UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE POSTGRADOS

TÉSIS:

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LA SUPERSOLUBILIDAD EN GRUPOS FINITOS

Tésis presentada por Geovanny Peña Rueda para obtener el título de Magister en Ciencias Matemáticas

---

Director:
M.Sc. Jorge Robinson Evilla
Codirector:
Dr. Ismael Gutierrez García

Dedicatoria

A mi familia

Agradecimientos

Me gustaría agradecer al personal y postgraduados de la Universidad del Atlántico y la Universidad del Norte por proporcionar un excelente ambiente para la investigación. En particular, agradezco a mi supervisor, Jorge Robinson, su ayuda y aliento durante el desarrollo del proyecto. También estoy agradecido al doctor Ismael Gutierrez, de la Universidad del Norte, que me ayudó en la implementación del GAP y fortaleció la conceptualización del trabajo.

Agradezco a mis profesores de secundaria, quienes originalmente estimularon mi interés en las matemáticas.

Me gustaría agradecer a mi familia y amigos por apoyarme a lo largo de los años, en especial a mi esposa, Katia Arrieta por su apoyo y amor incondicional.

Índice general

Lista de Símbolos

Símbolo	**Significado**
$=$	Es igual a.
$\neq$	No es igual a.
$\simeq$	Es isomorfo a.
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros.
$A \subseteq B$	A es subconjunto de B.
$A \leq B$	A es subgrupo de B.
C_n	El grupo cíclico de orden n.
S_n	El grupo simétrico de n letras.
A_n	El grupo alternante de n letras.
V	El grupo de cuatro de Klein.
$G = \langle X \rangle$	El conjunto X genera al grupo G.
$A \triangleleft B$	A es subgrupo normal de B.
$A \longrightarrow B$	A se mapea en B.
A/B	El grupo cociente (o factor) A sobre B.
$H \times K$	El producto directo de H y K
$H]K$	El producto semi-directo de H por K.
$\|G\|$	El orden del grupo G.
$\|a\|$	El orden de un elemento $a \in G$.
$(G : H)$	El índice de H en G.
$N_G(H)$	El normalizador de H en G.
$C_G(H)$	El centralizador de H en G.
$\mathrm{Aut}X$	El grupo de automorfismos del grupo X.
ΦG	El subgrupo de Frattini de G.
$\eta_1 G$	El subgrupo de ajuste de G.
$H \hookrightarrow G$	H puede estar incrustado en G.
$Z(G)$	El centro del grupo G.

Resumen

En este proyecto de Trabajo de Grado, requisito final de egreso en el programa de Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Atlántico, se introducirá la definición de grupo supersoluble y su relación con conceptos como la solubilidad y la nilpotencia. Además, se analizarán series supersolubles y se presentan algunas formas de éstas que son comunes a todos los grupos supersolubles.

Un resultado importante en este trabajo es un teorema de conjugación de Philip Hall sobre π-subgrupos de Hall en grupos finitos. Esto nos da una caracterización de supersolubilidad para grupos finitos.

Se utilizará el sistema informático GAP (Groups, Algorithms and Programming), el cual está diseñado para situacones que involucre teoría de grupos. A través de este programa se construirán series supersolubles y se analizarán sus caraterísticas, dando soporte a toda la teoría.

Abstract

In this Project of Degree Work, final graduation requirement in the program of Master of Science in Mathematics of the Universidad del Atlántico, the definition of supersoluble group and its relation with concepts such as solubility and nilpotency will be introduced. In addition, supersoluble series will be analyzed and some forms of these are presented that are common to all supersoluble groups.

An important result in this work is a conjugation theorem by Philip Hall on Hall π-subgroups in finite groups. This gives us a characterization of supersolubility for finite groups.

The GAP (Groups, Algorithms and Programming) computer system will be used, which is designed for situations involving group theory. Through this software, supersoluble series will be built and their characteristics analyzed, giving support to the whole theory.

Introducción

Un grupo supersoluble es un grupo con una serie normal que tiene factores cíclicos. La clase de grupos supersolubles se ubica entre las clases de grupos nilpotentes generados finitamente y grupos policíclicos. Los grupos supersolubles serán vistos, en cierto sentido, más como grupos nilpotentes que como grupos policíclicos. Los grupos finitos supersolubles tienen algunas caracterizaciones muy interesantes en términos de su estructura de subgrupos, como veremos más adelante.

Necesitaremos algunos resultados preliminares. En particular, enumeramos algunos resultados con respecto a los grupos cíclicos. Como las series supersolubles estan formadas por factores cíclicos, estos resultados deberían ser esenciales en el desarrollo de la teoría. Los resultados que involucran grupos de automorfismos de grupos cíclicos son importantes debido a la estructura normal de un grupo supersoluble.

Se mencionarán algunos resultados de la teoría de grupos, dentro de los que se destacan:

- La Ley Modular (o la Regla de Dedekind) ([12] 7.3).
- El Teorema de Lagrange ([14] I.2.j).
- Los teoremas de isomorfismo y de correspondencia ([3] §1).
- El Teorema de Sylow ([12] 5.9).
- El Teorema de Schur-Zassenhaus ([10] 9.1.2 o [12] 10.30).

En 1969, Homer Bechtel en el artículo "A Generalization of Hall Complementation in Finite Supersolvable Groups", publicado en "Transactions of the American Mathematical Society"[2], caracteriza los grupos supersolubles finitos G que satisfacen una de siguientes propiedades:

- G se divide sobre cada subgrupo normal $N \nleq \Phi(G)$, donde $\Phi(G)$ es el subgrupo de Frattini de G.

- Para cada subgrupo normal $N \nleq \Phi(G)$, cada producto reducido de G sobre N es un producto semidirecto. ($G = NB$ G es un producto reducido sobre un subgrupo N normal por un subgrupo B si y sólo si B no contiene un subgrupo B^* adecuado de manera que $G = NB^*$).

En 2004, Piroska Csörgö y Marcel Herzog en el artículo "On Supersolvable Groups and the Nilpotator", publicado en la revista "Communications in Algebra", volúmen 32 [4], definen que un grupo finito G se llama un $\mathcal{T}$-grupo si cada subgrupo subnormal de G es normal en G y un subgrupo K de G se llama un $\mathscr{H}$-subgrupo de G si $N_G(K) \cap K^g \leq K$ para todo $g \in G$. Usando la noción de $\mathscr{H}$-subgrupos, presentan algunas nuevas condiciones para la supersolubilidad y caracterizan a los grupos supersolubles, que son o bien $\mathcal{T}$-grupos o A-grupos (es decir, todos sus subgrupos de Sylow son abelianos). En este artículo, demuestran que si todos los subgrupos cíclicos de G de orden primo o de orden 4 son $\mathscr{H}$-subgrupos de G, entonces G es supersoluble con una estructura bien definida. Además, demuestran que un A-grupo G es supersoluble si y sólo si sus subgrupos de Sylow son productos de $\mathscr{H}$-subgrupos cíclicos de G.

En 2006, Wenbin Guo, K. P. Shum y Alexander Skiba, en el artículo "Criterions of supersolubility of products of supersoluble groups"para la revista "Publicationes Mathematicae"de la Universidad de Debrecen [6], definen que, dados H y T subgrupos de un grupo G, llaman H condicionalmente permutable (o en brevedad, c-permutable) con T en G si existe un elemento $x \in G$ tal que $HT^x = T^xH$. Si H es c-permutable con T en $\langle H, T\rangle$, entonces se dice que H es completamente c-permutable con T en G. Al usar los conceptos anteriores, los autores dan algunos nuevos criterios para la supersolubilidad de un grupo finito $G = AB$, donde A y B son ambos grupos supersolubles. En particular, se demuestra que un grupo finito G es supersoluble si y sólo si $G = AB$, donde ambos A, B son subgrupos nilpotentes del grupo G y B son completamente c-permutables en G con cada término en algunas series principales de A. Además, se muestran algunas aplicaciones de estos nuevos criterios.

En 2008, Xi Liu, Baojun Li y Xiaolan Yi en el artículo "Some criteria for supersolubility in products of finite groups"de la revista "Frontiers of Mathematics in China"[8], utilizan el concepto de subgrupos permutables para dar dos nuevos criterios de supersolubilidad del producto $G = AB$ de grupos finitos supersolubles A y B. En todo momento, G denotará un grupo. El símbolo 1 se usará para denotar la identidad de un grupo y el subgrupo trivial.

Llamaremos una *serie subnormal* de G a una sucesión finita de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

tal que $G_i \lhd G_{i+1}$ para todo $0 \leq i < n$. El número n es la *longitud* de la serie, los grupos $G_0, G_1, ..., G_n$ son los *términos* de la serie y los grupos cocientes $G_1/G_0, G_2/G_1, ..., G_n/G_{n-1}$

son los *factores* de la serie. Una *serie normal* de G es una serie en la cual todos los términos son subgrupos normales de G.

Además, escribiremos S_n y A_n para los grupos simétrico y alternante de n letras, respectivamente. V denotará el grupo $\langle(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\rangle$, el cual es la copia del 4-grupo de Klein en A_4.

Si $\mathcal{P}$ es una propiedad de grupos, llamamos una serie *poli*-$\mathcal{P}$ a aquella cuyos factores tienen la propiedad $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{Q}$ es otra propiedad de grupos, decimos que G es $\mathcal{P}$-*por*-$\mathcal{Q}$ si existe un $N \lhd G$ tal que N tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y G/N tiene la propiedad $\mathcal{Q}$.

Consideremos el grupo S_3, vamos a mencionarlo en este trabajo más adelante. Este grupo consta de $3! = 6$ elementos. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Lístense las permutaciones de A y a cada una asígnese una letra griega con un subíndice. Sea

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En la tabla 2 se puede observar que este grupo no es abeliano.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

Tabla 2: Tabla de Multiplicar de S_3

Capítulo 1

Preeliminares

En este capítulo se presentará la teoría básica del álgebra abstracta necesaria para la comprensión del contenido a desarrollar más adelante. Dicha exposición no pretende ser una guía de estudios del álgebra, más bien servirá de ayuda para recordar resultados básicos de teoría de grupos.

1.1. Subgrupos Normales y Teoremas del Isomorfismo

1.1.1. Subgrupos normales

Definición 1.1. Sea G un grupo y $H \leq$. Se dice que H es un *subgrupo normal* (o *invariante*) de G si $g^{-1}Hg = H$ para todas las $g \in G$. Lo notaremos $H \triangleleft G$.

Teorema 1.1. *Todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal.*

Demostración. Sea H un subgrupo de un grupo abeliano G. Entonces para todas las $g \in G$ y $h \in H$ tenemos

$$g^{-1}hg = g^{-1}gh = eh = h$$

por lo tanto $H \triangleleft G$. □

Definición 1.2. Un grupo G es llamado *simple* si no contiene un subgrupo normal propio no trivial.

Definición 1.3. Si G es un grupo y $H \leq G$, el *normalizador* de H en G está definido por

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$$

1.1.2. Grupos factores

Definición 1.4. Sean X e Y dos subconjuntos no vacíos de un grupo G. Entonces su producto

$$XY = \{xy : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

define una operación asociativa en la familia de todos los subconjuntos no vacíos de G

Definición 1.5. Si N es un subgrupo normal de un grupo G, el grupo de las clases laterales izquierdas de N bajo la operación inducida es el *grupo factor* de G *módulo* N y se denota por G/N. Es decir,

$$G/N = \{gN : g \in G\}$$

Las cases laterales son las *clases residuales* de G *módulo* N.

Ejemplo 1.1. Determine cómo se ven las clases laterales izquierdas de $3\mathbb{Z}$ como subgrupo de $\mathbb{Z}$ bajo la suma.

Solución. La notación es aditiva. Desde luego, $3\mathbb{Z} = 0+3\mathbb{Z}$ es una clase lateral izquierda. Otra también es $1+3\mathbb{Z}$. Notemos que $1+3\mathbb{Z}$ está formado por todos los enteros que dejan residuo 1 al dividirlos entre 3 en el sentido del algoritmo de la división (lema 1.1). Además, $2+3\mathbb{Z}$ consta de todos los enteros que dejan residuo 2 al dividirlos entre 3. Puesto que el algoritmo de la división para $\mathbb{Z}$ muestra que el residuo de cualquier entero dividido entre 3 es un entero r, donde $0 \leq r < 3$, las úncas posibilidades son $0, 1$ y 2. Así que éstas son todas las clases laterales izquierdas.

Con referencia a lo anterior, vemos que como $\mathbb{Z}$ es abeliano, $3\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal y así $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es el grupo factor de las tres clases residuales

$$0+3\mathbb{Z} \qquad , \qquad 1+3\mathbb{Z} \qquad , \qquad 2+3\mathbb{Z}$$

Definición 1.6. Un *subgrupo normal maximal de un grupo* G es un subgrupo normal M que no es igual a G y tal que ningún subgrupo normal propio N de G contiene propiamente a M.

Teorema 1.2. *M es un subgrupo normal maximal de G si y sólo si G/M es simple.*

Demostración. [5] 13.4, página 135. □

Definición 1.7. *Si $H \leq G$, entonces el núcleo de H en G es*

$$H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$$

que es el subgrupo normal más grande de G contenido en H.

1.1.3. El Teorema de Lagrange

Definición 1.8. Si $H \leq G$, entonces el *índice* de H en G, denotado $(G : H)$ es el número de clases laterales de S en G.

Definición 1.9. *Si G es un grupo, entonces el orden de G, denotado por $|G|$, es el número de elementos de G.*

Teorema 1.3. *Sea H subgrupo de G de índice 2, entonces $H \triangleleft G$.*

Demostración. Como H es de índice 2, el conjunto de clases laterales derechas

$$G/H = \{Ha : a \in G\}$$

consta de dos elementos de la forma $\{H, Ha\}$ para algún $a \notin H$ (con ambos conjuntos disjuntos).

Como $a \notin H$, el conjunto de clases laterales izquierdas es necesariamente $\{H, aH\}$. Además, como $Ha \cup H = G = aH \cup H$ tenemos que $Ha = aH$. Por consiguiente, $H \triangleleft G$. □

Teorema 1.4 (Lagrange)**.** *Sea G un grupo de orden finito n y H un subgrupo de G. El orden de H divide al orden de G y $(G : H) = |G|/|H|$*

Demostración. [13] 2.11, página 26. □

Teorema 1.5. *Sean H y K subgrupos de un grupo G tal que $K \leq H \leq G$ y supongamos que $(H : K)$ y $(G : H)$ son ambos finitos. Entonces $(G : K)$ es finito y $(G : K) = (G : H)(H : K)$.*

Demostración. Del teorema de Lagrange,

$$(G : H)(H : K) = \frac{|G|}{|H|}\frac{|H|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|}$$

□

1.1.4. Teoremas del isomorfismo y Teorema de Correspondencia

Teorema 1.6 (Primer teorema del isomorfismo)**.** *Sea $\phi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo con kernel K y sea $\gamma_K : G \longrightarrow G/K$ el homomorfismo canónico. Entonces, existe un isomorfismo único $\psi : G/K \longrightarrow G\phi$ tal que $x\phi = x(\gamma_K\psi)$ para cada $x \in G$.*

Demostración. [5] 15.1, página 146. □

Teorema 1.7 (Segundo teorema del isomorfismo)**.** *Sea H un subgrupo de G y sea N un subgrupo normal de G. Entonces, $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$.*

Demostración. [5] 15.2, página 147. □

Teorema 1.8 (Tercer teorema del isomorfismo)**.** *Sean H y K subgrupos normales de un grupo G con $K \leq H$. Entonces, $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.*

Demostración. [5] 15.3, página 148. □

Teorema 1.9 (Teorema de Correspondencia)**.** *Sea N un subgrupo normal de un grupo G. Existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de G/N y los subgrupos de G que contienen a N. Además, $H \lhd G$ si y sólo si $H/N \lhd G/N$.*

Demostración. Sea H^* un subgrupo de G/N. Definimos la aplicación β del conjunto de las partes de G/N en el conjunto de las parte de G según

$$\beta(H^*) = \{g \in G : gN \in H^*\}$$

$\beta(H^*)$ es un subgrupo de G ya que es no vacío ($N \subseteq \beta(H^*)$, pues, para todo $n \in N$ se tiene $nN \in N \in H^*$ por ser $H^* \leq G/N$)

$$\begin{aligned} a, b \in \beta(H^*) &\Longrightarrow aN, b^{-1}B \in H^* \\ &\Longrightarrow ab^{-1}N \in H^* \\ &\Longrightarrow ab^{-1} \in \beta(H^*) \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $N \leq H \leq G$. Definimos la aplicación α del conjunto de las partes de G/N en el conjunto de las partes de G según

$$\alpha(H) = \{hN \in G/N : h \in H\} = H/N$$

$\alpha(H)$ es un subgrupo de G/N, ya que es no vacío ($e \in \alpha(H)$) y

$$\begin{aligned} h_1N, h_2N \in \alpha(H) &\Longrightarrow h_1, h_2 \in H \\ &\Longrightarrow h_1h_2^{-1} \in H \\ &\Longrightarrow h_1h_2^{-1}N \in \alpha(H) \end{aligned}$$

Veamos ahora que tanto α como β son biyecciones, inversas la una de la otra. En efecto, sea $N \leq H \leq G$. Entonces,

$$\beta \circ \alpha(H) = \beta(H/N) = \{g \in G : gN \in H/N\} = H$$

Recíprocamente, si $H^* \leq G/N$, entonces

$$\alpha \circ \beta(H^*) = \alpha(\{g \in G : gN \in H^*\}) = \{gN \in H^*\} = H^*$$

Si $H \triangleleft G$, entonces $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$, de donde

$$(gN)(hN)(gN)^{-1} = (ghg^{-1})N \in H/N, \forall gN \in G/N$$

demostrando la normalidad de H/N en G/N. Recíprocamente, si $H/N \triangleleft G/N$, entonces $(gN)(hN)(gN)^{-1} = (ghg^{-1})N \in H/N$ para todo $gN \in G/N$ implica que $ghg^{-1} \in H$ para todos $h \in H$ y $g \in G$, de modo que $H \triangleleft G$. □

1.2. Grupos Cíclicos

1.2.1. Generador de un grupo

Definición 1.10. Se dice que un subconjunto X del conjunto subyacente de un grupo G *genera* G si la intersección de todos los subgrupos de G que contienen X coincide con G, o para decirlo de otra manera, el único subgrupo de G que contiene X es G mismo. Esta intersección se denota por $\langle X \rangle$.

Teorema 1.10. *Supongamos que X es un subconjunto no vacío del conjunto subyacente del grupo G. El conjunto X genera G si y solo si el conjunto de todos los productos de potencias (positivo y negativo) de elementos de X es igual a G.*

Demostración. [11] 2.17, página 26. □

Observación 1.1. Decimos $\langle X \rangle = \langle e \rangle$, si X es vacío. Para $g \in G$ escribimos $\langle g \rangle$ para el conjunto de potencias de $g \in G$, es decir $\langle g \rangle = \{g^t : t \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.11. *Si $g \in G$ entonces $\langle g \rangle \leq G$.*

Demostración. [11] 2.18, página 26. □

Ejemplo 1.2. (a) Sea $G = \mathbb{Z}$ y $g = 7$, entonces $\langle 7 \rangle$ es el subgrupo propio de $\mathbb{Z}$ que consiste en el conjunto de enteros divisibles por 7.

(b) Sea $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ y $g = 3$. En este caso, el subgrupo $\langle 3 \rangle$ es el mismo G porque las potencias de 3 módulo 7 generan el grupo completo.

1.2.2. Propiedades de los grupos cíclicos

Definición 1.11. Sea $g \in G$

(I) El subgrupo $\langle g \rangle$ dado en el Teorema 1.11 se le llama *cíclico*.

(II) El *orden* de g, denotado por $|g|$, se define $|g| = |\langle g \rangle|$; es decir, $|g|$ es igual al orden de el subgrupo cíclico generado por g en G.

(III) Un elemento de orden 2 se le llama una *involución*.

(IV) El *exponente*, si existe, de un grupo G es el mínimo común múltiplo de los órdenes de todos los elementos de G; es decir, el menor entero positivo m con la propiedad: $g^m = e$ para todo $g \in G$.

Corolario 1.1. *Si un grupo G tiene exponente 2, entonces es abeliano.*

Demostración. Suponga que $a, b \in G$, entonces $ab \in G$ y $e = (ab)^2 = abab$. Multiplicando a la izquierda por a y a la derecha por b, obtenemos

$$ab = aeb = a(abab)b = a^2bab^2 = ba$$

ya que tanto a como b tienen orden 2. Esto se cumple para todos $a, b \in G$. □

Definición 1.12. Dado un grupo G y un elemento $a \in G$, si

$$G = \{a^n : \ n \in \mathbb{Z}\},$$

entonces a es un *generador* de G y el grupo $G = \langle a \rangle$ es *cíclico*.

Ejemplo 1.3. $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$, así el grupo $2\mathbb{Z}$ con la adición es un grupo cíclico y 2 es un generador.

Teorema 1.12. *Todo grupo cíclico es abeliano.*

Demostración. Sea G un grupo cíclico y sea a un generador de G tal que

$$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Si g_1 y g_2 son dos elementos cualesquiera de G, existen enteros r y s tales que $g_1 = a^r$ y $g_2 = a^s$. Entonces,

$$g_1g_2 = a^ra^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^sa^r = g_2g_1,$$

de modo que G es abeliano. □

Lema 1.1 (Algoritmo de la división para $\mathbb{Z}$)**.** *Si m es un entero positivo y n es cualquier entero, entonces existen enteros únicos q y r tales que*

$$n = mq + r \qquad y \qquad 0 \leq r < m.$$

Demostración. [5] 6.1, página 58. □

Teorema 1.13. *Un subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo cíclico y H es un subgrupo de G. Sea g el generador de G, $G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Denotamos por k el menor entero positivo tal que $g^k \in H$ (si no existiera ese entero, entonces $H = \{e\}$, el cuál es un grupo cíclico). Mostraremos que $H = \langle g^k \rangle$. Tomemos algún $h \in H$. Entonces $h = g^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $n = kq + r$, donde q es el cociente y r es el residuo de n por k $(0 \leq r < k)$. Se sigue que $g^r = g^{n-kq} = g^n g^{-kq} = h(g^k)^{-q} \in H$. Por la elección de k, tenemos que $r = 0$. Por lo tanto $h = (g^k)^{-q} \in \langle g^k \rangle$ □

Teorema 1.14. *Si G es un grupo cíclico y $H \leq G$, entonces G/H también es cíclico.*

Demostración. Escribamos $G = \langle g \rangle$ con g un generador de G. Sea $H \leq G$ cualquiera. Mostraremos que la clase lateral gH (del generador g de G) genera al cociente G/H. En efecto, si αH es cualquier elemento de G/H, entonces $\alpha \in G = \langle g \rangle$ y así existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n = \alpha$, por lo que $\alpha H = g^n H = (gH)^n$ y por lo tanto gH genera a G/H. □

Teorema 1.15. *Todo grupo de orden primo es simple y cíclico.*

Demostración. [11] 2.34, página 33. □

Teorema 1.16. *El orden de un elemento de un grupo finito divide al orden del grupo.*

Demostración. Recordemos por la definición 1.11 que el orden de un elemento es igual al orden del subgrupo cíclico generado por el elemento, por lo tanto este teorema resulta directamente del teorema 1.4. □

Ejemplo 1.4. Consideremos el grupo $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ bajo la adición módulo 12. La siguiente tabla muestra los órdenes de cada uno de sus elementos.

Elemento	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
Orden	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

Tabla 1.1: Órdenes de los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$

Se puede verificar, por ejemplo, que $|[3]| = 4$ ya que $4[3] = [12] = [0]$ y, $1[3] = [3] \neq [0]$, $2[3] = [6] \neq [0]$ y $3[3] = [9] \neq [0]$. Notemos que cualquier elemento cuyo orden sea 12 es un generador del grupo, es decir, es posible que haya más de un generador de un grupo cíclico.

1.3. Series de Grupos

1.3.1. Series normales y subnormales

Definición 1.13. Una serie subnormal de un grupo G es una sucesión finita $G_0, G_1, ..., G_n$ de subgrupos de G tal que $G_i \triangleleft G_{i+1}$, con $G_0 = 1$ y $G_n = G$.

Definición 1.14. Una serie normal de G es una sucesión finita $G_0, G_1, ..., G_n$ de subgrupos normales de G tal que $G_i \leq G_{i+1}$ y $G_0 = 1$ y $G_n = G$.

Ejemplo 1.5. *Dos ejemplos de series normales de $\mathbb{Z}$ bajo la suma son*

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

y

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

Definición 1.15. Una serie subnormal $\{K_j\}$ es un refinamiento de una serie subnormal $\{H_i\}$ de un grupo G si $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$, esto es, si cada $\{H_i\}$ es una de las $\{K_j\}$.

Definición 1.16. Una serie normal $\{K_j\}$ es un refinamiento de una serie normal $\{H_i\}$ de un grupo G si $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$, esto es, si cada $\{H_i\}$ es una de las $\{K_j\}$.

Ejemplo 1.6. la serie

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 24\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

es un refinamiento de la serie

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < \mathbb{Z}.$$

Se han insertado dos nuevos términos, $4\mathbb{Z}$ y $8\mathbb{Z}$ □

Observación 1.2. Los grupos factores H_{i+1}/H_i son de interés en el estudio de la estructura de G. Tanto en el caso de las series normales como en las subnormales están definidos estos grupos factores, ya que en ambos casos, H_i es normal en H_{i+1}.

Definición 1.17. Dos series subnormales (normales) $\{H_i\}$ y $\{K_j\}$ del mismo grupo G son isomorfas si existe una correspondencia uno a uno entre las colecciones de grupos factores $\{H_{i+1}/H_i\}$ y $\{K_{j+1}/K_j\}$ tal que los grupos factores correspondientes son isomorfos.

Es claro que dos series subnormales (normales) isomorfas deben tener el mismo número de grupos.

Ejemplo 1.7. Las dos series de $\mathbb{Z}_{15}$

$$\{0\} < \langle 5\rangle < \mathbb{Z}_{15} \qquad \text{y} \qquad \{0\} < \langle 3\rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

son isomorfas. Tanto $\mathbb{Z}_{15}/\langle 5\rangle$ como $\langle 3\rangle/\{0\}$ son isomorfos a $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_{15}/\langle 3\rangle$ es isomorfo a $\langle 5\rangle/\{0\}$ o a $\mathbb{Z}_3$ □

1.3.2. El teorema de Jordan-Hölder

Teorema 1.17 (Schreier)**.** *Cualquier dos series de G tienen refinamientos cuyas longitudes son iguales y cuyos factores son isomorfos en pares. Dos series subnormales (normales) de un grupo G tienen refinamientos isomorfos.*

Demostración. [12] 7.7. □

Ejemplo 1.8. Tratemos de encontrar refinamientos isomorfos de las series

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

Considérese sus respectivos refinamientos

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \{0\} < 72\mathbb{Z} < 18\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

En ambos, los refinamientos tienen cuatro grupos factores isomorfos a $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_9$ y $72\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}$. El orden en el cual se presentan los grupos factores es, desde luego diferente.

Definición 1.18. Una serie subnormal $\{H_i\}$ de un grupo G es una *serie de composición* si todos los grupos factores H_{i+1}/H_i son simples. Una serie normal $\{H_i\}$ de G es una *serie principal* si todos los grupos factores H_{i+1}/H_i son simples.

Observación 1.3. Para grupos abelianos, coinciden los conceptos de series principales y de composición.

Observación 1.4. Como toda serie normal es subnormal, toda serie principal es una serie de composición para cualquier grupo abeliano o no abeliano.

Ejemplo 1.9. $\mathbb{Z}$ no tiene serie de composición (ni principal).

$$\{0\} = H_0 < h_1 < ... < H_{n-1} < H_n = \mathbb{Z}$$

es una serie normal, H_1 debe ser de la forma $r\mathbb{Z}$ para alguna $r \in \mathbb{Z}^+$. Pero entonces H_1/H_0 es isomorfo a $r\mathbb{Z}$ el cual es cíclico infinito con varios subgrupos normales propios n triviales, por ejemplo $2r\mathbb{Z}$. Así, $\mathbb{Z}$ no tiene series de composición (ni principales).

Ejemplo 1.10. La serie

$$1 < A_n < S_n$$

para $n \geq 5$ es una serie de composición (y también una serie principal) de S_n, pues $A_n/1$ es isomorfo a A_n el cual es simple para $n \geq 5$ y S_n/A_n es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, que es simple.

Ejemplo 1.11. Las dos series dadas en el ejemplo 1.7 son series de composición (y también serie principales) de $\mathbb{Z}_{15}$. Son isomorfas, como se mostró en dicho ejemplo.

Teorema 1.18 (Jordan-Hölder)**.** *Cualquiera dos series de composición (principales) de un grupo G son isomorfas.*

Demostración. Sean $\{H_i\}$ y $\{K_j\}$ dos series de composición (principales) de G. Por el teorema de Schreier 1.17, tienen refinamientos isomorfos. Pero, como los grupos factores son ya simples, el teorema 1.2 muestra que ninguna de esas series tiene más refinamientos. Así, $\{H_i\}$ y $\{K_j\}$ ya deben ser isomorfos. $\square$

Teorema 1.19. *Si G tiene una serie de composición (principal) y si N es un subgrupo normal propio de G, entonces existe una serie de composición (principal) que contiene a N.*

Demostración. [5] 14.3, página 143. □

Ejemplo 1.12. Una serie de composición (y principal) de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ que contiene a $\langle(0,1)\rangle$ es

$$\{(0,0)\} < \langle(0,3)\rangle < \langle(0,1)\rangle < \langle 2\rangle \times \langle 1\rangle < \langle 1\rangle \times \langle 1\rangle = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \ \square$$

1.4. Grupos Nilpotentes

1.4.1. El centro y la serie central

Definición 1.19. El centro de un grupo G es el conjunto de todas las $a \in G$ tales que $ax = xa$ para todas las $x \in G$, esto es, el conjunto de elementos de G que conmutan con todo elemento de G. De manera formal, dado un grupo G, definimos el centro del grupo $Z(G)$ como sigue:

$$Z(G) := \{a \in G : \forall x \in G,\ ax = xa\} \ .$$

Ejemplo 1.13. Observando la tabla de multiplicar de S_3 (Tabla 2), el centro es trivial, en este caso, $\{\rho_0\}$.

Teorema 1.20. *El centro de un grupo es un subgrupo normal del grupo.*

Demostración. $Z(G)$ es un grupo: El elemento neutro e del grupo conmuta con todos los elementos de G y luego $e \in Z(G)$. Si $a, b \in Z(G)$, $h \in G$ entonces

$$(ab)h = a(bh) = a(hb) = (ah)b = (ha)b = h(ab)$$

es decir que $ab \in Z(G)$. $Z(G)$ es invariante por la operación de tomar inversas. Si $a \in Z(G)$ y $g \in G$ entonces $ag = ga$. Luego multiplicando por a^{-1} la derecha y por la izquierda tenemos que $a^{-1}g = ga^{-1}$ para todo $g \in G$. Luego $a^{-1} \in Z(G)$. $Z(G)$ es abeliano, pues todos sus elementos conmutan entre sí. $Z(G)$ es un subgrupo normal de G pues si $z \in Z(G)$, entonces

$$gzg^{-1} = gg^{-1}z = ez = z \in Z(G).$$

□

Observación 1.5. Es fácil encontrar el centro de un grupo finito G si se tiene la tabla de grupo. Es claro que un elemento a estará en el centro de G si y sólo si, en la tabla, los elementos del renglón cuyo extremo izquierdo es a están dados en el mismo orden que los elementos de la columna debajo de a.

Definición 1.20. Si $H \leq G$, entonces el *centralizador* de H en G, denotado por $C_G(H)$ es el conjunto de todos los elementos de G que conmutan con cada elemento de H. Es decir,

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in H\}$$

Definición 1.21. Nosotros usamos la notación $[G, H]$ para el grupo generado por todos los conmutadores de la forma $[g, h]$ donde $g \in G$ y $h \in H$. Una serie normal para G

$$\langle 1 \rangle = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = G,$$

se le llama una *serie central* para G si, para cada i en el rango $0 \leq i \leq n-1$, tenemos

$$H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i),$$

o equivalentemente,

$$[H_{i+1}, G] \leq H_i.$$

Además, G es *nilpotente* si tiene una serie central.

Definición 1.22. Definimos los subgrupos característicos $\gamma_i(G)$ de G por inducción:

$$\gamma_1(G) = G; \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

Observación 1.6. Observe que $\gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G' = G^{(1)}$. Es fácil verificar que $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$.

Definición 1.23. Una *serie central descendente* de G es la serie

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq ...$$

Definición 1.24. Los *centros superiores* $\zeta^i(G)$ son los subgrupos característicos de G definidos por inducción:

$$\zeta^0(G) = 1; \quad \zeta^{i+1}(G)/\zeta^i(G) = Z(G/\zeta^i(G));$$

esto es, si $v_i : G \to G/\zeta^i(G)$ es un mapeo natural, entonces $\zeta^{i+1}(G)$ es la imagen inversa del centro.

Claro está que $\zeta^1(G) = Z(G)$

Definición 1.25. La *serie central ascendente* de G es

$$1 = \zeta^0(G) \leq \zeta^1(G) \leq \zeta^2(G) \leq ...$$

Ejemplo 1.14. Partiendo de que el centro de S_3 es el grupo trivial, la serie central ascendente es

$$\{\rho_0\} < \{\rho_0\} < \{\rho_0\} < ...$$

Ejemplo 1.15. Considérese el grupo diédrico D_4 de permutaciones, correspondientes a los modos en que puedan superponerse dos copias de un cuadrado con vértices $1, 2, 3$ y 4. D_4 será el **grupo de simetrías del cuadrado**. Intiuitivamente usemos ρ_i para *rotaciones*, μ_i para *imágenes reflejadas* en bisectrices perpendiculares a los lados y δ_i para los reflejos en las *diagonales*. En este caso hay ocho permutaciones. Sea

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que la tabla para D_4, dada en la tabla 1.2 es correcta. Nótese que D_4 no es abeliano.

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

Tabla 1.2: Tabla de Multiplicar de D_4

El centro del grupo D_4 de simetrías del cuadrado del es $\{\rho_0, \rho_2\}$. Como $G/\{\rho_0, \rho_2\}$ es de orden 4 y, por tanto, abeliano, su centro es todo $G/\{\rho_0, \rho_2\}$. Así, la serie central ascendente de D_4 es

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0, \rho_2\} \leq D_4 \leq D_4 \leq D_4 \leq \ldots \square$$

Teorema 1.21. *Si G es un grupo, entonces existe un entero c con $\zeta^c(G) = G$ si y sólo si $\gamma_{i+1}(G) = 1$. Además, en este caso, $\gamma_{i+1}(G) \leq \zeta^{c-i}(G)$, para todo i.*

Demostración. [13] 5.31, página 113. □

Teorema 1.22 (Schur)**.** *Si G es un grupo con $G/Z(G)$ finito, entonces G' también es finito.*

Demostración. [13] 5.32, página 114. □

Definición 1.26. Un grupo G es *nilpotente* si existe un entero c tal que $\gamma_{c+1}(G) = 1$; lo menos tal que c es llamada la *clase* del grupo nilpotente G

Definición 1.27. ΦG denota el *subgrupo de Frattini* de G, el cual es la intersección de todos los subgrupos maximales de G, o G si tales subgrupos no existen. Equivalentemente, ΦG es el conjunto de todos los no-generadores de G.

Definición 1.28. $\eta_1 G$ denota el *subgrupo de ajuste* de G, el cual es el subgrupo generado por todos los subgrupos normales nilpotentes de G.

Teorema 1.23 (Teorema de Ajuste)**.** *Si $M, N \triangleleft G$ y son nilpotentes, entonces así es MN. Se sigue que $\eta_1 G$ es nilpotente para el grupo finito G.*

Demostración. [11] 10.22, página 221. □

1.5. Grupos Solubles

1.5.1. Definición

Definición 1.29. Un grupo G es *soluble* si tiene una serie de composición $\{H_i\}$ tal que todos los grupos factores H_{i+1}/H_i son abelianos.

Observación 1.7. Por el teorema de Jordan-Hölder, vemos que para los grupos solubles, toda serie de composición $\{H_i\}$ debe tener grupos factores abelianos H_{i+1}/H_i.

Ejemplo 1.16. El grupo S_3 es soluble, pues la serie de composición

$$1 < A_3 < S_3$$

tiene grupos factores isomorfos a $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_2$ que son abelianos.

Ejemplo 1.17. A_4 es soluble. Basta ver que $1 < V < A_4$ es una serie cuyos factores son abelianos, donde $V = \{(\ ), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

Ejemplo 1.18. El grupo S_5 no es soluble pues, como A_5 es simple, la serie

$$1 < A_5 < S_5$$

es una serie de composición y $A_5/1$, que es isomorfo a A_5, no es abeliano, pues

$$(1\ 2)(3\ 4)(3\ 4\ 5) \neq (3\ 4\ 5)(1\ 2)(3\ 4)$$

Se puede mostrar que este grupo A_5 de orden 60 es el menor grupo que no es soluble. El hecho está íntimamente relacionado con el hecho de que una ecuación polinomial de grado 5 no es, en general, soluble por radicales, pero una ecuación polinomial de grado ≤ 4 lo es

1.5.2. Características de los grupos solubles

Teorema 1.24. *Todo subgrupo H de un grupo soluble G es soluble*

Demostración. [13] 5.15, página 102. □

Teorema 1.25. *Sea G un grupo soluble y $N \triangleleft G$ entonces G/N es soluble.*

Demostración. [13] 5.16, página 102. □

Teorema 1.26. *Sea G un grupo S y N subgrupos, $N \triangleleft G$. Entonces, si N y G/N son solubles, G lo es.*

Demostración. [13] 5.17, página 103. □

Corolario 1.2. *Si H y K son grupos solubles, entonces $H \times K$ es soluble.*

Demostración. Si $G = H \times K$, entonces $H \triangleleft G$ y $G/H \simeq K$ □

Lema 1.2. *Un grupo simple y soluble es cíclico de orden primo*

Demostración. Si es simple y soluble, debe ser abeliano; no puede poseer subgrupos propios y es cíclico; finalmente su orden debe ser primo. □

Teorema 1.27. *Dado un grupo finito G, son equivalentes*

i) *G es soluble*

ii) *Cualquier factor de composición de G es cíclico de orden primo.*

iii) *G posee una serie de composición con factores cíclicos de orden primo.*

Demostración. Si G es soluble y G_i/G_{i+1} es un factor de composición, G_i es soluble por ser subgrupo de G y G_i/G_{i+1} por ser cociente de G_i; ahora G_i/G_{i+1} es simple y soluble, luego es cíclico de orden primo. □

1.5.3. La serie derivada

Definición 1.30. Dados $g_1, g_2, ...g_n \in G$ se dice Conmutador de g_1 y g_2 al elemento $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$. Recursivamente definimos

$$[g_1, ..., g_n] = [[g_1, ..., g_{n-1}], g_n], \text{ para } n > 2$$

Definición 1.31. Si $H_1, H_2, ..., H_n \leq G$, entonces escribimos $[H_1, H_2]$ al subgrupo

$$\langle [h_1, h_2] : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \rangle$$

Recursivamente definimos

$$[H_1, ...H_n] = [H_1, ..., H_{n-1}], H_n], \text{ para } n > 2$$

Definición 1.32. El *Subgrupo derivado* de G se denota $G' = [G, G]$ y se define

$$G' = \langle [g_1, g_2] : g_1, g_2 \in G \rangle$$

Teorema 1.28. *Dado un grupo G, se tiene*

(I) *G' es normal en G.*

(II) *G/N es abeliano si y solo si $G' \leq N$. En particular, G/G' es abeliano.*

(III) *$G' = \bigcap \{N \lhd G : G/N \text{es} \quad \text{abeliano}\}$.*

Demostración. (i) Es consecuencia de que el inverso del conmutador $[x, y]$ es el conmutador $[y, x]$ y de que un conmutador $[x, y]$ se transforma en otro conmutador por conjugación:

$$[x, y]^z = z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zx^{-1}z^{-1})(zy^{-1}z^{-1}) = [x^z, y^z]$$

(ii) G/N es abeliano si y sólo si $xNyN = yNxN$ $\forall x, y \in G$ si y sólo si $xyN = yxN$ $\forall x, y \in G$ si y sólo si $x^{-1}y^{-1}N = y^{-1}x^{-1}N$ $\forall x, y \in G$ si y sólo si $xyx^{-1}y^{-1}N = N$ $\forall x, y \in G$ si y sólo si $[x, y]N = N$ si y sólo si $[x, y] \in N$ si y sólo si $G' \leq N$.

(iii) Es consecuencia directa de (i) y (ii). □

Definición 1.33. Dado un grupo G se dice derivada a $G^{(i)}$ dada por

$$G^{(0)} = G \quad G^{(1)} = G' \quad G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$$

Teorema 1.29. *G es soluble si y sólo si la serie derivada acaba en* 1.

Demostración. Si G es soluble, existe una serie normal G_i de factores abelianos. Veamos, por inducción sobre k que $G^{(k)} \leq G_k$. En efecto, $G^{(0)} = G \leq G_0$; si $G^{(k)} \leq G_k$

$$G^{(k)}/G^{(k+1)} = G^{(k)}/(G^{(k)})'$$

son abelianos. □

1.6. Algunos resultados y teoremas importantes

Teorema 1.30. *(a) C_n tiene un único subgrupo de orden d, para cada divisor d de n. $\mathbb{Z}$ tiene un subgrupo único de cada índice finito y estos son todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, todos los subgrupos de un grupo cíclico son característicos.*

(b) A_4 no tiene subgrupo de orden 6 y V es su único subgrupo normal no trivial apropiado. A_4 es policíclico (es decir, soluble).

Demostración. (b) Los elementos de A_4 son la identidad, 8 ciclos de longitud 3 y 3 permutaciones que se pueden expresar como producto de dos transposiciones disjuntas. Suponiendo que existe un subgrupo H de orden 6 de A_4 su índice es $(A_4 : H) = 12/6 = 2$, por tanto el subgrupo es necesariamente normal. Además como H tiene orden 6 entonces al menos debe de tener un 3-ciclo. Llamamos a i, j, k, h elementos cualesquiera distintos de A_4 y sea $\sigma = (j, i, k)$ un 3-ciclo que pertenece a . Entonces $\sigma^{-1} = (k, i, j) = (i, j, k) \in H$. Llamamos $\tau = (i, j)(k, h)$, que como tiene paridad par es un elemento de A_4. También $\tau^{-1} = \tau$. Aplicamos ahora que H es subgrupo normal y se tiene que $\tau^{-1}\sigma\tau = \tau\sigma\tau \in H$ y operando se tiene que

$$\tau\sigma\tau = (i, j)(k, h)(j, i, k)(i, j)(k, h) = (i, j, h) \in H.$$

Como $(i, j, k) \in H$ y $(i, j, h) \in H$ y ambos generan A_4 entonces $H = A_4$, lo cual es una contradicción, así pues no puede existir un subgrupo de orden 6 en A_4.

□

Teorema 1.31 (El Teorema Normalizador/Centralizador)**.** *Suponga que $H \leq G$*

(I) $C_G(H) \triangleleft N_G(H)$.

(II) $N_G(H)/C_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $AutH$.

Al grupo factor $N_G(H)/C_G(H)$ se le dice el automatizador de H en G.

Demostración. [11] 5.26, página 106. □

Teorema 1.32. *Suponga que V es un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ sobre $\mathbb{F}_p$, el campo de p elementos, y que G es un grupo de automorfismos lineales que actúa de forma irreducible en V. Si G es abeliano de exponente que divide a $p-1$ entonces V tiene dimensión 1.*

Demostración. Dado que $g \in G$, $g^{p-1} = 1$. Así g satisface la ecuación $X^{p-1} - 1 = 0$, que se divide sobre $\mathbb{F}_p$. Así g tiene un valor propio no cero $\lambda \in \mathbb{F}_p$. Existe un λ-vector propio no cero v de g y el λ-espacio propio de g, $W = \{u : ug = \lambda u\}$ es no trivial. Como G es abeliano, $uGg = ugG = \lambda uG$, para cada $u \in W$. Así W es un subespacio G-invariante de V. La irreductibilidad de la G-acción da $W = V$. Por lo tanto $ug = \lambda u$ para todo $u \in V$ y entonces la G-acción induce la multiplicación escalar en V. Por lo tanto Fv es un subespacio G-invariante de V. Por lo tanto $Fv = V$ y entonces V tiene dimensión 1. $\square$

Teorema 1.33. *(a) El grupo de automorfismos de un grupo cíclico es un grupo abeliano finito. Además, $|Aut\mathbb{Z}| = 2$ y para un primo p, $|AutC_p| = p - 1$.*

(b) Sea N un subgrupo normal mínimo de un grupo finito G. Suponga que N es un p-grupo abeliano elemental. Entonces $|N| = p$ si y sólo si $G/C_G(N)$ es abeliano de exponente que divide $p - 1$.

Demostración. (a) Ver [16] §5.7.

(b) Si $|N| = p$ entonces por 1.31, $G/C_G(N)$ se puede incrustar en $AutN$, el cual tiene orden $p - 1$. Así $G/C_G(N)$ es abeliano de exponente que divide $p - 1$. Inversamente, sea $|N| = p^r$. Como N es un p-grupo abeliano elemental, se puede considerar como el espacio vectorial de la dimensión r sobre $\mathbb{F}_p$. Como N es un subgrupo normal mínimo, el grupo $G/C_G(N)$, considerado como transformaciones lineales de N, actúa irreductiblemente en N. Por 1.32, N es cíclico de orden p.

$\square$

Definición 1.34. Decimos que G satisface máx si satisface las siguientes condiciones equivalentes:

1. Todo conjunto no vacío de subgrupos de G tiene un elemento máximo.
2. Todo subgrupo de G es finitamente generado.

Definición 1.35. Decimos que G satisface mín si cada conjunto no vacío de subgrupos de G tiene un elemento mínimo.

Teorema 1.34. *Sea $H \leq G$ y $N \triangleleft G$*

(a) Si G satisface máx *(o* mín*) entonces H satisface* máx *(o* mín*):*

(b) Si N y G/N satisface máx *(o* mín*) entonces G satisface* máx *(o* mín*).*

Demostración. (a) es claro. Para probar (b) ver [15] 7.1.3. $\square$

Teorema 1.35. *Sea G un grupo finito. Entonces:*

(a) $\Phi G \leq \eta_1 G$.

(b) Si $N \triangleleft G$ *entonces* $\Phi N \leq \Phi G$.

(c) $\eta_1(G/\Phi G) = \eta_1 G/\Phi G$.

(d) $\eta_1 G = \bigcap\{C_G(H/K) : H/K$ *es un factor principal de* G

Demostración. [9] 0.9. $\square$

Teorema 1.36. *Sea G un grupo finito soluble. Entonces:*

(a) Un subgrupo normal mínimo M de G es un p-subgrupo normal abeliano elemental para algún primo p.

(b) Suponga $\Phi G = 1$. Entonces $\eta_1 G$ es el producto directo de subgrupos normales mínimos (abelianos) de G.

(c) $C_G(\eta_1 G) \leq \eta_1 G$.

Demostración. [9] 0.10. $\square$

Capítulo 2

Supersolubilidad

2.1. Grupos Supersolubles

Definición 2.1. Una *serie supersoluble* de G es una serie normal de G con factores cíclicos. G es llamado *supersoluble* si tiene una serie supersoluble.

Ejemplo 2.1 (El grupo diédrico D_8)**.** El grupo diédrico D_8 es el grupo de todas las simetrías del cuadrado y se define de la siguiente forma:

$$D_8 = \langle x, a : \; a^4 = x^2 = e, \quad xax^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Este grupo es cíclico y tiene como elementos $\{e, a, a^2, a^3, x, ax, a^2x, a^3x\}$. Además, D_8 es isomorfo al subgrupo de S_4 dado por

$$\{(), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$$

donde $1, 2, 3, 4$ son los vértices del cuadrado y $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $x = (1\ 3)$.

En la tabla 2.1, observamos la tabla de multiplicar de D_8. Podemos notar que el centro de D_8 es el grupo cíclico $\{a^2, e\} = \langle a^2 \rangle$ y la serie central ascendente de D_8 es

$$1 \leq \langle a^2 \rangle \leq D_8$$

Esta serie es normal y sus factores son cíclicos, por lo tanto D_8 es supersoluble.

Elemento	e	a	a^2	a^3	x	ax	a^2x	a^3x
e	e	a	a^2	a^3	x	ax	a^2x	a^3x
a	a	a^2	a^3	e	ax	a^2x	a^3x	x
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2x	a^3x	x	ax
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3x	x	ax	a^2x
x	x	a^3x	a^2x	ax	e	a^3	a^2	a
ax	ax	x	a^3x	a^2x	a	e	a^3	a^2
a^2x	a^2x	ax	x	a^3x	a^2	a	e	a^3
a^3x	a^3x	a^2x	ax	x	a^3	a^2	a	e

Tabla 2.1: Tabla de Multiplicar de D_8

Usando GAP, hacemos esta descripción para el grupo D_8

```
gap> # Consideremos el grupo diédrico D8
gap> D8:=DihedralGroup(IsPermGroup, 8);
Group([ (1,2,3,4), (2,4) ])
gap> # la serie de composición de D8 es
gap> CompositionSeries(D8)
> ;
[ Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]), Group([ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,3)(2,4) ]), Group(()) ]
gap> # Listaremos los elementos de la serie
gap> A:=Subgroup(D8,[ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]);;
gap> B:=Subgroup(D8,[ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]);;
gap> C:=Subgroup(D8,[ (1,3)(2,4) ]);;
gap> # verificamos que los factores son cíclicos
gap> IsCyclic(A/B);
true
gap> IsCyclic(B/C);
true
gap> # por lo tanto la serie es supersoluble
gap> IsSupersolvableGroup(D8);
true
gap>
```

Figura 2.1: Implementación GAP en D_8

Ejemplo 2.2. Consideremos el grupo simétrico S_3. De acuerdo a la tabla 2 notamos que S_3 no abeliano. Además, observamos que S_3 no tiene elementos cuyo orden no sea igual al orden del grupo, en este caso, 6, lo cual significa, por la observación del ejemplo 1.1 que

S_3 no es cíclico. Veamos que A_3 es un subgrupo normal de S_3. En efecto, $|A_4| = 3$ y por el teorema de Lagrange 1.4

$$(S_3 : A_3) = |S_3|/|A_3| = 6/3 = 2$$

Como el índice de A_3 en S_3 es 2, por el teorema 1.3 se concluye que $A_3 \triangleleft S_3$.

Los demás subgrupos normales de S_3 son los triviales, por lo cual la serie normal de S_3 es

$$1 < A_3 < S_3$$

S_3/A_3 es cíclico. En efecto,

$$|S_3/A_3| = |S_3|/|A_3| = 6/3 = 2$$

el cual es primo y por el teorema 1.15, S_3/A_3 es cíclico. También A_3 es cíclico, por ser de orden 3 y $A_3/1$ es cíclico. Por lo tanto, la serie es supersoluble y por consiguiente, S_3 es supersoluble. Usaremos GAP para mostrar la supersolubilidad de S_3

```
     # Consideremos el grupo simétrico S3
gap> S3:=SymmetricGroup(3);
Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> # Observemos los elementos de S3
gap> Elements(S3);
[ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
gap> # El orden de S3 es
gap> Order(S3);
6
gap> # Veamos los subgrupos normales de S3
gap> NormalSubgroups(S3);
[ Sym( [ 1 .. 3 ] ), Group([ (1,2,3) ]), Group(()) ]
gap> # y la serie de composición de S3
gap> CompositionSeries(S3);
[ Group([ (2,3), (1,2,3) ]), Group([ (1,2,3) ]), Group(()) ]
gap> # Observemos los elementos de cada término de la serie
gap> A:=Subgroup(S3,[ (2,3), (1,2,3) ]);;
gap> Elements(A);
[ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
gap> # vemos que A es el mismo S3
gap> B:=Subgroup(S3,[ (1,2,3) ]);;
gap> Elements(B);
[ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> # Vemos que B es el grupo alternante A3, pues
gap> A3:=AlternatingGroup(3);;
gap> Elements(A3);
[ (), (1,2,3), (1,3,2) ]
gap> # Preguntemos si los factores de la serie son cíclicos
gap> IsCyclic(S3/A3);
true
gap> # Por lo tanto la serie es supersoluble
gap> IsSupersolvableGroup(S3);
true
gap>
```

Figura 2.2: Implementación de GAP en S_3

Trivialmente, todos los grupos cíclicos son supersolubles y todos los grupos supersolubles son policíclicos. Sin embargo no todo grupo policíclico es supersoluble; en el caso de A_4 vemos que es policíclico pero no tiene subgrupos cíclicos normales no triviales y por lo tanto no puede poseer una serie normal con factores cíclicos. Veamos con GAP

```
gap> # Consideremos el grupo alternante A4
gap> A4:=AlternatingGroup(4);
Alt( [ 1 .. 4 ] )
gap> # Veamos los elementos de A4
gap> Elements(A4);
[ (), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2),
(1,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,2), (1,4,3), (1,4)(2,3) ]
gap> # Observemos los subgrupos normales de A4
gap> NormalSubgroups(A4);
[ Alt( [ 1 .. 4 ] ), Group([ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ]), Group(()) ]
gap> A:=Subgroup(A4,[ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ]);
Group([ (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) ])
gap> IsCyclic(A);
false
gap> IsCyclic(A4/A);
true
gap> IsCyclic(A/());
gap> B:=Subgroup(A4,[()]);
Group(())
gap> IsCyclic(A/B);
false
gap> # Por tanto la serie no es supersoluble
gap> IsSupersolvableGroup(A4);
false
```

Figura 2.3: Implementación de GAP en A_4

En común con los grupos policíclicos, solubles y nilpotentes, tenemos:

2.1.1. Los grupos supersolubles son cerrados bajo subgrupos, cocientes, y productos directos

Teorema 2.1. *Suponga que $H \leq G$ y $N \triangleleft G$, donde G es un grupo supersoluble, entonces H y G/N son supersolubles.*

Demostración. Primero probaremos que H es supersoluble. Como G es supersoluble, entonces tiene una serie supersoluble, es decir, una serie normal

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

con cada G_i/G_{i-1} cíclico. Como cada $G_i \triangleleft G$, se tiene que cada $H \cap G_i \triangleleft H$ y entonces obtenemos una serie normal de H:

$$1 = H \cap G_0 \leq H \cap G_1 \leq ... \leq H \cap G_n = H.$$

Esta es una serie supersoluble de H porque tiene factores cíclicos; para

$$(H \cap G_i)/(H \cap G_{i-1}) = (H \cap G_i)/((H \cap G_i) \cap G_{i-1}) \simeq (H \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1} \leq G_i/G_{i-1}$$

el cual es cíclico. Por lo tanto H es supersoluble.

Ahora probaremos que G/N es supersoluble. Como $N \triangleleft G$, los subgrupos G_iN son normales en G y por el Teorema de Correspondencia tenemos una serie normal de G/N,

$$N/N = G_0N/N \leq G_1N/N \leq ... \leq G_nN/N = G/N.$$

Esta tiene factores cíclicos porque al usar los teoremas de isomorfismos

$$(G_iN/N)/(G_{i-1}N/N) \simeq G_iN/G_{i-1}N = G_iG_{i-1}N/G_{i-1}N \simeq G_i/G_i \cap G_{i-1}N,$$

y

$$G_i/G_i \cap G_{i-1}N \simeq (G_i/G_{i-1})/(G_i \cap G_{i-1}N/G_{i-1})$$

que es un cociente de un grupo cíclico, que por el teorema 1.14, es cíclico. Por consiguiente, G/N es supersoluble □

Observación 2.1. Si $N \triangleleft G$, y N y G/N son supersolubles, no es necesariamente cierto que G es supersoluble; es decir que una extensión de un grupo supersoluble por un grupo supersoluble no siempre es supersoluble.

Ejemplo 2.3. V es un subgrupo normal supersoluble de A_4 (consideramos la serie supersoluble $1 \leq \langle (1\ 2)(1\ 4) \rangle \leq V$, ambos de cuyos factores son isomorfos a C_2) y A_4/V es supersoluble (esto es isomorfo a C_3 pero como hemos visto, A_4 no es supersoluble.

Observación 2.2. Si $N \triangleleft G$ y G/N es supersoluble, aplicando el Teorema de Correspondencia a una serie supersoluble de G/N da una serie normal de G desde N hasta G con factoes cíclicos.

Definición 2.2. Si $N \triangleleft G$ y N tiene una serie cuyos términos son normales en G y con factores cíclicos, entonces decimos que N es *G-supersoluble*.

Teorema 2.2. *Si $N \triangleleft G$, N es G-supersoluble y G/N es supersoluble entonces G es supersoluble. En particular, un grupo cíclico-por-supersoluble es supersoluble.*

Demostración. Como G/N es supersoluble, existe una serie normal

$$1 = G_0/N \leq G_1/N \leq ... \leq G_n/N = G/N$$

donde $(G_i/N)/(G_{i-1}/N)$ es cíclico y $G_i/N \triangleleft G/N$

Por el teorema de correspondencia, los subgrupos normales de G/N corresponden a los subgrupos normales de G que contienen a N. Así cada G_i/N es únicamente determinado por algún subgrupo normal N_i que contiene a N como $G_i/N = N_i/N$. Usando el tercer teorema de isomorfismo obtenemos

$$(G_i/N)/(G_{i-1}/N) = (N_i/N)/(N_{i-1}/N) \simeq N_i/N_{i-1}$$

así, los cocientes son cíclicos de nuevo. Entonces existe una serie normal

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_n = G,$$

con N_i/N_{i-1}. Entonces G es supersoluble. □

Un grupo abeliano A generado finitamente es supersoluble. Como el grupo trivial es supersoluble, sea $A = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ y asumimos inductivamente que los grupos abelianos generados por $n-1$ generadores son supersolubles. Ahora $N = \langle a_1 \rangle \triangleleft A$ y $A/N = \langle a_2 N, ..., a_n N \rangle$. Por inducción, A/N es supersoluble. N es cíclico, así que A es supersoluble por 6.2.

Teorema 2.3. *Sea $N \triangleleft G$ y G supersoluble. Entonces N ocurre como un término en una serie supersoluble de G.*

Demostración. Por el teorema 2.1, existe una serie supersoluble de G/N y por lo tanto una serie supersoluble entre N y G (cuyos términos son normales en G). Tomemos alguna serie supersoluble de G y la intersectamos con N para obtener una serie G-supersoluble de N. Ponemos esas series juntas para obtener la requerida. □

Teorema 2.4. *(a) Un producto directo de grupos finitamente supersolubles es supersoluble.*

(b) Si $H_1, H_2, ..., H_n$ son subgrupos normales de G y los grupos $G/H_1, G/H_2, ..., G/H_n$ son supersolubles, entonces $G/\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ es supersoluble.

Demostración. (a) Usando inducción, es suficiente mostrar que si G y K son supersolubles entonces así es $G \times K$. Dadas las series supersolubles

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

y

$$1 = K_0 \leq K_1 \leq ... \leq K_m = K,$$

notamos que para todo $1 \leq i \leq n$, como $G_i \triangleleft G$,

$$G_i \times 1 = G_i \times K_0 \triangleleft G \times K.$$

Similarmente, para todo $1 \leq j \leq m$,

$$G \times K_j \triangleleft G \times K.$$

Además, al inspeccionar los grupos de factores

$$(G_i \times 1)/(G_{i-1} \times 1) \cong G_i/G_{i-1} \times 1/1 \cong G_i/G_{i-1}$$

para $1 \leq i \leq n$ y

$$(G \times K_j)/(G \times K_{j-1}) \cong G/G \times K_j/K_{j-1} \cong K_j/K_{j-1}$$

para $1 \leq j \leq m$, vemos que

$$1 = G_0 \times 1 \leq G_1 \times 1 \leq ... \leq G_n \times 1 = G \times K_0 \leq G \times K_1 \leq ... \leq G \times K_m = G \times K$$

es una serie supersoluble de $G \times K$.

(b) Considere enl homomorfismo $G \longrightarrow \times_{i=1}^{n} G/H_i,\ g \longmapsto (g_H 1, gH_2, ..., gH_n)$. Éste tiene kernel $\bigcap_{i=1}^{n} H_i \hookrightarrow \times_{i=1}^{n} G/H_i$ el cual es supersoluble por (a). El resultado sigue por 2.1 $\square$

Ejemplo 2.4. El producto directo

$$D_8 \times Z_2 = \langle a, x, y : \quad a^4 = x^2 = y^2 = e, \quad xax^{-1} = a^{-1}, ay = ya, xy = yx \rangle$$

Una implementación en GAP es la que veremos a continuación

```
gap> # Construiremos el producto directo de D8 y Z2
gap> D8:=DihedralGroup(IsPermGroup,8);
Group([ (1,2,3,4), (2,4) ])
gap> Z2:=CyclicGroup(IsPermGroup, 2);
Group([ (1,2) ])
gap> D8xZ2:=DirectProduct(D8,Z2);
Group([ (1,2,3,4), (2,4), (5,6) ])
gap> # Veamos los elementos de D8xZ2
gap> Elements(D8xZ2);
[ (), (5,6), (2,4), (2,4)(5,6), (1,2)(3,4), (1,2)(3,4)(5,6), (1,2,3,4),
(1,2,3,4)(5,6), (1,3), (1,3)(5,6), (1,3)(2,4), (1,3)(2,4)(5,6),
(1,4,3,2), (1,4,3,2)(5,6), (1,4)(2,3), (1,4)(2,3)(5,6) ]

gap> # Veamos todos los subgrupos normales de D8xZ2
gap> NormalSubgroups(D8xZ2);
[ Group([ (1,2,3,4), (2,4), (5,6) ]),
Group([ (5,6), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (5,6), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (5,6), (2,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (2,4) (5,6), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,2,3,4)(5,6), (2,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,2,3,4)(5,6), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,2,3,4)(5,6), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,4)(2,3), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,4)(2,3)(5,6), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (2,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (2,4)(5,6), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (5,6), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (5,6) ]), Group([ (1,3)(2,4)(5,6) ]),
Group([ (1,3) (2,4) ]), Group(()) ]
gap> # Para saber cuántos subgrupos normales tiene D8xZ2
gap> Length(NormalSubgroups(D8xZ2));
19
gap> # Para conocer el centro de D8xZ2
gap> C:=Center(D8xZ2);
Group([ (5,6), (1,3)(2,4) ])
gap> # La serie de composición de D8xZ2 la hallamos de la siguiente
manera
gap> CompositionSeries(D8xZ2);
[ Group([ (5,6), (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (2,4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4) ]),
Group([ (1,2,3,4), (1,3) (2,4) ]),
Group([ (1,3)(2,4) ]), Group(()) ]
gap> IsSupersolvableGroup(D8xZ2);
true
```

Figura 2.4: Implementación GAP en $D_8 \times \mathbb{Z}_2$

Teorema 2.5. *(a) Un grupo no trivial supersoluble tiene una serie supersoluble cuyos factores son de orden infinito o primo.*

(b) Un grupo supersoluble tiene un subgrupo normal cíclico de orden primo o infinito.

(c) Un grupo simple supersoluble es cíclico de orden primo.

Demostración. (a) Sea G supersoluble con una serie supersoluble

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < ... < G_n = G$$

escogiendo la serie para ser la adecuada (elegir cualquier serie supersoluble y descarta repeticiones de términos). Si G_i/G_{i-1} es cíclico de finito pero no de orden primo, usamos el siguiente método para refinar la serie a una que requerimos. Sea p un primo que divide a $|G_i/G_{i-1}|$. Como G_i/G_{i-1} es cíclico, tiene un único subgrupo cíclico característico H/G_{i-1} de orden p. Así $H/G_{i-1} \triangleleft G/G_{i-1}$ y entonces $H \triangleleft G$. $G_i/H \cong (G_i/G_{i-1})/(H/G_{i-1})$, un cociente de un grupo cíclico y por lo tanto G_i/H es cíclico.

Para resumir, hemos adicionado un término H entre G_{i-1} y G_i en nuestra serie supersoluble original con H/G_{i-1} cíclico de orden primo y G_i/H cíclico de orden finito menos que el de G_i/G_{i-1}. Por lo tanto podemos aplicar este algoritmo repetidamente para obtener la serie supersoluble deseada en un número finito de pasos.

(b) Por (a), cada grupo supersoluble tiene una serie supersoluble cuyos factores tienen infinito u orden primo. El primer término no trivial en tal serie es del tipo requerido.

(c) Sea G supersoluble y simple. Por (b), G es cíclico de orden primo o infinito. G no puede tener orden infinito porque un grupo cíclico infinito no es simple. □

Teorema 2.6. *(a) Un subgrupo normal mínimo de un grupo supersoluble es cíclico de orden primo.*

(b) Un factor principal de un grupo supersoluble es cíclico de orden primo.

(c) Un grupo supersoluble con una serie principal es un grupo finito.

(d) G es un grupo supersoluble finito si y sólo si tiene un serie principal con factores cíclicos de orden primo.

Demostración. (a) Por 2.3, si N es un subgrupo normal mínimo de G entonces N es G-supersoluble. Pero entonces N debe ser simple por minimalidad. Ahora aplicamos 2.5 (c).

(b) Un factor principal de G, un grupo supersoluble, es un subgrupo normal mínimo de algún cociente de G. Los grupos cocientes de G son supersolubles por 2.1 y por tanto, por (a), un factor principal de G tiene orden primo.

(c) Si un grupo supersoluble G tiene una serie principal entonces cada factor de esta serie es finita por (b). El orden de G es igual al producto de los órdenes de los factores de esta serie principal y así G debe ser finito.

(d) Un grupo finito tiene una serie principal y por tanto un grupo finito supersoluble tiene una serie principal con factores cíclicos de orden primo por (a). Inversamente, una serie principal con factores cíclicos es una serie normal con factores cíclicos y por lo tanto es una serie supersoluble

□

2.2. Condiciones de finitud de los grupos supersolubles

Teorema 2.7. *Un grupo supersoluble satisface* máx*.*

Demostración. Un subgrupo de un grupo cíclico es cíclico y, en particular, finitamente generado, así que todo grupo cíclico satisface *max*. Usando inducción en la longitud de una serie supersoluble y 1.34 (b), un grupo supersoluble satisface max. □

Como los grupos finitos satisfacen *max*, los grupos policíclicos-por-finito también satisfacen *max*.

Un grupo supersoluble no necesariamente satisface *min*. Un ejemplo sencillo es $\mathbb{Z}$; para el conjunto de subgrupos $\{2^n\mathbb{Z} : n = 1, 2, 3, ...\}$ no tiene elemento mínimo.

Teorema 2.8. *(a) Si un grupo supersoluble G tiene una serie de composición entonces es finito.*

(b) Si un grupo supersoluble G satisface min entonces es finito.

Demostración. (a) Dada una serie de composición, cada factor es tanto simple como supersoluble y por lo tanto por 2.5 (c) es cíclico de orden primo. Por lo tanto G debe ser finito.

(b) Como $\mathbb{Z}$ no satisface min, no puede ocurrir como un factor en alguna serie supersoluble de G por 1.34. Por lo tanto alguna serie supersoluble de G tiene factores finitos y así G debe ser finito.

Alternativamente, uno puede aplicar (a) al notar que por 2.7, G es un grupo que satisface tanto *max* como *min* y por lo tanto tiene una serie de composición.

□

Se sigue de 2.7 que los subgrupos máximos existen en grupos supersolubles no triviales. Un subgrupo de índice primo es claramente máximo. En un grupo supersoluble, lo contrario es cierto.

Teorema 2.9. *El índice de un subgrupo máximo en un grupo supersoluble es primo.*

Demostración. Sea H un subgrupo máximo de G, un grupo supersoluble. Si H es un subgrupo normal de G entonces el resultado es trivial; porque como G/H es supersoluble y simple, por 2.5(c) debe ser cíclico de orden primo. Por tanto debemos asumir que H no es normal en G y ponemos $K = H_G$. Entonces H/K es un subgrupo máximo del grupo supersoluble G/K y $(G : H) = (G/K : H/K)$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $K = 1$.

Por 2.5(b), la supersolubilidad de G asegura la existencia de un subgrupo normal A de G, donde A es cíclico infinito o cíclico de orden primo. Cada subgrupo de A es normal en G (por 1.30). Como $H_G = K = 1$, $A \cap H = 1$. Así que $H < AH$ y por maximalidad de H tenemos que $G = AH$. Si A es infinito, entonces A tiene un subgrupo no trivial apropiado B y $H < BH < AH = G$, contradiciendo la maximalidad de H. Por lo tanto A debe ser cíclico de orden primo. Entonces

$$(G : H) = (AH : H) = (A : A \cap H) = (A : 1) = |A|,$$

que es primo. □

Ejemplo 2.5. Vamos a verificar con GAP que para el grupo supersoluble D_{20}, los subgrupos maximales tienen índice primo.

```
# Consideremos el grupo diédrico D20
gap> D20:=DihedralGroup(IsPermGroup, 20);
Group([ (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), (2,10)(3,9)(4,8)(5,7) ])
gap> # Verificamos que D20 es supersoluble
gap> IsSupersolvableGroup(D20);
true
gap> # Veamos los elementos de D20
gap> Elements(D20);
[(), (2,10)(3,9)(4,8)(5,7),(1,2)(3,10)(4,9)(5,8)(6,7),
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), (1,3)(4,10)(5,9)(6,8),(1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10),
(1,4)(2,3)(5,10)(6,9)(7,8), (1,4,7,10,3,6,9,2,5,8),
(1,5)(2,4)(6,10)(7,9),(1,5,9,3,7)(2,6,10,4,8),
(1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10),
(1,7)(2,6)(3,5)(8,10), (1,7,3,9,5)(2,8,4,10,6),
(1,8)(2,7)(3,6)(4,5)(9,10), (1,8,5,2,9,6,3,10,7,4),
(1,9)(2,8)(3,7)(4,6),(1,9,7,5,3)(2,10,8,6,4),(1,10,9,8,7,6,5,4,3,2),
(1,10)(2,9)(3,8)(4,7)(5,6) ]
gap> # Observemos los subgrupos maximales de D20
gap> MaximalSubgroups(D20);
[Group([ (2,10)(3,9)(4,8)(5,7), (1,7,3,9,5)(2,8,4,10,6) ]), Group([
(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10), (1,7,3,9,5)
  (2,8,4,10,6) ]), Group([ (1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9),
(1,7,3,9,5)(2,8,4,10,6) ]), Group([ (2,10)(3,9)(4,8)
  (5,7), (1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10) ]), Group([ (1,7)(2,6)(3,5)(8,10),
(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10) ]), Group([ (1,3)
  (4,10)(5,9)(6,8), (1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10) ]), Group([
(1,9)(2,8)(3,7)(4,6), (1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10) ]),
  Group([ (1,5)(2,4)(6,10)(7,9), (1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10) ]) ]
gap> # Listaremos los subgrupos maximales de D20
gap> A:=Subgroup(D20,[(2,10)(3,9)(4,8)(5,7),(1,7,3,9,5)(2,8,4,10,6) ]);;
gap> B:=Subgroup(D20,[(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10),(1,7,3,9,5) (2,8,4,10,6)
]);;
gap> C:=Subgroup(D20,[(1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9),(1,7,3,9,5)(2,8,4,10,6)
]);;
gap> D:=Subgroup(D20,[(2,10)(3,9)(4,8)(5,7),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]);;
gap> F:=Subgroup(D20,[(1,7)(2,6)(3,5)(8,10),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]);;
gap> G:=Subgroup(D20,[(1,3)(4,10)(5,9)(6,8),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]);;
gap> H:=Subgroup(D20,[(1,9)(2,8)(3,7)(4,6),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]);;
gap> J:=Subgroup(D20,[(1,5)(2,4)(6,10)(7,9),(1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)]);;
gap> # Ahora hallaremos el índice de cada subgrupo maximal
gap> Index(D20,A);
2
gap> Index(D20,B);
2
gap> Index(D20,C);
2
gap> Index(D20,D);
5
gap> Index(D20,F);
5
gap> Index(D20,G);
5
gap> Index(D20,H);
5
gap> Index(D20,J);
5
gap> # Vemos que, el índice de cada subgrupo maximal de D20 es primo.
```

Figura 2.5: Grupo supersoluble D_{20}

Luego mostraremos que si G es un grupo finito en el cual cada subgrupo máximo tiene índice primo, entonces G es supersoluble.

Teorema 2.10. *Sea G un grupo supersoluble. Entonces:*

(a) $\eta_1 G$ es nilpotente y $G/\eta_1 G$ es un grupo abeliano finito.

(b) G es nilpotente-por-(abeliano finito). En particular, G' es nilpotente.

Demostración. Por 2.7, G satisface *max*. Por lo tanto $\eta_1 G$ es finitamente generado, decimos $\eta_1 G = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Por definición de $\eta_1 G$, cada generador x_i se encuentra en un subgrupo normal nilpotente, decimos $x_i \in M_i$, así que

$$\eta_1 G = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \leq M_1 M_2 ... M_n \leq \eta_1 G.$$

Así $\eta_1 G = M_1 M_2 ... M_n$, el producto de un número finito de subgrupos nilpotentes. Por el Teorema de Ajuste 1.23, $\eta_1 G$ es nilpotente.

Elegimos una serie supersoluble adecuada de G,

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G.$$

Sea $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(G_i/G_{i-1}), \lhd G$.

Cada grupo de automorfismo $Aut(G_i/G_{i-1})$ es abeliano finito por 1.33. Además $G/C_G(G_i/G_{i-1}) \hookrightarrow Aut(G_i/G_{i-1}$ por 1.31. $G/C \hookrightarrow \times_{i=1}^{n} G/C_G(G_i/G_{i-1})$ (véase prueba de 2.4(b)), así que $G/C \hookrightarrow \times_{i=1}^{n} Aut(G_i/G_{i-1})$. Por lo tanto G/C es un grupo abeliano finito. Ahora cada $C_G(G_i/G_{i-1}) = \{g \in G : [G_i, g] \leq G_{i-1}$. Asi,

$$G_i \cap C, C] \leq [G_i, C] \leq [G_i, C_G(G_i/G_{i-1})] \leq G_{i-1}.$$

Y

$$[G_i \cap C, C] \leq [C, C] \leq C.$$

Por consiguiente $[G_i \cap C, C] \leq G_{i-1} \cap C$, para $i = 1, ..., n$. Por lo tanto los subgrupos $G_i \cap C$ dan una serie central de C, por lo cual C es nilpotente y $C \leq \eta_1 G$.

G/C abeliano implica que $G' \leq C, \leq \eta_1 G$ y así G' es nilpotente. Además $G/\eta_1 G$ es abeliano. Por otra parte $(G : \eta_1 G)(\eta_1 G : C) = (G : C)$. Así $G/\eta_1 G$ es finito. $\square$

La nilpotencia no es una condición necesaria ni suficiente para la supersolubilidad. Por ejemplo $\bigoplus_{\aleph_0} \mathbb{Z}$, la suma directa de un número contable infinito de copias de $\mathbb{Z}$, es un grupo nilpotente pero no es finitamente generado, entonces no puede ser supersoluble por 2.7. Además, S_3 es un grupo supersoluble el cual no es nilpotente (tiene un centro trivial). Sin embargo V es un grupo nilpotente y supersoluble.

Es natural buscar un criterio que asegure que un grupo nilpotente es supersoluble y esta es la condición de un grupo siendo finitamente generado que distingue los grupos nilpotentes supersolubles de los grupos nilpotentes no supersolubles.

Teorema 2.11. *Sea G nilpotente. G es supersoluble si y sólo si es finitamente generado.*

Demostración. Por 2.7, si G es supersoluble entonces es finitamente generado. En el sentido inverso, supongamos que $G = \langle X \rangle$ es un grupo nilpotente con un conjunto finito X. Establecemos

$$G_n = \langle [x_1, ..., x_n]^g : \qquad \textit{cada} \quad x_i \in X, g \in G \rangle.$$

Afirmamos que $G_n = \gamma^n G$.

Claramente $G_1 = G = \gamma^1 G$ por definición, así de forma inductiva asumimos que si $n > 1$ entonces $G_{n-1} = \gamma^{n-1} G$. Cada conjugado de cada generador de G_n está en G_n por lo que $G_n \triangleleft G$. Además $[x_1, x_2, ..., x_n] \in \gamma^n G$ así que $G_{n-1} \leq \gamma^n G$. Sea $N = G_n$ y entonces $H = G/N = \langle X \rangle / N = \langle x_i N : x_i \in X \rangle$. Ahora $[[x_1, ..., x_{n-1}]N, x_n N] = [x_1, ..., x_n]N = N$. Por lo tanto todo $[x_1, ..., x_{n-1}]N$ centraliza cada $x_n N$ en H. Esto es, cada $[x_1, ..., x_{n-1}]N$ centraliza cada generador de H y por tanto se sigue que cada $[x_1, ..., x_{n-1}]N \in \zeta_1 H$. Entonces $[x_1, ..., x_{n-1}]^g N \in \zeta_1(H^{gN}) = \zeta_1 H$, así que $\gamma^{n-1}G/G_n = G_{n-1}/N \leq \zeta_1 H = \zeta_1(G/G_n)$. Por tanto $[\gamma^{n-1}G/G_n, G/G_n] = G_n/G_n$. Esto es $\gamma^n G = [\gamma^{n-1}G, G] \leq G_n$, completando la prueba de la afirmación.

Claramente $[x_1, ..., x_n]^g = [x_1, ..., x_n][x_1, ..., x_n, g]$ y $[x_1, ..., x_n, g] \in G_{n+1} = \gamma^{n+1} G$, así vemos que $\gamma^n G / \gamma^{n+1} G$ es generado por todos los elementos

$$[x_1, ..., x_n]^g \gamma^{n+1} G = [x_1, ..., x_n] \gamma^{n+1} G.$$

Como X es finito, $\gamma^n G/\gamma^{n+1} G = \langle y_i \gamma^{n+1} G : i = 1, ..., r \rangle$. Sea $K_i = \langle \gamma^{n+1} G, y_1, ..., y_i \rangle$. Entonces para cada i, como $y_1, ..., y_i \in \gamma^n G$ y $\gamma^{n+1} G \leq \gamma^n G$ tenemos $[K_i, G] \leq [\gamma^n G, G] = \gamma^{n+1} G$. Por lo tanto $K_i/\gamma^{n+1} G \triangleleft G/\gamma^{n+1} G$ y $K_i \triangleleft G$. Además $K_i/K_{i-1} = \langle y_i K_{i-1} \rangle$ el cual es cíclico. Así hemos construido una serie con factores cíclicos cuyos términos son normales en G, de $\gamma^{n+1} G$ a $\gamma^n G$, a saber

$$\gamma^{n+1} G = K_0 \leq K_1 \leq ... \leq K_r = \gamma^n G$$

para algún n. Como G es nilpotente, $\gamma^d G = 1$ para algún entero d. Así hemos encontrado una serie supersoluble de G. Por lo tanto G es supersoluble.

$\square$

Corolario 2.1. *Todo grupo nilpotente finitamente generado satisface* máx*.*

Demostración. [1] página 26. □

Capítulo 3

Series Supersolubles

En este capítulo especificaremos ciertas formas de series supersolubles que son comunes para todos los grupos supersolubles. La estrategia aquí es tomar una serie supersoluble de un grupo, "reorganizar"sus factores y producir otra serie supersoluble la cual tiene una forma más agradable.

Definición 3.1. Dada una serie supersoluble

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G,$$

diremos que los "factores de izquierda a derecha"son

$$G_1/G_0, G_2/G_1, ..., G_n/G_{n-1}.$$

A medida que nos referiremos al orden de los factores de esta manera, evitaremos confusión al llamar en ocasiones al orden de un grupo por su *magnitud*.

Cada grupo supersoluble tiene un invariante numérico útil.

Teorema 3.1. *Dos series supersolubles del grupo G tienen el mismo número de factores infinitos.*

De hecho, el mismo resultado se cumple para cualquier dos series policíclica-por-finita de un grupo policíclico-por-finito. Llamamos a este invariante el *número de Hirsch*[1] de G.

Demostración. Por el Teorema de Refinamiento de Schreier 1.17, dos series supersolubles de un grupo supersoluble G tienen refinamientos cuyos factores son isomorfos en pares.

[1]Kurt August Hirsch (1906-1986), primer profesor de Matemática Pura en el Queen Mary College de la Universidad de Londres. Publicó varios artículos sobre grupos solubles infinitos y fue el primero en estudiar seriamente grupos policíclicos.

Por tanto, podemos completar la prueba mostrando que una serie supersoluble de G y alguno de sus refinamientos tienen el mismo número de factores infinitos.

Suponga

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

es una serie supersoluble con G_i/G_{i-1} cíclico infinito para algunos i. Suponga además que

$$G_{i-1} = H_0 < H_1 < ... < H_m = G_i$$

con cada $H_j \triangleleft G$ y cada H_j/H_{j-1} no trivial. Ahora $1 < H_1/H_0 \leq G_i/H_0 = G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}$ así que H_1/H_0 es cíclico infinito. Además éste es isomorfo a un subgrupo no trivial de $\mathbb{Z}$ y por tanto tiene índice finito en G_i/G_{i-1}. Como

$$(G_i/G_{i-1} : H_1/H_0) = (H_m/H_0 : H_1/H_0) = |(H_m/H_0)/(H_1/H_0)| = |H_m/H_1|,$$

H_m/H_1 es un grupo finito. Hemos mostrado que una serie supersoluble y sus refinamientos tienen el mismo número de infinitos factores cíclicos y por tanto se sigue el resultado. □

Por 2.5 todo grupo supersoluble tiene una serie supersoluble con sus factores infinitos o de orden primo. Ahora buscamos formas de “organizar”tales factores en una serie supersoluble.

3.1. Lemas de Reordenamiento

Lema 3.1 (El Primer Lema de Reordenamiento)**.** *Sea $1 < H < K < G$ una serie normal de G con H y K/H cíclicos.*

(a) Si $|H| = q < p = |K/H|$, donde p y q son primos, entonces existe $R \triangleleft G$ con $R \leq K$ tal que $|R| = p$ y $|K/R| = q$.

(b) Si H es infinito y K/H tiene orden primo impar p, entonces o bien K es cíclico infinito o existe $R \triangleleft G$ con $R \leq K$ tal que $|R| = p$ y K/R es infinito cíclico.

(c) Si H tiene orden 2 y K/H es infinito entonces existen $R_1, R_2 \triangleleft G$ con $R_1 < R2 < G$, R_1 infinito cíclico y ambos R_2/R_1, K/R_1 son cíclicos de orden 2.

Demostración. (a) K debe tener orden pq. Sea R el p-subgrupo de Sylow de K (la singularidad es dada por el hecho de que el numero de p-subgrupos de Sylow de K es congruente a 1 módulo p, divide el primo q y $q < p$). R es normal en G. Además $|R| = p$ y $|K/R| = pq/p = q$.

(b) H es un grupo abeliano y por lo tanto $H \leq C_K(H)$. Como H es normal en K, existe un homomorfismo $\phi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}H$ con núcleo $C_K(H)$, por 1.31. Como $H \leq Ker\phi$, el mapeo $\phi' : K/H \longrightarrow \mathrm{Aut}H$, $kH \longmapsto k\phi$ para $k \in K$, es un homomorfismo bien definido cuyo núcleo es $C_K(H)/H$. Pero $K/H \cong C_p$, con p un primo impar y $\mathrm{Aut}H \cong C_2$, así que ϕ' debe ser trivial. Por tanto $C_K(H)/H = K/H$ y así $K = C_K(H)$. Por lo tanto $H \leq \zeta_1 K \leq K$.

La simplicidad de $K/H \cong C_p$ implica que $\zeta_1 K = K$ o H. $K/\zeta_1 K$. $K/\zeta_1 K$ nunca es un grupo cíclico no trivial (para cualquier grupo K), así $\zeta_1 K \neq H$. Por tanto K es abeliano. Notamos además que K es supersoluble de número de Hirsh 1. Por 2.7, K es un grupo abeliano finitamente generado. Sea T su grupo de torsión. T es característico en K y así es un subgrupo normal de G. K/T es un producto directo de un número finito de copias de $\mathbb{Z}$; para K/T es un grupo abeliano finitamente generado libre de torsión. Además K/T es supersoluble y debe tener número de Hirsh 1, como T es finito. Por tanto $K/T \cong \mathbb{Z}$. Como H es libre de torsión, $T \cap H = 1$. Así

$$T \cong T/T \cap H \cong TH/H \leq K/H \cong C_p.$$

Entonces $T = 1$ o $T \cong C_p$ Si $T = 1$, esto es, si K es libre de torsión, entonces $K \cong K/T \cong \mathbb{Z}$. Si de lo contrario, poner $R = T$; para entonces $R \lhd G$, $K/R \cong \mathbb{Z}$ y $R \cong C_p$.

(c) K/H es cíclico infinito y así es generado por algún Hk donde $k \in K$ y k tiene orden infinito. Así $K = H\langle k\rangle$. Como H es finito y $\langle k\rangle$ es infinito, $H \cap \langle x\rangle = 1$. Además como H es cíclico de orden 2, $H = \langle h\rangle$, donde $h^2 = 1$. Como h^k debe tener orden 2 y también estar en H, tenemos que $h^k = h$, así que $[H, k] = 1$. Se sigue que $K = H \times \langle k\rangle$. Sea $R_1 = K^2 = \langle x^2 : x \in K\rangle$. Como K es un subgrupo normal de G y $(x^2)^g = (x^g)^2$ para todo $g \in G$, R_1 es un subgrupo normal de G. Además, $R_1 = (H \times \langle k\rangle)^2 = \langle k^2\rangle$, pues H tiene orden 2. Así R_1 es cíclico infinito. Note que

$$|K/R_1| = |(H \times \langle k\rangle)/\langle k^2\rangle| = |H \times C_2| = 4.$$

Sea $R_2 = HK^2$. Entonces $R_1 < R_2 < K$. Como H y K^2 son subgrupos normales de G, R_2 es un subgrupo normal de G. Además,

$$|R_2/R_1| = |HK^2/K^2| = |H/H \cap K^2| = |H| = 2,$$

como $H \cap K^2 = 1$, y

$$|K/R_2| = |(K/R_1)/(R_2/R_1)| = 4/2 = 2.$$

□

Sea

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

una serie supersoluble de G. Para $0 < i < n$ tenemos una serie normal

$$1 = G_{i-1}/G_{i-1} < G_i/G_{i-1} < G_{i+1}/G_{i-1} < G/G_{i-1}$$

en la cual podemos aplicar 3.1. Informalmente el resultado dice que dados factores vecinos en una serie supersoluble, para producir una nueva serie supersoluble podemos

(a) desplazar un factor de orden primo q a la derecha de un factor de orden primo p siempre que $p > q$;

(b) desplazar un factor de orden infinito a la derecha de un factor de orden primo impar p posiblemente a expensas de perder el factor de orden p;

(c) desplazar un factor de orden 2 a la derecha de un factor infinito a expensas de insertar otro factor de orden 2 a la derecha del factor infinito.

Ahora estamos en una situación para dar nuestra primera forma canónica.

Teorema 3.2 (Zappa)**.** *Un grupo supersoluble G tiene una serie supersoluble el la cual los factores cíclicos tienen infinito u orden primo y el orden de los factores de la izquierda es:*

- *factores de magnitud impar en orden descendiente de magnitud;*
- *factores infinitos;*
- *factores de orden* 2*.*

Demostración. Usando 2.5(a), G tiene una serie supersoluble cuyos factores tiene orden primo o infinito. Por la discusión previa, podemos utilizar 3.1 para obtener la serie supersoluble requerida. Implementando 3.1(a) y 3.1(c), podemos producir una serie supersoluble cuyos factores de orden 2 son los últimos, precedido por sus factores infinitos. Por último, uno puede usar 3.1(a) para ordenar los factores de orden primo impar. □

Corolario 3.1. *Los elementos de orden impar de un grupo supersoluble forman un subgrupo característico.*

Demostración. Elegimos una serie supersoluble de G como en 3.2, decimos

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_r < G_{r+1} < ... < G$$

donde G_{r+1}/G_r es el primer factor infinito. Entonces claramente G_r es un subgrupo de G que consiste precisamente de los elementos de orden impar en G. El resultado sigue. □

Como un grupo supersoluble finito tiene número de Hirsh 0, tenemos:

Corolario 3.2. *Si G es un grupo finito supersoluble entonces G tiene una serie supersoluble*

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

con cada $|G_i/G_{i-1}|$ *primo y* $|G_1/G_0| \geq |G_2/G_1| \geq ... \geq |G_n/G_{n-1}|$. □

Ahora daremos algunos ejemplos para ilustrar por qué es 3.1, en algún sentido, el mejor resultado posible que podemos esperar.

(i) No podemos necesariamente producir una serie supersoluble de un grupo en el que los factores finitos están en orden ascendente de magnitud. Esto se debe a que no siempre podemos desplazar un factor de orden primo q a la derecha de un factor de orden primo p cuando $q > p$. Para ver esto, notemos que S_3 tiene una única serie supersoluble $1 \leq \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$ con factores de izquierda a derecha C_3, C_2 así que no existe una serie supersoluble de S_3 cuyos factores estén en orden ascendiente de magnitud.

(ii) No podemos necesariamente mover un factor de orden 2 a la izquierda de un factor infinito. Se puede encontrar un ejemplo observando el grupo diédrico infinito $D_\infty = \langle x, y : x^2 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$, de la forma $\mathbb{Z}]C_2$. Uno puede mostrar que D_∞ no tiene subgrupos normales de orden 2 y así no tiene serie supersoluble cuyos factores de izquierda a derecha son C_2 y luego $\mathbb{Z}$.

(iii) Uno no puede necesariamente desplazar un factor de un orden primo imppar p a la derecha de un factor infinito sin introducir otro factor finito de orden no p. Por ejemplo, considere el grupo G con presentación $\langle x, y : x^3 = 1, x^y = x^{-1} \rangle$. Es fácil mostrar que este grupo es un producto semi-directo $\langle x \rangle] \langle y \rangle$, es decir, de la forma $C_3]\mathbb{Z}$. Además, los elementos infinitos de G tienen una de las formas y^i, xy^i, x^2y^i (con $i \in \mathbb{Z}$). Es bastante rutinario mostrar que para un elemento z de orden infinito en G, $\langle z \rangle \lhd G$ si y sólo si $z = y^{2i}$ para $i \in \mathbb{Z}$. Se sigue que el subgrupo normal infinito cíclico de G del índice más pequeño es $\langle y^2 \rangle$ el cual tiene índice 6. Se sigue también que una serie supersoluble de G con un factor infinito primero debe tener algún factor isomorfo a C_2.

Tenemos un método de "mover" factores infinitos a la izquierda de un factor finito por medio de un resultado más general.

Lema 3.2 (El Segundo Lema de Reordenamiento)**.** *Si* $1 < H < K < G$ *es una serie normal de* G *con* H *finito y* K/H *cíclico infinito, entonces existe un subgrupo normal* R *de* G *contenido en* K *tal que* R *es cíclico infinito y* K/R *es finito.*

Demostración. H es subgrupo normal de K, así que $K/C_K(H) = N_K(H)/C_K(H)$ puede integrarse en Aut$H$. Como H es un grupo finito, Aut$H$ es finito. Así $K/C_K(H)$ es finito.

Y $1 < \zeta_1 H \leq C_K(H) \leq K$. Entonces podemos asumir que K centraliza H así que $1 < H \leq \zeta_1 K \leq K$. Como K/H es cíclico, $K/\zeta_1 K$ es cíclico y por lo tanto K es abeliano. Así que considera la serie normal $1 < H \leq K \leq G$ con K abeliano.

Tenemos K/H generado por algún elemento Hx donde $x \in K$ tiene orden infinito. Así $K = H\langle x\rangle$. K es abeliano, así $[H, x] = 1$ y H es infinito entonces $H \cap \langle x\rangle = 1$. Por lo tanto $H = H \times \langle x\rangle$. Sea $n = |H|$. Tomemos $R = K^n$. Como $H^n = 1$, tenemos que $R = \langle x^n\rangle$. Entonces R es cíclico infinito. Como $(x^g)^n = (x^n)^g$ para cada $g \in G$, se sigue que R es un subgrupo normal de G. Finalmente,

$$|K/R| = |H\langle x\rangle/\langle x^n\rangle| = |H|n = n^2.$$

Por lo tanto $|K/R|$ es finito según sea necesario □

Teorema 3.3. *Si G es un grupo supersoluble, entonces tiene una serie supersoluble con los factores infinitos que aparecen primero.*

Demostración. Por 3.1, podemos inducir en el número de Hirsh m de un grupo supersoluble G. Si $m = 0$ entonces cualquier serie supersoluble de G satisface la propiedad requerida. Suponga que $m > 0$ y que para grupos supersolubles de número de Hirsh $m-1$ el resultado se cumple. Sea

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

una serie supersoluble adecuada de G. Escoja r como el más pequeño entero tal que $G_r/Gr - 1$ es cíclico infinito. Claramente $r > 0$.

Si $r = 1$ entonces G/G_1 es un grupo supersoluble con número de Hirsh $m - 1$. Por inducción, existe una serie supersoluble

$$G_1/G_1 = H_1/G_1 < H_2/G_1 < ... < H_s/G_1 = G/G_1$$

con los factores infinitos apareciendo primero. Entonces

$$1 = G_0 < G_1 = H_1 < H_2 < ... < H_s = G$$

es una serie supersoluble de G con los factores infinitos apareciendo primero.

Si $r > 1$, aplicando 3.2 a la serie normal

$$1 < G_{r-1} < G_r < G$$

para obtener un subgrupo normal R de G contenido en G_r tal que R es cíclico infinito y G_r/R es finito. G/R es por lo tanto un grupo supersoluble con número de Hirsh $m - 1$, así por inducción existe una serie supersoluble de G/R y por tanto existe una serie normal de G con factores cíclicos entre R y G con los factores infinitos primero. Esta serie, junto con 1 y R, ga una serie supersoluble de G con los factores infinitos primero. □

Corolario 3.3. *(a) Un grupo supersoluble tiene un subgrupo poli-(cíclico infinito) de índice finito.*

(b) Un grupo supersoluble infinito tiene un subgrupo normal abeliano libre de torsión no trivial.

Demostración. (a) Sigue directamente de 3.3. Para mostrar (b), sea L un subgrupo normal poli-(cíclico infinito) de G supersoluble, como en (a). Entonces L es desde luego soluble. Sea T el último término no trivial en la serie derivada de L. T es un grupo abeliano, es libre de torsión y es finitamente generado. Es característico en L y por lo tanto es normal en G. □

De manera más general, los grupos policíclico-por-finito siempre tienen una serie policíclica-por-finita en la que los factores cíclicos infinitos aparecen primero y, por lo tanto, tienen un subgrupo poli- (infinito cíclico) de índice finito. La demostración de 3.3(b) también se generaliza para que un grupo infinito policíclico por finito tenga un subgrupo abeliano normal no trivial libre de torsión.

Corolario 3.4. *Si G es un grupo supersoluble entonces G tiene una serie supersoluble en la cual cada factor es cíclico infinito o cíclico de orden primo, y tal que los factores infinitos aparecen primero, entonces los factores finitos, luego los factores finitos en orden descendiente de magnitud.*

Demostración. Por 3.3, G tiene una serie supersoluble

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

con los factores infinitos primero. Sea r el más grande entero tal que G_r/G_{r-1} es cíclico infinito. Entonces G/G_r es un grupo finito. Por 3.2, existe una serie supersoluble

$$G_r/G_r = H_{r+1}/G_r < H_{r+2}/G_r < ... < H_{r+s}/G_r = G/G_r$$

con los factores de orden primo y en orden descendiente de magnitud. Entonces:

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_r = H_{r+1} < H_{r+2} < ... < H_{r+s} = G$$

es una serie supersoluble de G. La condición de los factores finitos se cumple porque

$$|H_{r+i}/H_{r+i-1}| = |(H_{r+i}/G_r)/(H_{r+i-1}/G_r)|$$

para $i = 1, 2, ..., s$ □

Como hemos visto, algunos de los resultados de esta sección se cumplen más generalmente para grupos policíclicos-por-finito y series policíclicas-por-finita. Terminamos esta sección mostrando que 3.2, 3.1, 3.2 y 3.4 no generalizan. Para contraejemplos confiamos en nuestro ejemplo estándar de un grupo policíclico que no es supersoluble, A_4.

A_4 tiene sólo un subgrupo normal no trivial adecuado V y $A_4/V \cong C_3$ V tiene tres elementos de orden 2 y así se sigue que A_4 tiene sólo 3 series policíclicas, todos cuyos factores de izquierda a derecha (hasta el isomorfismo) C_2, C_2 y C_3. Enumeramos estos:

$$1 \leq \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \leq V \leq A_4$$
$$1 \leq \langle (1\ 3)(2\ 4) \rangle \leq V \leq A_4$$
$$1 \leq \langle (1\ 4)(2\ 3) \rangle \leq V \leq A_4$$

Evidentemente, A_4 no tiene series policíclicas con los factores en orden descendiente de magnitud. Además los elementos de orden impar en A_4 no forman un subgrupo; por ejemplo, $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$ que tiene el mismo orden. Esto elimina cualquier esperanza de que los resultados antes mencionados sean ciertos para grupos policíclicos y, por lo tanto, cualquier esperanza de que sean ciertos para grupos policíclicos-por-finito.

Capítulo 4

Torres de Sylow y un Teorema de Philip Hall

4.1. Torres de Sylow

A lo largo de este capítulo, todos los grupos seran finitos.

Definición 4.1. Sean $p_1, ..., p_r$ los divisores primos distintos de $|G|$. Una torre de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_r)$ de G es una sucesión de subgrupos de $G_1, ..., G_r$ de G tal que G_i es un p_i-subgrupo de Sylow de G para cada $i = 1, ..., r$ y $G_1 G_2 ... G_k \triangleleft G$ para cada $k = 1, ..., r$. Tenga en cuenta que dados dichos subgrupos $G_1, ..., G_r, G_1 G_2 ... G_r$ tiene el orden de G y así debe ser G mismo.

Si los divisores primos estan ordenados de modo que $p_1 > p_2 > ... > p_r$, entonces llamaremos una torre de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_r)$ de G sólo una torre de Sylow de G

Teorema 4.1. *Todo grupo supersoluble tiene una torre de Sylow.*

Demostración. Sea G supersoluble. Inducimos en el número de divisores primos de $|G|$. Si G es trivial entonces el resultado claramente se cumple. Entonces asumimos que G es no trivial.

Sea $p = p_1 > p_2 > ... > p_r$ los distintos divisores primos de $|G|$. Evidentemente, una serie supersoluble de G cuyos factores tienen orden primo debe incluir algún factor de orden p. Por 3.2, existe una serie supersoluble de G en la cual los factores de orden p aparecen primeo, decimos

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G.$$

Si r se elige como máximo a la condición de que $|G_r/G_{r-1}| = p$ entonces G_r es un subgrupo normal de G de orden p_r. Además, cualquier primo que divide $(G : G_r)$ es estrictamente menor que p. Por tanto $S = G_r$ es un p-subgrupo de Sylow normal de G.

Por inducción, G/S tiene una torre de Sylow (de complexión $(p_2, ..., p_r)$), decimos

$$T_2/S, ..., T_r/S.$$

Notemos que $T_2, T_2T_3, ..., T_2T_3...T_r$ son todos subgrupos normales de G. Para $i = 2, ..., r$, sea S_i un p_i-subgrupo de Sylow de T_i y $S_1 = S$. Como $|T_i| = |S|p_i^e$, donde p_i^e es la potencia de p_i que divide $|G|$, se sigue que cada S_i es un p_i-subgrupo de Sylow de G. Y además $S_1 \triangleleft G$ (trivial), $S_1S_2 = T_2 \triangleleft G, ..., S_1S_2...S_r = T_2...T_r \triangleleft G$.

Por lo tanto G tiene una torre de Sylow. □

Corolario 4.1. *(a) Si G es un grupo supersoluble y p es el más grande primo que divide $|G|$ entonces G tiene un p-subgrupo de Sylow normal S. Además, S tiene un complemento en G.*

(b) Si G es un grupo supersoluble y p es el más pequeño primo que divide $|G|$ entonces un p-subgrupo de Sylow P de G tiene un complemento normal en G.

Demostración. Por 4.1, G tiene una torre de Sylow, decimos $G_1, G_2, ..., G_r$. Para probar (a), tomemos $S = G_1 \triangleleft G$. Por entonces, como $(G : S)$ y $|S|$ son coprimos, el teorema de Schur-Zassenhaus dice que S tiene un complemento en G. Para probar (b), tomemos $P = G_r$ y $Q = G_1...G_{r-1} \triangleleft G$. Como los órdenes de $G_1, ..., G_{r-1}$ y el orden de G_r son coprimos, se sigue del Teorema de Lagrange que $Q \cap P = 1$. Evidentemente $QP = G$, así Q es un complemento de P en G. Q es normal en G así que es un complemento normal de P en G. □

Si G tiene una torre de Sylow entonces no es necesariamente supersoluble. Por ejemplo, A_4 tiene una torre de Sylow $V, \langle(1\ 2\ 3)\rangle$. Existe una propiedad que, además de un grupo que tiene una torre Sylow, caracteriza a grupos (finitos) supersolubles. Declaramos el teorema relevante pero no lo probamos (ver [16] Teorema 1.12, página 6)

Definición 4.2. Sea p primo. Un grupo K es llamado *estrictamente p-cerrado* si K tiene un único (y por tanto normal) p-subgrupo de Sylow T y K/T es abeliano de exponente que divide $p-1$. Veremos más adelante que un grupo estrictamente p-cerrado, para algún primo p, es supersoluble.

Teorema 4.2 (Baer)**.** *G es supersoluble si y sólo si*

(a) G tiene una torre de Sylow.

(b) Dados cualquier primo p y cualquier p-subgrupo de Sylow S de G, $N_G(S)/C_G(S)$ es estrictamente p-cerrado.

4.2. π-subgrupos de Hall

Definición 4.3. *Sea π un conjunto de números primos. Sea π' el conjunto de todos los números primos que no aparecen en π. Un π-número es un número divisible sólo por primos en π. Un π-grupo (π-subgrupo) es un grupo (subgrupo) cuyo orden es un π-número. Un π-subgrupo de Hall de G es un π-subgrupo H de G tal que $(G : H)$ es un π'-número. Tenga en cuenta que si $\pi = \{p\}$, p primo, entonces un π-grupo es precisamente un p-grupo y un π-subgrupo de Hall es precisamente un p-subgrupo de Sylow; entonces esas nociones generalizan la noción de un p-subgrupo de Sylow.*

El Teorema de Sylow establece la conjugación (y por tanto el isomorfismo) de los p-subgrupos de Sylow de un grupo G. Se han realizado muchas investigaciones sobre la conjugación de otros subgrupos "especiales", como los π-subgrupos de Hall. El teorema principal de esta sección es un resultado con respecto a estos.

Teorema 4.3 (P. Hall [7])**.** *Sea G un grupo. Cualesquiera dos π-subgrupos de Hall supersolubles de G son conjugados en G.*

Esto se sigue de un resultado más general:

Teorema 4.4 (P. Hall [7])**.** *Sea G un grupo y π un conjunto de primos. Sea $p_1, ..., p_r$ primos distintos en π que dividen $|G|$. Sea H, K p-subgrupos de Hall de G ambos con torres de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_r)$. Entonces H y K son conjugados en G.*

Demostración. Sean $S_1, ..., S_r$ y $T_1, ..., T_r$ torres de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_r)$ para H y K respectivamente. Inducimos en r. Si $r = 1$ entonces H y K son p_1-subgrupos de Sylow de G y son conjugados por el Teorema de Sylow. Asumimos que $r > 1$ y colocamos $H_1 = S_1S_2...S_{r-1}$ y $K_1 = T_1T_2...T_{r-1}$. Por definición de torre de Sylow, H_1 es un subgrupo normal de H y K_1 es un subgrupo normal de K. Además H_1 y K_1 tienen torres de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_{r-1})$ y son $\{p_1, ..., p_{r-1}\}$-subgrupos de Hall de G. Por lo tanto, por inducción H_1 y K_1 son conjugados. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $H_1 = K_1$, reemplazando K y los T_i por conjugados si es necesario (Todo lo que se conjugue con este "nuevo" K se conjugará con el "antiguo" K, ya que la conjugación es una relación transitiva). Sea p_r^e la mayor potencia de p_r que divide G. Como los subgrupos $S_1, ..., S_{r-1}$ tienen órdenes las cuales no involucran el primo p_r, $S_1S_2...S_{r-1} \cap S_r = 1$ usando el Teorema de Lagrange. Entonces

$$|H/H_1| = |S_1S_2...S_r/S_1...S_{r-1}| = |S_r|.$$

Usando uno de los Teoremas de Isomorfismo, $|S_r| = p_e^e$. De forma similar, $|K/H_1| = p_r^e$. H_1 es normal tanto en H como en K, así que H y K están contenidos en $N_G(H_1)$. Se sigue que H/H_1 y K/H_1 son p_r-subgrupos de Sylow de $N_G(H_1)/H_1$. Por el Teorema de

Sylow, existe $g \in N_G(H_1)$ tal que $H^g/H_1 = K/H_1$ y por lo tanto $H^g = K$, según sea necesario. $\square$

Demostración de 4.3: Sean $p_1, ..., p_r$ los primos distintos en π que dividen $|G|$ y elíjalos de manera que $p_1 > p_2 > ... > p_r$. Los primos distintos que dividen $|H|$ y $|K|$ están entre $p_1, ..., p_r$. Por tanto, 4.1 produce torres de Sylow de complexión $(p_1, ..., p_r)$ para H y K. Por 4.4, H y K son conjugados. (Debería tenerse en cuenta que si p, un primo, no divide $|J|$, para un grupo J, entonces un p-subgrupo de Sylow de J es trivial.) $\square$

Bibliografía

[1] Reinhold Baer. Supersoluble groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6(1):16–32, 1955.

[2] Homer Bechtell. A generalization of hall-complementation in finite supersolvable groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 140:257–270, 1969.

[3] Thomas Scott Blyth and Edmund F Robertson. *Essential Student Algebra: Groups*, volume 5. Chapman & Hall, 1986.

[4] Piroska Csörgö and Marcel Herzog. On supersolvable groups and the nilpotator. *Communications in Algebra*, 32(2):609–620, 2004.

[5] John B. Fraleigh. *Álgebra Abstracta*. Addison Wesley Iberoamericana, 1988.

[6] Wenbin Guo, KP Shum, and AN Skiba. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups. *Publ. Math. Debrecen*, 68(3-4):433–449, 2006.

[7] Philip Hall. Theorems like sylow's. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2):286–304, 1956.

[8] Xi Liu, Baojun Li, and Xiaolan Yi. Some criteria for supersolubility in products of finite groups. *Frontiers of Mathematics in China*, 3(1):79–86, 2008.

[9] CJE Pinnock. *Supersolubility and some characterizations of finite supersoluble groups.* PhD thesis, Citeseer, 1998.

[10] Derek JS Robinson. *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Harvey E Rose. *A course on finite groups.* Springer Science & Business Media, 2009.

[12] John S. Rose. *A course on group theory.* Courier Corporation, 1994.

[13] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] Eugene Schenkman. Group theory. 1965.

[15] William Raymond Scott. *Group theory*. Courier Corporation, 2012.

[16] Michael Weinstein et al. *Between nilpotent and solvable*. Polygonal, 1982.