2.1.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 2.1.1. Să se rezolve următorul sistem folosind cele trei variante ale eliminării Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ x+4y+z=12. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

iar $\bar{A}$ este matricea sa extinsă:

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Deoarece numărul ecuaţiilor este egal cu cel al necunoscutelor şi

$$\det A=-3\neq 0,$$

sistemul este compatibil determinat (de tip Cramer), şi deci metoda eliminării a lui Gauss este aplicabilă.

În continuare, pentru a efectua operaţiile asupra matricei extinse a sistemului vom nota linia i cu L_i, iar coloana j cu C_j.

Rezolvare utilizând metoda lui Gauss clasică

A. Construcţia sistemului superior triunghiular

Pasul 1

- pivot: $a_{11}=1$
- $m_{21}=-\dfrac{2}{1}=-2$
- $m_{31}=-\dfrac{1}{1}=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\to L_3+m_{31}L_1]{L_2\to L_2+m_{21}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pasul 2

- pivot: $a_{22}=-3$
- $m_{32}=-\dfrac{3}{-3}=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\to L_3+m_{32}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

În acest moment am ajuns la un sistem de forma $\tilde{A}\mathrm{x} = \tilde{b}$, echivalent cu sistemul iniţial, în care matricea $\tilde{A}$ este superior triunghiulară, unde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

B. Rezolvarea sistemului superior triunghiular
Prin metoda substituţiei inverse, avem:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3}{1} \\ y &= \frac{1}{-3}(-3 - 1 \cdot z) \\ x &= \frac{1}{1}(6 - 1 \cdot y - 1 \cdot z), \end{aligned}$$

de unde obţinem soluţia sistemului: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Rezolvare cu metoda lui Gauss cu semipivot

A. Construcţia sistemului superior triunghiular

Pasul 1

- Ca pivot se ia elementul a_{i1} de modul maxim de pe coloana 1. În cazul nostru, pivotul este a_{12}, deci se permută linia 1 cu linia 2, şi se fac zerouri pe coloana 1 pentru $i > 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Pasul 2

- Ca pivot se ia elementul a_{i2} de modul maxim de pe coloana 2, pentru $i \geq 2$. În cazul nostru, pivotul este a_{32}, deci se permută linia 2 cu linia 3 şi se fac zerouri pe coloana 2, pentru $i > 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

În acest moment am ajuns la un sistem de forma $\tilde{A}\mathrm{x} = \tilde{b}$, echivalent cu sistemul inițial, unde matricea $\tilde{A}$ este superior triunghiulară, iar:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{15}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

B. Rezolvarea sistemului superior triunghiular se face ca și în cazul metodei lui Gauss clasice, și conduce la soluția $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Rezolvare cu metoda lui Gauss cu pivot total

A. Construcția sistemului superior triunghiular

Pasul 1

• ca pivot se alege elementul a_{ij} de modul maxim pentru $i, j \geq 1$. În cazul nostru pivotul este a_{32}, deci se permută linia 3 cu linia 1, și coloana 2 cu coloana 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

• pentru corectitudinea rezultatului final este necesar ca, ori de câte ori se permută coloanele matricei extinse, să se permute și elementele corespunzătoare ale vectorului x. Astfel, avem:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{x}_2 \leftrightarrow \mathrm{x}_1} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

• în final, obținem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{1}{4}L_1]{L_2 \to L_2 + \frac{1}{4}L_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} & 12 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

Pasul 2

• ca pivot se alege elementul a_{ij} de modul maxim pentru $i, j \geq 2$. Deoarece pivotul este a_{23}, se permută coloana 3 cu coloana 2:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} & 12 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{9}{4} & 12 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{x}3 \leftrightarrow \mathrm{x}2} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{9}{4} & 12 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{3}{13} L_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{9}{4} & 12 \\ 0 & 0 & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

În acest moment am ajuns la un sistem de forma $\tilde{A}\mathrm{x} = \tilde{b}$, echivalent cu sistemul iniţial, unde matricea $\tilde{A}$ este superior triunghiulară, iar:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{13} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

B. Rezolvarea sistemului superior triunghiular se face ca şi în cazul metodei lui Gauss clasice, şi conduce la soluţia $x = 1$, $z = 3$, $y = 2$.

Exerciţiul 2.1.2. Să se găsească inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare

Considerăm matricea B obţinută prin concatenarea matricei A cu matricea unitate I_3:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Folosind metoda eliminării a lui Gauss, transformăm matricea B după cum urmează:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L1 \to \frac{1}{B_{11}} L1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L3 \to L3 - B_{31} L1]{L2 \to L2 - B_{21} L1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L2 \to \frac{1}{B_{22}} L2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L3 \to L3 - B_{32} L2]{L1 \to L1 - B_{12} L2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L3 \to \frac{1}{B_{33}} L3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L2 \to L2 - B_{23} L3]{L1 \to L1 - B_{13} L3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Inversa matricei A va fi matricea C, obţinută prin ştergerea primelor 3 coloane ale matricei B:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Într-adevăr, se verifică uşor că

$$A \cdot C = C \cdot A = I_3.$$

Factorizarea LU presupune descompunerea matricei A într-un produs de matrice $L \cdot U$, unde

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ 0 & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Această descompunere este posibilă dacă toţi determinanţii de colţ ai matricei A sunt nenuli.

Pentru a asigura unicitatea descompunerii, trebuie precizate n elemente ale matricei L sau U. În mod tradiţional, se specifică λ_{ii} sau μ_{ii}; dacă $\lambda_{ii} = 1$ atunci factorizarea LU se numeşte **factorizare Doolittle**, iar dacă $\mu_{ii} = 1$ se numeşte **factorizare Crout**.

Astfel, rezolvarea sistemului (2.4) se reduce la rezolvarea sistemelor triunghiulare

$$Ly = b \tag{2.6}$$

cu soluţia

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{\lambda_{11}} \\ y_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} y_j\right) \cdot \dfrac{1}{\lambda_{ii}},\ i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \tag{2.7}$$

şi

$$Ux = y \tag{2.8}$$

cu soluţia

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{\mu_{nn}} \\ x_i = \left(y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \mu_{ij} x_j\right) \cdot \dfrac{1}{\mu_{ii}},\ i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 2.2.1. Să se determine soluţia sistemului următor, folosind factorizarea LU:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 5. \end{cases}$$

Sistemul se scrie în forma matriceală:

$$A\mathrm{x} = b,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$1 \neq 0,\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

rezultă că matricea A este nesingulară şi are toţi determinanţii de colţ nenuli, deci se poate folosi factorizarea LU pentru rezolvarea acestui sistem.

Rezolvare folosind factorizarea Crout

A. Factorizarea Crout

Presupunem că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ 0 & 1 & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

şi ne propunem să determinăm coeficienţii l_{ij}, u_{jk}. Pentru aceasta, folosim definiţia înmulţirii matricelor. Astfel, avem:

$$\begin{array}{ll}
a_{11} = \lambda_{11} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{11} = 1 \\
a_{12} = \lambda_{11} \cdot \mu_{12} & \Rightarrow \mu_{12} = 1 \\
a_{13} = \lambda_{11} \cdot \mu_{13} & \Rightarrow \mu_{13} = -1 \\
a_{21} = \lambda_{21} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{21} = 2 \\
a_{22} = \lambda_{21} \cdot \mu_{12} + \lambda_{22} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{22} = -3 \\
a_{23} = \lambda_{21} \cdot \mu_{13} + \lambda_{22} \cdot \mu_{23} & \Rightarrow \mu_{23} = -1 \\
a_{31} = \lambda_{31} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{31} = 1 \\
a_{32} = \lambda_{31} \cdot \mu_{12} + \lambda_{32} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{32} = 2 \\
a_{33} = \lambda_{31} \cdot \mu_{13} + \lambda_{32} \cdot \mu_{23} + \lambda_{33} \cdot 1 & \Rightarrow \lambda_{33} = 1
\end{array}$$

sau

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B. Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Pentru rezolvarea sistemului iniţial, avem de rezolvat două sisteme triungiulare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

a cărui soluţie este

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

şi respectiv:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a cărui soluţie este

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare folosind factorizarea Doolittle

A. Factorizarea Doolittle

Presupunem că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & \mu_{23} \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

şi ne propunem să determinăm coeficienţii l_{ij}, μ_{jk}, la fel ca şi în exemplul precedent. Astfel avem:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 \cdot \mu_{11} && \Rightarrow \mu_{11} = 1 \\
a_{12} &= 1 \cdot \mu_{12} && \Rightarrow \mu_{12} = 1 \\
a_{13} &= 1 \cdot \mu_{13} && \Rightarrow \mu_{13} = -1 \\
a_{21} &= \lambda_{21} \cdot \mu_{11} && \Rightarrow \lambda_{21} = 2 \\
a_{22} &= \lambda_{21} \cdot \mu_{12} + 1 \cdot \mu_{22} && \Rightarrow \mu_{22} = -3 \\
a_{23} &= \lambda_{21} \cdot \mu_{13} + 1 \cdot \mu_{23} && \Rightarrow \mu_{23} = 3 \\
a_{31} &= \lambda_{31} \cdot \mu_{11} && \Rightarrow \lambda_{31} = 1 \\
a_{32} &= \lambda_{31} \cdot \mu_{12} + \lambda_{32} \cdot \mu_{22} && \Rightarrow \lambda_{32} = -\frac{2}{3} \\
a_{33} &= \lambda_{31} \cdot \mu_{13} + \lambda_{32} \cdot \mu_{23} + 1 \cdot \mu_{33} && \Rightarrow \mu_{33} = 1
\end{aligned}$$

sau

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B. Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Pentru rezolvarea sistemului iniţial, avem de rezolvat două sisteme triungiulare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

a cărui soluţie este

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

şi respectiv:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a cărui soluţie este

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Sisteme tridiagonale

2.3.1 Breviar teoretic

O clasă specială de sisteme liniare este aceea în care matricea A a sistemului este tridiagonală, adică:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Pentru aceste sisteme se aplică factorizarea LU. Astfel, matricea A se descompune, folosind un caz particular al factorizării Crout, într-un produs $L \cdot U$ unde:

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & \beta_n \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

şi

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \nu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \nu_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \nu_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Coeficienţii a_2, ..., a_n sunt cunoscuţi din matricea A, iar coeficienţii β_i, μ_j se obţin din definiţia înmulţirii matricelor:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = b_1 \\ &\beta_i \cdot \nu_{i+1} = c_{i+1}\,,\ i = \overline{2, n-1} \\ &a_i \cdot \nu_i + \beta_i = b_i\,,\ i = \overline{2, n} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 2.3.1. Să se rezolve sistemul tridiagonal:

$$\begin{cases} x & +2y & & & = 3 \\ 2x & -y & +z & & = 2 \\ & 3y & +2z & -t & = 4 \\ & & -2z & +t & = -1. \end{cases}$$

Rezolvare

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Descompunem această matrice astfel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \beta_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Din definiţia produsului a două matrice, obţinem:

$$\begin{aligned}
&b_1 = \beta_1 \cdot 1 && \Rightarrow \beta_1 = 1 \\
&c_2 = \beta_1 \cdot \nu_2 && \Rightarrow \nu_2 = 2 \\
&b_2 = a_2 \cdot \nu_2 + \beta_2 && \Rightarrow \beta_2 = -5 \\
&c_3 = \beta_2 \nu_3 && \Rightarrow \nu_3 = -\frac{1}{5} \\
&b_3 = a_3 \nu_3 + \beta_3 && \Rightarrow \beta_3 = \frac{13}{5} \\
&c_4 = \beta_3 \cdot \nu_4 && \Rightarrow \nu_4 = -\frac{5}{13} \\
&b_4 = a_4 \cdot \nu_4 + \beta_4 && \Rightarrow \beta_4 = \frac{3}{13}.
\end{aligned}$$

B. Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Pentru a rezolva sistemul iniţial, avem de rezolvat două sisteme triunghiulare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

B. Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Pentru a rezolva sistemul iniţial, avem de rezolvat două sisteme triunghiulare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a cărui soluţie este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{8}{13} \\ 1 \end{pmatrix},$$

şi respectiv:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{8}{13} \\ 1 \end{pmatrix},$$

a căriu soluţie este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Factorizarea Cholesky

2.4.1 Breviar teoretic

Un caz particular de sisteme liniare este acela în care matricea A a sistemului este simetrică şi pozitiv definită (adică toţi determinanţii de colţ sunt strict pozitivi). Pentru astfel de sisteme putem folosi un caz particular al factorizării LU: descompunem matricea A a sistemului într-un produs $L \cdot L^T$, unde

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Coeficienţii λ_{ij} se obţin din definiţia produsului a două matrice.

2.4.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 2.4.1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 5y + 2z = 11 \\ x + 2y + 3z = 7. \end{cases}$$

Rezolvare

A. Factorizarea Cholesky

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se observă că $a_{ij} = a_{ji}$, adică matricea A este simetrică. Deoarece

$$1 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0\,,$$

matricea A este pozitiv definită. Aplicând factorizarea Cholesky avem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Folosind definiţia produsului a două matrice, obţinem:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \lambda_{11}^2 && \Rightarrow \lambda_{11} = 1 \\
&a_{12} = \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} && \Rightarrow \lambda_{21} = 2 \\
&a_{13} = \lambda_{11} \cdot \lambda_{31} && \Rightarrow \lambda_{31} = 1 \\
&a_{22} = \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 && \Rightarrow \lambda_{22} = 1 \\
&a_{23} = \lambda_{21} \cdot \lambda_{31} + \lambda_{22} \cdot \lambda_{32} && \Rightarrow \lambda_{32} = 0 \\
&a_{33} = \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 && \Rightarrow \lambda_{33} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Se observă că pentru găsirea elementelor λ_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{i,n}$, este suficient să calculăm dezvoltările corespunzătoare elementelor a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{i,n}$.

B. Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Pentru a determina soluţia sistemului iniţial, avem de rezolvat două sisteme triunghiulare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix},$$

cu soluţia

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

şi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

cu soluţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.5 Factorizarea Householder

2.5.1 Breviar teoretic

Factorizarea Householder este o metodă de rezolvare numerică a sistemelor de tip Cramer simetrice, şi constă în determinarea unei matrice simetrice nesingulare U, astfel încât $UAU = T$ să fie o matrice tridiagonală. Atunci soluţia sistemului $Ax = b$ este dată de

$$x = Uy, \tag{2.15}$$

unde y este soluţia sistemului

$$Ty = Ub. \tag{2.16}$$

Factorizarea Householder se bazează pe următoarele rezultate.

Propoziţia 2.5.1. *Oricare ar fi A o matrice pătratică de ordinul n şi simetrică, există un vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ astfel încât vectorul coloană $a^1 = Ae_1, e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ (a^1 este prima coloană a matricei A) are proprietatea*

$$a^1 - \frac{2v \cdot < v, a^1 >}{\|v\|^2} = \lambda \cdot e_1. \tag{2.17}$$

Pentru evitarea ambiguităţilor vom considera vectorul v dat de:

$$v = a^1 + sign(a_{11}) \cdot \|a^1\| \cdot e_1. \tag{2.18}$$

Propoziţia 2.5.2. *Oricare ar fi matricea simetrică A, matricea P definită prin:*

$$P = I - \frac{2 \cdot v \cdot v^T}{\|v\|^2} \tag{2.19}$$

este simetrică şi are proprietatea că elementele $2, 3, \ldots, n$ de pe prima coloană a matricei PA sunt nule, unde vectorul v este dat de relaţia (2.18).

Definiţia 2.5.1. *Se numeşte* ***matrice Householder*** *de ordin $n-1$ asociată matricei A şi se notează cu P_{n-1} o matrice de ordin $n-1$ de forma:*

$$P_{n-1} = I_{n-1} - \frac{2 \cdot v \cdot v^T}{\|v\|^2} \tag{2.20}$$

unde: $v = a^1_{n-1} + sign(a_{21}) \cdot \|a^1_{n-1}\| \cdot e_1$ este vectorul format cu componentele vectorului a^1 care este prima coloană a matricei A, $e_1 = (\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n-1})^T$ şi I_{n-1} este matricea unitate de ordin $n-1$.

Propoziţia 2.5.3. *Matricea Hauseholder P_{n-1} asociată unei matrice simetrice A este simetrică şi are proprietatea că matricea U_1 definită prin:*

Propoziţia 2.5.3. *Matricea Householder P_{n-1} asociată unei matrice simetrice A este simetrică şi are proprietatea că matricea U_1 definită prin:*

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & P_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

este simetrică şi verifică relaţia:

$$A^{(1)} = U_1\, A\, U_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^1 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Se consideră vectorul coloană a_{n-2}^2 cu ultimele $n-2$ elemente ale coloanei matrice $A^{(1)}$. Cu acest vector se construieşte o matrice Householder de ordinul $n-2$, P_{n-2}. Matricea U_2 definită prin:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & P_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

are proprietatea:

$$A^{(2)} = U_2\, A^{(1)}\, U_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & a_{22}^{(1)} & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Matricea P_{n-2} a condus la obţinerea unei noi linii şi coloane a matricei tridiagonale la care vrem să reducem matricea A.

Continuând astfel prin $n-1$ transformări, obţinem egalitatea: $UAU = T$ în care T este matrice tridiagonală.

2.5.2 Problemă rezolvată

Exercițiul 2.5.1. Să se rezolve următorul sistem folosind factorizarea Householder:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = \sqrt{5} \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se poate scrie sub forma $A\mathrm{x} = b$, unde:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observă că matricea A este simetrică, deci factorizarea Householder este aplicabilă

Generarea matricei U

Calculăm elementele vectorului

$$v = a^1 + sign(a_{11}^1) \cdot \|a^1\| \cdot e_1$$

unde $a^1 = (2,1)^T$, $\|a^1\| = \sqrt{5}$ şi $e_1 = (1,0)^T$. De aici rezultă

$$v = (0, 2 + \sqrt{5}, 1)^T$$

şi $\|v\| = 10 + 4\sqrt{5}$. Elementele matricei U sunt date de:

$$U_{j,k} = I_3 - \frac{2v_j \cdot v_k}{\|v\|}.$$

După efectuarea calculelor, obţinem:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\,(2+\sqrt{5})}{5+2\,\sqrt{5}} & -\dfrac{2+\sqrt{5}}{5+2\,\sqrt{5}} \\ 0 & -\dfrac{2+\sqrt{5}}{5+2\,\sqrt{5}} & \dfrac{2\,(2+\sqrt{5})}{5+2\,\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

şi

$$T = UAU = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{5\,(2+\sqrt{5})}{5+2\,\sqrt{5}} & 0 \\ -\dfrac{5\,(2+\sqrt{5})}{5+2\,\sqrt{5}} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{-9}{5} \\ 0 & \dfrac{-9}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}, \; Ub = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soluţia sistemului tridiagonal

$$T\mathrm{y} = Ub$$

este

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{20 - 10\sqrt{5}}{21} \\ \dfrac{5 - 6\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix},$$

iar soluţia sistemului iniţial este

$$\mathrm{x} = U\mathrm{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + \sqrt{5}}{3} \\ \dfrac{2 - \sqrt{5}}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix},$$

adică $x = \dfrac{2 + \sqrt{5}}{3}$, $y = \dfrac{2 - \sqrt{5}}{3}$ $z = -\dfrac{2}{3}$.

2.6 Metoda Jacobi

2.6.1 Breviar teoretic

Metoda Jacobi este o metodă iterativă de rezolvare a sistemelor liniare de forma

$$Ax = b. \tag{2.25}$$

Matricea A se descompune în suma $L + D + U$, unde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Se defineşte traiectoria Jacobi a vectorului $x^{(0)}$ ca fiind vectorul

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (L+U)x^{(k)}] \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.29}$$

Folosind teorema de convergenţă se studiază dacă traiectoria Jacobi converge la soluţia $x^{(*)}$ a sistemului (2.25).

Traiectoria Jacobi converge la soluţia $x^{(*)}$ a sistemului (2.25), dacă şi numai dacă raza spectrală ρ a matricei

$$M = -D^{-1}(L+U) \tag{2.30}$$

este strict subunitară, adică

$$\max\{|\lambda| \mid \det(M - \lambda I_n) = 0\} < 1. \tag{2.31}$$

În caz de convergenţă, componentele $x_1^{(k+1)}$, ..., $x_n^{(k+1)}$ ale vectorului $x^{(k+1)}$, situat pe traiectoria Jacobi a vectorului $x^{(0)}$, sunt date de relaţiile:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right) \cdot \frac{1}{a_{ii}},\ i = 1, 2, \dots, n;\ k = 0, 1, \dots \tag{2.32}$$

2.6.2 Problemă rezolvată

Exercițiul 2.6.1. Calculați primii trei termeni ai traiectoriei Jacobi asociate vectorului $(0,0,0)$ pentru sistemul:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = -1 \\ -3x + 9y + z = 2 \\ 2x - y - 7z = 3. \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se mai poate scrie sub forma $A\mathrm{x} = b$, unde:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matricea A se descompune în suma $L + D + U$ cu

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificarea condiției de convergență a algoritmului presupune calculul valorilor proprii ale matricei

$$M = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{9} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculând maximul în modul al valorilor proprii ale matricei M, obținem

$$\rho(M) = 0.2673998083 < 1,$$

și deci algoritmul converge.

Aplicăm formulele (2.32), plecând de la $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, $z^{(0)} = 0$, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -0.2000000000 \\ y^{(1)} &= 0.2222222222 \\ z^{(1)} &= -0.4285714286 \\ x^{(2)} &= 0.1460317460 \\ y^{(2)} &= 0.2031746032 \\ z^{(2)} &= -0.5174603174 \\ x^{(3)} &= 0.1917460316 \\ y^{(3)} &= 0.3283950617 \\ z^{(3)} &= -0.4158730159. \end{aligned}$$

Pentru comparație, am rezolvat acest sistem folosind procedura `solve` furnizată de Maple, iar rezultatele sunt:

$$x = 0.1861198738, \; y = 0.3312302839, \; z = -0.4227129338.$$

2.7 Metoda Gauss-Seidel

2.7.1 Breviar teoretic

Metoda Gauss-Seidel este o metodă de rezolvare numerică a sistemelor de tip Cramer, prin aproximaţii succesive. Matricea A a sistemului se descompune în suma $L+D+U$, unde L este matrice triunghiulară subdiagonală, D matrice diagonală şi U matrice triunghiulară supradiagonală.

Pentru un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, şirul de vectori $x^{(k)}$ definit prin:

$$x^{(k+1)} = (L+D)^{-1}(b - Ux^{(k)}) \tag{2.34}$$

se numeşte traiectoria Gauss-Seidel a vectorului $x^{(0)}$.

Traiectoria Gauss-Seidel a vectorului $x^{(0)}$ converge dacă şi numai dacă raza spectrală ρ a matricei

$$-(L+D)^{-1}U \tag{2.35}$$

este strict subunitară.

În caz de convergenţă, componentele $x_1^{(k+1)}$, ..., $x_n^{(k+1)}$ ale vectorului $x^{(k+1)}$, situat pe

traiectoria Gauss-Seidel a vectorului $x^{(0)}$, sunt date de relaţiile:

$$x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)}\right) \cdot \frac{1}{a_{11}} \tag{2.36}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)}\right) \cdot \frac{1}{a_{ii}},\ i = 2, \ldots, n. \tag{2.37}$$

2.7.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 2.7.1. Să se determine primele 3 puncte de pe traiectoria Gauss-Seidel a vectorului $(0,0)^T$ pentru sistemul următor:

$$\begin{cases} 4x + y = -1 \\ 4x + 3y = -2. \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se poate scrie sub forma $A\mathrm{x} = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

iar matricea A se descompune în suma $L+D+U$, după cum urmează:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algoritmul converge dacă raza spectrală a matricei

Algoritmul converge dacă raza spectrală a matricei

$$M = -(L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

este strict subunitară. Efectuând calculele, obţinem

$$\rho(M) = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$$

şi deci algoritmul este convergent.
În continuare, aplicăm formulele (2.36)-(2.37) şi, plecând de la punctele $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, obţinem:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -0.2500000000 \\ y^{(1)} &= -0.3333333333 \\ x^{(2)} &= -0.1666666667 \\ y^{(2)} &= -0.4444444443 \\ x^{(3)} &= -0.1388888889 \\ y^{(3)} &= -0.4814814813 \end{aligned}$$

Pentru comparaţie, determinăm soluţia exactă a sistemului considerat:

$$x = -\frac{1}{8}\,,\ y = -\frac{1}{2}$$

adică $x = -0.125$, $y = -0.5$.

2.8 Metoda relaxării succesive

2.8.1 Breviar teoretic

Metoda relaxării succesive este o metodă de rezolvare numerică a sistemelor de tip Cramer, prin aproximaţii succesive. Această metodă se deosebeşte de metoda Gauss-Seidel prin aceea că se introduc corecţiile

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}\,,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{2.39}$$

Matricea A a sistemului se descompune în suma $L + D + U$, unde L este matrice triunghiulară subdiagonală, D matrice diagonală şi U matrice triunghiulară supradiagonală.

Pentru un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, şirul de vectori $x^{(k)}$ definit prin:

$$x^{(k+1)} = \left(L + \frac{1}{\omega} D\right)^{-1} \left\{ b - \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D + U\right] x^{(k)} \right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.40}$$

se numeşte traiectoria vectorului $x^{(0)}$ obţinută prin relaxări succesive.

Traiectoria vectorului $x^{(0)}$ obţinută prin relaxări succesive converge dacă şi numai dacă raza spectrală ρ a matricei

$$-\left(L + \frac{1}{\omega} D\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D + U\right] \tag{2.41}$$

este strict subunitară.

În caz de convergenţă, componentele $x_1^{(k+1)}$, ..., $x_n^{(k+1)}$ ale vectorului $x^{(k+1)}$ situat pe traiectoria vectorului $x^{(0)}$ obţinută prin relaxări succesive sunt date de relaţiile:

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j^{(k)} \right] \tag{2.42}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right],\ i = 2, \ldots, n. \tag{2.43}$$

Observaţia 2.8.1. Metoda Gauss-Seidel este un caz particular al metodei relaxării succesive, pentru care $\omega = 1$.

2.8.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 2.8.1. Să se găsească primele 3 elemente ale traiectoriei vectorului $(0, 0)^T$ folosind metoda relaxării succesive cu $\omega = 0.5$, pentru sistemul:

$$\begin{cases} 4x + y = -1 \\ 4x + 3y = -2. \end{cases}$$

2.8.2 Problemă rezolvată

Exercițiul 2.8.1. Să se găsească primele 3 elemente ale traiectoriei vectorului $(0,0)^T$ folosind metoda relaxării succesive cu $\omega = 0.5$, pentru sistemul:

$$\begin{cases} 4x + y = -1 \\ 4x + 3y = -2. \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se poate scrie sub forma $A\mathrm{x} = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Matricea A se descompune în suma $L + D + U$, cu

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algoritmul converge dacă raza spectrală a matricei

$$M = -\left(L + \frac{1}{\omega} D\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D + U\right] = \begin{pmatrix} 0.500 & -0.125 \\ 0.333 & 0.583 \end{pmatrix}$$

este strict subunitară. Efectuând calculele, obținem

$$\rho(M) = 0.75 < 1$$

și deci algoritmul este convergent.

În continuare, aplicăm formulele (2.42)-(2.43), plecând de la punctele $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, și obținem:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -0.1250000000 \\ y^{(1)} &= -0.5000000000 \\ x^{(2)} &= -0.1250000000 \\ y^{(2)} &= -0.7500000000 \\ x^{(3)} &= -0.0937500000 \\ y^{(3)} &= -0.9166666667 \end{aligned}$$

Pentru comparație, determinăm soluția exactă a sistemului considerat:

$$x = -0.125 \;, \; y = -0.5.$$

Capitolul 3

Rezolvarea ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii neliniare

Fie sistemul neliniar

$$F(x) = 0 \tag{3.1}$$

unde $F(x)$ este vectorul $(f_1(x), ..., f_n(x))^T$, funcţiile $f_1, ..., f_n : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ sunt considerate cunoscute, iar vectorul $x = (x_1, ..., x_n)^T$ este necunoscut.

3.1 Metoda punctului fix

3.1.1 Breviar teoretic

Soluţiile sistemului neliniar (3.1) se caută printre punctele fixe $x^{(*)}$, adică printre soluţiile sistemului

$$G(x) = x \tag{3.2}$$

obţinut din sistemul iniţial prin alegerea

$$G(x) = x - [F'(x)]^{-1} \cdot F(x) \tag{3.3}$$

unde $F'(x)$ este matricea Jacobi asociată vectorului F, matrice despre care s-a presupus că este continuă şi inversabilă.

Presupunem că operatorul G are un punct fix $x^{(*)}$.

Definiţia 3.1.1. *Vom spune că $x^{(*)}$ este un punct de atracţie dacă există o sferă deschisă $S(x^{(*)}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^{(*)}\| < r\}$ cu următoarele proprietăţi:*

1. *$S(x^{(*)}, r) \subset D$ şi $x^{(k)}$ generat de*

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}) \tag{3.4}$$

este un şir bine definit pentru $\forall\, x^{(0)} \in S(x^{(*)}, r)$;

2. *$\forall\, x^{(0)} \in S(x^{(*)}, r)$ şirul $x^{(k)}$ definit de (3.4) aparţine lui D şi $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^{(*)}$.*

Teorema 3.1.1. *Fie $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator neliniar şi $x^{(*)} \in D$ un punct fix al lui G. Dacă G este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi raza spectrală ρ a matricei Jacobi a lui G în $x^{(*)}$ este strict subunitară ($\rho < 1$), atunci $x^{(*)}$ este un punct de atracţie şi*

$$\limsup_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^{(*)}\|^{1/k} = \rho.$$

Teorema 3.1.2. *Fie $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator neliniar şi $x^{(*)} \in D$ un punct fix al lui G. Dacă G este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D şi norma μ a matricei Jacobi a lui G în $x^{(*)}$ este strict subunitară ($\mu < 1$), atunci $x^{(*)}$ este punct de atracţie şi*

$$\limsup_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^{(*)}\|^{1/k} = \mu.$$

Teorema 3.1.3. *(Unicitatea punctului fix) Fie $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator neliniar. Dacă G este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D, şi dacă norma μ a matricei Jacobi asociată operatorului G este strict subunitară ($\mu < 1$) pentru orice $x \in D$, atunci pentru orice x^0 şirul de aproximaţii succesive*

$$x^{(k+1)} = G(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad x^{(0)} \in D \tag{3.5}$$

converge la un unic punct fix $x^{(*)} \in D$.

Observaţia 3.1.1. Norma unei matrice este dată de:

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3.6}$$

3.1.2 Problemă rezolvată

Exerciţiul 3.1.1. Să se găsească primii trei termeni ai şirului de aproximaţii succesive folosind metoda punctului fix, pentru sistemul următor:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2 + x_2}{6} - x_1 = 0 \quad \text{pe domeniul} \quad D = [0,1] \times [1,2] \\ \dfrac{x_1 + x_2^2}{8} - x_2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se mai scrie $G(x) = x$, unde

$$G = \left(\frac{x_1^2 + x_2}{6}, \frac{x_1 + x_2^2}{8} \right)^T, \; x = (x_1, x_2)^T$$

Calculăm jacobianul lui G, şi obţinem:

$$G' = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{x_2}{4} \end{pmatrix}$$

a cărui normă este:

$$\max \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} |x_2|, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} |x_1| \right)$$

Deoarece $x_1 \in [0,1]$ şi $x_2 \in [1,2]$, rezultă că norma matricei G' este $\frac{2}{3} < 1$, şi deci pentru orice punct iniţial $x^{(0)} \in D$, algoritmul converge.

Fie $x^{(0)} = (0.5, 0.5)^T$. Aplicând formula (3.5), obţinem valorile pentru primii trei termeni ai şirului de aproximaţii succesive:

$$x_1^{(1)} = 0.1250000000$$
$$x_2^{(1)} = 0.0468750000$$
$$x_1^{(2)} = 0.0104166666$$
$$x_2^{(2)} = 0.0015767415$$
$$x_1^{(3)} = 0.0002808747$$
$$x_2^{(3)} = 0.0000354201$$

Pentru comparaţie, determinăm soluţia exactă a sistemului: $x_1^{(*)} = 0$, $x_2^{(*)} = 0$.

3.2 Metoda lui Newton

3.2.1 Breviar teoretic

Soluţia $x^{(*)}$ a sistemului neliniar (3.1) este dată de limita şirului $x^{(k)}$, unde:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.7}$$

în cazul şirului de iteraţii succesive clasic al lui Newton, respectiv

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.8}$$

în cazul şirului de iteraţii succesive simplificat al lui Newton.

Teorema 3.2.1. *Fie $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ şi ecuaţia $F(x) = 0$, despre care presupunem că are o soluţie $x^{(*)} \in D$. Dacă există o sferă deschisă $S(x^{(*)}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^{(*)}\| < r\}$ pe care F este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $F'(x^{(*)})$ este nesingulară atunci, în cazul metodei lui Newton clasice, $x^{(*)}$ este un punct de atracţie.*

Teorema 3.2.2. *În condiţiile teoremei precedente, dacă raza spectrală ρ a matricei*

$$I - [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F'(x^{(*)})$$

este strict subunitară atunci, în cazul metodei lui Newton simplificată, $x^{(*)}$ este un punct fix atractiv.

Un caz particular al metodei lui Newton este acela pentru care $n = 1$. În acest caz ecuaţia (3.1) devine

$$f(x) = 0, \tag{3.9}$$

şirul de iteraţii succesive clasic al lui Newton se scrie

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

iar şirul de iteraţii succesive simplificat al lui Newton se scrie

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.11}$$

3.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 3.2.1. Să se găsească primii 3 termeni ai şirului de iteraţii succesive (clasic şi simplificat) al lui Newton, cu $x^{(0)} = (0.7, 0.4)^T$ pentru sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

Rezolvare

Sistemul se mai scrie $F(\mathrm{x}) = 0$, unde

$$F(\mathrm{x}) = (x^2 + y^2 - 1,\, x^3 - y)^T\ ,\ \mathrm{x} = (x, y)^T.$$

Jacobianul operatorului F este:

$$F'(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

A. Rezolvare folosind metoda lui Newton clasică

Determinăm produsul:

$$[F'(\mathrm{x})]^{-1}F(\mathrm{x}) = \left(\frac{(x^2+y^2-1)}{2x(1+3yx)} + \frac{y(x^3-y)}{x(1+3yx)}, \frac{3x(x^2+y^2-1)}{2+6yx} - \frac{(x^3-y)}{1+3yx}\right)^T$$

şi aplicăm formula (3.7), considerând

$$x^{(0)} = 0.7$$
$$y^{(0)} = 0.4.$$

Astfel, obţinem primii 3 termeni ai şirului de iteraţii succesive clasic al lui Newton:

$$x^{(1)} = 0.8535714287$$
$$y^{(1)} = 0.5800885499$$
$$x^{(2)} = 0.8267993467$$
$$y^{(2)} = 0.5637617094$$
$$x^{(3)} = 0.8260319270$$
$$y^{(3)} = 0.5636241719.$$

B. Rezolvare folosind metoda lui Newton simplificată

Aplicând formula (3.8), obţinem primii 3 termeni ai şirului de iteraţii succesive simplificat al lui Newton:

$$x^{(1)} = 0.8535714286$$
$$y^{(1)} = 0.5841767661$$
$$x^{(2)} = 0.8147421666$$
$$y^{(2)} = 0.5577269491$$
$$x^{(3)} = 0.8297474476$$
$$y^{(3)} = 0.5653470981.$$

Exerciţiul 3.2.2. Să se aplice metoda lui Newton (clasică şi simplificată), pentru aflarea soluţiei ecuaţiei

Exerciţiul 3.2.2. Să se aplice metoda lui Newton (clasică şi simplificată), pentru aflarea soluţiei ecuaţiei

$$\sin(x) - x = 0,$$

plecând de la punctul $x^{(0)} = 0.2$.

Rezolvare

Se observă că o soluţie a ecuaţiei este $x^{(*)} = 0$.
Dacă notăm

$$f(x) = \sin(x) - x,$$

atunci $f'(x) = \cos(x) - 1$.

Plecând de la $x^{(0)} = 0.2$ şi aplicând formula (3.10), obţinem:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= 0.1332443177\\
x^{(2)} &= 0.0888032392\\
x^{(3)} &= 0.0591943762\\
x^{(4)} &= 0.0394606157\\
x^{(5)} &= 0.0263064006 \ \text{ etc.}
\end{aligned}$$

După 13 iteraţii se obţine o soluţie aproximativă a ecuaţiei, cu eroarea $\varepsilon = 0.001$:

$$x^{(13)} = 0.001539688244.$$

Aplicând iteraţia dată de formula (3.11), obţinem:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= 0.1332443177\\
x^{(2)} &= 0.1134824727\\
x^{(3)} &= 0.1012708415\\
x^{(4)} &= 0.0925912882\\
x^{(5)} &= 0.0859570495 \ \text{ etc.}
\end{aligned}$$

După 18147 iteraţii se obţine o soluţie aproximativă a ecuaţiei, cu eroarea $\varepsilon = 0.00000005$:

$$x^{(18147)} = 0.001814907756.$$

Capitolul 4

Interpolare polinomială. Funcţii spline

În practică este des întâlnită situaţia în care se cunoaşte valoarea unei funcţii f în diferite puncte x_i şi se cere valoarea sa într-un punct intermediar. De exemplu, se poate cere valoarea temperaturii aerului la ora 14.30, cunoscându-se temperaturile aerului luate din oră în oră.

Astfel, se pune problema ca, plecând de la punctele date (x_i, y_i) să se determine o funcţie de interpolare al cărei grafic să treacă prin toate punctele date. Interpolarea se numeşte polinomială atunci când se caută funcţii polinomiale având proprietăţile menţionate.

4.1 Polinomul lui Newton cu diferenţe divizate

4.1.1 Breviar teoretic

Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R}^1$ dată prin: $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, m$.

Diferenţa divizată de ordinul întâi a lui f relativ la punctul x_r este numărul definit de fracţia:

$$(\mathcal{D}^1 f)(x_r) = \frac{f(x_{r+1}) - f(x_r)}{x_{r+1} - x_r}. \tag{4.1}$$

Diferenţa divizată de ordinul al doilea a funcţiei f relativ la punctul x_r este prin definiţie numărul:

$$(\mathcal{D}^2 f)(x_r) = \frac{(\mathcal{D}^1 f)(x_{r+1}) - (\mathcal{D}^1 f)(x_r)}{x_{r+2} - x_r} = \frac{[x_{r+1}, x_{r+2}, f] - [x_r, x_{r+1}, f]}{x_{r+2} - x_r} \tag{4.2}$$

Prin calcul se găseşte că diferenţa divizată de ordin k a lui f în x_r este:

$$(\mathcal{D}^k f)(x_r) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_{r+i})}{\prod\limits_{\substack{m=0\\ m\neq i}}^{k} (x_{r+i} - x_{r+m})} \tag{4.3}$$

Polinomul lui Newton cu diferenţe divizate se defineşte ca fiind polinomul:

$$P_m(x) = f(x_0) + (\mathcal{D}^1 f)(x_0)(x-x_0) + (\mathcal{D}^2 f)(x_0)(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ + (\mathcal{D}^m f)(x_0)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1}) \tag{4.4}$$

Astfel, funcţia f se poate aproxima după cum urmează:

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x), \tag{4.5}$$

unde

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})(x-x_m) \tag{4.6}$$

este restul sau eroarea de aproximare la interpolarea polinomială.

În cazul în care $x_{i+1} - x_i = h = const$ (i.e. nodurile x_i sunt echidistante), se pot introduce diferenţele finite. Astfel,

$$\triangle f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) \tag{4.7}$$

se numeşte diferenţă finită la dreapta, iar

$$\nabla f(x_k) = f(x_k) - f(x_{k-1}) \tag{4.8}$$

se numeşte diferenţă finită la stânga.

Diferenţele finite de ordin superior se definesc recursiv, după cum urmează:

$$\triangle^n f(x_k) = \triangle^{n-1} f(x_{k+1}) - \triangle^{n-1} f(x_k) \tag{4.9}$$

$$\nabla^n f(x_k) = \nabla^{n-1} f(x_k) - \nabla^{n-1} f(x_{k-1}) \tag{4.10}$$

Legătura dintre diferenţele divizate şi diferenţele finite este următoarea:

$$(\mathcal{D}^m f)(x_0) = \frac{\triangle^m f(x_0)}{m!h^m}, \qquad (\mathcal{D}^m f)(x_m) = \frac{\nabla^m f(x_m)}{m!h^m}. \tag{4.11}$$

În acest fel, obţinem polinomul lui Newton cu diferenţe finite la dreapta:

$$p_m(x) = f(x_0) + \frac{\triangle f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\ + \frac{\triangle^m f(x_0)}{m!h^m}(x-x_0)\dots(x-x_{m-1}), \tag{4.12}$$

respectiv polinomul lui Newton cu diferenţe finite la stânga:

$$p_m(x) = f(x_m) + \frac{\nabla f(x_m)}{h}(x-x_m) + \frac{\nabla^2 f(x_m)}{2!h^2}(x-x_m)(x-x_{m-1}) + \dots \\ + \frac{\nabla^m f(x_m)}{m!h^m}(x-x_m)\dots(x-x_1). \tag{4.13}$$

4.1.2 Probleme rezolvate

Exercițiul 4.1.1. Să se găsească polinomul de interpolare pentru următorul set de date:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	5	10	17	26

folosind

a) diferențe divizate

b) diferențe finite la dreapta

c) diferențe finite la stânga.

Rezolvare

A. Polinomul lui Newton cu diferențe divizate

1. Obținerea diferențelor divizate:

x	$f(x)$	$\mathcal{D}^1 f(x)$	$\mathcal{D}^2 f(x)$	$\mathcal{D}^3 f(x)$	$\mathcal{D}^4 f(x)$
1	2				
		$\frac{5-2}{2-1}=3$			
2	5		$\frac{5-3}{3-1}=1$		
		$\frac{10-5}{3-2}=5$		$\frac{1-1}{4-1}=0$	
3	10		$\frac{7-5}{4-2}=1$		$\frac{0-0}{5-1}=0$
		$\frac{17-10}{4-3}=7$		$\frac{1-1}{5-2}=0$	
4	17		$\frac{9-7}{5-3}=1$		
		$\frac{26-17}{5-4}=9$			
5	26				

Șirul diferențelor divizate este șirul primelor valori de pe fiecare coloană, începând cu valorile funcției, adică:

$$[2, 3, 1, 0, 0].$$

2. Obținerea polinomului de interpolare

$$\begin{aligned} P(x) =& 2 + 3\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)(x-2) + 0\cdot(x-1)(x-2)(x-3) + \\ &+ 0\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \\ =& 2 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = \\ =& x^2 + 1. \end{aligned}$$

B. Polinomul lui Newton cu diferențe finite la dreapta

Această metodă este aplicabilă, deoarece $x_{i+1} - x_i = 1 \stackrel{not}{=} h$, $i = \overline{1,4}$.

1. Obținerea diferențelor finite la dreapta

x	$f(x)$	$\triangle^1 f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
1	2	$5-2=3$	$5-3=2$	$2-2=0$	$0-0=0$
2	5	$10-5=5$	$7-5=2$	$2-2=0$	–
3	10	$17-10=7$	$9-7=2$	–	–
4	17	$26-17=9$	–	–	–
5	26	–	–	–	–

Şirul diferenţelor finite la dreapta este şirul rezultatelor de pe prima linie, începând cu valorile funcţiei, adică:

$$[2, 3, 2, 0, 0].$$

2. Obţinerea polinomului de interpolare

$$\begin{aligned} P(x) =& 2 + \frac{3}{1}(x-1) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x-1)(x-2) + \frac{0}{3! \cdot 1^3}(x-1)(x-2)(x-3) + \\ &+ \frac{0}{4! \cdot 1^4}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \\ =& 2 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = \\ =& x^2 + 1. \end{aligned}$$

C. Polinomul lui Newton cu diferenţe finite la stânga

Această metodă este aplicabilă, deoarece $x_{i+1} - x_i = 1 \stackrel{not}{=} h$, $i = \overline{1,4}$.

1. Obţinerea diferenţelor finite la stânga

x	$f(x)$	$\nabla^1 f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$
1	2	–	–	–	–
2	5	$5-2=3$	–	–	–
3	10	$10-5=5$	$5-3=2$	–	–
4	17	$17-10=7$	$7-5=2$	$2-2=0$	–
5	26	$26-17=9$	$9-7=2$	$2-2=0$	$0-0=0$

Şirul diferenţelor finite la stânga este şirul rezultatelor de pe ultima linie, începând cu valorile funcţiei, adică:

$$[26, 9, 2, 0, 0].$$

2. Obţinerea polinomului de interpolare

$$\begin{aligned}
P(x) =& 26 + \frac{9}{1}(x-5) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x-5)(x-4) + \frac{0}{3! \cdot 1^3}(x-5)(x-4)(x-3) + \\
&+ \frac{0}{4! \cdot 1^4}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2) = \\
=& 26 + 9x - 45 + x^2 - 9x + 20 = \\
=& x^2 + 1.
\end{aligned}$$

4.2 Polinomul de interpolare Lagrange

4.2.1 Breviar teoretic

Fie o funcţie tabelată, dată prin lista ordonată a variabilelor $[x_0 = min, x_1, ..., x_m = max]$, şi lista valorilor sale $[f_0, f_1, ..., f_m]$.

Polinomul de interpolare Lagrange care aproximează funcţia f este

$$(L_m f)(x) = \sum_{i=0}^{m} l_i(x) \cdot f_i \tag{4.14}$$

unde

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_m)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_m)}\ ,\ i = \overline{0, m} \tag{4.15}$$

se numesc polinoame de interpolare Lagrange fundamentale.

4.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 4.2.1. Să se găsească polinomul de interpolare Lagrange pentru funcţia

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	5	10	17	26

Rezolvare

Polinoamele de interpolare Lagrange fundamentale sunt:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$$
$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$$
$$l_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

Astfel, polinomul de interpolare Lagrange este:

$$(L_4 f)(x) = 2l_0(x) + 5l_1(x) + 10l_2(x) + 17l_4(x) + 26l_5(x)$$

ceea ce, după efectuarea calculelor, devine

$$(L_4 f)(x) = 1 + x^2.$$

4.3 Interpolare spline

4.3.1 Breviar teoretic

Fie o funcţie tabelată, dată prin lista ordonată a variabilelor, $[x_1 = min, x_2, ..., x_n = max]$, şi lista valorilor sale, $[f_1, f_2, ..., f_n]$.

Deoarece interpolarea polinomială globală pe tot intervalul $[x_1, x_n]$ (de exemplu, polinoamele de interpolare Newton şi Lagrange) nu converge întotdeauna, apare ideea de interpolare polinomială pe porţiuni (interpolare spline), la care pe fiecare subdiviziune a intervalului $[x_0, x_n]$ definim un alt polinom de interpolare.

Funcţia spline polinomială de ordinul întâi are expresia

$$S(x) = S_i(x) = s_{i,0} + s_{i,1}(x - x_i),\ x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{4.16}$$

unde coeficienţii s_{ik} se determină din condiţiile:

$$\begin{aligned} &S(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}; \\ \\ &S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i),\ i = \overline{1, n-2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Funcţia spline polinomială de ordinul al doilea are expresia

$$S(x) = S_i(x) = s_{i,0} + s_{i,1}(x - x_i) + s_{i,2}(x - x_i)^2,\ x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{4.18}$$

unde coeficienţii s_{ik} se determină din condiţiile:

$$\begin{aligned} &S(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}; \\ &S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i),\ i = \overline{1, n-1}; \\ &S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i),\ i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Deoarece avem $3n$ coeficienţi şi $3n - 1$ condiţii, pentru a determina în mod unic funcţia spline polinomială de ordinul al doilea mai avem nevoie de o condiţie suplimentară. Această condiţie suplimentară se referă la prima derivată, şi are următoarea seminficaţie:

unul din capetele funcţiei spline de ordinul al doilea trebuie să fie punct de extrem local. De regulă, se alege

$$S_0{}'(x_0) = 0. \tag{4.20}$$

Pentru diferite condiţii suplimentare, se obţin diferite funcţii spline.

Funcţia spline polinomială cubică (de ordinul al treilea) are expresia

$$S(x) = S_i(x) = s_{i,0} + s_{i,1}(x - x_i) + s_{i,2}(x - x_i)^2 + s_{i,3}(x - x_i)^3,\ x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{4.21}$$

unde coeficienţii s_{ik} se determină din condiţiile:

$$\begin{aligned}
&S(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n};\\
&S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i),\ i = \overline{1,n-1};\\
&S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i),\ i = \overline{1,n-1};\\
&S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i),\ i = \overline{1,n-1}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Deoarece avem $4n$ coeficienţi şi $4n-2$ condiţii, pentru determinarea în mod unic a funcţiei spline polinomiale cubice este nevoie de două condiţii suplimentare. Aceste condiţii suplimentare pot fi

- libere (sau naturale):
$$S_1''(x_0) = S_{n-1}''(x_{n-1}) = 0 \tag{4.23}$$
caz în care vorbim de o funcţie spline cubică naturală;

- "clamped":
$$S_1'(x_0) = y_0',\ S_{n-1}'(x_{n-1}) = y_{n-1}'. \tag{4.24}$$

4.3.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 4.3.1. Să se găsească funcţiile spline de interpolare de ordinul întâi, doi şi trei pentru următorul set de date (funcţia sinus):

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	-1	0

Rezolvare

Avem 5 puncte, deci $n = 4$ intervale.

A. Funcţia spline de ordinul întâi

Funcţia căutată va avea expresia:

$$S(x) = \begin{cases} s_{10} + s_{11}(x-0) & , x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ s_{20} + s_{21}(x-\frac{\pi}{2}) & , x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ s_{30} + s_{31}(x-\pi) & , x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ s_{40} + s_{41}(x-\frac{3\pi}{2}) & , x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

Notăm:

$$\begin{cases} S_1 = s_{10} + s_{11}(x-0) \\ S_2 = s_{20} + s_{21}(x-\frac{\pi}{2}) \\ S_3 = s_{30} + s_{31}(x-\pi) \\ S_4 = s_{40} + s_{41}(x-\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

Condiţiile care se pun sunt următoarele:

- funcţia trece prin puncte

$S_1(0) = 0 \qquad \Rightarrow s_{10} = 0$

$S_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \Rightarrow s_{20} = 1$

• funcţia trece prin puncte

$S_1(0) = 0 \qquad \Rightarrow s_{10} = 0$

$S_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \Rightarrow s_{20} = 1$

$S_3(\pi) = 0 \qquad \Rightarrow s_{30} = 0$

$S_4(\frac{3\pi}{2}) = -1 \qquad \Rightarrow s_{40} = -1$

$S_4(2\pi) = 0 \qquad \Rightarrow s_{41} = \frac{2}{\pi}$

• funcţia este continuă

$S_1(\frac{\pi}{2}) = S_2(\frac{\pi}{2}) \qquad \Rightarrow s_{11} = \frac{2}{\pi}$

$S_2(\pi) = S_3(\pi) \qquad \Rightarrow s_{21} = -\frac{2}{\pi}$

$S_3(\frac{3\pi}{2}) = S_4(\frac{3\pi}{2}) \qquad \Rightarrow s_{31} = -\frac{2}{\pi}$

Cu acestea, după efectuarea calculelor, funcţia căutată devine:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & , x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & , x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & , x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ \frac{2}{\pi}x - 4 & , x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

^

B. Funcţia spline de ordinul al doilea

Funcţia căutată va avea expresia:

$$S(x) = \begin{cases} s_{10} + s_{11}(x-0) + s_{12}(x-0)^2 & , x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ s_{20} + s_{21}(x-\frac{\pi}{2}) + s_{22}(x-\frac{\pi}{2})^2 & , x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ s_{30} + s_{31}(x-\pi) + s_{32}(x-\pi)^2 & , x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ s_{40} + s_{41}(x-\frac{3\pi}{2}) + s_{42}(x-\frac{3\pi}{2})^2 & , x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

Notăm:

$$\begin{cases} S_1 = s_{10} + s_{11}(x-0) + s_{12}(x-0)^2 \\ S_2 = s_{20} + s_{21}(x-\frac{\pi}{2}) + s_{22}(x-\frac{\pi}{2})^2 \\ S_3 = s_{30} + s_{31}(x-\pi) + s_{32}(x-\pi)^2 \\ S_4 = s_{40} + s_{41}(x-\frac{3\pi}{2}) + s_{42}(x-\frac{3\pi}{2})^2 \end{cases}$$

Condiţiile care se pun sunt următoarele:

- funcţia trece prin puncte

  $S_1(0) = 0 \qquad \Rightarrow s_{10} = 0$

  $S_2(\dfrac{\pi}{2}) = 1 \qquad \Rightarrow s_{20} = 1$

  $S_3(\pi) = 0 \qquad \Rightarrow s_{30} = 0$

  $S_4(\dfrac{3\pi}{2}) = -1 \qquad \Rightarrow s_{40} = -1$

  $S_4(2\pi) = 0$

- funcţia este continuă

  $S_1(\dfrac{\pi}{2}) = S_2(\dfrac{\pi}{2})$

  $S_2(\pi) = S_3(\pi)$

  $S_3(\dfrac{3\pi}{2}) = S_4(\dfrac{3\pi}{2})$

- derivata este continuă

  $S_1'(\dfrac{\pi}{2}) = S_2'(\dfrac{\pi}{2})$

  $S_2'(\pi) = S_3'(\pi)$

  $S_3'(\dfrac{3\pi}{2}) = S_4'(\dfrac{3\pi}{2})$

- condiţie suplimentară

  $S_1'(0) = 0 \qquad \Rightarrow s_{11} = 0$

Înlocuind valorile cunoscute în celelalte ecuaţii, obţinem următorul sistem liniar

$$\begin{cases} -1 + s_{41}\frac{\pi}{2} + s_{42}(\frac{\pi}{2})^2 = 0 \\ s_{21}\frac{\pi}{2} + s_{22}(\frac{\pi}{2})^2 = -1 \\ s_{31}\frac{\pi}{2} + s_{32}(\frac{\pi}{2})^2 = -1 \\ 2s_{12}\frac{\pi}{2} - s_{21} = 0 \\ s_{12}(\frac{\pi}{2})^2 = 1 \\ s_{21} + 2s_{22}\frac{\pi}{2} - s_{31} = 0 \\ s_{31} + 2s_{32}\frac{\pi}{2} - s_{41} = 0 \end{cases}$$

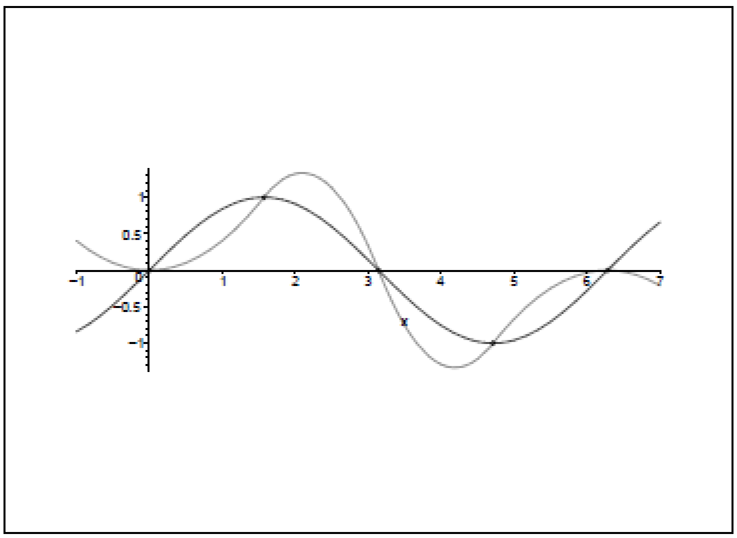
cu soluţia

$$s_{12}=\frac{4}{\pi^2}\ ,\ s_{22}=-\frac{12}{\pi^2}\ s_{32}=\frac{12}{\pi^2}\ ,\ s_{42}=-\frac{4}{\pi^2}\ ,\ s_{21}=\frac{4}{\pi}\ ,\ s_{31}=-\frac{8}{\pi}\ ,\ s_{41}=\frac{4}{\pi}.$$

În acest fel, am determinat funcţia spline polinomială de ordinul al doilea care aproximează funcţia sinus pe intervalul $[0,2\pi]$:

$$S(x)=\begin{cases} \frac{4}{\pi^2}x^2 & ,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ -\frac{12}{\pi^2}x^2+\frac{16}{\pi}x-4 & ,\ x\in[\frac{\pi}{2},\pi] \\ \frac{12}{\pi^2}x^2-\frac{32}{\pi}x+20 & ,\ x\in[\pi,\frac{3\pi}{2}] \\ -\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{16}{\pi}x-16 & ,\ x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]. \end{cases}$$

În figura următoare am reprezentat graficul funcţiei spline S în raport cu funcţia iniţială ($\sin x$):



C. Funcţia spline cubică

Funcţia căutată va avea expresia:

$$S(x)=\begin{cases} s_{10}+s_{11}(x-0)+s_{12}(x-0)^2+s_{13}(x-0)^3 & ,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ s_{20}+s_{21}(x-\frac{\pi}{2})+s_{22}(x-\frac{\pi}{2})^2+s_{23}(x-\frac{\pi}{2})^3 & ,\ x\in[\frac{\pi}{2},\pi] \\ s_{30}+s_{31}(x-\pi)+s_{32}(x-\pi)^2+s_{33}(x-\pi)^3 & ,\ x\in[\pi,\frac{3\pi}{2}] \\ s_{40}+s_{41}(x-\frac{3\pi}{2})+s_{42}(x-\frac{3\pi}{2})^2+s_{43}(x-\frac{3\pi}{2})^3 & ,\ x\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]. \end{cases}$$

Notăm:

$$S(x)=\begin{cases} S_1=s_{10}+s_{11}(x-0)+s_{12}(x-0)^2+s_{13}(x-0)^3 \\ S_2=s_{20}+s_{21}(x-\frac{\pi}{2})+s_{22}(x-\frac{\pi}{2})^2+s_{23}(x-\frac{\pi}{2})^3 \\ S_3=s_{30}+s_{31}(x-\pi)+s_{32}(x-\pi)^2+s_{33}(x-\pi)^3 \\ S_4=s_{40}+s_{41}(x-\frac{3\pi}{2})+s_{42}(x-\frac{3\pi}{2})^2+s_{43}(x-\frac{3\pi}{2})^3 \end{cases}$$

Condiţiile care se pun sunt următoarele:

- funcţia trece prin puncte
  $S_1(0) = 0$
  $S_2(\frac{\pi}{2}) = 1$
  $S_3(\pi) = 0$
  $S_4(\frac{3\pi}{2}) = -1$
  $S_4(2\pi) = 0$
- funcţia este continuă
  $S_1(\frac{\pi}{2}) = S_2(\frac{\pi}{2})$
  $S_2(\pi) = S_3(\pi)$
  $S_3(\frac{3\pi}{2}) = S_4(\frac{3\pi}{2})$
- derivata este continuă
  $S_1{}'(\frac{\pi}{2}) = S_2{}'(\frac{\pi}{2})$
  $S_2{}'(\pi) = S_3{}'(\pi)$
  $S_3{}'(\frac{3\pi}{2}) = S_4{}'(\frac{3\pi}{2})$
- derivata a doua este continuă
  $S_1{}''(\frac{\pi}{2}) = S_2{}''(\frac{\pi}{2})$
  $S_2{}''(\pi) = S_3{}''(\pi)$
  $S_3{}''(\frac{3\pi}{2}) = S_4{}''(\frac{3\pi}{2})$
- condiţii suplimentare
  $S_1{}''(0) = 0$
  $S_4{}''(2\pi) = 0$

Soluţia acestui sistem va fi:

$$s_{10} = 0 \qquad s_{11} = \frac{3}{\pi} \qquad s_{12} = 0 \qquad s_{13} = \frac{4}{\pi^3}$$
$$s_{20} = 1 \qquad s_{21} = 0 \qquad s_{22} = -\frac{6}{\pi^2} \qquad s_{23} = \frac{4}{\pi^3}$$

$$s_{30} = 0 \qquad s_{31} = -\frac{3}{\pi} \qquad s_{32} = 0 \qquad s_{13} = \frac{4}{\pi^3}$$
$$s_{40} = -1 \qquad s_{41} = 0 \qquad s_{42} = \frac{6}{\pi^2} \qquad s_{13} = -\frac{4}{\pi^3}$$

de unde, după efectuarea simplificărilor, rezultă că expresia funcţiei spline cubice naturale care interpolează setul de date iniţial este:

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{x(-3\pi^2 + 4x^2)}{\pi^3} & , x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \dfrac{(-\pi^3 - 12\pi x^2 + 9x\pi^2 + 4x^3)}{\pi^3} & , x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \dfrac{(x-\pi)(\pi^2 + 4x^2 - 8x\pi)}{\pi^3} & , x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \\ -\dfrac{(-26\pi^3 - 24\pi x^2 + 45x\pi^2 + 4x^3)}{\pi^3} & , x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

4.4 Polinoame Bernstein

4.4.1 Breviar teoretic

Polinomul Bernstein de grad m de aproximare a funcţiei f pe intervalul $[0,1]$ este dat de relaţia:

$$(B_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{m-k} \cdot f\left(\frac{k}{m}\right),\ x \in [0,1]. \tag{4.25}$$

Cu ajutorul polinoamelor Bernstein se poate construi curba Bezier asociată punctelor $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$. Aceasta este dată prin ecuaţiile parametrice:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}\, x_i, \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}\, y_i\ ,\ t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.4.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 4.4.1. Găsiţi curba Bezier determinată de punctele $P_1(0,0)$, $P_2(1,2)$, $P_3(2,1)$, $P_4(3,2)$, $P_5(2,4)$.

Rezolvare

Ecuaţiile parametrice ale curbei Bezier sunt date de:

$$\begin{aligned} x(t) = &\sum_{i=0}^{5} C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}\, x_i = C_4^0 t^0 (1-t)^4 \cdot 0 + C_4^1 t^1 (1-t)^3 \cdot 1 + \\ &+ C_4^2 t^2 (1-t)^2 \cdot 2 + C_4^3 t^3 (1-t)^1 \cdot 3 + C_4^4 t^4 (1-t)^0 \cdot 2 = \\ =&4t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 + 12t^3(1-t) + 2t^4 \\ y(t) = &\sum_{i=0}^{5} C_n^i \cdot t^i (1-t)^{n-i}\, x_i = C_4^0 t^0 (1-t)^4 \cdot 0 + C_4^1 t^1 (1-t)^3 \cdot 2 + \\ &+ C_4^2 t^2 (1-t)^2 \cdot 1 + C_4^3 t^3 (1-t)^1 \cdot 2 + C_4^4 t^4 (1-t)^0 \cdot 4 = \\ =&8t(1-t)^3 + 6t^2(1-t)^2 + 8t^3(1-t) + 4t^4 \end{aligned}$$

5.2 Aproximarea derivatei prin derivata unei funcţii de interpolare

5.2.1 Breviar teoretic

În cazul în care expresia analitică a funcţiei f nu este cunoscută (funcţia f este dată tabelat), derivata funcţiei se mai poate obţine prin derivarea unui polinom de interpolare (Newton sau Lagrange). Derivata acestui polinom de interpolare se poate obţine fie formal, fie folosind diferenţe finite (vezi paragraful anterior).

5.2.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 5.2.1. Se dă funcţia tabelată

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	-1	0	1

a) folosind un polinom de interpolare, să se găseasca funcţia f precum şi derivata acesteia

b) folosind un polinom de interpolare, să se găsească derivata întâi a funcţiei f în punctul $x_0 = 2.5$.

Rezolvare

Cu ajutorul polinomului de interpolare Lagrange, obţinem o valoare aproximativă pentru funcţia f:

$$f(z) = -\frac{2}{3}z^4 + \frac{17}{2}z^3 - \frac{112}{3}z^2 + \frac{129}{2}z - 34.$$

Derivata sa formală este:

$$f'(z) = -\frac{8}{3}z^3 + \frac{51}{2}z^2 - \frac{224}{3}z + \frac{129}{2},$$

iar valoarea derivatei în punctul $x_0 = 2.5$ este -4.45833340.

Această valoare se poate obţine şi dacă folosim derivata cu diferenţe finite la dreapta a funcţiei f, de exemplu cu o eroare de 0.01:

$$f'(2.5) = \frac{f(2.5 + 0.01) - f(2.5)}{0.01} = -4.443980000.$$

7.8 Metoda colocaţiei şi metoda celor mai mici pătrate

7.8.1 Breviar teoretic

Se consideră problema

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y + r(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{7.35}$$

cu condiţiile la limită mixte,

$$\begin{cases} \gamma_1 \cdot y(a) + \gamma_2 \cdot y'(a) = \alpha \\ \gamma_3 \cdot y(b) + \gamma_4 \cdot y'(b) = \beta \end{cases} \tag{7.36}$$

Căutăm o soluţie a ecuaţiei (7.35) de forma

$$Y_N(x) = \Phi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \Phi_i(x) \tag{7.37}$$

unde $\{\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ liniar independente, care verifică:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \cdot \Phi_0(a) + \gamma_2 \cdot \Phi_0'(a) = \alpha \quad \text{şi} \quad \gamma_3 \cdot \Phi_0(b) + \gamma_4 \cdot \Phi_0'(b) = \beta \\ &\gamma_1 \cdot \Phi_i(a) + \gamma_2 \cdot \Phi_i'(a) = 0 \quad \text{şi} \quad \gamma_3 \cdot \Phi_i(b) + \gamma_4 \cdot \Phi_i'(b) = 0, \; i = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Metoda colocaţiei presupune găsirea coeficienţilor c_i din sistemul de N ecuaţii cu N necunoscute

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} c_i [\Phi_i''(x_k) + p(x_k) \cdot \Phi_i'(x_k) + q(x_k) \cdot \Phi_i(x_k)] = \\ &= f(x_k) - \Phi_0''(x_k) - p(x_k) \cdot \Phi_0'(x_k) - q(x_k) \cdot \Phi_0(x_k), \; k = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{7.39}$$

Metoda celor mai mici pătrate presupune găsirea coeficienţilor c_i din sistemul de N ecuaţii cu N necunoscute

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} c_j \int_a^b [\Phi_j''(x) + p(x) \cdot \Phi_j'(x) + q(x) \cdot \Phi_j(x)] \cdot \\ &\quad \cdot [\Phi_i''(x) + p(x) \cdot \Phi_i'(x) q(x) \cdot \Phi_i(x)] dx = \\ &= -\int_a^b [\Phi_0''(x) + p(x) \cdot \Phi_0'(x) + q(x) \cdot \Phi_0(x) - f(x)] \cdot \\ &\quad \cdot [\Phi_i''(x) + p(x) \cdot \Phi_i'(x) q(x) \cdot \Phi_i(x)] dx. \end{aligned} \tag{7.40}$$

7.8.2 Probleme rezolvate

Exercițiul 7.8.1. Să se găsească soluția problemei

$$\begin{cases} y'' + y' = x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

folosind:

a. metoda colocației, cu $N = 3$

b. metoda celor mai mici pătrate, cu $N = 3$

Indicație: se consideră $\Phi_0(x) = 0$ și $\Phi_i(x) = \sin i\pi x$, $i = \overline{1,3}$.

Rezolvare

Se observă că funcțiile $\Phi_0(x) = 0$ și $\Phi_i(x) = \sin i\pi x$, $i = \overline{1,3}$ sunt funcții de clasă $\mathcal{C}^2$, liniar independente, și verifică condițiile (7.38). De asemenea, avem:

$$p(x) = 1 \quad q(x) = 1 \quad f(x) = x.$$

și $x_i = 0 + \frac{i}{4}$, $i = \overline{1,3}$.

A. Rezolvare folosind metoda colocației

Soluția problemei este de forma:

$$y_3(x) = \Phi_0(x) + c_1\,\Phi_1(x) + c_2\,\Phi_2(x) + c_3\,\Phi_3(x).$$

Înlocuind în sistemul (7.39), obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\pi^2}{\sqrt{2}}c_1 + (1-4\pi^2)c_2 + \dfrac{1-9\pi^2}{\sqrt{2}}c_3 = \dfrac{1}{4} \\[2ex] (1-\pi^2)c_1 - (1-9\pi^2)c_3 = \dfrac{2}{4} \\[2ex] \dfrac{1-\pi^2}{\sqrt{2}}c_1 - (1-4\pi^2)c_2 + \dfrac{1-9\pi^2}{\sqrt{2}}c_3 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

a cărui soluție este:

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{4(1-\pi^2)} \quad c_2 = -\frac{1}{4(1-4\pi^2)} \quad c_3 = \frac{\sqrt{2}-1}{4(1-9\pi^2)}$$

De aici rezultă că soluția aproximativă a problemei este:

$$y_3(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{4(1-\pi^2)}\sin\pi x - \frac{1}{4(1-4\pi^2)}\sin 2\pi x + \frac{\sqrt{2}-1}{4(1-9\pi^2)}\sin 3\pi x.$$

Soluția exactă a problemei date este

$$y(x) = x - \frac{\sin x}{\sin 1}$$

Reprezentăm în continuare pe același sistem de coordonate, soluția exactă a problemei inițiale (cu linie îngroșată) și soluția obținută folosind metoda colocației:

B. Rezolvare folosind metoda celor mai mici pătrate

Notăm

$$f_j(x) = \Phi_j''(x) + p(x)\cdot\Phi_j'(x) + q(x)\cdot\Phi_j(x)\,,\ j=\overline{1,3}$$

Cu această notaţie, sistemul (7.40) devine:

$$\begin{cases} c_1\int_0^1 f_1(x)\cdot f_1(x) + c_2\int_0^1 f_2(x)\cdot f_1(x) + c_3\int_0^1 f_3(x)\cdot f_1(x) = \int_0^1 x\cdot f_1(x) \\ c_1\int_0^1 f_1(x)\cdot f_2(x) + c_2\int_0^1 f_2(x)\cdot f_2(x) + c_3\int_0^1 f_3(x)\cdot f_2(x) = \int_0^1 x\cdot f_2(x) \\ c_1\int_0^1 f_1(x)\cdot f_3(x) + c_2\int_0^1 f_2(x)\cdot f_3(x) + c_3\int_0^1 f_3(x)\cdot f_3(x) = \int_0^1 x\cdot f_3(x) \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este:

$$c_1 = \frac{2}{\pi(1-\pi^2)}\quad c_2 = -\frac{1}{\pi(1-4\pi^2)}\quad c_3 = -\frac{2}{3\pi(1-9\pi^2)}.$$

De aici rezultă că soluţia aproximativă a problemei, obţinută cu metoda celor mai mici pătrate, este:

$$y_3(x) = \frac{2}{\pi(1-\pi^2)}\sin\pi x - \frac{1}{\pi(1-4\pi^2)}\sin 2\pi x - \frac{2}{3\pi(1-9\pi^2)}\sin 3\pi x.$$

Reprezentăm în continuare pe acelaşi sistem de coordonate, soluţia exactă a problemei iniţiale (cu linie îngroşată) şi soluţia obţinută folosind metoda celor mai mici pătrate: