



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΠΜΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ**

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Β' :**

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

**Μεταπτυχιακό Μάθημα:**

**Πολυμεταβλητά Συστήματα Ελέγχου**

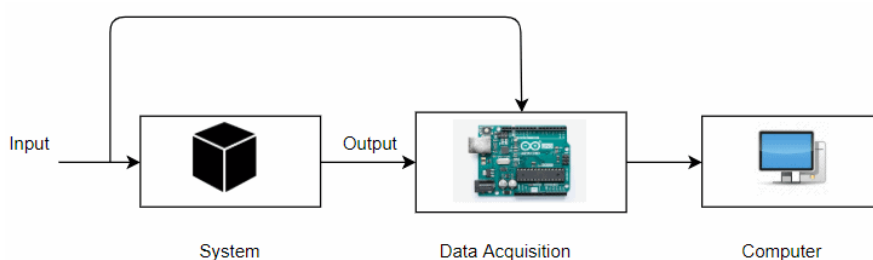
**Εργασία Μοντελοποίησης Υδραυλικού Συστήματος**

**με χρήση γραμμικών μοντέλων**

**Ονόματα Φοιτητών - Α.Μ.:**

**Γεώργιος Κασσαβετάκης - 02121203**

**Γεώργιος Κρομμύδας - 02121208**



**ΑΘΗΝΑ,**

**2023**

# Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας περιεχομένων .....	2
Περιγραφή του προβλήματος .....	3
Γραμμικό Μοντέλο Προσομοίωσης .....	3
Ηλεκτρο-υδραυλική Σερβοβαλβίδα .....	3
Υδραυλικό Σύστημα Επενέργειας.....	4
Συνάρτηση Μεταφοράς Συνολικού Συστήματος.....	6
Πρώτο Μοντέλο: Μοντέλο Πρώτης Τάξης.....	8
Δεύτερο Μοντέλο: Μοντέλο Μεγαλύτερης Τάξης.....	10
Γραμμική Παραμετροποίηση .....	10
Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.....	12
Εύρεση Μοντέλου .....	13
Σύγκριση Μοντέλων και επικύρωση Αποτελεσμάτων .....	15
Συμπεράσματα - Μελλοντικά Βήματα.....	16
Βιβλιογραφία .....	18

## Περιγραφή του προβλήματος

Στην παρούσα εργασία γίνεται προσπάθεια μοντελοποίησης ενός συστήματος υδραυλικής σερβοβαλβίδας και του συνδεδεμένου σε αυτή υδραυλικού επενεργητή. Για την δημιουργία αυτού του μοντέλου, στα πλαίσια της μελέτης γίνεται η παρακάτω διάκριση ενεργειών. Αρχικά, γίνεται η δημιουργία του μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση με βάση την μέθοδο μοντελοποίησης που παρουσιάζεται στο [1]. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν είναι σε πλήρη αναλογία με αυτές που εμφανίζονται στο [2]. Ως δεύτερο βήμα γίνεται η μοντελοποίηση με την μέθοδο ενός μοντέλου πρώτης τάξης, όπως αυτή παρουσιάζεται στο [3]. Στην συνέχεια, γίνεται η χρήση της μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων για την δημιουργία ενός γραμμικού μοντέλου μεγαλύτερης τάξης. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για την παρουσίαση του αποτελέσματος με την διαφορετική γωνία της μέτρησης θέσης και της μέτρησης δύναμης της εξόδου.

## Γραμμικό Μοντέλο Προσομοίωσης

### Ηλεκτρο-υδραυλική Σερβοβαλβίδα

Με βάση την ανάλυση που έγινε στο [2], το σύστημα της ηλεκτρο-υδραυλικής σερβοβαλβίδας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία συνάρτηση μεταφοράς δεύτερης τάξης, η οποία είναι η:

$$\frac{x_v(s)}{v(s)} = \frac{K_{vp}/x_{max}}{\tau A_v s^2 + A_v s + K_{vp} K_3}$$

Με την σχέση αυτή δίνεται η κανονικοποιημένη θέση της βαλβίδας ως συνάρτηση της τάσης ελέγχου που δίνεται στο σύστημα. Η τάση αυτή μπορεί να πάρει τιμές από -10 έως +10 Volt.

## Υδραυλικό Σύστημα Επενέργειας

Κατά την λειτουργία του συστήματος αυτού, η ροή που εξέρχεται με κατεύθυνση τον υδραυλικό επενεργητή μπορεί να θεωρηθεί ότι ικανοποιεί την σχέση:

$$q = K_1 x_v - K_2 \Delta P$$

Η ροή  $q$  στο σύστημα αυτό αποτελεί το άθροισμα της χρήσιμης ροής (*useful flow rate*,  $q_0$ ), της ροής διαρροής (*leakage flow rate*,  $q_L$ ) και της ροής ισοδύναμης συμπιεστότητας (*equivalent compressibility flow rate*,  $q_C$ ). Οι ροές αυτές, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$q_0 = A p \frac{dy}{dt}$$

$$q_L = L \Delta P$$

$$q_C = \frac{pV}{K} \frac{d\Delta P}{dt}$$

Με βάση την εξίσωση των ροών αυτών προκύπτει ότι:

$$K_1 x_v - K_2 \Delta P = A p \frac{dy}{dt} + L \Delta P + \frac{pV}{K} \frac{d\Delta P}{dt}$$

Επιπλέον, με χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα προκύπτει η σχέση:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k y = A \Delta P$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει η συνολική συνάρτηση μεταφοράς της θέσης  $y$  ως προς την θέση του εμβόλου  $x_v$ , η οποία είναι:

$$\frac{pVm}{KA} \frac{d^3 y}{dt^3} + \left( \frac{pVb}{KA} + m \frac{L+K_2}{A} \right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( Ap + \frac{pVk}{KA} + b \frac{L+K_2}{A} \right) \frac{dy}{dt} + k \frac{L+K_2}{A} y = K_1 x_v$$

Έτσι, προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς της θέσης  $y$  ως προς την θέση της βαλβίδας  $x_v$  ως:

$$\frac{y(s)}{x_v(s)} = \frac{K_{total}}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Όπου:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{total} = K_1 \\ b_3 = \frac{pVm}{KA} \\ b_2 = \frac{pVb}{KA} + m \frac{L + K_2}{A} \\ b_1 = Ap + \frac{pVk}{KA} + b \frac{L + K_2}{A} \\ b_0 = k \frac{L + K_2}{A} \end{array} \right.$$

Στο [1], γίνεται η χρήση των  $C_l$  αντί για  $L$ , των  $K_v$  αντί για  $K_1$ , της σταθεράς απόσβεσης  $c$  αντί για  $b$ , της μάζας  $m_t$  αντί για  $m$  και της συνολικής σταθεράς  $K_a$  αντί για την ποσότητα  $\frac{pV}{K}$ . Έτσι, κατά αντιστοιχία οι σταθερές  $K_{total}, b_3, b_2, b_1, b_0$  προκύπτουν.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{total} = \frac{K_v}{x_{vmax}} \\ b_3 = K_a \frac{m_t}{A} \\ b_2 = K_a \frac{c}{A} + m_t \frac{C_l + K_p}{A} \\ b_1 = Ap + K_a \frac{k}{A} + b \frac{C_l + K_p}{A} \\ b_0 = k \frac{C_l + K_p}{A} \end{array} \right.$$

Για λόγους Προσομοίωσης, χρησιμοποιήθηκαν τα μεγέθη που παρουσιάζονται στο Παράρτημα του [2]. Αξιοσημείωτο είναι ότι χρησιμοποιήθηκε η τιμή  $K_p = 0$ , καθώς αν γραμμικοποιηθεί η εξίσωση της ροής που δίνεται στο [2] παίρνουμε τις τιμές  $\frac{K_v}{x_{vmax}}$  και 0 για τα μεγέθη  $K_1$  και  $K_2$  της εξίσωσης που προκύπτει στο [1].

## Συνάρτηση Μεταφοράς Συνολικού Συστήματος

Η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος αποτελεί το γινόμενο των δύο συναρτήσεων μεταφοράς. Έτσι, η θέση  $y$  ως προς την τάση ελέγχου προκύπτει ως:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{x_v(s)} \frac{x_v(s)}{v(s)} = \frac{K_{total}}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} * \frac{K_{vp}/x_{max}}{\tau A_v s^2 + A_v s + K_{vp} K_3}$$

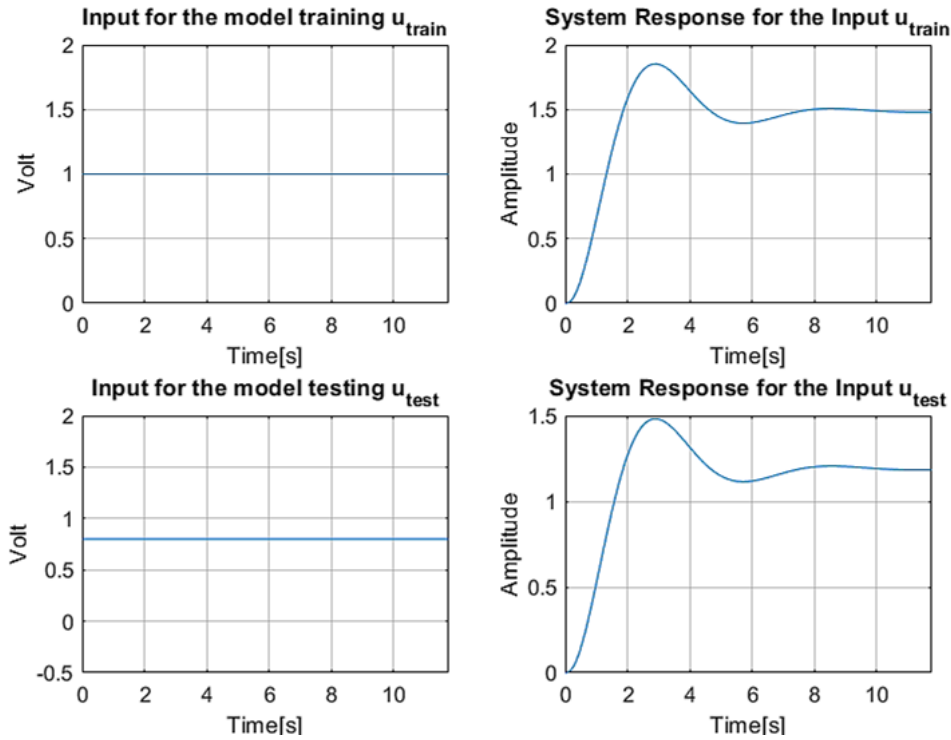
Στην περίπτωση μέτρησης της ασκούμενης δύναμης μέσω δυναμόμετρου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση  $m \frac{d^2 y}{dt^2} = F$  για να εξάγουμε την συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{F(s)}{u(s)} = \frac{F(s)}{y(s)} \frac{y(s)}{u(s)} = m s^2 \frac{y(s)}{u(s)}$$

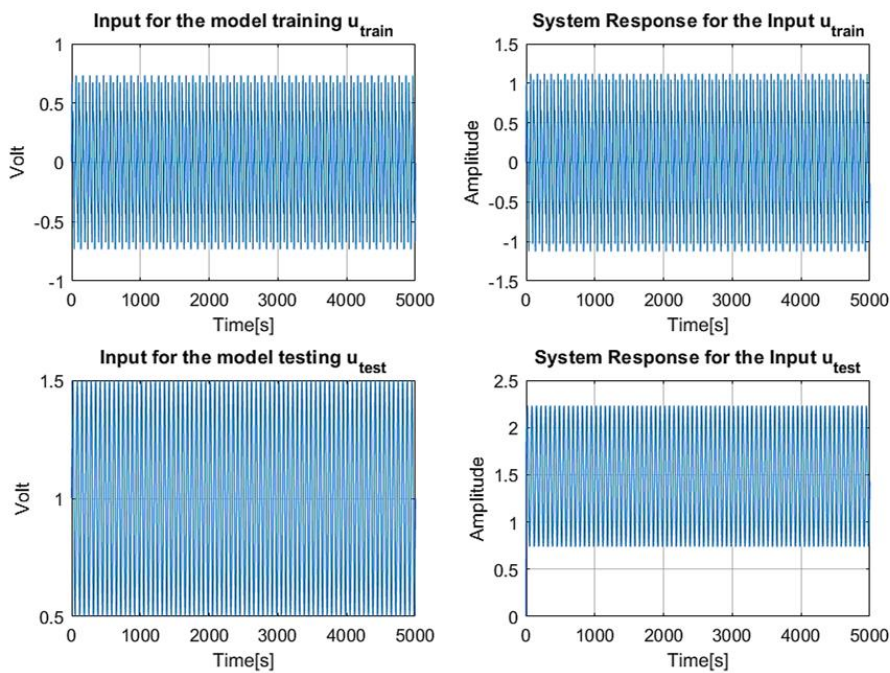
Τα παραπάνω μοντέλα (μοντέλο με έξοδο την θέση της ελεγχόμενης μάζας  $y$  και μοντέλο με έξοδο την ασκούμενη δύναμη  $F$ ) προσομοιώνονται για βηματική είσοδο και είσοδο αθροίσματος ημιτονικών παλμών στα αρχεία `systemSimulationStep.m` και `systemSimulationSine.m`, τα οποία παράγουν τα αρχεία τύπου `csv` `StepResultTrain.csv`, `StepResultTest.csv`, `SineResultTrain.csv` και `SineResultTest.csv`. Τα αρχεία αυτά παρέχουν τα αποτελέσματα προσομοίωσης για δύο περιπτώσεις, ώστε να μπορεί να γίνει και επικύρωση του αποτελέσματος. Κατά την πειραματική διαδικασία, τα αποτελέσματα μετρήσεων πρέπει να δοθούν σε 2 αρχεία `csv`, ένα για το πείραμα που θα χρησιμοποιηθεί για την εκπαίδευση του μοντέλου και ένα για την επικύρωση αυτού. Το πρώτο αρχείο χρησιμοποιείται για την διαδικασία εύρεσης των παραμέτρων του μοντέλου ενώ το δεύτερο συγκρίνεται με μία προσομοίωση που χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα της εκπαίδευσης. Έτσι, βλέπουμε πόσο αξιόπιστο είναι το μοντέλο μας.

Στην περίπτωση που θέλουμε να κάνουμε την παραπάνω διαδικασία μετρώντας την δύναμη ως έξοδο, το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με την πρώτη ή την δεύτερη διαδικασία κανονικά. Στην πρώτη μέθοδο όμως πρέπει να γίνει μία προσέγγιση διαφορετική στο σήμα εισόδου. Πιο αναλυτικά, αντί για την βηματική είσοδο (σήμα  $A/s$  στο πεδίο συχνοτήτων) πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα σήμα εισόδου της μορφής  $A/s^3$ . Τότε, παίρνοντας υπόψη την σχέση  $\frac{F(s)}{u(s)} = m s^2 \frac{y(s)}{u(s)}$  μπορούμε να δούμε ότι η έξοδος για

την είσοδο  $A/s^3$  είναι  $F(s) = mA \frac{y(s)}{s}$ . Έτσι, το αποτέλεσμα είναι όμοιο με την *Εικόνα 1* (Βηματική απόκριση) και μπορεί να βρεθεί το μοντέλο της  $G(s) = m \frac{y(s)}{u(s)}$ . Έτσι, μπορεί να προκύψει το μοντέλο του συστήματος ως  $\frac{F(s)}{u(s)} = s^2 G(s)$ .



Εικόνα 1: Πείραμα Βηματικής Εισόδου (Train & Test)



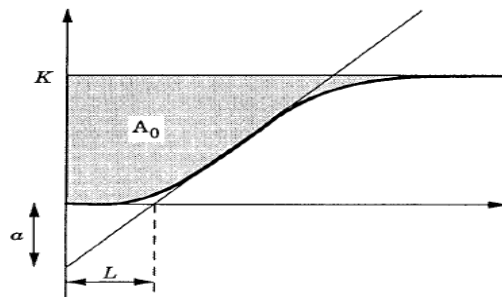
Εικόνα 2: Πείραμα Εισόδου Αθροίσματος Ημιτόνου (Train & Test)

## Πρώτο Μοντέλο: Μοντέλο Πρώτης Τάξης

Μία πειραματική διαδικασία μοντελοποίησης που χρησιμοποιείται συχνά στην βιομηχανία είναι η μοντελοποίηση με χρήση του μοντέλου καθυστέρησης πρώτης τάξης με επιπρόσθετο νεκρό χρόνο, το αποκαλούμενο αλλιώς και μοντέλο τριών όρων. Μαθηματικά, το μοντέλο των τριών όρων εκφράζεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls}$$

Εφαρμόζοντας βηματική είσοδο σε ένα ευσταθές σύστημα, προκύπτει η απόκριση της Εικόνας 3. Σε αυτήν παρουσιάζονται τα μεγέθη  $L$  και  $K$  του μοντέλου, τα οποία αντιστοιχούν στην τιμή μόνιμης κατάστασης και την στιγμή που συναντά η γραμμική προσέγγιση τον άξονα του χρόνου. Για την εύρεση της παραμέτρου  $T$  χρησιμοποιείται η χρονική διαφορά από το την χρονική στιγμή  $B$ , η οποία είναι αυτή όπου η έξοδος έχει φτάσει στο  $0.63K$  και την χρονική στιγμή  $A$ , η οποία είναι ίση με τον νεκρό χρόνο  $L$ .

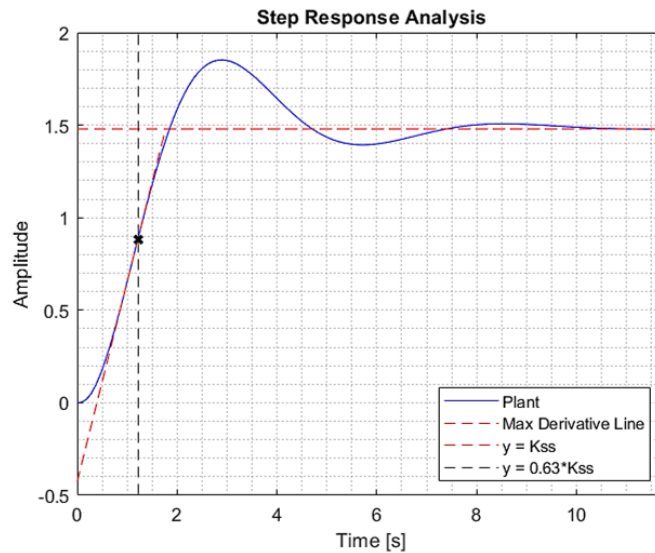


Εικόνα 3: Μεγέθη Πειράματος βηματικής Εισόδου

Η μέθοδος μοντελοποίησης υλοποιείται στο αρχείο `systemModeling1.m` και χρησιμοποιεί τα αρχεία των αποτελεσμάτων `StepResultTrain.csv` και `StepResultTest.csv`.

Στην μέθοδο αυτή αποκτούνται τα  $K, L, T$  με την χρήση της εισόδου 1 Volt και στην συνέχεια προσομοιώνετε το σύστημα για είσοδο την τάση των 0.8 Volt. Η διαδικασία εύρεσης των παραμέτρων φαίνεται στην Εικόνα 4. Σε αυτήν εμφανίζεται η εύρεση της ευθείας μέγιστης κλίσης για να βρεθούν μέσω σημείων τομής τα σημεία τα οποία δίνουν τις παραμέτρους του μοντέλου.





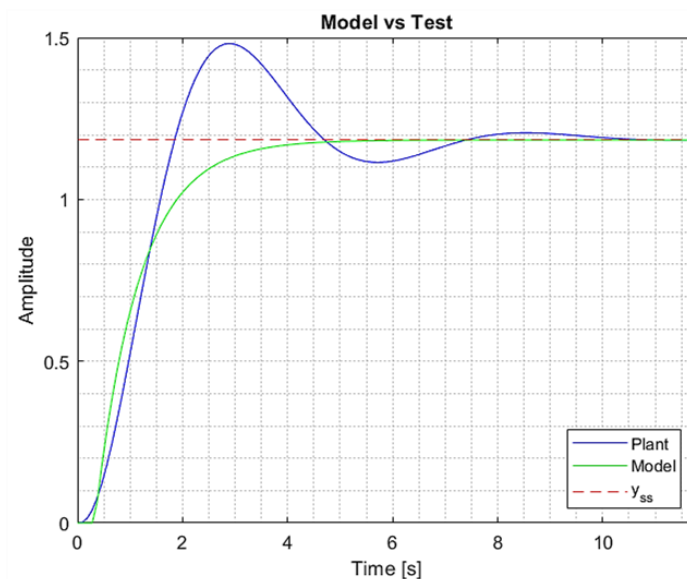
Εικόνα 4: Εύρεση Παραμέτρων του Πρώτου Μοντέλου

Το μοντέλο που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία είναι το:

$$G_1(s) = \frac{1.4796}{0.84043s + 1} e^{-0.37352s}$$

Το μοντέλο αυτό, μπορούμε να δούμε ότι δεν προσφέρει την υπερύψωση του πραγματικού συστήματος, αλλά προσφέρει μία καλή εικόνα της ταχύτητας απόκρισης και της τελικής τιμής. Έτσι, το μοντέλο αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ρύθμιση ελεγκτή που αποσκοπεί στην παρακολούθηση βηματικών εισόδων.

Αποτέλεσμα της προσομοίωσης του μοντέλου τριών όρων και του βασικού μοντέλου κατά την διαδικασία ελέγχου (*testing*) φαίνονται στην Εικόνα 5.



Εικόνα 5: Διαδικασία ελέγχου μοντέλου Τριών όρων

## Δεύτερο Μοντέλο: Μοντέλο Μεγαλύτερης Τάξης

Για την εξαγωγή του δεύτερου μοντέλου γίνεται χρήση της πληροφορίας από την αρχική μελέτη ότι το συνολικό σύστημα είναι πέμπτης τάξης, όταν αναφερόμαστε στο σύστημα με έξοδο την μεταβλητή  $y$ . Για την εύρεση του μοντέλου αυτού θεωρούμε ότι το συνολικό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_0 s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5}$$

Η συνάρτηση αυτής της μορφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περίπτωση της δύναμης ως προς την είσοδο.

Σύμφωνα με το [4], η εύρεση των παραμέτρων μπορεί να γίνει αν στο γραμμικά παραμετροποιημένο σύστημα εφαρμοστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Για την ταύτιση των υπολογιζόμενων παραμέτρων με τις πραγματικές χρειάζεται να ισχύει η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης (*Persistence of Excitation*), η οποία στα συστήματα αυτά μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση ενός ικανά πλούσιου σήματος (*sufficiently rich*) τάξης όσο και οι παράμετροι προς υπολογισμό. Αν ο αριθμός των παραμέτρων του συστήματος είναι  $n$ , τότε μία περίπτωση ικανά πλούσιου σήματος είναι αυτή του σήματος με  $n/2$  διακριτές συχνότητες.

Επιπλέον, το σύστημα είναι γραμμικά παραμετροποιημένο όταν έρθει στην μορφή  $y = \theta^T \varphi(t)$ , με  $\varphi(t)$  το διάνυσμα οπισθοδρόμησης και  $\theta$  το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων προς εκτίμηση. Παρακάτω θα παρουσιαστεί η μέθοδος μετατροπής της συνάρτησης μεταφοράς σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή.

### Γραμμική Παραμετροποίηση

Στο συνολικό σύστημα, τα μοναδικά μετρήσιμα μεγέθη είναι η έξοδος του συστήματος και η είσοδος ελέγχου. Έτσι, το σύστημα πρέπει να εκφραστεί με βάση αυτά τα σήματα. Ορίζεται επιπλέον το ευσταθές πολυώνυμο  $\Lambda(s) = s^5 + \lambda_1 s^4 + \lambda_2 s^3 + \lambda_3 s^2 + \lambda_4 s + \lambda_5$ , με το αντίστοιχο διάνυσμα παραμέτρων του, το  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5]^T$ .

Ορίζοντας το διάνυσμα  $\Delta_{n-1}(s) = [s^{n-1} \ \dots \ s^3 \ s^2 \ s \ 1]^T$  και συμβολίζοντας τις παραμέτρους της συνάρτησης μεταφοράς ως  $\bar{a} =$

$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]$  και  $\bar{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4]$ , η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$y = [\bar{a} - \lambda^T \ \bar{\beta}] \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} y \\ \frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας ότι η μετρούμενη έξοδος είναι η θέση  $y$ , μπορεί να γίνει η απλοποίηση του όρου  $\frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} u$  σε  $\frac{1}{\Lambda(s)} u$  ως προς την τάξη της, καθώς μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι το σύστημα δεν περιέχει μηδενικά. Η σκέψη αυτή δεν έφερε τα κατάλληλα αποτελέσματα στην διαδικασία μοντελοποίησης και έτσι ο όρος  $\frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} u$  δεν απλοποιήθηκε.

Με βάση τα παραπάνω, οι άγνωστες παράμετροι που πρέπει να μοντελοποιηθούν είναι 10 (όσο και το μέγεθος του διανύσματος οπισθοδρόμησης), οδηγώντας στην επιλογή τουλάχιστον 5 διακριτών συχνοτήτων στο σήμα εισόδου ώστε να ισχύει η Συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης (*Persistence of Excitation*). Στον κώδικα *systemSimulationSine.m*, γίνεται χρήση 5 διακριτών συχνοτήτων, με σκοπό το σήμα να είναι κατάλληλο για την μοντελοποίησης αυτήν.

Έτσι, η τελική γραμμική παραμετροποίηση είναι η:

$$y = [\bar{a} - \lambda^T \ \bar{\beta}] \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} y \\ \frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω σχέση, ορίζεται το διάνυσμα οπισθοδρόμησης ως:

$$\varphi = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} y \\ \frac{\Delta_4(s)}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi = \left[ \frac{-s^4}{\Lambda(s)} y \ \frac{-s^3}{\Lambda(s)} y \ \frac{-s^2}{\Lambda(s)} y \ \frac{-s}{\Lambda(s)} y \ \frac{-1}{\Lambda(s)} y \ \frac{s^4}{\Lambda(s)} u \ \frac{s^3}{\Lambda(s)} u \ \frac{s^2}{\Lambda(s)} u \ \frac{s}{\Lambda(s)} u \ \frac{1}{\Lambda(s)} u \right]^T$$

## Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η εύρεση των παραμέτρων αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Μία μέθοδος βελτιστοποίησης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η *Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares)*, η οποία στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων κάθε χρονικής στιγμής. Η διαδικασία αυτή μεταφράζεται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e^2(i, \theta)}{2}$$

Στην συνάρτηση αυτή, με  $N$  συμβολίζεται το πλήθος των παρατηρήσεων και με  $e(i, \theta)$  το σφάλμα κάθε παρατήρησης/χρονικής στιγμής. Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι γραμμικά παραμετροποιημένο, είναι γνωστό το διάνυσμα οπισθοδρόμησης και προκύπτει ότι το σφάλμα μοντελοποίησης είναι  $e(i, \theta) = y(i) - \theta^T \varphi(i)$ . Με βάση αυτό, η συνάρτηση κόστους γίνεται:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(y(i) - \theta^T \varphi(i))^2}{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y^2(i)}{2} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\theta^T \varphi(i) \varphi^T(i) \theta}{2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta^T \varphi(i) y(i)$$

Η συνάρτηση αυτή, διαθέτει ελάχιστο το  $\theta_0$  για το οποίο ισχύει ότι:

$$\left. \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

Έτσι, προκύπτει η σχέση με την οποία μπορεί να υπολογιστεί η εκτίμηση της μεθόδου για τις παραμέτρους του μοντέλου. Η σχέση αυτή είναι:

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) \varphi^T(i) \right) \theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) y(i)$$

Στην περίπτωση που αντιστρέφεται ο πίνακας  $\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) \varphi^T(i) \right)$ , η λύση της σχέσης αυτής μπορεί να βρεθεί από την έκφραση:

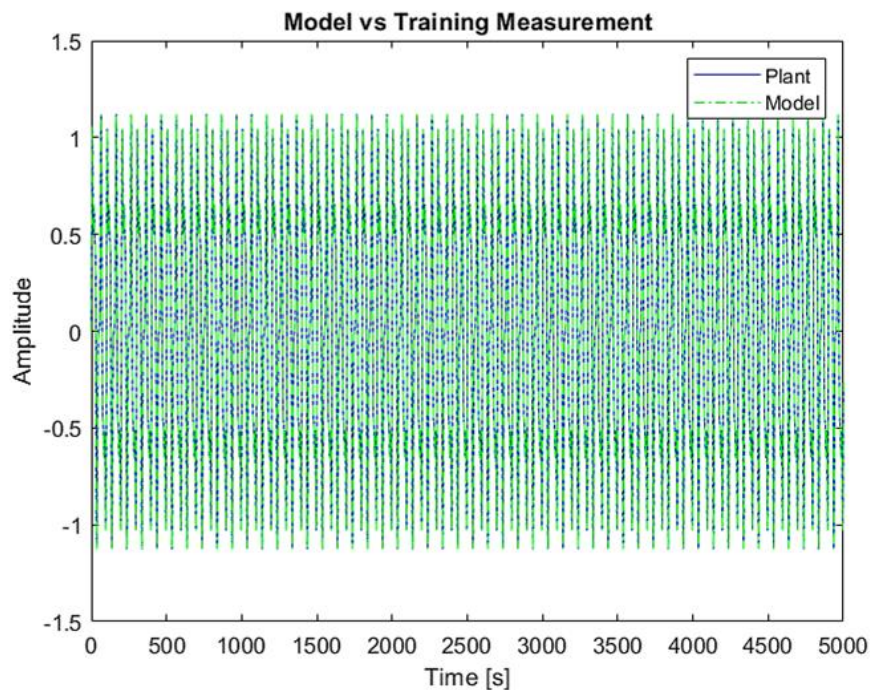
$$\theta_0 = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) \varphi^T(i) \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) y(i)$$

Η παραπάνω έκφραση του  $\theta_0$  θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των παραμέτρων της εργασίας.

## Εύρεση Μοντέλου

Με βάση την μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων, γίνεται η μοντελοποίηση του συστήματος στο αρχείο `systemModeling2.m` και χρησιμοποιεί τα αρχεία των αποτελεσμάτων `SineResultTrain.csv` και `SineResultTest.csv`.

Το μοντέλο σε σύγκριση με το αποτέλεσμα των μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των παραμέτρων παρουσιάζεται στην *Εικόνα 6*.



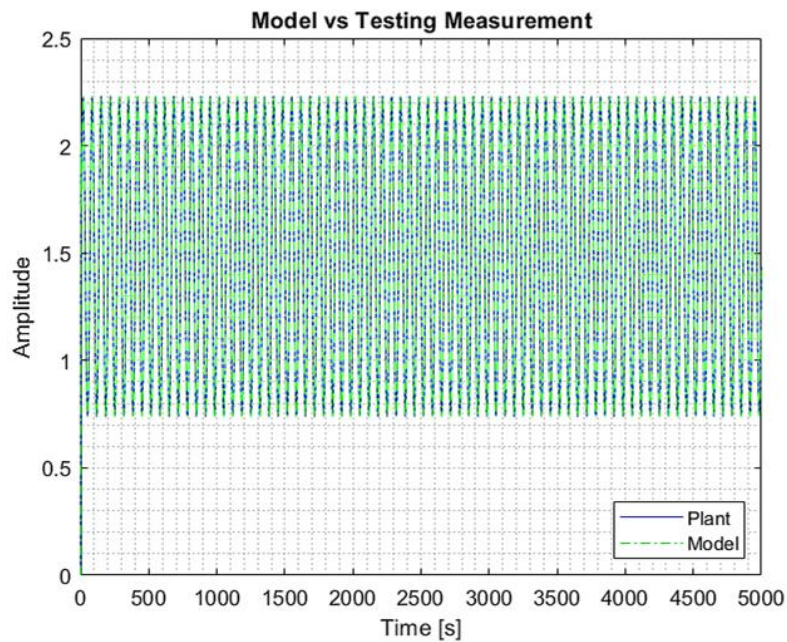
Εικόνα 6: Αποτέλεσμα μοντέλου και πραγματικών μετρήσεων κατά την Εύρεση Παραμέτρων

Το μοντέλο που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία είναι το:

$$G_2(s) = \frac{0.0007079s^4 - 0.1854s^3 + 35.41s^2 + 46s + 4496}{s^5 + 19.375s^4 + 177s^3 + 2226s^2 + 2251s + 3021}$$

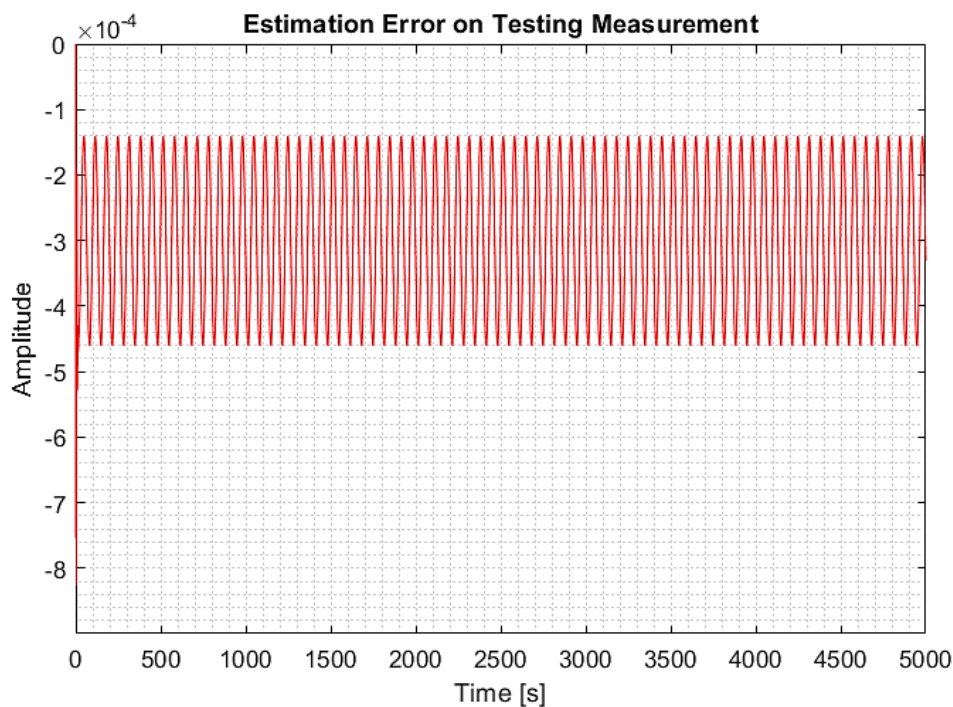
Το παραγόμενο μοντέλο ελέγχεται μέσω των μετρήσεων του αρχείου `SineResultTest.csv` και το αποτέλεσμα του μοντέλου σε σύγκριση με τις μετρήσεις

παρουσιάζεται στην *Εικόνα 7*. Σε αυτήν, εμφανίζεται ότι το μοντέλο προσφέρει απόκριση όμοια με αυτή της μέτρησης.



*Εικόνα 7: Αποτέλεσμα μοντέλου και πραγματικών μετρήσεων κατά τον Έλεγχο Αποτελέσματος*

Για περαιτέρω έλεγχο της απόκρισης του μοντέλου παρουσιάζεται γραφικά το σφάλμα συναρτήσεων του χρόνου στην *Εικόνα 8*. Το σφάλμα αυτό είναι της τάξης του  $10^{-4}$ , αποτέλεσμα που επιβεβαιώνει ότι το μοντέλο έχει ικανοποιητικό αποτέλεσμα.

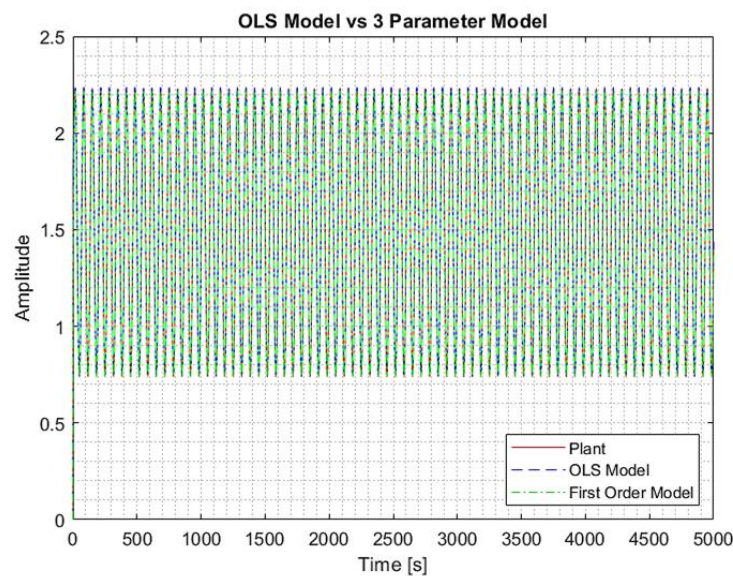


*Εικόνα 8: Σφάλμα μοντέλου κατά τον Έλεγχο Αποτελέσματος*

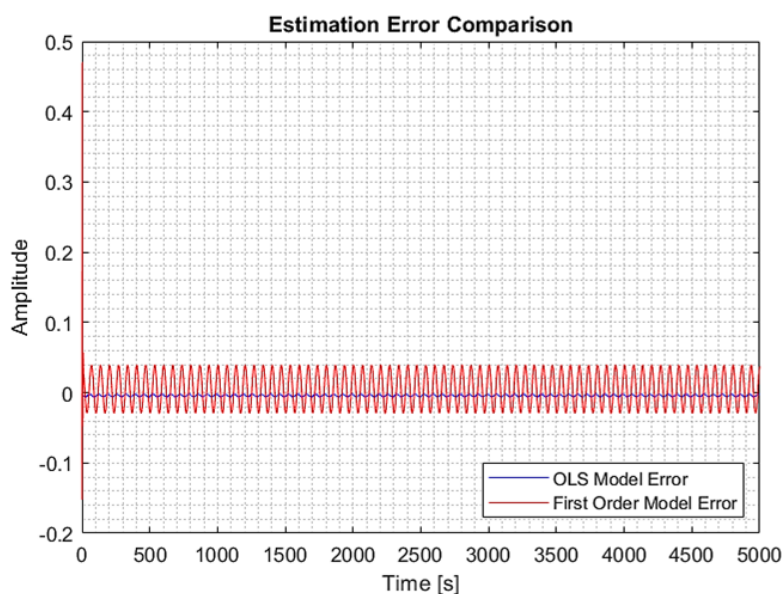


## Σύγκριση Μοντέλων και επικύρωση Αποτελεσμάτων

Για την σύγκριση των μοντέλων γίνεται η εφαρμογή του ημιτονικού σήματος για επικύρωση και στα δύο μοντέλα. Το αποτέλεσμα αυτό δίνεται από το αρχείο `systemModelingComparison.m`. Στις *Εικόνες 9 και 10* εμφανίζεται η απόκριση και των δύο μοντέλων στο σήμα ελέγχου αποτελέσματος και το σφάλμα τους σε αυτό. Από τα διαγράμματα παρακάτω είναι εμφανής η υπεροχή του δεύτερου μοντέλου, ακόμα και αν δεν αποκαταστάθηκε η σύγκλιση της μεθόδου στις πραγματικές παραμέτρους.



Εικόνα 9: Σύγκριση μοντέλων και πραγματικών μετρήσεων κατά τον Έλεγχο Αποτελέσματος



Εικόνα 10: Σφάλματα μοντέλων κατά τον Έλεγχο Αποτελέσματος

## Συμπεράσματα - Μελλοντικά Βήματα

Στην εργασία αυτήν έγινε η διαδικασία μοντελοποίησης του υδραυλικού συστήματος που διατίθεται στο αντισεισμικό πείραμα που μελετάται κατά το εργαστήριο. Για την επίτευξη της μοντελοποίησης έγινε παρουσίαση δύο μεθόδων, μίας ευρέως χρησιμοποιούμενη στην βιομηχανία που χρησιμοποιείται κυρίως κατά την ρύθμιση των παραμέτρων PID ελεγκτών, και μίας πιο ολοκληρωμένης μεθόδου, η οποία επιτρέπει την εύρεση μοντέλων περισσότερων παραμέτρων.

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε είναι η αδυναμία εύρεσης των πραγματικών παραμέτρων και ενός μοντέλου της ίδια τάξης και σχετικού βαθμού με το σύστημα που προσομοιώθηκε. Αυτό συμβαίνει λόγω της σχεδόν μηδενικής ορίζουσας του πίνακα  $\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i) \varphi^T(i)\right)$  για την περίπτωση του μοντέλου όμοιας δομής με αυτή του συστήματος που προσομοιώθηκε. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί με την χρήση αριθμητικών μεθόδων κατά την εύρεση των παραμέτρων, μία επέκταση που θα μπορούσε να γίνει στην μοντελοποίηση. Η χρήση τέτοιων μεθόδων όμως οδηγεί σε μεγάλη αύξηση της πολυπλοκότητας της μοντελοποίησης και δεν επιλέχθηκε καθώς το αποτέλεσμα των απλούστερων μοντέλων είναι ικανοποιητικό ως προς το σφάλμα του μοντέλου.

Επεκτείνοντας την χρήση αριθμητικών μεθόδων, η χρήση αυτών επιτρέπει την μοντελοποίηση με μη γραμμικά μοντέλα. Για να γίνει η διαδικασία αυτή πρέπει να γίνουν τα παρακάτω βήματα:

1. Προσδιορισμός Συνάρτησης κόστους (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τετραγωνικό σφάλμα όπως έγινε στην εργασία αυτή).
2. Προσδιορισμός Μεθόδου βελτιστοποίησης (Αντί για την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων σε λυμένη μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία μέθοδος όπως την *Levenberg-Marquardt* ή την μέθοδο τροποποιημένης *Simplex* του [6]).
3. Προσδιορισμός Μη γραμμικού μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί.

Το τρίτο βήμα είναι ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα, καθώς πολλές φορές είναι δύσκολος ο προσδιορισμός ενός αρκετά αξιόπιστου μη γραμμικού μοντέλου. Συχνή τακτική είναι ο ορισμός γενικών συναρτήσεων βάσης, όπως οι συναρτήσεις ακτινικής βάσης (*Radial Basis Function*) που διαθέτουν τα νευρωνικά δίκτυα του τύπου *RBF*. Κατά την αρχή της εργασίας αυτής έγινε προσπάθεια της εφαρμογής του μη γραμμικού



μοντέλου του [2], το οποίο δεν προσέφερε τα κατάλληλα αποτελέσματα κατά την προσομοίωση και δεν συνεχίστηκε. Επιπλέον, αποφεύχθηκε η χρήση νευρωνικών δικτύων ως μέσο μοντελοποίησης καθώς θεωρήθηκε ότι ξεφεύγει από το αντικείμενο και τρόπο προσέγγισης του προβλήματος στο μάθημα αυτό.

Ιδιαίτερης σημασίας είναι ο σκοπός μοντελοποίησης του συστήματος. Στην εργασία αυτήν, το σύστημα αυτό μοντελοποιείται με σκοπό την ρύθμιση ελεγκτή τύπου PID, το οποίο θεωρείτε ότι μπορεί να επιτευχθεί με εξαιρετική ακρίβεια από το μοντέλο της εργασίας. Επιπλέον, η επιλογή του γραμμικού μοντέλου βασίζεται στην σκέψη ότι το αντίστοιχο μη γραμμικό μοντέλο δεν προσφέρει ουσιαστικές διαφορές στην απόδοση.

## Βιβλιογραφία

- [1] K. Ogata, *Modern Control Engineering* (3<sup>rd</sup> Edition), Prentice Hall, 1997
- [2] Σ. Γαλανούλης, *Εύρωστος Έλεγχος Κατασκευών με μη Γραμμικούς Ενεργοποιητές και Ανίχνευση Σφαλμάτων Μέτρησης*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2018
- [3] K.Astrom, Hagglund, *PID Controller: Theory, Design and Tuning*, Instrument Society of America, 1995
- [4] Petros Ioannou, Jing Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 2003
- [5] L.Ljung, *System Identification: Theory for the User* (2<sup>nd</sup> Edition), Prentice Hall, 1999
- [6] Θεόδωρος Πρωτούλης, *Αναφορά Εργαστηρίου*, Πολυμεταβλητά Συστήματα, 2022