Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

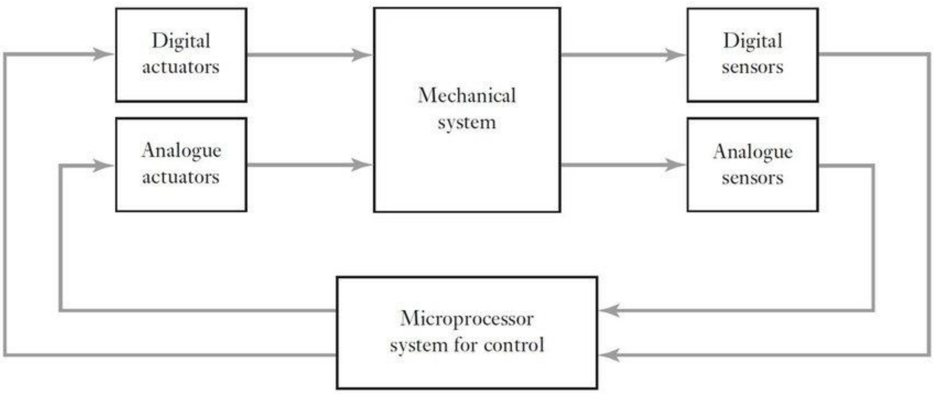
<u>Μεταπτυχιακό Μάθημα</u>:

Μηχανοτρονικά Συστήματα

Πρώτη Άσκηση

<u>Όνομα Φοιτητή – Α.Μ.:</u>

Γεώργιος Κρομμύδας – 02121208



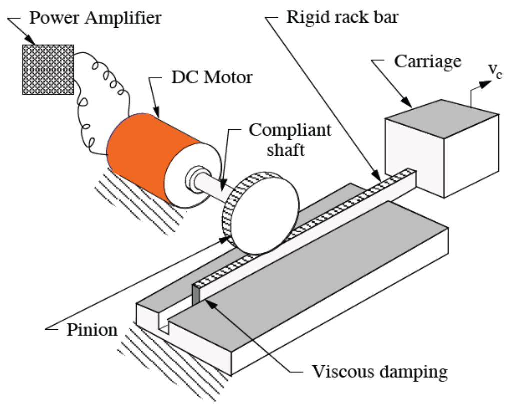
ΑΘΗΝΑ

2023

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Μας δίνεται ένας μηχανισμός κανόνα – πινιόν, (βλ. Σχήμα 1), το οποίο κινεί το φορείο μιας εργαλειομηχανής ***CNC***. Ο ενισχυτής ισχύος παρέχει οποιοδήποτε ρεύμα (i_S) στον κινητήρα ***DC*** με σταθερά ροπής k_T, ανεξάρτητα της τάσης του κινητήρα. Ο δρομέας του κινητήρα έχει αδράνεια (J_m) και υπόκειται σε ιξώδη τριβή (B_m). Η άτρακτος είναι παραμορφώσιμη (K). Η ακτίνα του πινιόν είναι r, και η ροπή αδράνειάς του J_p. Ο κανόνας μπορεί να θεωρηθεί στερεό σώμα, αλλά υπόκειται σε ιξώδη τριβή B_1 λόγω της «γλύστρας». Η ισοδύναμη μάζα του κανόνα και του φορείου είναι m_c.



Σχήμα 1. Σύστημα κίνησης φορείου εργαλειομηχανής CNC

Αναλυτικότερα, μπορούμε να δούμε στον πίνακα 1 τις τιμές που έχουν οι παραπάνω παράμετροι του συστήματος.

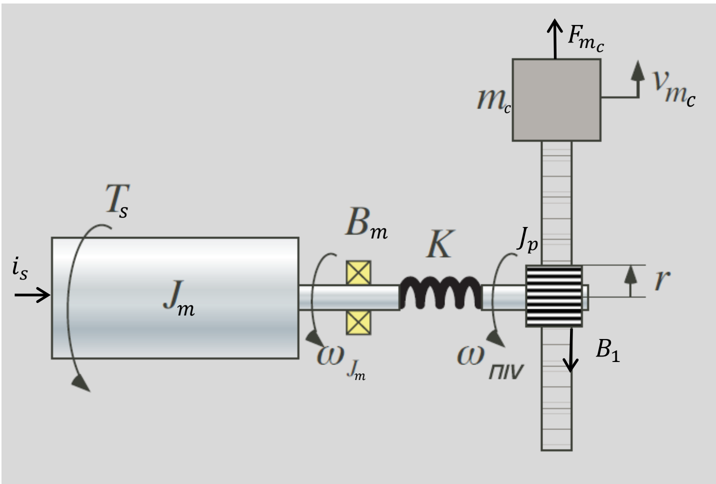
Παράμετροι Συστήματος	***Τιμή***
B_m	$0.03\ Nms/rad$
K	$8500\ Nm/rad$
J_m	$0.0075\ Nms^2/rad$
B_1	$15\ Ns/m$
m_c	$65\ kg$
r	$0.1\ m$
J_p	$0.0025\ Nms^2/rad$
k_T	$1\ Nm/A$

Πίνακας 1. Παράμετροι συστήματος κίνησης φορείου εργαλειομηχανής CNC

Με βάσει τα προαναφερθέντα θα απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα.

Ερώτημα – 1ο

Με βάση το σχήμα 2 μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φυσικό σύστημα. Ως είσοδο στο σύστημα έχουμε το ρεύμα i_s το οποίο θα παρέχει το απαραίτητο ρεύμα στον κινητήρα, έτσι ώστε να παραχθεί η επιθυμητή ροπή. Η ροπή T που παράγεται μεταδίδεται στο ρουλεμάν με αποτέλεσμα αυτό να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_{J_m}. Επίσης, ο δρομέας υπόκειται σε ιξώδη τριβή κατά την περιστροφή του με συντελεστή B_m. Η άτρακτος είναι παραμορφώσιμη και λειτουργεί σαν ένα ελατήριο με σταθερά K. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε πως η ροπή μετάδοσης δεξιά της ατράκτου ερμηνεύεται από την κίνηση που εκτελεί το πινιόν με ροπή αδράνειας J_p καθώς και με την ροπή που δημιουργείται από τις δυνάμεις που εφαρμόζονται στο πινιόν. Οι δυνάμεις αυτές οφείλονται αρχικά στην τριβή που δημιουργείται κατά την περιστροφή του πινιόν με την μπάρα, με συντελεστή B_1, και στην δύναμη που ασκεί το φορείο κατά την κίνησή του. Τέλος, ως έξοδο του συστήματος έχουμε την ταχύτητα του φορείου v_{m_c}.



Σχήμα 2. Φυσικό μοντέλο συστήματος κίνησης φορείου εργαλειομηχανής CNC

Αρχικά, ο κινητήρας δέχεται από τον ενισχυτή ισχύος ρεύμα i_s, επομένως η ροπή που θα παράγεται από τον κινητήρα για να μεταδοθεί στο υπόλοιπο σύστημα θα είναι:

$$T_s = k_T i_s \tag{1.1}$$

Στη συνέχεια , το αριστερό άκρο του δρομέα που συνδέεται με τον κινητήρα, θα αναπτύξει ροπή:

$$T_{J_m} = J_m \dot{\omega}_{J_m} \quad (1.2)$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε πως ο δρομέας υπόκειται σε ιξώδη τριβή, οπότε θα δημιουργείται και η αντίστοιχη ροπή:

$$T_B = B_m \omega_{J_m} \quad (1.3)$$

Επιπλέον, στον δρομέα υπάρχει και η άτρακτος που λειτουργεί σαν ελατήρια. Οπότε:

$$\dot{T}_K = K\omega_K \quad (1.4)$$

Στη συνέχεια, η ροπή που δημιουργείται από τον δρομέα μεταδίδεται στο πινιόν το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\pi\iota\nu}$. Καθώς το πινιόν περιστρέφεται στην ράμπα, υπόκειται σε ιξώδης τριβή με ροπή:

$$T_{B_1} = B_1 v_{m_c} r \quad (1.5)$$

όπου η γραμμική ταχύτητα v_{m_c} είναι η ταχύτητα του φορείου. Τέλος, το φορείο εκτελεί μεταφορική κίνηση και δέχεται δύναμη:

$$F_{m_c} = m_c \dot{v}_{m_c} \quad (1.6)$$

Τέλος, λόγω αυτής της δύναμης δημιουργείται ροπή στο πινιόν:

$$T_{\pi\iota\nu} = F_{m_c} r + B_1 v_{m_c} r \quad (1.7)$$

και επιπλέον η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την γραμμική ταχύτητα του φορείου με τον εξής τύπο:

$$\omega_{\pi\iota\nu} = \frac{v_{m_c}}{r} \quad (1.8)$$

Έχουμε ολοκληρώσει με τις εξισώσεις των στοιχείων και το επόμενο βήμα είναι οι εξισώσεις διασύνδεσης. Αρχικά, η ροπή που παράγεται από τον κινητήρα μεταδίδεται στον δρομέα του κινητήρα:

$$T_s = T_{J_m} + T_B + T_K \quad (1.9)$$

Στη συνέχεια, η ροπή που δημιουργείται από την άτρακτο μεταδίδεται στο πινιόν με αποτέλεσμα η συνολική ροπή στο πινιόν να είναι:

$$T_K = J_p \dot{\omega}_{\pi\iota\nu} + T_{\pi\iota\nu} \quad (1.10)$$

Επίσης, το ίδιο ισχύει και για την γωνιακή ταχύτητα. Η γωνιακή ταχύτητα της ατράκτου και το δρομέα δημιουργούν την γωνιακή ταχύτητα του πινιόν. Οπότε:

$$\omega_K = \omega_{J_m} - \omega_{\pi\iota\nu} \tag{1.11}$$

Ερώτημα – 2ο

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.9) θα λάβουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\dot{\omega}_{J_m} = \frac{1}{J_m} T_{J_m} = \frac{1}{J_m}\left(T_s - B_m \omega_{J_m} - T_K\right) = \frac{k_T}{J_m} i_s - \frac{B_m}{J_m}\omega_{J_m} - \frac{1}{J_m} T_K$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_{J_m} = -\frac{B_m}{J_m}\omega_{J_m} - \frac{1}{J_m} T_K + \frac{k_T}{J_m} i_s \tag{2.1}$$

Το επόμενο βήμα είναι να παραχθούν και οι υπόλοιπες αλγεβρικές εξισώσεις. Στη συνέχεια της ανάλυσης, θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.4), (1.8) και (1.11). Άρα ισχύει ότι:

$$\dot{T}_K = K\omega_K = K\left(\omega_{J_m} - \omega_{\pi\iota\nu}\right) = K\left(\omega_{J_m} - \frac{v_{m_c}}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{T}_K = K\omega_{J_m} - \frac{K}{r} v_{m_c} \tag{2.2}$$

Τέλος, θα κάνουμε χρήση των σχέσεων (1.6), (1.7), (1.10) και θα πάρουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$T_K = J_p \frac{\dot{v}_{m_c}}{r} + m_c \dot{v}_{m_c} r + B_1 v_{m_c} r$$

$$\Rightarrow T_K - B_1 v_{m_c} r = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)\dot{v}_{m_c}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_{m_c} = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} T_K - \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} B_1 r v_{m_c}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_{m_c} = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} T_K - B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} v_{m_c} \tag{2.3}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.1), (2.2) και (2.3) θα λάβουμε την εξής μητρωική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{J_m} \\ \dot{T}_K \\ \dot{v}_{m_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{J_m} & -\frac{1}{J_m} & 0 \\ K & 0 & -\frac{K}{r} \\ 0 & \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} & -B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{J_m} \\ T_K \\ v_{m_c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_T}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i_s \quad (2.4)$$

Ερώτημα – 3ο

Καθώς έχουμε ότι η έξοδος είναι η ταχύτητα του φορείου v_{m_c}, τότε θα προκύψει η εξής αλγεβρική εξίσωση στον χώρο κατάστασης:

$$y = v_{m_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{J_m} \\ T_K \\ v_{m_c} \end{bmatrix} + [0] i_s \quad (3.1)$$

Έστω ότι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες στο σύστημα. Έτσι, θα μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω σχέσεις. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε μια αλγεβρική σχέση που συνδέει αρχικά την είσοδο με την έξοδο. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για να λάβουμε την διαφορική εξίσωση που συνδέει την ταχύτητα v_{m_c} με το ρεύμα εισόδου i_s. Οπότε ισχύει ότι:

$$\begin{cases} s\Omega_{J_m} = -\frac{B_m}{J_m}\Omega_{J_m} - \frac{1}{J_m}T_K + \frac{k_T}{J_m}I_s \\ sT_K = K\Omega_{J_m} - \frac{K}{r}V_{m_c} \\ sV_{m_c} = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} T_K - B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} V_{m_c} \end{cases} \quad (3.2)$$

Η πρώτη αλγεβρική σχέση της (3.2) θα λυθεί ως προς την γωνιακή ταχύτητα ω_{J_m} και στη συνέχεια θα αντικατασταθεί στην δεύτερη αλγεβρική σχέση. Τέλος, η δεύτερη θα επιλυθεί ως προς την ροπή T_K και θα αντικατασταθεί στην τρίτη αλγεβρική σχέση. Έτσι, θα παραχθεί η συνολική αλγεβρική εξίσωση ως προς την έξοδο και την είσοδο. Επομένως, ισχύει ότι:

$$s\Omega_{J_m} + \frac{B_m}{J_m}\Omega_{J_m} = -\frac{1}{J_m}T_K + \frac{k_T}{J_m}I_s$$

$$\Rightarrow \ \Omega_{J_m} = \frac{1}{s + \frac{B_m}{J_m}}\left(-\frac{1}{J_m}T_K + \frac{k_T}{J_m}I_s\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_{J_m} = -\frac{\frac{1}{J_m}}{s+\frac{B_m}{J_m}}T_K + \frac{\frac{k_T}{J_m}}{s+\frac{B_m}{J_m}}I_s \tag{3.3}$$

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε την (3.3) στην δεύτερη αλγεβρική εξίσωση (3.2b). Άρα, έχουμε ότι:

$$sT_K = K\Omega_{J_m} - \frac{K}{r}V_{m_c}$$

$$\Rightarrow \ sT_K = K\left(-\frac{\frac{1}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}T_K + \frac{\frac{k_T}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}I_s\right) - \frac{K}{r}V_{m_c}$$

$$\Rightarrow \ sT_K = -\frac{\frac{K}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}T_K + \frac{\frac{Kk_T}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}I_s - \frac{K}{r}V_{m_c}$$

$$\Rightarrow \ T_K = \frac{1}{\left(s + \frac{\frac{K}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}\right)}\left(\frac{\frac{Kk_T}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}I_s - \frac{K}{r}V_{m_c}\right)$$

$$\Rightarrow T_K = \frac{\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}}\left(\frac{\frac{Kk_T}{J_m}}{s + \frac{B_m}{J_m}}I_s - \frac{K}{r}V_{m_c}\right)$$

$$T_K = -\frac{\left(s+\frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r}}{s\left(s+\frac{B_m}{J_m}\right)+\frac{K}{J_m}}V_{m_c} + \frac{\frac{Kk_T}{J_m}}{s\left(s+\frac{B_m}{J_m}\right)+\frac{K}{J_m}}I_s \tag{3.4}$$

Τέλος, θα αντικαταστήσουμε την σχέση (3.4) στην (3.2c) με σκοπό την εύρεση της αλγεβρικής εξίσωσης που χρειαζόμαστε. Έτσι, θα προκύψει ότι:

$$sV_{m_c} = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} T_K - B_1 \left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} V_{m_c}$$

$$\Rightarrow \left(s + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right) V_{m_c} = \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} \left(-\frac{\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r}}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}} V_{m_c} + \frac{\frac{Kk_T}{J_m}}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}} I_s\right)$$

$$\Rightarrow \left(s + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right) V_{m_c} + \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} \frac{\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r}}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}} V_{m_c} = \frac{\frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}} I_s$$

$$\Rightarrow \left(s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{K}{J_m}\right)\left(s + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right) V_{m_c} + \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r} V_{m_c} = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} I_s$$

$$\Rightarrow \left(s^2 + \frac{B_m}{J_m}s + \frac{K}{J_m}\right)\left(s + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right) V_{m_c} + \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r} V_{m_c} = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} I_s$$

$$\Rightarrow \left[s^3 + \left(\frac{B_m}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right)s^2 + \left(\frac{K}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m}\right)s + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{K}{J_m}\right] V_{m_c}$$
$$+ \left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)\frac{K}{r} V_{m_c} = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} I_s \Rightarrow$$

$$s^3 V_{m_c} + \left(\frac{B_m}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right)s^2 V_{m_c} + \left(\frac{K}{J_m} + B_1\frac{B_m}{J_m}\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\right)sV_{m_c} +$$
$$\left(B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{K}{J_m} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m}\right)V_{m_c} = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} I_s \qquad (3.5)$$

Έχουμε φτάσει σε μια τελική αλγεβρική εξίσωση όπου σχηματίζεται ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Από αυτό διαπιστώνουμε πως το σύστημα είναι τρίτης τάξης. Έτσι, θα μπορέσουμε να βρούμε την διαφορική εξίσωση εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οπότε ισχύει ότι:

$$\dddot{v}_{m_c} + \left(\frac{B_m}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right)\ddot{v}_{m_c} + \left(\frac{K}{J_m} + B_1\frac{B_m}{J_m}\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\right)\dot{v}_{m_c} +$$
$$\left(B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{K}{J_m} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m}\right)v_{m_c} = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} i_s \qquad (3.6)$$

Συνεπώς, η σχέση (3.6) που προκύπτει είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης, η οποία έχει ομογενής λύση και μερική λύση, λόγω της εισόδου i_s.

Ερώτημα – 4ο

Όπως προέκυψε από την λύση του τρίτου ερωτήματος, έχουμε μία διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης. Θέλουμε να βρούμε την ομογενής λύση αυτής της εξίσωσης και την χαρακτηριστική εξίσωση.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω εξίσωσης θα είναι της μορφής

$$a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{4.1}$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι οι συντελεστές των παραγώγων της εξόδου και της εξόδου αντίστοιχα. Οπότε, θα υπολογίσουμε τους συντελεστές για να βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\alpha_3 = 1$$

$$a_2 = \frac{B_m}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} = \frac{B_m}{J_m} + \frac{B_1}{\frac{J_p}{r^2} + m_c}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{0.03}{0.0075} + \frac{15}{\frac{0.0025}{0.01} + 65} = 4 + 0.2298$$

$$\Rightarrow a_2 = 4.2298$$

$$a_1 = \frac{K}{J_m} + \frac{B_m}{J_m} B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{8500}{0.0075} + \frac{0.03}{0.0075}\frac{15}{\frac{0.0025}{0.01} + 65} + \frac{\frac{8500}{0.1}}{\frac{0.0025}{0.1} + 65 * 0.1}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1.133.333{,}333 + 0{,}9192 + 13.026{,}8199$$

$$\Rightarrow a_1 = 1.346.361{,}0721$$

$$a_0 = B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{K}{J_m} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m}$$

$$\Rightarrow a_0 = \left(\frac{15}{\frac{0.0025}{0.01} + 65}\right)\frac{8500}{0.0075} + \left(\frac{\frac{8500}{0.1}}{\frac{0.0025}{0.1} + 65 * 0.1}\right)\frac{0.03}{0.0075}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0{,}2298 * 1.133.333{,}333 + 13.026{,}8199 * 4$$

$$a_0 = 312.547{,}28$$

Συνολικά, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι:

$$r^3 + 4.2298r^2 + 1.346.361{,}0721r + 312.547{,}28 = 0 \qquad (4.2)$$

Για να βρούμε την ομογενής λύση, θα πρέπει να επιλύσουμε την εξής διαφορική εξίσωσης:

$$\dddot{v}_{m_c} + \left(\frac{B_m}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\right)\ddot{v}_{m_c} + \left(\frac{K}{J_m} + B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\right)\dot{v}_{m_c} + \left(B_1\left(\frac{J_p}{r^2} + m_c\right)^{-1}\frac{K}{J_m} + \frac{K}{r}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1}\frac{B_m}{J_m}\right)v_{m_c} = 0$$

$$\Rightarrow \dddot{v}_{m_c} + 4{,}2298\,\ddot{v}_{m_c} + 1.346.361{,}0721\dot{v}_{m_c} + 312.547{,}28v_{m_c} = 0 \qquad (4.3)$$

Από την ομογενής διαφορική εξίσωση θα προκύψει και η χαρακτηριστική εξίσωση η οποία είναι η (4.2). Οι ρίζες που θα προκύψουν από την λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, θα δώσουν την μορφή της λύσης της ομογενής διαφορικής εξίσωσης. Λύνοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της σχέσης (4.2) θα προκύψουν τρεις λύσεις. Η μία θα είναι πραγματική με αρνητικό πρόσημο και οι υπόλοιπες δύο θα είναι συζυγείς μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Με την χρήση του λογισμικού Wolfram Alpha προκύπτουν οι εξής ρίζες:

$$r_1 = -0.23214$$

$$r_2 = \lambda + \mu i = -1.9988 + 1160.3i$$

$$r_3 = \lambda - \mu i = -1.9988 - 1160.3i$$

Καθώς έχουμε μία πραγματική ρίζα πολλαπλότητας 1 και δύο μιγαδικές ρίζες πολλαπλότητας 2, τότε η ομογενής λύση που θα προκύψει για το σύστημα αυτό είναι:

$$v_{m_c,o}(t) = c_0 e^{r_1 t} + c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 \mathrm{e}^{\lambda t}\sin(\mu t)$$

$$\Rightarrow v_{m_c,o}(t) = c_0 e^{-0.23214t} + c_1 e^{-1.9988\,t}\cos(1160.3t) + c_2 \mathrm{e}^{-1.9988\,t}\sin(1160.3t) \qquad (4.4)$$

Ερώτημα – 5ο

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης έχει μορφή:

$$v_{m_c}(t) = v_{m_c,o}(t) + v_{m_c,p}(t) \tag{5.1}$$

όπου η $v_{m_c,p}(t)$ είναι η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης και βασίζεται στην είσοδο i_s. Ο συντελεστής της εισόδου στην διαφορική εξίσωση θα έχει τιμή:

$$b_0 = \frac{Kk_T}{J_m}\left(\frac{J_p}{r} + m_c r\right)^{-1} = \frac{8500 * 1}{0.0075}\left(\frac{1}{\frac{0.0025}{0.1} + 65 * 0.1}\right)$$

$$\Rightarrow b_0 = 173.690{,}94$$

Συνεπώς, η συνολική διαφορική εξίσωση που θα προκύψει θα είναι

$$\dddot{v}_{m_c} + 4{,}2298\, \ddot{v}_{m_c} + 1.346.361{,}0721\dot{v}_{m_c} + 312.547{,}28 v_{m_c} = 173.690{,}94 i_s (5.2)$$

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε ως είσοδο το $i_s = 5\ A$, τότε η διαφορική εξίσωση θα γίνει:

$$\dddot{v}_{m_c} + 4{,}2298\, \ddot{v}_{m_c} + 1.346.361{,}0721\dot{v}_{m_c} + 312.547{,}28 v_{m_c} = 173.690{,}94 i_s$$

$$\Rightarrow \dddot{v}_{m_c} + 4{,}2298\, \ddot{v}_{m_c} + 1.346.361{,}0721\dot{v}_{m_c} + 312.547{,}28 v_{m_c} = 868.454{,}7$$

Καθώς έχουμε ότι η διαφορική εξίσωση ισούται με έναν αριθμό, τότε θα υποθέσουμε αρχικά ότι η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$v_{m_c,p}(t) = a$$

καθώς δεν αποτελεί λύση της ομογενής συνάρτησης. Οπότε, θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα και θα το αντικαταστήσουμε στην διαφορική για να βρούμε τον συντελεστή αυτό. Άρα ισχύει το εξής:

$$0 + 0 + 0 + 312.547{,}28 * \alpha = 868.454{,}7$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{868.454{,}7}{312.547{,}28} = 2{,}779$$

Επομένως ισχύει ότι

$$v_{m_c}(t) = c_0 e^{-0.23214t} + c_1 e^{-1.9988\,t}\cos(1160.3t) + c_2 \mathrm{e}^{-1.9988\,t}\sin(1160.3t) + 2{,}779 \quad (5.2)$$

Ερώτημα – 6ο

Έχουμε βρει την ειδική λύση για είσοδο $i_s = 5\ A$. Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές της αναλυτικής έκφρασης. Έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες στο σύστημα. Δηλαδή:

$$\begin{cases} v_{m_c}(0) = 0 \\ \dot{v}_{m_c}(0) = 0 \\ \ddot{v}_{m_c}(0) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους για να βρούμε τους τρεις συντελεστές:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{m_c}(t) = {} & -0.23214 c_0 e^{-0.23214t} \\ & + c_1(-1.9988 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t) - 1160.3 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t)) \\ & + c_2(-1.9988 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t) + 1160.3 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{v}_{m_c}(t) = {} & -0.0539 c_0 e^{-0.23214t} \\ & + c_1\big((3.9952 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t) - 2{,}319.2 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t)) \\ & + (2{,}319.2 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t) - 1346300 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t))\big) \\ & + c_2\big((3.9952 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t) - 2319.2 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t)) \\ & + (-2319.2 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t) - 1346300 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3t))\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{v}_{m_c}(t) = {} & -0.0539 c_0 e^{-0.23214t} - 1{,}346{,}296.0048 c_1 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t) \\ & + c_2(-1{,}346{,}296.0048 e^{-1.9988\,t} sin(1160.3) - 4638.4 e^{-1.9988\,t} cos(1160.3t)) \end{aligned}$$

Οπότε θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις της (5.3) και το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = -2.779 \\ 0.23214 c_0 + 1.9988 c_1 - 1160.3 c_2 = 0 \\ 0.0539 c_0 + 1{,}346{,}296.0048 c_1 + 4638.4 c_2 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

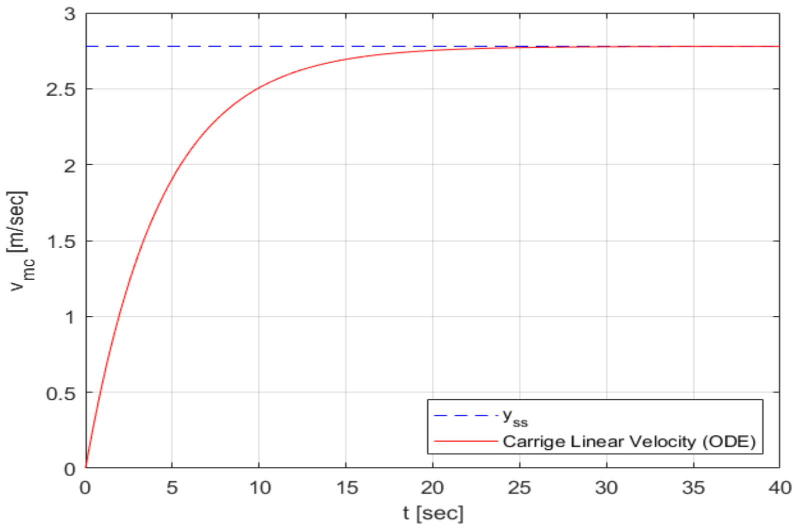
Λύνοντας αυτό το σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους της σχέσης (6.2), προκύπτουν οι εξής παράμετροι:

$$(c_0, c_1, c_2) = (-2.779002026809371, 2.02680937099213e - 06, -0.000555988519621612)$$

Επομένως, η ειδική λύση του προβλήματος θα είναι η εξής:

$$\begin{aligned} v_{m_c}(t) = {} & -2.779 e^{-0.23214t} + 0.0000020268 e^{-1.9988\,t} \cos(1160.3t) + \\ & -0.0005559 \mathrm{e}^{-1.9988\,t} \sin(1160.3t) + 2{,}779 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Τέλος, μπορούμε να δούμε την απόκριση της ταχύτητας στο σχήμα 4. Το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό, καθώς βλέπουμε πως συγκλίνει στην σε μία οριακή τιμή την y_{ss}. Η τιμή αυτή αποτελεί την μόνιμη κατάσταση του συστήματος, όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.



Σχήμα 3. Απόκριση γραμμικής ταχύτητας φορείου με είσοδο $i_s = 5\ A$

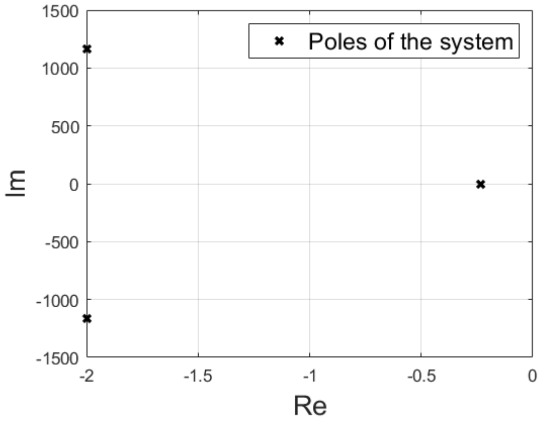
Η τιμή μόνιμης κατάστασης του συστήματος θα είναι:

$$v_{m_{c_{ss}}} = \lim_{t\to\infty} v_{m_c}(t) = 2.779 \tag{6.4}$$

καθώς εάν πάρουμε το όριο της σχέσης (6.3), τότε μηδενίζονται τα εκθετικά και μένει μόνο ο σταθερός όρος.

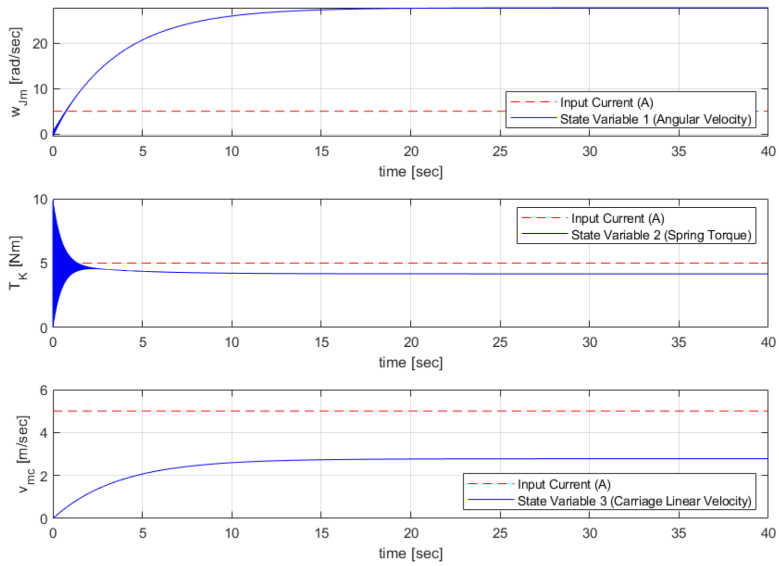
Ερώτημα – 7ο

Έχουμε υπολογίσει τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο ερώτημα 4. Αποδείξαμε πως οι ρίζες του βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο καθώς έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Έτσι, αποδεικνύεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Αναλυτικότερα φαίνονται και στο σχήμα 4.



Σχήμα 4. Λύσεις χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο μιγαδικό επίπεδο

Εφαρμόζοντας ρεύμα εισόδου $i_s = 5\ A$ στο σύστημα, δεχόμαστε τις αποκρίσεις των μεταβλητών κατάστασης στο σχήμα 5.

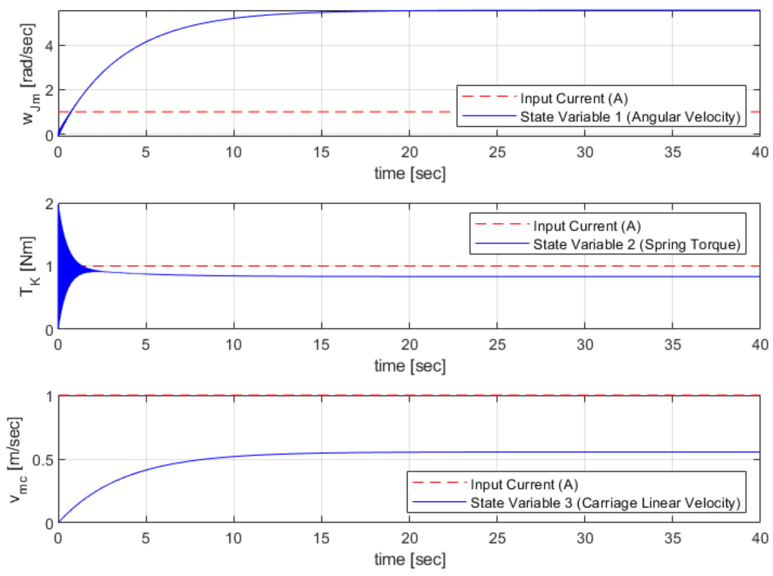


Σχήμα 5. Απόκριση μεταβλητών κατάστασης με είσοδο $i_s = 5\ A$

Οι αποκρίσεις που προκύπτουν στο σχήμα 5 παρουσιάζουν ταλαντώσεις κατά την λειτουργία του συστήματος. Αυτές οι ταλαντώσεις οφείλονται στις μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Μάλιστα έχουμε πολλές καθώς το φανταστικό μέρος αποτελείται από μεγάλο αριθμό και κατ' επέκτασιν προκύπτουν μεγάλες συχνότητες κατά την λειτουργία του. Εμφανές παράδειγμα αυτών των ταλαντώσεων που έχει το σύστημα παρατηρείται στην ροπή του δρομέα T_K. Επιπλέον, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως και οι άλλες δύο μεταβλητές κατάστασης εμφανίζουν ταλαντώσεις κατά την λειτουργία του συστήματος.

Ερώτημα – 8ο

Για βηματική είσοδο ($i_s = 1\ A$) στο σύστημα, δεχόμαστε τις αποκρίσεις που φαίνονται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6. Απόκριση μεταβλητών κατάστασης με είσοδο $i_s = 1\ A$

Η απόκριση σταθερής κατάστασης του σχήματος 6 δεν συμφωνεί με την απόκριση του σχήματος 3 (ερώτημα - 6ο ή στ), καθώς η ταχύτητα στο συγκεκριμένο γράφημα συγκλίνει περίπου στην τιμή $v_{m_{css}} = 0.5557\ m/sec$. Ενώ του ερωτήματος 6 στην τιμή $v_{m_{css}} = 2.779\ m/sec$, όπως αποδείχθηκε και από την σχέση (6.4). Η διαφορετική τιμή οφείλεται στο ρεύμα εισόδου που εισέρχεται στον κινητήρα του συστήματος.

Η απόκριση σταθερής κατάστασης των μεταβλητών κατάστασης του σχήματος 6 έχει διαφορετική τιμή συγκριτικά με αυτή του σχήματος 5. Αυτό οφείλεται στην είσοδο που εισάγουμε στο σύστημα. Είναι λογικό με την αύξηση της εισόδου να έχουμε και μεγαλύτερη απόκριση των μεταβλητών κατάστασης. Έτσι, η μόνιμη κατάσταση θα αλλάξει ανάλογα με την είσοδο που επιβάλλεται στον κινητήρα.