελεγκτών ορίζουμε τις ποσότητες

$$\tilde{a}_1 = -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2 u^*}{4\theta_2^2 h_{2,d} \sqrt{h_{2,d}}}$$

$$\tilde{a}_2 = -\frac{b\theta_1^2 u^*}{2\theta_2^3 h_{2,d}}$$

$$\tilde{b} = \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2 \sqrt{h_{2,d}}}$$

με τις οποίες το γραμμικοποιημένο σύστημα γίνεται

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} (z - z^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (u - u^*) \quad (7)$$

Με  $u^*$  τέτοιο ώστε  $z = z^*$ . Σε αυτό το σημείο γίνεται η αλλαγή μεταβλητών  $x = z - z^*$  και ορίζεται η συνάρτηση  $\Phi(x) = 1$ . Έτσι, το σύστημα παίρνει τη γραμμική του μορφή ως:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (u - \theta^* \Phi) \quad (8)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι η συνάρτηση  $\Phi(x)$  θα μπορούσε να εμπεριέχει τους μη γραμμικούς όρους του αρχικού μοντέλου και με τη χρήση νευρωνικών δικτύων να προσεγγιστεί η επίδραση τους. Όμως, επιλέγεται η χρήση ενός γραμμικοποιημένου και απλούστερου μοντέλου στα πλαίσια της εργασίας.

# Σχεδιασμός Συστήματος Ελέγχου Δεξαμενών

## Έλεγχος MIT Rule

Για τη σχεδίαση του ελεγκτή *MIT Rule* θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης 5

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

η οποία εκφράζεται ως

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v$$

με την αλλαγή μεταβλητών  $x_i = h_i - h_{i,e}$ . Η παραπάνω έκφραση έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή MIT Rule

Για τη σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς

$$M(s) = \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}$$

Λόγω της ανάδρασης της στάθμης  $h_1$  και  $h_2$  ορίζουμε τον νόμο ελέγχου

$$v = \theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2 \quad (9)$$

Το σήμα αναφοράς  $r$  είναι τέτοιο ώστε η έξοδος του  $M(s)r$  να δίνει την τιμή  $x_m$ , η οποία αναφέρεται στη διαφορά της επιθυμητής τιμή της στάθμης  $h_{2,d}$  με αυτή του σημείου του οποίου γίνεται η γραμμικοποίηση  $h_{2,e}$ .

Έτσι, ορίζουμε το σήμα αναφοράς  $r$  ως:

$$r = h_{2,d} - h_{2,e}$$

Ο ελεγκτής αυτός προσφέρει το σύστημα κλειστού βρόγχου ως

$$x_2 = \frac{b\omega}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} (\theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2)$$

$$x_2 = \frac{b\omega_1\theta_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} r - \frac{b\omega_1\theta_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} x_1 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} x_2$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r - \frac{b\theta_2}{(s+\omega_1)}x_2 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 \\
\left(1 + \frac{b\theta_2}{s+\omega_1} + \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}\right)x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
\frac{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r
\end{aligned}$$

Με βάση τον στόχο ελέγχου της δεξαμενής 2 ορίζουμε το σφάλμα ελέγχου:

$$\begin{aligned}
e = x_2 - x_m &= \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}v - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r \\
e = x_2 - x_m &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r
\end{aligned}$$

Για την εύρεση του προσαρμοστικού νόμου είναι απαραίτητη η εύρεση των μερικών παραγώγων του σφάλματος. Η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_1$  προκύπτει ως

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r$$

Η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_2$  με τη χρήση της συνάρτησης μεταφοράς  $\frac{H_2(s)}{H_1(s)}$  προκύπτει ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b^2\omega_1\theta_1(s+\omega_2)}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{(s+\omega_2)}{\omega_1} \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2 \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_1
\end{aligned}$$

Όμοια, η μερική παράγωγος ως προς  $\theta_3$  προκύπτει ως

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} &= -\frac{b^2\omega_1^2\theta_1}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} &= -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2
\end{aligned}$$

Με χρήση της προσέγγισης

$$(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3 \approx s^2 + a_{1m}s + a_{2m} \quad (10)$$

προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι ως:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r = \frac{b\omega}{a_{2m}} \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) r \quad (11)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}h_1 = -\frac{b\omega}{a_{2m}} \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_3} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}h_2 = -\frac{b\omega}{a_{2m}}\left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right)x_2 \quad (13)$$

Έτσι, από την γενική σχέση των νόμων προσαρμογής

$$\dot{\theta}_i = -\tilde{\gamma}_i e \frac{\partial e}{\partial \theta_i} \quad (14)$$

προκύπτουν οι νόμοι προσαρμογής

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) r \quad (15)$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_1 \quad (16)$$

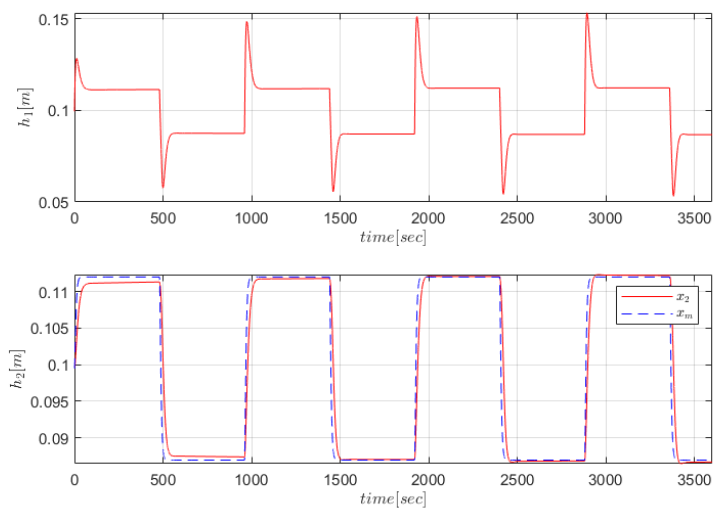
$$\dot{\theta}_3 = \gamma_3 e \left( \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} \right) x_2 \quad (17)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι το κέρδος  $\gamma_i$  δεν ταυτίζεται με αυτό της σχέσης 14, καθώς προκύπτει από την εξίσωση  $\gamma_i = \frac{b\omega_1}{a_{2m}}\tilde{\gamma}_i$ . Ο λόγος αυτής της επιλογής είναι η χρήση φίλτρου μοναδιαίου  $DC$  κέρδους και οι άγνωστες τιμές των παραμέτρων του συστήματος  $b, \omega_1$ .

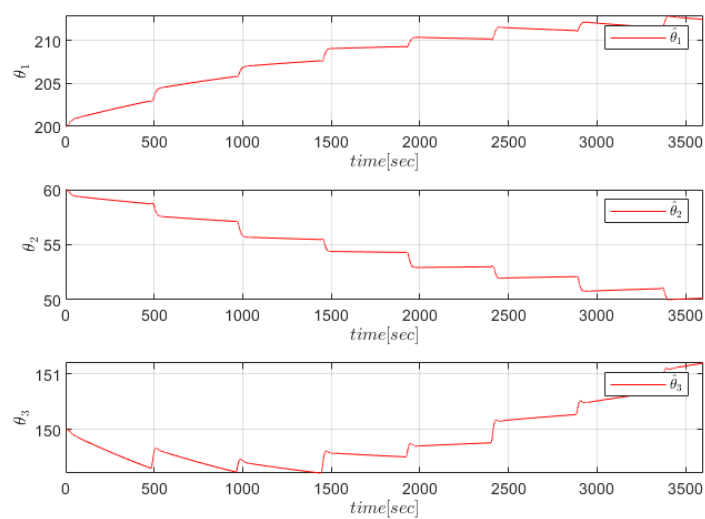
## Προσομοίωση Ελεγκτή MIT Rule

Καθώς σχεδιάστηκε ο ελεγκτής, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί, έτσι ώστε να δούμε εάν θα γίνει σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς. Μετά από πληθώρα προσομοιώσεων, βρέθηκαν τα κατάλληλα κέρδη προσαρμογής να είναι  $\gamma_1 = 500$ ,  $\gamma_2 = 180$  και  $\gamma_3 = 150$ . Κατά την προσομοίωση εφαρμόστηκαν τρία διαφορετικά σήματα αναφοράς. Ένας τετραγωνικός παλμός, ένας ημιτονοειδής παλμός και ένας τραπεζοειδής παλμός. Όλα τα σήματα έχουν σχεδιαστεί ώστε να ξεκινάνε από το σημείο ισορροπίας  $(h_{1,e}, h_{2,e})$ . Άρα θα δούμε την απόκριση των σημάτων.

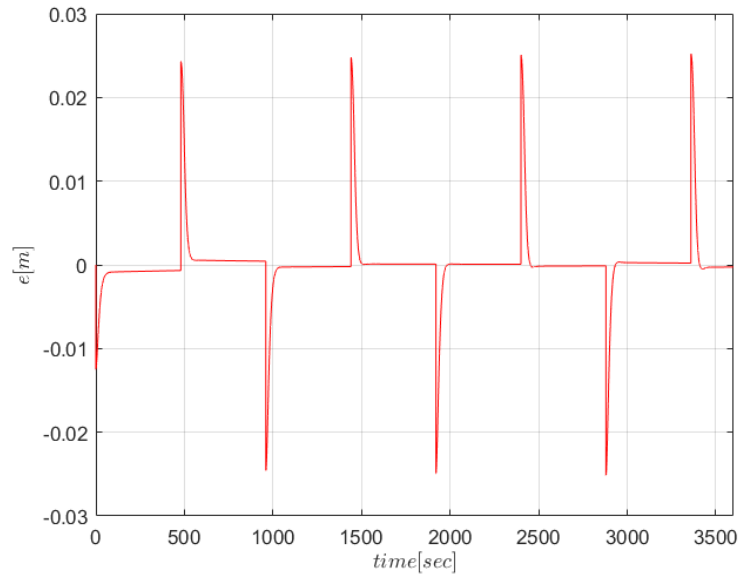
Έστω ότι έχουμε το πρώτο σήμα που αποτελεί τον τετραγωνικό παλμό. Στο σχήμα 1 παρατηρούμε πως αποκρίνεται το σύστημα κατά την εφαρμογή του παρόντος σήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση κατά την προσομοίωση του ελεγκτή, με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 3). Τέλος, στο σχήμα 2 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή. Βλέπουμε πως ξεκινάν από μια τιμή κοντά στην πραγματική τιμή, λόγω των διαστάσεων των μεγεθών του συστήματος. Με αυτό τον τρόπο επετεύχθη η σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς.



Σχήμα 1: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

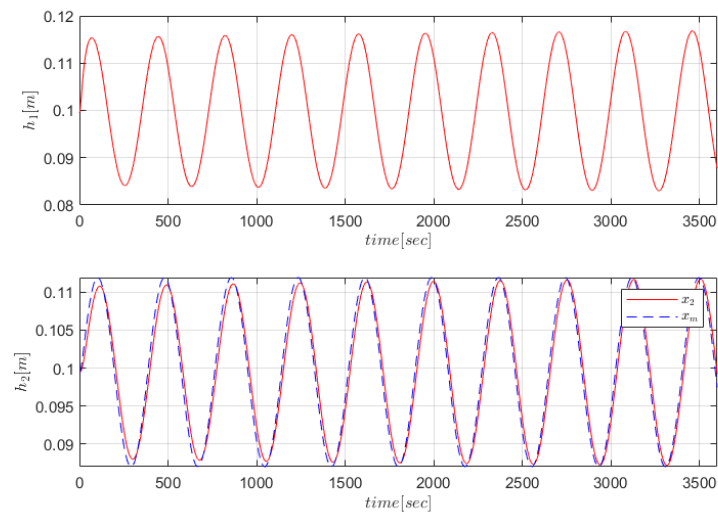


Σχήμα 2: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

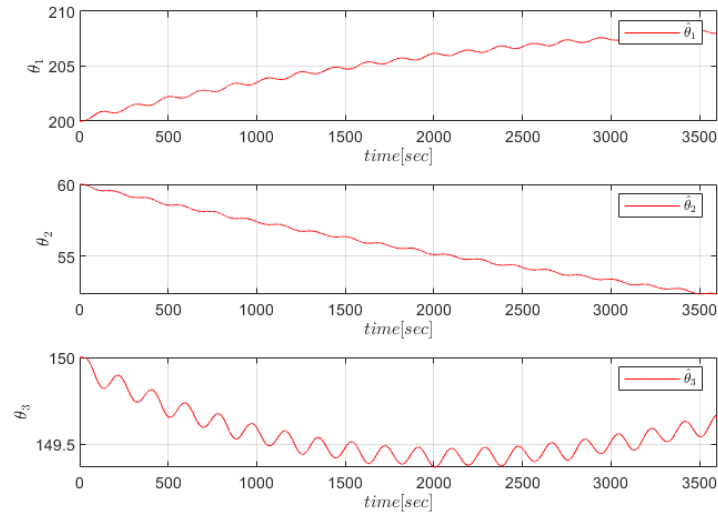


Σχήμα 3: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

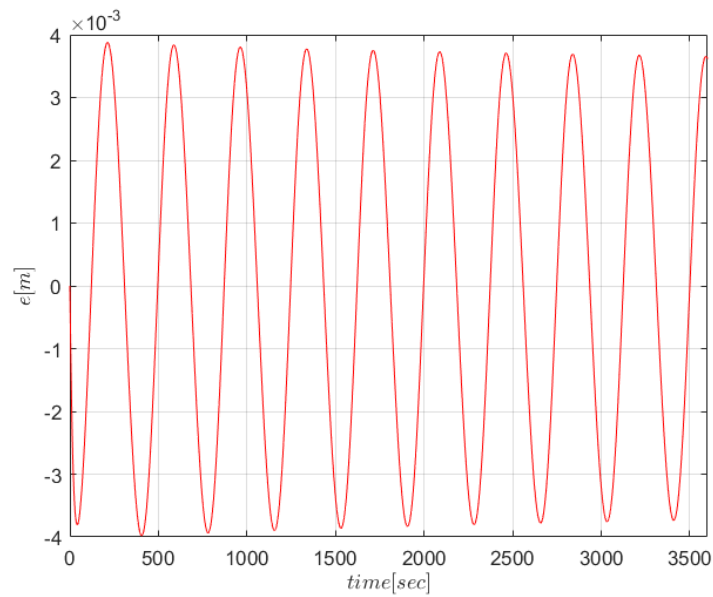
Τώρα θα δούμε την απόκριση του συστήματος με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, που είναι ένας ημιτονοειδής παλμός. Στο σχήμα 4 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος κατά την εφαρμογή του παλμού αυτού. Διαπιστώνουμε πως το παρακολουθεί σωστά με το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο 0, όπως εμφανίζεται και στο σχήμα 6. Τέλος, στο σχήμα 5 βλέπουμε την εκτίμηση των παραμέτρων του ελεγκτή. Παρατηρούμε πως προσαρμόζονται ωστόσο δε φτάνουν στην ιδεατή τιμή.



Σχήμα 4: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



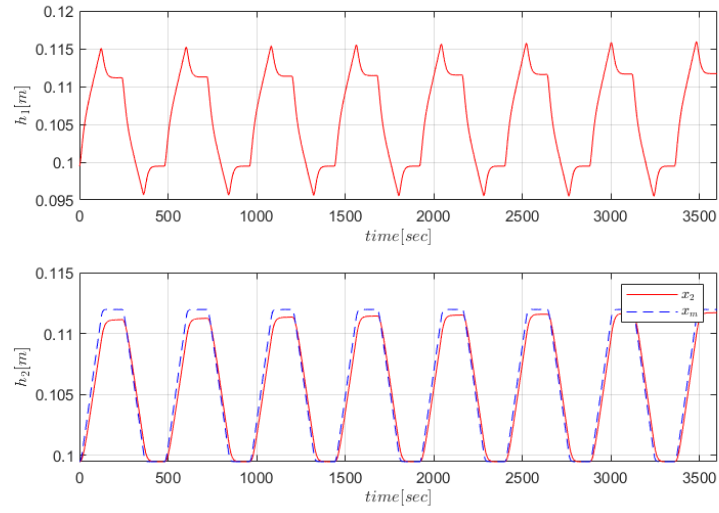
Σχήμα 5: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



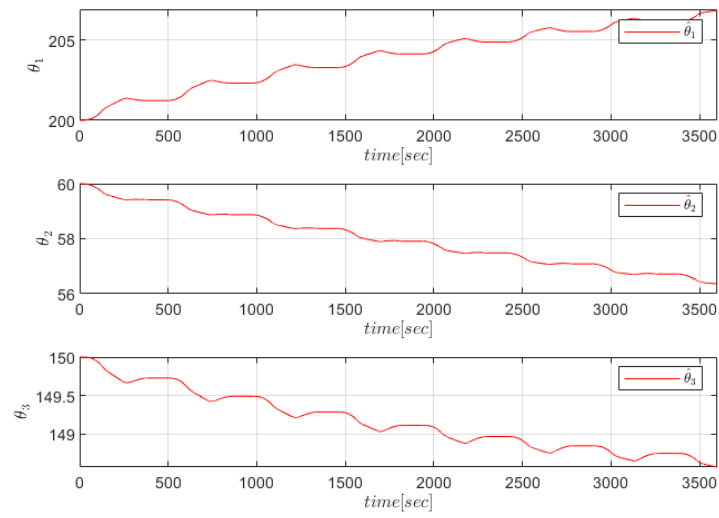
Σχήμα 6: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, θα εφαρμόσουμε τον τραπεζοειδή παλμό για να δούμε πως κυμαίνεται η απόκριση του συστήματος. Στο σχήμα 7 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, δίχως να ξε-  
 χυλίζει η δεξαμενή 1. Το σφάλμα παρακολούθησης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 9. Επιπλέον, στο σχήμα 8 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή.

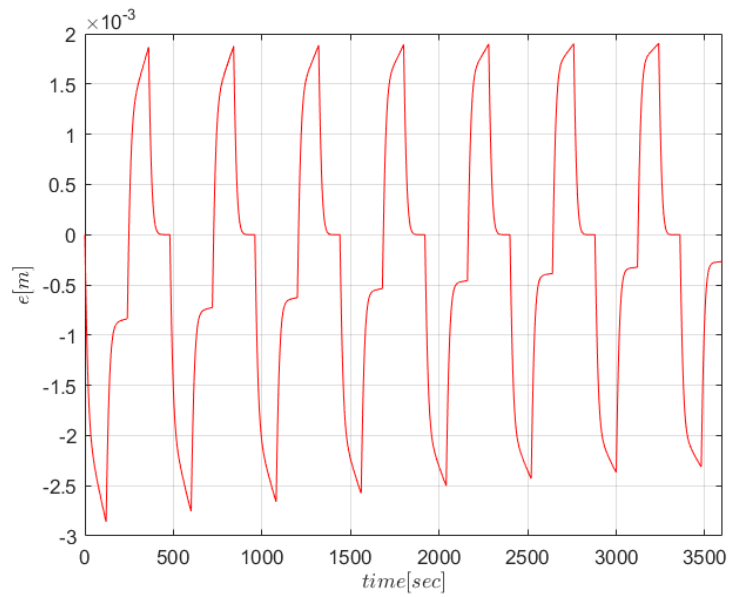




Σχήμα 7: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 8: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 9: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συνοπτικά, διαπιστώνουμε πως η εφαρμογή του *MIT Rule* στο σύστημα δεξαμενών επιτυγχάνει τη σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, με αποτέλεσμα να ελέγχεται σωστά η στάθμη της δεξαμενής 2, χωρίς να ξεχυλίζει η στάθμη της δεξαμενής 1. Έτσι, ο παρών ελεγκτής μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη.

## Έλεγχος MRAC

Για τη σχεδίαση του ελεγκτή *MIT Rule* θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης 8

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (u - \theta^* \Phi)$$

Η σχεδίαση αυτή δε χρειάζεται τη μεταφορά του συστήματος στον χώρο *Laplace*. Έτσι, επαρκεί η χρήση του μοντέλου κατάστασης. Η επιλογή της χρήσης αυτού του γραμμικοποιημένου μοντέλου και όχι αυτού της εξίσωσης 5 γίνεται για λόγους συμβατότητας του μοντέλου με αντίστοιχο μοντέλο αναφοράς.

Για τη σχεδίαση του *MRAC* θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά η ανάδραση της στάθμης της δεύτερης δεξαμενής και θα προσεγγιστεί με βάση τα δεδομένα η παράγωγος της. Έτσι, θεωρούμε ότι η μέτρηση γίνεται στις ποσότητες  $h_2, \dot{h}_2$ , τα οποία συνεπάγονται τη μέτρηση του διανύσματος  $x$  της δεύτερης γραμμικοποίησης.

## Σχεδίαση Ελεγκτή MRAC

Για τη σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς

$$M(s) = \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}$$

Το μοντέλο αναφοράς στον χώρο κατάστασης δίνεται ως

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{2m} & -a_{1m} \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2m} \end{bmatrix} r = A_m x_m + B_m r \quad (18)$$

Και σε αυτήν τη σχεδίαση με όμοιο τρόπο με την περίπτωση του *MIT*, η μεταβλητή  $x_1$  ορίζεται ως  $x_1 = h_2 - h_{2,e}$  ενώ το σήμα αναφοράς  $r$  ορίζεται ως  $r = h_{2,d} - h_{2,e}$ . Έστω ο νόμος ελέγχου

$$u = K_x^T x + K_r r + \theta \Phi(x) \quad (19)$$

Για τον παραπάνω ελεγκτή το σύστημα κλειστού βρόγχου έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (K_x^T x + K_r r + \theta \Phi(x) - \theta^* \Phi)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 + \tilde{b}K_{x,1} & \tilde{a}_2 + \tilde{b}K_{x,2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}K_r \end{bmatrix} r + (\theta - \theta^*) \Phi$$

Θεωρούμε τα ιδανικά κέρδη  $K_x^*, K_r^*$  τα οποία δίνουν τις *Model Matching* συνθήκες

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 + \tilde{b}K_{x,1}^* & \tilde{a}_2 + \tilde{b}K_{x,2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{2m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b}K_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2m} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Για τη συνέχεια της ανάλυσης ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{K}_x = K_x - K_x^*$ ,  $\tilde{K}_r = K_r - K_r^*$ ,  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ . Με βάση αυτά υπολογίζουμε τη δυναμική του σφάλματος παρακολούθησης  $e = x - x_m$  ως

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m = \dots = A_m e + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r r + \tilde{\theta} \Phi(x)) \quad (22)$$

Θεωρούμε γνωστό επιπλέον ότι  $\tilde{b} > 0$ . Η θεωρήση αυτή είναι προφανής καθώς από τη φυσική μοντελοποίηση του προβλήματος μπορούμε να δούμε ότι ο θετικός έλεγχος  $u$  επιφέρει αύξηση της ταχύτητας και κατά συνέπεια της στάθμης  $u$ .

Λόγω της ευστάθειας του μοντέλου αναφοράς, ορίζεται ο θετικά ορισμένος και συμμετρικός πίνακας  $P$  ως η λύση της εξίσωσης *Lyapunov*

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad (23)$$

Με βάση τον πίνακα  $P$  ορίζεται η συνάρτηση *Lyapunov* προβλήματος ως

$$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\theta}) = e^T P e + (\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x + \frac{1}{\gamma_r} \tilde{K}_r^2 + \frac{1}{\gamma_\theta} \tilde{\theta}^2) \tilde{b} \quad (24)$$

Η παράγωγο της συνάρτησης δίνεται από

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & e^T (A_m^T P + P A_m) e + 2e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} (\tilde{K}_x^T x + \tilde{K}_r r + \tilde{\theta} \Phi(x)) \\ & + 2\tilde{b} (\tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + \frac{1}{\gamma_r} \tilde{K}_r \dot{\tilde{K}}_r + \frac{1}{\gamma_\theta} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned}$$

Με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων

$$\dot{\tilde{K}}_x = -\Gamma_x x e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\dot{\tilde{K}}_r = -\gamma_r r e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_\theta \Phi(x) e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\gamma_\theta e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* δίνεται από

$$\frac{dV}{dt} = e^T (A_m^T P + P A_m) e = -e^T Q e \leq 0$$

Η αρνητικά ημιορισμένη παράγωγος της  $V$  εγγυάται μέσω του Λήμματος *Barbalat* τη σύγκλιση του σφάλματος στο 0.

Η επιλογή των παραπάνω νόμων όμως δε λαμβάνει υπόψη της το φαινόμενο της γραμμικοποίησης και των μη μοντελοποιημένων μη γραμμικοτήτων. Έτσι, τροποποιούμε τους παραπάνω νόμους ως:

$$\dot{\tilde{K}}_x = -\Gamma_x \left( x e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma_x \tilde{K}_x \right) \quad (28)$$

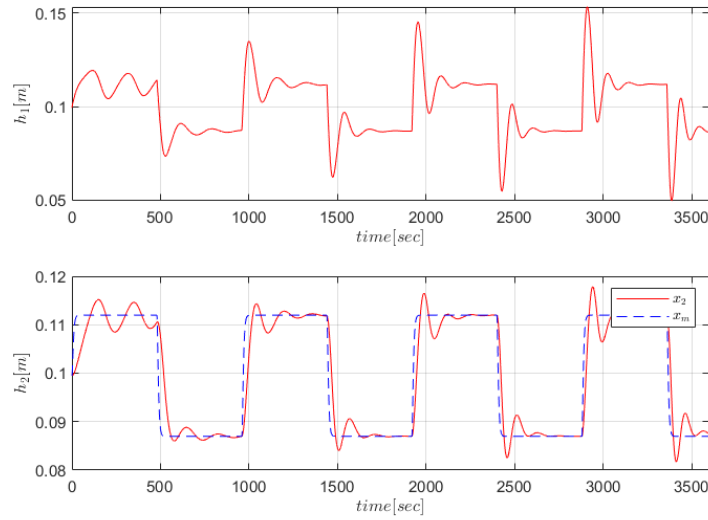
$$\dot{\tilde{K}}_r = -\gamma_r \left( r e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma_r \tilde{K}_r \right) \quad (29)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_\theta \left( e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma_\theta \tilde{\theta} \right) \quad (30)$$

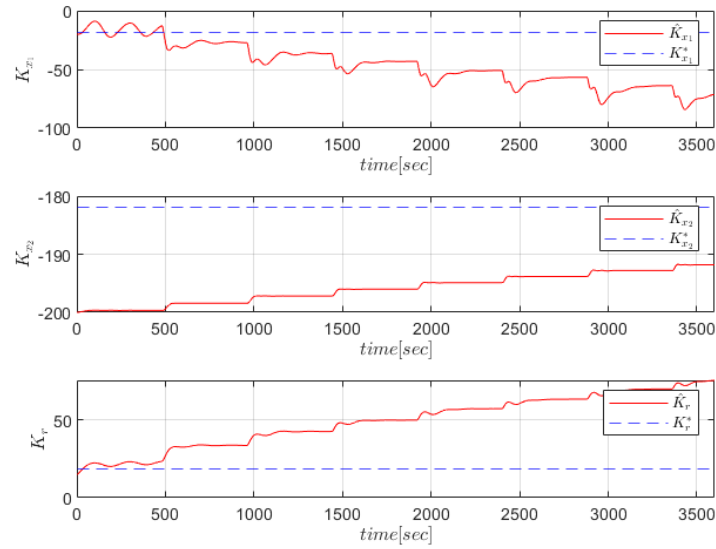
## Προσομοίωση Ελεγκτή MRAC

Καθώς σχεδιάστηκε ο ελεγκτής, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιωθεί, έτσι ώστε να δούμε εάν θα γίνει σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς. Μετά από πληθώρα προσομοιώσεων, βρέθηκαν τα κατάλληλα κέρδη προσαρμογής να είναι  $\Gamma_x = 500I_2$  και  $\gamma_r = 100$ . Κατά την προσομοίωση εφαρμόστηκαν τρία διαφορετικά σήματα αναφοράς. Ένας τετραγωνικός παλμός, ένας ημιτονοειδής παλμός και ένας τραπεζοειδής παλμός. Όλα τα σήματα έχουν σχεδιαστεί ώστε να ξεκινάνε από το σημείο ισορροπίας ( $h_{1,e}, h_{2,e}$ ). Άρα θα δούμε την απόκριση των σημάτων.

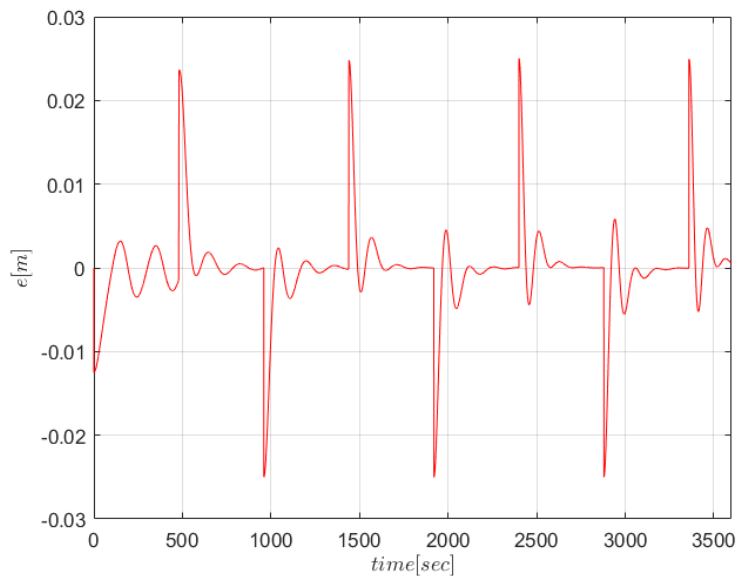
Έστω ότι έχουμε το πρώτο σήμα που αποτελεί τον τετραγωνικό παλμό. Στο σχήμα 10 παρατηρούμε πως αποκρίνεται το σύστημα κατά την εφαρμογή του παρόντος σήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση κατά την προσομοίωση του ελεγκτή, με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 12). Τέλος, στο σχήμα 11 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή. Βλέπουμε πως ξεκινάν από μια τιμή κοντά στην πραγματική τιμή, λόγω των διαστάσεων των μεγεθών του συστήματος. Με αυτό τον τρόπο επετεύχθη η σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς.



Σχήμα 10: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

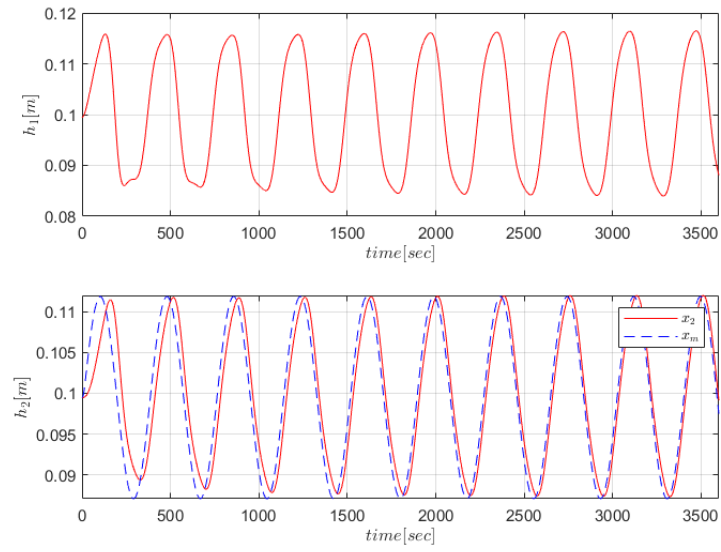


Σχήμα 11: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

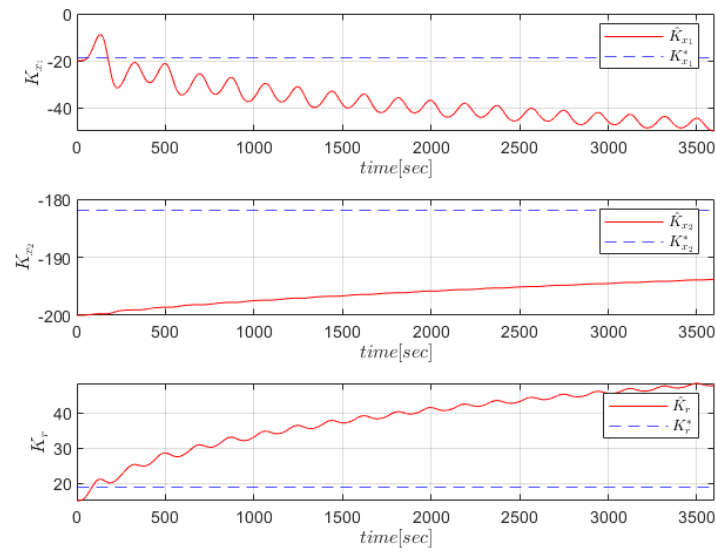


Σχήμα 12: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

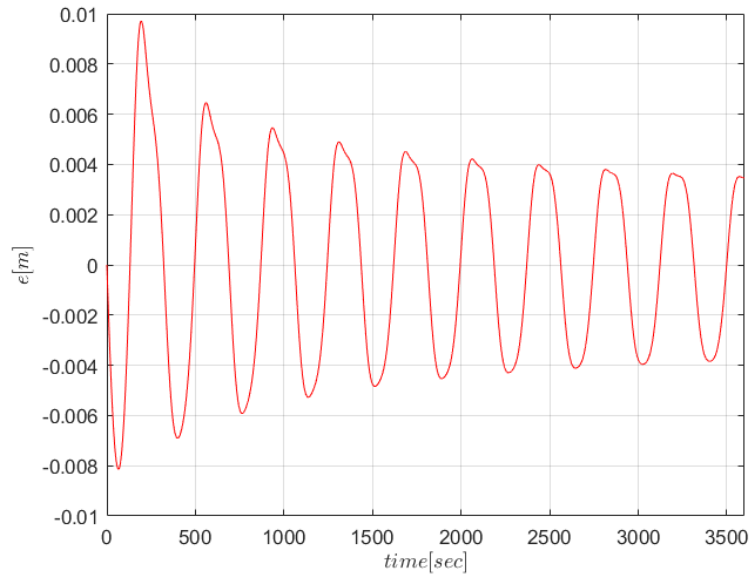
Τώρα θα δούμε την απόκριση του συστήματος με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, που είναι ένας ημιτονοειδής παλμός. Στο σχήμα 13 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος κατά την εφαρμογή του παλμού αυτού. Διαπιστώνουμε πως το παρακολουθεί σωστά με το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο 0, όπως εμφανίζεται και στο σχήμα 15. Τέλος, στο σχήμα 14 βλέπουμε την εκτίμηση των παραμέτρων του ελεγκτή. Παρατηρούμε πως προσαρμόζονται ωστόσο δε φτάνουν στην ιδεατή τιμή.



Σχήμα 13: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

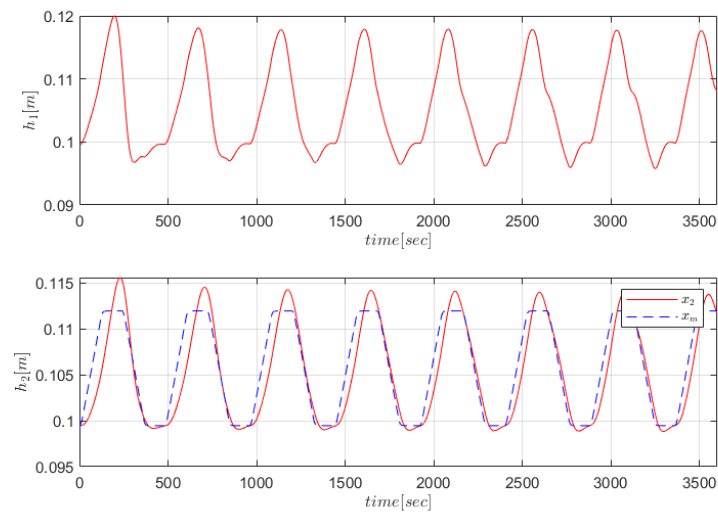


Σχήμα 14: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



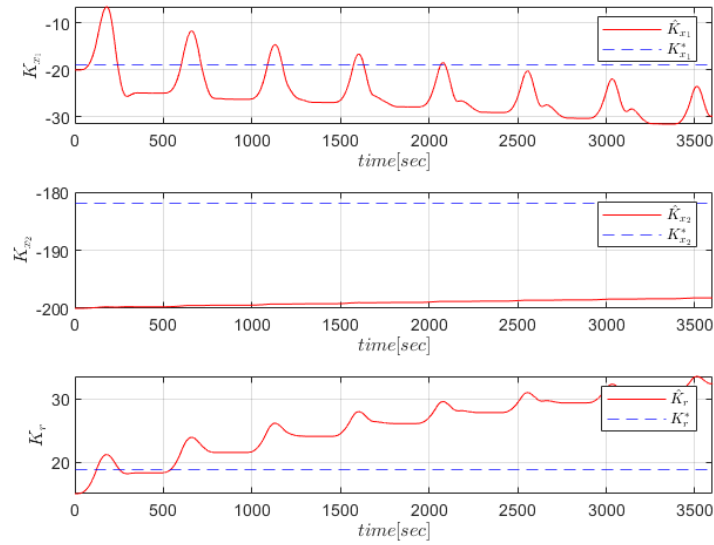
Σχήμα 15: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, θα εφαρμόσουμε τον τραπεζοειδή παλμό για να δούμε πως κυμαίνεται η απόκριση του συστήματος. Στο σχήμα 16 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος. Διαπιστώνουμε πως γίνεται σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, δίχως να ξε-  
 χυλίζει η δεξαμενή 1. Το σφάλμα παρακολούθησης τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 18. Επιπλέον, στο σχήμα 17 παρατηρούμε την προσαρμογή των παραμέτρων του ελεγκτή.

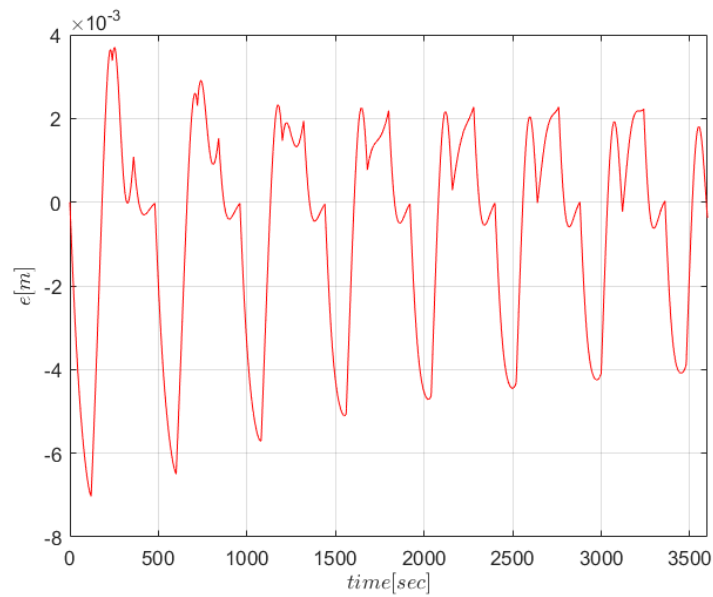


Σχήμα 16: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.





Σχήμα 17: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 18: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συνοπτικά, διαπιστώνουμε πως η εφαρμογή του *MRAC* στο σύστημα δεξαμενών επιτυγχάνει τη σωστή παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς, με αποτέλεσμα να ελέγχεται σωστά η στάθμη της δεξαμενής 2, χωρίς να ξεχυλίζει η στάθμη της δεξαμενής 1. Έτσι, ο παρών ελεγκτής μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη.

## Έλεγχος Feedback Linearization

Για τον έλεγχο με τη διαδικασία *Feedback Linearization* χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης 1

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου ενώ στην συνέχεια θα βρεθεί η προσαρμοστική εκδοχή αυτού.

Για την χρήση του συμβολισμού *Lie* ορίζουμε τις συναρτήσεις  $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$  και  $\theta = \frac{\alpha}{A}\sqrt{2g}$ . Για λόγους αβεβαιότητας ορίζουμε δύο διαφορικά  $\theta$ , αντίστοιχα με κάθε διατομή  $a$ . Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση  $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$ . Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_l(h_1, h_2)} + g(h)u \quad (31)$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τη γραμμικοποίηση με ανάδραση, αρχικά ελέγχουμε τις συνθήκες Ελεγκσιμότητας και ενελικτικού συνόλου:

$$\mathcal{C} = [g \quad ad_{f_l}g] = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} & \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ 0 & -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \quad (32)$$

καθώς η αγκύλη *Lie* προκύπτει ως:

$$ad_{f_l}g = \nabla g f_l - \nabla f_l g = - \begin{bmatrix} -\theta_1\dot{\phi}(h_1) & 0 \\ \theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\theta_2\dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix}$$

με  $\dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2\sqrt{h_i}}$ .

Η συνθήκη ελεγκσιμότητας αφορά την γραμμική ανεξαρτησία του πίνακα της σχέσης 32. Ο πίνακας αυτός διαθέτει ορίζουσες:

$$\det(\mathcal{C}) = -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\dot{\phi}(h_1)$$

η οποία για  $K, \theta_1 \neq 0$  και από την ιδιότητα της συνάρτησης  $\dot{\phi} > 0$ , είναι  $\det(\mathcal{C}) \neq 0$ . Άρα η συνθήκη ελεγκσιμότητας επαληθεύεται τοπικά λόγω μη ορισμού της  $\dot{\phi}$  στο σημείο  $h = 0$ . Για το σύνολο να είναι ενελικτικό, εξετάζουμε τι συμβαίνει για την αγκύλη *Lie* των δύο διανυσματικών παιδίων  $g, ad_{f_l}g$ .

$$\begin{aligned} [g, ad_{f_l}g] &= \nabla g \cdot ad_{f_l}g - \nabla ad_{f_l}g \cdot g = \begin{bmatrix} -\frac{K}{A}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) & 0 \\ \frac{K}{A}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \\ [g, ad_{f_l}g] &= \begin{bmatrix} -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \\ \frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

με  $\ddot{\phi}(h_i) = -\frac{1}{4h_i\sqrt{h_i}}$ . Έτσι, το σύνολο της εξίσωσης 32 είναι ενελικτικό διότι:

$$\det \begin{pmatrix} [ad_{f_l}g \quad g, ad_{f_l}g] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \\ -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) & \frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

Για την επιλογή της πρώτης νέας μεταβλητής  $z_1$  πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\nabla z_1 g = 0 \quad (34)$$

$$\nabla z_1 \text{ad}_{f_1} g \neq 0 \quad (35)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, η Εξίσωση 34 δίνει την σχέση:

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_1} = 0$$

Έτσι, η Εξίσωση 35 δίνει τον περιορισμό

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_2} \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) \neq 0 \implies \frac{\partial z_1}{\partial h_2} \neq 0$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή  $z_1 = h_2$ . Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_1 = L_f z_1 = \nabla z_1 f(h_1, h_2) = \theta_1 \dot{\phi}(h_1) - \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \quad (36)$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή  $z_2 = L_f z_1$ . Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_2 = L_f z_2 = \nabla z_2 f(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} \theta_1 \dot{\phi}(h_1) & -\theta_2 \dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_1 \phi(h_1) + \frac{K}{A} u \\ \theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Για λόγους πληρότητας ορίζουμε και τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \phi^{-1}(\frac{1}{\theta_1}(z_2 + \theta_2 \phi(z_1))) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\dot{z}_2 = \alpha(h) + \beta(h)u$$

όπου

$$\alpha(h) = -\theta_2 \dot{\phi}(h_2)(\theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2)) - \theta_1^2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_1)$$

$$\beta(h) = \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1)$$

Μέσω της ιδιότητας  $\phi(h_i) \dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2}$  της συνάρτησης  $\sqrt{x}$ , προκύπτει ότι:

$$\alpha(h) = -\theta_1 \theta_2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}$$

$$\beta(h) = \frac{K}{A} \theta_1 \dot{\phi}(h_1)$$

Έτσι, ορίζουμε τον έλεγχο γραμμικοποίησης

$$u = \frac{1}{\beta(h)}(-\alpha(h) + v) \quad (39)$$

με  $v$  το σήμα ελέγχου του γραμμικοποιημένου συστήματος. Τότε, το μετασχηματισμένο σύστημα μετατρέπεται στο:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ v \end{bmatrix} \quad (40)$$

Ορίζουμε τον έλεγχο για παρακολούθηση τροχιάς:

$$v = \dot{z}_{2,d} - k_1(z_2 - z_{2,d}) - k_2(z_1 - z_{1,d}) \quad (41)$$

με  $z_{1,d}$  την επιθυμητή τροχιά του συστήματος ως προς  $z_1 = h_2$  και τη θετική σταθερά  $k$ . Σε περίπτωση επιλογής μίας σταθερής τιμής ως τροχιά χρησιμοποιείται η παράγωγος  $\dot{z}_{1,d} = 0$ .

Η δυναμική του σφάλματος διαθέτει χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^2 + k_1s + k_2 = 0$$

η οποία είναι ευσταθής για  $k_1, k_2 > 0$ . Έτσι, ο στόχος ελέγχου επιτυγχάνεται.

## Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τροποποίηση του παραπάνω ελεγκτή με χρήση προσαρμοστικού νόμου και της αλλαγής των μεταβλητών  $z_1, z_2$  από την Εξίσωση 36 με βάση την αρχή της Βεβαιότητας ως:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Η παράγωγος της μεταβλητής  $z_1$  προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{h}_2 = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) = \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \\ \dot{z}_1 &= z_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \end{aligned} \quad (43)$$

Όμοια, η παράγωγος της μεταβλητής  $z_2$  προκύπτει ως:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2)) \end{aligned}$$

Λόγω της άγνωστης παραμέτρου  $b$  ορίζουμε την εκτίμηση της με παραμετρικό σφάλμα  $\tilde{b} = b - \hat{b}$ . Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\dot{z}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + \hat{b}u + \tilde{b}u) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου:

$$u = \frac{1}{\hat{b}}(\hat{\theta}_1\phi(h_1) + \frac{1}{\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(v - \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2))))$$

Με αυτόν τον νόμο ελέγχου προκύπτει η παράγωγος του  $z_2$ :

$$\dot{z}_2 = v - \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\tilde{b}u \quad (44)$$

Με την επιλογή  $v = -k_1z_1 - k_2z_2 + k_r r$  και την ιδιότητα  $\phi(x)\dot{\phi}(x) = 0.5$ , η δυναμική παίρνει τη μορφή:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ k_r \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \phi(h_1) & -\phi(h_2) & 0 \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) & 0.5\hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Για λόγους σύμπτυξης των εξισώσεων ορίζουμε τα διανύσματα

$$H_1(h_1, h_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} \phi(h_1) \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) \end{bmatrix}$$

$$H_2(h_2, \hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} -\phi(h_2) \\ 0.5\hat{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$H_3(h_1, \hat{\theta}_1, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς του συστήματος ως

$$\dot{z}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} z_m + \begin{bmatrix} 0 \\ k_r \end{bmatrix} r = A_m z_m + B_m r \quad (46)$$

Ορίζουμε τη δυναμική του σφάλματος  $e = z - z_m$ , η οποία παίρνει μορφή

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} e + \tilde{\theta}_1 \begin{bmatrix} \phi(h_1) \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) \end{bmatrix} + \tilde{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\phi(h_2) \\ 0.5\hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Καθώς ο πίνακας  $A_m$  είναι *Hurwitz*, επαληθεύει την εξίσωση *Lyapunov*

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

Για την εύρεση των προσαρμοστικών νόμων ορίζεται η συνάρτηση *Lyapunov*:

$$V(e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{b}) = e^T P e + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{\gamma_3} \tilde{b}^2 \quad (48)$$

Η παράγωγος αυτής προκύπτει ως

$$\frac{dV}{dt} = -e^T Q e + 2\tilde{\theta}_1 H_1^T P e + 2\tilde{\theta}_2 H_2^T P e + 2\tilde{b} H_3^T P e - \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3} \tilde{b} \dot{\tilde{b}}$$

Με την επιλογή

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = Pr(\hat{\theta}_1, \gamma_1 H_1^T P e) \quad (49)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = Pr(\hat{\theta}_2, \gamma_2 H_2^T P e) \quad (50)$$

$$\dot{\tilde{b}} = Pr(\hat{b}, \gamma_3 H_3^T P e) \quad (51)$$

Η χρήση της προβολής γίνεται για να βεβαιωνούμε ότι η τιμή των  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{b}$  δε θα περάσει από την τιμή 0. Επιπλέον, θεωρούμε γνωστό το θετικό τους πρόσημο.

Η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* γίνεται

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^T Q e \leq 0$$

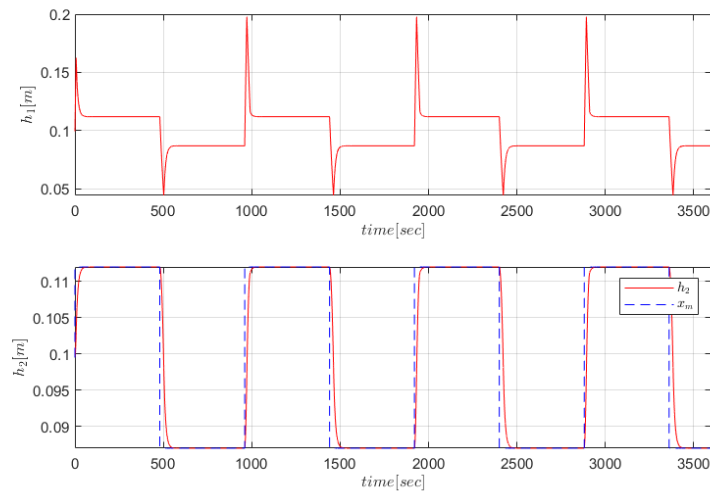
και ο στόχος παρακολούθησης του μοντέλου αναφοράς επιτυγχάνεται.

## Προσομοίωση Ελεγκτών

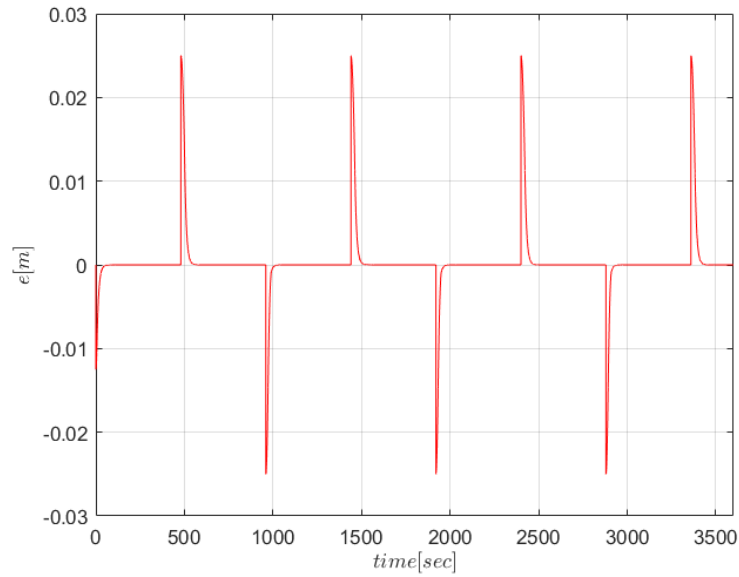
### Προσομοίωση Ελεγκτή Feedback Linearization

Ο παρών ελεγκτής προσομοιώθηκε με διάφορες τιμές στα κέρδη του έτσι ώστε να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ως κέρδη είναι τα  $K_1 = 1$  και  $K_2 = 10$ . Αυτή η επιλογή είναι με βάση το γεγονός πως χρειαζόμαστε τον ρυθμό μεταβολής της στάθμης να αυξάνεται γρηγορότερα, έτσι ώστε η στάθμη να γεμίζει με φυσική ροή χωρίς να υπερχειλίζει η στάθμη 1. Έτσι, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα. Θα εκτελέσουμε προσομοιώσεις με τα προαναφερθέντα σήματα, τα οποία εφαρμόστηκαν και στους προηγούμενους δύο ελεγκτές.

Επομένως, θα εφαρμόσουμε πρώτα τον τετραγωνικό παλμό στο σύστημα. Παρατηρούμε στο σχήμα 19 πως το σύστημα προσομοιώνει σωστά το σήμα αναφοράς. Επιπλέον, στο σχήμα 20 βλέπουμε και το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς. Παρατηρούμε πως προκύπτει ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν.

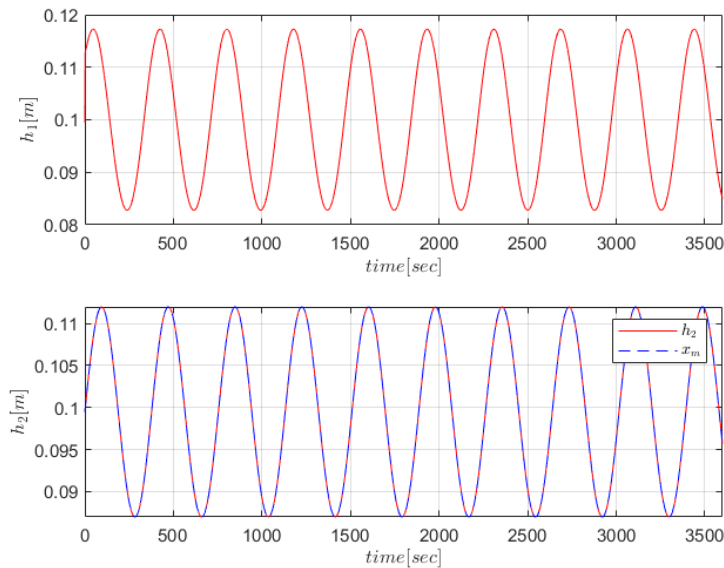


Σχήμα 19: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

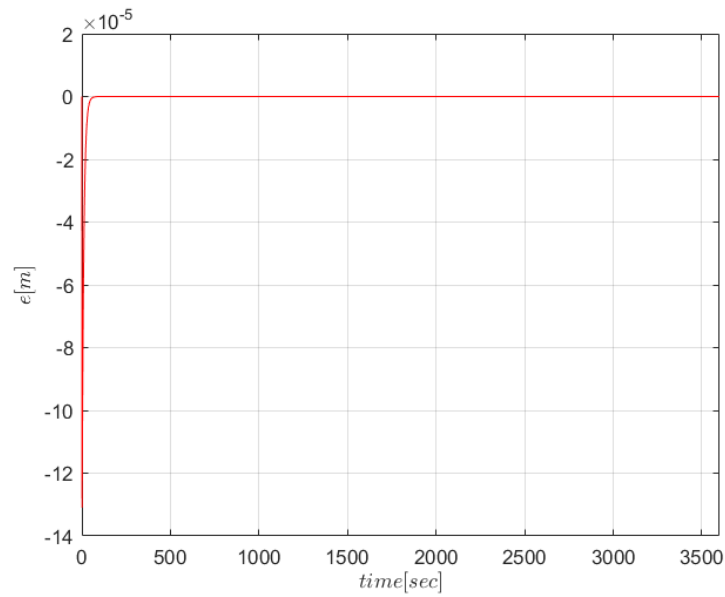


Σχήμα 20: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Το δεύτερο σήμα που θα εφαρμόσουμε είναι ένας απλός ημιτονοειδής παλμός. Στο σχήμα 21 βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 22).

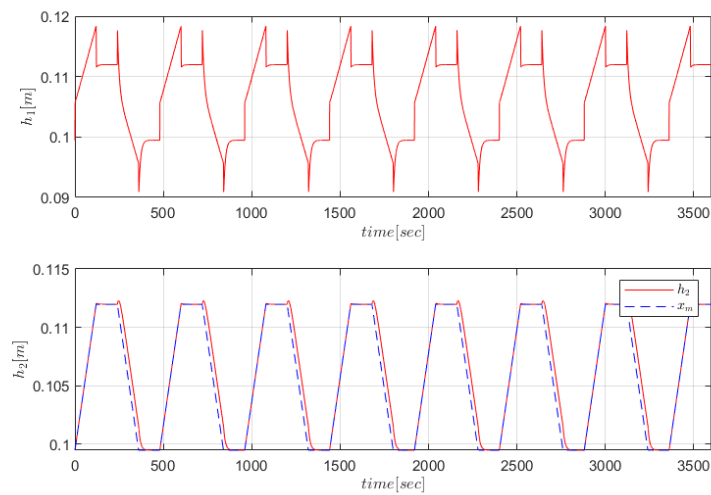


Σχήμα 21: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



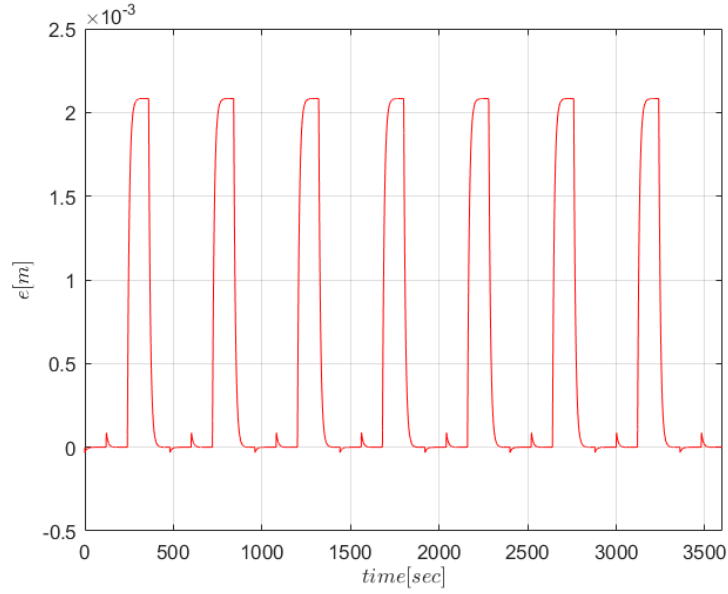
Σχήμα 22: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, το τρίτο σήμα που εφαρμόστηκε είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στο σχήμα 23 βλέπουμε την απόκριση των στάθμων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 24).



Σχήμα 23: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



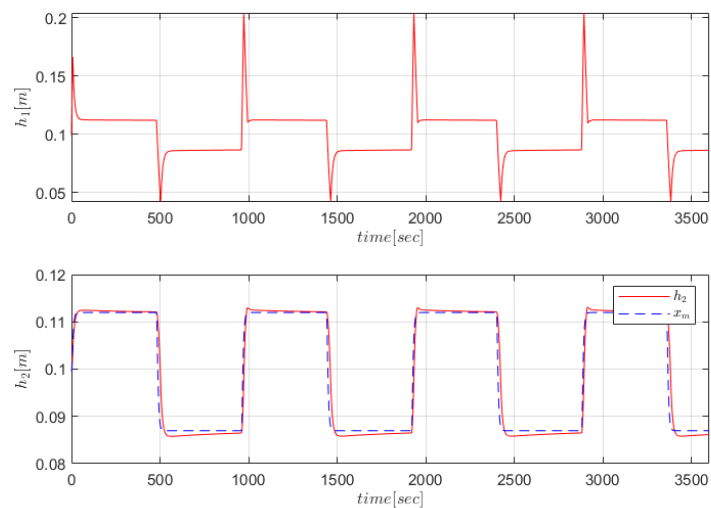


Σχήμα 24: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

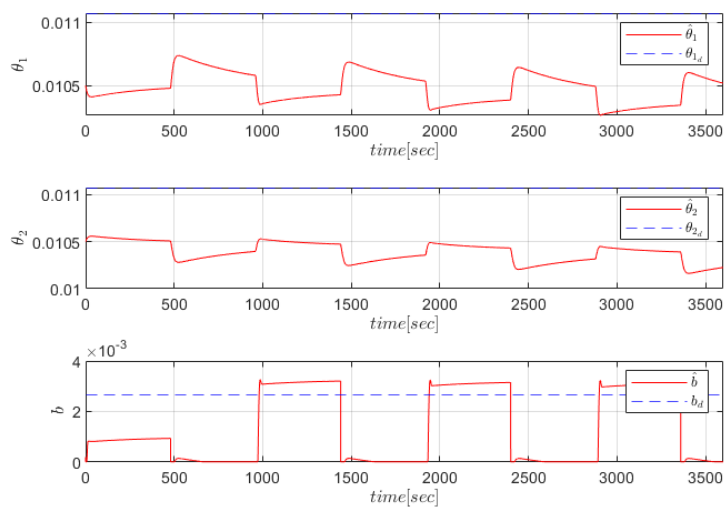
### Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Feedback Linearization

Με την προσομοίωση και επαλήθευση του απλού *feedback Linearization* μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχεδίαση του ελεγκτή, θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος. Δηλαδή, δε γνωρίζουμε τα  $\theta_i$  αλλά ούτε και το  $b$ . Έτσι, επεκτάθηκε η προσομοίωση με την πρόσθεση προσαρμοστικών νόμων. Κατά την προσομοίωση διαπιστώθηκε πως τα κέρδη του γραμμικού ελεγκτή παρέμειναν ίδια με την απλή εκδοχή του συστήματος. Οι ρυθμοί προσαρμογής που επιλέχθηκαν είναι οι  $\gamma_1 = 0.00035$ ,  $\gamma_2 = 0.00025$  και  $\gamma_3 = 0.0055$ . Με αυτές τις τιμές το σύστημα παρακολούθησε το μοντέλο αναφοράς που του τέθηκε.

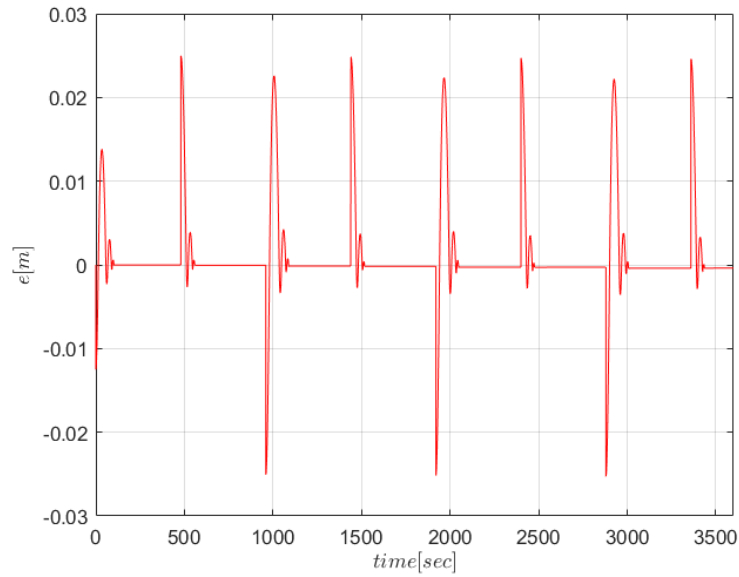
Κατά την εφαρμογή του πρώτου σήματος, διαπιστώθηκε πως το σύστημα παρακολουθεί ασυμπτωτικά το μοντέλο αναφοράς (βλ. σχήμα 25) με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης του μοντέλου να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 27. Τέλος, βλέπουμε στο σχήμα 26 την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος.



Σχήμα 25: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

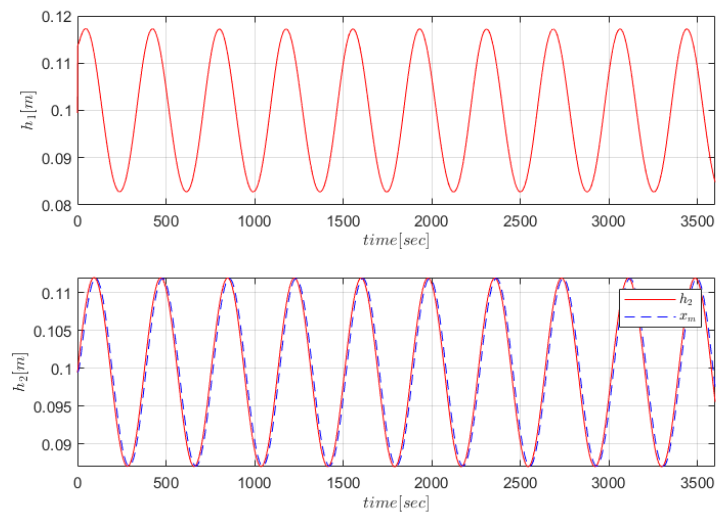


Σχήμα 26: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

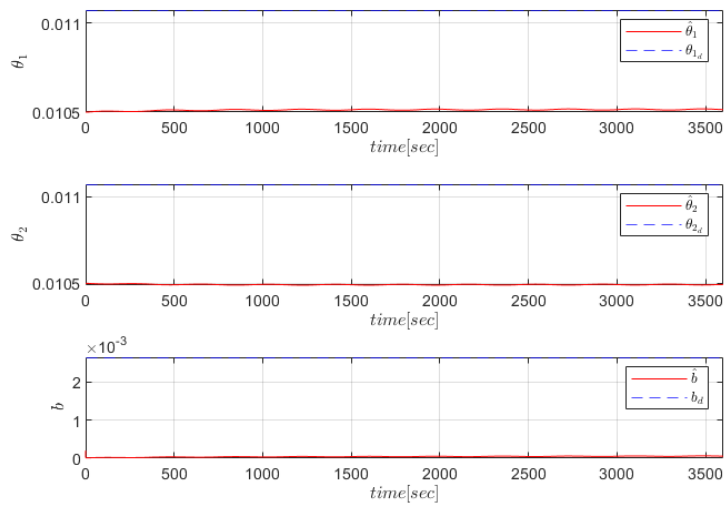


Σχήμα 27: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

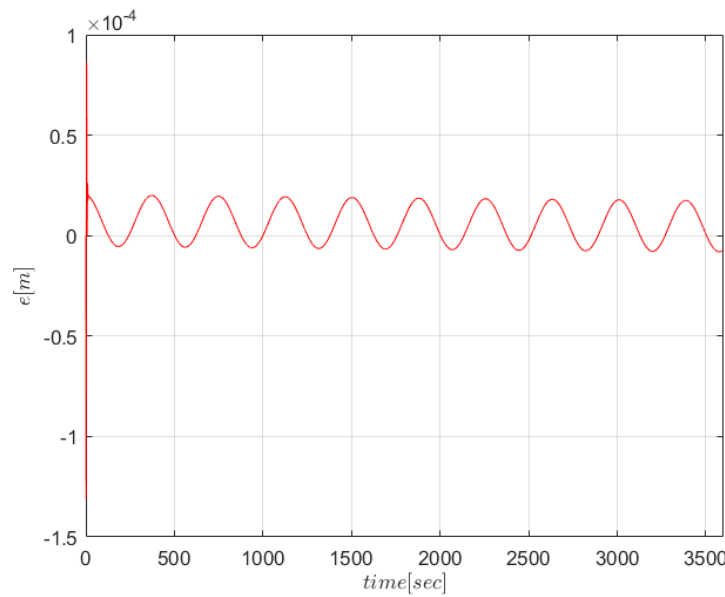
Με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, διαπιστώνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα με προηγούμενως. Δηλαδή έχουμε ξανά ασυμπτωτική παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς (βλ. σχήμα 28). Στο σχήμα 29 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Παρατηρούμε πως υπάρχει μια μικρή αύξηση των τιμών ωστόσο λόγω της ταχύτητας σύγκλισης δεν αυξάνεται ώστε να προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή. Τέλος, στο σχήμα 29 παρατηρούμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 28: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

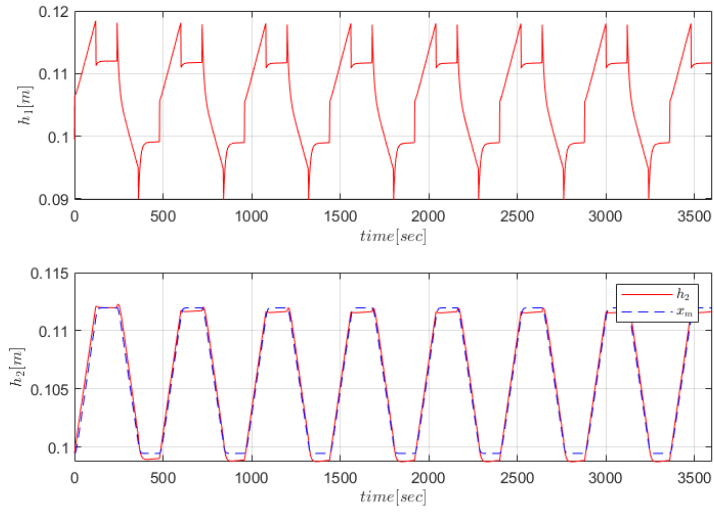


Σχήμα 29: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

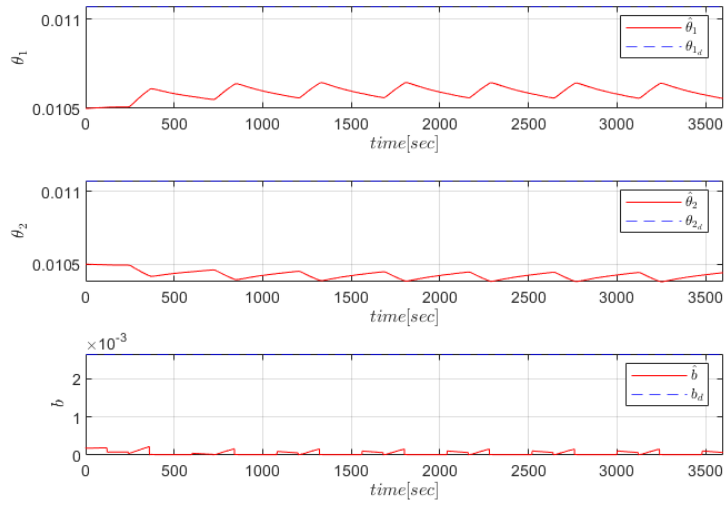


Σχήμα 30: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

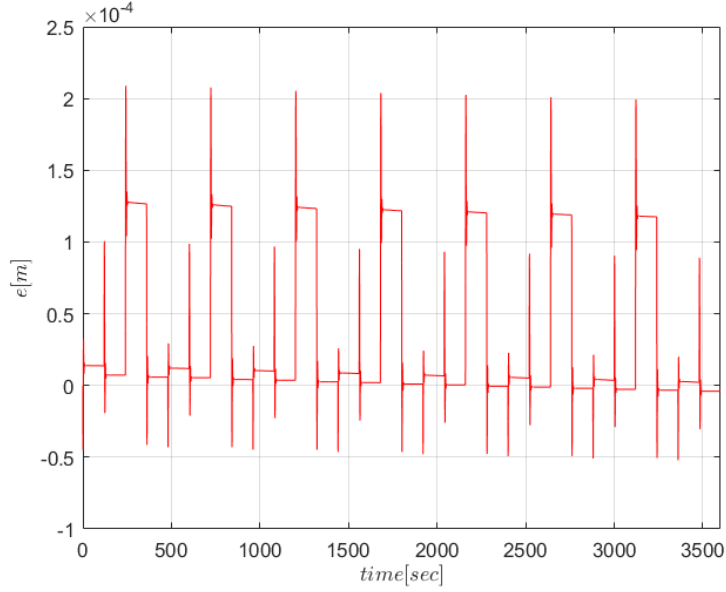
Τέλος, έγινε η εφαρμογή του τρίτου σήματος αναφοράς που είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στο σχήμα 31 βλέπουμε πως αποκρίνεται το σύστημα. Διαπιστώνουμε πως παρακολουθεί το σήμα αναφοράς ασυμπτωτικά, με αποτέλεσμα να γίνει σωστή παρακολούθηση. Έτσι το σφάλμα τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 33. Τέλος, στο σχήμα 32 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές είναι κοντά στις ιδανικές με αποτέλεσμα το πραγματικό σύστημα να την τροχιά που του τέθηκε.



Σχήμα 31: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 32: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 33: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε πως και οι δύο μορφές ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη, με καλύτερα αποτελέσματα να έχει ο προσαρμοστικός έλεγχος.

## Έλεγχος Backstepping

Για τον έλεγχο με τη διαδικασία *Backstepping* χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης 1

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου ενώ στη συνέχεια θα βρεθεί η προσαρμοστική εκδοχή αυτού. Ορίζουμε τις συναρτήσεις  $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$  και  $\theta = \frac{\alpha}{A}\sqrt{2g}$ . Για λόγους αβεβαιότητας ορίζουμε δύο διαφορικά  $\theta$ , αντίστοιχα με κάθε διατομή  $a$ . Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση  $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$ . Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_1(h_1, h_2)} + g(h)u$$

## Σχεδίαση Ελεγκτή Backstepping

Έστω το σημείο αναφοράς του συστήματος  $(h_{1,d}, h_{2,d})$ . Ορίζουμε το σύστημα σφάλματος ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 - \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_2 - \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_1(h_1, h_2)} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Σε πρώτο βήμα ορίζουμε την εικονική είσοδο ελέγχου  $h_1$  και την νέα μεταβλητή κατάστασης  $\xi_1 = e_2 = h_2 - h_{2,d}$ . Για τα παραπάνω, η δεύτερη εξίσωση της 52 γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = \dot{e}_2 = \theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση  $\phi^{-1}(x) = x^2$ . Με βάση αυτή, επιλέγουμε τον έλεγχο

$$h_1 = \phi^{-1}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1} + \dot{h}_{2,d} - k(h_2 - h_{2,d})\right)$$

ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση της δυναμικής του  $\xi_1$  σε:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1$$

η οποία είναι ευσταθής για  $k > 0$ .

Με προσθαφαίρεση του  $k\xi_1$  στη δεύτερη εξίσωση της 52 έχουμε την πραγματική δυναμική του σφάλματος:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k\xi_1 + \theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \quad (53)$$

Σε δεύτερο βήμα χρησιμοποιούμε την είσοδο ελέγχου  $u$  και την νέα μεταβλητή κατάσταση  $\xi_2 = k\xi_1 + \theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$ . Για τα παραπάνω, η εξίσωση της 53 γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \xi_2 \quad (54)$$

Παραγωγίζοντας την κατάσταση  $\xi_2$  προκύπτει η δυναμική της ως:

$$\dot{\xi}_2 = k\dot{\xi}_1 + \theta_1 \dot{\phi}(h_1) \dot{h}_1 - \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \dot{h}_2 - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) + \theta_1 \dot{\phi}(h_1)(-\theta_1 \phi(h_1) + bu) - \theta_2 \dot{\phi}(h_2)(\theta_1 \phi(h_1) - \theta_2 \phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}) - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1 \dot{\phi}(h_1) bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1 \theta_2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_2) + \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1 \dot{\phi}(h_1) bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1 \theta_2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_2) + \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d} \quad (55)$$

Επιλέγουμε τον έλεγχο:

$$u = \frac{1}{b\theta_1 \dot{\phi}(h_1)} \left( k^2 \xi_1 - k_2 \xi_2 + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{2} + \theta_1 \theta_2 \phi(h_1) \dot{\phi}(h_2) - \theta_2 \dot{\phi}(h_2) \dot{h}_{2,d} + \ddot{h}_{2,d} \right) \quad (56)$$

με  $k_2 > k > 0$ . Τότε, η εξίσωση 52 γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 1 \\ 0 & -(k_2 - k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

η οποία είναι μία ευσταθής δυναμική καθώς  $k_2 > k > 0$ . Έτσι, το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές με μοναδικό σημείο ισορροπίας το  $\xi = (0, 0)$ , το οποίο είναι αντίστοιχο με το σημείο ισορροπίας  $e = (0, 0)$  της εξίσωσης 52.

## Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Backstepping

Για την προσαρμοστική τροποποίηση του ελεγκτή *Backstepping* χρησιμοποιούμε και πάλι την δυναμική του σφάλματος η οποία δίνεται από την Εξίσωση 52. Όμοια με την παραπάνω προσέγγιση επιλέγουμε  $\xi_1 = e_2$  και με προσαφαίρεση των  $\xi_2$  και της εκτίμησης της παραμέτρου  $\theta_1, \theta_2$  προκύπτει

$$\dot{\xi}_1 = \dot{e}_2 = (\theta_1 \pm \hat{\theta}_1)\phi(h_1) - (\theta_2 \pm \hat{\theta}_2)\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \pm k\xi_1$$

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)$$

με  $k > 0$  και

$$\alpha_1(\xi_1, h_1, h_2, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\xi_1 - \dot{h}_{2,d} + \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2)$$

Με την επιλογή  $\xi_2 = \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , ορίζοντας τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$  η δυναμική της μεταβλητής  $\xi_1$  παίρνει την μορφή

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \quad (58)$$

Για την δυναμική του  $\xi_2$  παίρνουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $\alpha_1$  ως

$$\dot{\xi}_2 = \frac{d\alpha_1}{dt} = k\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2$$

$$\dot{\xi}_2 = k\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Με τη χρήση της σχέσης  $\theta_i = \tilde{\theta}_i + \hat{\theta}_i$  προκύπτει η δυναμική

$$\dot{\xi}_2 = \alpha_2 + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\hat{b}u + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \tilde{b}\beta_3 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) \quad (59)$$

με

$$\alpha_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ddot{h}_{2,d}) = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \ddot{h}_{2,d} + \frac{\dot{\hat{\theta}}_2^2 - \dot{\hat{\theta}}_1^2}{2} - \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_1(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\phi(h_1) - \frac{\hat{\theta}_1}{2} - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -k\phi(h_2) + \frac{\hat{\theta}_2}{2}$$

$$\beta_3(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, u) = \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)u$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση *Lyapunov*

$$V(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}^2) \quad (60)$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει παράγωγο :

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}\dot{\hat{b}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1(-k\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2 - \frac{1}{\gamma_3}\tilde{b}\dot{\hat{b}}$$



$$+\xi_2(\alpha_2 + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\hat{b}u + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \tilde{b}\beta_3 + \dot{\theta}_1\phi(h_1) - \dot{\theta}_2\phi(h_2))$$

Ομαδοποιώντας κατάλληλα τα παραμετρικά σφάλματα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -k\xi_1^2 + (\xi_1 + \alpha_2 + \dot{\theta}_1\phi(h_1) - \dot{\theta}_2\phi(h_2))\xi_2 + \xi_2\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\hat{b}u \\ & + \tilde{\theta}_1(\xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1 - \frac{\dot{\theta}_1}{\gamma_1}) + \tilde{\theta}_2(-\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2 - \frac{\dot{\theta}_2}{\gamma_2}) + \tilde{b}(\xi_2\beta_3 - \frac{\dot{b}}{\gamma_3}) \end{aligned}$$

Με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων

$$\dot{\theta}_1 = \gamma_1(\xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1) \quad (61)$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2(-\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2) \quad (62)$$

$$\dot{b} = \gamma_3\xi_2\beta_3 \quad (63)$$

και τον νόμο ελέγχου

$$u = \frac{1}{b\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(-\xi_1 - \alpha_2 - \dot{\theta}_1\phi(h_1) + \dot{\theta}_2\phi(h_2) - k_2\xi_2) \quad (64)$$

η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* γίνεται

$$\frac{dV}{dt} = -k\xi_1^2 - k_2\xi_2^2 \quad (65)$$

η οποία είναι αρνητικά ημιορισμένη

## Τροποποίηση Ελεγκτών

Λόγω του προβλήματος του περιορισμένου χώρου κατάστασης του συστήματος από τα όρια 0 και  $h_{max}$ , δημιουργείται σε όλες τις μεθοδολογίες ένα όριο για την αρχική τιμή της συνάρτησης *Lyapunov*. (Να πω για σφάλμα)

Για να παρουσιαστεί αυτό ορίζουμε το συμπαγές σύνολο  $\mathcal{D} = [0, h_{max}] \times [0, h_{max}]$ . Το σύνολο αυτό αποτελεί τον χώρο τον οποίο μπορούν οι καταστάσεις  $h_1, h_2$  να βρεθούν. Για την ανάλυση θα μελετηθεί το σύστημα σε δύο τμήματα, στη δυναμική του  $h_1$  και στη δυναμική του  $h_2$ . Για τη δυναμική του  $h_1$ , μπορούμε να δούμε ότι για αρχικές συνθήκες  $h_{1,0}$  και  $h_{2,0}$ , η μέγιστη τιμή όπου παίρνει το  $h_1$  για  $u = 0$  είναι η τιμή  $h_{1,0}$ . Για τη δυναμική του  $h_2$ , η μέγιστη τιμή δίνεται για την περίπτωση όπου  $\dot{h}_2 = 0$  ή για την αρχική τιμή του  $h_2$ . Πιο αναλυτικά, η μέγιστη τιμή του  $h_2$  συναντάται τη χρονική στιγμή  $t_{max} > 0$  και για αυτήν ισχύει ότι:

$$\theta_1\sqrt{h_1(t_{max})} = \theta_2\sqrt{h_2^{max}} \implies h_2^{max} = \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}h_1(t_{max}) \leq \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}h_{1,0}$$

Για να εγγυηθούμε την παραμονή του συστήματος στο σύνολο  $\mathcal{D}$ , πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}h_{1,0} \leq h_{max}$$

Στην περίπτωση όπου  $\frac{\theta_1}{\theta_2} \leq 1$ , η παραπάνω σχέση ισχύει καθώς  $h_{1,0} \leq h_{max}$ . Στην περίπτωση όπου  $\frac{\theta_1}{\theta_2} > 1$ , η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται αναγκαστικά. Όμως, υπάρχει

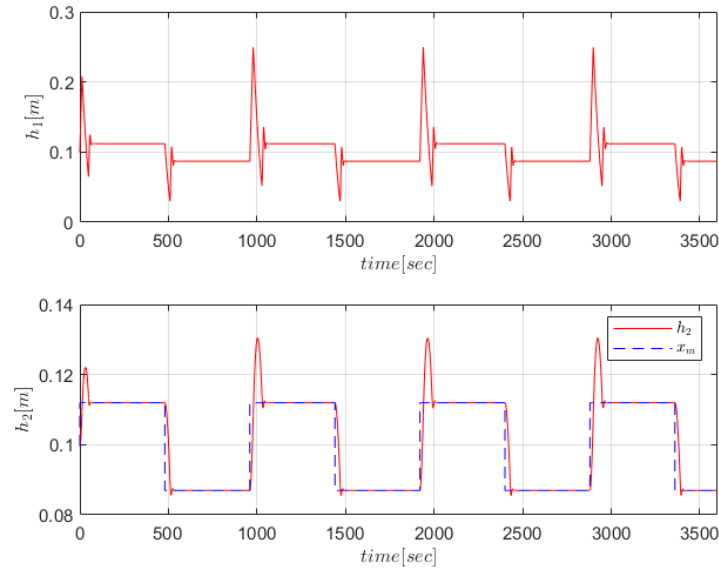
κάποιο  $h_{1,0}^*$  το οποίο μπορεί να ικανοποιήσει την παραπάνω σχέση για οποιοδήποτε λόγο  $\frac{\theta_1}{\theta_2} > 1$ . Η ύπαρξη αυτής της αρχικής συνθήκης μπορεί να επιτρέψει την απενεργοποίηση του νόμου ελέγχου για στάθμη  $h_1 = \delta \leq h_{1,0}^*$ . Με την απενεργοποίηση του ελέγχου σε αυτήν την περιοχή, μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το σύστημα δε θα υπερβεί τα φυσικά όρια του συστήματος, κρατώντας το σφάλμα παρακολούθησης εντός των επιτρεπτών ορίων.

## Προσομοίωση Ελεγκτών

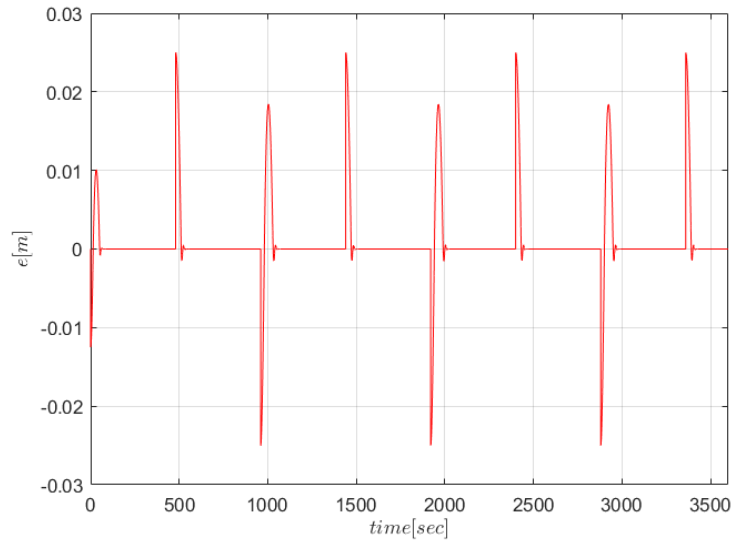
### Προσομοίωση Ελεγκτή Backstepping

Ο παρών ελεγκτής προσομοιώθηκε με διάφορες τιμές στα κέρδη του έτσι ώστε να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν ως κέρδη είναι τα  $K_1 = 1$  και  $K_2 = 10$ . Αυτή η επιλογή είναι με βάση το γεγονός πως χρειαζόμαστε τον ρυθμό μεταβολής της στάθμης να αυξάνεται γρηγορότερα, έτσι ώστε η στάθμη να γεμίζει με φυσική ροή χωρίς να υπερχειλίζει η στάθμη 1. Έτσι, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα. Θα εκτελέσουμε προσομοιώσεις με τα προαναφερθέντα σήματα, τα οποία εφαρμόστηκαν και στους προηγούμενους δύο ελεγκτές.

Επομένως, θα εφαρμόσουμε πρώτα τον τετραγωνικό παλμό στο σύστημα. Παρατηρούμε στο σχήμα 34 πως το σύστημα προσομοιώνει σωστά το σήμα αναφοράς. Επιπλέον, στο σχήμα 35 βλέπουμε και το σφάλμα παρακολούθησης της τροχιάς. Παρατηρούμε πως προκύπτει ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν.

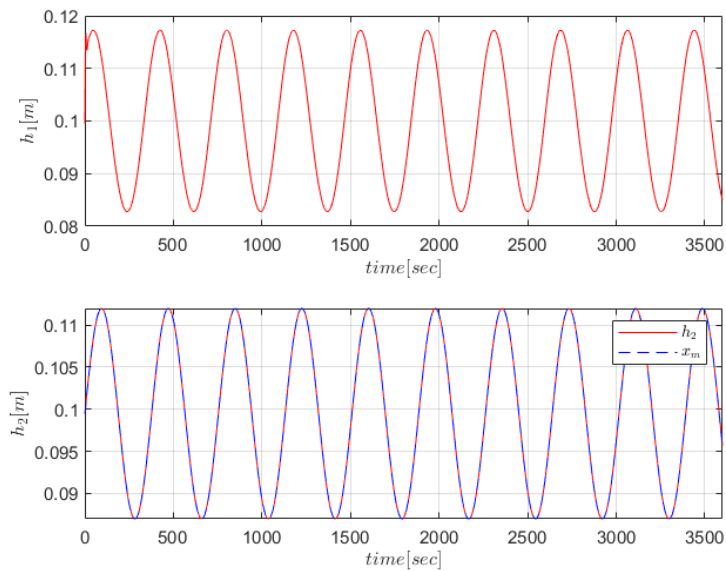


Σχήμα 34: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

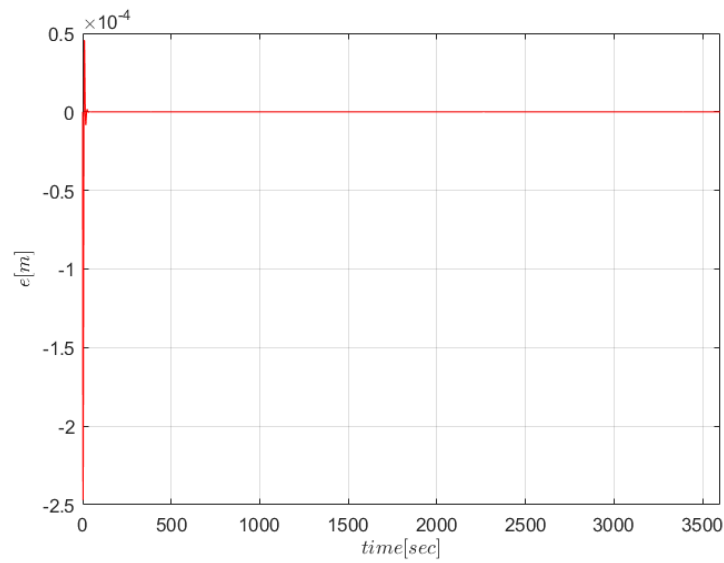


Σχήμα 35: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

Το δεύτερο σήμα που θα εφαρμόσουμε είναι ένας απλός ημιτονοειδής παλμός. Στο σχήμα 36 βλέπουμε την απόκριση των στάθμειων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 37).

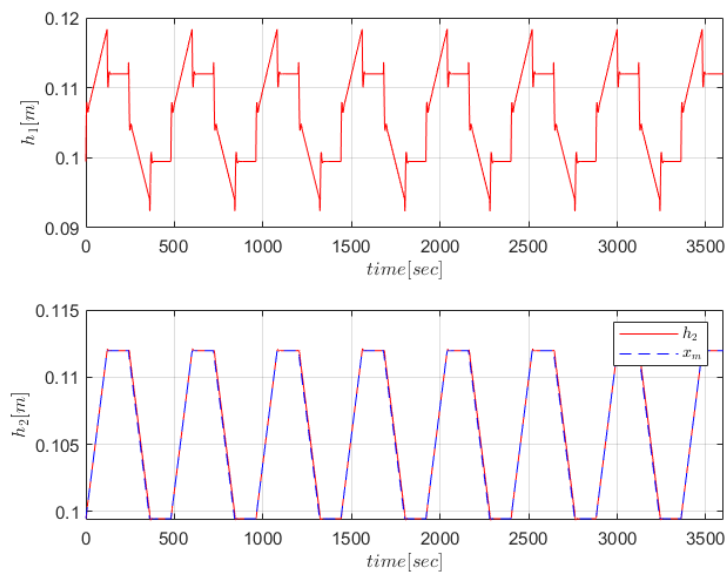


Σχήμα 36: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

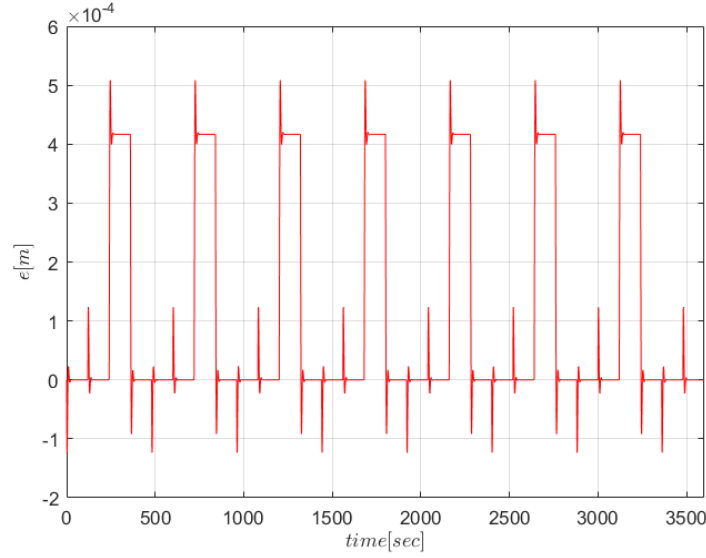


Σχήμα 37: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, το τρίτο σήμα που εφαρμόστηκε είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στο σχήμα 38 βλέπουμε την απόκριση των στάθμεων του συστήματος. Παρατηρούμε πως η δεξαμενή 2 ακολουθεί σωστά την τροχιά που εφαρμόστηκε από το σήμα ελέγχου, με αποτέλεσμα να έχουμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν (βλ. σχήμα 39).



Σχήμα 38: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

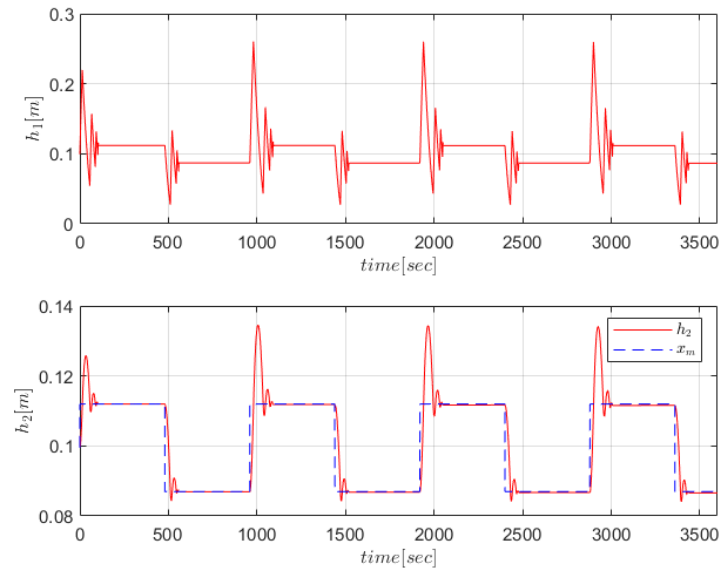


Σχήμα 39: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

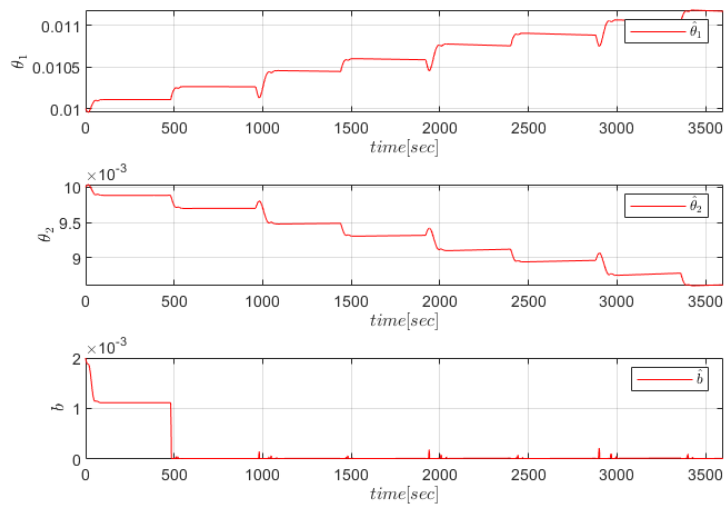
### Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Backstepping

Με την προσομοίωση και επαλήθευση του απλού *Backstepping* μπορούμε να επεκτείνουμε τη σχεδίαση του ελεγκτή, θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους του συστήματος. Δηλαδή, δε γνωρίζουμε τα  $\theta_i$  αλλά ούτε και το  $b$ . Έτσι, επεκτάθηκε η προσομοίωση με την πρόσθεση προσαρμοστικών νόμων. Κατά την προσομοίωση διαπιστώθηκε πως τα κέρδη του γραμμικού ελεγκτή παρέμειναν ίδια με την απλή εκδοχή του συστήματος. Οι ρυθμοί προσαρμογής που επιλέχθηκαν είναι οι  $\gamma_1 = 0.00035$ ,  $\gamma_2 = 0.00025$  και  $\gamma_3 = 0.0055$ . Με αυτές τις τιμές το σύστημα παρακολούθησε το μοντέλο αναφοράς που του τέθηκε.

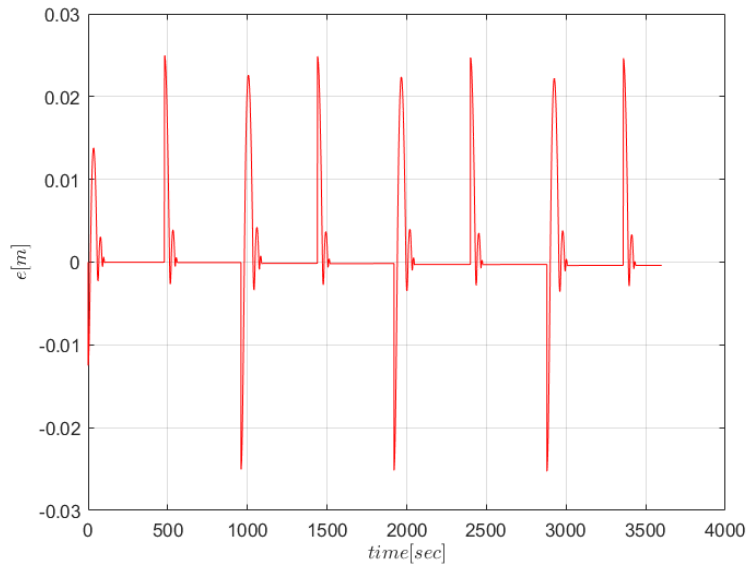
Κατά την εφαρμογή του πρώτου σήματος, διαπιστώθηκε πως το σύστημα παρακολουθεί ασυμπτωτικά το μοντέλο αναφοράς (βλ. σχήμα 40) με αποτέλεσμα το σφάλμα παρακολούθησης του μοντέλου να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 42. Τέλος, βλέπουμε στο σχήμα 41 την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος.



Σχήμα 40: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

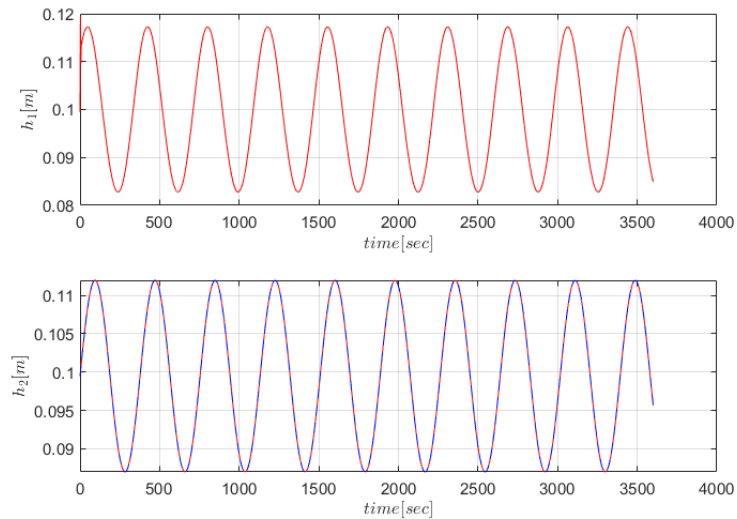


Σχήμα 41: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

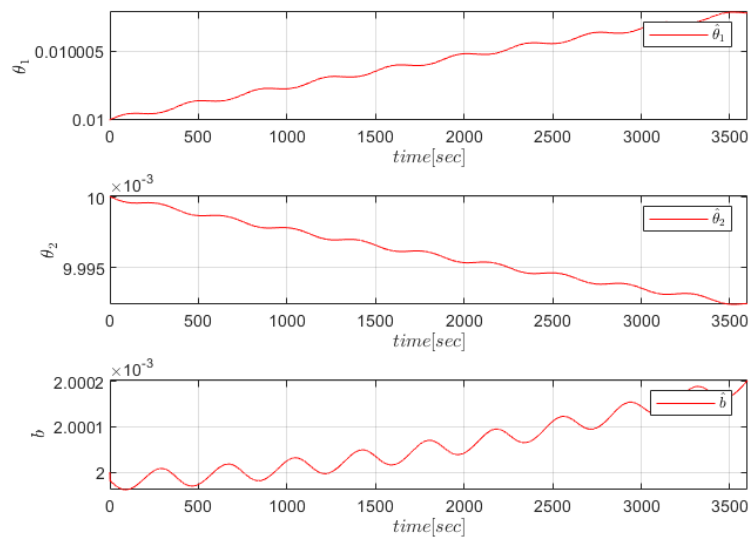


Σχήμα 42: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τετραγωνικό παλμό.

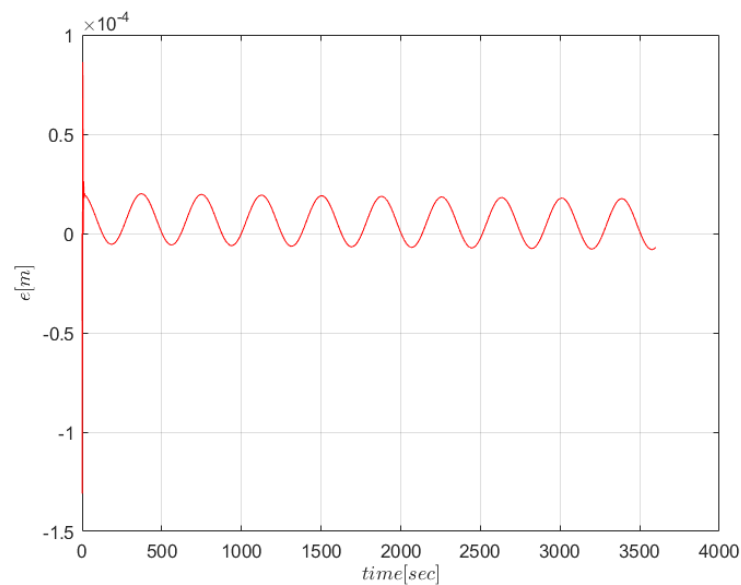
Με την εφαρμογή του δεύτερου σήματος αναφοράς, διαπιστώνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα με προηγούμενως. Δηλαδή έχουμε ξανά ασυμπτωτική παρακολούθηση του μοντέλου αναφοράς (βλ. σχήμα 43). Στο σχήμα 44 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Παρατηρούμε πως υπάρχει μια μικρή αύξηση των τιμών ωστόσο λόγω της ταχύτητας σύγκλισης δεν αυξάνεται ώστε να προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή. Τέλος, στο σχήμα 44 παρατηρούμε το σφάλμα παρακολούθησης να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.



Σχήμα 43: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



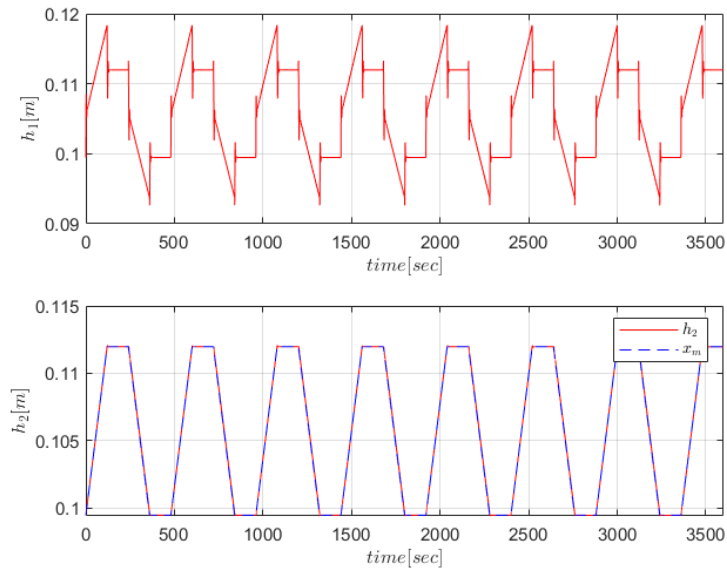
Σχήμα 44: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.



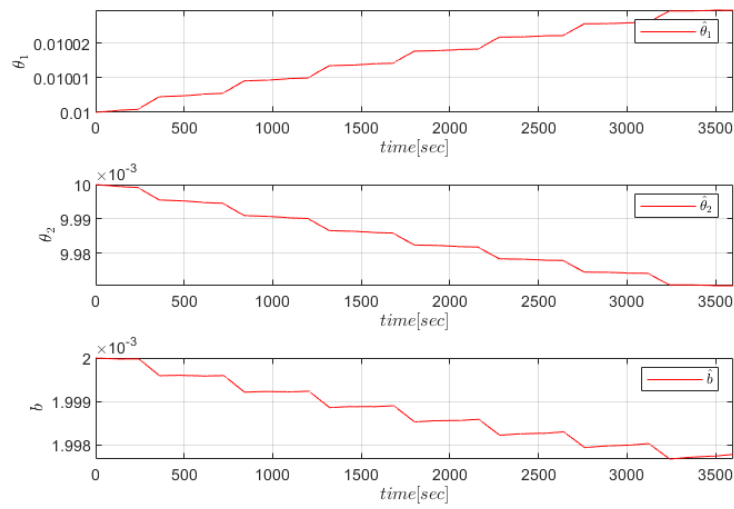
Σχήμα 45: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς ημιτονοειδή παλμό.

Τέλος, έγινε η εφαρμογή του τρίτου σήματος αναφοράς που είναι ένας τραπεζοειδής παλμός. Στο σχήμα 46 βλέπουμε πως αποκρίνεται το σύστημα. Διαπιστώνουμε πως παρακολουθεί το σήμα αναφοράς ασυμπτωτικά, με αποτέλεσμα να γίνει σωστή παρακολούθηση. Έτσι το σφάλμα τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα 48. Τέλος, στο σχήμα 47 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι τιμές είναι κοντά στις ιδανικές με αποτέλεσμα το πραγματικό σύστημα να την τροχιά που του τέθηκε.

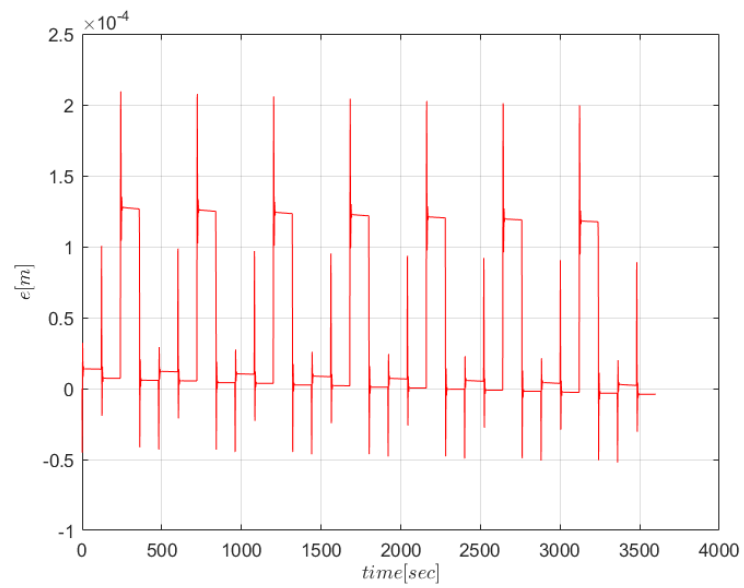




Σχήμα 46: Απόκριση συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 47: Εκτίμηση παραμέτρων συστήματος δεξαμενών με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.



Σχήμα 48: Σφάλμα παρακολούθησης 2ης στάθμης δεξαμενής συστήματος με σήμα αναφοράς τραπεζοειδή παλμό.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε πως και οι δύο μορφές ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη, με καλύτερα αποτελέσματα να έχει ο προσαρμοστικός έλεγχος.

## Πειράματα και Αποτελέσματα

Εφαρμογή MIT Rule στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή MRAC στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή Feedback Linearization στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή Backstepping στο Σύστημα Δεξαμενών

# Επίλογος

Σύνοψη Εργασίας

Μελλοντικές Επεκτάσεις

# Κώδικας Προσομοίωσης Συστήματος Δεξαμενών

# Κώδικας Arduino Συστήματος Δεξαμενών

# Βιβλιογραφία

- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] K. Astrom and A.-B. Ostberg. “A teaching laboratory for process control”. In: *IEEE Control Systems Magazine* 6.5 (1986), pp. 37–42. DOI: 10.1109/MCS.1986.1105142.
- [4] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [5] Juri Belikov and Eduard Petlenkov. “Model based control of a water tank system”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014). 19th IFAC World Congress, pp. 10838–10843. ISSN: 1474-6670. DOI: <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.00695>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016433379>.
- [6] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [7] Frank Ferrese et al. “Decentralized control of coupled nonlinear dynamic systems with application to quadruple-tank process”. In: *IECON 2014 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. 2014, pp. 3657–3661. DOI: 10.1109/IECON.2014.7049043.
- [8] Y. Fu et al. “Dual-Rate Adaptive Decoupling Controller and Its Application to a Dual-Tank Water System”. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 28.6 (2020), pp. 2515–2522. DOI: 10.1109/TCST.2019.2930044.
- [9] Bhagyashri Gurjar, Vinita Chaudhari, and Shailaja Kurode. “Parameter estimation based robust liquid level control of quadruple tank system — Second order sliding mode approach”. In: *Journal of Process Control* 104 (2021), pp. 1–10. ISSN: 0959-1524. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.05.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152421000780>.
- [10] Mohammed M’Saad & Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [11] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.

- [12] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- [13] Iasson Karafyllis, Filippos Vokos, and Miroslav Krstic. “Output-feedback control of viscous liquid–tank system and its numerical approximation”. In: *Automatica* 149 (2023), p. 110827. ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110827>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109822006938>.
- [14] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [15] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [16] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [17] Anca Maxim, Clara Ionescu, and Robin De Keyser. “Modelling and identification of a coupled sextuple water tank system”. In: *2016 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*. 2016, pp. 1–6. DOI: 10.1109/AQTR.2016.7501360.
- [18] Xiangxiang Meng et al. “Liquid Level Control of Four-Tank System Based on Active Disturbance Rejection Technology”. In: *Measurement* 175 (2021), p. 109146. ISSN: 0263-2241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109146>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026322412100169X>.
- [19] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley & Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [20] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.
- [21] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [22] Rim Rammal et al. “Nonlinear three-tank system fault detection and isolation using differential flatness”. In: *IFAC Journal of Systems and Control* 21 (2022), p. 100197. ISSN: 2468-6018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2022.100197>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468601822000086>.
- [23] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [24] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.
- [25] Zegao Yin et al. “Hydrodynamic and aeration characteristics of an aerator of a surging water tank with a vertical baffle under a horizontal sinusoidal motion”. In: *Ocean Engineering* 278 (2023), p. 114396. ISSN: 0029-8018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114396>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801823007801>.