National Technical University of Athens

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Συστήματα Αυτοματισμού
Κατεύθυνση Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

Ομαδική Εργασία

Έλεγχος Συστήματος Πολλαπλών Δεξαμενών

Γεώργιος Κασσαβετάκης - 02121203
Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208
Λάμπης Παπακώστας - 02121211

Διδάσκων: Μπεχλιούλης Χαράλαμπος

23 Ιανουαρίου 2024

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Εισαγωγή

Στόχοι Εργασίας

Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η κατασκευή και ο έλεγχος μιας διάταξης δεξαμενών νερού. Η διάταξη μοντελοποιήθηκε και κατασκευάστηκε σύμφωνα με το [3]. Αναλυτικότερα, γίνεται έλεγχος της αντλίας νερού, η οποία θα εκρέει στην πρώτη δεξαμενή που βρίσκεται πάνω από τη δεύτερη. Εν συνεχεία, το ρευστό εκρέει από τη δεξαμενή 1 στη δεξαμενή 2 με φυσικό τρόπο. Με λίγα λόγια γίνεται έλεγχος της στάθμης της δεύτερης δεξαμενής. Τέλος, το ρευστό θα εκρέει από τη δεξαμενή 2 στην πισίνα που βρίσκεται κάτω από τις δεξαμενές. Έτσι, η αντλία θα ανακυκλώνει το νερό στις δεξαμενές, μέσω κατάλληλων εντολών.

Κατασκευή Διάταξης

Δομή Εργασίας

Η παρούσα εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αφορά την εισαγωγή του θέματος, στο οποίο παρουσιάζονται οι στόχοι της εργασίας, δηλαδή τον σκοπό του θέματος προς μελέτη, το κατασκευαστικό κομμάτι που αφορά την κατασκευή της διάταξης και των υλικών που χρησιμοποιήθηκαν και τέλος, τη δομή που έχει η εργασία αυτή.

Το δεύτερο κεφάλαιο εμπεριέχει τη μοντελοποίηση του συστήματος δεξαμενών. Συγκεκριμένα, παράγεται το αρχικό μη γραμμικό μοντέλο των δεξαμενών και έπειτα αυτό γραμμικοποιείται κατάλληλα γύρω από το σημείο ισορροπίας για την εφαρμογή των ελεγκτών.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά τη σχεδίαση του συστήματος ελέγχου που θα δίνει τις κατάλληλες εντολές στην αντλία για να γίνεται ο έλεγχος των στάθμεων.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά τα πειράματα και τα αποτελέσματα που παράχθηκαν κατά τη λειτουργία του συστήματος δεξαμενών, με την κατάλληλη εφαρμογή των σχημάτων ελέγχου.

Τέλος, το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί τη σύνοψη και τα συμπεράσματα της εργασίας, μαζί με μελλοντικές επεκτάσεις που μπορούν να γίνουν στο παραπάνω σύστημα.

Μοντελοποίηση Συστήματος Δεξαμενών

Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Το τελικό μη γραμμικό σύστημα προκύπτει

$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\end{bmatrix} = f(h_1,h_2,u) = \begin{bmatrix}-\frac{\alpha_1}{A}\sqrt{2gh_1}+\frac{K}{A}u\\ \frac{\alpha_1}{A}\sqrt{2gh_1}-\frac{\alpha_2}{A}\sqrt{2gh_2}\end{bmatrix} \tag{1}$$

Το παραπάνω σύστημα διαθέτει σημείο ισορροπίας

$$\begin{bmatrix}\dot{h}_1\\ \dot{h}_2\end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} u^* = \frac{\alpha}{K}\sqrt{2gh_1^*}\\ \theta_1\sqrt{h_1^*} = \theta_2\sqrt{h_2^*}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^* = \frac{\alpha_1}{K}\sqrt{2gh_1^*} = \frac{\theta_1}{b}\sqrt{h_1^*}\\ h_1^* = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}h_2^*\end{cases}$$

$$\Longrightarrow h_1^* = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}h_2^* = \frac{(bu^*)^2}{\theta_1^2} \tag{2}$$

Γραμμικοποιημένο Μοντέλο Συστήματος Δεξαμενών

Για την εφαρμογή ελεγκτών με βάση ένα γραμμικό μοντέλο μπορεί να γραμμικοποιηθεί το σύστημα γύρω από το επιθυμητό σημείο ισορροπίας. Έστω το επιθυμητό σημείο ισορροπίας του συστήματος να είναι της μορφής $\left[h_1,h_2\right]^T = \left[h_{1e},h_{2e}\right]^T$. Το σύστημα με βάση το ανάπτυγμα $Taylor$ γραμμικοποιείται ως:

$$\dot{h} = A_l\begin{bmatrix}h_1-h_{1e}\\ h_2-h_{2e}\end{bmatrix} + B_l(u-u^*) \tag{3}$$

όπου

$$A_l = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2}\end{bmatrix}\Bigg|_{(h=[h_0,h_0]^T,u=u^*)}$$

$$B_l = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}\Bigg|_{(h=[h_0,h_0]^T,u=u^*)}$$

Οι πίνακες A_l και B_l, με την εύρεση των μερικών παραγώγων της (1) προκύπτουν:

$$A_l = \begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & 0\\ \frac{\alpha}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_1}} & -\frac{\alpha}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_2}}\end{bmatrix} \qquad B_l = \begin{bmatrix}\frac{K}{A}\\ 0\end{bmatrix}$$

Στο σημείο ισορροπίας $h = [h_{0,1}, h_{0,2}]^T, u = u^*$, οι πίνακες A_l και B_l έχουν τιμή:

$$A_l = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_{0,1}}} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_{0,1}}} & -\frac{\alpha_2}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_{0,2}}} \end{bmatrix} \qquad B_l = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Για απλοποίηση των σχέσεων, ορίζοντας $\omega = \frac{\alpha}{A}\frac{g}{\sqrt{2gh_0}}$ και $b = \frac{K}{A}$, το γραμμικοποιημένο σύστημα προκύπτει:

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{0,1} \\ h_2 - h_{0,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

Η παραπάνω σχέση, με μετασχηματισμό του σημείου ισορροπίας στο $(0, 0)$ γίνεται:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v \tag{5}$$

Η σχέση (5) για λόγους εφαρμογής κάποιων από των μεθοδολογιών ελέγχου μπορεί να μετασχηματιστεί στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$\frac{X(s)}{V(s)} = (sI_2 - A_l)^{-1}B = \begin{bmatrix} s + \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & s + \omega_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} \begin{bmatrix} s + \omega_2 & 0 \\ \omega_1 & s + \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Έτσι, προκύπτουν οι δύο συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\frac{X_1(s)}{V(s)} = \frac{b}{s + \omega_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}$$

Χρήσιμη επιπλέον είναι η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στις δύο στάθμες η οποία ορίζεται ως

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{\omega_1}{(s + \omega_2)}$$

ΛΥΣΗ 1

Με σκοπό τον ορισμό συμβατών μοντέλων αναφοράς φέρνουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα στην ελέγξιμη κανονική μορφή. Για τη διαδικασία αυτή ελέγχουμε την ελεγξιμότητα του συστήματος με χρήση του πίνακα

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -b\omega_1 \\ 0 & \omega_1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει τάξη $n = 2$ για $\omega_1 \neq 0$. Καθώς το σύστημα είναι ελέγξιμο, μπορούμε να ορίσουμε την αντιστρέψιμη αλλαγή μεταβλητών $z = T\Delta h$, η οποία προκύπτει από

$$\dot{z} = T\dot{\Delta h} = T\dot{h} = T \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \Delta h + T \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u = T \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} T^{-1} z + T \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

Θεωρώντας ότι θέλουμε το σύστημα στη μορφή, το σύστημα με μεταβλητή z πρέπει να έχει μορφή

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1\omega_2 & -(\omega_1 + \omega_2) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ b\omega_1 \end{bmatrix} \Delta u$$

το οποίο διαθέτει πίνακα μετασχηματισμού

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & b\omega_1 \\ b\omega_1 & -b\omega_1(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix}$$

Από τον πίνακα αυτόν, μπορεί να προκύψει ότι:

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} TB & TAT^{-1}TB \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = T\mathcal{C}$$

Επομένως, λόγω της ελεγξιμότητας του αρχικού συστήματος ορίζεται ο μετασχηματισμός:

$$T = \tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & b\omega_1 \\ b\omega_1 & -b\omega_1(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix} \frac{1}{b\omega_1} \begin{bmatrix} \omega_1 & b\omega_1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ \omega_1 & -b\omega_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Έτσι, το σύστημα το οποίο μπορούμε να μελετήσουμε είναι το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ b\omega \end{bmatrix} \Delta u \\ h = & \begin{bmatrix} h_{0,1} \\ h_{0,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned} \tag{8}$$

ΛΥΣΗ 2 (Θέλει διόρθωση)
Με τη χρήση της άλγεβρας *Lie* και του μετασχηματισμού αυτού της ενότητας *Feedback Linearization*, με $z_1 = h_2, z_2 = \dot{h}_2$ προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix}$$

Με χρήση της αντίστροφης μετατροπής $h_1 = \phi^{-1}(\frac{1}{\theta_1}(z_2 + \theta_2\phi(z_1)))$, προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2(z_2 + \theta_2\phi(z_1))\dot{\phi}(z_1) + \frac{\theta_2^2-\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2 z_2 - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1)u \end{bmatrix}$$

Καθώς $\dot{\phi}(h_1) = \frac{1}{2\phi(h_1)} = \frac{\theta_1}{2(z_2+\theta_2\phi(z_1))}$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\theta_2 z_2 - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{K}{A}\frac{\theta_1^2}{2(z_2+\theta_2\phi(z_1))}u \end{bmatrix}$$

Η γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο $z_1 = h_{2,d}, z_2 = 0$ γίνεται στο μετασχηματισμένο σύστημα ως:

$$\dot{z} = f_z(z_1, z_2, u) = A_l(z - z^*) + B_l(u - u^*)$$

με τους πίνακες

$$A_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{z,1}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{z,1}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_{z,2}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{z,2}}{\partial z_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{(z=[h_{2,d},0]^T, u=u^*)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2}\frac{\theta_2\dot{\phi}(h_{2,d})}{(\theta_2\phi(h_{2,d}))^2}u^* & -\frac{b\theta_1^2}{2\theta_2}\frac{1}{(\theta_2\phi(h_{2,d}))^2}u^* \end{bmatrix}$$

$$B_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{z,1}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{z,2}}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(h=[h_{2,d},0]^T, u=u^*)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2\phi(h_{2,d})} \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση της συνάρτησης ϕ προκύπτουν οι πίνακες

$$A_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2 u^*}{4\theta_2^2 h_{2,d}\sqrt{h_{2,d}}} & -\frac{b\theta_1^2 u^*}{2\theta_2^3 h_{2,d}} \end{bmatrix}$$

$$B_l = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2\sqrt{h_{2,d}}} \end{bmatrix}$$

Για ευκολία στην εφαρμογή των ελεγκτών ορίζουμε τις ποσότητες

$$\tilde{a}_1 = -\theta_2 - \frac{b\theta_1^2 u^*}{4\theta_2^2 h_{2,d}\sqrt{h_{2,d}}}$$

$$\tilde{a}_2 = -\frac{b\theta_1^2 u^*}{2\theta_2^3 h_{2,d}}$$

$$\tilde{b} = \frac{b\theta_1^2}{2\theta_2\sqrt{h_{2,d}}}$$

με τις οποίες το γραμμικοποιημένο σύστημα γίνεται

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 \end{bmatrix}(z - z^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix}(u - u^*) \tag{9}$$

Με u^* τέτοιο ώστε $z = z^*$.

Σχεδιασμός Συστήματος Ελέγχου Δεξαμενών

Έλεγχος MIT Rule

Για τη σχεδίαση του ελεγκτή *MIT Rule* θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης 5

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,e} \\ h_2 - h_{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

η οποία εκφράζεται ως

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega_1 & 0 \\ \omega_1 & -\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} v$$

με την αλλαγή μεταβλητών $x_i = h_i - h_{i,e}$. Η παραπάνω έκφραση έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}$$

Σχεδίαση Ελεγκτή MIT Rule

Για τη σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς

$$M(s) = \frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}$$

Λόγω της ανάδρασης της στάθμης h_1 και h_2 ορίζουμε τον νόμο ελέγχου

$$v = \theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2 \tag{10}$$

Το σήμα αναφοράς r είναι τέτοιο ώστε η έξοδος του $M(s)r$ να δίνει την τιμή x_m, η οποία αναφέρεται στη διαφορά της επιθυμητής τιμή της στάθμης $h_{2,d}$ με αυτή του σημείου του οποίου γίνεται η γραμμικοποίηση $h_{2,e}$.
Έτσι, ορίζουμε το σήμα αναφοράς r ως:

$$r = h_{2,d} - h_{2,e}$$

Ο ελεγκτής αυτός προσφέρει το σύστημα κλειστού βρόγχου ως

$$x_2 = \frac{b\omega}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}(\theta_1 r - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_2)$$

$$x_2 = \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)} r - \frac{b\omega_1\theta_2}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)} x_1 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)} x_2$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r - \frac{b\theta_2}{(s+\omega_1)}x_2 - \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 \\
\Big(1 + \frac{b\theta_2}{s+\omega_1} + \frac{b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}\Big)x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
\frac{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}r \\
x_2 &= \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r
\end{aligned}
$$

Με βάση τον στόχο ελέγχου της δεξαμενής 2 ορίζουμε το σφάλμα ελέγχου:

$$
e = x_2 - x_m = \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}v - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r
$$

$$
e = x_2 - x_m = \frac{b\omega_1\theta_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r
$$

Για την εύρεση του προσαρμοστικού νόμου είναι απαραίτητη η εύρεση των μερικών παραγώγων του σφάλματος. Η μερική παράγωγος ως προς θ_1 προκύπτει ως

$$
\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}r
$$

Η μερική παράγωγος ως προς θ_2 με τη χρήση της συνάρτησης μεταφοράς $\frac{H_2(s)}{H_1(s)}$ προκύπτει ως

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b^2\omega_1\theta_1(s+\omega_2)}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{(s+\omega_2)}{\omega_1}\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2 \\
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} &= -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_1
\end{aligned}
$$

Όμοια, η μερική παράγωγος ως προς θ_3 προκύπτει ως

$$
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} = -\frac{b^2\omega_1^2\theta_1}{((s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3)^2}r
$$

$$
\frac{\partial e}{\partial \theta_3} = -\frac{b\omega_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3}x_2
$$

Με χρήση της προσέγγισης

$$
(s+\omega_1)(s+\omega_2) + b\theta_2(s+\omega_2) + b\omega_1\theta_3 \approx s^2 + a_{1m}s + a_{2m} \tag{11}
$$

προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι ως:

$$
\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}r = \frac{b\omega}{a_{2m}}\left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right)r \tag{12}
$$

$$
\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}h_1 = -\frac{b\omega}{a_{2m}}\left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right)h_1 \tag{13}
$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_3} = -\frac{b\omega_1}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}} h_2 = -\frac{b\omega}{a_{2m}}\left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right) h_2 \tag{14}$$

Έτσι, από την γενική σχέση των νόμων προσαρμογής

$$\dot{\theta}_i = -\tilde{\gamma}_i e \frac{\partial e}{\partial \theta_i} \tag{15}$$

προκύπτουν οι νόμοι προσαρμογής

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 e \left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right) r \tag{16}$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma_2 e \left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right) h_1 \tag{17}$$

$$\dot{\theta}_3 = \gamma_3 e \left(\frac{a_{2m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{2m}}\right) h_2 \tag{18}$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ότι το κέρδος γ_i δεν ταυτίζεται με αυτό της σχέσης 15, καθώς προκύπτει από την εξίσωση $\gamma_i = \frac{b\omega_1}{a_{2m}}\tilde{\gamma}_i$. Ο λόγος αυτής της επιλογής είναι η χρήση φίλτρου μοναδιαίου DC κέρδους και οι άγνωστες τιμές των παραμέτρων του συστήματος b, ω_1.

Προσομοίωση Ελεγκτή MIT Rule

Έλεγχος MRAC

Για την σχεδίαση του ελεγκτή $MIT\ Rule$ θα χρησιμοποιηθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα της εξίσωσης 5

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega & 0 \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 - h_0 \\ h_2 - h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} (u - u^*)$$

Η σχεδίαση αυτή δεν χρειάζεται την μεταφορα του συστήματος στον χώρο $Laplace$. Έτσι, επαρκεί η χρήση του μοντέλου κατάστασης

Σχεδίαση Ελεγκτή MRAC

Για την σχεδίαση, ορίζουμε το μοντέλο αναφοράς στον χώρο κατάστασης ως:

$$\dot{h}_m = \begin{bmatrix} -a_{1m} & -a_{2m} \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} h_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{19}$$

Έστω ο νόμος ελέγχου

$$u = K_x \tilde{h} + K_r r \tag{20}$$

Για τον παραπάνω ελεγκτή το σύστημα κλειστού βρόγχου έχει την μορφή:

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega & 0 \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} K_{x1} & K_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + K_r r \right)$$

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} -\omega + bK_{x1} & bK_{x2} \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bK_r \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Θεωρούμε τα ιδανικά κέρδη K_x^*, K_r^* τα οποία δίνουν τις *Model Matching* συνθήκες

$$\begin{bmatrix} -\omega + bK_{x1}^* & bK_{x2}^* \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{1m} & -a_{2m} \\ \omega & -\omega \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} bK_r^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Προσομοίωση Ελεγκτή MRAC

Έλεγχος Feedback Linearization

Για τον έλεγχο με την διαδικασία *Feedback Linearization* χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης 1

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου ενώ στην συνέχει θα βρεθεί η προσαρμοστική εκδοχή αυτού.
Για την χρήση του συμβολισμού *Lie* ορίζουμε τις συναρτήσεις $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$ και $\theta = \frac{\alpha}{A}\sqrt{2g}$. Για λόγους αβεβαιότητας ορίζουμε δύο διαφορικά θ, αντίστοιχα με κάθε διατομή a. Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$. Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_l(h_1,h_2)} + g(h)u \tag{23}$$

Σχεδίαση Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τη γραμμικοποίηση με ανάδραση, αρχικά ελέγχουμε τις συνθήκες Ελεγξιμότητας και ενελικτικού συνόλου:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} g & ad_{f_l}g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{A} & \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ 0 & -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \tag{24}$$

καθώς η αγκύλη *Lie* προκύπτει ως:

$$ad_{f_l}g = \nabla g f_l - \nabla f_l g = -\begin{bmatrix} -\theta_1\dot{\phi}(h_1) & 0 \\ \theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\theta_2\dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \\ -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \end{bmatrix}$$

με $\dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2\sqrt{h_i}}$.
Η συνθήκη ελεγξιμότητας αφορά την γραμμική ανεξαρτησία του πίνακας της σχέσης 24. Ο πίνακας αυτός διαθέτει ορίζουσα:

$$det(\mathcal{C}) = -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\dot{\phi}(h_1)$$

η οποία για $K, \theta_1 \neq 0$ και από την ιδιότητα της συνάρτησης $\dot{\phi} > 0$, είναι $det(\mathcal{C}) \neq 0$. Άρα η συνθήκη ελεγξιμότητας επαληθεύεται τοπικά λόγω μη ορισμού της $\dot{\phi}$ στο σημείο $h = 0$. Για το σύνολο να είναι ενελικτικό, εξετάζουμε τι συμβαίνει για την αγκύλη Lie των δύο διανυσματικών παιδίων $g, ad_{f_l}g$.

$$[g, ad_{f_l}g] = \nabla g \cdot ad_{f_l}g - \nabla ad_{f_l}g \cdot g = \begin{bmatrix} -\frac{K}{A}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) & 0 \\ \frac{K}{A}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g, ad_{f_l}g] = \begin{bmatrix} -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \\ \frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \tag{25}$$

με $\ddot{\phi}(h_i) = -\frac{1}{4h_i\sqrt{h_i}}$. Έτσι, το σύνολο της εξίσωσης 24 είναι ενελικτικό διότι:

$$\det\left(\begin{bmatrix} ad_{f_l}g & [g, ad_{f_l}g] \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \\ -\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) & \frac{K^2}{A^2}\theta_1\ddot{\phi}(h_1) \end{bmatrix} \right) = 0$$

Για την επιλογή της πρώτης νέας μεταβλητής z_1 πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\nabla z_1 g = 0 \tag{26}$$

$$\nabla z_1 ad_{f_l}g \neq 0 \tag{27}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις, η Εξίσωση 26 δίνει την σχέση:

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_1} = 0$$

Έτσι, η Εξίσωση 27 δίνει τον περιορισμό

$$\frac{\partial z_1}{\partial h_2}\frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1) \neq 0 \Longrightarrow \frac{\partial z_1}{\partial h_2} \neq 0$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή $z_1 = h_2$. Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_1 = L_f z_1 = \nabla z_1 f(h_1, h_2) = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \tag{28}$$

Επιλέγουμε τη νέα μεταβλητή $z_2 = L_f z_1$. Για αυτήν, βρίσκουμε την παράγωγο της:

$$\dot{z}_2 = L_f z_2 = \nabla z_2 f(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} \theta_1\dot{\phi}(h_1) & -\theta_2\dot{\phi}(h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) + \frac{K}{A}u \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix} \tag{29}$$

Για λόγους πληρότητας ορίζουμε και τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \phi^{-1}(\frac{1}{\theta_1}(z_2 + \theta_2\phi(z_1))) \end{bmatrix} \tag{30}$$

Η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\dot{z}_2 = \alpha(h) + \beta(h)u$$

όπου

$$\alpha(h) = -\theta_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2)) - \theta_1^2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_1)$$

$$\beta(h) = \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1)$$

Μέσω της ιδιότητας $\phi(h_i)\dot{\phi}(h_i) = \frac{1}{2}$ της συνάρτησης $\sqrt{x}$, προκύπτει ότι:

$$\alpha(h) = -\theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}$$

$$\beta(h) = \frac{K}{A}\theta_1\dot{\phi}(h_1)$$

Έτσι, ορίζουμε τον έλεγχο γραμμικοποίησης

$$u = \frac{1}{\beta(h)}(-\alpha(h) + v) \tag{31}$$

με v το σήμα ελέγχου του γραμμικοποιημένου συστήματος. Τότε, το μετασχηματισμένο σύστημα μετατρέπεται στο:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ v \end{bmatrix} \tag{32}$$

Ορίζουμε τον έλεγχο για παρακολούθηση τροχιάς:

$$v = \dot{z}_{2,d} - k_1(z_2 - z_{2,d}) - k_2(z_1 - z_{1,d}) \tag{33}$$

με $z_{1,d}$ την επιθυμητή τροχιά του συστήματος ως προς $z_1 = h_2$ και τη θετική σταθερά k. Σε περίπτωση επιλογής μίας σταθερής τιμής ως τροχιά χρησιμοποιείται η παράγωγος $\dot{z}_{1,d} = 0$.
Η δυναμική του σφάλματος διαθέτει χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^2 + k_1 s + k_2 = 0$$

η οποία είναι ευσταθής για $k_1, k_2 > 0$. Έτσι, ο στόχος ελέγχου επιτυγχάνεται.

Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Feedback Linearization

Για τροποποίηση του παραπάνω ελεγκτή με χρήση προσαρμοστικού νόμου και της αλλαγής των μεταβλητών z_1, z_2 από την Εξίσωση 28 με βάση την αρχή της Βεβαιότητας ως:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) \end{bmatrix} \tag{34}$$

Η παράγωγος της μεταβλητής z_1 προκύπτει ως:

$$\dot{z}_1 = \dot{h}_2 = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) = \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)$$

$$\dot{z}_1 = z_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \tag{35}$$

Όμοια, η παράγωγος της μεταβλητής z_2 προκύπτει ως:

$$\dot{z}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2$$

$$\dot{z}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Επιλέγουμε τον νόμο ελέγχου:

$$u = \frac{1}{b}(\hat{\theta}_1\phi(h_1) + \frac{1}{\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(v - \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2))))$$

Με αυτόν τον νόμο ελέγχου προκύπτει η παράγωγος του z_2:

$$\dot{z}_2 = v - \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) \tag{36}$$

Με την επιλογή $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 + k_r r$ και την ιδιότητα $\phi(x)\dot{\phi}(x) = 0.5$, η δυναμική παίρνει τη μορφή:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \tilde{\theta}_1 \begin{bmatrix} \phi(h_1) \\ -0.5\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1) \end{bmatrix} + \tilde{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\phi(h_2) \\ 0.5\hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Προσομοίωση Ελεγκτών

Προσομοίωση Ελεγκτή Feedback Linearization

Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Feedback Linearization

Έλεγχος Backstepping

Για τον έλεγχο με την διαδικασία *Backstepping* χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό σύστημα της Εξίσωσης 1

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} + \frac{K}{A}u \\ \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_1} - \frac{\alpha}{A}\sqrt{2gh_2} \end{bmatrix}$$

Η σχεδίαση θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα θα βρεθεί ο έλεγχος με γνώση μοντέλου ενώ στην συνέχει θα βρεθεί η προσαρμοστική εκδοχή αυτού. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\phi(h_i) = \sqrt{h_i}$ και $\theta = \frac{\alpha}{A}\sqrt{2g}$. Για λόγους αβεβαιώτητας ορίζουμε δύο διαφορεικά θ, αντίστοιχα με κάθε διατομή a. Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $g(h) = [\frac{K}{A}, 0]^T$. Έτσι, το μη γραμμικό σύστημα εκφράζεται στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_l(h_1,h_2)} + g(h)u$$

Σχεδίαση Ελεγκτή Backstepping

Έστω το σημείο αναφοράς του συστήματος $(h_{1,d}, h_{2,d})$. Ορίζουμε το σύστημα σφάλματος ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 - \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_2 - \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_1\phi(h_1) \\ \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) \end{bmatrix}}_{f_l(h_1,h_2)} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} \dot{h}_{1,d} \\ \dot{h}_{2,d} \end{bmatrix} \tag{38}$$

Σε πρώτο βήμα ορίζουμε την εικονική είσοδο ελέγχου h_1 και την νέα μεταβλητή κατάστασης $\xi_1 = e_2 = h_2 - h_{2,d}$. Για τα παραπάνω, η δεύτερη εξίσωση της 38 γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = \dot{e}_2 = \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $\phi^{-1}(x) = x^2$. Με βάση αυτή, επιλέγουμε τον έλεγχο

$$h_2 = \phi^{-1}\Big(\frac{\theta_2}{\theta_1} + \dot{h}_{2,d} - k(h_2 - h_{2,d})\Big)$$

ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση της δυναμικής του ξ_1 σε:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1$$

η οποία είναι ευσταθής για $k > 0$.
Με προσθαφαίρεση του $k\xi_1$ στη δεύτερη εξίσωση της 38 έχουμε την πραγματική δυναμική του σφάλματος:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + k\xi_1 + \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \tag{39}$$

Σε δεύτερο βήμα χρησιμοποιούμε την είσοδο ελέγχου u και την νέα μεταβλητή κατάστασης $\xi_2 = k\xi_1 + \theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}$. Για τα παραπάνω, η εξίσωση της 39 γίνεται:

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \xi_2 \tag{40}$$

Παραγωγίζοντας την κατάσταση ξ_2 προκύπτει η δυναμική της ως:

$$\dot{\xi}_2 = k\dot{\xi}_1 + \theta_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2 - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) + \theta_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \theta_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d}) - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1\dot{\phi}(h_1)bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) + \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d}$$

$$\dot{\xi}_2 = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1\dot{\phi}(h_1)bu + \frac{\theta_2^2}{2} - \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) + \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} - \ddot{h}_{2,d} \tag{41}$$

Επιλέγουμε τον έλεγχο:

$$u = \frac{1}{b\theta_1\dot{\phi}(h_1)}\left(k^2\xi_1 - k_2\xi_2 + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{2} + \theta_1\theta_2\phi(h_1)\dot{\phi}(h_2) - \theta_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_{2,d} + \ddot{h}_{2,d}\right) \tag{42}$$

με $k_2 > k > 0$. Τότε, η εξίσωση 38 γίνεται

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-k & 1\\ 0 & -(k_2 - k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \tag{43}$$

η οποία είναι μία ευσταθής δυναμική καθώς $k_2 > k > 0$. Έτσι, το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές με μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\xi = (0, 0)$, το οποίο είναι αντίστοιχο με το σημείο ισορροπίας $e = (0, 0)$ της εξίσωσης 38.

Σχεδίαση Προσαρμοστικού Ελεγκτή Backstepping

Για την προσαρμοστική τροποποίηση του ελεγκτή *Backstepping* χρησιμοποιούμε και πάλι την δυναμική του σφάλματος η οποοία δίνεται από την Εξίσωση 38. Όμοια με την παραπάνω προσέγγιση επιλέγουμε $\xi_1 = e_2$ και με προσαφαίρεση των ξ_2 και της εκτίμησης της παραμέτρου θ_1, θ_2 προκύπτει

$$\dot{\xi}_1 = \dot{e}_2 = (\theta_1 \pm \hat{\theta}_1)\phi(h_1) - (\theta_2 \pm \hat{\theta}_2)\phi(h_2) - \dot{h}_{2,d} \pm k\xi_1$$

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)$$

με $k > 0$ και

$$\alpha_1(\xi_1, h_1, h_2, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\xi_1 - \dot{h}_{2,d} + \hat{\theta}_1\phi(h_1) - \hat{\theta}_2\phi(h_2)$$

Με την επιλογή $\xi_2 = \alpha_1(\xi_1, h_1, h_{2,d}, \dot{h}_{2,d}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, ορίζοντας τα παραμετρικά σφάλματα $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ η δυναμική της μεταβλητής ξ_1 παίρνει την μορφή

$$\dot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2) \tag{44}$$

Για την δυναμική του ξ_2 παίρνουμε την παράγωγο της συνάρτησης α_1 ως

$$\dot{\xi}_2 = \frac{d\alpha_1}{dt} = k\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)\dot{h}_1 - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\dot{h}_2$$

$$\dot{\xi}_2 = k\dot{\xi}_1 - \ddot{h}_{2,d} + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)(-\theta_1\phi(h_1) + bu) - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)(\theta_1\phi(h_1) - \theta_2\phi(h_2))$$

Με την χρήση της σχέσης $\theta_i = \tilde{\theta}_i + \hat{\theta}_i$ προκύπτει η δυναμική

$$\dot{\xi}_2 = \alpha_2 + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)bu + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) \tag{45}$$

με

$$\alpha_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ddot{h}_{2,d}) = k(-k\xi_1 + \xi_2) - \ddot{h}_{2,d} + \frac{\hat{\theta}_2^2 - \hat{\theta}_1^2}{2} - \hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_1(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\phi(h_1) + \frac{\hat{\theta}_1}{2} - \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\dot{\phi}(h_2)\phi(h_1)$$

$$\beta_2(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = k\phi(h_2) + \frac{\hat{\theta}_2}{2}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση *Lyapunov*

$$V(\xi_1, \xi_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2) \tag{46}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει παράγωγο :

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1\dot{\xi}_1 + \xi_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\frac{dV}{dt} = \xi_1(-k\xi_1 + \xi_2 + \tilde{\theta}_1\phi(h_1) - \tilde{\theta}_2\phi(h_2)) - \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$
$$+\xi_2\big(\alpha_2 + \hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)bu + \tilde{\theta}_1\beta_1 + \tilde{\theta}_2\beta_2 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2)\big)$$

Ομαδοποιώντας κατάλληλα τα παραμετρικά σφάλματα προκύπτει ότι

$$\frac{dV}{dt} = -k\xi_1^2 + (\xi_1 + \alpha_2 + \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) - \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2))\xi_2 + \xi_2\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)bu$$

$$+\tilde{\theta}_1(\xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_1}{\gamma_1}) + \tilde{\theta}_2(-\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_2}{\gamma_2})$$

Με την επιλογή των προσαρμοστικών νόμων

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1(\xi_1\phi(h_1) + \xi_2\beta_1) \tag{47}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2(-\xi_1\phi(h_2) + \xi_2\beta_2) \tag{48}$$

και τον νόμο ελέγχου

$$u = \frac{1}{b\hat{\theta}_1\dot{\phi}(h_1)}(-\xi_1 - \alpha_2 - \dot{\hat{\theta}}_1\phi(h_1) + \dot{\hat{\theta}}_2\phi(h_2) - k_2\xi_2) \tag{49}$$

η παράγωγος της συνάρτησης *Lyapunov* γίνεται

$$\frac{dV}{dt} = -k\xi_1^2 - k_2\xi_2^2 \tag{50}$$

η οποία είναι αρνητικά ημιορισμένη

Προσομοίωση Ελεγκτών

Προσομοίωση Ελεγκτή Backstepping

Προσομοίωση Ελεγκτή Adaptive Backstepping

Πειράματα και Αποτελέσματα

Εφαρμογή MIT Rule στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή MRAC στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή Feedback Linearization στο Σύστημα Δεξαμενών

Εφαρμογή Backstepping στο Σύστημα Δεξαμενών

Επίλογος

Σύνοψη Εργασίας

Μελλοντικές Επεκτάσεις

Κώδικας Προσομοίωσης Συστήματος Δεξαμενών

Κώδικας **Arduino** Συστήματος Δεξαμενών

Βιβλιογραφία

[1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Fradkov and Vladimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.

[2] A. Astolfi and L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.

[3] K. Astrom and A.-B. Ostberg. "A teaching laboratory for process control". In: *IEEE Control Systems Magazine* 6.5 (1986), pp. 37–42. DOI: 10.1109/MCS.1986.1105142.

[4] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.

[5] Juri Belikov and Eduard Petlenkov. "Model based control of a water tank system". In: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014). 19th IFAC World Congress, pp. 10838–10843. ISSN: 1474-6670. DOI: https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.00695. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016433379.

[6] Jay A. Farrell and Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.

[7] Frank Ferrese et al. "Decentralized control of coupled nonlinear dynamic systems with application to quadruple-tank process". In: *IECON 2014 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. 2014, pp. 3657–3661. DOI: 10.1109/IECON.2014.7049043.

[8] Y. Fu et al. "Dual-Rate Adaptive Decoupling Controller and Its Application to a Dual-Tank Water System". In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 28.6 (2020), pp. 2515–2522. DOI: 10.1109/TCST.2019.2930044.

[9] Bhagyashri Gurjar, Vinita Chaudhari, and Shailaja Kurode. "Parameter estimation based robust liquid level control of quadruple tank system — Second order sliding mode approach". In: *Journal of Process Control* 104 (2021), pp. 1–10. ISSN: 0959-1524. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.05.009. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152421000780.

[10] Mohammed M'Saad & Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.

[11] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.

[12] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.

[13] Iasson Karafyllis, Filippos Vokos, and Miroslav Krstic. "Output-feedback control of viscous liquid–tank system and its numerical approximation". In: *Automatica* 149 (2023), p. 110827. ISSN: 0005-1098. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110827. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109822006938.

[14] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.

[15] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.

[16] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7.

[17] Anca Maxim, Clara Ionescu, and Robin De Keyser. "Modelling and identification of a coupled sextuple water tank system". In: *2016 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*. 2016, pp. 1–6. DOI: 10.1109/AQTR.2016.7501360.

[18] Xiangxiang Meng et al. "Liquid Level Control of Four-Tank System Based on Active Disturbance Rejection Technology". In: *Measurement* 175 (2021), p. 109146. ISSN: 0263-2241. DOI: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109146. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026322412100169X.

[19] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley & Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.

[20] P.Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.

[21] V.P. Singh Rajesh Kumar and Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.

[22] Rim Rammal et al. "Nonlinear three-tank system fault detection and isolation using differential flatness". In: *IFAC Journal of Systems and Control* 21 (2022), p. 100197. ISSN: 2468-6018. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2022.100197. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468601822000086.

[23] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.

[24] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.

[25] Zegao Yin et al. "Hydrodynamic and aeration characteristics of an aerator of a surging water tank with a vertical baffle under a horizontal sinusoidal motion". In: *Ocean Engineering* 278 (2023), p. 114396. ISSN: 0029-8018. DOI: https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114396. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801823007801.