

■ 实验报告

姓名	
评分	

实验报告

课程名称： 地震波理论

课题名称： 佐普里兹方程的求解

专 业： 地球物理

姓 名： 王锴

班 级： 201145

完成日期： 2016 年 12 月 31 日

目录

一、实验名称	1
二、实验目的	1
三、实验题目	1
四、实验原理	1
五、实验整体流程图	3
六、程序代码	4
七、实验结果及分析	5
八、实验体会	8
参考文献	8

实验报告

■ 一、实验名称

佐普里兹方程的求解。

■ 二、实验目的

- (1) 掌握佐普里兹方程的求解；
- (2) 掌握能量守恒定律；
- (3) 培养编程的能力；
- (4) 熟悉 matlab 软件环境。

■ 三、实验题目

编程求解佐普里兹方程并验证能量守恒定律。

■ 四、实验原理

当一平面谐纵波入射到两种半无限弹性介质的分界面上时，波不仅会折回到入射介质中传播，而且会透射到另一种介质中传播，即同时存在反射波和透射波，反射波和透射波中都包含纵波和横波两种成分（如图 4.1）。

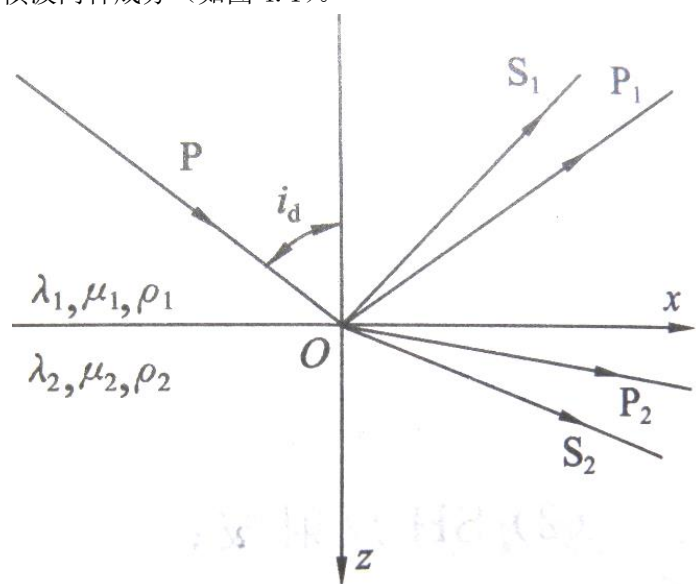


图 4.1 平面波反射^[1]

设入射纵波为 P，上下两层介质的参数分别为 λ_1, μ_1, ρ_1 和 λ_2, μ_2, ρ_2 ；反射横纵波速、透射横纵波速分别为 $v_{p1}, v_{s1}, v_{p2}, v_{s2}$ ；入射角为 i_d ，反射波横纵波的反射角、透射波横纵波的透射角分别为 i_d', i_s, t_d, t_s ；入射波振幅为 A_p ，反射横纵波的振幅、透射横

纵波的振幅分别为 A_{p1} , A_{s1} , B_{p2} , B_{s2} ;

根据斯奈尔定律^[1]可求得 i_d' , i_s , t_d , t_s :

$$\frac{v_{p1}}{\sin(i_d)} = \frac{v_{p1}}{\sin(i_d')} = \frac{v_{p2}}{\sin(t_d)} = \frac{v_{s1}}{\sin(i_s)} = \frac{v_{s1}}{\sin(t_s)} \quad (4.1)$$

可知 $i_d' = i_d$ 。

由佐普里兹方程^[1]可求解 A_{p1} , A_{s1} , B_{p2} , B_{s2} 为:

$$\begin{cases} A_{p1} \sin(i_d) + A_{s1} \cos(i_s) - B_{p2} \sin(t_d) + B_{s2} \cos(t_s) = -A_p \sin(i_d) \\ A_{p1} \cos(i_d) - A_{s1} \sin(i_s) + B_{p2} \cos(t_d) + B_{s2} \sin(t_s) = A_p \cos(i_d) \\ A_{p1} z_1 \cos(2i_s) - A_{s1} w_1 \sin(2i_s) - B_{p2} z_2 \cos(2t_s) - B_{s2} w_2 \sin(2t_s) = -A_p z_1 \cos(2i_s) \\ A_{p1} \gamma_1 w_1 \sin(2i_d) + A_{s1} w_1 \cos(2i_s) + B_{p2} \gamma_2 w_2 \sin(2t_d) - B_{s2} w_2 \cos(2t_s) = A_p \gamma_1 w_1 \sin(2i_d) \end{cases} \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma_i = \frac{v_{si}}{v_{pi}} \\ z_i = \rho_i v_{pi} \\ w_i = \rho_i v_{si} \end{cases}, \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

从而可求得反射横纵波反射系数、透射横纵波透射系数:

$$\begin{cases} R_{pp} = \frac{A_{p1}}{A_p} \\ R_{ps} = \frac{A_{s1}}{A_p} \\ T_{pp} = \frac{B_{p2}}{A_p} \\ T_{ps} = \frac{B_{s2}}{A_p} \end{cases} \quad (4.4)$$

由式 (4.1)、(4.2)、(4.3)、(4.4) 可计算并绘制出反射系数和透射系数曲线图。

为分析能量守恒关系, 可由能流密度公式^[1]求得入射波能流密度 I_p , 以及反射横纵波、透射横纵波的能流密度 I_{Rpp} , I_{Rps} , I_{Tpp} , I_{Tps} :

$$\begin{cases} I_p = \frac{1}{2} \rho_1 v_{p1} w^2 A_p^2 \cos(i_d) \\ I_{Rpp} = \frac{1}{2} \rho_1 v_{p1} w^2 A_{p1}^2 \cos(i_d) \\ I_{Rps} = \frac{1}{2} \rho_1 v_{s1} w^2 A_{s1}^2 \cos(i_s) \\ I_{Tpp} = \frac{1}{2} \rho_2 v_{p2} w^2 B_{p2}^2 \cos(t_d) \\ I_{Tps} = \frac{1}{2} \rho_2 v_{s2} w^2 B_{s2}^2 \cos(t_s) \end{cases} \quad (4.5)$$

为验证

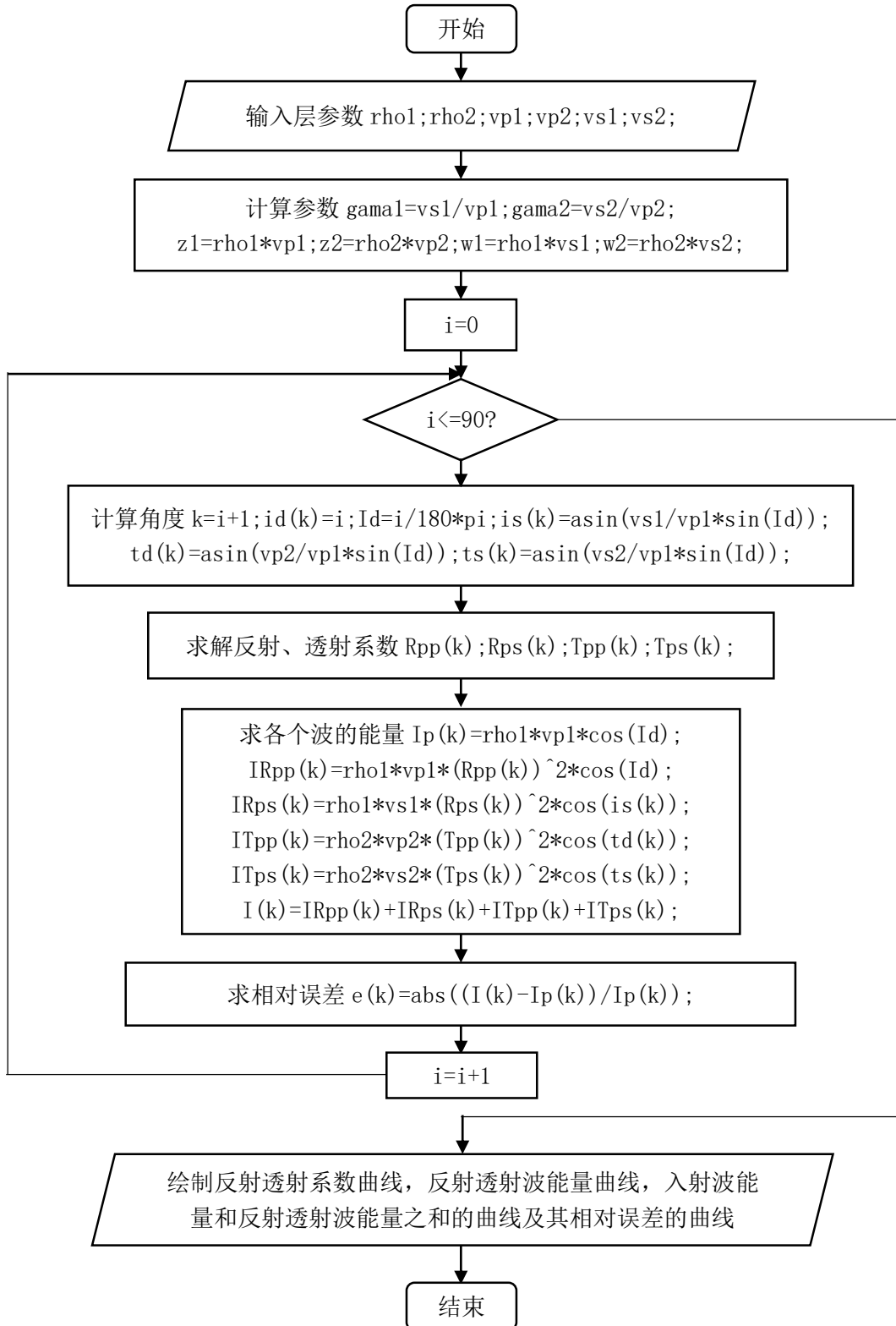
$$I_p = I_{Rpp} + I_{Rps} + I_{Tpp} + I_{Tps} \quad (4.6)$$

可将式 (4.6) 左右两端同时除以 $\frac{1}{2} w^2 A_p^2$, 可得

$$\begin{aligned} \rho_1 v_{p1} \cos(i_d) &= \rho_1 v_{p1} R_{pp}^2 \cos(i_d) + \rho_1 v_{s1} R_{ps}^2 \cos(i_s) + \rho_2 v_{p2} T_{pp}^2 \cos(t_d) \\ &\quad + \rho_2 v_{s2} T_{ps}^2 \cos(t_s) \end{aligned} \quad (4.7)$$

若式 (4.7) 成立, 则可证明能量守恒定律。

■ 五、实验整体流程图



六、程序代码

```

1      %输入层参数
2      rho1=2.7e3;      rho2=0.9e3; %密度
3      vp1=4500;        vp2=3600;   %纵波速度
4      vs1=2200;        vs2=1700;   %横波速度
5      %计算相关参数
6      gama1=vs1/vp1;   gama2=vs2/vp2; %纵横波速比
7      z1=rho1*vp1;     z2=rho2*vp2;   %纵波阻抗
8      w1=rho1*vs1;     w2=rho2*vs2;   %横波阻抗
9      %求解佐普里兹方程
10     for i=0:90 %从0度到90度，每隔1度取一个点
11         k=i+1; %序号
12         %计算反射透射角度
13         id(k)=i; Id=i/180*pi;      is(k)=asin(vs1/vp1*sin(Id));
14         td(k)=asin(vp2/vp1*sin(Id)); ts(k)=asin(vs2/vp1*sin(Id));
15         %求解佐普里兹方程
16         A=[sin(Id) cos(is(k)) -sin(td(k)) cos(ts(k));...
17             cos(Id) -sin(is(k)) cos(td(k)) sin(ts(k));...
18             z1*cos(2*is(k)) -w1*sin(2*is(k)) -z2*cos(2*ts(k)) -w2*sin(2*ts(k));...
19             gama1*w1*sin(2*Id) w1*cos(2*is(k)) gama2*w2*sin(2*td(k)) -w2*cos(2*ts(k))];
20         b=[-sin(Id);cos(Id);-z1*cos(2*is(k));gama1*w1*sin(2*Id)];
21         X=A\b;
22         %求得反射透射系数
23         Rpp(k)=X(1);   Rps(k)=X(2);
24         Tpp(k)=X(3);   Tps(k)=X(4);
25         %计算各个波的能量
26         Ip(k)=rho1*vp1*cos(Id);
27         IRpp(k)=rho1*vp1*(Rpp(k))^2*cos(Id);
28         IRps(k)=rho1*vs1*(Rps(k))^2*cos(is(k));
29         ITpp(k)=rho2*vp2*(Tpp(k))^2*cos(td(k));
30         ITps(k)=rho2*vs2*(Tps(k))^2*cos(ts(k));
31         I(k)=IRpp(k)+IRps(k)+ITpp(k)+ITps(k);
32         %计算相对误差
33         e(k)=abs((I(k)-Ip(k))/Ip(k));
34     end
35     %绘制反射透射系数曲线
36     figure;plot(id,Rpp,'-r',id,Rps,'--r',id,Tpp,'-g',id,Tps,'--g');grid on;
37     xlabel('i_d(\circ)');ylabel('R,T');legend('Rpp','Rps','Tpp','Tps');
38     %绘制反射透射波能量曲线
39     figure;plot(id,IRpp,'-r',id,IRps,'--r',id,ITpp,'-g',id,ITps,'--g');grid on;
40     xlabel('i_d(\circ)');ylabel('I');legend('I_{Rpp}','I_{Rps}','I_{Tpp}','I_{Tps}');
41     %绘制入射波能量和反射透射波能量之和的曲线
42     figure;plot(id,Ip,'-r',id,I,'--g');grid on;
43     xlabel('i_d(\circ)');ylabel('I');legend('Ip','I');
44     %绘制入射波能量和反射透射波能量之和的相对误差的曲线
45     figure;plot(id,e);grid on;
46     xlabel('i_d(\circ)');ylabel('e');legend('相对误差e','Location','northwest');

```

■ 七、实验结果及分析

当输入的层参数为

$$\begin{cases} \rho_1 = 2.7g/cm^3, v_{p1} = 4500m/s, v_{s1} = 2200m/s \\ \rho_2 = 0.9g/cm^3, v_{p2} = 3600m/s, v_{s2} = 1700m/s \end{cases} \quad (7.1)$$

时，即入射波由阻抗大的介质入射到阻抗小的介质中时，可以得到反射系数和透射系数曲线如下：

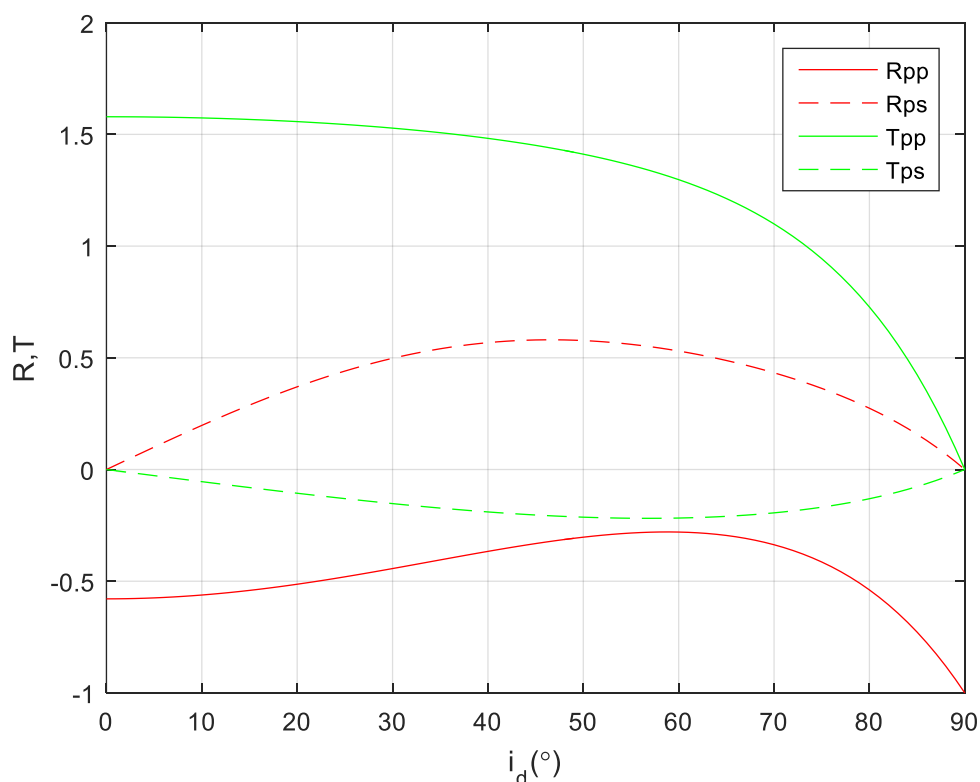


图 7.1 反射系数和透射系数曲线

图 (7.1) 显示，当 P 波入射角不大时 ($i_d \leq 20^\circ \sim 30^\circ$)，反射系数和透射系数变化不大，当入射角较大时，可以见到转换波（反射横波和透射横波）反射系数和透射系数的极大值，此时其振幅最大，而反射纵波则会出现反射系数绝对值的极小值，此时其振幅最小，透射纵波的透射系数则随着入射角的增大而逐渐减小，其振幅也逐渐减小。当入射波平行或垂直入射到分界面时，无波的转换现象发生，特别的，当入射波垂直入射时，仅有反射纵波产生，当入射波平行入射时，透射纵波与反射纵波均存在，但透射纵波的振幅约为反射纵波振幅的 2 倍。

同时，我们得到反射波和透射波的能量曲线如下图：

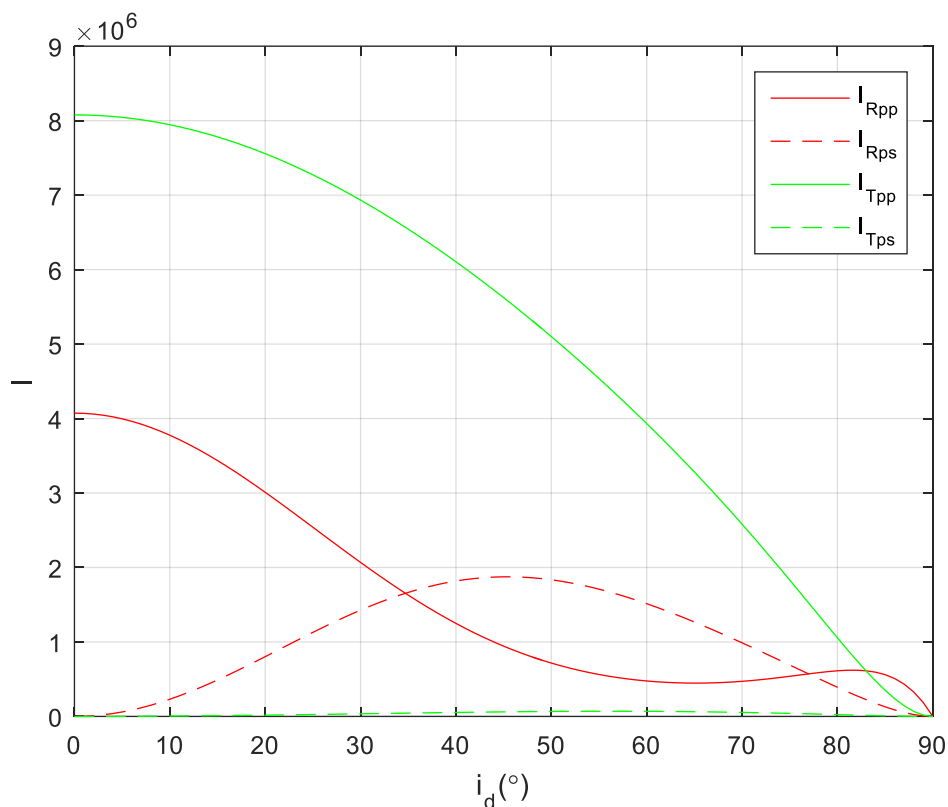


图 7.2 反射波和透射波的能量曲线

图 (7.2) 显示, 当 P 波入射角小于 80° 时, 透射纵波的能量占总能量的绝大多数 ($\geq 50\%$), 并且, 随着入射角的增大, 透射纵波的能量逐渐下降, 当入射波垂直入射时, 所有波的能量均为零。透射横波的能量均较小 ($< 1.4\%$), 在入射角为 56° 左右出现极大值。反射纵波的能量随着入射角的增大, 整体上呈现下降趋势, 但在 65° 左右出现极小值, 随后在 83° 左右出现极大值, 最后能量迅速衰减至零。反射横波的能量在 45° 左右出现极大值, 此时的能量约为反射纵波的两倍。当入射波平行或垂直入射时, 转换波的能量均为零。

将反射、透射的横纵波的能量之和与入射波的能量作对比, 可以得到下图:

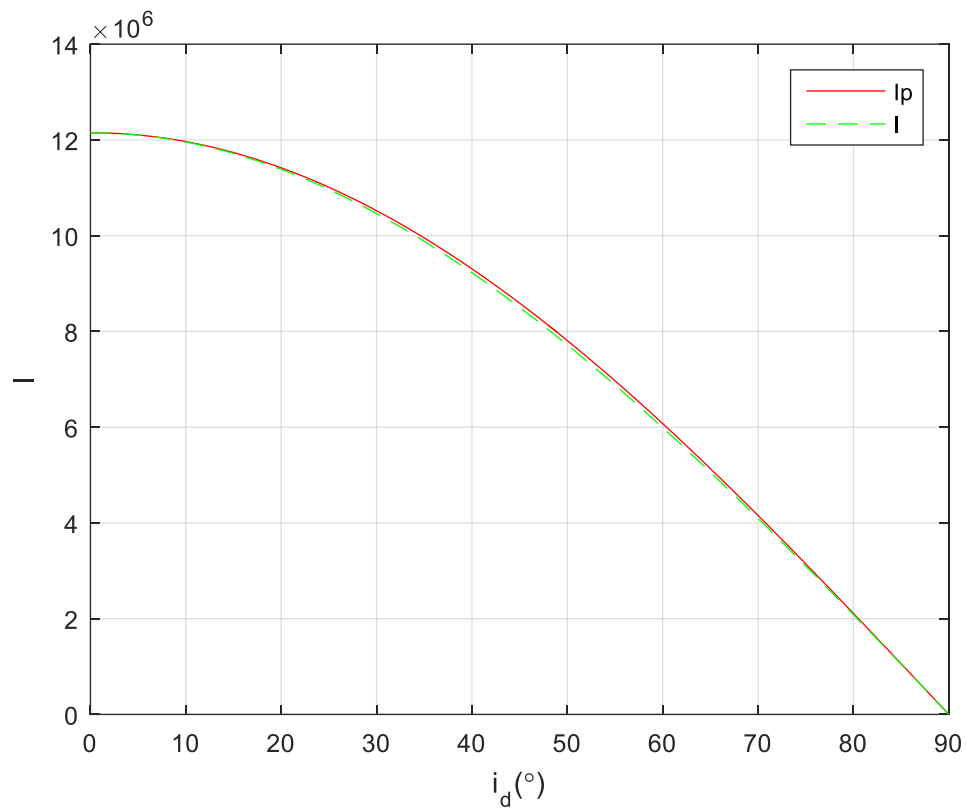


图 7.3 反射透射波能量之和 (I) 与入射波能量 (I_p) 曲线

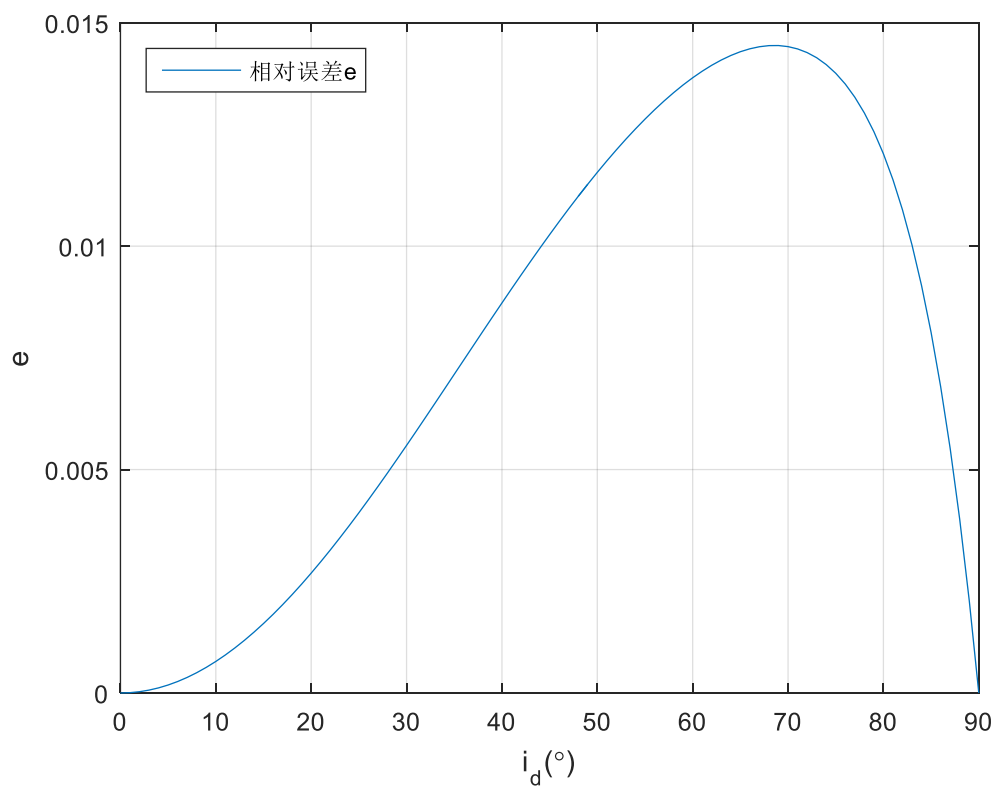


图 7.4 反射透射波能量之和与入射波能量的相对误差曲线

图 (7.3) 显示, 入射 P 波的能量随着入射角的增大而逐渐减小, 并且衰减速率逐渐增大, 在入射角较小时 ($i_d \leq 10^\circ \sim 20^\circ$), 入射波的能量衰减不明显, 而在入射角度较大时, 入射波能量衰减迅速。同时, 反射横波、反射纵波、透射横波和透射纵波的能量之和与入射波的能量曲线几乎重合, 这证明了能量守恒定律。分析它们的相对误差 (如图 7.4) 可以发现二者的相对误差不超过 1.5%, 相对误差极大值出现在入射角为 70° 附近, 所以, 我们可以认为能量是守恒的。

■ 八、实验体会

本次实验主要学习了佐普里兹方程的求解以及能量守恒的验证。通过本次实验, 我加深了对平面波在介质分界面上反射和透射的理解, 通过对程序运行结果的分析, 我清晰的看到了波在传播的过程中的能量守恒的现象, 并且看到了反射横波、反射纵波、透射横波和透射纵波以及入射纵波各个波的振幅和能量随着入射角度变化的关系, 收获十分丰富。

最后, 我要感谢张老师的谆谆教诲和同学们的帮助。

参考文献

[1] 杜世通. 地震波动力学理论与方法[M]. 中国石油大学出版社, 2008.