

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

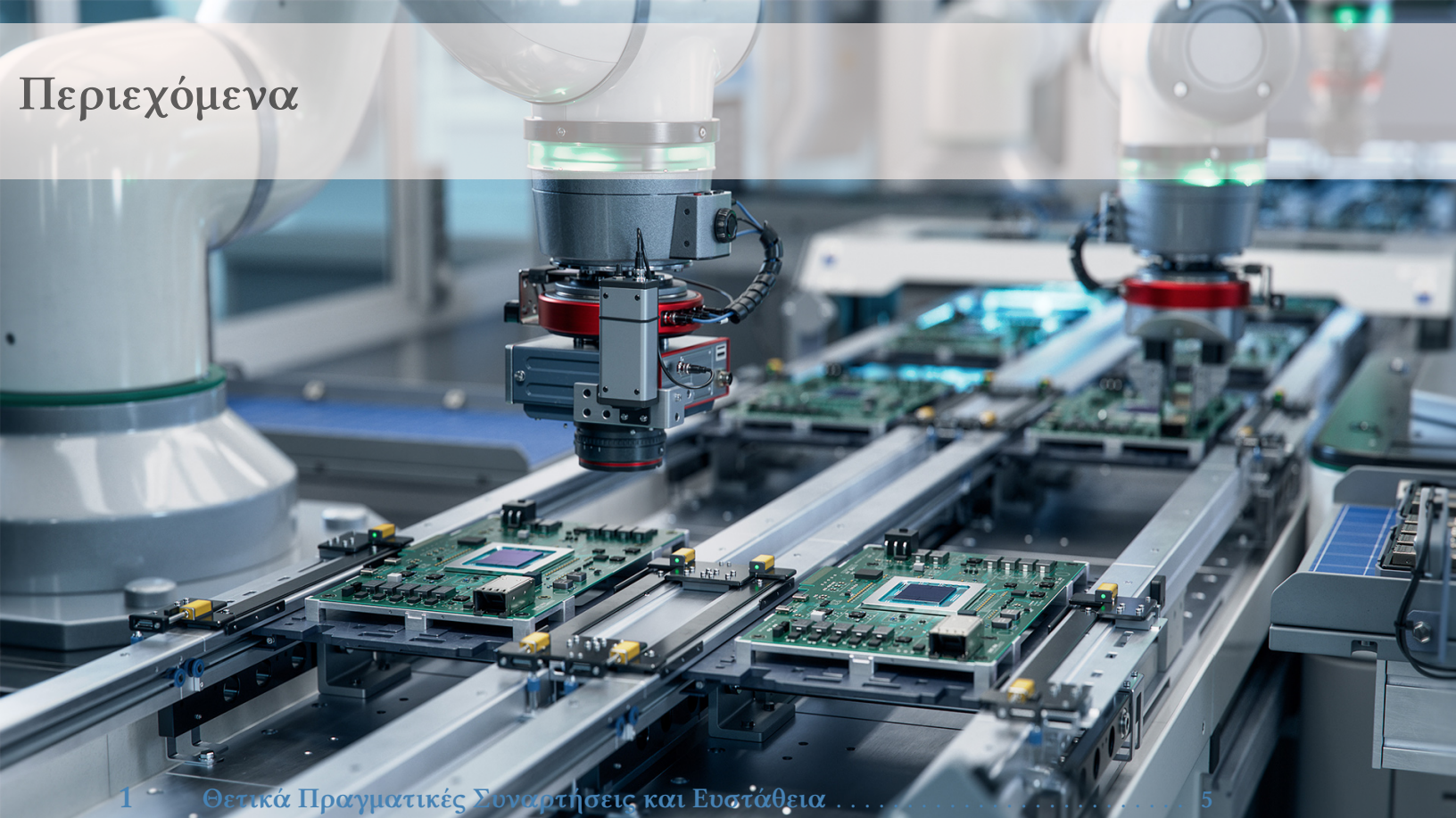
ΜΑΘΗΜΑ: ΕΥΦΥΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Εξαμηνιαία Εργασία

Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις και
Ευστάθεια Γραμμικών Χρονικά
Αμετάβλητων Συστημάτων Ανάδρασης

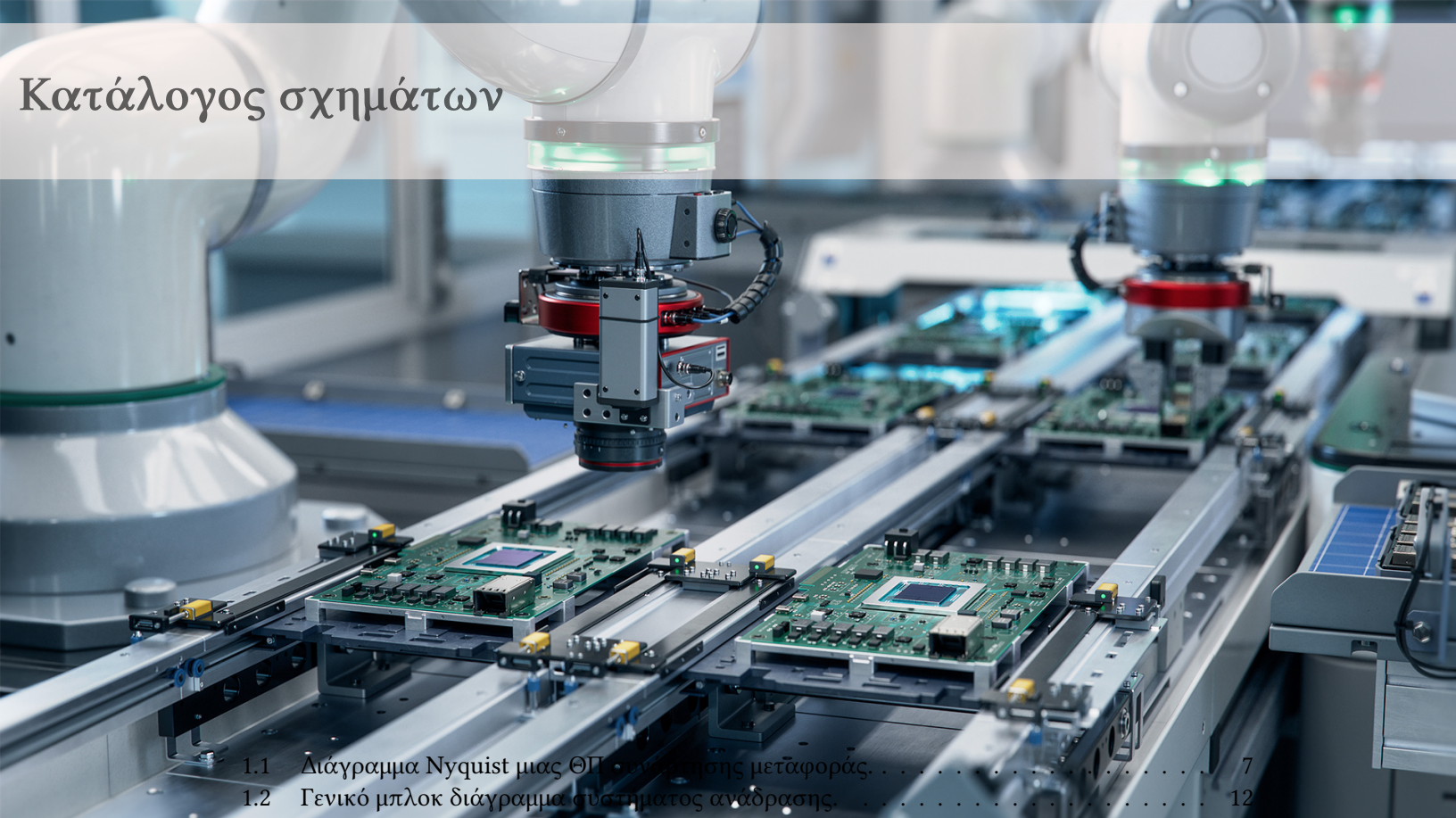
Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208

Αθήνα, 2024



Περιεχόμενα

1	Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις και Ευστάθεια	5
1.1	Θετικά Πραγματικές και Αυστηρά Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις Μεταφοράς	5
1.2	Θετικά Πραγματικοί και Αυστηρά Θετικά Πραγματικοί Πίνακες Συναρτήσεων Μεταφοράς	11
2	Ευστάθεια Γραμμικών Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων Ανάδρασης	13
2.1	Γενικευμένο Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα Ανάδρασης	13
2.2	Εσωτερική Ευστάθεια	14
2.3	Συναρτήσεις Ευαισθησίας και Συναρτήσεις Συμπληρωματικής Ευαισθησίας	15
2.4	Αρχή Εσωτερικού Μοντέλου	16
3	Ασκήσεις Κατανόησης	18
3.1	Άσκηση 3.13	18
3.2	Άσκηση 3.14	24
3.3	Άσκηση 3.15	25
3.4	Άσκηση 3.17	27
	Βιβλιογραφία	29



Κατάλογος σχημάτων

1.1	Διάγραμμα Nyquist μιας ΘΠ συνάρτησης μεταφοράς.	7
1.2	Γενικό μπλοκ διάγραμμα συστήματος ανάδρασης.	12
3.1	Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_1(s)$	18
3.2	Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_1(s)$	19
3.3	Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_2(s)$	20
3.4	Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_2(s)$	21
3.5	Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_3(s)$	22
3.6	Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_3(s)$	23
3.7	Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_4(s)$	23
3.8	Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_4(s)$	24

1. Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις και Ευστάθεια

1.1	Θετικά Πραγματικές και Αυστηρά Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις Μεταφοράς	5
1.2	Θετικά Πραγματικοί και Αυστηρά Θετικά Πραγματικοί Πίνακες Συναρτήσεων Μεταφοράς	11

1.1 Θετικά Πραγματικές και Αυστηρά Θετικά Πραγματικές Συναρτήσεις Μεταφοράς

Οι έννοιες των ΘΠ και ΑΘΠ συναρτήσεων μεταφοράς παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάλυση της ευστάθειας ενός μεγάλου συνόλου μη γραμμικών συστημάτων, στα οποία περιέχονται και τα προσαρμοστικά συστήματα.

Οι ορισμοί των ΘΠ και ΑΘΠ συναρτήσεων μεταφοράς προέρχονται από τη θεωρία δικτύων. Δηλαδή, μια ρητή συνάρτηση τύπου ΘΠ (ή ΑΘΠ) μπορεί να οριστεί ως η σύνθετη εμπέδηση ενός παθητικού (καταναλισκόμενου) δικτύου. Αντιθέτως, ένα παθητικό (καταναλισκόμενο) δίκτυο έχει μία σύνθετη εμπέδηση η οποία αποτελείται από μια ρητή και ΘΠ (ή ΑΘΠ) συνάρτηση μεταφοράς. Ένα παθητικό δίκτυο δεν παράγει ενέργεια, όπως για παράδειγμα ένα δίκτυο το οποίο αποτελείται μόνο από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία. Ένα καταναλισκόμενο δίκτυο καταναλώνει ενέργεια, το οποίο υπονοεί πως αποτελείται από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία, τα οποία είναι συνδεδεμένα εν παραλλήλω με τις αντιστάσεις.

Τώρα θα ορίσουμε μαθηματικά την έννοια της Θετικά Πραγματικής συνάρτησης από τη θεωρία δικτύων.

Ορισμός 1.1 Μια γνήσια ρητή συνάρτηση $G(s)$ με μιγαδική μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$ ονομάζεται ΘΠ, Αν

1. η $G(s)$ είναι πραγματική για πραγματικά s .
2. $\operatorname{Re}[G(s)] \geq 0$ για όλα τα $\operatorname{Re}[s] > 0$.

Λήμμα 1.1 Μια γνήσια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ είναι ΘΠ αν και μόνο αν

1. Η $G(s)$ είναι πραγματική για πραγματικά s .
2. Η $G(s)$ είναι αναλυτική στο $\operatorname{Re}[s] > 0$, και οι πόλοι που βρίσκονται στον φανταστικό άξονα είναι απλοί με τους φανταστικούς συντελεστές των πόλων να είναι θετικοί και πραγματικοί.
3. Για όλες τις πραγματικές τιμές ω , τις οποίες το $s = j\omega$ δεν αποτελεί πόλο της $G(s)$, ένας έχει $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq 0$.

Τώρα θα εξετάσουμε τις ΑΘΠ συναρτήσεις μεταφοράς. Ο ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 1.2 Ας υποθέσουμε πως η $G(s)$ δεν είναι ταυτόσημη μηδέν για όλα τα s . Τότε η $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν το $G(s - \epsilon)$ είναι ΘΠ για κάποιο $\epsilon > 0$.

Το θεώρημα το οποίο ακολουθεί διατυπώνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες στο πεδίο της συχνότητας για μία συνάρτηση μεταφοράς η οποία είναι ΑΘΠ.

Θεώρημα 1.1 Υποθέτουμε πως μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ με μιγαδική μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$ είναι πραγματική για πραγματικό s και δεν είναι ταυτόσημη μηδέν για όλα τα s . Έστω n^* ο σχετικός βαθμός της $G(s) = Z(s)/R(s)$ με το $|n^*| \leq 1$. Τότε, η $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν και μόνο αν

1. Η $G(s)$ είναι αναλυτική στο $\operatorname{Re}[s] \geq 0$.
2. $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$.
3. (α') Όταν το $n^* = 1, \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$.
(β') Όταν το $n^* = -1, \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}[G(j\omega)]}{j\omega} > 0$.

Πρέπει να σημειωθεί πως όταν το $n^* = 0$, τα (1) και (2) του θεωρήματος 1.1 είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ΑΘΠ. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει για τις περιπτώσεις που ο $n^* = 1$ ή -1 . Για παράδειγμα,

$$G(s) = \frac{s + \alpha + \beta}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

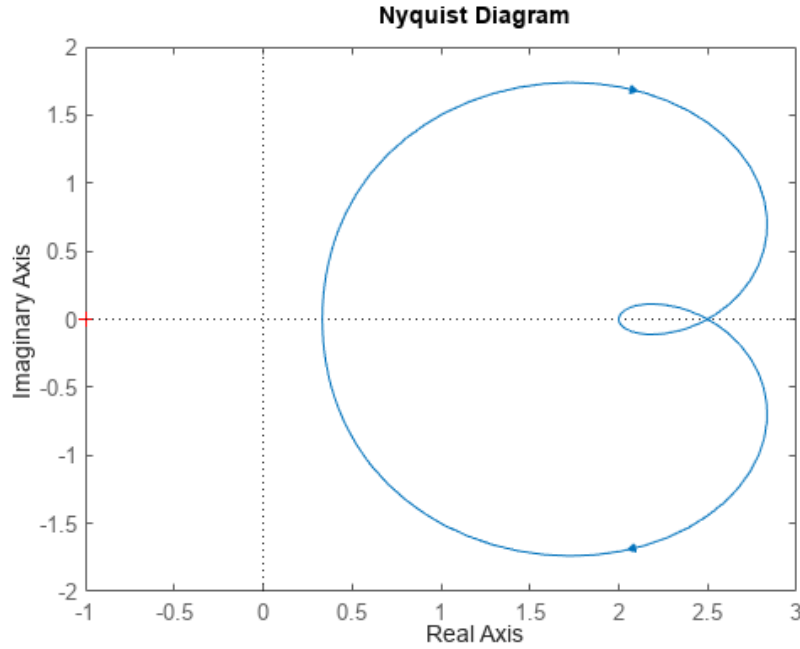
όπου τα $\alpha, \beta > 0$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τα (1) και (2) του θεωρήματος 1.1, ωστόσο, δεν ικανοποιεί το (3α). Ωστόσο, παρατηρούμε πως είναι ΘΠ.

Θα ορίσουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες για τις ΑΘΠ συναρτήσεις.

Πόρισμα 1.1 1. Η $G(s)$ είναι ΘΠ (ΑΘΠ) αν και μόνο αν η $1/G(s)$ είναι ΘΠ (ΑΘΠ).

2. Αν η $G(s)$ είναι ΑΘΠ, τότε, $|n^*| \leq 1$, και οι πόλοι και τα μηδενικά της $G(s)$ βρίσκονται στο $\operatorname{Re}[s] < 0$.
3. Αν το $|n^*| > 1$, τότε η $G(s)$ δεν είναι ΘΠ.

Μια αναγκαία συνθήκη για τη $G(s)$ να είναι ΘΠ είναι πως το διάγραμμα Nyquist της $G(j\omega)$ να βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο, το οποίο σημαίνει πως η αλλαγή φάσης της εξόδου του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ με ημιτονοειδής απόκριση πρέπει να είναι λιγότερο από 90° . Για παράδειγμα, μπορούμε να δούμε στο σχήμα 1.1 το διάγραμμα μιας ΘΠ συνάρτησης μεταφοράς.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα Nyquist μιας ΘΠ συνάρτησης μεταφοράς.

Παράδειγμα 1.1 Έστω πως έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς

$$1. \ G_1(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2}$$

$$2. \ G_2(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$3. \ G_3(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$4. \ G_4(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 1.1, διαπιστώνουμε πως η $G_1(s)$ δεν είναι ΘΠ, καθώς η $1/G_1(s)$ δεν είναι ΘΠ. Επιπλέον, η $G_2(s)$ δεν είναι ΘΠ διότι ο $n^* > 1$. Για την $G_3(s)$ έχουμε ότι ισχύει

$$Re[G_3(j\omega)] = \frac{6}{(\omega^2 + 2)^2 + \omega^2} > 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

όπου μαζί με την ευστάθεια της $G_3(s)$ υπονοείται πως η $G_3(s)$ είναι ΘΠ. Καθώς η $G_3(s)$ παραβιάζει τη συνθήκη (3α) του θεωρήματος 1.1, τότε δεν είναι ΑΘΠ. Η συνάρτηση μεταφοράς $G_4(s)$ είναι ΑΘΠ για κάθε $\alpha > 0$ και ΘΠ. Αλλά δεν μπορεί να είναι ΑΘΠ όταν το $\alpha = 0$.

Η σχέση μεταξύ των ΘΠ, ΑΘΠ συναρτήσεων μεταφοράς μαζί με την Lyapunov ευστάθεια των

δυναμικών συστημάτων, οδηγούν στην ανάπτυξη νέων κριτηρίων ευστάθειας για συστήματα ανάδρασης με Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα και μη γραμμικά μέρη. Αυτό τα κριτήρια συμπεριλαμβάνονται σε αυτό του Ρορον μαζί με τις τροποποιήσεις του. Ο κρίσιμος σύνδεσμος μεταξύ των ΘΠ, ΑΘΠ συναρτήσεων μεταφοράς ή πινάκων, με την ύπαρξη μιας συνάρτησης Lyapunov που μας εγγυάται ευστάθεια, παρουσιάζεται στο παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 1.2 (Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) Λήμμα) Δοσμένου ενός τετραγωνικού πίνακα A , με όλες τις ιδιοτιμές να βρίσκονται στο κλειστό αριστερό μιγαδικό επίπεδο, ένα διάνυσμα B τέτοιο ώστε το (A, B) να είναι ελέγξιμο, ένα διάνυσμα C και ένα βαθμωτό μέγεθος $d \geq 0$, η συνάρτηση μεταφοράς, η οποία ορίζεται από τον εξής τύπο

$$G(s) = d + C^T(sI - A)^{-1}B$$

είναι ΘΠ αν και μόνο αν υπάρχει ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P και ένα διάνυσμα q για τα οποία ισχύουν τα εξής

$$A^T P + P A = -q q^T$$

$$P B - C = \pm(\sqrt{2d})q$$

Λήμμα 1.3 (Lefschetz-Kalman-Yakubovich (LKY) Λήμμα) Δοσμένου ενός ευσταθή πίνακα A , ενός διανύσματος B τέτοιο ώστε το (A, B) να είναι ελέγξιμο, ενός διανύσματος C και ενός βαθμωτού μεγέθους $d \geq 0$, η συνάρτηση μεταφοράς η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$G(s) = d + C^T(sI - A)^{-1}B$$

είναι ΑΘΠ, αν και μόνο αν για οποιονδήποτε πίνακα L , υπάρχει ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P , ένα βαθμωτό μέγεθος $v > 0$ και ένα διάνυσμα q τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής

$$A^T P + P A = -q q^T - v L$$

$$P B - C = \pm q \sqrt{2d}$$

Τα λήμματα 1.2 και 1.3 εφαρμόζονται σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα τα οποία είναι ελέγξιμα.

Λήμμα 1.4 (Meyer-Kalman-Yakubovich (MKY) Λήμμα) Δοσμένου ενός ευσταθή πίνακα A , ενός διανύσματος B , ενός διανύσματος C και ενός βαθμωτού μεγέθους $d \geq 0$, έχουμε το εξής: Αν η

$$G(s) = d + C^T(sI - A)^{-1}B$$

είναι ΑΘΠ, τότε για οποιονδήποτε πίνακα $L = L^T > 0$, υπάρχει ένα βαθμωτό μέγεθος $v > 0$, ένα διάνυσμα q και ένας πίνακας $P = P^T > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$A^T P + P A = -q q^T - v L$$

$$P B - C = \pm q \sqrt{2d}$$

Σε πολλές εφαρμογές προσαρμοστικών συστημάτων με ΑΠΘ συναρτήσεις μεταφοράς, η συ-

νάρτηση $G(s)$ εμπεριέχει ευσταθή ακύρωση των μηδενικών και των πόλων, το οποίο σημαίνει πως ένα σύστημα που περιγράφεται από την πλειάδα (A, B, C) είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο. Σε αυτές τις περιπτώσεις το λήμμα MKY αποτελεί την πιο αξιόπιστη λύση.

Παράδειγμα 1.2 Έστω ότι έχουμε το σύστημα

$$y = G(s)u$$

όπου το $G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. Θέλουμε να ελέγξουμε εάν η συνάρτηση $G(s)$ είναι ΘΠ ή ΑΘΠ χρησιμοποιώντας τα παραπάνω λήμματα. Το σύστημα στην μορφή του χώρου κατάστασης είναι

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C^T x$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λήμματα, αν η $G(s)$ είναι ΘΠ, τότε θα έχουμε

$$PB = C$$

το οποίο σημαίνει πως ο πίνακας P θα είναι

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

για κάποιο $p_1 > 0$ το οποίο πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $p_1 - 9 > 0$ για να είναι ο πίνακας P θετικά ορισμένος. Πρέπει να υπολογίσουμε τα $p_1, v > 0$ και q τέτοια ώστε να ισχύει

$$A^T P + P A = -q q^T - v L \quad (1.1)$$

με τον $L = L^T > 0$. Έχουμε ότι

$$-\begin{bmatrix} 12 & 11 - p_1 \\ 11 - p_1 & 0 \end{bmatrix} = -q q^T - v L$$

Έστω ότι ο

$$Q = \begin{bmatrix} 12 & 11 - p_1 \\ 11 - p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε ο Q είναι θετικά ημιορισμένος για $p_1 = 11$ και απροσδιόριστος για $p_1 \neq 11$. Καθώς δεν υπάρχει κανένα $p_1 > 9$ ώστε ο πίνακας Q να είναι θετικά ορισμένος, τότε δεν μπορεί να βρεθεί $v > 0$ το οποίο να ικανοποιεί την σχέση 1.1 για οποιονδήποτε δοσμένο πίνακα $L = L^T > 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση $G(s)$ δεν είναι ΑΘΠ, κάτι το οποίο αποδείξαμε και στο παράδειγμα 1.1. Για $p_1 = 11$, μπορούμε να επιλέξουμε το $v = 0$ και το $q = [\sqrt{12}, 0]^T$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση 1.1. Συνεπώς, η $G(s)$ είναι ΘΠ.

Τα KYP και MKY λήμματα είναι χρήσιμα ως προς την επιλογή ικανών συναρτήσεων Lyapunov και συναρτήσεων τύπου Lyapunov ώστε να αναλυθούν οι ιδιότητες ευστάθειας για μία ευρή κλάση συνεχούς χρόνου προσαρμοστικών σχημάτων για Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα. Πα-

ρουσιάζουμε τη χρησιμότητα του ΜΚΥ λήμματος σε προσαρμοστικά συστήματα, παίρνοντας υπό-ψιν τις ιδιότητες ευστάθειας του συστήματος

$$\begin{aligned}\dot{e} &= A_c e + B_c \theta^T \omega \\ \dot{\theta} &= -\Gamma e_1 \omega \\ e_1 &= C_c^T e\end{aligned}\tag{1.2}$$

το οποίο συχνά εμφανίζεται συχνά στην ανάλυση κάποιων προσαρμοστικών σχημάτων. Στη σχέση (1.2), ο $\Gamma = \Gamma^T > 0$ είναι σταθερός, το $e \in \mathcal{R}^m$, $\theta \in \mathcal{R}^n$, $e_1 \in \mathcal{R}^1$ και $\omega = C_0^T e + C_1^T e_m$, όπου e_m είναι συνεχές και $e_m \in \mathcal{L}_\infty$. Οι ιδιότητες ευστάθειας της (1.2) δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.2 Αν ο πίνακας A_c είναι ευσταθής και $G(s) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c$ είναι ΑΘΠ, τότε τα $e, \theta, \omega \in \mathcal{L}_\infty$, $e, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ και τα $e(t), e_1(t), \dot{\theta}(t) \rightarrow 0$ όταν το $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Καθώς δεν έχουμε κάνει υποθέσεις σχετικά με την ελεγχιμότητα ή την παρατηρησιμότητα του συστήματος (A_c, B_c, C_c) , εστιάζουμε στην εφαρμογή του ΜΚΥ Λήμματος. Επιλέγουμε την εξής συνάρτηση Lyapunov

$$V(e, \theta) = e^T P e + \theta^T \Gamma^{-1} \theta$$

όπου ο $P = P^T > 0$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$A_c^T P + P A_c = -q q^T - v L$$

$$P B_c = C$$

για κάποιο διάνυσμα q , βαθμωτό μέγεθος $v > 0$ και οποιοσδήποτε πίνακας $L = L^T > 0$ τα οποία μας εγγυώνται την ΑΘΠ ιδιότητα για τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ και το ΜΚΥ Λήμμα. Καθώς το $\omega = C_0^T e + C_1^T e_m$, με το $e_m \in \mathcal{L}_\infty$, μπορεί να συμπεριφερθεί ως μία αυθαίρετη συνεχή συνάρτηση του χρόνου στον χώρο \mathcal{L}_∞ , τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η $V(e, \theta)$ είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο \mathcal{R}^{n+m} , και η V αποτελεί μια υποψήφια συνάρτηση Lyapunov.

Η χρονική παράγωγος της V μαζί με την λύση της σχέσης (1.2), δίνεται από

$$\dot{V} = -e^T q q^T e - v e^T L e \leq 0$$

το οποίο σημαίνει πως το σημείο ισορροπίας $(e_e, \theta_e) = (0, 0)$ είναι ευσταθές και τα $e_1, e, \theta \in \mathcal{L}_\infty$. Καθώς το $\omega = C_0^T e + C_1^T e_m$ και το $e_m \in \mathcal{L}_\infty$, τότε και το $\omega \in \mathcal{L}_\infty$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των \dot{V}, V , μπορούμε να εξάγουμε περισσότερα συμπεράσματα σχετικά με τη λύση της σχέσης (1.2) ως εξής: Από το $V \geq 0$ και το $\dot{V} \leq 0$ εξάγουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t), \theta(t)) = V_\infty$$

και συνεπώς έχουμε

$$v \int_0^\infty e^T L e d\tau \leq V_0 - V_\infty$$

όπου $V_0 = V(e(0), \theta(0))$. Καθώς το $v \lambda_{\min}(L) |e|^2 \leq v e^T L e$, διαπιστώνουμε πως το $e \in \mathcal{L}_2$. Από τη σχέση (1.2) έχουμε ότι $|\dot{\theta}(t)| \leq \|\Gamma\| \|e_1\| |\omega|$. Καθώς το $\omega \in \mathcal{L}_\infty$ και $e_1 \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ τότε από το λήμμα 3.2.3 (ii), [6], έχουμε ότι το $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$. Χρησιμοποιώντας τα $e, \theta, \omega \in \mathcal{L}_\infty$ προκύπτει πως το $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$, όπου μαζί με το $e \in \mathcal{L}_2$, διαπιστώνουμε πως το $e(t) \rightarrow 0$ καθώς το $t \rightarrow \infty$ (Λήμμα *Barbalát*). Έτσι θα έχουμε ότι τα $e_1, \dot{\theta}, e \rightarrow 0$ όταν το $t \rightarrow \infty$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. \square

Η ανάλυση που έγινε για την απόδειξη του θεωρήματος 1.2, χρησιμοποιείται γενικότερα στην ανάλυση ευστάθειας των προσαρμοστικών συστημάτων.

1.2 Θετικά Πραγματικοί και Αυστηρά Θετικά Πραγματικοί Πίνακες Συναρτήσεων Μεταφοράς

Οι έννοιες των ΘΠ και ΑΘΠ συναρτήσεων μεταφοράς γενικεύονται και επεκτείνονται και σε μητρική μορφή. Οι ορισμοί δίνονται ως εξής.

Ορισμός 1.3 Ένας $n \times n$ πίνακας $G(s)$ του οποίου τα στοιχεία του είναι συναρτήσεις των σύνθετων μεταβλητών s , ονομάζεται ΘΠ εάν

1. Η $G(s)$ έχει στοιχεία τα οποία είναι αναλυτικά για $Re[s] > 0$.
2. $G^*(s) = G(s^*)$ για $Re[s] > 0$.
3. Το $G^T(s^*) + G(s)$ είναι θετικά ημιορισμένο για $Re[s] > 0$.

όπου το $*$ αντιστοιχεί στον συζυγή μιγαδικό.

Ορισμός 1.4 Ένας $n \times n$ πίνακας $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν ο πίνακας $G(s - \epsilon)$ είναι ΘΠ για κάποιο $\epsilon > 0$.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες στο πεδίο της συχνότητας για τον $G(s)$ να είναι ΑΘΠ, δίνονται από τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 1.3 Έστω ότι έχουμε έναν $n \times n$ ρητό πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς

$$G(s) = C^T(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.3)$$

όπου οι A, B, C και D είναι πραγματικοί πίνακες με καλώς ορισμένες διαστάσεις. Υποθέτουμε πως το $G(s) + G^T(-s)$ έχει βαθμό n σχεδόν παντού στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε, ο $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν και μόνο αν

1. Όλα τα στοιχεία του $G(s)$ είναι αναλυτικά στο $Re[s] \geq 0$.

2. $G(j\omega) + G^T(-j\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{R}$.

3. (α')

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [G(j\omega) + G^T(-j\omega)] > 0, \quad D + D^T \geq 0 \quad \text{αν} \quad \det[D + D^T] = 0.$$

- (β')

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [G(j\omega) + G^T(-j\omega)] > 0 \quad \text{αν} \quad \det[D + D^T] \neq 0.$$

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για του πίνακες A, B, C και D στη (1.3) για να είναι ο $G(s)$ ΘΠ, ΑΘΠ δίνονται από τα λήμματα τα οποία γενικεύονται από τα λήμματα Μίας Εισόδου Μίας Εξόδου σε Πολλών Εισόδων Πολλών Εξόδων.

Θεώρημα 1.4 Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μεταφοράς $G(s)$ δίνεται από τη σχέση (1.3) και είναι τέτοια ώστε το $G(s) + G(-s)$ έχει βαθμό n σχεδόν σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, η $\det(sI - A)$ έχει όλα τα μηδενικά στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό επίπεδο και το (A, B) είναι πλήρες ελέγξιμο. Τότε, ο $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν και μόνο αν για οποιονδήποτε πραγματικό συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα L , υπάρχει ένας πραγματικός συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P , ένα βαθμωτό μέγεθος $v > 0$, οι πραγματικοί πίνακες Q και K , τέτοια ώστε να ισχύει

$$A^T P + P A = -Q Q^T - v L$$

$$P B = C \pm Q K$$

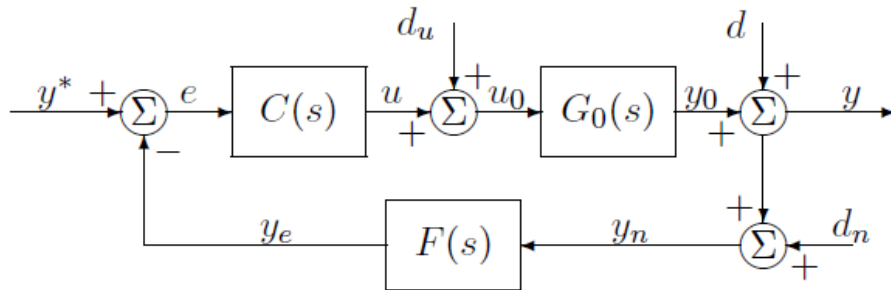
$$K^T K = D^T + D$$

Λήμμα 1.5 Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας μεταφοράς $G(s)$ έχει τους πόλους να προσπίπτουν στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο σύμφωνα με τη σχέση $\operatorname{Re}[s] < -\gamma$, όπου το $\gamma > 0$ και το (A, B, C, D) είναι η ελάχιστη αποτύπωση του πίνακα $G(s)$. Τότε, ο πίνακας $G(s)$ είναι ΑΘΠ αν και μόνο αν ο πίνακας $P = P^T > 0$, και υπάρχουν οι πίνακες Q, K τέτοιοι ώστε

$$A^T P + P A = -Q Q^T - 2\gamma P$$

$$P B = C \pm Q K$$

$$K^T K = D + D^T$$



Σχήμα 1.2: Γενικό μπλοκ διάγραμμα συστήματος ανάδρασης.

Οι ΑΘΠ ιδιότητες των πινάκων μεταφοράς χρησιμοποιούνται για την ανάλυση προσαρμοστικών σχημάτων που χρησιμοποιούνται σε συστήματα Πολλών Εισόδων Πολλών Εξόδων με παρόμοιο τρόπο όπως και στα συστήματα Μίας Εισόδου Μίας Εξόδου.

2. Ευστάθεια Γραμμικών Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων Ανάδρασης

2.1	Γενικευμένο Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα Ανάδρασης	13
2.2	Εσωτερική Ευστάθεια	14
2.3	Συναρτήσεις Ευαισθησίας και Συναρτήσεις Συμπληρωματικής Ευαισθησίας	15
2.4	Αρχή Εσωτερικού Μοντέλου	16

2.1 Γενικευμένο Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα Ανάδρασης

Το μπλοκ διάγραμμα ενός τυπικού συστήματος ανάδρασης εμφανίζεται στο σχήμα 1.2. Παρατηρούμε πως η $G_0(s)$ αποτελεί την συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας και οι συναρτήσεις μεταφοράς $C(s), F(s)$ αποτελούν τον αντισταθμιτή ελέγχου και αντισταθμιτή ανάδρασης, αντίστοιχα. Η είσοδος ελέγχου u που παράγεται από την ανάδραση, έχει αλλοιωθεί από την είσοδο θορύβου d_u και παράγεται η είσοδος u_0 της διεργασίας. Ομοίως, η έξοδος της διεργασίας y_0 αλλοιώνεται από τον θόρυβο d για να σχηματιστεί η πραγματική έξοδος της διεργασίας y . Η μετρούμενη έξοδος y_n αλλοιώνεται και αυτή από θόρυβο d_n , όπου το αποτέλεσμα αποτελεί την είσοδο του αντισταθμιτή $F(s)$, του οποίου η έξοδος y_e αποτελεί την ανάδραση που θα αφαιρεθεί από την επιθυμητή είσοδο y^* , έτσι ώστε να σχηματιστεί το σήμα σφάλματος e .

Οι συναρτήσεις μεταφοράς $G_0(s), C(s), F(s)$ είναι γενικά γνήσιες και αιτιατές, ωστόσο μπορούν να είναι είτε ρητές είτε άρρητες, το οποίο σημαίνει πως μπορεί να υπάρχουν χρονικές καθυστερήσεις.

Το σύστημα ανάδρασης μπορεί να γραφτεί σε μία πιο συμπαγή μητρωϊκή μορφή E/E, με το διάνυσμα εισόδου να είναι το $R = [y^*, d_u, d, d_n]^T$ και τα διανύσματα εξόδου να είναι το $E = [e, u_0, y, y_n]^T$ και το $Y = [y_0, y_e, u]^T$. Η γενικευμένη μορφή είναι

$$E = H(s)R, \quad Y = I_1 E + I_2 R \quad (2.1)$$

όπου

$$H(s) = \frac{1}{1 + FCG_0} \begin{bmatrix} 1 & -FG_0 & -F & -F \\ C & 1 & -FC & -FC \\ CG_0 & G_0 & 1 & -FCG_0 \\ CG_0 & G_0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Εσωτερική Ευστάθεια

Η σχέση (2.1) συσχετίζει όλα τα σήματα του συστήματος με τις εξωτερικές εισόδους y^*, d_u, d, d_n . Από πρακτικής άποψης είναι σημαντικό να εγγυηθεί πως για οποιοδήποτε φραγμένο σήμα εισόδου R , όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου να είναι φραγμένα. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα οριστεί η έννοια της εσωτερικής ευστάθειας.

Ορισμός 2.1 Το σύστημα ανάδρασης είναι εσωτερικά ευσταθές αν για οποιαδήποτε εξωτερική είσοδο R , τα σήματα Y, E είναι φραγμένα και κατ' επέκτασιν ισχύει

$$\|Y\|_\infty \leq c_1 \|R\|_\infty, \quad \|E\|_\infty \leq c_2 \|R\|_\infty \quad (2.2)$$

για κάποιες σταθερές $c_1, c_2 \geq 0$ που είναι ανεξάρτητες από το R .

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το σύστημα ανάδρασης (2.1) να είναι εσωτερικά ευσταθές, θα πρέπει κάθε στοιχείο του πίνακα μεταφοράς $H(s)$ να έχει ευσταθείς πόλους, δηλαδή να βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

Η έννοια της εσωτερικής ευστάθειας μπορεί να είναι μπερδευτική στους αναγνώστες, καθώς στα περισσότερα προπτυχιακά βιβλία, η ευστάθεια ενός συστήματος ανάδρασης ελέγχεται με την εύρεση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$1 + FCG_0 = 0$$

Το παρακάτω παράδειγμα θα λύσει τις διαφορές μεταξύ των δύο τρόπων ανάλυσης της ευστάθειας.

Παράδειγμα 2.1 Έστω ότι έχουμε τα εξής

$$G_0(s) = \frac{1}{s-2}, \quad C(s) = \frac{s-2}{s-5}, \quad F(s) = 1$$

για τα οποία η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής

$$1 + FCG_0 = 1 + \frac{(s-2)}{(s+5)(s-2)} = 1 + \frac{1}{s+5} = 0 \quad (2.3)$$

Υπάρχει μόνο μία ρίζα στο $s = -6$, το οποίο σημαίνει πως έχουμε ευστάθεια. Αντιθέτως, ο πίνακας μεταφοράς $H(s)$ υπολογίστηκε και έχει τιμή

$$\begin{bmatrix} e \\ u_0 \\ y \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{s+6} \begin{bmatrix} s+5 & -(s+5)/(s-2) & -(s+5) & -(s+5) \\ s-2 & s+5 & -(s-2) & -(s-2) \\ 1 & (s+5)/(s-2) & s+5 & 1 \\ 1 & (s+5)/(s-2) & s+5 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ d_u \\ d \\ d_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

το οποίο μας υποδεικνύει μία φραγμένη διαταραχή d_u θα δημιουργήσει μη φραγμένα σήματα e, y, y_n , με αποτέλεσμα το σύστημα κλειστού βρόχου να μην είναι εσωτερικά ευσταθές. Θα πρέπει να σημειωθεί πως στον υπολογισμό των σχέσεων (2.3) και (2.4), υποθέτουμε πως το $\frac{s+a}{s+a}g(s)$ και $g(s)$ είναι οι ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς για οποιαδήποτε σταθερά a . Στη σχέση (2.3), η απαλοιφή του πόλου στο $s = 2$ του $G_0(s)$ από το μηδενικό στο $s = 2$ του $C(s)$ δεν έχει επιρροή στην εσωτερική ευστάθεια. Αυτό το παράδειγμα επιδεικνύει την πλήρη αποτελεσματικότητα της εσωτερικής ευστάθειας συγκριτικά με την κλασσική ευστάθεια που ορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $1 + FCG_0 = 0$. Αν ωστόσο

οι συναρτήσεις μεταφοράς G_0, C, F είναι σχετικά πρώτες, δηλαδή $G_0(s) = \frac{n_0(s)}{p_0(s)}$, $C(s) = \frac{n_c(s)}{p_c(s)}$, $F(s) = \frac{n_f(s)}{p_f(s)}$, τότε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για εσωτερική ευστάθεια είναι πως οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$p_0 p_c p_f + n_0 n_c n_f = 0 \quad (2.5)$$

να βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό μιγαδικό επίπεδο. Για παράδειγμα, αν $n_0 = 1$, $p_0 = s - 2$, $n_c = s - 2$, $p_c = s + 5$, $n_f = 1$, $p_f = 1$, τότε θα έχουμε

$$(s - 2)(s + 5) + (s - 2) = (s - 2)(s + 6) = 0$$

όπου θα υπάρχει μία ασταθής ρίζα, με συνέπεια το σύστημα κλειστού βρόχου να μην είναι εσωτερικά ευσταθές.

2.3 Συναρτήσεις Ευαισθησίας και Συναρτήσεις Συμπληρωματικής Ευαισθησίας

Καθώς η εσωτερική ευστάθεια μας εγγυάται πως όλα τα σήματα του κλειστού βρόχου είναι φραγμένα για οποιεσδήποτε φραγμένες εισόδους, οι προδιαγραφές για την απόδοση περιορίζουν το μέγεθος κάποιων φραγμάτων των σημάτων. Για παράδειγμα, ένας βασικός στόχος ενός συστήματος κλειστού βρόχου είναι να κρατά το σφάλμα μεταξύ της εξόδου y με το επιθυμητό σήμα y^* μικρό στην παρουσία εξωτερικών εισόδων, όπως επιθυμητές εισόδους, φραγμένες διαταραχές και θόρυβος. Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα σύστημα κλειστού βρόχου σύμφωνα με το σχήμα 1.2, με το $F(s) = 1$ και το $d_n = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1), μπορούμε να έχουμε τις εξής σχέσεις ανάμεσα στην έξοδο της διεργασίας y με τις εξωτερικές εισόδους y^*, d, d_n :

$$y = T_0 y^* + S_0 d - T_0 d_n \quad (2.6)$$

όπου τα

$$S_0 \triangleq \frac{1}{1 + CG_0}, \quad T_0 \triangleq \frac{CG_0}{1 + CG_0}$$

είναι η συνάρτηση ευαισθησίας και συνάρτηση συμπληρωματικής ευαισθησίας αντίστοιχα. Επιπλέον, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως ισχύει η εξής σχέση

$$S_0 + T_0 = 1 \quad (2.7)$$

Από τη σχέση (2.6) παρατηρούμε πως για να έχουμε καλή παρακολούθηση και απόρριψη της διαταραχής εξόδου, θα πρέπει να επιλεγεί το σύστημα ανοιχτού βρόχου $L_0 \triangleq CG_0$ τόσο μεγάλο, έτσι ώστε να έχουμε το $S_0 \approx 0$ και το $T_0 \approx 1$. Αντιθέτως, η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του θορύβου της μέτρησης d_n στο y χρειάζεται το L_0 να είναι μικρό, έτσι ώστε το $T_0 \approx 0$, το οποίο μας δίνει από τη σχέση (2.7) το $S_0 \approx 1$. Το παραπάνω σκεπτικό μας δείχνει τους συμβιβασμούς που προκύπτουν κατά τη σχεδίαση συστημάτων κλειστού βρόχου, το οποίο είναι η σωστή παρακολούθηση και απόρριψη της διαταραχής ($|L_0| \gg 1, S_0 \approx 0, T_0 \approx 1$) να ανταλλαχθεί με τη μείωση του θορύβου μέτρησης ($|L_0| \ll 1, S_0 \approx 1, T_0 \approx 0$). Σε πολλά προβλήματα ελέγχου, τα y^*, d συνήθως είναι σήματα χαμηλής συχνότητας και το d_n επιδρά στο σύστημα μόνο σε υψηλές συχνότητες. Έτσι σε αυτή την περίπτωση το $C(s)$ πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε σε χαμηλές συχνότητες το L_0 να είναι μεγάλο, με $S_0 \approx 0, T_0 \approx 1$, και σε υψηλές συχνότητες το L_0 να είναι μικρό με $S_0 \approx 1, T_0 \approx 0$. Άλλος ένας λόγος που χρειαζόμαστε το κέρδος ανοιχτού βρόχου L_0 να είναι μικρό είναι πως στις

υψηλές συχνότητες υπάρχουν αβεβαιότητες από το δυναμικό μοντέλο της διεργασίας, του οποίου οι επιδράσεις θα μελετηθούν σε παρακάτω κεφάλαια.

2.4 Αρχή Εσωτερικού Μοντέλου

Σε πολλά προβλήματα ελέγχου, η επιθυμητή είσοδος y^* μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$Q_r(s)y^* = 0 \quad (2.8)$$

όπου $Q_r(s)$ είναι ένα γνωστό πολυώνυμο, και $s \triangleq \frac{d}{dt}$ είναι ο διαφορικός τελεστής. Για παράδειγμα, αν το $y^* = \text{constant}$, τότε $Q_r(s) = s$. Όταν το $y^* = t$, τότε το $Q_r(s) = s^2$ και όταν το $y^* = A \sin(\omega_0 t)$ για κάποια σταθερά A , ω_0 , τότε το $Q_r(s) = s^2 + \omega_0^2$, κ.α.. Αντίστοιχα, μία ντετερμινιστική διαταραχή d μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$Q_d(s)d = 0 \quad (2.9)$$

για κάποιο γνωστό $Q_d(s)$, το οποίο είναι διαθέσιμο σε περίπτωση γνώσης της πληροφορίας που σχετίζεται με τον θόρυβο d . Για παράδειγμα, αν το d είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με άγνωστο πλάτος και φάση, αλλά με γνωστή γωνιακή συχνότητα ω_d , τότε μπορεί να μοντελοποιηθεί ο θόρυβος με την σχέση (2.9) όπου το $Q_d(s) = s^2 + \omega_d^2$.

Η ιδέα πίσω από την Αρχή Εσωτερικού Μοντέλου είναι πως όταν συμπεριληφθεί ο παράγοντας $\frac{1}{Q_r(s)Q_d(s)}$ στον αντισταθμιστή $C(s)$, τότε θα εξαλειφθεί η επίδραση των y^*, d στο σφάλμα παρακολούθησης $e = y^* - y$. Για να δούμε πως λειτουργεί η ιδέα αυτή θα θεωρήσουμε πως έχουμε το σύστημα του σχήματος 1.2 με το $F(s) = 1$, $d_u = d_n = 0$ και με επιθυμητή είσοδο y^* και θόρυβο d που ικανοποιούν τις σχέσεις (2.8) και (2.9) αντίστοιχα με γνωστά πολυώνυμα $Q_r(s)$, $Q_d(s)$. Τώρα θα αντικαταστήσουμε το $C(s)$ του σχήματος 1.2 με

$$\bar{C}(s) = \frac{C(s)}{Q(s)}, \quad Q(s) = Q_r(s)Q_d(s) \quad (2.10)$$

όπου το $C(s)$ της σχέσης (2.10) έχει επιλεγεί με τέτοιον τρόπο, έτσι ώστε οι πόλοι κάθε στοιχείου του $H(s)$ της (2.1) με την αντικατάσταση του $C(s)$ από το $\bar{C}(s)$ να είναι ευσταθείς. Από την σχέση (2.6), με τα $d_u = d_n = 0$ και με την αντικατάσταση του C με το C/Q , θα προκύψει

$$e = y^* - y = \frac{1}{1 + \frac{CG_0}{Q}} y^* - \frac{1}{1 + \frac{CG_0}{Q}} d = \frac{1}{Q + CG_0} Q(y^* - d)$$

Επειδή το $Q = Q_r Q_d$, τα y^*, d θα εξαλειφθούν λόγω των σχέσεων (2.8) και (2.9), με αποτέλεσμα να έχουμε

$$e = \frac{1}{Q + CG_0} [0]$$

όπου μαζί με την ευστάθεια του $1/(Q + CG_0)$ που εξασφαλίστηκε από την επιλογή του $C(s)$, θα έχουμε πως το σφάλμα $e(t) = y^*(t) - y(t)$ θα τείνει στο 0 εκθετικά γρήγορα.

Η ιδιότητα της ακριβής παρακολούθησης από την αρχή του εσωτερικού μοντέλου μπορεί να αποδειχθεί και με τη χρήση των συναρτήσεων ευαισθησίας και συμπληρωματικής ευαισθησίας S_0, T_0 στις συχνότητες των y^*, d . Για παράδειγμα, εάν η $y^* = \sin(\omega_0 t)$ και $d = \sin(\omega_1 t)$, με το $Q(s) = (s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega_1^2)$, τότε θα έχουμε

$$S_0 = \frac{Q}{Q + CG_0}, \quad T_0 = \frac{CG_0}{Q + CG_0}$$

και $S_0(j\omega_0) = S_0(j\omega_1) = 0, T_0(j\omega_0) = T_0(j\omega_1) = 1$.

Μια ειδική κατηγορία της αρχής εσωτερικού μοντέλου αποτελεί ο ολοκληρωτικός έλεγχος όπου το $Q(s) = s$. Αυτός ο έλεγχος χρησιμοποιείται ευρέως στη βιομηχανία καθώς εξαλείφει τις επιδράσεις των επιθυμητών ενεργειών που εφαρμόζονται στο σύστημα και των διαταραχών στο σφάλμα παρακολούθησης.

3. Ασκήσεις Κατανόησης

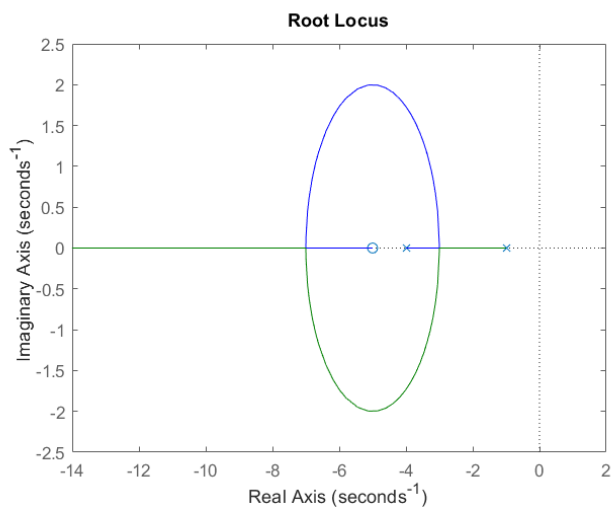
3.1	Άσκηση 3.13	18
3.2	Άσκηση 3.14	24
3.3	Άσκηση 3.15	25
3.4	Άσκηση 3.17	27

3.1 Άσκηση 3.13

(α) Έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_1(s) = \frac{s + 5}{(s + 1)(s + 4)}$$

η οποία έχει μηδενικό στο $s = -5$ και δύο πόλους στο $s = -1$ και $s = -4$ αντίστοιχα. Βλέπουμε πως οι πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο, οπότε είναι ευσταθές το σύστημα. Επίσης, βλέπουμε πως η σχέση είναι αναλυτική στο $Re[s] > 0$ ως προς τη μεταβλητή s . Οι ρίζες και το μηδενικό της συνάρτησης εμφανίζονται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_1(s)$.

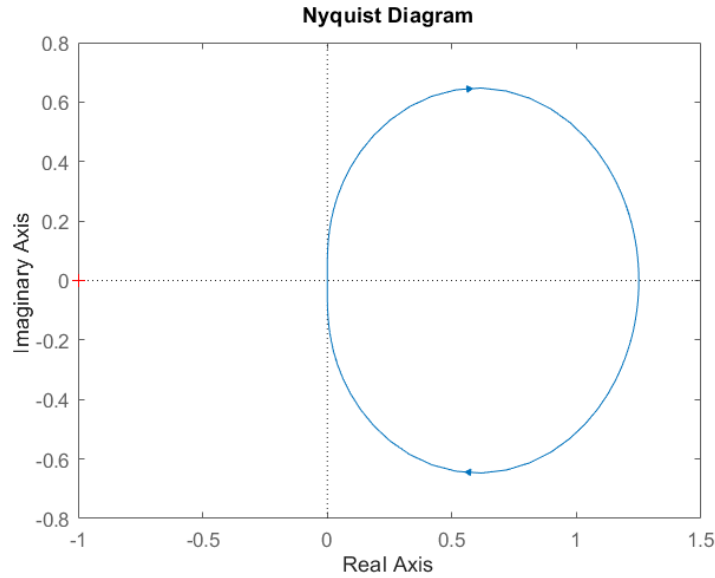
Το επόμενο βήμα είναι να δούμε για ποιες πραγματικές τιμές του ω το πραγματικό μέρος της συνάρτησης μεταφοράς είναι θετική. Οπότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
G_1(j\omega) &= \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)} \\
&= \frac{j\omega + 5}{-\omega^2 + 5j\omega + 4} \\
&= \frac{(j\omega + 5)(5j\omega + (\omega^2 - 4))}{(5j\omega + (\omega^2 - 4))(5j\omega - (\omega^2 - 4))} \\
&= \frac{-5\omega^2 + j\omega(\omega^2 - 4) + 25j\omega + 5(\omega^2 - 4)}{-25\omega^2 - (\omega^2 - 4)^2} \\
&= \frac{-5\omega^2 + 5\omega^2 - 20}{-25\omega^2 - (\omega^2 - 4)^2} + j \frac{-4\omega + \omega^3 + 25\omega}{-25\omega^2 - (\omega^2 - 4)^2} \\
\Rightarrow G_1(j\omega) &= \frac{20}{25\omega^2 + (\omega^2 - 4)^2} - j \frac{\omega^3 + 21\omega}{25\omega^2 + (\omega^2 - 4)^2}
\end{aligned}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα παρατηρούμε πως το

$$Re[G_1(j\omega)] = \frac{20}{25\omega^2 + (\omega^2 - 4)^2} > 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

Οπότε έχουμε πως η συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ είναι ΘΠ. Επιπλέον, για επαλήθευση βλέπουμε πως και το σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_1(s)$.

Από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς παρατηρούμε πως ο σχετικός βαθμός είναι $n^* = 1$. Οπότε, για να δούμε εάν είναι ΑΘΠ θα ελέγξουμε το όριο

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 Re[G(j\omega)] > 0$$

Οπότε, έχουμε ότι:

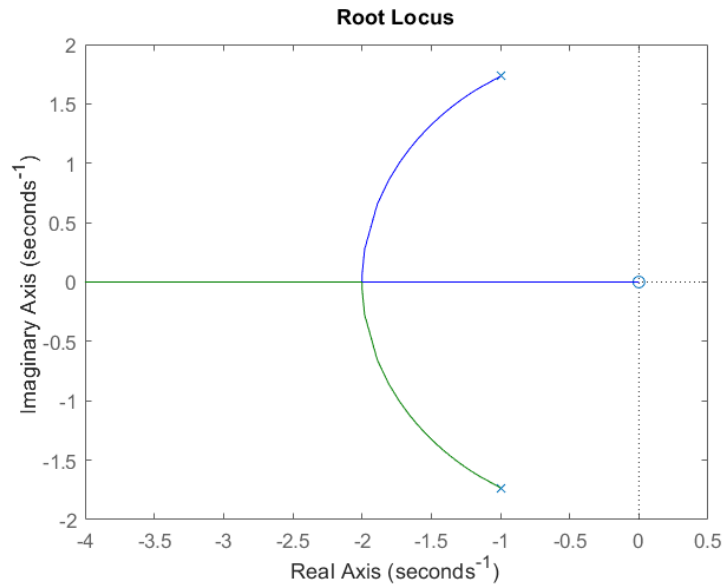
$$\begin{aligned}
 \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G_1(j\omega)] &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \frac{20}{25\omega^2 + (\omega^2 - 4)^2} \\
 &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{20\omega^2}{\omega^4 + 21\omega^2 + 16} \\
 &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{20\omega^2}{\omega^4} = 0
 \end{aligned}$$

Από το αποτέλεσμα του ορίου παρατηρούμε πως η συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ δεν είναι ΑΘΠ.

(β) Έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_2(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$$

η οποία έχει μηδενικό στο $s = 0$ και έναν διπλό πόλο στο $s = -2$. Βλέπουμε πως οι πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο, οπότε είναι ευσταθές το σύστημα. Επίσης, βλέπουμε πως η σχέση είναι αναλυτική στο $\operatorname{Re}[s] > 0$ ως προς τη μεταβλητή s . Οι ρίζες και το μηδενικό της συνάρτησης εμφανίζονται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3: Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_2(s)$.

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε για ποιες πραγματικές τιμές του ω το πραγματικό μέρος της συνάρτησης μεταφοράς είναι θετική. Οπότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 G_2(j\omega) &= \frac{j\omega}{(j\omega + 2)^2} \\
 &= \frac{j\omega(j\omega - 2)^2}{(j\omega + 2)^2(j\omega - 2)^2} \\
 &= \frac{j\omega(j\omega - 2)^2}{[(j\omega + 2)(j\omega - 2)]^2}
 \end{aligned}$$

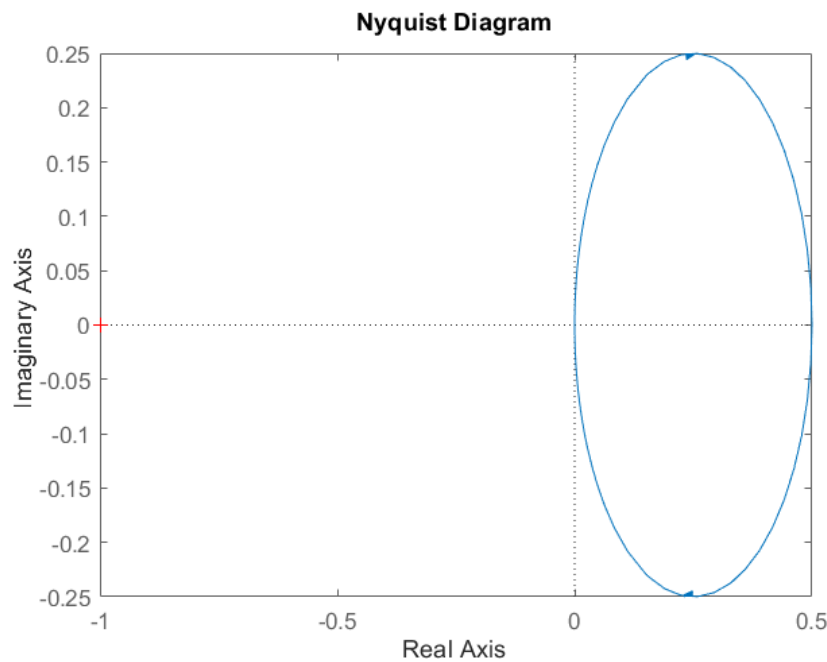
$$= \frac{-j\omega^3 + 4\omega^2 + 4j\omega}{(\omega^2 + 4)^2}$$

$$\Rightarrow G_2(j\omega) = \frac{4\omega^2}{(\omega^2 + 4)^2} + j\frac{4\omega - \omega^3}{(\omega^2 + 4)^2}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα παρατηρούμε το

$$\operatorname{Re}[G_2(j\omega)] = \frac{4\omega^2}{(\omega^2 + 4)^2} > 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty)$$

Οπότε έχουμε πως η συνάρτηση μεταφοράς $G_2(s)$ είναι ΘΠ. Επιπλέον, για επαλήθευση βλέπουμε πως και το σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_2(s)$.

Από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς παρατηρούμε πως ο σχετικός βαθμός είναι $n^* = 1$. Οπότε, για να δούμε εάν είναι ΑΘΠ θα ελέγξουμε το όριο

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G_2(j\omega)] > 0$$

Οπότε, έχουμε ότι:

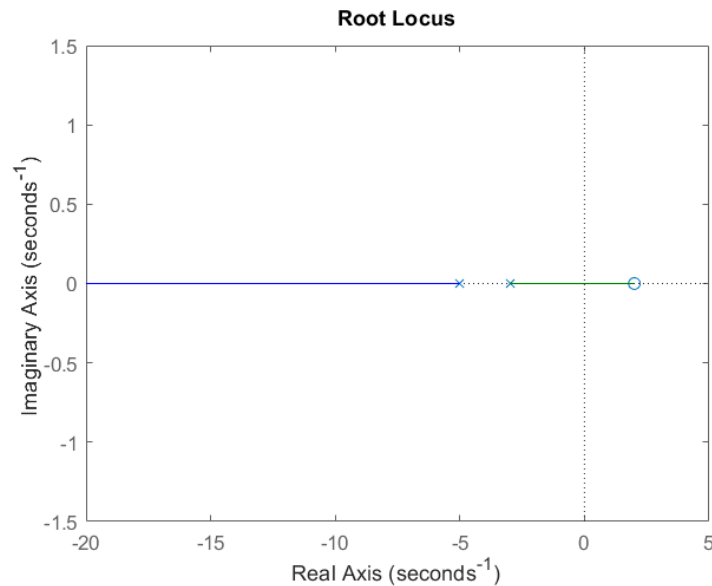
$$\begin{aligned} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{4\omega^2}{(\omega^2 + 4)^2} \\ &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{4\omega^4}{\omega^4 + 8\omega^2 + 16} \\ &= \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{4\omega^4}{\omega^4} = 4 > 0 \end{aligned}$$

Από το αποτέλεσμα του ορίου παρατηρούμε πως η συνάρτηση μεταφοράς $G_2(s)$ είναι και ΑΘΠ.

(γ) Έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

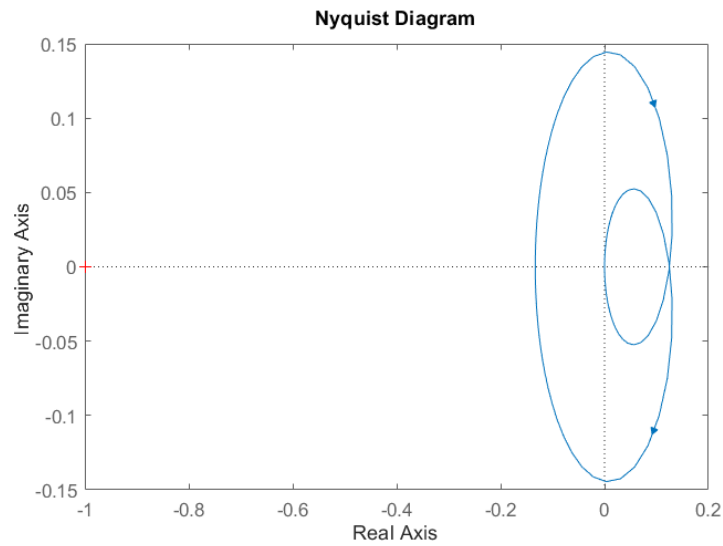
$$G_3(s) = \frac{s - 2}{(s + 3)(s + 5)}$$

η οποία έχει μηδενικό στο $s = 2$ και δύο πόλους στο $s = -3$ και $s = -5$ αντίστοιχα. Βλέπουμε πως οι πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο, οπότε είναι ευσταθές το σύστημα. Ωστόσο, υπάρχει ασταθές μηδενικό στη συνάρτηση μεταφοράς. Οι ρίζες και το μηδενικό της συνάρτησης εμφανίζονται στο σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_3(s)$.

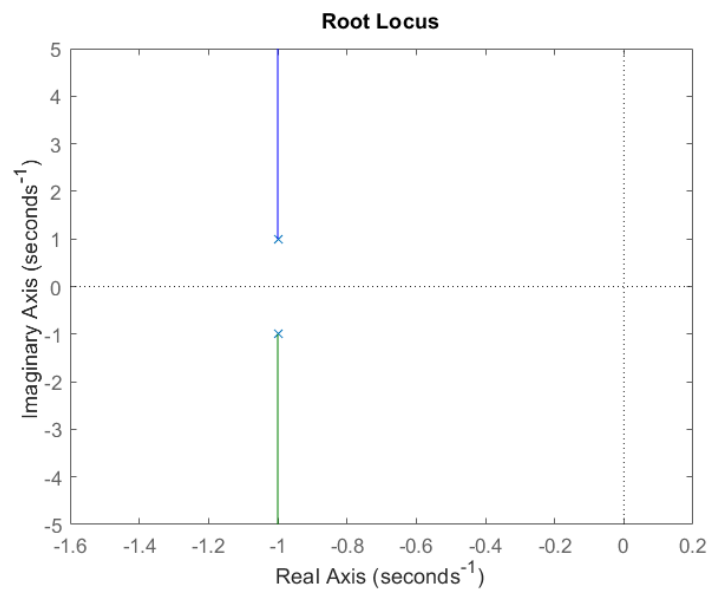
Θα ελέγξουμε εάν η $1/G_3(s)$ είναι ΘΠ. Στην αντιστροφή παρατηρούμε πως έχουμε πόλο στο $s = 2$. Συνεπώς, έχουμε ασταθές σύστημα και το $\text{Re}[G_3(s)]$ δεν είναι θετικό για όλα s . Οπότε δεν είναι ΘΠ. Κατ' επέκτασιν έχουμε πως ούτε και η $G_3(s)$ δεν είναι ΘΠ. Επιπλέον, για επαλήθευση βλέπουμε πως και το σχήμα 3.6. Επειδή δεν είναι ΘΠ, τότε δε θα μπορεί να είναι ούτε ΑΘΠ.

Σχήμα 3.6: Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_3(s)$.

(δ) Έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς

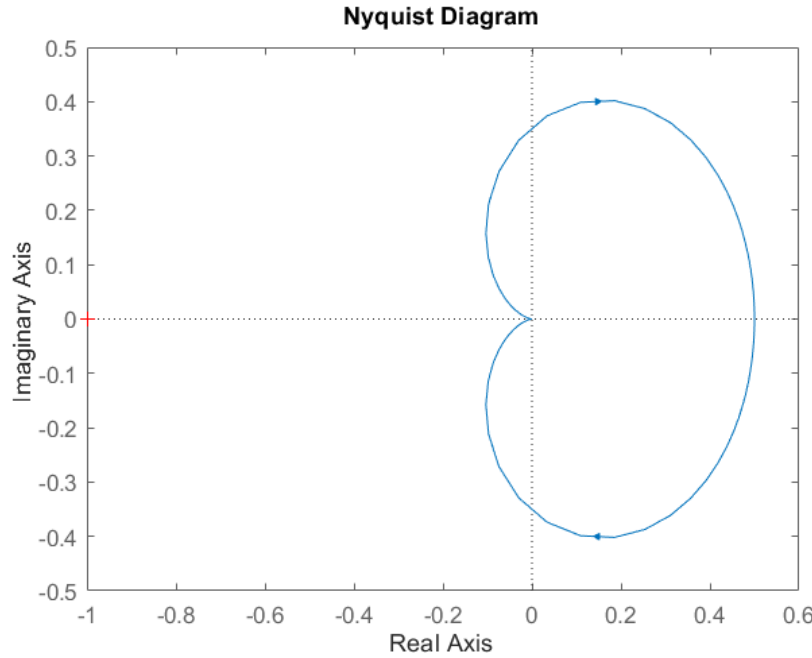
$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

η οποία έχει δύο πόλους στο $s = -1 + j$ και $s = -1 - j$ αντίστοιχα. Βλέπουμε πως οι πόλοι βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο, οπότε είναι ευσταθές το σύστημα. Οι ρίζες της συνάρτησης εμφανίζονται στο σχήμα 3.7.

Σχήμα 3.7: Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς $G_4(s)$.

Παρατηρούμε πως ο σχετικός βαθμός της συνάρτησης μεταφοράς είναι $n^* = 2 > 1$. Οπότε η

συνάρτηση δεν μπορεί να είναι ούτε ΘΠ ούτε ΑΘΠ. Στο σχήμα 3.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς $G_4(s)$.



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα Nyquist συνάρτησης μεταφοράς $G_4(s)$.

3.2 Άσκηση 3.14

Έχουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(s)$ και $G_2(s)$, οι οποίες είναι ΘΠ σε πρώτο βήμα, και ΑΘΠ σε δεύτερο βήμα. Με βάσει τις γνωστές ιδιότητες, θα ελέγξουμε τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς για να δούμε εάν είναι και αυτές ΘΠ.

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $G_a(s) = G_1(s) + G_2(s)$. Καθώς οι επιμέρους συναρτήσεις είναι ΘΠ, τότε θα είναι αναλυτικές στο $\text{Re}[s] > 0$ και επιπλέον έχουμε πως τα $\text{Re}[G_1(s)] \geq 0$ και $\text{Re}[G_2(s)] \geq 0$. Οπότε, η $G_a(s)$ θα είναι και αυτή αναλυτική στο $\text{Re}[s] > 0$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\text{Re}[G_a(s)] = \text{Re}[G_1(s)] + \text{Re}[G_2(s)] \geq 0$$

Έτσι, θα έχουμε πως η $G_a(s)$ είναι και αυτή ΘΠ.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις είναι ΑΘΠ, τότε η συνάρτηση μεταφοράς $G_a(s)$ θα είναι πραγματική για πραγματικά s , καθώς είναι οι επιμέρους συναρτήσεις. Θα είναι αναλυτική στο $\text{Re}[s] > 0$ καθώς είναι και οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς. Αντίστοιχα, έχουμε πως το πραγματικό μέρος της είναι και αυτό θετικό καθώς

$$\text{Re}[G_a(s)] = \text{Re}[G_1(s)] + \text{Re}[G_2(s)] \geq 0$$

Επίσης, αφού οι πόλοι και τα μηδενικά και των δύο συναρτήσεων βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο, τότε θα είναι και του αθροίσματος. Έτσι, θα έχουμε πως η $G_a(s)$ είναι και αυτή ΑΘΠ.

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $G_m(s) = G_1(s)G_2(s)$. Καθώς οι επιμέρους συναρτήσεις είναι ΘΠ, τότε θα είναι αναλυτικές στο $\text{Re}[s] > 0$ και επιπλέον έχουμε πως τα $\text{Re}[G_1(s)] \geq 0$ και $\text{Re}[G_2(s)] \geq 0$. Για ΘΠ συναρτήσεις γνωρίζουμε πως η φάση τους είναι μικρότερη ή ίση από $\pi/2$ για $s > 0$. Οπότε, θα δούμε κατά απόλυτη τιμή την φάση της συνάρτησης μεταφοράς.

$$|\angle G_m(s)| = |\angle(G_1(s)G_2(s))| = |\angle G_1(s)| + |\angle G_2(s)| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$|\angle G_m(s)| \leq \pi$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα παρατηρούμε πως η γωνία της συνάρτησης μεταφοράς μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από $\pi/2$. Αυτό σημαίνει πως δεν μπορεί να είναι $\text{Re}[G_m(s)] > 0$ για $\text{Re}[s] > 0$. Συνεπώς, δεν μπορεί να είναι ΘΠ. Επιπλέον, η ίδια ανάλυση θα γινόταν και στην περίπτωση που οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς ήταν ΑΘΠ. Οπότε, δεν είναι ούτε ΑΘΠ.

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $G_f(s) = G_1(s)[1 + G_2(s)]^{-1}$. Έχουμε πως οι συναρτήσεις $G_1(s)$ και $G_2(s)$ είναι ΘΠ. Οπότε για πραγματικά s θα είναι και αυτές πραγματικές και θα είναι αναλυτικές στο $\text{Re}[s] > 0$. Επιπλέον, έχουμε πως τα $\text{Re}[G_1(s)] \geq 0$ και $\text{Re}[G_2(s)] \geq 0$. Θα εξετάσουμε τώρα τον παρονομαστή συνολικά για να δούμε τι συνάρτηση είναι.

Γενικά, έστω πως έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = 1$. Παρατηρούμε πως είναι αναλυτική για $\text{Re}[s] > 0$ και πως το $\text{Re}[G(s)] = 1 > 0$. Επιπλέον, έχουμε σχετικό βαθμό $n^* = 0$, με αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε τα δύο αυτά κριτήρια για να δούμε πως η συνάρτηση μεταφοράς είναι $G(s)$ είναι ΑΘΠ. Οπότε ο παρονομαστής $1 + G_2(s)$ θα είναι ΑΘΠ ως άθροισμα θετικών πραγματικών συναρτήσεων. Οπότε θα εξετάσουμε τη γωνία της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς.

$$|\angle G_f(s)| = \left| \angle \left(\frac{G_1(s)}{1 + G_2(s)} \right) \right| = |\angle G_1(s)| - |\angle(1 + G_2(s))| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$|\angle G_f(s)| \leq 0$$

Παρατηρούμε πως η γωνία κατά απόλυτη τιμή είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός το οποίο είναι μικρότερο από $\pi/2$. Αυτό σημαίνει πως το $\text{Re}[G_f(s)] > 0$ για $\text{Re}[s] > 0$. Οπότε, έχουμε πως η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι ΘΠ. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και στην περίπτωση που τα $G_1(s), G_2(s)$ είναι ΑΘΠ. Συνεπώς, έχουμε πως η $G_f(s)$ είναι ΑΘΠ.

3.3 Άσκηση 3.15

(α) Έχουμε τις εξής συναρτήσεις μεταφοράς

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad L(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$$

Επίσης, έχουμε και τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_\epsilon(s) = G_1(s) + \epsilon L(s)$$

όπου το $\epsilon > 0$. Θα βρούμε ένα άνω φράγμα $\epsilon^* > 0$, τέτοιο ώστε να έχουμε το $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$ όπου η $G_\epsilon(s)$ να είναι ΘΠ, ΑΘΠ. Οπότε, έχουμε ότι:

$$G_\epsilon(s) = \frac{1}{s+1} + \epsilon \frac{s-1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2} + \epsilon \frac{s-1}{(s+1)^2}$$

$$G_\epsilon(s) = \frac{(1+\epsilon)s+1-\epsilon}{(s+1)^2}$$

Καθώς έχουμε πως η $G_\epsilon(s)$ είναι ΘΠ, ΑΘΠ, τότε θα είναι και η $1/G_\epsilon(s)$. Άρα, για να είναι η αντίστροφη ΘΠ, ΑΘΠ θα πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο και να είναι αναλυτική στο $\text{Re}[s] > 0$. Τα παραπάνω ισχύουν λόγω των ιδιοτήτων των ΘΠ, ΑΘΠ. Επομένως, οι συντελεστές του πολωνύμου του παρονομαστή θα πρέπει να είναι θετικοί. Άρα θα έχουμε ότι

$$1 + \epsilon > 0, \quad 1 - \epsilon > 0$$

$$\epsilon > -1, \quad \epsilon < 1$$

Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση το ϵ θα πρέπει να είναι μικρότερο της μονάδας. Άρα το $\epsilon^* = 1$. Οπότε, για να είναι η G_ϵ ΘΠ, ΑΘΠ θα πρέπει η παράμετρος $\epsilon \in [0, 1)$.

(β) Έστω πως τώρα έχουμε τις εξής συναρτήσεις μεταφοράς

$$G_1(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}, \quad L(s) = -\frac{1}{s+1}$$

Επίσης, έχουμε και τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_\epsilon(s) = G_1(s) + \epsilon L(s)$$

όπου το $\epsilon > 0$. Θα βρούμε ένα άνω φράγμα $\epsilon^* > 0$, τέτοιο ώστε να έχουμε το $\epsilon \in [0, \epsilon^*)$ όπου η $G_\epsilon(s)$ να είναι ΘΠ, ΑΘΠ. Οπότε, έχουμε ότι:

$$G_\epsilon(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} - \epsilon \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{(s+5)(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+1)} - \epsilon \frac{(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)(s+1)}$$

$$= \frac{s^2 + 6s + 5 - \epsilon(s^2 + 5s + 6)}{(s+2)(s+3)(s+1)}$$

$$G_\epsilon(s) = \frac{(1-\epsilon)s^2 + (6-5\epsilon)s + (5-6\epsilon)}{(s+2)(s+3)(s+1)}$$

Καθώς έχουμε πως η $G_\epsilon(s)$ είναι ΘΠ, ΑΘΠ, τότε θα είναι και η $1/G_\epsilon(s)$. Άρα, για να είναι η αντίστροφη ΘΠ, ΑΘΠ θα πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο και να είναι αναλυτική στο $\text{Re}[s] > 0$. Τα παραπάνω ισχύουν λόγω των ιδιοτήτων των ΘΠ, ΑΘΠ. Επομένως, οι συντελεστές του πολωνύμου του παρονομαστή θα πρέπει να είναι θετικοί. Άρα θα έχουμε ότι

$$1 - \epsilon > 0, \quad 6 - 5\epsilon > 0, \quad 5 - 6\epsilon > 0$$

$$\epsilon < 1, \quad \epsilon < \frac{6}{5}, \quad \epsilon < \frac{5}{6}$$

Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση το ϵ θα πρέπει να είναι μικρότερο του $5/6$. Άρα το $\epsilon^* = 5/6$. Οπότε, για να είναι η G_ϵ ΘΠ, ΑΘΠ θα πρέπει η παράμετρος $\epsilon \in [0, 5/6)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα διαπιστώθηκε πως με για να είναι η συνολική συνάρτηση μεταφοράς $\Theta\Pi$, $A\Theta\Pi$, ο τελεστής ϵ θα πρέπει να είναι μικρότερος μιας τιμής ϵ^* . Αυτή η τιμή καθορίζεται από το πρόσημο των συντελεστών του παρονομαστή της αντίστροφης συνάρτησης μεταφοράς. Καθώς γνωρίζουμε πως η αντίστροφη είναι $\Theta\Pi$, $A\Theta\Pi$, αφού η κανονική είναι και αυτή $\Theta\Pi$, $A\Theta\Pi$, τότε εύκολα μπορούμε να εκτιμήσουμε το εύρος τιμών της παραμέτρου ϵ , έτσι ώστε να μην παραβιάζονται οι ιδιότητες των $\Theta\Pi$, $A\Theta\Pi$ συναρτήσεων μεταφοράς.

3.4 Άσκηση 3.17

Έχουμε το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{e} = Ae + B\phi \sin t, \quad e_1 = C^T e$$

$$\dot{\phi} = -e_1 \sin t$$

όπου τα $\phi, e_1 \in \mathcal{R}^1$, $e \in \mathcal{R}^n$ και το (A, B) είναι ελέγξιμο. Επιπλέον, γνωρίζουμε πως το σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς $W_m(s) = C^T(sI - A)^{-1}B$ η οποία είναι $A\Theta\Pi$ (SPR). Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα LKY (1.3) έτσι ώστε να βρούμε μία συνάρτηση Lyapunov για να εξετάσουμε την ευστάθεια γύρω από το σημείο ισορροπίας $(\phi_e, e_e) = (0, 0)$.

Από το λήμμα αυτό θα προκύψουν οι εξής σχέσεις

$$A^T P + PA = -qq^T - \nu L$$

$$PB = C$$

επειδή το $d = 0$. Για να ισχύουν οι παραπάνω ισότητες γνωρίζουμε πως ο πίνακας $P = P^T > 0$ και ο πίνακας $L = L^T > 0$. Επιπλέον, έχουμε πως το $\nu > 0$ και για το διάνυσμα q θα έχουμε πως ο πίνακας $Q = qq^T = Q^T > 0$. Οπότε, το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια ικανή υποψήφια συνάρτηση Lyapunov, έτσι ώστε να εξετάσουμε την ευστάθεια του παραπάνω συστήματος.

Έστω πως έχουμε την εξής συνάρτηση Lyapunov

$$V(e, \phi) = e^T P e + \frac{1}{\gamma} \phi^2$$

με το $\gamma > 0$. Η συνάρτηση αυτή παρατηρούμε πως είναι θετικώς ορισμένη σε όλο το πεδίο ορισμού της, πλην του μηδενός, και είναι ακτινικά μη φραγμένη. Οπότε, τώρα θα εξετάσουμε την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \frac{2}{\gamma} \phi \dot{\phi} \\ &= (Ae + B\phi \sin t)^T P e + e^T P (Ae + B\phi \sin t) - \frac{2}{\gamma} e_1 \phi \sin t \\ &= e^T A^T P e + \phi \sin t B^T P e + e^T P A e + \phi \sin t e^T P B - \frac{2}{\gamma} e_1 \phi \sin t \\ &= e^T (A^T P + PA) e + \phi \sin t B^T P e + \phi \sin t e^T P B - \frac{2}{\gamma} e_1 \phi \sin t \\ &= e^T (-qq^T - \nu L) e + 2\phi \sin t B^T P e - \frac{2}{\gamma} \phi \sin t C^T e \end{aligned}$$

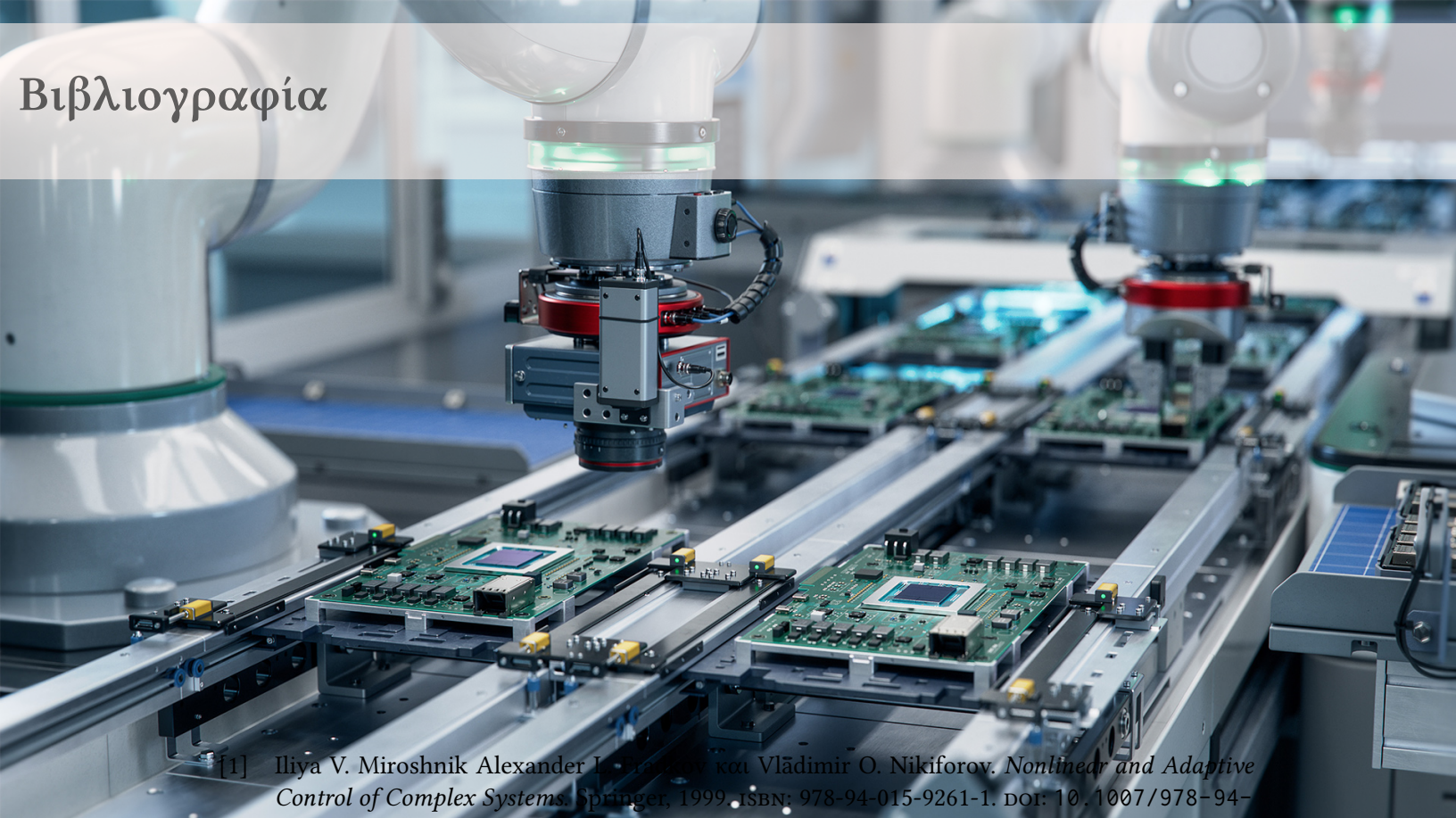
Καθώς έχουμε ότι $PB = C$, μπορούμε να αναστρέψουμε την σχέση και να προκύψει $B^T P = C^T$. Έτσι, η συνάρτηση Lyapunov θα γίνει

$$\dot{V} = e^T(-qq^T - vL)e + 2\phi \sin t \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) C^T e$$

Επιλέγουμε το $\gamma = 1$, έτσι ώστε να έχουμε την εξής τελική μορφή της παραγώγου

$$\dot{V}(e, \phi) = -e^T qq^T e - ve^T Le \leq 0$$

όπου σύμφωνα με το θεώρημα 1.2 διαπιστώνουμε πως το σημείο ισορροπίας $(\phi_e, e_e) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



- [1] Iliya V. Miroshnik Alexander L. Shtromov και Vlādimir O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer, 1999. ISBN: 978-94-015-9261-1. DOI: 10.1007/978-94-015-9261-1.
- [2] A. Astolfi και L. Marconi. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2008. ISBN: 978-3-540-74357-6.
- [3] Charalampos Bechlioulis. *Simulation of Dynamical Systems*. 2021.
- [4] Jay A. Farrell και Marios M. Polycarpou. *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. John Wiley Sons, Inc., 2006. ISBN: 978-0-471-72788-0. DOI: 10.1007/978-0-471-72788-0.
- [5] Mohammed M'Saad Alireza Karimi Ioan Doré Landau Rogelio Lozano. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Second Edition. Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-664-1. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
- [6] Petros A. Ioannou και Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Publications, 2012. ISBN: 978-0486498171.
- [7] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition. Springer, 1995. ISBN: 978-1-84628-615-5. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- [8] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition. Pearson, 2001. ISBN: 978-0130673893.
- [9] Craig A. Kluever. *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control*. John Wiley Sons, Inc., 2015. ISBN: 978-1-118-28945-7. DOI: 10.1007/978-1-118-28945-7.
- [10] Jinkun Liu. *Intelligent Control Design and MATLAB Simulation*. Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-5263-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5263-7>.
- [11] Norm S. Nise. *Control Systems Engineering*. 8th Edition. John Wiley Sons, 2019. ISBN: 978-1119590132.
- [12] P.Ioannou και B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, 2006. ISBN: 978-0-89871-615-3. DOI: 10.1007/978-0-89871-615-3.

- [13] V.P. Singh Rajesh Kumar και Akhilesh Mathur. *Intelligent Algorithms for Analysis and Control of Dynamical Systems*. Springer, 2021. ISBN: 978-981-15-8045-1. DOI: 10.1007/978-981-15-8045-1.
- [14] Jean-Jacques E. Slotine και Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN: 0-13-040890-5.
- [15] Spyros G. Tzafestas. *Methods and Applications of Intelligent Control*. Springer, 1997. ISBN: 978-94-011-5498-7. DOI: 10.1007/978-94-011-5498-7.