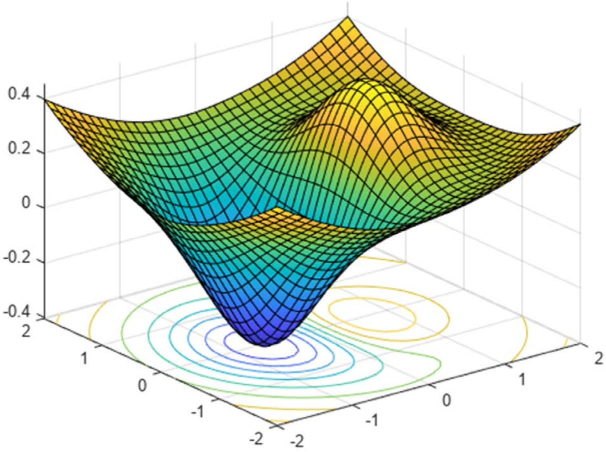


Νομικός Γεώργιος
ΑΕΜ: 9857

Καθηγητής: **Γεώργιος Ροβιθάκης**

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Περιγραφή του προβλήματος

Στην εργασία αυτή σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση τριών δοσμένων κυρτών συναρτήσεων $f1(x)$, $f2(x)$ και $f3(x)$ $f(x)$ όταν $x\epsilon[0, 3]$. Η εύρεση των ελαχίστων για κάθε συνάρτηση πραγματοποιείται με την εφαρμογή τεσσάρων (4) αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου. Οι αλγόριθμοι αυτοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων, ενώ η δεύτερη κατηγορία είναι μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων. Συγκεκριμένα, έχουμε:

1) Μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου χωρίς την χρήση παραγώγων:
- Μέθοδος της Διχοτόμου,
- Μέθοδος του Χρυσού Τομέα,
- Μέθοδος Fibonacci.

2) Μέθοδοι αναζήτησης με χρήση παραγώγων:
- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

Οι μέθοδοι αυτοί υλοποιήθηκαν σε υπολογιστικό περιβάλλον matlab, όπου, για τη συγγραφή του κώδικα κάθε αλγορίθμου, ακολουθήθηκαν τα βήματα που περιγράφονται αναλυτικά στο βιβλίο «ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ» (συγγραφέας: Γεώργιος Α. Ροβιθάκης), στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου.

Οι τρεις συναρτήσεις για τις οποίες έγινε αναζήτηση του ελαχίστου είναι οι εξής:

1) $f_1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2\cos(x)$
2) $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
3) $f_3(x) = x^2\ln(0.5x) + \sin(0.2x)^2$

2. Μέθοδος της Διχοτόμου

2.1 Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης l = σταθερό και μεταβλητό ε

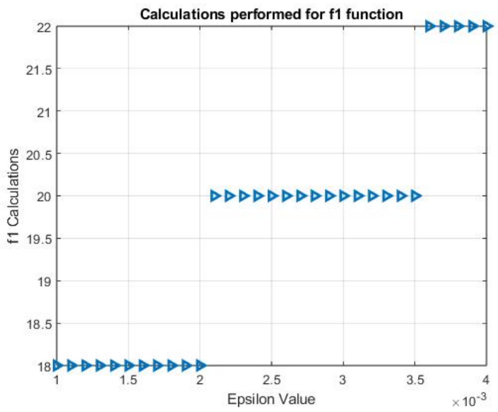
Σε αυτό το μέρος της εργασίας εφαρμόζουμε την μέθοδο της Διχοτόμου. Κρατάμε σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης *l* στη τιμή 0.01. Μεταβάλουμε τη σταθερά ε, προσέχοντας να ισχύει η σχέση που ενώνει τα l και ε, δηλαδή:

$$l > 2\varepsilon$$

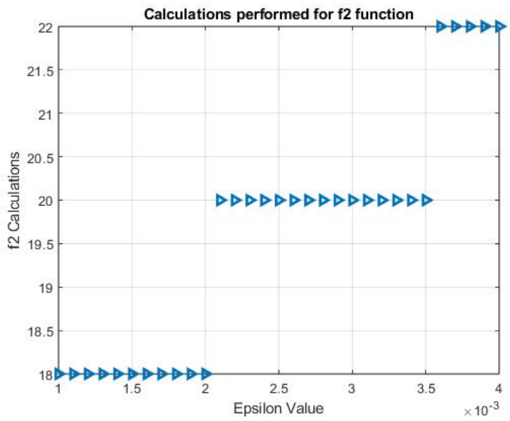
Συγκεκριμένα, έχουμε επιλέξει τις τιμές ε = 0.001 : 0.0001 : 0.004, δηλαδή το ε θα πάρει αρχικά τη τιμή 0.001 και θα φτάσει έως τη τιμή 0.004, με βήμα 0.0001.

Εφαρμόζουμε τον σχετικό αλγόριθμο του βιβλίου και για τις τρεις συναρτήσεις. Δημιουργούμε τα διαγράμματα μεταβολής των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε τιμή του ε. Σημειώνουμε ότι, σε κάθε επανάληψη του συγκεκριμένου αλγορίθμου, η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται δύο (2) φορές.

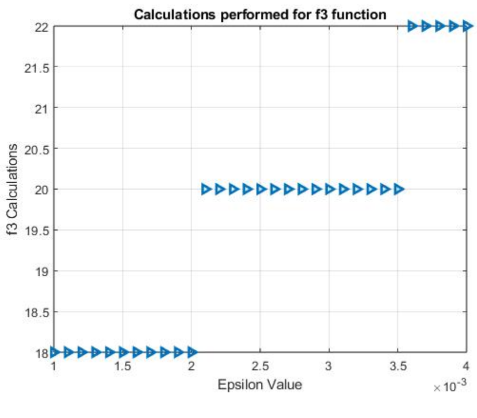
Παρακάτω παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα.



Εικόνα 1. Υπολογισμοί f1 με σταθερό l και μεταβλητό ε



Εικόνα 2. Υπολογισμοί f2 με σταθερό l και μεταβλητό ε



Εικόνα 3. Υπολογισμοί f3 με σταθερό l και μεταβλητό ε

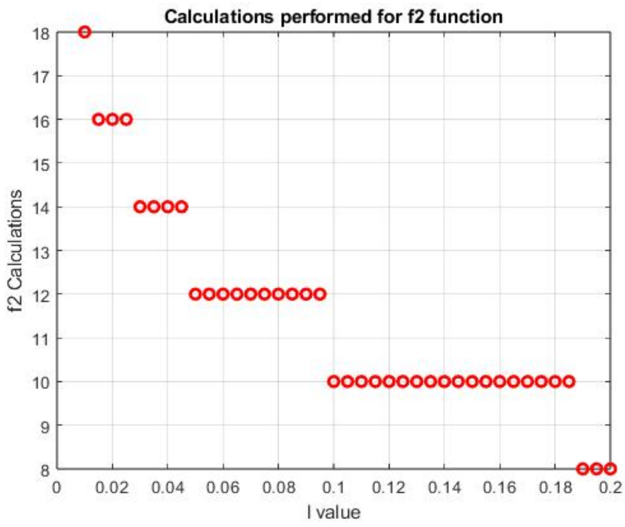
2.2.1 Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης ε = σταθερό και μεταβλητό *l*

Σε αυτό το μέρος κρατάμε σταθερό το ε στη τιμή 0.001 και μεταβάλλουμε το *l*. Μελετάμε, ξανά, τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την αλλαγή του *l*. Προσέχουμε να ισχύει ο περιορισμός μεταξύ των δύο παραμέτρων, οπότε οι τιμές που επιλέγουμε για το *l* είναι:

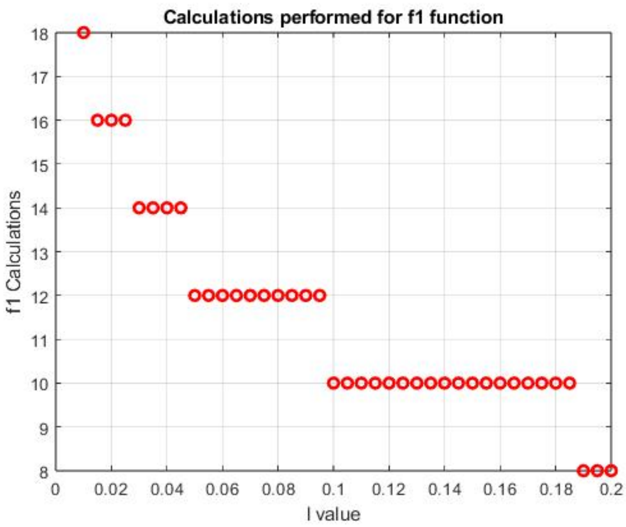
l = 0.01:0.005:0.2

δηλαδή, ξεκινώντας από τη τιμή 0.01, φτάνουμε στη τιμή 0.2, με βήμα 0.005.

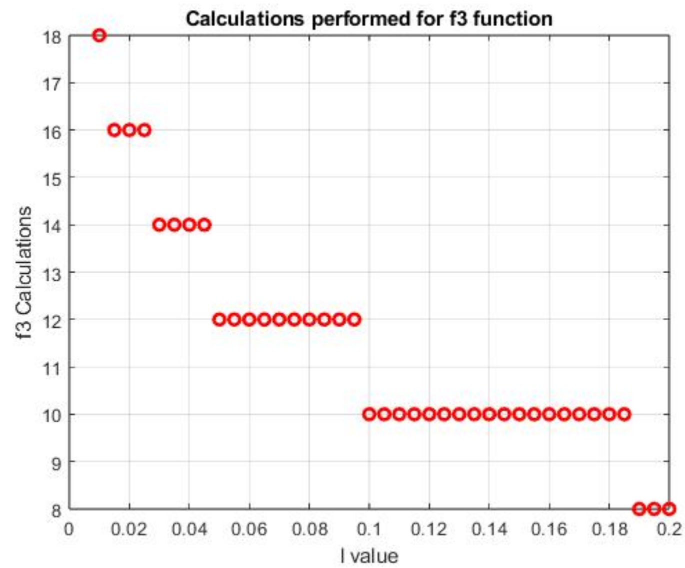
Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 4. Υπολογισμοί f1 με σταθερό ε και μεταβλητό l



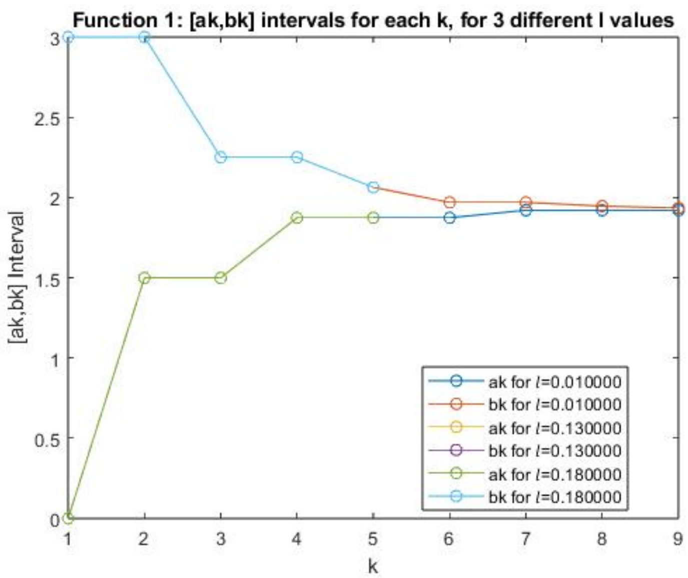
Εικόνα 5. Υπολογισμοί f2 με σταθερό ε και μεταβλητό l



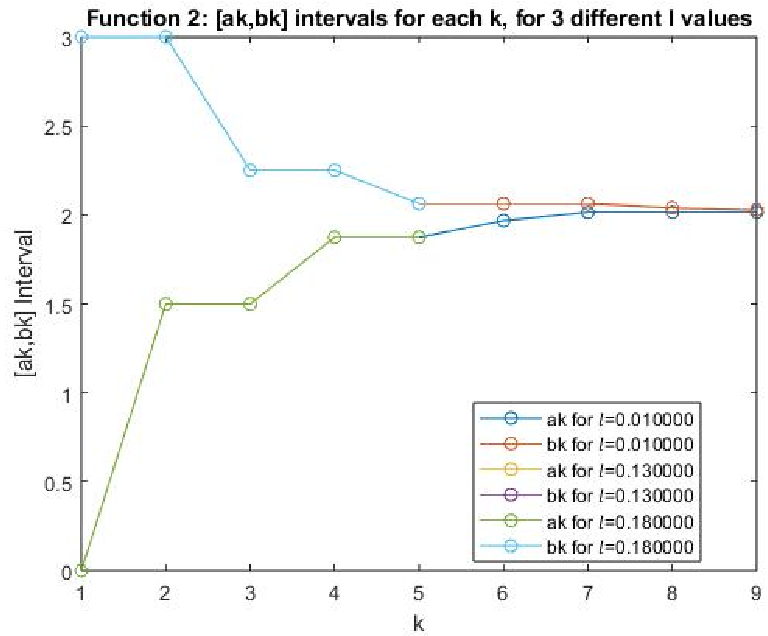
Εικόνα 6. Υπολογισμοί f3 με σταθερό ε και μεταβλητό l

2.2.2 Άκρα του διαστήματος [a_k,b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος *k*

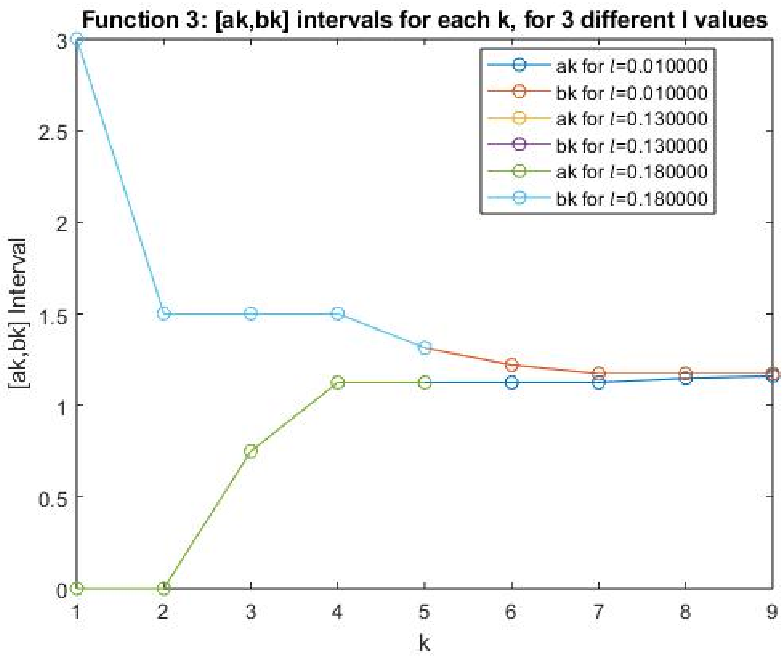
Σε αυτό το μέρος, κρατώντας σταθερό το ε στη τιμή 0.001 και δίνοντας στο *l* τις τιμές l = 0.01, l = 0.13 και l = 0.18 , δημιουργούμε τρία διαγράμματα (ένα για κάθε συνάρτηση), όπου σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k , b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος k. Τα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 7. Άκρα διαστήματος [a,b] για σταθερό ε, τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f1



Εικόνα 8. Άκρα διαστήματος [a,b] για σταθερό ε, τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f2



Εικόνα 9. Άκρα διαστήματος [a,b] για σταθερό ε, τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f3

2.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Όπως είναι αναμενόμενο, όσο μικρότερη η τιμή l, δηλαδή το μέγεθος του τελικού διαστήματος στο οποίο βρίσκεται η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, τόσες περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται για να τερματιστεί ο αλγόριθμος της διχοτόμου. Βέβαια, όπως φαίνεται από τις εικόνες 4,5 και 6, όσο αυξάνεται το l, τόσο ΄΄σταθεροποιείται΄΄ ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου.
Από τις εικόνες 7,8 και 9 φαίνεται πως οι τρεις συναρτήσεις καταλήγουν στο ζητούμενο τελικό διάστημα με ίδιο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου της διχοτόμου.

3. Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Σε αυτή την ενότητα κάνουμε χρήση του αλγορίθμου για τη μέθοδο του Χρυσού τομέα που βρίσκεται στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου.

3.1 Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης με μεταβλητό *l*

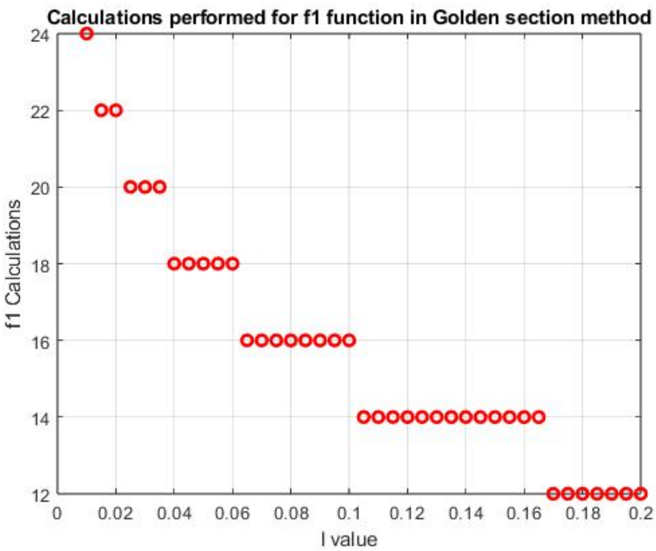
Σε αυτό το μέρος, όπως και στη μέθοδο της διχοτόμου, μεταβάλλουμε τη τιμή της παραμέτρου *l*. Αυτή τη φορά εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Χρυσού τομέα, όπως αυτή παρουσιάζεται στο βιβλίο. Μελετάμε, ξανά, τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς την αλλαγή του *l*. Οι τιμές που επιλέγουμε για το *l* είναι ίδιες με αυτές στη μέθοδο της διχοτόμου:

l = 0.01:0.005:0.2

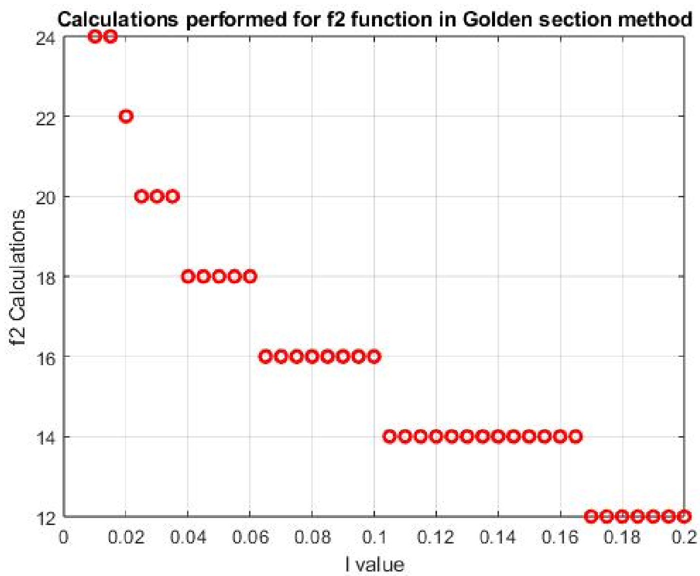
δηλαδή, ξεκινώντας από τη τιμή 0.01, φτάνουμε στη τιμή 0.2, με βήμα 0.005.

Θέτουμε την παράμετρο gamma του αλγορίθμου ίση με 0.618.

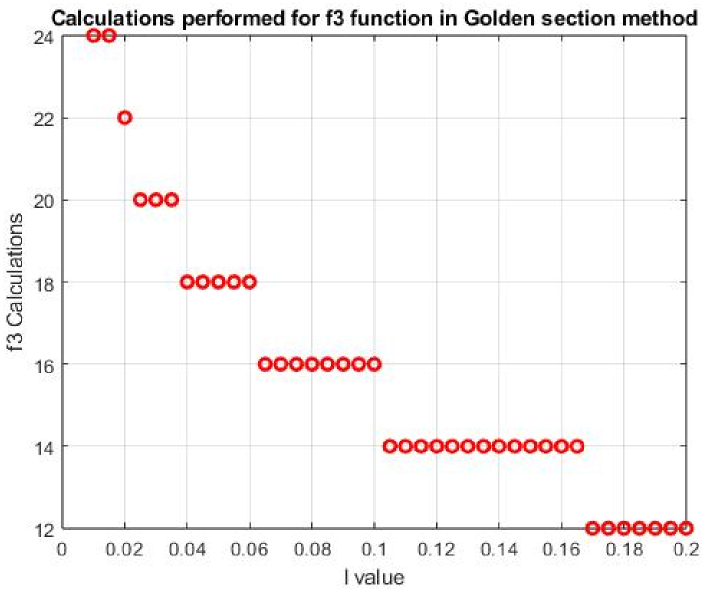
Τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τρεις αντικειμενικές συναρτήσεις είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 10. Υπολογισμοί f1 με μεταβλητό l για μέθοδο χρυσού τομέα



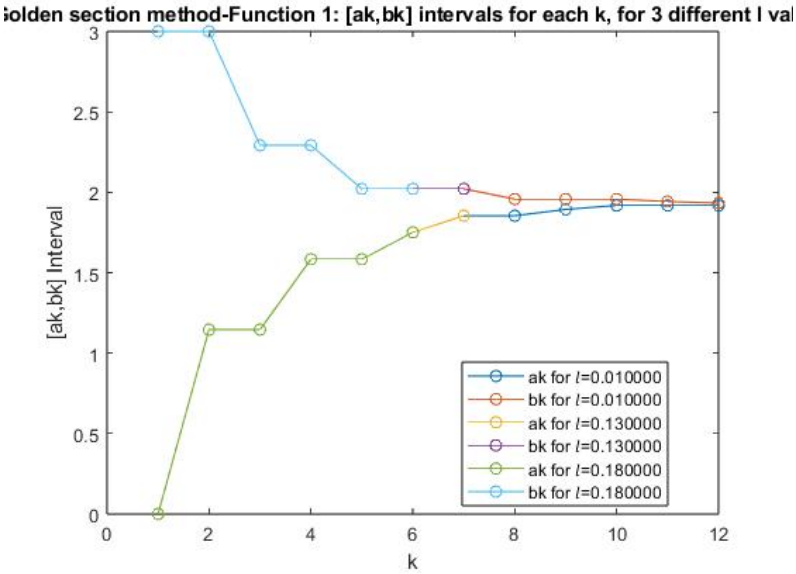
Εικόνα 11. Υπολογισμοί f2 με μεταβλητό l για μέθοδο χρυσού τομέα



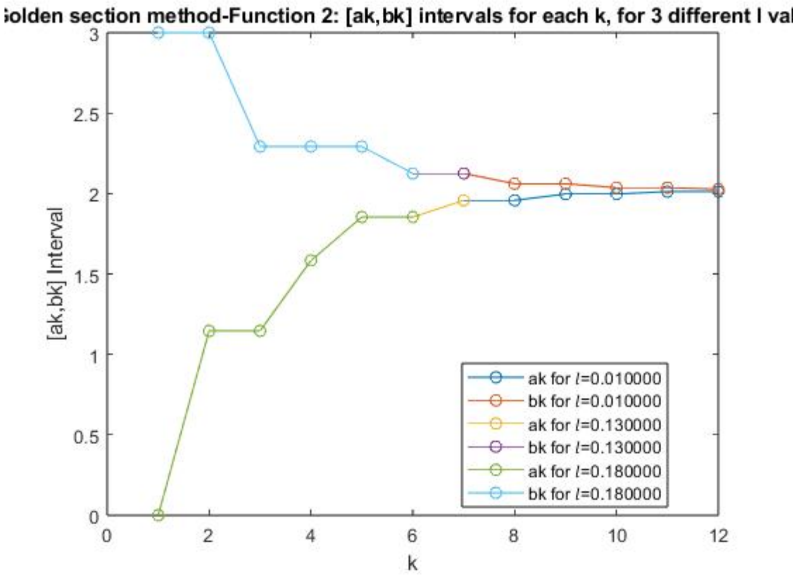
Εικόνα 12. Υπολογισμοί f3 με μεταβλητό l για μέθοδο χρυσού τομέα

3.2 Άκρα του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος *k*

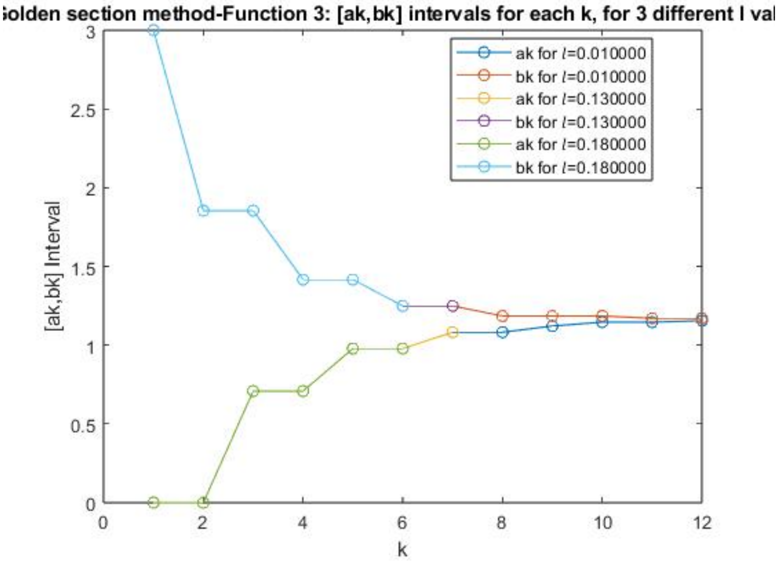
Σε αυτό το μέρος δίνουμε στο *l* τις τιμές l = 0.01, l = 0.13 και l = 0.18 , δημιουργούμε τρία διαγράμματα (ένα για κάθε συνάρτηση), όπου σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k , b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k. Τα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 13. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f1



Εικόνα 14. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f2



Εικόνα 15. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f3

3.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Όπως και στην παράγραφο 2.3 για τη μέθοδο της διχοτόμου, ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα για τις τρεις συναρτήσεις.

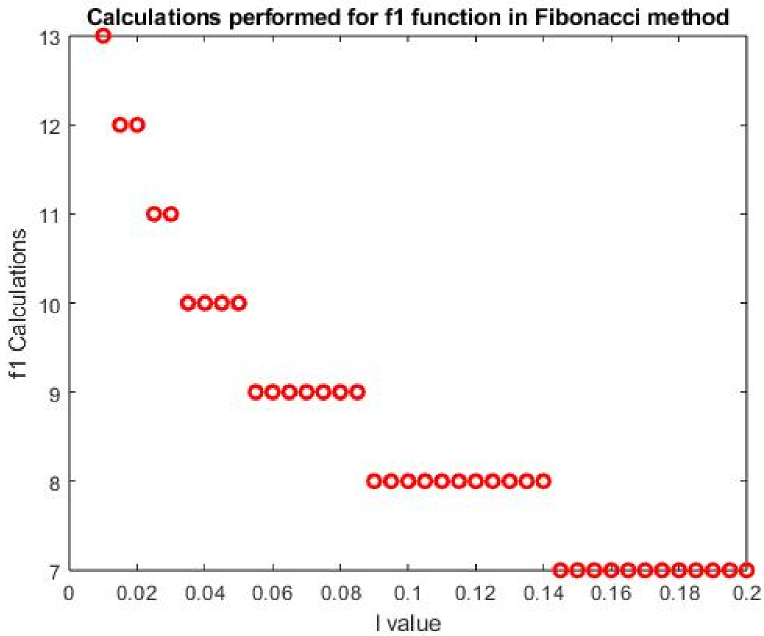
4. Μέθοδος Fibonacci

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για τη μέθοδο Fibonacci που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου. Η μέθοδος Fibonacci εκμεταλλεύεται τις ιδιότητες των αριθμών (ακολουθίας) Fibonacci.
Σχετικά με το project στο Matlab, μια διαφοροποίηση που υπάρχει, σε σχέση με τις δύο παραπάνω μεθόδους, είναι ότι ο αλγόριθμος Fibonacci γράφτηκε σε ξεχωριστό script αρχείο από τον κώδικα δημιουργίας των διαγραμμάτων.

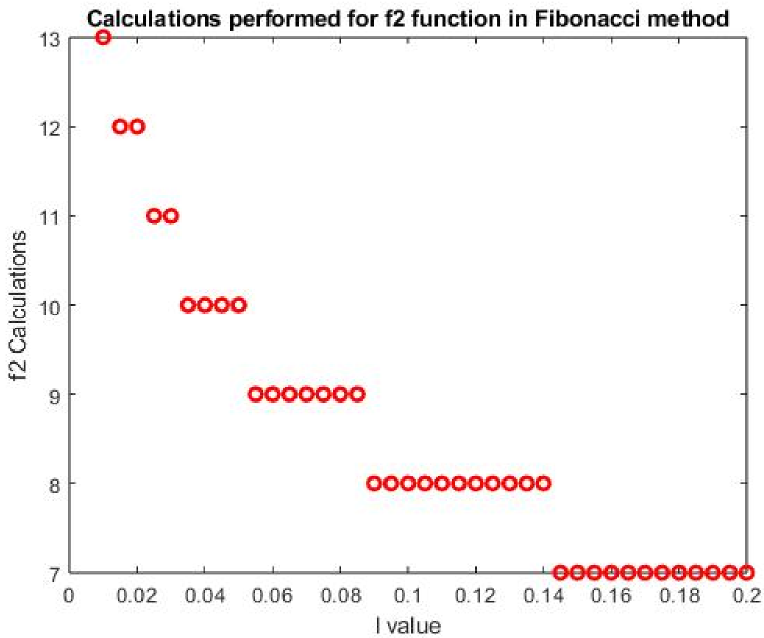
Θέτουμε την τιμή της παραμέτρου ε ίση με 0.001, ενώ το l ακολουθεί τις τιμές 0.01:0.005:0.2, όπως και στις δύο παραπάνω μεθόδους.

4.1 Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης με μεταβλητό *l*

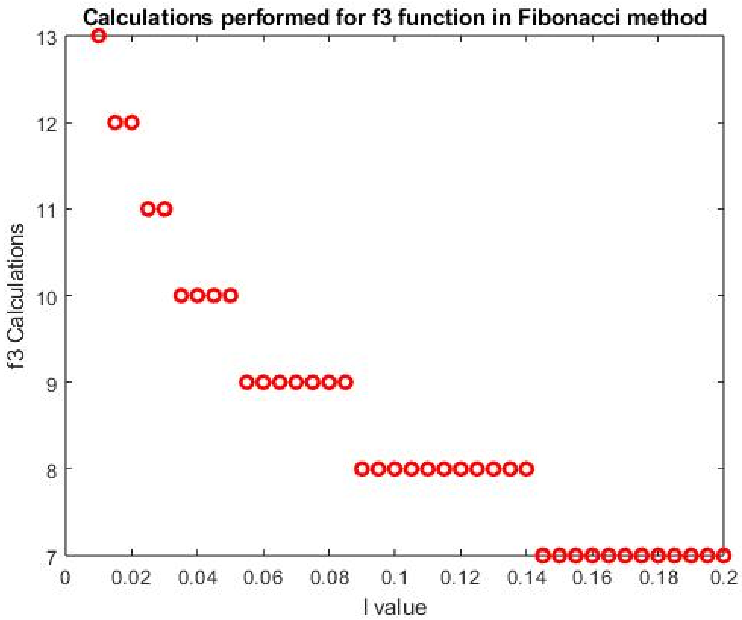
Ακολουθώντας τον αλγόριθμο του βιβλίου, παράγουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



Εικόνα 16. Υπολογισμοί f1 με μεταβλητό l για μέθοδο Fibonacci



Εικόνα 17. Υπολογισμοί f2 με μεταβλητό l για μέθοδο Fibonacci

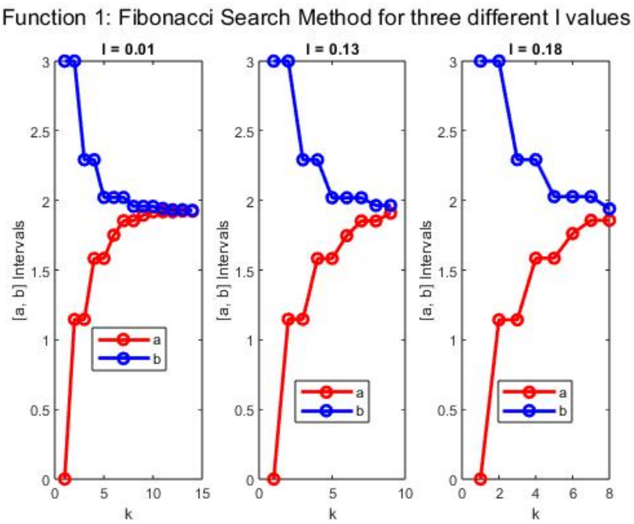


Εικόνα 18. Υπολογισμοί f3 με μεταβλητό l για μέθοδο Fibonacci

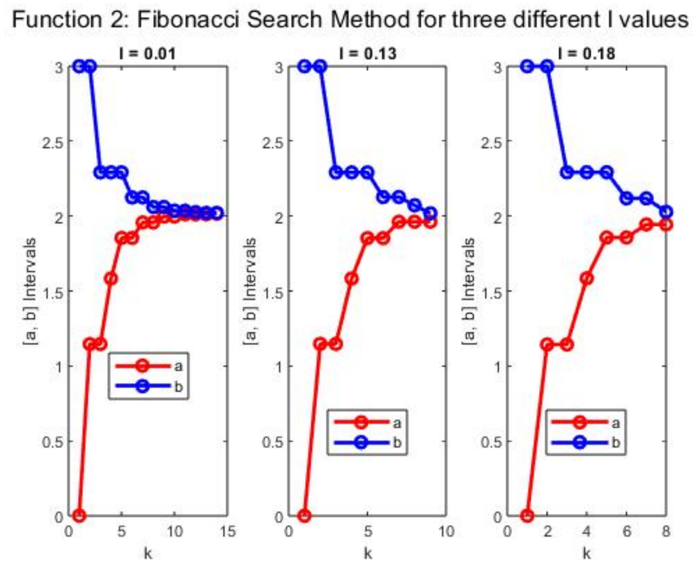
Μια σημαντική διαφοροποίηση του αλγορίθμου αυτού σε σχέση με τους παραπάνω αλγορίθμους είναι πως σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, έχουμε έναν (1) υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.

4.2 Άκρα του διαστήματος [a_k,b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος *k*

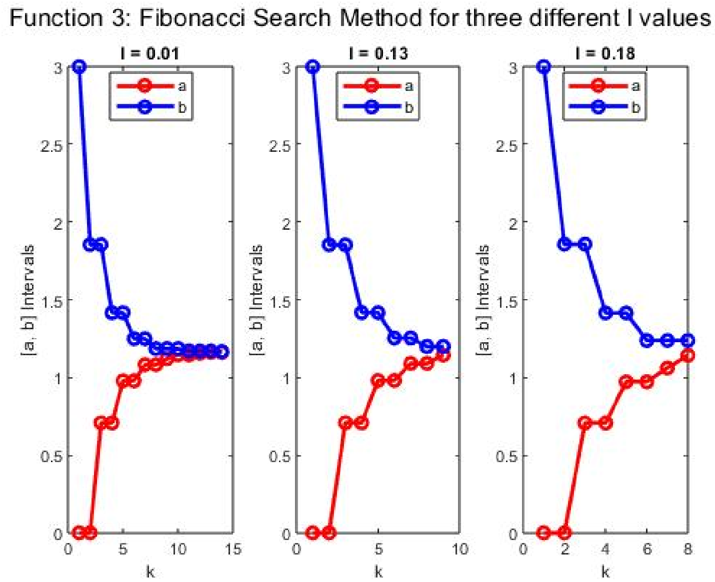
Σε αυτό το μέρος δίνουμε στο *l* τις τιμές l = 0.01, l = 0.13 και l = 0.18 , δημιουργούμε τρία διαγράμματα (ένα για κάθε συνάρτηση), όπου σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k , b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος k. Η τιμή της παραμέτρου ε παραμένει 0.001. Τα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 19 Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f1



Εικόνα 10 Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f2



Εικόνα 21. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f3

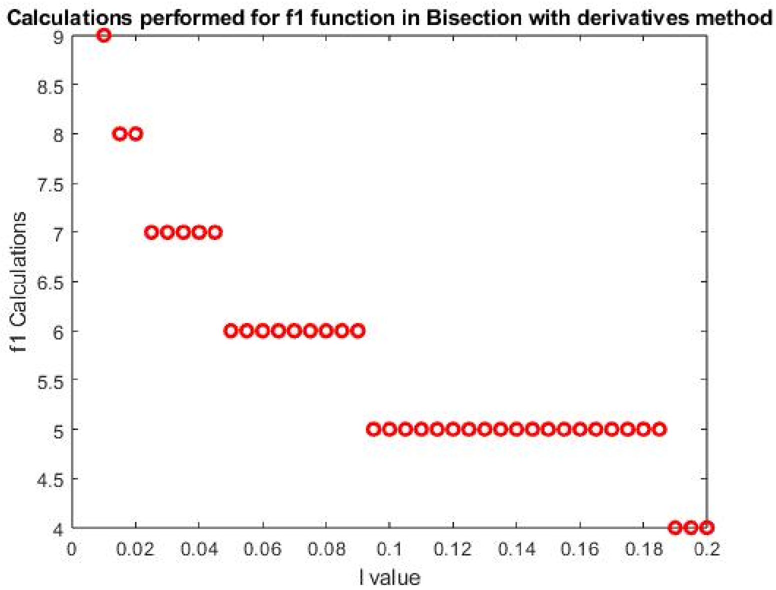
Παρατηρούμε, όπως και στις προηγούμενες μεθόδους, πως όσο αυξάνεται το l (μειώνεται η ακρίβεια εύρεσης του ελαχίστου), τόσο μειώνονται και οι επαναλήψεις του αλγορίθμου.

5. Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

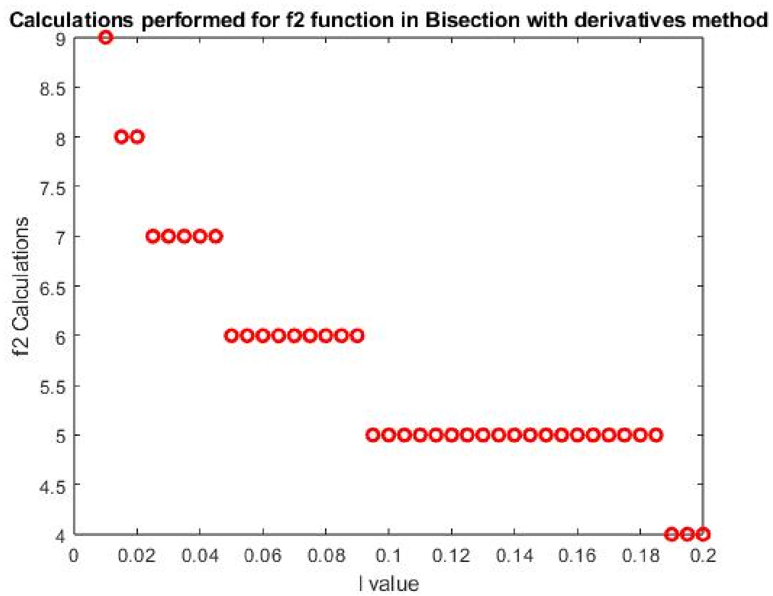
Σε αυτό το τελευταίο κομμάτι της εργασίας, εφαρμόζουμε μια μέθοδο η οποία απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης. Ακολουθούμε για άλλη μία φορά τον σχετικό αλγόριθμο που αναγράφεται στο βιβλίο του μαθήματος.

5.1 Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης με μεταβλητό *l*

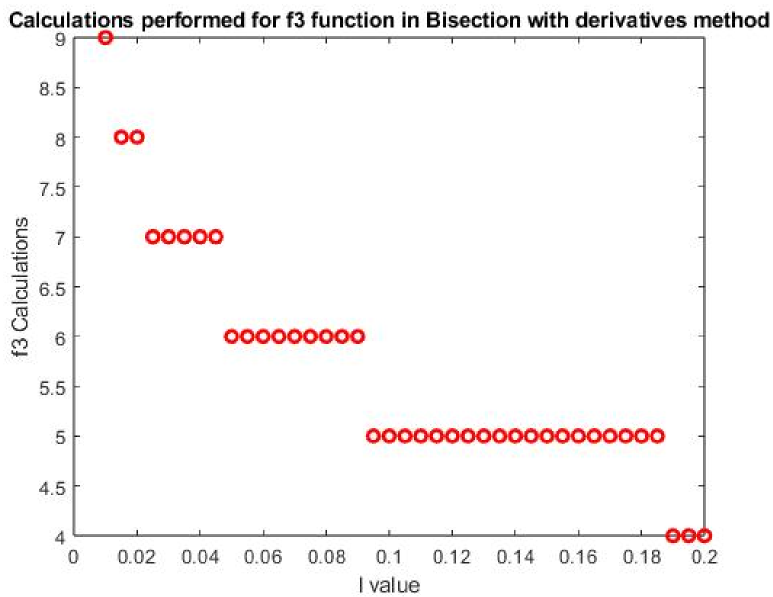
Οι τιμές για την παράμετρο l είναι ίδιες με τις προηγούμενες μεθόδους, δηλαδή
l = 0.01:0.005:0.2.
Για να επιλέξουμε τον αριθμό n (υπολογισμοί αντικειμενικής συνάρτησης), εφαρμόζουμε τον περιορισμό $(\frac{1}{2})^n \leq \frac{l}{b1-a1}$, όπου a1 = 0 και b1 = 3.
Τα διαγράμματα που παρουσιάζουν τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 22. Υπολογισμοί f1 με μεταβλητό l για μέθοδο Διχοτόμου με χρήση παραγώγου



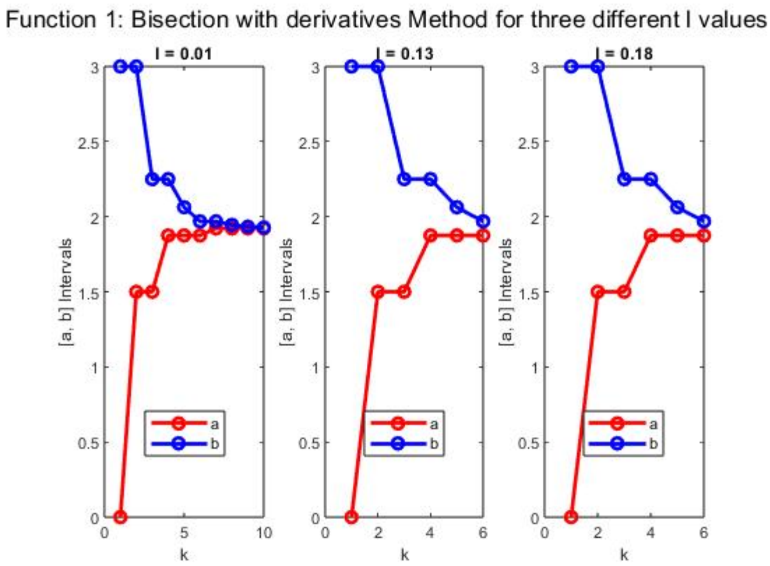
Εικόνα 23. Υπολογισμοί f2 με μεταβλητό l για μέθοδο Διχοτόμου με χρήση παραγώγου



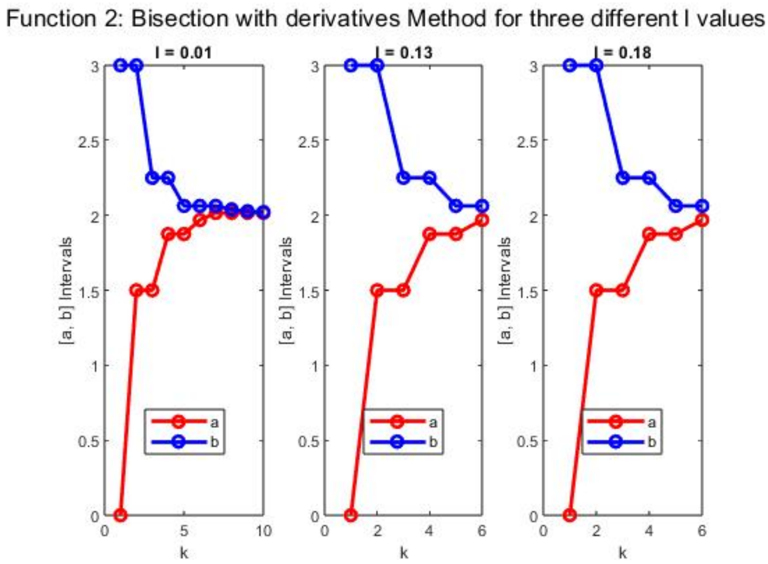
Εικόνα 24. Υπολογισμοί f3 με μεταβλητό l για μέθοδο Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

5.2 Άκρα του διαστήματος [a_k,b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος *k*

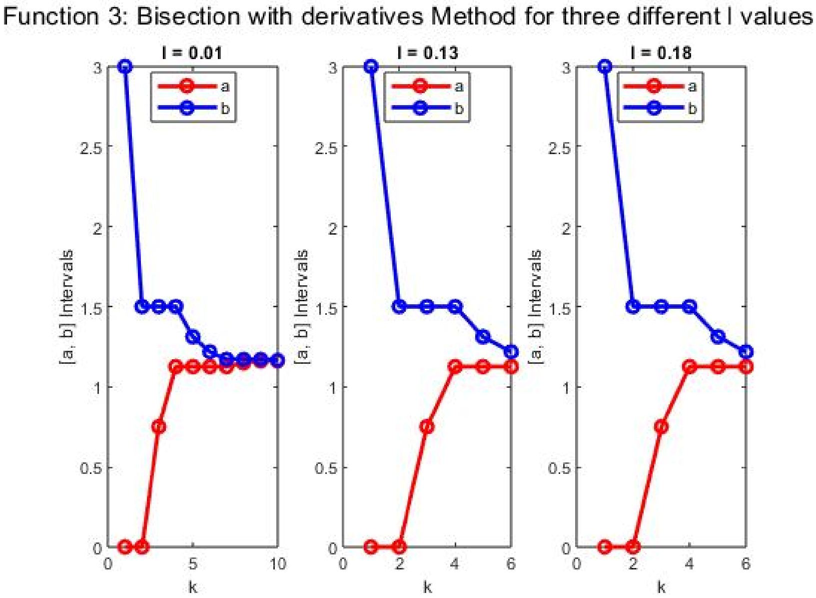
Σε αυτό το μέρος δίνουμε στο *l* τις τιμές l = 0.01, l = 0.13 και l = 0.18 , δημιουργούμε τρία διαγράμματα (ένα για κάθε συνάρτηση), όπου σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k , b_k] συναρτήσει του δείκτη βήματος k. Τα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 25. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f1



Εικόνα 26. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f2



Εικόνα 27. Άκρα διαστήματος [a,b] για τρεις τιμές l για τη συνάρτηση f3

Παρατηρούμε πως, για l = 0.13 και l = 0.18, απαιτούνται ίσα k βήματα για να τερματιστεί ο αλγόριθμος εύρεσης του ελαχίστου.

6. Τελικά Συμπεράσματα

Αρχικά, ως προς την ταχύτητα εκτέλεσης των προγραμμάτων/ αλγορίθμων εύρεσης του ελαχίστου, τονίζουμε πως οι δύο πρώτες μέθοδοι (Διχοτόμου και Χρυσού Τομέα) είναι αισθητά πιο γρήγορες από τη μέθοδο Fibonacci και Διχοτόμου με χρήση παραγώγων. Ειδικά, η τελευταία μέθοδος είναι η πιο χρονοβόρα.

Ως προς τα βήματα (επαναλήψεις) που απαιτούνται για να τερματιστούν οι αλγόριθμοι, φαίνεται από τα διαγράμματα πως λιγότερες επαναλήψεις χρειάζεται ο αλγόριθμος της διχοτόμου με τη χρήση παραγώγων. Από τις μεθόδους χωρίς της χρήση παραγώγων, πιο αποτελεσματική είναι η μέθοδος Fibonacci, όπως εξάλλου μας πληροφορεί και το βιβλίο.