



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

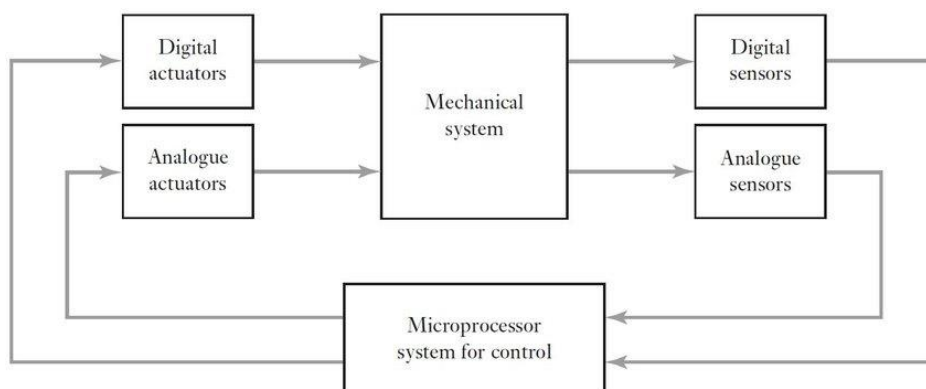
Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Μηχανοτρονικά Συστήματα

Δεύτερη Άσκηση

Όνομα Φοιτητή - Α.Μ.:

Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208



ΑΘΗΝΑ

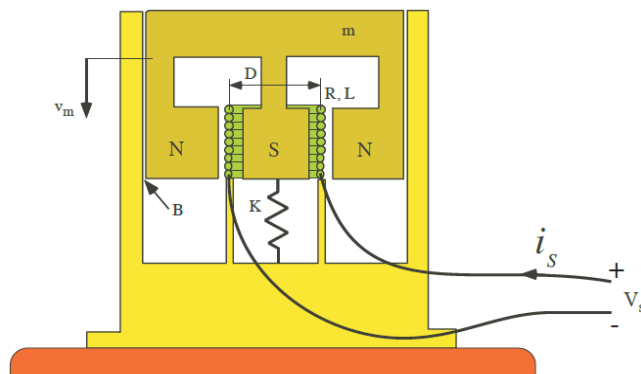
2023

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή	3
Μοντελοποίηση – 1 ^η	4
Ερώτημα – 1 ^ο	4
Ερώτημα – 2 ^ο	5
Ερώτημα – 3 ^ο	5
Ερώτημα – 4 ^ο	6
Ερώτημα – 5 ^ο	8
Μοντελοποίηση – 2 ^η	11
Ερώτημα – 1 ^ο	11
Ερώτημα – 2 ^ο	12
Ερώτημα – 3 ^ο	12
Ερώτημα – 4 ^ο	13
Ερώτημα – 5 ^ο	14
Σύγκριση Μεθόδων Μοντελοποίησης	15
Παράρτημα	17

Εισαγωγή

Μας δίνεται μια διάταξη ενός ζυγού ταχείας απόκρισης, (βλ. Σχήμα 1). Αυτός αποτελείται από μια κινούμενη μαγνητική βάση μάζας m που ολισθαίνει κατακόρυφα και στηρίζεται σε ένα ελατήριο σκληρότητας, σταθεράς K . Περιμετρικά της κινούμενης βάσης υπάρχει λίπανση η οποία δημιουργεί ιξώδης τριβή με συντελεστή ιξώδους B . Στο κάτω μέρος της βάσης παρατηρούμε πως υπάρχει ένα ακίνητο πηνίο φωνής το οποίο χαρακτηρίζεται από μία αντίσταση R και μία αυτεπαγωγή L . Κατά την λειτουργία του το πηνίο ασκεί μια δύναμη στην μαγνητική βάση η οποία εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο.



Σχήμα 1. Ζυγός ταχείας απόκρισης

Το παραπάνω σύστημα θα μοντελοποιηθεί δύο φορές με διαφορετική είσοδο. Στο πρώτο μοντέλο υπάρχει ένας ενισχυτής τάσης που εφαρμόζει τάση στο πηνίο και στο δεύτερο θα υπάρχει ένας ενισχυτής ρεύματος που θα εφαρμόζει ρεύμα στο πηνίο. Στον πίνακα 1 παρατηρούμε τις παραμέτρους του συστήματος. Με βάση αυτά τα στοιχεία θα μοντελοποιήσουμε και θα απαντήσουμε στα αντίστοιχα ερωτήματα.

Παράμετροι Συστήματος	Τιμή
R	4Ω
L	$0,001 H$
m	$0.5 kg$
k	$10000 N/m$
B	$5 Ns/m$
k_c	$5 N/A$

Πίνακας 1. Παράμετροι συστήματος ζυγού ταχείας απόκρισης

Μοντελοποίηση – 1^η

Έστω ότι θεωρούμε ως είσοδο μία τάση V_s η οποία παρέχεται στο πηνίο του συστήματος από έναν ενισχυτή τάσης (βλ. σχήμα 1). Θα αναπτύξουμε το μοντέλο με βάση αυτή την είσοδο.

Ερώτημα – 1^ο

Εφαρμόζεται ως είσοδο μια τάση V_s στο πηνίο με αυτεπαγωγή L . Το πηνίο διεγείρεται και δημιουργείται ρεύμα i_L . Γνωρίζουμε πως σε ένα πηνίο περιγράφεται από την εξής σχέση:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L \quad (1.1.1)$$

Το ρεύμα που δημιουργείται από το πηνίο, δημιουργεί μια δύναμη F_L η οποία ασκείται στην μάζα m με αποτέλεσμα να την κινεί. Ο τύπος της δίνεται από την σχέση:

$$F_L = k_c i_L \quad (1.1.2)$$

Επίσης, κατά την εφαρμογή της τάσης στο πηνίο, δημιουργείται ένας βρόχος μεταξύ των κυκλωματικών στοιχείων. Καθώς το πηνίο έχει στο εσωτερικό του μία αντίσταση R και μία αυτεπαγωγή L σε σειρά, τότε χρησιμοποιείται ο δεύτερος νόμος του *Kirchhoff* (Νόμος Τάσεων). Επομένως ισχύει:

$$V_s = V_L + i_L R \quad (1.1.3)$$

Έχουμε ολοκληρώσει με το ηλεκτρικό σύστημα του ζυγού. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε το μηχανικό σύστημα. Παρατηρούμε πως η μάζα m είναι συνδεδεμένη με ένα ελατήριο στην βάση της. Κατά την κίνηση της μάζας, το ελατήριο θα παραμορφώνεται με αποτέλεσμα να ασκεί μια δύναμη F_K αντίθετα για να επαναφέρει την μάζα στην αρχική της θέση. Αυτή η δύναμη μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\dot{F}_K = K v_m \quad (1.1.4)$$

όπου v_m είναι η ταχύτητα που αναπτύσσει το σώμα κατά την κίνηση. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η μάζα υπόκειται σε ιξώδης τριβή, με συντελεστή B , καθώς υπάρχει λίπανση στο εσωτερικό χώρο του ζυγού. Οπότε, η δύναμη αυτή που θα δημιουργείται κατά την κίνηση θα είναι:

$$F_B = Bv_m \quad (1.1.5)$$

Τέλος, όταν το σύστημα του ζυγού θα ξεκινήσει να κινείται, τότε θα δημιουργείται μια δύναμη F_m στην μάζα ώστε να εκτελείται η κίνηση. Αυτή η δύναμη περιγράφεται στοιχειωδώς από τον δεύτερο νόμο του Newton. Οπότε:

$$F_m = m\dot{v}_m \quad (1.1.6)$$

Επίσης, η δύναμη αυτή είναι και αποτέλεσμα των υπόλοιπων δυνάμεων που εμφανίζονται κατά την κίνηση της μάζας m και έχει αντίθετη φορά. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$F_m = -F_K - F_B - F_L \quad (1.1.7)$$

Ερώτημα – 2ο

Το σύστημα του ζυγού αναλύεται σε δύο υποσυστήματα. Σε ένα ηλεκτρικό και σε ένα μηχανικό. Το ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται στην ουσία από μία αντίσταση και από μία αυτεπαγωγή σε σειρά. Οπότε δημιουργείται το ρεύμα i_L το οποίο είναι ίδιο και στα δύο κυκλωματικά στοιχεία. Επομένως, γνωρίζουμε πως η τάξη του υποσυστήματος αυτού είναι 1. Στο μηχανικό σύστημα, γνωρίζουμε πως αναπτύσσονται δυνάμεις κατά την κίνηση της μάζας. Υπάρχει η ιξώδης τριβή και η δύναμη από το ελατήριο, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση. Επομένως, από αυτό μπορούμε να διαπιστώσουμε πως το μηχανικό υποσύστημα είναι τάξης 2. Αρά, το συνολικό σύστημα θα έχει τάξη:

$$n_1 = 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow n_1 = 3 \quad (1.2.1)$$

Οι μεταβλητές κατάστασης που προκύπτουν από το συγκεκριμένο σύστημα είναι οι εξής τρεις i_L , F_K και v_m . Αυτές είναι οι μεταβλητές καθώς μεταβάλλονται χρονικά.

Ερώτημα – 3ο

Σε αυτό το βήμα θα αναλύσουμε τις εξισώσεις κατάστασης και θα κατασκευάζουμε την μητρική μορφή του συστήματος. Αντικαθιστώντας την σχέση (1.1.1) στην σχέση (1.1.2) θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$V_s = L \frac{di_L}{dt} + i_L R$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} V_s \quad (1.3.1)$$

Βρήκαμε μία εξίσωση κατάστασης για το ρεύμα του πηνίου i_L . Εν συνεχεία, από την σχέση (1.1.4), γνωρίζουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου μεταβάλλεται από τον τύπο

$$\dot{F}_K = K v_m \quad (1.3.2)$$

Η σχέση (1.3.2) αποτελεί την δεύτερη εξίσωση κατάστασης. Τέλος, αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1.1.2), (1.1.5) και (1.1.7) στην (1.1.6) και θα λάβουμε την Τρίτη εξίσωση κατάστασης:

$$-F_K - F_B - F_L = m \dot{v}_m$$

$$\Rightarrow -F_K - B v_m + k_c i_L = m \dot{v}_m$$

$$\Rightarrow \dot{v}_m = \frac{k_c}{m} i_L - \frac{1}{m} F_K - \frac{B}{m} v_m \quad (1.3.3)$$

Επομένως, η μητρωική μορφή θα είναι ένα αποτέλεσμα των σχέσεων (1.3.1), (1.3.2) και (1.3.3). Οπότε, έχουμε το εξής:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ F_K \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ \frac{k_c}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ F_K \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (1.3.4)$$

Ερώτημα – 4ο

Καθώς η έξοδος του συστήματος είναι η ταχύτητα, τότε η αλγεβρική εξίσωση στον χώρο κατάστασης θα είναι:

$$y = v_m = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ F_K \\ v_m \end{bmatrix} + [0] V_s \quad (1.4.1)$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με έξοδο την ταχύτητα και είσοδο την τάση, θα μεταβούμε από τον χώρο κατάστασης στον χώρο *Laplace* με την εξής σχέση:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\Rightarrow G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (1.4.2)$$

Οπότε το πρώτο βήμα που είναι να κάνουμε, είναι να υπολογίσουμε τον ενδιάμεσο όρο και στη συνέχεια, να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς. Άρα ισχύει ότι:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & s & -K \\ -\frac{k_c}{m} & \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά την ορίζουσα:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & s & -K \\ -\frac{k_c}{m} & \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} = \left(s + \frac{R}{L}\right) \begin{vmatrix} s & -K \\ \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} - 0 + 0 = \\ &= \left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}\right) \\ \Rightarrow \det(sI - A) &= s^3 + \left(\frac{B}{m} + \frac{R}{L}\right)s^2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{BR}{Lm}\right)s + \frac{RK}{Lm} \end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τον adjoint πίνακα. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{adj}(sI - A) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} s & -K \\ \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -K \\ -\frac{k_c}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & s \\ -\frac{k_c}{m} & \frac{1}{m} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ -\frac{k_c}{m} & s + \frac{B}{m} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ -\frac{k_c}{m} & \frac{1}{m} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ s & -K \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -K \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} s\left(s + \frac{B}{m}\right) + \frac{K}{m} & -\frac{Kk_c}{m} & \frac{k_c}{m}s \\ 0 & \left(s + \frac{R}{L}\right)\left(s + \frac{B}{m}\right) & -\frac{s + \frac{R}{L}}{m} \\ 0 & \left(s + \frac{R}{L}\right)K & s\left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s\left(s + \frac{B}{m}\right) + \frac{K}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{Kk_c}{m} & \left(s + \frac{R}{L}\right)\left(s + \frac{b}{m}\right) & \left(s + \frac{R}{L}\right)K \\ \frac{k_c}{m}s & -\frac{s + \frac{R}{L}}{m} & s\left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}$$

Με τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην σχέση (1.4.2) και να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{1}{s^3 + \left(\frac{B}{m} + \frac{R}{L}\right)s^2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{BR}{Lm}\right)s + \frac{RK}{Lm}} [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} s\left(s + \frac{B}{m}\right) + \frac{K}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{Kk_c}{m} & \left(s + \frac{R}{L}\right)\left(s + \frac{b}{m}\right) & \left(s + \frac{R}{L}\right)K \\ \frac{k_c}{m}s & -\frac{s + \frac{R}{L}}{m} & s\left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + \left(\frac{B}{m} + \frac{R}{L}\right)s^2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{BR}{Lm}\right)s + \frac{RK}{Lm}} [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} s\left(s + \frac{B}{m}\right) + \frac{K}{m} \\ -\frac{Kk_c}{m} \\ \frac{k_c}{m}s \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow G_p(s) = \frac{\frac{k_c}{Lm}s}{s^3 + \left(\frac{B}{m} + \frac{R}{L}\right)s^2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{BR}{Lm}\right)s + \frac{RK}{Lm}} \quad (1.4.3) \end{aligned}$$

Ερώτημα - 5ο

Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίσαμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για έξοδο την ταχύτητα και είσοδο την τάση. Παρατηρούμε αρχικά πως έχουμε ένα μηδενικό στο $s = 0$. Τώρα θα υπολογίσουμε τους πόλους του συστήματος. Για τον υπολογισμό των πόλων θα θέσουμε τον παρονομαστή ίσο με μηδέν. Οι ρίζες του είναι οι πόλοι του συστήματος. Οπότε:

$$\begin{aligned} s^3 + \left(\frac{B}{m} + \frac{R}{L}\right)s^2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{BR}{Lm}\right)s + \frac{RK}{Lm} &= 0 \\ \Rightarrow s^3 + \left(\frac{5}{0.5} + \frac{4}{0.001}\right)s^2 + \left(\frac{10000}{0.5} + \frac{5 * 4}{0.001 * 0.5}\right)s + \frac{4 * 10000}{0.001 * 0.5} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s^3 + 4.010s^2 + 60.000s + 80.000.000 = 0 \quad (1.5.1)$$

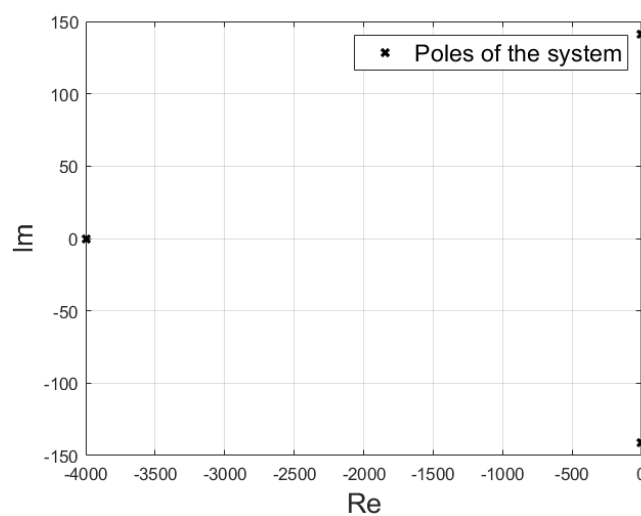
Για την λύση του παραπάνω πολυωνύμου χρησιμοποιήθηκε το MATLAB, με τις λύσεις του να είναι οι εξής:

$$r_1 = -4.000$$

$$r_2 = -5 + 141,33i$$

$$r_3 = -5 - 141,33i$$

αναλυτικότερα οι πόλοι φαίνονται και στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $G_p(s)$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα εμφανίζει τρεις πόλους. Από την μοντελοποίηση διαπιστώνουμε πως ο πραγματικός πόλος εμφανίζεται λόγω του βρόχου που εμφανίζεται κατά την εφαρμογή τάσης εισόδου. Το ηλεκτρικό υποσύστημα λειτουργεί ως ένα RL κύκλωμα. Οι πόλοι που εμφανίζουν φανταστικό μέρος, οφείλονται από την λειτουργία του μηχανικού υποσυστήματος. Επειδή η μάζα m δέχεται δύναμη από το ελατήριο το οποίο ταλαντώνει, τότε και η μάζα θα ταλαντώνει κατά την εφαρμογή της τάσης εισόδου. Επίσης, λόγω της τριβής η ταλάντωση θα αποσβένει μέχρι να ισορροπηθεί το σύστημα.

Επειδή η ρίζα r_1 του πολυωνύμου έχει πολύ μικρή τιμή δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου την απόκριση του συστήματος κατά την εφαρμογή μιας εισόδου. Αυτό μας δίνει την ευκαιρία να τον παραλείψουμε χωρίς να επηρεάζει την απόκριση του συστήματος. Έτσι, αυτό που κάνουμε είναι να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή. Οπότε:

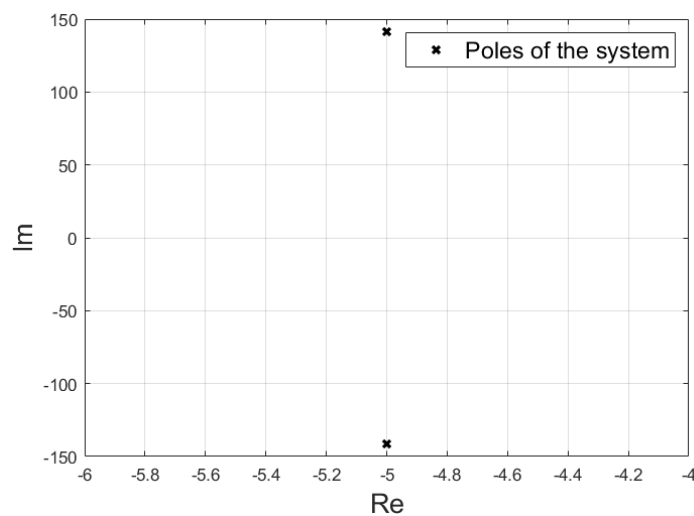
$$p(s) = \left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}\right) \quad (1.5.2)$$

Ο πρώτος όρος οφείλεται στην δυναμική του ηλεκτρικού υποσυστήματος. Οπότε μπορούμε να τον παραλείψουμε και να πέσει το σύστημα τάξη. Άρα η νέα συνάρτηση μεταφοράς θα γίνει:

$$G_p'(s) = \frac{\frac{1}{L} \frac{k_c}{m} s}{\frac{R}{L} \left(s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}\right)}$$

$$G_p'(s) = \frac{\frac{k_c}{Rm} s}{\left(s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}\right)} \quad (1.5.3)$$

Η σχέση (1.5.3) αποτελεί την συνάρτηση μεταφοράς χωρίς τον πραγματικό πόλο. Επαληθεύεται ότι για $s = 0$ έχουμε ότι το $G_p'(0) = 0$. Είναι ίδιο με το αποτέλεσμα της συνάρτησης μεταφοράς της σχέσης (1.4.3). Δηλαδή, δεν έχει μεταβληθεί καθόλου το κέρδος σε DC είσοδο. Τους πόλους τους βλέπουμε και στο σχήμα 3.



Σχήμα 3. Πόλοι συνάρτησης μεταφοράς μετά την πτώση τάξης

Μοντελοποίηση – 2^η

Έστω πως η είσοδος στο σύστημα του ζυγού αποτελεί το ρεύμα i_s το οποίο επιβάλλεται στο πηνίο από έναν ενισχυτή ρεύματος (βλ. Σχήμα 1). Θα αναπτύξουμε το μοντέλο με αυτή την είσοδο.

Ερώτημα – 1^ο

Εφαρμόζεται ως είσοδο στο σύστημα ένα ρεύμα i_s . Το ρεύμα αυτό εισέρχεται εντός της αντίστασης και μετά εντός της αυτεπαγωγής, τα οποία είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Έτσι, τα ρεύματα που θα έχουν αυτά τα στοιχεία θα ισούται με το ρεύμα εισόδου.

$$i_L = i_R = i_s \quad (2.1.1)$$

Το ρεύμα i_L που δημιουργείται από το πηνίο, δημιουργεί μια δύναμη F_L η οποία ασκείται στην μάζα m με αποτέλεσμα να την κινεί. Ο τύπος της δίνεται από την σχέση:

$$F_L = k_c i_L \quad (2.1.2)$$

Έχουμε ολοκληρώσει με το ηλεκτρικό σύστημα του ζυγού. Το επόμενο βήμα είναι να εξετάσουμε το μηχανικό σύστημα. Παρατηρούμε πως η μάζα m είναι συνδεδεμένη με ένα ελατήριο στην βάση της. Κατά την κίνηση της μάζας, το ελατήριο θα παραμορφώνεται με αποτέλεσμα να ασκεί μια δύναμη F_K αντίθετα για να επαναφέρει την μάζα στην αρχική της θέση. Αυτή η δύναμη μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\dot{F}_K = K v_m \quad (2.1.4)$$

όπου v_m είναι η ταχύτητα που αναπτύσσει το σώμα κατά την κίνηση. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η μάζα υπόκειται σε ιξώδης τριβή, με συντελεστή B , καθώς υπάρχει λίπανση στο εσωτερικό χώρο του ζυγού. Οπότε, η δύναμη αυτή που θα δημιουργείται κατά την κίνηση θα είναι:

$$F_B = B v_m \quad (2.1.5)$$

Τέλος, όταν το σύστημα του ζυγού θα ξεκινήσει να κινείται, τότε θα δημιουργείται μια δύναμη F_m στην μάζα ώστε να εκτελείται η κίνηση. Αυτή η δύναμη περιγράφεται στοιχειωδώς από τον δεύτερο νόμο του Newton. Οπότε:

$$F_m = m \dot{v}_m \quad (2.1.6)$$

Επίσης, η δύναμη αυτή είναι και αποτέλεσμα των υπόλοιπων δυνάμεων που εμφανίζονται κατά την κίνηση της μάζας m και έχει αντίθετη φορά. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$F_m = -F_K - F_B + F_L \quad (2.1.7)$$

Ερώτημα – 2ο

Το σύστημα του ζυγού αναλύεται σε δύο υποσυστήματα. Σε ένα ηλεκτρικό και σε ένα μηχανικό. Το ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται στην ουσία από μία αντίσταση και από μία αυτεπαγωγή σε σειρά. Οπότε δημιουργείται το ρεύμα i_L το οποίο είναι ίδιο και στα δύο κυκλωματικά στοιχεία. Καθώς το ρεύμα i_L ισούται με το ρεύμα εισόδου, τότε δεν υπάρχει κάποιος ρυθμός που το μεταβάλλει. Συνεπώς η τάξη του είναι 0. Στο μηχανικό σύστημα, γνωρίζουμε πως αναπτύσσονται δυνάμεις κατά την κίνηση της μάζας. Υπάρχει η ιξώδης τριβή και η δύναμη από το ελατήριο, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση. Επομένως, από αυτό μπορούμε να διαπιστώσουμε πως το μηχανικό υποσύστημα είναι τάξης 2. Αρά, το συνολικό σύστημα θα έχει τάξη:

$$n_2 = 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow n_2 = 2 \quad (2.2.1)$$

Οι μεταβλητές κατάστασης που προκύπτουν από το συγκεκριμένο σύστημα είναι οι εξής δύο F_K και v_m . Αυτές είναι οι μεταβλητές καθώς μεταβάλλονται χρονικά.

Ερώτημα – 3ο

Σε αυτό το βήμα θα αναλύσουμε τις εξισώσεις κατάστασης και θα κατασκευάζουμε την μητρική μορφή του συστήματος. Αντικαθιστώντας την σχέση (2.1.1) στην σχέση (2.1.2) θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$F_L = k_c i_s \quad (2.3.1)$$

Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στην δεύτερη εξίσωση κατάστασης. Εν συνεχεία, από την σχέση (2.1.4), γνωρίζουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου μεταβάλλεται από τον τύπο

$$\dot{F}_K = K v_m \quad (2.3.2)$$

Η σχέση (2.3.2) αποτελεί την πρώτη εξίσωση κατάστασης. Τέλος, αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2.3.1), (2.1.5) και (2.1.7) στην (2.1.6) και θα λάβουμε την δεύτερη εξίσωση κατάστασης:

$$\begin{aligned} -F_K - F_B + F_L &= m\dot{v}_m \\ \Rightarrow -F_K - Bv_m - k_c i_s &= m\dot{v}_m \\ \Rightarrow \dot{v}_m &= \frac{k_c}{m} i_s - \frac{1}{m} F_K - \frac{B}{m} v_m \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Επομένως, η μητρική μορφή θα είναι ένα αποτέλεσμα των σχέσεων (2.3.1), (2.3.2) και (2.3.3). Οπότε, έχουμε το εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_K \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -\frac{1}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_K \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_c}{m} \end{bmatrix} i_s \quad (2.3.4)$$

Ερώτημα – 4ο

Καθώς η έξοδος του συστήματος είναι η ταχύτητα, τότε η αλγεβρική εξίσωση στον χώρο κατάστασης θα είναι:

$$y = v_m = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} F_K \\ v_m \end{bmatrix} + [0] i_s \quad (2.4.1)$$

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με έξοδο την ταχύτητα και είσοδο την τάση, θα μεταβούμε από τον χώρο κατάστασης στον χώρο *Laplace* με την εξής σχέση:

$$\begin{aligned} G_p(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ \Rightarrow G_p(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -K \\ \frac{1}{m} & s + \frac{B}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_c}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{B}{m} & K \\ -\frac{1}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_c}{m} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{Kk_c}{m} \\ \frac{k_c}{m}s \end{bmatrix} = \frac{\frac{k_c}{m}s}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}} \\
&\Rightarrow G_p(s) = \frac{\frac{k_c}{m}s}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m}} \quad (2.4.2)
\end{aligned}$$

Ερώτημα - 5ο

Στο προηγούμενο ερώτημα υπολογίσαμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για έξοδο την ταχύτητα και είσοδο το ρεύμα. Παρατηρούμε αρχικά πως έχουμε ένα μηδενικό στο $s = 0$. Τώρα θα υπολογίσουμε τους πόλους του συστήματος. Για τον υπολογισμό των πόλων θα θέσουμε τον παρονομαστή ίσο με μηδέν. Οι ρίζες του είναι οι πόλοι του συστήματος. Οπότε:

$$\begin{aligned}
s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{K}{m} &= 0 \\
\Rightarrow s^2 + \frac{5}{0.5}s + \frac{10000}{0.5} &= 0 \\
\Rightarrow s^2 + 10 + 20000 &= 0 \quad (2.5.1)
\end{aligned}$$

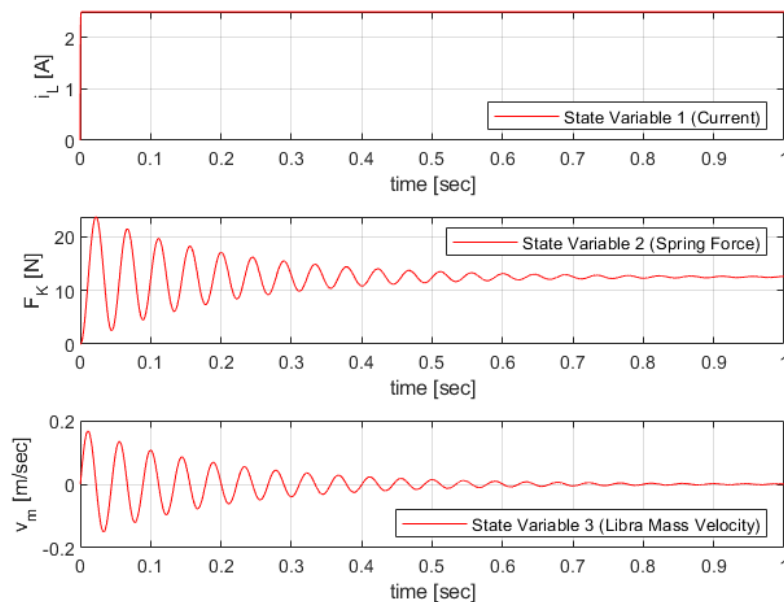
Για την λύση του παραπάνω πολωνύμου χρησιμοποιήθηκε το MATLAB, με τις λύσεις του να είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
r_1 &= -5 + 141,33i \\
r_2 &= -5 - 141,33i
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα δεν μπορεί να απλοποιηθεί περεταίρω, καθώς η απαλοιφή πόλου θα αλλάξει την συμπεριφορά του συστήματος. Έτσι, στην περίπτωση του ελέγχου ρεύματος οι πόλοι οφείλονται αποκλειστικά στο μηχανικό μέρος του συστήματος, σε αντίθεση με την περίπτωση ελέγχου τάσης.

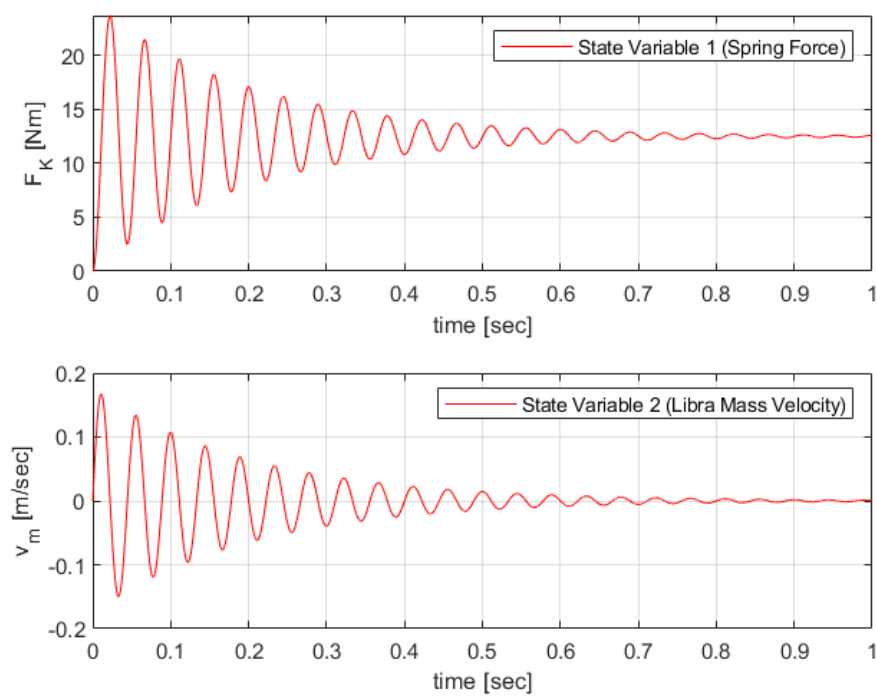
Σύγκριση Μεθόδων Μοντελοποίησης

Αυτό που παρατηρούμε είναι πως και οι δύο μέθοδοι μοντελοποίησης είναι παρόμοιοι με την δεύτερη να αποτελεί περίπτωση της άλλης. Θα βγάλουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και με τα σχήματα 4 και 5. Παρατηρούμε πως για είσοδο $V_s = 10\text{ V}$ δημιουργείται ρεύμα $i_L = 2.5\text{ A}$, με τις υπόλοιπες δύο μεταβλητές κατάστασης να ταλαντώνονται. Αντίστοιχα εφαρμόζουμε ως είσοδο στο δεύτερο μοντέλο ρεύμα $i_s = 2.5\text{ A}$, με τις μεταβλητές κατάστασης να ταλαντώνονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο πρώτο μοντέλο.



Σχήμα 4. Απόκριση μεταβλητών κατάστασης με είσοδο 10 V

Και τα δύο μοντέλα έχουν ουσιαστικά την ίδια απόκριση. Η μόνη διαφορά είναι στο πρώτο μοντέλο που λαμβάνουμε υπόψιν την δυναμική του ηλεκτρικού συστήματος. Αλλά αυτό δεν επηρεάζει καθόλου την απόκριση του συστήματος καθώς ο όρος αυτός αποσβένει ταχύτερα συγκριτικά με τις άλλες. Παρατηρούμε πως και στο σχήμα 4 και στο σχήμα 5 οι μεταβλητές κατάστασης αποσβένουν με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό λόγω των μιγαδικών πόλων του συστήματος.



Σχήμα 5. Απόκριση μεταβλητών κατάστασης με είσοδο 2.5 A

Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό παρατίθεται ο κώδικας σε MATLAB που παράγει τα παραπάνω αποτελέσματα και διαγράμματα.

```
%% Modelling and simulation of a moving libra system
%% Name: Georgios Krommydas, A.M.: 02121208

clear;
clc;

%% Parameters of System

R = 4;           % Ω
L = 0.001;       % H
m = 0.5;         % kg
K = 10000;       % N/m
B = 5;           % Ns/m
kc = 5;          % N/A
t = 0:0.0001:1;  % sec
Vs = 10;         % V
is = 2.5;        % A

%% State Space System Analysis 1

% System
A1 = [-R/L      0      0;
      0         0      K;
      kc/m -1/m  -B/m];

B1 = [1/L; 0; 0];

C1 = eye(3); % or [0 0 1];
D1 = 0;
u = 10*ones(size(t));
x0 = [0 0 0];
system = ss(A1, B1, C1, D1);
system.OutputName = {'i_L', 'F_K', 'v_m'};
stateVector = lsim(system,u,t,x0);

% Convergence Value
xss1 = -inv(A1)*B1*Vs;
disp(xss1);

figure(1);
clf;
subplot(3,1,1);
plot(t, stateVector(:,1), 'r-');
xlabel("time [sec]");
ylabel("i_L [A]");
grid on;
legend('State Variable 1 (Current)', 'Location', 'southeast');

subplot(3,1,2);
plot(t, stateVector(:,2), 'r-');
xlabel("time [sec]");
ylabel("F_K [N]");
grid on;
legend('State Variable 2 (Spring Force)', 'Location', 'northeast');

subplot(3,1,3);
plot(t, stateVector(:,3), 'r-');
```

```

xlabel("time [sec]");
ylabel("v_m [m/sec]");
grid on;
legend('State Variable 3 (Libra Mass Velocity)', 'Location', 'southeast');

%% Poles of the system
p1 = [1 (B/m+R/L) (K/m +(B*R)/(L*m)) (R*K)/(L*m)];
r1 = roots(p1);

figure(2);
clf;
plot(real(r1),imag(r1), 'kx', 'LineWidth', 2);
grid;
xlabel("Re", "fontsize", 16);
ylabel("Im", "fontsize", 16);
legend('Poles of the system', 'Location', 'northeast', 'fontsize', 14);

p2 = [1 B/m K/m];
r2 = roots(p2);

figure(3);
clf;
plot(real(r2),imag(r2), 'kx', 'LineWidth', 2);
grid;
xlabel("Re", "fontsize", 16);
ylabel("Im", "fontsize", 16);
legend('Poles of the system', 'Location', 'northeast', 'fontsize', 14);

%% State Space System Analysis 2

% System
A2 = [0 K; -1/m -B/m];
B2 = [0; kc/m];
C2 = eye(2);
D2 = 0;
u2 = 2.5*ones(size(t));
x1 = [0 0];
sys2 = ss(A2,B2,C2,D2);
sys2.OutputName = {'F_K', 'v_m'};
stateVector2 = lsim(sys2,u2,t,x1);

% Convergence Value
xss2 = -inv(A2)*B2*is;
disp(xss2);

% Plots
figure(4);
clf;
subplot(2,1,1);
plot(t, stateVector2(:,1), 'r-');
xlabel("time [sec]");
ylabel("F_K [Nm]");
grid on;
legend('State Variable 1 (Spring Force)', 'Location', 'northeast');

subplot(2,1,2);
plot(t, stateVector2(:,2), 'r-');
xlabel("time [sec]");
ylabel("v_m [m/sec]");
grid on;
legend('State Variable 2 (Libra Mass Velocity)', 'Location', 'northeast');

```

Πίνακας 2. Κώδικας MATLAB μοντελοποίησης ζυγού ταχείας απόκρισης