姓名	
评分	

实验报告

课程名称：数值分析

课题名称：解线性方程组的迭代法

专　　业：地球物理

姓　　名：王锴

班　　级：201145

完成日期：2016 年 12 月 20 日

目录

实验报告

一、实验名称

解线性方程组的迭代法。

二、实验目的

（1） 掌握解线性方程组的迭代法的原理与方法；
（2） 培养编程与上机调试能力；
（3） 熟悉 matlab 软件环境。

三、实验要求

（1） 通过编程实现雅克比迭代法、赛德尔迭代法和松弛迭代法；
（2） 分析三种常用迭代方法优缺点。

四、实验题目

就解线性方程组的方法中的某一个点进行实验分析。

五、实验原理

迭代法的基本思想是将线性方程组转化为便于迭代的等价方程组，对任选一组初始值$x_i^{(0)}(i=1,2,\dots,n)$，按某种计算规则，不断地对所得到的值进行修正，最终获得满足精度要求的方程组的近似解。

其思路是：将$Ax=b$改写为等价形式$x=Bx+g$，建立迭代$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$，从初值$x^{(0)}$出发，得到数列$\{x^{(k)}\}$，使其收敛到某个极限向量 x，即所要求方程组的准确解。

该方法适用于大型稀疏非带状的线性方程组(n 很大,且零元素很多。如偏微方程数值解产生的线性方程组，$n\geq 10^4$)的求解问题。

六、实验步骤

（1） 输入线性方程组的系数矩阵 A，常数矩阵 b，误差限 e 和初始值 x0（松弛迭代还需要松弛因子ω）；
（2） 将 A 矩阵分解成下三角阵 L、对角阵 D 以及上三角阵 U 之和；
（3） 求解迭代方程里的 B 矩阵和 g 矩阵，对于雅克比迭代法有：

$$B=-D^{-1}(L+U)，f=D^{-1}b \qquad (6.1)$$

对于赛德尔迭代法有：

$$G = -(D+L)^{-1}U，d = (D-L)^{-1}b \quad (6.2)$$

对于松弛迭代法有：

$$B = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]，g = \omega(D+\omega L)^{-1}b \quad (6.3)$$

（4） 计算 B 或 G 矩阵的无穷大范数 fan、特征值 lan 以及谱半径 rho；

（5） 将初始值代入迭代方程：

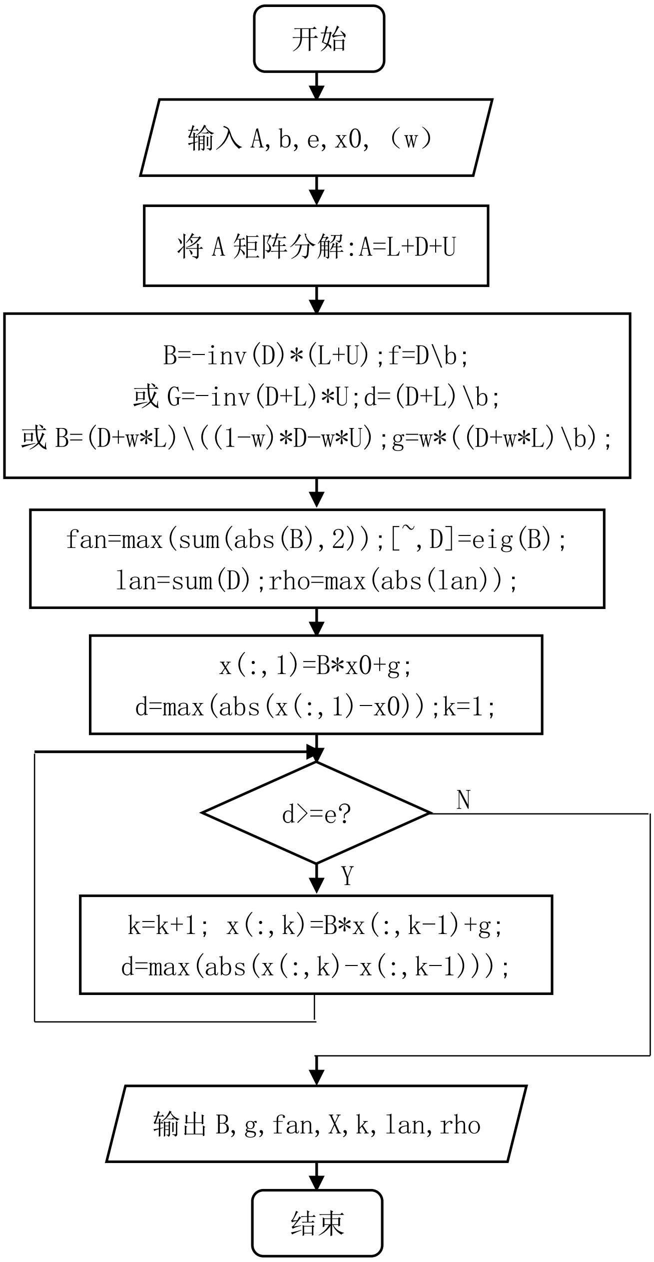
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (6.4)$$

并计算前后两次迭代结果差的无穷大范数：

$$d = \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty \quad (6.5)$$

（6） 直到$d < e$，输出近似解$x^{(k+1)}$以及迭代次数$k+1$。

▪ 七、实验整体流程图



八、程序代码

（1） 雅克比迭代法：

```
function [B,f,fan,X,k,lan,rho]=Jacobi(A,b,e,x0)
% Jacobi迭代法解线性方程组
%输入：
% A为系数矩阵；
% b为常数项矩阵；
% e为误差限；
% x0为初始值；
%输出：
% B为迭代格式中的系数矩阵；
% f为迭代格式中的常数项矩阵；
% fan为B矩阵的无穷大范数；
% X为近似解；
% k为迭代次数；
% lan为B矩阵的特征值；
% rho为B矩阵的谱半径。

n=length(b);                    %n为方程个数
D=zeros(n,n);                   %D为对角阵
L=D;U=D;                        %L为下三角阵，U为上三角阵
D(1,1)=A(1,1);
for i=2:n                       %为L、D、U矩阵赋值
    D(i,i)=A(i,i);
    for j=1:i-1
        L(i,j)=A(i,j);
        U(j,i)=A(j,i);
    end
end

B=-inv(D)*(L+U);                %计算雅克比迭代矩阵B
f=D\b;                          %计算常数项矩阵
fan=max(sum(abs(B),2));         %计算B矩阵无穷大范数
[~,D]=eig(B);
lan=sum(D);                     %计算B矩阵特征值
rho=max(abs(lan));              %计算B矩阵谱半径

x(:,1)=B*x0+f;                  %第一次迭代近似解
d=max(abs(x(:,1)-x0));          %估计误差
k=1;
while d>=e                      %迭代法计算近似解
    k=k+1;
    x(:,k)=B*x(:,k-1)+f;
    d=max(abs(x(:,k)-x(:,k-1)));
end
X=x(:,k);                       %得到近似解
```

（2） **赛德尔迭代法：**

```
function [G,d,fan,X,k,lan,rho]=Seidel(A,b,e,x0)
% Seidel迭代法解线性方程组
%输入：
% A为系数矩阵；
% b为常数项矩阵；
% e为误差限；
% x0为初始值；
%输出：
% G为迭代格式中的系数矩阵；
% d为迭代格式中的常数项矩阵；
% fan为G矩阵的无穷大范数；
% X为近似解；
% k为迭代次数；
% lan为G矩阵的特征值；
% rho为G矩阵的谱半径。

n=length(b);                  %n为方程个数
D=zeros(n,n);                 %D为对角阵
L=D;U=D;                      %L为下三角阵，U为上三角阵
D(1,1)=A(1,1);
for i=2:n                     %为L、D、U矩阵赋值
    D(i,i)=A(i,i);
    for j=1:i-1
        L(i,j)=A(i,j);
        U(j,i)=A(j,i);
    end
end

G=-inv(D+L)*U;                %计算赛德尔迭代矩阵G
d=(D+L)\b;                    %计算常数项矩阵
fan=max(sum(abs(G),2));       %计算G矩阵无穷大范数
[~,D]=eig(G);
lan=sum(D);                   %计算G矩阵特征值
rho=max(abs(lan));            %计算G矩阵谱半径

x(:,1)=G*x0+d;                %第一次迭代近似解
ee=max(abs(x(:,1)-x0));       %估计误差
k=1;
while ee>=e                   %迭代法计算近似解
    k=k+1;
    x(:,k)=G*x(:,k-1)+d;
    ee=max(abs(x(:,k)-x(:,k-1)));
end
X=x(:,k);                     %得到近似解
```

（3） **松弛迭代法：**

```
function [B,g,fan,X,k,lan,rho]=Songchi(A,b,e,w,x0)
% 松弛迭代法解线性方程组
%输入：
% A为系数矩阵；
% b为常数项矩阵；
% e为误差限；
% x0为初始值；
% w为松弛因子；
%输出：
% B为迭代格式中的系数矩阵；
% g为迭代格式中的常数项矩阵；
% fan为B矩阵的无穷大范数；
% X为近似解；
% k为迭代次数；
% lan为B矩阵的特征值；
% rho为B矩阵的谱半径。

n=length(b);                    %n为方程个数
D=zeros(n,n);                   %D为对角阵
L=D;U=D;                        %L为下三角阵，U为上三角阵
D(1,1)=A(1,1);
for i=2:n                       %为L、D、U矩阵赋值
    D(i,i)=A(i,i);
    for j=1:i-1
        L(i,j)=A(i,j);
        U(j,i)=A(j,i);
    end
end

B=(D+w*L)\((1-w)*D-w*U);        %计算松弛迭代矩阵B
g=w*((D+w*L)\b);                %计算常数项矩阵
fan=max(sum(abs(B),2));         %计算B矩阵无穷大范数
[~,D]=eig(B);
lan=sum(D);                     %计算B矩阵特征值
rho=max(abs(lan));              %计算B矩阵谱半径

x(:,1)=B*x0+g;                  %第一次迭代近似解
d=max(abs(x(:,1)-x0));          %估计误差
k=1;
while d>=e                      %迭代法计算近似解
    k=k+1;
    x(:,k)=B*x(:,k-1)+g;
    d=max(abs(x(:,k)-x(:,k-1)));
end
X=x(:,k);                       %得到近似解
```

九、运行结果及实验结果分析

（1）雅克比迭代法：

解线性方程组：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \quad\ = 7 \\ -4x_1 + 5x_2 - x_3 = -3 \\ \quad -x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \qquad (9.1)$$

有精确解$x = (3,2,1)^T$，取$x_i^{(0)} = (0,0,0)^T$，$e = 10^{-4}$。

代入程序得：

```
>>
A=[5 -4 0;-4 5 -1;0 -1 5];                    %系数矩阵
b=[7;-3;3];                                   %常数项矩阵
e=1e-4;                                       %误差限
x0=[0;0;0];                                   %初始值
[~,~,~,X,k,~]=Jacobi(A,b,e,x0)                %输出结果

X =


       2.9999
       1.9998
      0.99997



k =


    51
```

结果显示，雅克比迭代法共迭代了 51 次得到了要求精度的解。

（2）赛德尔迭代法：

同样解（9.1）式，代入程序得：

```
>>
A=[5 -4 0;-4 5 -1;0 -1 5];                    %系数矩阵
b=[7;-3;3];                                   %常数项矩阵
e=1e-4;                                       %误差限
x0=[0;0;0];                                   %初始值
[~,~,~,X,k,~]=Seidel(A,b,e,x0)                %输出结果

X =


       2.9998
       1.9999
      0.99997
```

```
k =

    25
```

结果显示，赛德尔迭代法共迭代了 25 次得到了要求精度的解，其收敛速度较之于雅克比迭代法更快了。

（3）松弛迭代法：

同样解（9.1）式，代入程序得：

```
>>
A=[5 -4 0;-4 5 -1;0 -1 5];                    %系数矩阵
b=[7;-3;3];                                    %常数项矩阵
e=1e-4;                                        %误差限
w=1.2;                                         %松弛系数
x0=[0;0;0];                                    %初始值
[~,~,~,X,k,~]=Songchi(A,b,e,w,x0)              %输出结果

X =

       2.9999
       1.9999
      0.99999



k =

    15
```

结果显示，松弛迭代法在ω=1.2 时，共迭代了 15 次得到了要求精度的解，其收敛速度较之于雅克比迭代法和赛德尔迭代法更快了。同时也可以看到松弛迭代法的解更加接近于真实解。

事实上，松弛迭代法可以看作是赛德尔迭代法的一种加速方法，但是，松弛迭代法的计算结果与松弛因子的选取有关系，如果松弛因子取得适当，则松弛迭代法往往具有加速收敛的作用，相反，如果松弛因子选的不好，有可能导致迭代法不收敛，可以证明，松弛迭代法收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$。

例如：同样解（9.1）式，令ω=4，代入程序得：

```
>>
A=[5 -4 0;-4 5 -1;0 -1 5];                    %系数矩阵
b=[7;-3;3];                                    %常数项矩阵
e=1e-4;                                        %误差限
w=4;                                           %松弛系数
x0=[0;0;0];                                    %初始值
[~,~,~,X,k,~,rho]=Songchi(A,b,e,w,x0)              %输出结果
```

```
X =

   NaN
   NaN
   NaN


k =

   646


rho =

             3
```

此时 B 矩阵的谱半径 rho=3>1，此时松弛迭代法不收敛。

（4）迭代法的收敛性：

在（1）和（2）小节，我们发现赛德尔迭代法较之于雅克比迭代法收敛速度更快，但是雅可比迭代矩阵与赛德尔迭代矩阵的谱半径间并无特定关系。虽然大多数情况下，赛德尔迭代法比雅可比迭代法收敛速度快，但仍存在雅可比迭代收敛而赛德尔迭代不收敛，或赛德尔迭代收敛而雅可比迭代不收敛的情况。

例如，解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad (9.2)$$

有精确解$x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$，取$x_i^{(0)} = (0,0,0)^T$，$e = 10^{-4}$。

代入程序得：

```
>>
A=[2 -1 1;1 1 1;1 1 -2];                    %系数矩阵
b=[1;1;1];                                   %常数项矩阵
e=1e-4;                                      %误差限
x0=[0;0;0];                                  %初始值
[~,~,~,~,~,~,rho_J]=Jacobi(A,b,e,x0)
[~,~,~,~,~,~,rho_S]=Seidel(A,b,e,x0)         %输出结果

rho_J =

        1.118
```

```
rho_S =

         0.5
```

结果显示，此时用雅可比迭代法求解不收敛，但用赛德尔法收敛。

又如，解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad (9.3)$$

有精确解$x = (-1,2,1)^T$，取$x_i^{(0)} = (0,0,0)^T$，$e = 10^{-4}$。

代入程序得：

```
>>
A=[1 2 -2;1 1 1;2 2 1];                    %系数矩阵
b=[1;2;3];                                  %常数项矩阵
e=1e-4;                                     %误差限
x0=[0;0;0];                                 %初始值
[~,~,~,~,~,~,rho_J]=Jacobi(A,b,e,x0)
[~,~,~,~,~,~,rho_S]=Seidel(A,b,e,x0)        %输出结果

rho_J =

   1.2332e-05



rho_S =

     2
```

结果显示，此时用雅可比迭代法求解收敛，但用赛德尔法不收敛。

十、实验体会

本次实验主要学习了线性方程组的迭代法解法，通过本次实验，我掌握了迭代法求解线性方程组的三种常用方法：雅克比迭代法、赛德尔迭代法和松弛迭代法。

在实验中，我得到了以下结论：①在大多数情况下，赛德尔迭代法的收敛速度快于雅克比迭代法，在恰当选择松弛因子的情况下，松弛迭代法快于赛德尔迭代法和雅克比迭代法；②松弛迭代法的收敛性和收敛速度取决于松弛因子的选取，其收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$；③雅可比迭代矩阵与赛德尔迭代矩阵的谱半径间并无特定关系，存在雅可比迭代收敛而赛德尔迭代不收敛，或赛德尔迭代收敛而雅可比迭代不收敛的情况。

同时在实验中也可以看到：①迭代法解线性方程组的优点是能充分利用系数的稀疏性，适宜解大型稀疏系数矩阵的方程组；②迭代法不存在误差累积问题，收敛性与迭代初值的选取无关，这是比一般非线性方程求根的优越之处。

最后，我要感谢付老师的谆谆教诲与同学们的帮助。