



*Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού*

*Κατεύθυνση Β:*

*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής*

*Μεταπτυχιακό Μάθημα:*

*Προτυποποίηση και Έλεγχος Δυναμικών Συστημάτων*

*Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων*

*Ομάδα 4*

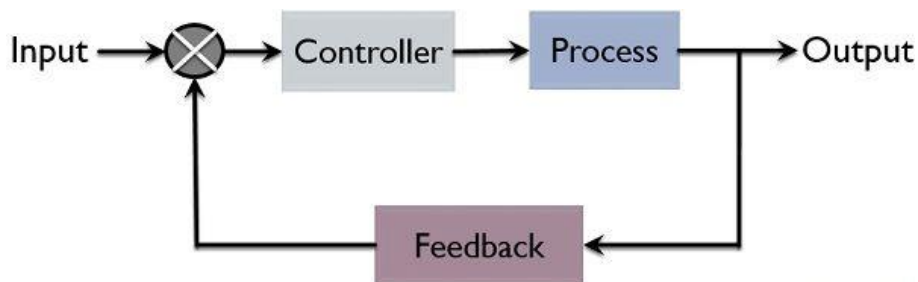
*Ονόματα Φοιτητών – Α.Μ.:*

*Ειρήνη – Μαρία Γεωργαντά – 02121201*

*Γεώργιος Κασσαβετάκης – 02121203*

*Γεώργιος Κρομμύδας – 02121208*

*Φραντζιέσκα Μιχαήλ – 02121216*



*ΑΘΗΝΑ,*

*2023*

## Πίνακας περιεχομένων

|                           |    |
|---------------------------|----|
| Άσκηση – 1 <sup>η</sup> : | 3  |
| Άσκηση – 2 <sup>η</sup> : | 5  |
| Άσκηση – 3 <sup>η</sup> : | 10 |
| Άσκηση – 4 <sup>η</sup> : | 12 |
| Άσκηση – 5 <sup>η</sup> : | 14 |

**Άσκηση – 1η:**

Δίνεται το σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου (SISO) το οποίο περιγράφεται από την συνάρτηση μεταφοράς  $G_p(s)$  της σχέσης (1.1).

$$G_p(s) = \frac{3}{(2s+1)(0.1s+1)^2} \quad (1.1)$$

Επιπλέον, δίνεται το μοντέλο του συστήματος  $G(s)$  και ο ελεγκτής του συστήματος  $K(s)$  που περιγράφονται από τις εξισώσεις (1.2) και (1.3) αντίστοιχα.

$$G(s) = \frac{3}{(2s+1)} \quad (1.2)$$

$$K(s) = \frac{K}{s} \quad (1.3)$$

Για την εύρεση του εύρους των τιμών του  $K$  που ικανοποιούν το κριτήριο της εύρωστης ευστάθειας, πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση της πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας. Για να γίνει αυτό, ορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς  $f(s)$  ως:

$$f(s) = G_p(s)G^{-1}(s) = \frac{1}{(0.1s+1)^2} \quad (1.4)$$

Έτσι, προκύπτει ότι η συνάρτηση πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα  $w_i(s)$  προκύπτει ότι πρέπει να ικανοποιεί την σχέση (1.5).

$$|w_i(s)| \geq \left| \frac{G_p(s)-G(s)}{G(s)} \right| = \left| \frac{f(s)G(s)-G(s)}{G(s)} \right| = |f(s) - 1| \quad (1.5)$$

Έτσι, γίνεται η επιλογή του  $w_i(s)$  σύμφωνα με την εξίσωση (1.5) ως:

$$w_i(s) = f(s) - 1 = \frac{-s(0.01s+0.2)}{(0.1s+1)^2} \quad (1.6)$$

Για την διερεύνηση της εύρωστης ευστάθειας χρειάζεται ο υπολογισμός της συνάρτησης καθοδήγησης, η οποία χρησιμοποιώντας το μοντέλο του συστήματος  $G(s)$  και την συνάρτηση του ανοιχτού βρόγχου  $L(s) = G(s)K(s)$  προκύπτει ως:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{3K}{s(2s+1)}}{1+\frac{3K}{s(2s+1)}} = \frac{3K}{2s^2+s+3K} \quad (1.7)$$

Με την παρατήρηση της συνάρτησης καθοδήγησης της (1.7), προκύπτει ότι για λόγους ευστάθειας πρέπει η επιλογή του  $K$  να είναι θετική. Έτσι, προκύπτει το κάτω όριο των τιμών της συνάρτησης καθώς πρέπει  $K > 0$ .

Για την συνθήκη της εύρωστης ευστάθειας χρησιμοποιείται η σχέση (1.8), η οποία είναι:

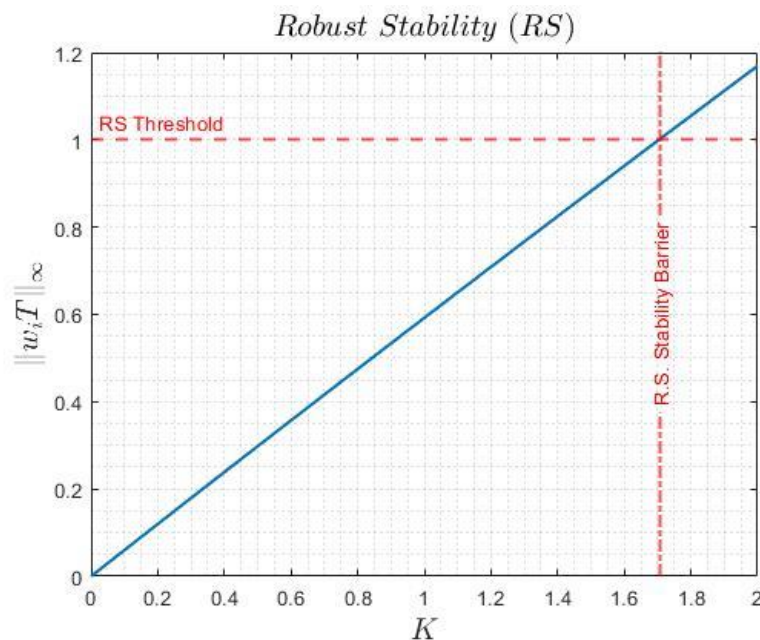
$$\|w_i(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \quad (1.8)$$

Λόγω της αυξημένης υπολογιστικής δυσκολίας της παραπάνω νόρμας καθώς είναι δύσκολο να βρεθεί το  $\omega$  που μεγιστοποιεί το μέτρο του  $w_i(s)T(s)$ , χρησιμοποιήθηκε κώδικας στο MATLAB, ο οποίος υπολογίζει την τιμή της νόρμας αυτής για διάφορες τιμές του  $K$ . Σε αυτόν, παρουσιάζεται και η τιμή του περιθωρίου κέρδους, για σύγκριση. Έτσι, καταλήγουμε στο ότι για  $K \geq 1.7057$  η νόρμα της σχέσης (1.8) παίρνει τιμές άνω της μονάδας, και επομένως το κριτήριο Εύρωστης Ευστάθειας δεν ικανοποιείται. Έτσι, το τελικό εύρος του ελεγκτή για εύρωστη ευστάθεια είναι  $0 < K < 1.7057$ .

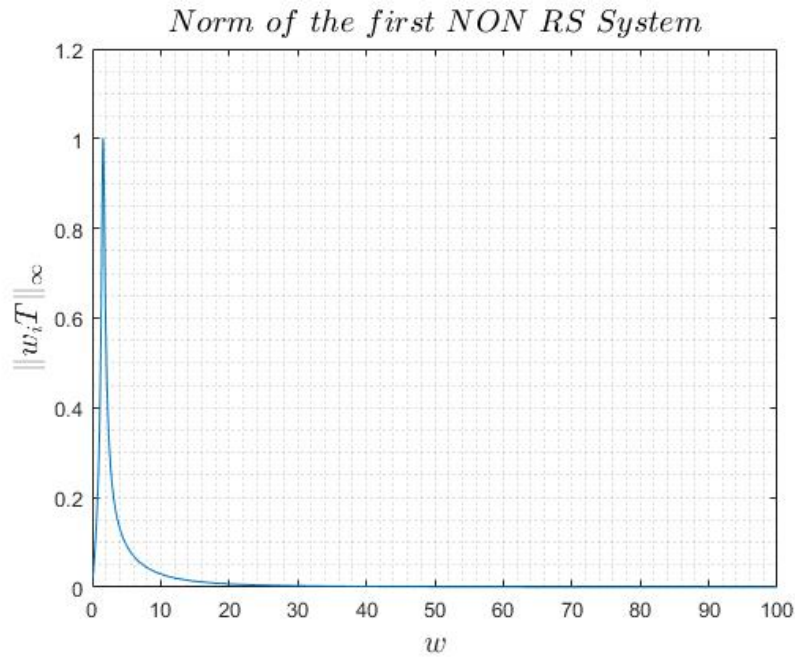
```
The System is RS stable for K < 1.7057
The Plant(added integrator) has Gain Margin GM = 1.749
Asking for stability of the T function, the K(s) gain is a K such that 0 < K < 1.7057
```

Εικόνα 1.1. Έξοδος κώδικα MATLAB

Ο κώδικας παράγει επιπλέον τις γραφικές παραστάσεις της νόρμας ανάλογα με το κέρδος  $K$  του ελεγκτή και το διάγραμμα *Bode* που αντιστοιχεί στην συνάρτηση μεταφοράς  $w_i(s)T(s)$ . Αυτά εμφανίζονται στις Εικόνες 1.2 και 1.3 αντίστοιχα.



Εικόνα 1.2. Άπειρη Νόρμα  $w_i(s)T(s)$  συναρτήσει του  $K$

Εικόνα 1.3. Διάγραμμα Bode  $w_i(s)T(s)$  για  $K = 1.7057$ **Άσκηση – 2η:**

Μας δίνεται το παρακάτω πολυμεταβλητό σύστημα

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Α) Για τις επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς του παραπάνω πολυμεταβλητού συστήματος θα υπολογίσουμε τα μέτρα τους, ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο. Επομένως ισχύει:

$$G_{11}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}, \quad \text{άρα } |G_{11}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \Rightarrow |G_{11}(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

$$G_{12}(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 1}, \quad \text{άρα } |G_{12}(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \Rightarrow |G_{12}(j\omega)|^2 = \frac{4}{\omega^2 + 1}$$

$$G_{21}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}, \quad \text{άρα } |G_{21}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \Rightarrow |G_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

$$G_{22}(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2}, \quad \text{άρα } |G_{22}(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \Rightarrow |G_{22}(j\omega)|^2 = \frac{4}{\omega^2 + 4}$$

Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.2) για να υπολογίσουμε την νόρμα:

$$\|G(s)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j} |G_{ij}(j\omega)|^2 d\omega} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} + \frac{4}{\omega^2 + 4} + \frac{1}{\omega^2 + 4} + \frac{4}{\omega^2 + 1} d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{\omega^2 + 1} + \frac{5}{\omega^2 + 4} d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} 5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{2}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2^2} d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} 5 \left[ \tan^{-1}(\omega) + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} 5 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} 5 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} 5 \frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \\ &\Rightarrow \|G(s)\|_2 \cong 1.9365 \end{aligned}$$

Β) Στο πολυμεταβλητό σύστημα οι επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς είναι:

$$\frac{1}{s+1}, \quad \frac{2}{s+2}, \quad \frac{1}{s+2}, \quad \frac{2}{s+1}$$

Θα επιβάλουμε από μία συνάρτηση Dirac με  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  σε κάθε μία από τις επιμέρους βαθμωτές σχέσεις, ώστε να βρούμε τον πολυδιάστατο πίνακα στο πεδίο του χρόνου.

Οπότε, έχουμε:

$$\frac{Y_1(s)}{Z_1(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y_1(s) = \frac{1}{s+1} Z_1(s)$$

$$\text{Για } z_1 = \delta(t) \text{ έχουμε } Z_1(s) = 1. \text{ Άρα } Y_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Ομοίως, οι αποκρίσεις όλων των μεταβλητών εξόδου θα γίνουν:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad Y_2(s) = \frac{2}{s+2}, \quad Y_3(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Y_4(s) = \frac{2}{s+1}$$

Έτσι, θα υπολογίζουμε τις αντίστοιχες αποκρίσεις στο πεδίο του χρόνου:

$$y_{11}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

$$y_{12}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}\right\} = 2e^{-2t}$$

$$y_{21}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_3(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$$

$$y_{22}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_4(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} = 2e^{-t}$$

Άρα, ο παραγόμενος πίνακας στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$g(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2e^{-2t} \\ e^{-2t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.4), η οποία χρησιμοποιεί τον πολυμεταβλητό πίνακα στο πεδίο του χρόνου:

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} \int_0^\infty |g_{ij}(\tau)|^2 d\tau} \quad (2.4)$$

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty (e^{-\tau})^2 d\tau + \int_0^\infty (2e^{-2\tau})^2 d\tau + \int_0^\infty (e^{-2\tau})^2 d\tau + \int_0^\infty (2e^{-\tau})^2 d\tau}$$

$$= \sqrt{\int_0^\infty e^{-2\tau} d\tau + 4 \int_0^\infty e^{-4\tau} d\tau + \int_0^\infty e^{-4\tau} d\tau + 4 \int_0^\infty e^{-2\tau} d\tau}$$

$$= \sqrt{\left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau} - e^{-4\tau} - \frac{1}{4}e^{-4\tau} - 2e^{-2\tau}\right]_0^\infty} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + 2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow \|G(s)\|_2 \cong 1.9365$$

Γ) Θεωρώ το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Άρα

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} U_1(s) + \frac{2}{s+2} U_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s+2} U_1(s) + \frac{2}{s+1} U_2(s)$$

Από την συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  παρατηρώ ότι το σύστημα έχει δύο πόλους στο -1 και δύο στο -2. Συνεπώς το σύστημα έχει 4 ιδιοτιμές και άρα ο πίνακας  $A$  είναι διάστασης  $n = 4$ . Άρα οι μεταβλητές κατάστασης είναι 4:  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Οπότε θεωρώ:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} U_1(s) \Rightarrow sX_1(s) + X_1(s) = U_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u_1(t)$$

$$X_2(s) = \frac{2}{s+2} U_2(s) \Rightarrow sX_2(s) + 2X_2(s) = 2U_2(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 2u_2(t)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+2} U_1(s) \Rightarrow sX_3(s) + 2X_3(s) = U_1(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_3(t) = -2x_3(t) + u_1(t)$$

$$X_4(s) = \frac{2}{s+1} U_2(s) \Rightarrow sX_4(s) + X_4(s) = 2U_2(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_4(t) = -x_4(t) + 2u_2(t)$$

Άρα

$$Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$Y_2(s) = X_3(s) + X_4(s) \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_2(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

Επομένως το σύστημα μεταβλητών κατάστασης που προκύπτει είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Με την χρήση των παραπάνω πινάκων, θα χρησιμοποιήσουμε τη Gramian εξίσωση και να βρούμε τον πίνακα  $P$ . Οπότε:



$$AP + PA^T = -BB^T \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

-

$$\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ -2p_{21} & -2p_{22} & -2p_{23} & -2p_{24} \\ -2p_{31} & -2p_{32} & -2p_{33} & -2p_{34} \\ -p_{41} & -p_{42} & -p_{43} & -p_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} & -2p_{12} & -2p_{13} & -p_{14} \\ -p_{21} & -2p_{22} & -2p_{23} & -p_{24} \\ -p_{31} & -2p_{32} & -2p_{33} & -p_{34} \\ -p_{41} & -2p_{42} & -2p_{43} & -p_{44} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{11} & 3p_{12} & 3p_{13} & 2p_{14} \\ 3p_{21} & 4p_{22} & 4p_{23} & 3p_{24} \\ 3p_{31} & 4p_{32} & 4p_{33} & 3p_{34} \\ 2p_{41} & 3p_{42} & 3p_{43} & 2p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Άρα, ο πίνακας που προκύπτει θα είναι:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$CPC^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

Επομένως η νόρμα  $\|G(s)\|_2$  που αντιστοιχεί στο πολυμεταβλητό σύστημα είναι:

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\text{tr}(CPC^T)} = \sqrt{\text{tr} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow \|G(s)\|_2 \cong 1.9365$$

**Άσκηση – 3η:**

Μας δίνεται το παρακάτω σύστημα μεταβλητών κατάστασης.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.2)$$

Ζητείται να σχεδιαστεί ένας  $LQR$  ελεγκτής με την μέθοδο του επαυξημένου συστήματος, έτσι ώστε όταν δοθεί βηματική επιβολή στο σύστημα, το σφάλμα ανάδρασης να μηδενίζεται. Θα δημιουργήσουμε αρχικά το επαυξημένο σύστημα. Οπότε έχουμε ότι:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, το επαυξημένο σύστημα που δημιουργείται είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.3)$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Εκτός από αυτούς τους πίνακες, θα χρησιμοποιηθούν και οι πίνακες:

$$Q = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \rho I_1 = \rho$$

Θα χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω πίνακες για να υπολογιστούν τα βέλτιστα κέρδη του αλγορίθμου, όπου η σταθερά  $\rho$  θα δεχτεί τιμές από το σύνολο  $\{0.1, 1, 10\}$ . Ο αλγόριθμος βασίζεται στην γραμμική εξίσωση Riccati από την οποία θα υπολογιστεί ένας συμμετρικά και θετικά ορισμένος πίνακας  $P$ .

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (3.5)$$

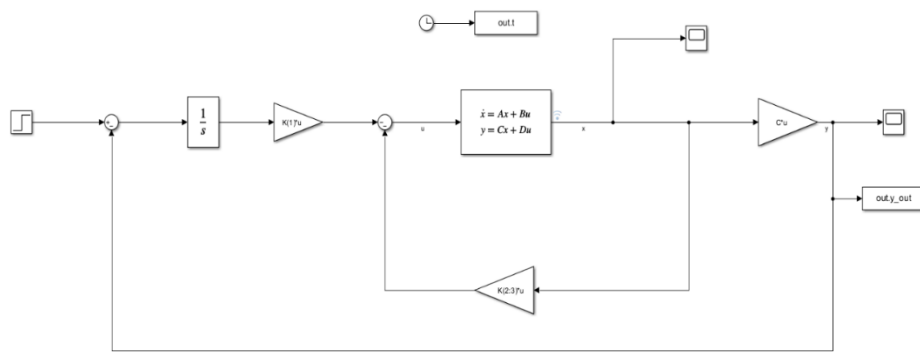
Εν συνεχεία αυτός ο πίνακας θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα κατάλληλα κέρδη της μεθόδου και να εφαρμοστεί ο νόμος ελέγχου στο σύστημα. Τα κέρδη υπολογίζονται από τον εξής τύπο:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3.6)$$

Ο νόμος ελέγχου που θα εφαρμοστεί θα είναι:

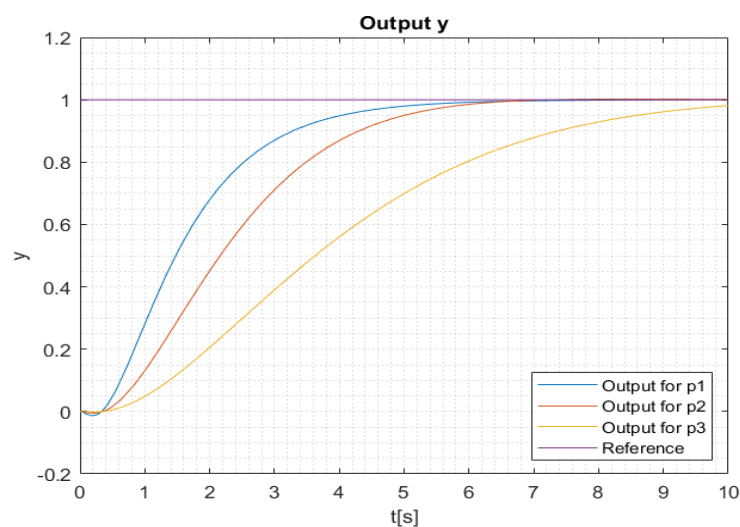
$$u = -K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_2 e(t) \quad (3.7)$$

Για τον υπολογισμό της μεθόδου και της προσομοίωσης αναπτύχθηκε ένας κώδικας *MATLAB* ο οποίος χρησιμοποιεί τις σχέσεις (3.3), (3.5) και (3.6) ώστε να υπολογιστούν τα βέλτιστα κέρδη. Στη συνέχεια, η προσομοίωση γίνεται από το αρχείο *Simulink* και παράγεται το διάγραμμα απόκρισης των συστημάτων. Το σχέδιο του συστήματος παρατηρείται στην Εικόνα 3.1.



Εικόνα 3.1. Μοντέλο Συστήματος Ελεγκτή LQR

Στην εικόνα 3.2 παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος για διαφορετικές τιμές του  $\rho$ .

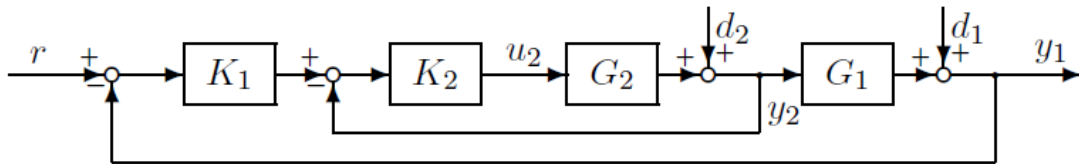


Εικόνα 3.2. Αποτελέσματα προσομοίωσης LQR Ελεγκτή

Παρατηρούμε πως όταν αυξάνεται η τιμή του  $\rho$  η σύγκλιση του συστήματος στην επιθυμητή τιμή επέρχεται με μεγαλύτερη καθυστέρηση.

### Άσκηση - 4η:

Δίνεται το Σχήμα 4.1, το οποίο πρέπει να μετατραπεί στην Δομή P-K.



Εικόνα 4.1. Αρχική διάταξη συστήματος

Θεωρώντας ως δεδομένο την έξοδο του συστήματος προκύπτει ότι:

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \quad (4.1)$$

Με βάση τις εισόδους από εξωτερικά σήματα προκύπτει το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  σύμφωνα με την σχέση (4.2) ως:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Από την Εικόνα 4.1, μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 = \mathbf{r} - (\mathbf{d}_1 + \mathbf{G}_1 \mathbf{y}_2) = \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 - \mathbf{G}_1 (\mathbf{d}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{u}_2) \Rightarrow \\ \mathbf{z} &= [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \quad -\mathbf{G}_1] \mathbf{w} + [-\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2] \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Από την Εικόνα 4.1, για το σήμα ελέγχου  $\mathbf{u}_2$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{K}_2 (\mathbf{K}_1 (\mathbf{r} - \mathbf{y}_1) - \mathbf{y}_2) \quad (4.4)$$

Ορίζοντας τα διανύσματα  $\mathbf{v} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2]^T$  και  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ , η σχέση (4.4) μετατρέπεται στην σχέση:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1 \quad -\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1 \quad -\mathbf{K}_2] \mathbf{v} \quad (4.5)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να εκφραστούν τα μεγέθη του διανύσματος  $\mathbf{v}$  μέσω των διανυσμάτων  $\mathbf{w}$  και  $\mathbf{u}$ . Έτσι, προκύπτει ότι το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  είναι:

$$\begin{aligned}
 v = \begin{bmatrix} r \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [I \ 0 \ 0]w \\ d_1 + G_1 y_2 \\ d_2 + G_2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I \ 0 \ 0]w \\ d_1 + G_1 d_2 + G_1 G_2 u \\ d_2 + G_2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I \ 0 \ 0]w \\ [0 \ I \ G_1]w + G_1 G_2 u \\ [0 \ 0 \ I]w + G_2 u \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 v &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & G_1 & G_1 G_2 \\ 0 & 0 & I & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Με βάση τις σχέσεις (4.3) και (4.6), προκύπτει ο πίνακας  $P$  της δομής  $P$ - $K$ , ο οποίος είναι:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & -G_1 & -G_1 G_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & G_1 & G_1 G_2 \\ 0 & 0 & I & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Αυτός ο πίνακας, συνοδεύεται και από τον πίνακα του ελεγκτή, ο οποίος είναι ο πίνακας  $K = [K_2 K_1 \quad -K_2 K_1 \quad -K_2]$  της σχέσης (4.5).

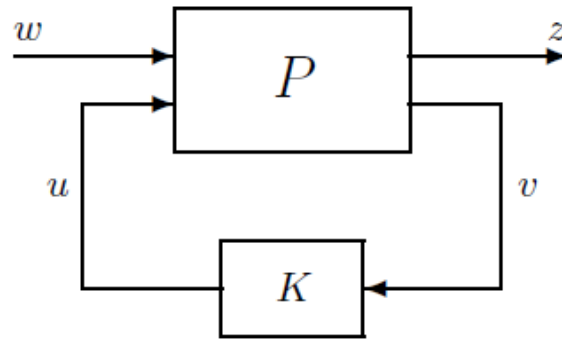
Εναλλακτικά, θα μπορούσε να οριστεί το διάνυσμα  $v = [(r - y_1) \quad y_2]^T$ , το οποίο θα έδινε διαφορετικά αλλά ισοδύναμα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, για εκείνο το διάνυσμα  $v$  η σχέση (4.7) μετατρέπεται στην σχέση:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I & -G_1 & -G_1 G_2 \\ I & -I & -G_1 & -G_1 G_2 \\ 0 & 0 & I & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Η σχέση (4.8) συνοδεύεται και από τον πίνακα  $K = [K_2 K_1 \quad -K_2]$ , αντί για αυτόν της σχέσης (4.5).

Σύμφωνα με τις σχέσεις (4.5) και (4.7), το σύστημα της Εικόνας 4.1 αντιστοιχεί με αυτό της Εικόνας 4.2 όταν ισχύουν οι συνοπτικές σχέσεις (4.9), οι οποίες είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = [r \quad d_1 \quad d_2]^T \\ z = r - y_1 \\ v = [r \quad y_1 \quad y_2]^T \\ u = u_2 \\ P = \begin{bmatrix} I & -I & -G_1 & -G_1 G_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & G_1 & G_1 G_2 \\ 0 & 0 & I & G_2 \end{bmatrix} \\ K = [K_2 K_1 \quad -K_2 K_1 \quad -K_2] \end{array} \right. \quad (4.9)$$



Εικόνα 4.2. Τελική διάταξη συστήματος- Δομή PK

**Άσκηση - 5η:**

Μας δίνεται το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.460 & 0 & 2.4276 \\ 0.0575 & -0.4 & -0.1326 \\ 0.3107 & 0 & -2.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.2026 \\ 0.1365 & -0.0436 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

(Α) Μας ζητείται να σχεδιαστεί ένας LQR ελεγκτής για το σύστημα μεταβλητών καταστάσεων που περιγράφεται από τις σχέσεις (5.1) και (5.2). Το πρώτο βήμα που θα κάνουμε είναι να το μετατρέψουμε σε επαυξημένη μορφή. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους πίνακες Q και R και να υπολογιστούν τα κέρδη του ελεγκτή. Τέλος, θα υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου, ώστε να βρούμε τις ιδιάζουσες τιμές του επαυξημένου συστήματος και να τις ρυθμίσουμε με βάσει τις δοθέντες προδιαγραφές για το σύστημα. Θα υπολογίσουμε αρχικά το επαυξημένο σύστημα.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.460 & 0 & 2.4276 \\ 0 & 0 & 0.0575 & -0.4 & -0.1326 \\ 0 & 0 & 0.3107 & 0 & -2.23 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4182 & 5.2026 \\ 0.1365 & -0.0436 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [I \quad \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, το επαυξημένο σύστημα που δημιουργείται είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.460 & 0 & 2.4276 \\ 0 & 0 & 0.0575 & -0.4 & -0.1326 \\ 0 & 0 & 0.3107 & 0 & -2.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4182 & 5.2026 \\ 0.1365 & -0.0436 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.3)$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Το επόμενο βήμα του αλγορίθμου είναι να υπολογίσουμε τους πίνακες  $Q$  και  $R$ . Για τον υπολογισμό του πίνακα  $Q$  θα πρέπει να υπολογίσουμε του πίνακες  $M$  που αντιστοιχούν στις χαμηλές και υψηλές συχνότητες αντίστοιχα. Επομένως έχουμε

$$M_L = -[CA^{-1}B]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2574 & 3.5050 \\ 0.2629 & -0.6588 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$M_H = [B^T B]^{-1} B^T = \begin{bmatrix} -0.0041 & 0.4886 & 1.8030 \\ 0.1925 & -0.0410 & -0.1445 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Οπότε, ο πίνακας  $Q$  θα υπολογιστεί από την σχέση (5.7), συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.5) και (5.6).

$$Q = [M_L \ M_H]^T [M_L \ M_H] = \begin{bmatrix} 0.1354 & -1.0752 & 0.0517 & -0.1365 & -0.5020 \\ -1.0752 & 12.7192 & -0.1412 & 1.7394 & 6.4146 \\ 0.0517 & -0.1412 & 0.0371 & -0.0099 & -0.0352 \\ -0.1365 & 1.7394 & -0.0099 & 0.2404 & 0.8868 \\ -0.5020 & 6.4146 & -0.0352 & 0.8868 & 3.2716 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Ο επόμενος πίνακας που είναι να υπολογιστεί είναι ο  $R$ . Υστερα από πολλές δοκιμές και πειράματα, παρατηρήθηκε πως η καλύτερη δυνατή τιμή για το σύστημα και τον υπολογισμό των καλύτερων δυνατών κερδών είναι η  $\rho = 0.102$ . Υπολογίζεται από τον τύπο (5.8):

$$R = \rho^2 I = (0.102)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.010404 & 0 \\ 0 & 0.010404 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Έχουμε υπολογίσει όλους τους πίνακες που χρειαζόμαστε για να σχεδιάσουμε τον ελεγκτή  $LQR$ . Ο αλγόριθμος του ελεγκτή βασίζεται στην γραμμική εξίσωση Riccati από την οποία θα υπολογιστεί ένας συμμετρικά και θετικά ορισμένος πίνακας  $P$ .

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (5.9)$$

Εν συνεχεία αυτός ο πίνακας θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα κατάλληλα κέρδη της μεθόδου και να εφαρμοστεί ο νόμος ελέγχου στο σύστημα. Τα κέρδη υπολογίζονται από τον εξής τύπο:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (5.10)$$

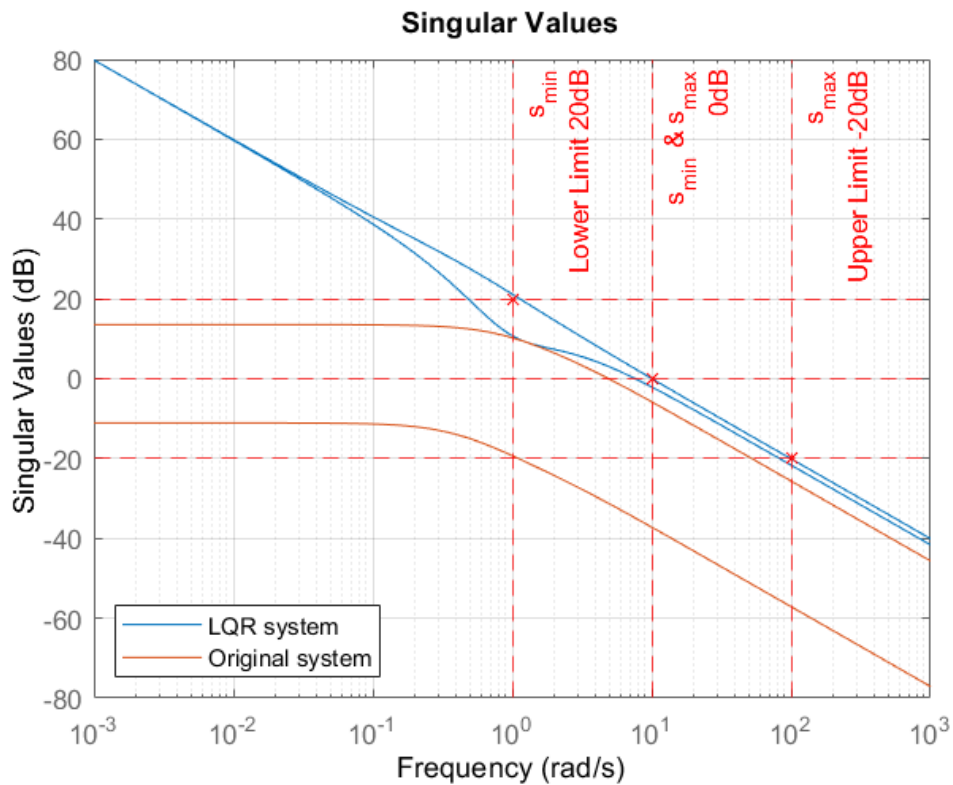
Ο νόμος ελέγχου που θα εφαρμοστεί θα είναι:

$$u = -K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_2 e(t) \quad (5.11)$$

Καθώς έχουν υπολογιστεί τα νέα κέρδη, το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστούν οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα συναρτήσεων ανοικτού βρόχου  $L_{LQ}$ . Γενικά, γνωρίζουμε πως ο πίνακας αυτός υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$L_{LQ}(s) = K[sI_5 - \tilde{A}]^{-1}\tilde{B} \quad (5.12)$$

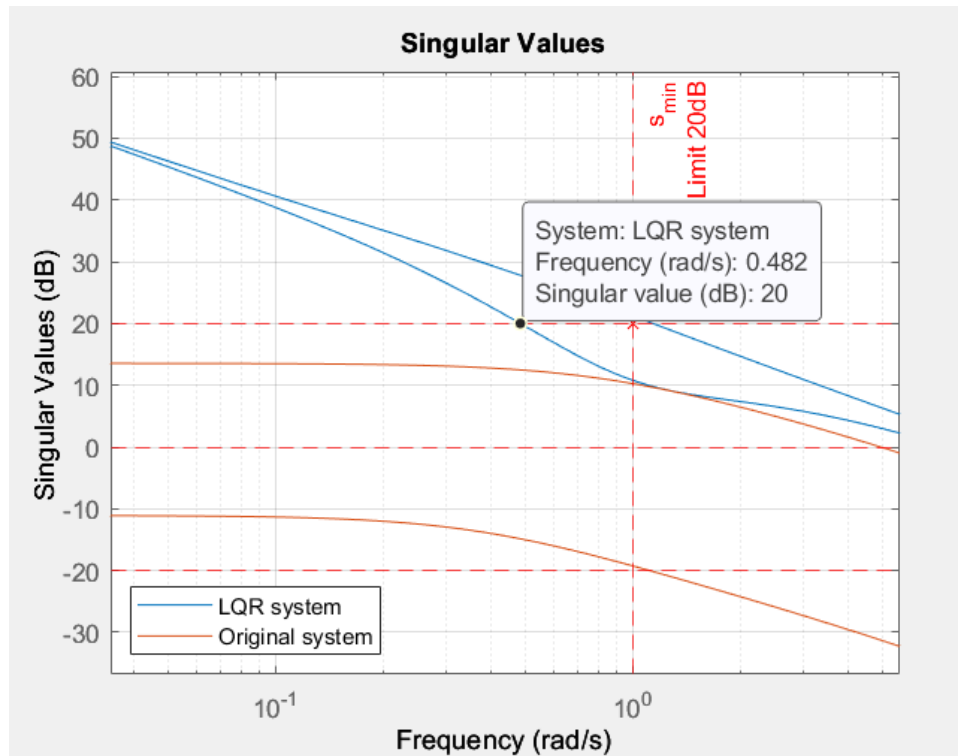
Με την σχέση (5.12) θα υπολογίσουμε τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα για να δούμε αν πληρούμε τις προδιαγραφές. Εκτελώντας πολλά διαδοχικά πειράματα με διαφορετικές τιμές στην παράμετρο  $\rho$ , διαπιστώσαμε πως δεν είναι εφικτό να πληρούνται όλες οι προδιαγραφές ταυτόχρονα. Αναλυτικότερα μπορούμε να δούμε και στην εικόνα 5.1.1 τις ιδιάζουσες τιμές του συστήματος.



Εικόνα 5.1.1 Ιδιάζουσες τιμές Συστήματος Ανοικτού Βρόχου



Η τιμή  $\rho$  που κρίθηκε καταλληλότερη για τον σχεδιασμό είναι 0.102. Όπως διαπιστώνουμε και από το γράφημα τις εικόνας 5.1.1, πληρούνται οι δύο από τις τρεις προδιαγραφές. Δηλαδή, παρατηρούμε πως η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή  $\sigma_{\min}(L_{LQ}(s))$  δεν έχει τιμή πάνω από 20 dB για όλες τις γωνιακές συχνότητες που έχουν μικρότερη τιμή από την μονάδα ( $\omega < 1 \text{ rad/sec}$ ). Η πτώση τιμής της  $\sigma_{\min}(L_{LQ}(s))$  διαπιστώνεται στο εύρος συχνοτήτων  $\omega \in [0.482775, 1] \text{ rad/sec}$ . Μπορούμε να το αντικρίσουμε πιο αναλυτικά στην εικόνα 5.1.2.



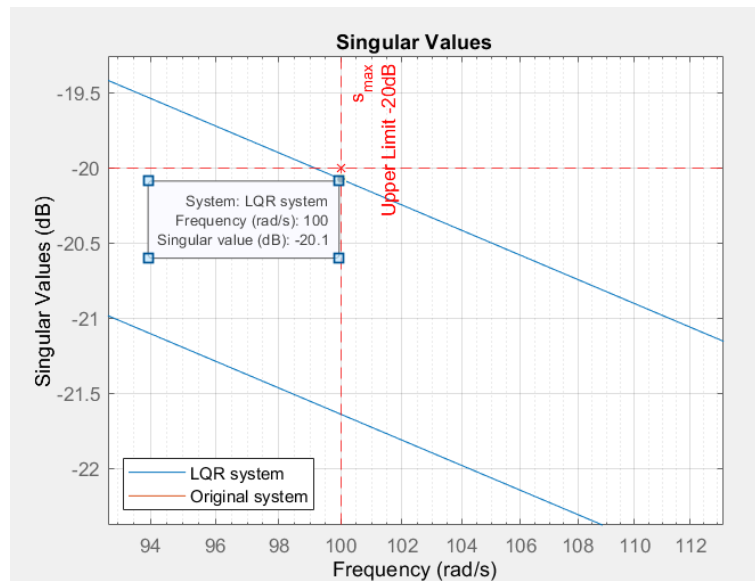
Εικόνα 5.1.2 Εύρος Τιμών Ελάχιστης Ιδιάζουσας Τιμής  $\sigma_{\min}(L_{LQ}(s))$

Δηλαδή αυτό που ισχύει είναι:

$$\sigma_{\min}(L_{LQ}(s)) \geq 20 \text{ dB για } \omega < 0.482775 \text{ rad/sec}$$

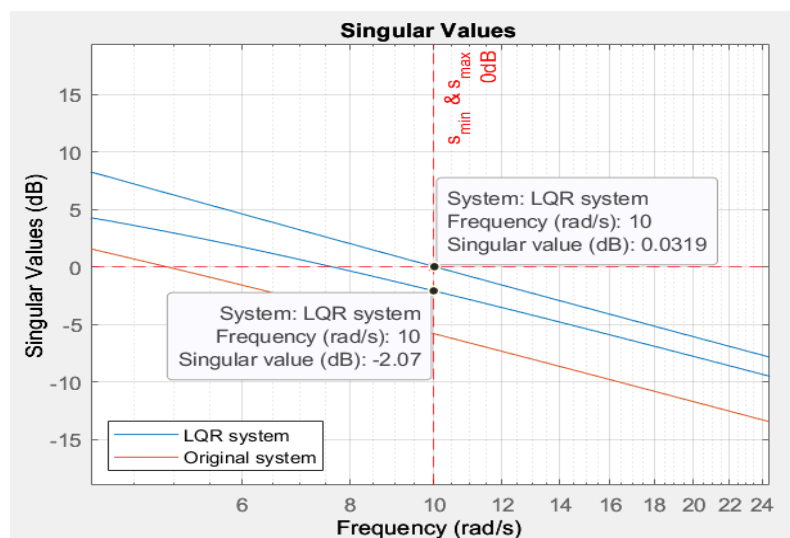
Για την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή  $\sigma_{\max}(L_{LQ}(s))$  αυτό που παρατηρούμε είναι πως πληροί τις προδιαγραφές και για συχνότητες μεγαλύτερες των  $100 \text{ rad/sec}$  έχει τιμές μικρότερες του άνω ορίου των  $-20 \text{ dB}$ . Αυτό μπορούμε να το δούμε πιο αναλυτικά στην εικόνα 5.1.3. Παρατηρούμε πως για  $\omega > 100 \text{ rad/sec}$  το  $\sigma_{\max}(L_{LQ}(s)) < -20 \text{ dB}$ . Συνεπώς, διαπιστώνουμε πως πληροί την προδιαγραφή για την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή. Δηλαδή:

$$\sigma_{\max}(L_{LQ}(s)) \leq -20 \text{ dB για } \omega > 100 \text{ rad/sec}$$

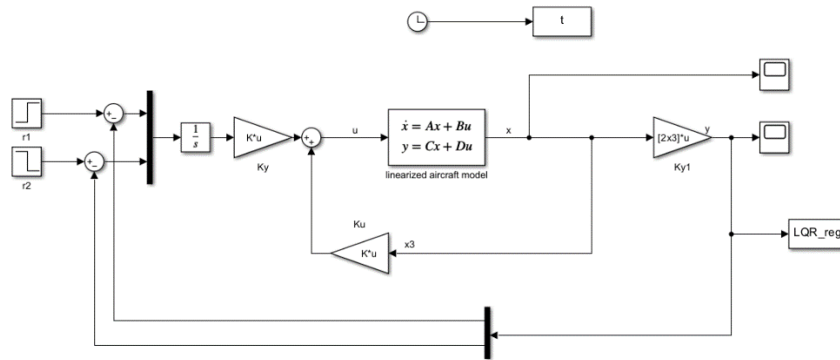
Εικόνα 5.1.3 Εύρος Τιμών Μέγιστης Ιδιάζουσας Τιμής  $\sigma_{max}(L_Q(s))$ 

Τέλος, έχουμε να ελέγξουμε την τρίτη προδιαγραφή για το αν ισχύει. Πράγματι, σύμφωνα με την εικόνα 5.1.4 παρατηρούμε πως οι τιμές και της μέγιστης ιδιάζουσας τιμής  $\sigma_{max}(L_Q(s))$  είναι κοντά στο μηδέν και αντίστοιχα η τιμή της ελάχιστης ιδιάζουσας τιμής  $\sigma_{min}(L_Q(s))$  είναι επίσης κοντά στο μηδέν, όταν η τιμή της συχνότητας γίνει  $10 \text{ rad/sec}$ . Έτσι, μπορούμε να αντιληφθούμε πως ισχύει και η τελευταία προδιαγραφή που τέθηκε

$$\sigma_{max}(L_Q(s)) \approx \sigma_{min}(L_Q(s)) \approx 0 \text{ για } \omega = 10 \text{ rad/sec}$$

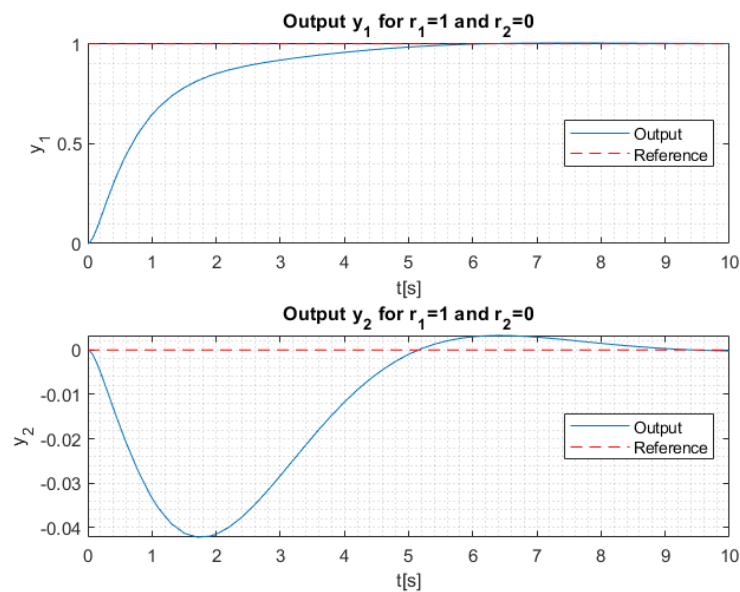
Εικόνα 5.1.4 Εύρος Τιμών Μέγιστης Ιδιάζουσας Τιμής  $\sigma_{max}(L_Q(s))$  και Ελάχιστης Ιδιάζουσας Τιμής  $\sigma_{min}(L_Q(s))$

(B) Η σχεδίαση του ελεγκτή έχει ολοκληρωθεί με τον υπολογισμό των κατάλληλων κερδών που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για τις προσομοιώσεις. Εφαρμόστηκε ένα σύνολο από βηματικές εισόδους στο σύστημα, με τις προσομοιώσεις να γίνονται στο αρχείο *LQR\_Integration*. Το συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου φαίνεται στην εικόνα 5.3. Επίσης, όλες οι μεταβλητές κατάστασης του φυσικού συστήματος έχουν ως σημείο ισορροπίας το 0 και οι προσομοιώσεις εκτελούνται για χρονικό διάστημα των 10 sec.



Εικόνα 5.3. Σύστημα Κλειστού Βρόχου

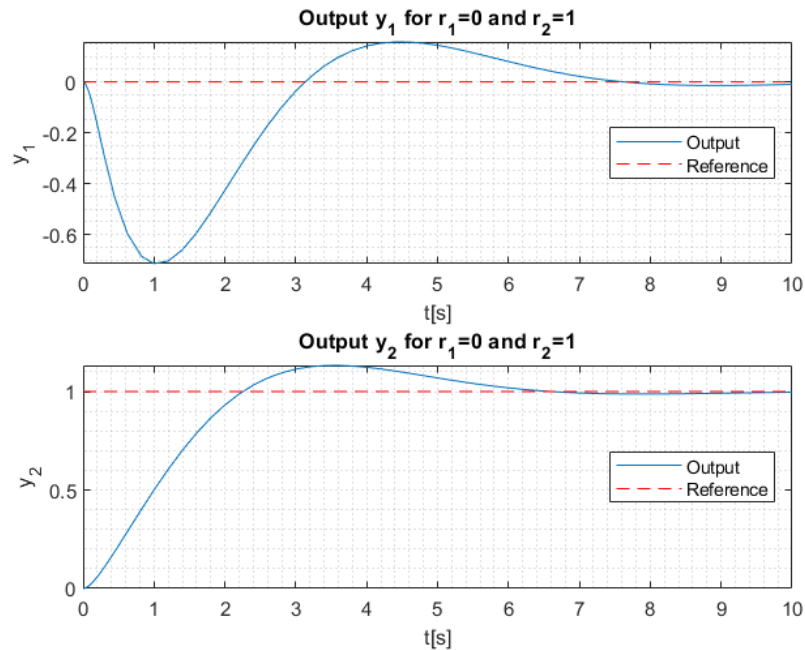
(α) Με επιβολή στις εισόδους του συστήματος τις τιμές  $r = [1.0, 0.0]^T$ , παράγεται το γράφημα της εικόνας 5.4



Εικόνα 5.4 Προσομοίωση Συστήματος Με Επιβολή Εισόδου  $r = [1.0, 0.0]^T$

Αυτό που παρατηρούμε κατά την προσομοίωση είναι πως η έξοδος  $y_1$  συγκλίνει σχεδόν ιδανικά στην επιθυμητή τιμή. Ενώ η  $y_2$  εμφανίζει δύο overshooting κατά την πάροδο του χρόνου μέχρι να συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή.

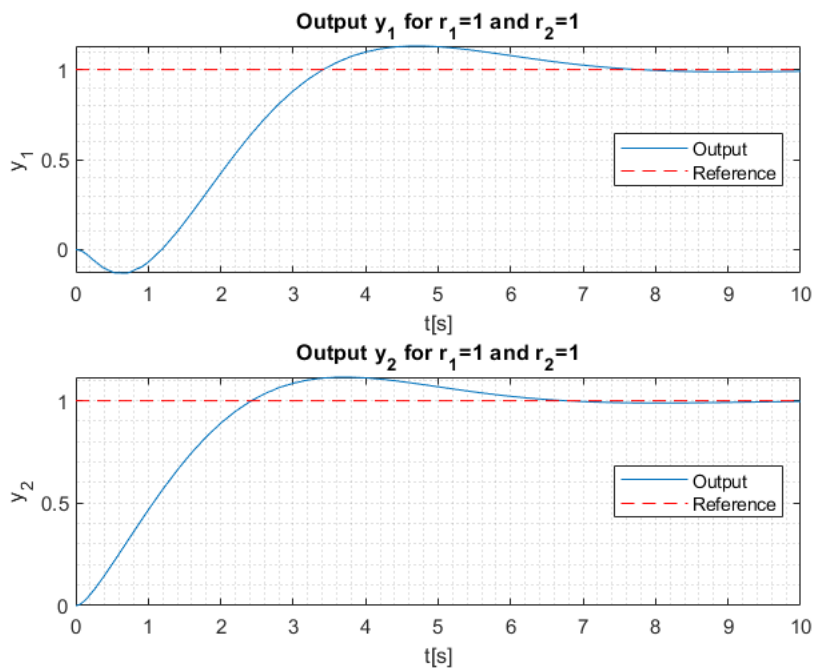
(β) Με επιβολή στις εισόδους του συστήματος τις τιμές  $r = [0.0, 1.0]^T$ , παράγεται το γράφημα της εικόνας 5.5



Εικόνα 5.5 Προσομοίωση Συστήματος Με Επιβολή Εισόδου  $r = [0.0, 1.0]^T$

Αυτό που παρατηρούμε στις προσομοιώσεις είναι πως και στις δύο αποκρίσεις εμφανίζονται overshooting μέχρι να συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές.

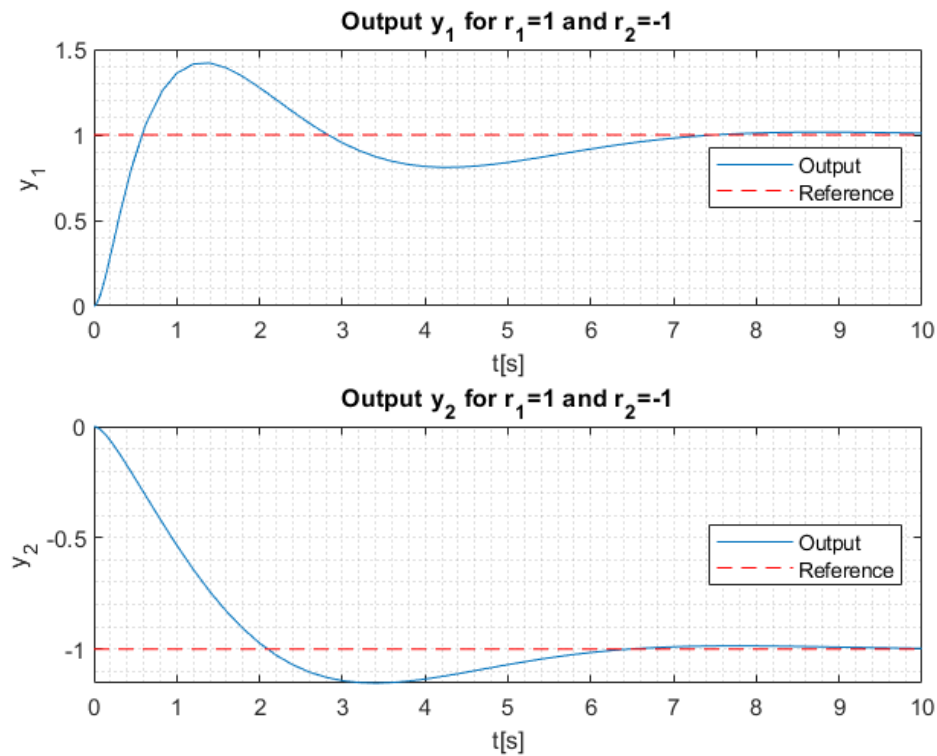
(γ) Με επιβολή στις εισόδους του συστήματος τις τιμές  $r = [1.0, 1.0]^T$ , παράγεται το γράφημα της εικόνας 5.6



Εικόνα 5.6 Προσομοίωση Συστήματος Με Επιβολή Εισόδου  $r = [1.0, 1.0]^T$

Αυτό που παρατηρούμε στις προσομοιώσεις είναι πως και στις δύο αποκρίσεις εμφανίζονται overshooting μέχρι να συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές. Επίσης, η απόκριση  $y_1$  δέχεται αρνητικές τιμές στο χρονικό διάστημα  $[0,1]$  sec.

(δ) Με επιβολή στις εισόδους του συστήματος τις τιμές  $r = [1.0, -1.0]^T$ , παράγεται το γράφημα της εικόνας 5.7



Εικόνα 5.7 Προσομοίωση Συστήματος Με Επιβολή Εισόδου  $r = [1.0, -1.0]^T$

Στην εφαρμογή αυτών των βηματικών εισόδων, παρατηρούμε πως εμφανίζονται επίσης *overshooting*. Τέλος, οι έξοδοι του συστήματος συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές που έχουμε εισάγει στο σύστημα να τις προσομοιώσει.