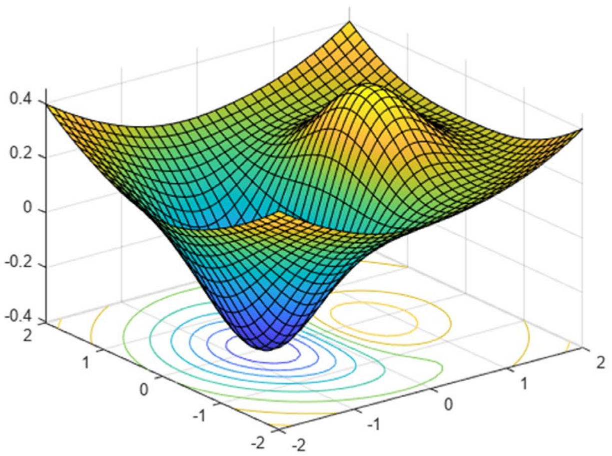


Νομικός Γεώργιος
ΑΕΜ: 9857

Καθηγητής: **Γεώργιος Ροβιθάκης**

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πίνακες

1. Περιγραφή του προβλήματος

Στην εργασία αυτή σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση μίας δοσμένης αντικειμενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε για να ελαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots$ έτσι ώστε $f(x_{k+1}) < f(x_k), k = 1,2, \dots$.

Οι αλγόριθμοι αναζήτησης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Η υπό μελέτη αντικειμενική συνάρτηση είναι η:

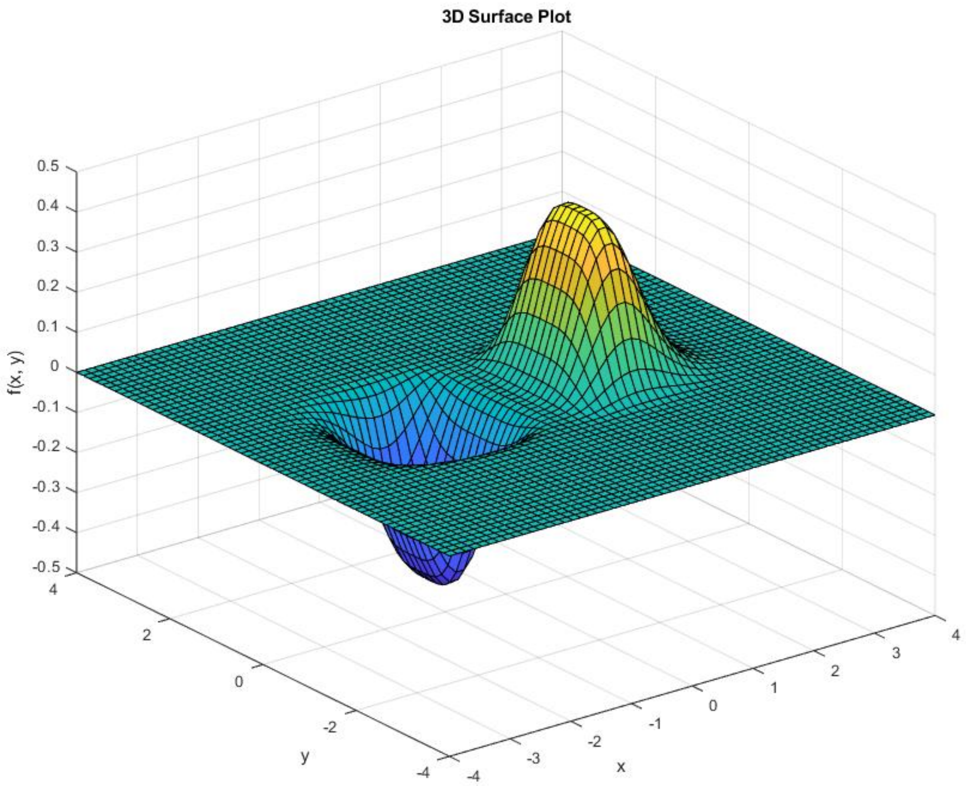
$$f(x, y) = x^3 e^{-x^2-y^4}$$

Οι μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου υλοποιήθηκαν σε υπολογιστικό περιβάλλον Matlab, όπου, για τη συγγραφή του κώδικα κάθε αλγορίθμου, ακολουθήθηκαν τα βήματα που περιγράφονται αναλυτικά στο βιβλίο «ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ» (συγγραφέας: Γεώργιος Α. Ροβιθάκης), στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου.

Στον φάκελο της εργασίας περιλαμβάνονται τέσσερα scripts, ένα για κάθε ερώτημα της εργασίας, με ονόματα «Thema1», «Thema2», «Thema3» και «Thema4». Επίσης περιλαμβάνονται τρία scripts για τις τρεις μεθόδους αναζήτησης ελαχίστου, με ονόματα «Steepest_Descent», «Newton_method» και «Levenberg_Marquardt», όπως ακόμη και δύο scripts με ονόματα «Minimizef» και «Armijo», που αποτελούν υπορουτίνες, χρήσιμες για τις μεθόδους αναζήτησης ελαχίστου.

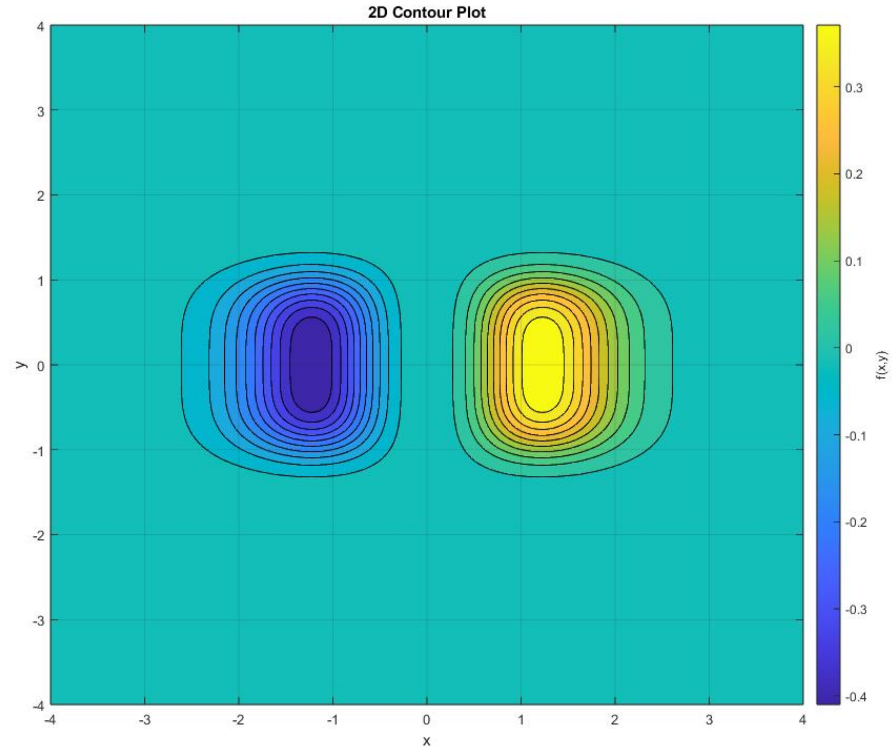
2. Σχεδιασμός της αντικειμενικής συνάρτηση f

Πρώτο ζητούμενο της εργασίας είναι η δημιουργία της γραφικής παράστασης της αντικειμενικής συνάρτησης. Τρέχοντας τον κώδικα του αρχείου “Thema1”, δημιουργούμε τρεις γραφικές παραστάσεις. Στην πρώτη έχουμε τις μεταβλητές x και y στους δύο άξονες και τις τιμές f(x,y) στον τρίτο άξονα. Οι μεταβλητές x, y παίρνουν τιμές από -4 έως 4.
Η γραφική φαίνεται παρακάτω:



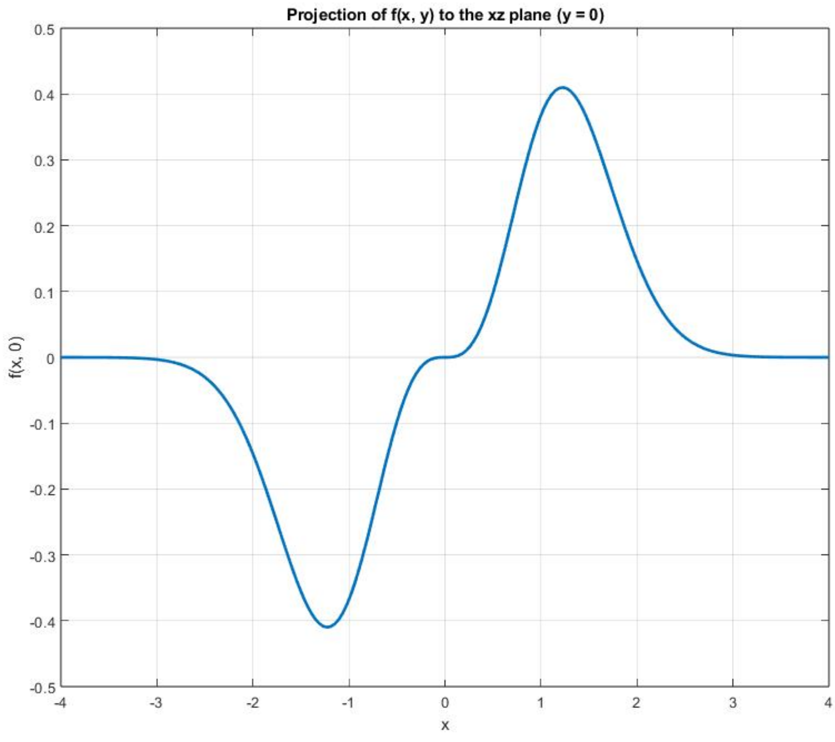
Εικόνα 1. 3D γραφική παράσταση της f(x,y)

Στη συνέχεια, δημιουργούμε μία προβολή της συνάρτησης f στο επίπεδο xy, όπου οι μεταβολή στις τιμές f(x,y) φαίνεται με τη μεταβολή του χρώματος στην γραφική παράσταση.



Εικόνα 2. Προβολή της f(x,y) στο επίπεδο xy

Τέλος, δημιουργούμε την προβολή της f στο επίπεδο xz, όπου z = f(x,y), δηλαδή για y = 0:



Εικόνα 3. Προβολή της f(x,y) στο xz επίπεδο

Από τα τρία αυτά σχήματα, καταλαβαίνουμε πως η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f είναι κοντά στο -0.4. Επίσης, παρατηρούμε ότι για x=0 και για y στην περιοχή του μηδενός, η συνάρτηση f έχει κρίσιμα σημεία, τα οποία δεν είναι ούτε (ολικά) μέγιστα, ούτε (ολικά) ελάχιστα. Τα σημεία αυτά θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, καθώς θα δημιουργούν εμπόδιο στους αλγορίθμους που θα αναπτύξουμε.

3. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)

Σε αυτό το μέρος της εργασίας, ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση f χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου (Steepest Descent). Ο αλγόριθμος αυτός περιλαμβάνει την παράμετρο βήματος gamma(k), την οποία θα την ορίσουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος είναι κρατώντας το βήμα gamma(k) σταθερό. Ειδικότερα, δοκιμάζουμε τις τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8. Ο δεύτερος είναι μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x_k + \gamma_k d_k)$ ως προς γ_k, σε κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου. Ο τρίτος τρόπος συνιστά την εφαρμογή του κανόνα Armijo, , σε κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου, όπως αυτός παρουσιάζεται στο βιβλίο (σελ: 140).

Ορίζουμε σταθερά τερματισμού του αλγορίθμου την τιμή *ε = 0.005.*

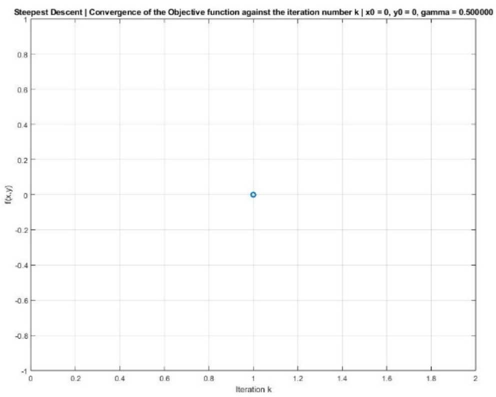
Τα σημεία εκκίνησης του αλγορίθμου είναι τρία:

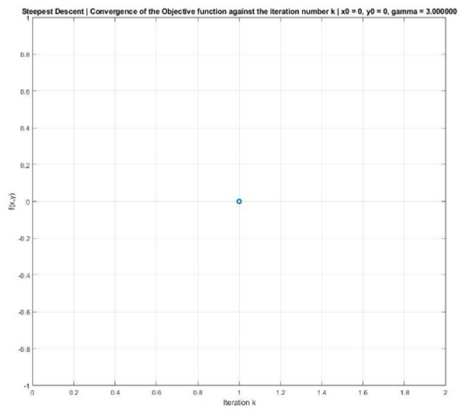
1. $(x_0, y_0) = (0,0)$
2. $(x_0, y_0) = (-1,-1)$
3. $(x_0, y_0) = (1,1)$

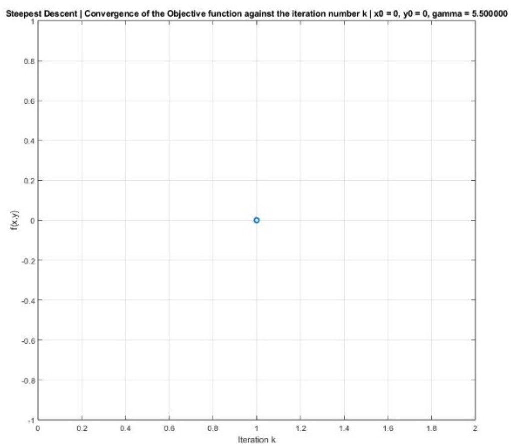
3.1 Steepest Descent, αρχικό σημείο (0,0)

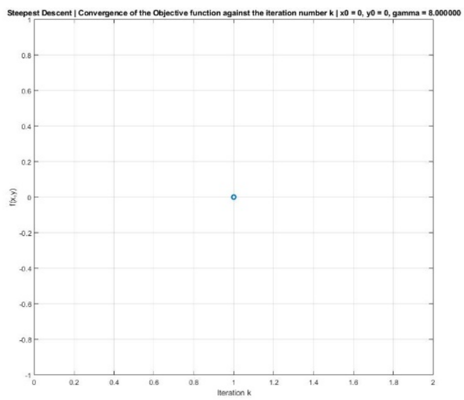
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο steepest descent για αρχικό σημείο το (0,0), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αυτά μας δίνουν τις τιμές f(x,y) της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου.

A. Σταθερό γ_k με τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8:

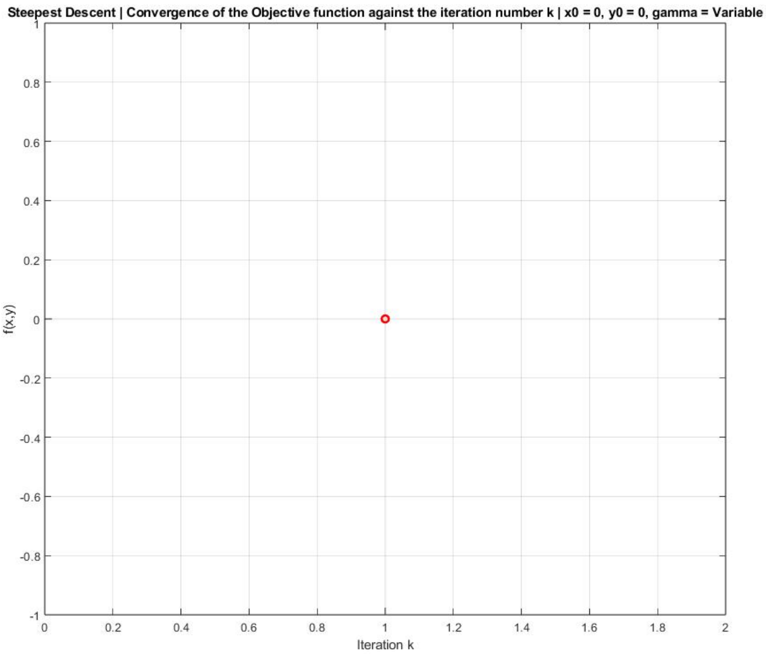




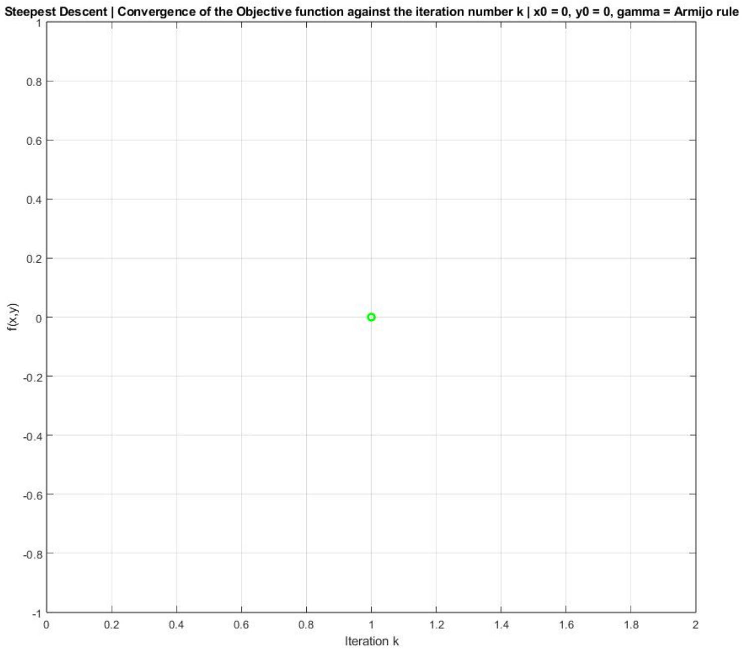




Β. γ_k ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$:



Γ. γ_k ακολουθεί τον κανόνα Armijo:

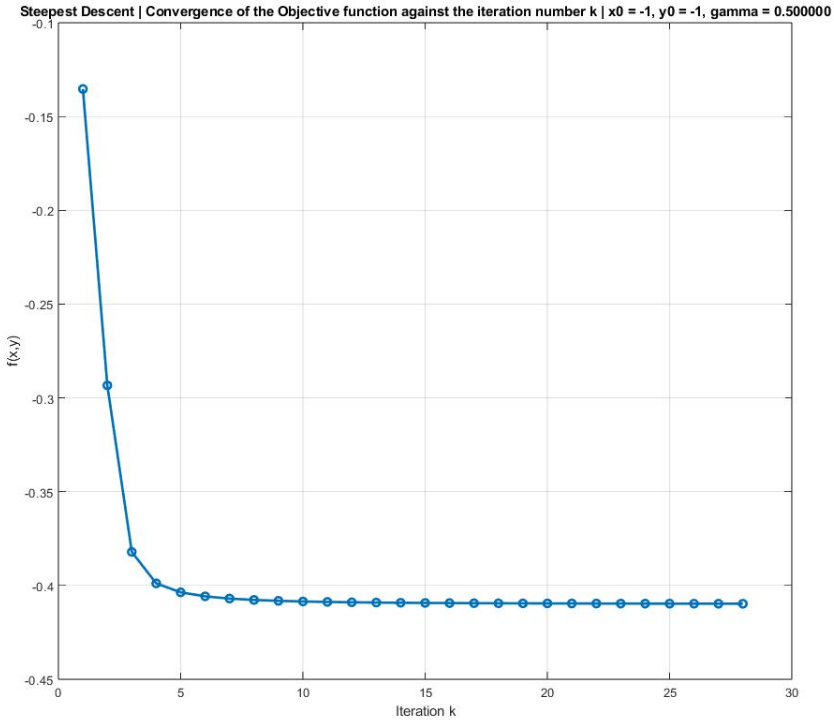


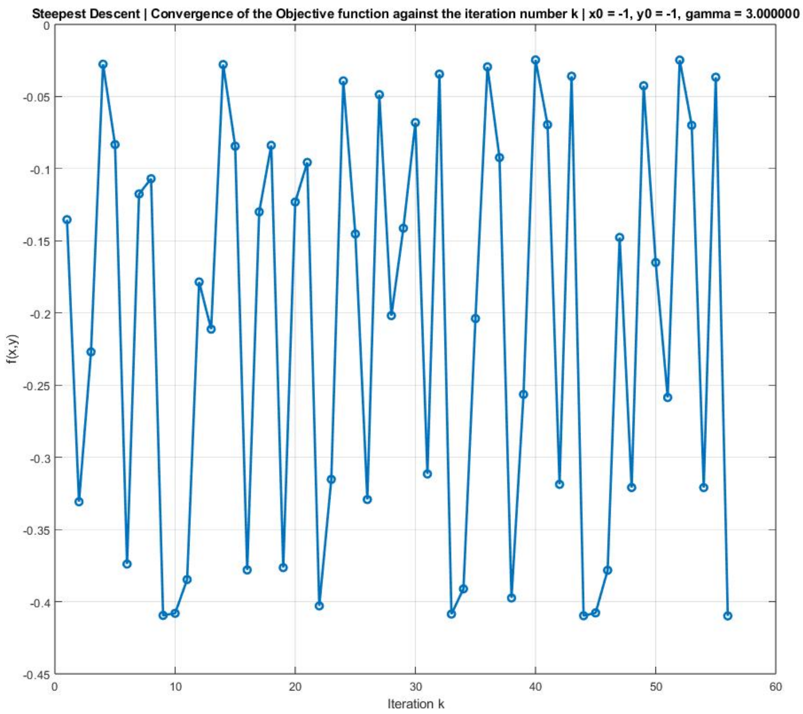
Από όλα τα παραπάνω σχήματα, διαπιστώνουμε πως ο αλγόριθμος δεν εντοπίζει το ελάχιστο της συνάρτησης. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του μηδενισμού της παραγώγου (μερικής) της συνάρτησης f στο σημείο αυτό. Ο μηδενισμός αυτός συνεπάγεται την άμεση ενεργοποίηση του κριτηρίου τερματισμού του αλγορίθμου, δηλαδή $|\nabla f(x_k)| < \varepsilon$.

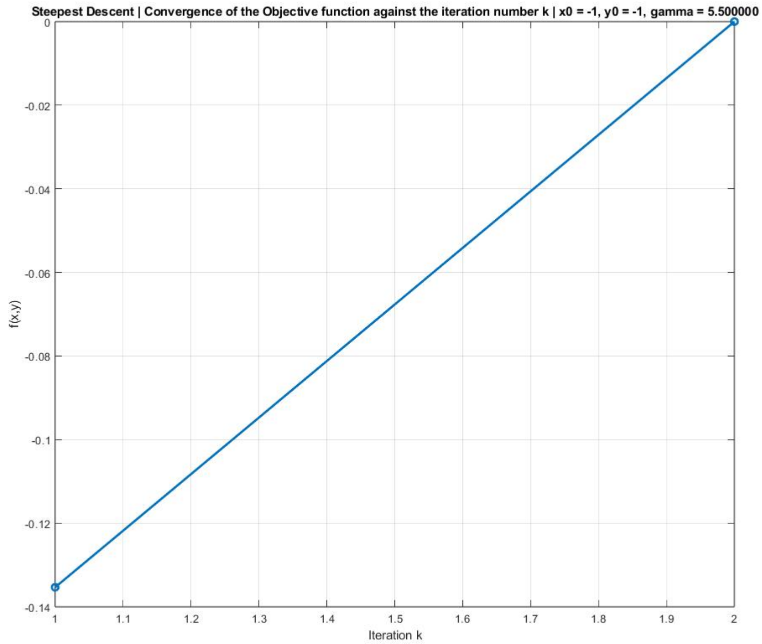
3.2 Steepest Descent, αρχικό σημείο (-1, -1)

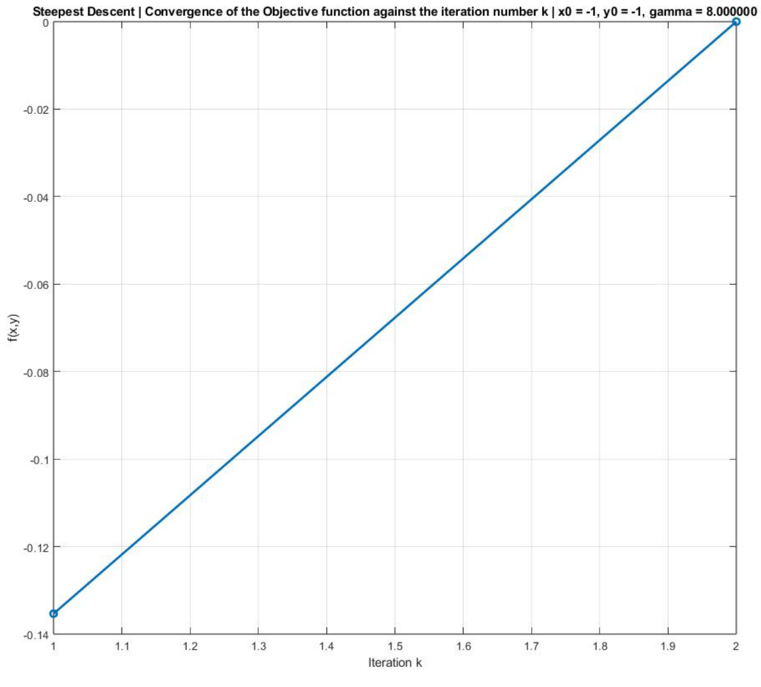
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο steepest descent για αρχικό σημείο το (-1,-1), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αυτά μας δίνουν τις τιμές f(x,y) της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου.

A. Σταθερό γ_k με τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8:



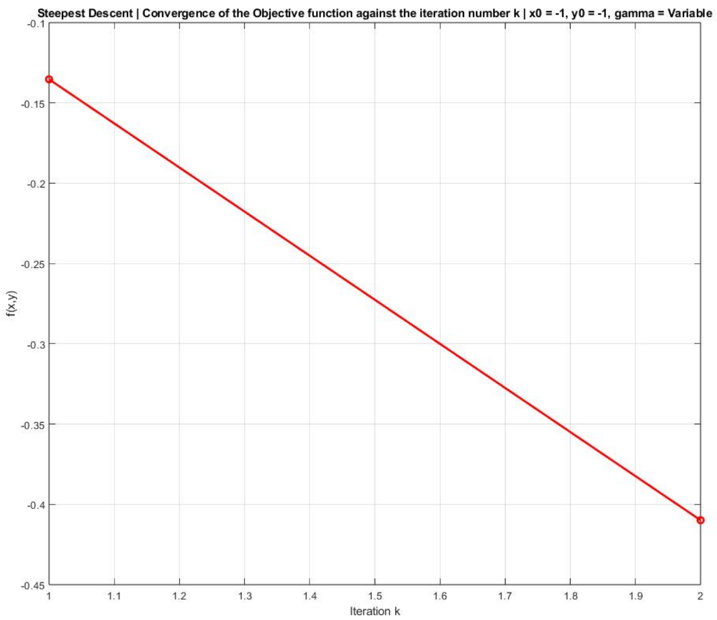






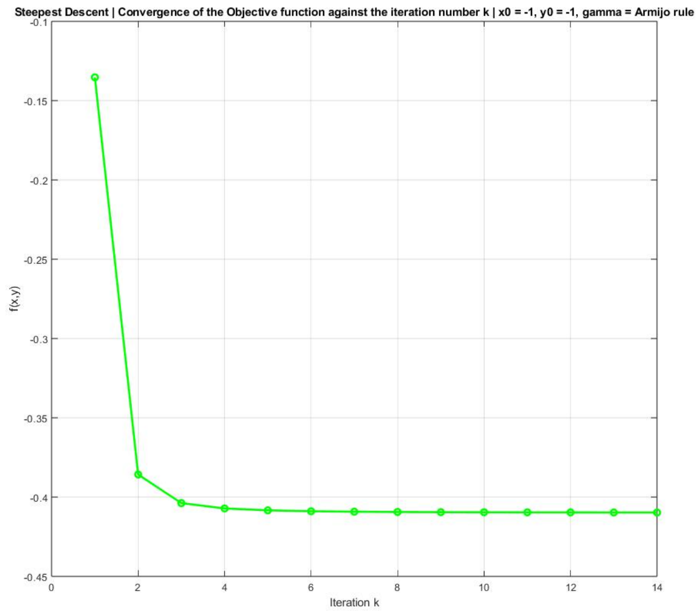
Στις παραπάνω περιπτώσεις, όπου το γ_k παραμένει σταθερό, συναντάμε τρεις διαφορετικές συμπεριφορές του αλγορίθμου. Για gamma(k) = 0.5 ο αλγόριθμος φτάνει πράγματι στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε 28 βήματα, η οποία είναι (περίπου) -0.409. Για γ_k = 3, ο αλγόριθμος παρουσιάζει ταλαντώσεις μέχρι να φτάσει τελικά στην ελάχιστη τιμή, μετά από 56 βήματα k. Για γ_k = 5.5 και γ_k = 8, ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται με λάθος τρόπο και, αντί να οδηγηθούμε στην ελάχιστη τιμή, πέφτουμε πάνω στο μηδέν, όπου η μέθοδος της μέγιστης καθόδου παγιδεύεται και τερματίζει.

Β. γ_k ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$:



Στην περίπτωση επιλογής του γ_k μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x_k + \gamma_k d_k)$, παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος καταλήγει άμεσα, σε ένα βήμα, στην ελάχιστη τιμή -0.409. Ο τρόπος που πραγματοποιείται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f(x_k + \gamma_k d_k)$ είναι με χρήση της μεθόδου Διχοτόμου με χρήση παραγώγων. Αρχικό διάστημα αναζήτησης για το ελάχιστο της εν λόγω συνάρτησης ορίστηκε το [0, 10]. Η λάμδα (*l*) παράμετρος τερματισμού της μεθόδου ορίστηκε ως l = 0.001. Από το τελικό διάστημα [α, β] μέσα στο οποίο κατέληξε η μέθοδος ότι βρίσκεται το ελάχιστο της συνάρτησης, κρατήσαμε σαν τιμή γ_k την μέση τιμή (αρχείο “Minimizef.m”).

Γ. γ_k ακολουθεί τον κανόνα Armijo:

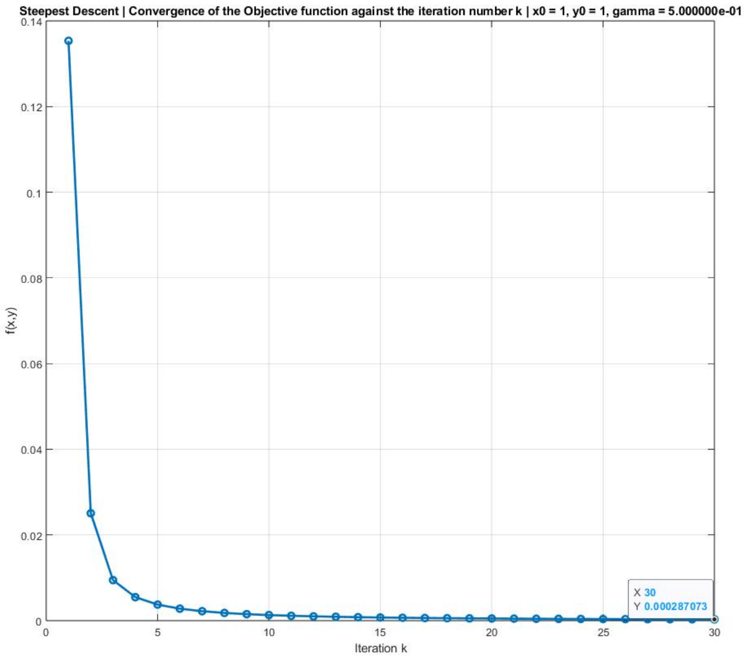


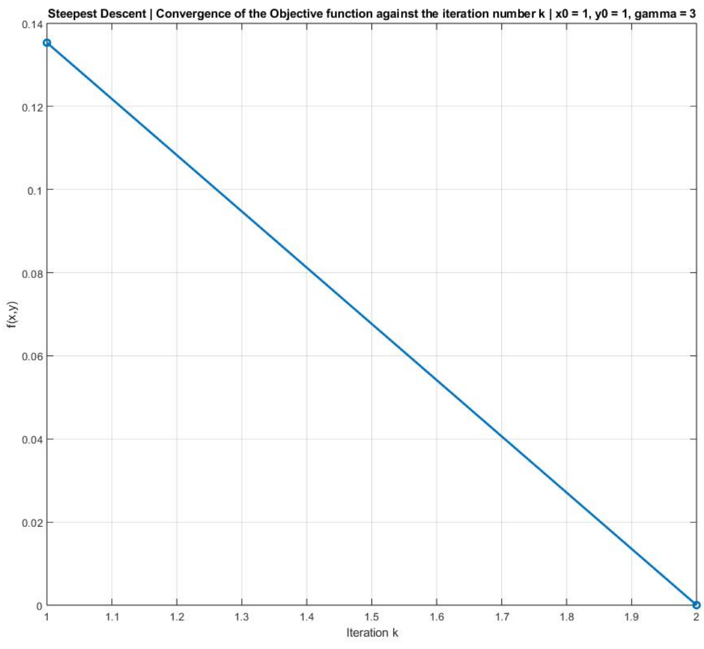
Η χρήση του κανόνα Armijo για την ενημέρωση της παραμέτρου γ_k οδήγησε, όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, στην εύρεση της ελάχιστης τιμή (-0.409), έπειτα από 14 βήματα k.

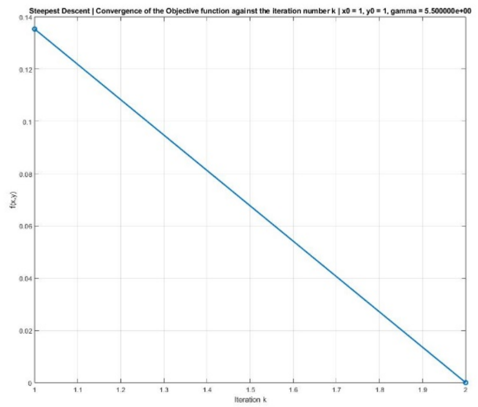
3.3 Steepest Descent, αρχικό σημείο (1,1)

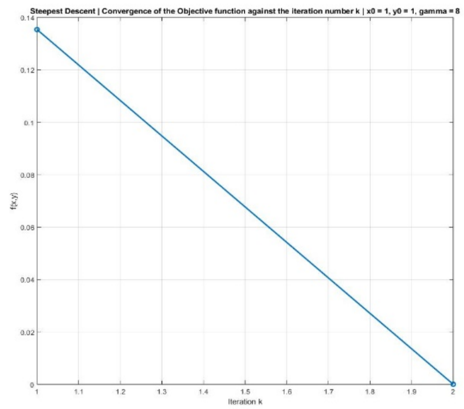
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο steepest descent για αρχικό σημείο το (1,1), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αυτά μας δίνουν τις τιμές f(x,y) της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου.

Α. Σταθερό γ_k με τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8:



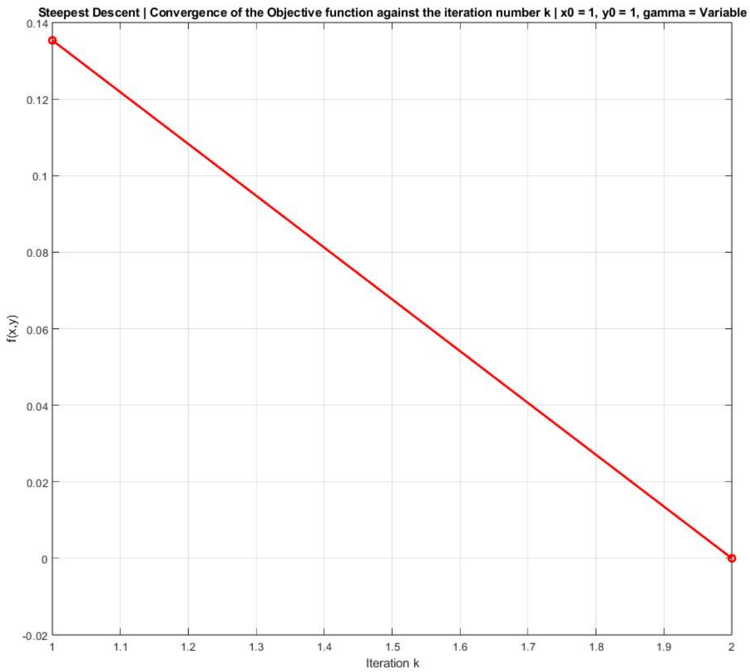






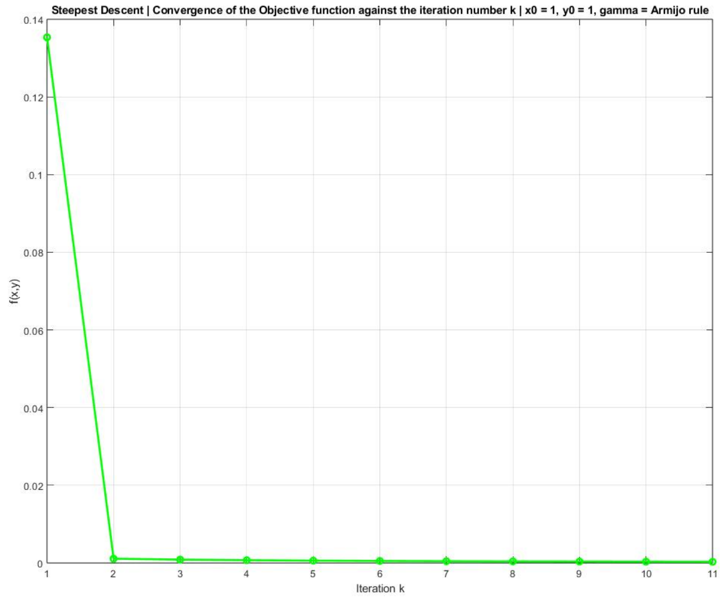
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται πως, για γ_k = 0.5, η μέθοδος φτάνει μετά από 30 επαναλήψεις στην τιμή 0, όπου και παγιδεύεται, οπότε τερματίζει εκεί. Για gamma(k) =3, γ_k = 5.5 και γ_k = 8, χρειάζεται μόλις ένα βήμα για να παγιδευτεί η μέθοδος στο μηδέν.

B. γ_k ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$:



Στην περίπτωση επιλογής του γ_k μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x_k + \gamma_k d_k)$, παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος καταλήγει άμεσα, σε ένα βήμα, στην τιμή 0, όπου και παγιδεύεται.

Γ. γ_k ακολουθεί τον κανόνα Armijo:



Στην περίπτωση εφαρμογής του κανόνα Armijo για την ενημέρωση του γ_k, φαίνεται από το παραπάνω σχήμα ότι, σε 11 βήματα k, ο αλγόριθμος έχει παγιδευτεί στο 0 και τερματίζει, χωρίς να φτάσει στο ελάχιστο.

4. Μέθοδος Newton

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για τη μέθοδο Newton που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου. (σελ. 126). Η μέθοδος αυτή έχει την απαίτηση ο Εσσιανός πίνακας της αντικειμενικής συνάρτησης, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\[2.2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\[2.2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\[2.2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

να είναι θετικά ορισμένος.

Προκειμένου να υπολογίσουμε αν όντως ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος στο σημείο x_k της επανάληψης του αλγορίθμου (αρχείο Newton_method.m), ελέγχουμε αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Εκτελώντας τον κώδικα Matlab συμπεραίνουμε πως ο Εσσιανός πίνακας δεν είναι θετικά ορισμένος, οπότε ο αλγόριθμος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του ελάχιστου της αντικειμενικής συνάρτησης f.

5. Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Levenberg-Marquardt, που παρουσιάζεται στο βιβλίο (σελ. 139). Η μέθοδος αυτή αποτελεί μία τροποποίηση της μεθόδου Newton, η οποία αντιμετωπίζει τις περιπτώσεις όπου ο Εσσιανός πίνακας της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο x_k είναι μη θετικά ορισμένος. Συγκεκριμένα, προσθέτουμε έναν μοναδιαίο πίνακα στον Εσσιανό, αφού πρώτα τον πολλαπλασιάσουμε (τον μοναδιαίο) με μία τιμή μ_k. Ζητούμενο είναι να βρούμε την κατάλληλη τιμή μ_k.

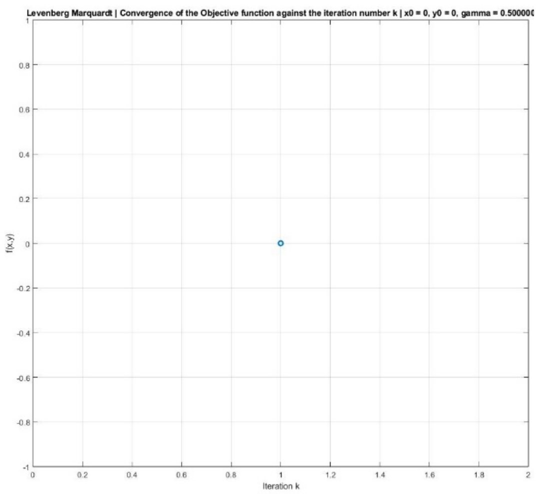
Εφαρμόζουμε, στη συνέχεια, όπως και στη μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου, αρχικά σημεία εκκίνησης του αλγόριθμου τα:

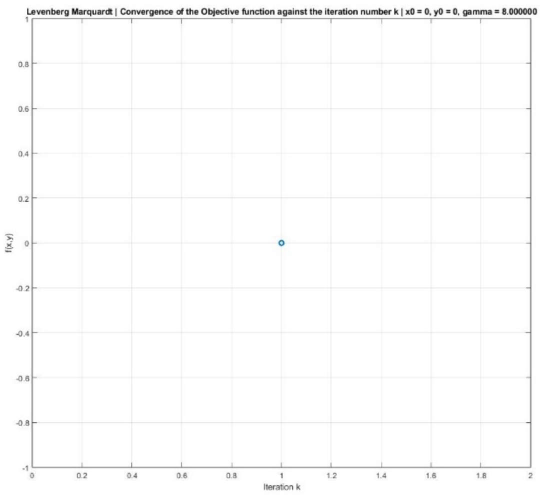
1. $(x_0, y_0) = (0,0)$
2. $(x_0, y_0) = (-1,-1)$
3. $(x_0, y_0) = (1,1)$

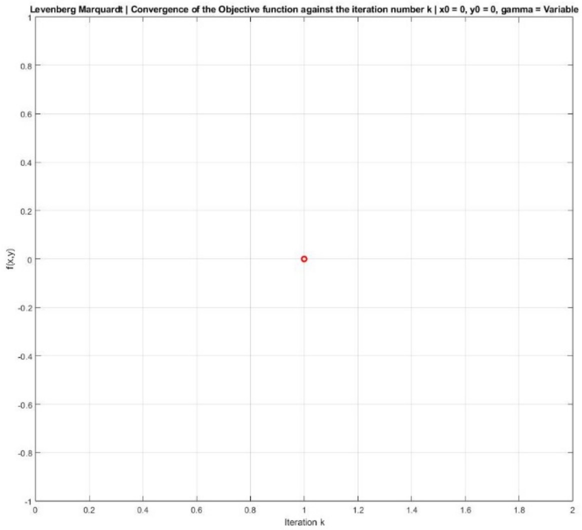
Η επιλογή της τιμής γ_k θα γίνει πάλι με τρεις τρόπους, δηλαδή γ_k σταθερό, γ_k που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$, γ_k που ακολουθεί τον κανόνα Armijo.

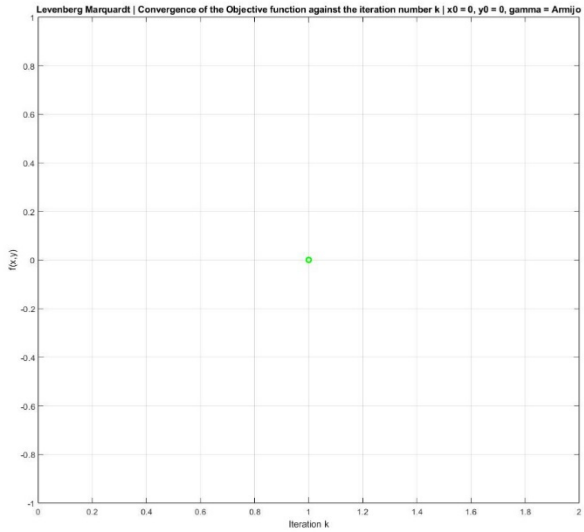
5.1 Levenberg-Marquardt, αρχικό σημείο (0,0)

Για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$, ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt συμπεριφέρεται όπως και η μέθοδος Steepest Descent, δηλαδή παγιδεύεται στο αρχικό σημείο, όπου τόσο η αντικειμενική συνάρτηση f όσο και οι μερικές παράγωγοί της μηδενίζονται. Ο αλγόριθμος, όπως φαίνεται στα τέσσερα παρακάτω σχήματα δεν προχωράει στην εύρεση του ελαχίστου.





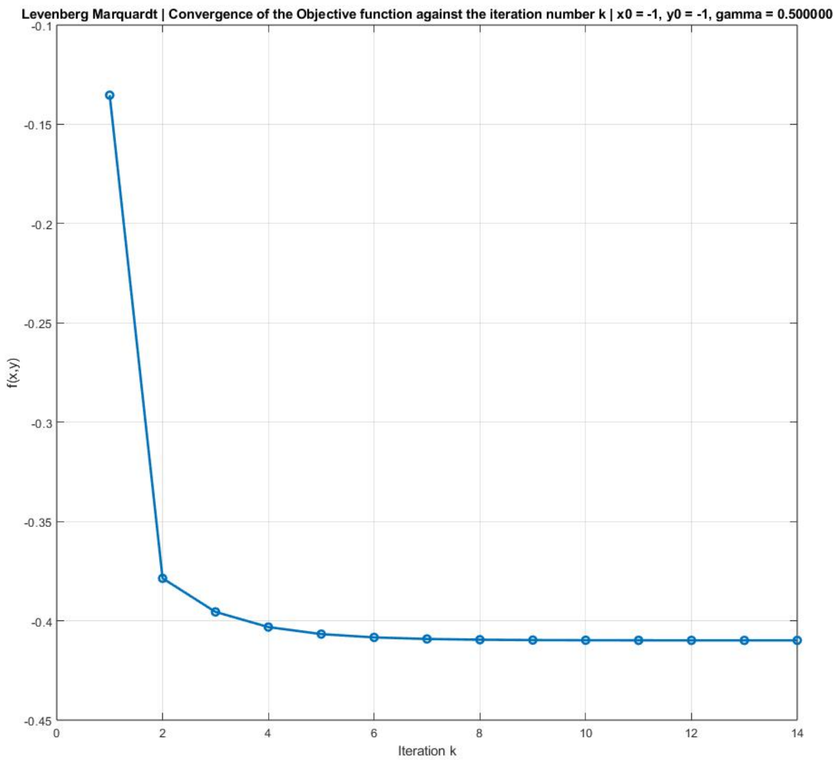


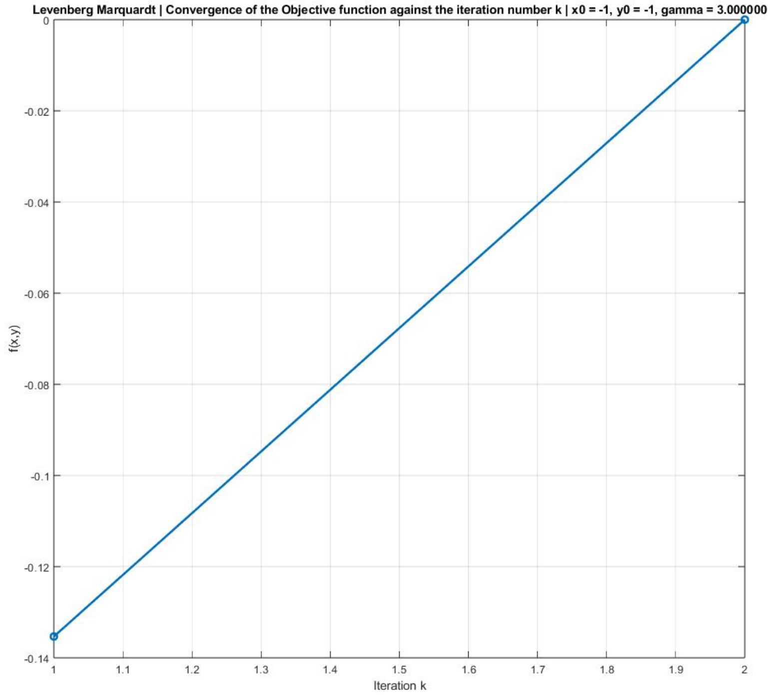


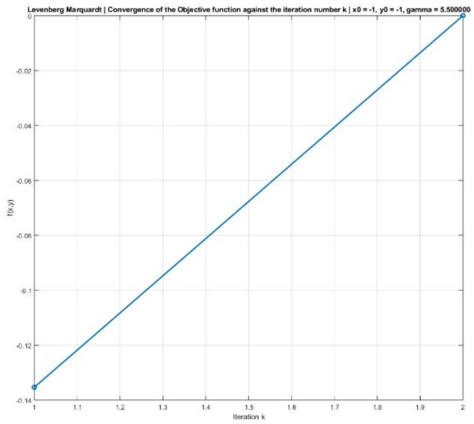
5.2 Levenberg-Marquardt, αρχικό σημείο (-1,-1)

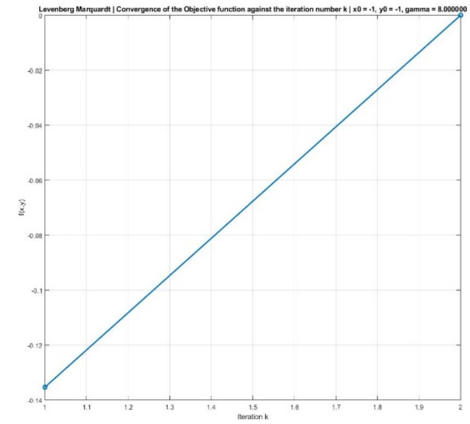
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt για αρχικό σημείο το (-1,-1), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αυτά μας δίνουν τις τιμές f(x,y) της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου.

A. Σταθερό γ_k με τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8:





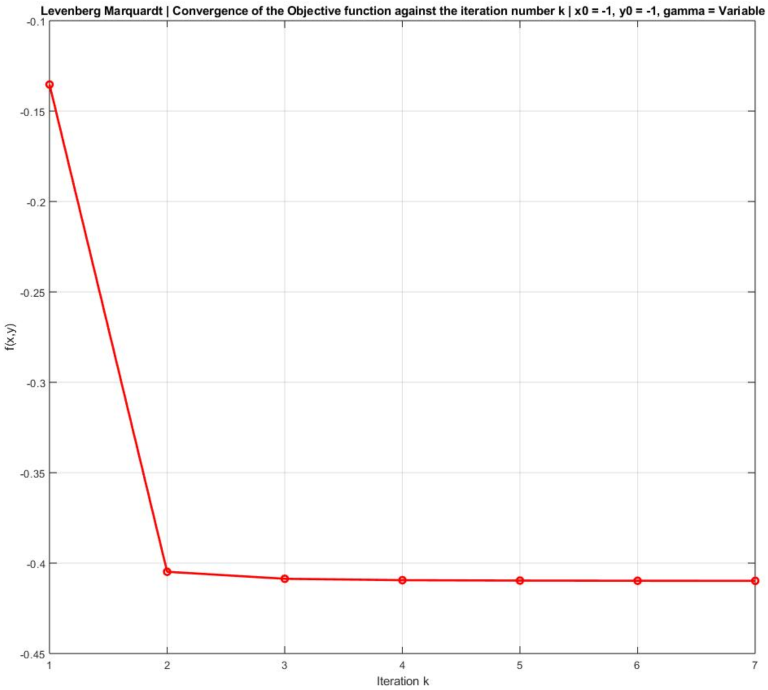




Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος για γ_k=0.5 εκτελείται και εντοπίζει την ελάχιστη τιμή $f(x,y) = -0.409$ σε 14 επαναλήψεις k. Ωστόσο, για γ_k={3, 5.5, 8}, ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται με λάθος τρόπο και οδηγείται στην τιμή $f(x,y) = 0$, όπου και παγιδεύεται, λόγω μηδενισμού αντικειμενικής συνάρτησης και μερικών παραγώγων.

B. γ_k ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$:

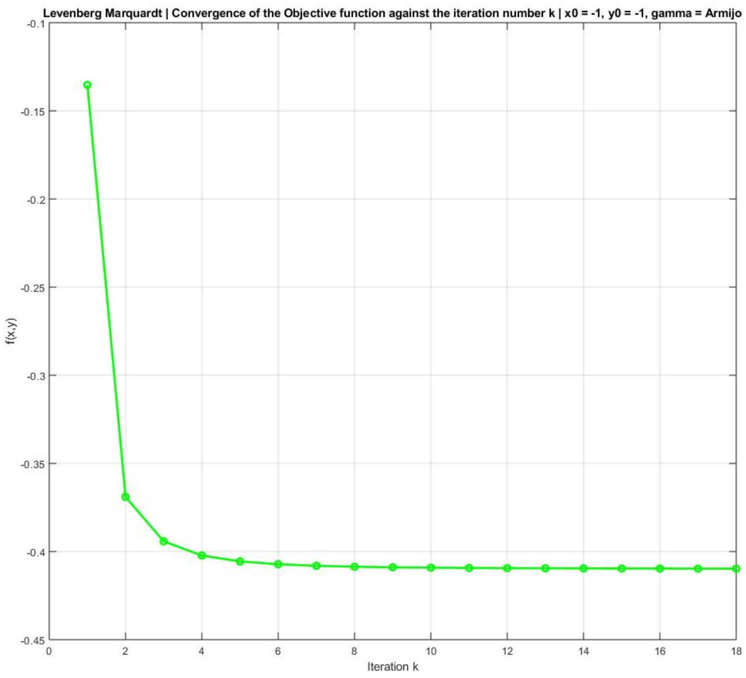
Η εύρεση του γ_k για την ελαχιστοποίηση της $f(x_k + \gamma_k d_k)$ πραγματοποιείται με την μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγων (αρχείο Minimizef.m). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Levenberg-Marquardt έχει καταλήξει στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, $f(x, y) = -0.409$, σε 7 βήματα.

Γ. γ_k ακολουθεί τον κανόνα Armijo:

Εφαρμόζοντας τον κανόνα Armijo (αρχείο Armijo.m), για την εύρεση του γ_k, καταλήγουμε στα παρακάτω αποτελέσματα:

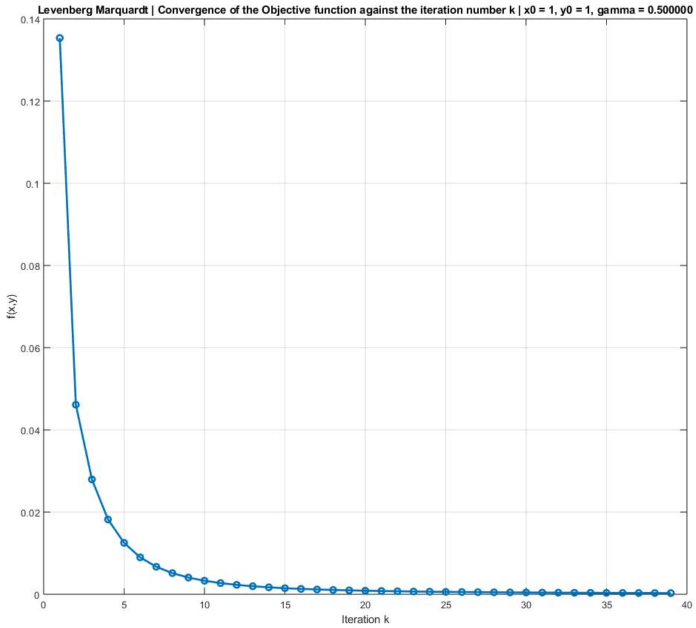


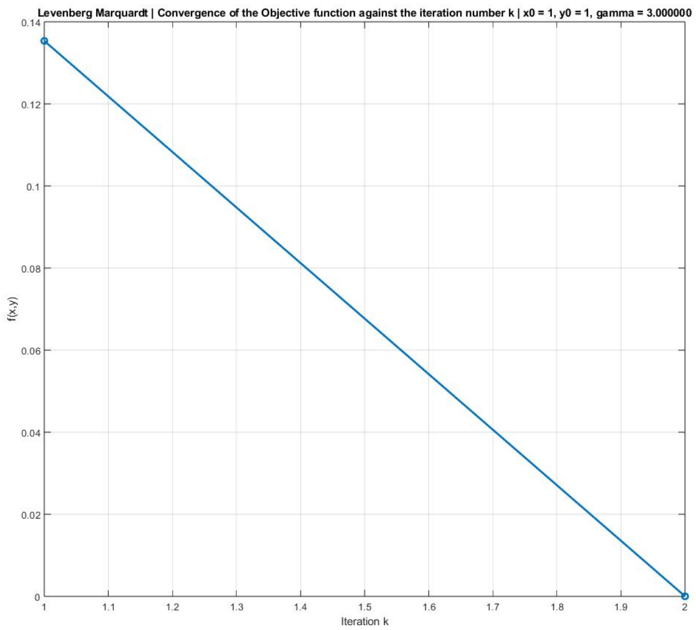
Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Levenberg-Marquardt έχει καταλήξει στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, $f(x,y) = -0.409$, σε 18 βήματα.

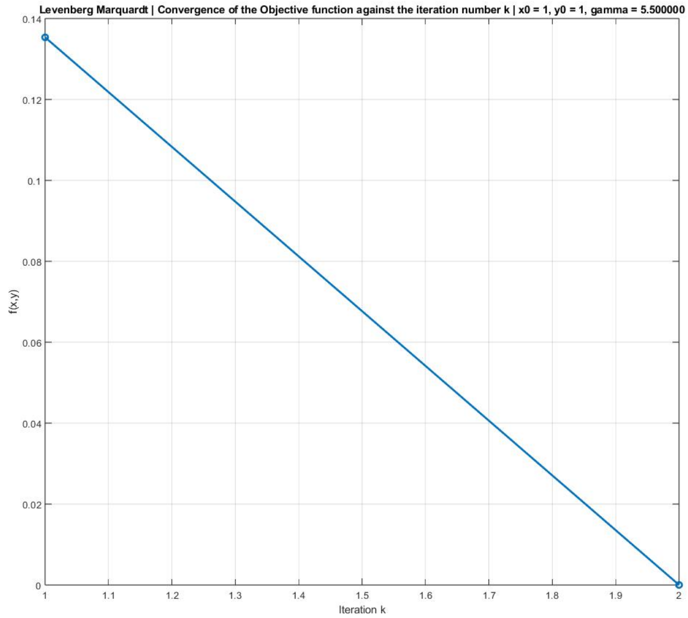
5.3 Levenberg-Marquardt, αρχικό σημείο (1,1)

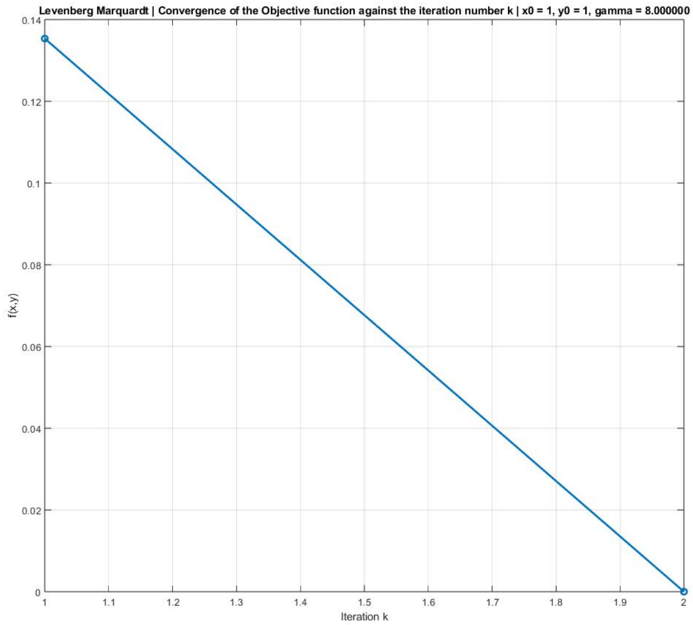
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt για αρχικό σημείο το (1,1), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αυτά μας δίνουν τις τιμές f(x,y) της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βήμα *k* του αλγορίθμου.

Α. Σταθερό γ_k με τιμές 0.5, 3, 5.5 και 8:



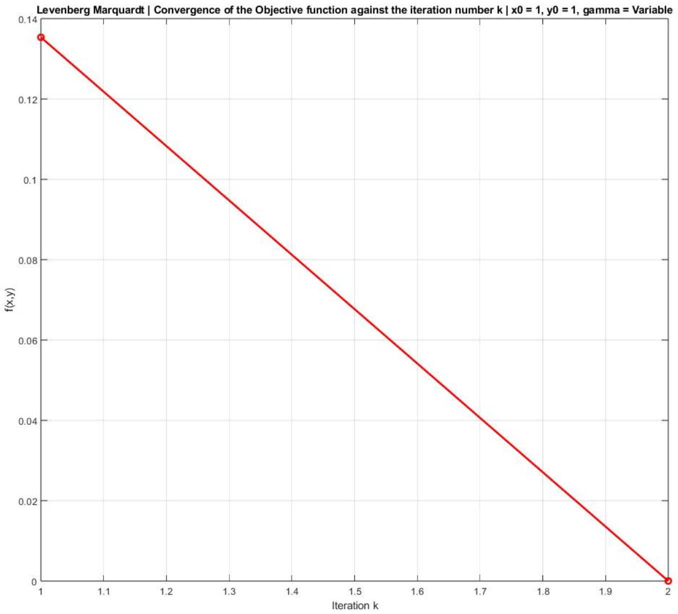






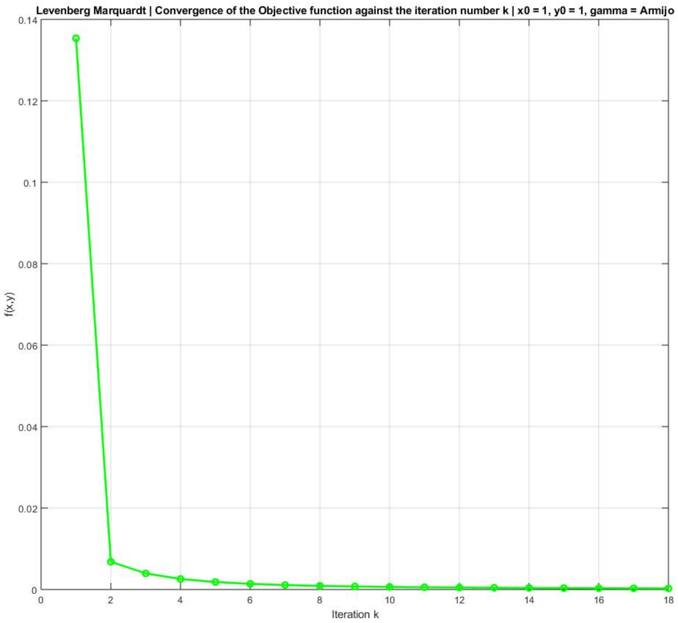
Από τα παραπάνω σχήματα, συμπεραίνουμε πως ο αλγόριθμος, ξεκινώντας από το (1,1), παγιδεύεται στο (0,0), όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται. Ειδικότερα, για $\gamma_k = 0.5$, ο αλγόριθμος παγιδεύεται ύστερα από 39 βήματα. Για $\gamma_k = \{3, 5.5, 8\}$, ο αλγόριθμος παγιδεύεται ύστερα από 1 βήμα.

Β. γ_k ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$:



Στην περίπτωση επιλογής του γ_k μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $f(x_k + \gamma_k d_k)$, παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος καταλήγει άμεσα, σε ένα βήμα, στην τιμή 0, όπου και παγιδεύεται.

Γ. γ_k ακολουθεί τον κανόνα Armijo:



Στην περίπτωση εφαρμογής του κανόνα Armijo για την ενημέρωση του γ_k, φαίνεται από το παραπάνω σχήμα ότι, σε 18 βήματα k, ο αλγόριθμος έχει παγιδευτεί στο 0 και τερματίζει, χωρίς να φτάσει στο ελάχιστο.

6 Τελικά Συμπεράσματα

Από όλη την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να εξάγουμε μερικά συμπεράσματα σχετικά με την χρήση των αλγορίθμων Steepest Descent, Newton Method και Levenberg-Marquardt. Αρχικά, το γεγονός ότι και στα τρία σημεία εκκίνησης ο Εσσιανός πίνακας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη θετικά ορισμένος, δεν μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε την Μέθοδο Newton. Επικεντρωνόμαστε, επομένως, στις δύο άλλες μεθόδους. Χρησιμοποιώντας ως σημείο εκκίνησης το (0,0), καμία μέθοδος δεν οδηγείται στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αφού αμφότεροι οι αλγόριθμοι εγκλωβίζονται. Από την άλλη πλευρά, αν ορίσουμε ως σημείο εκκίνησης το (1,1), λόγω του σχήματος της συνάρτησης (βλ. Εικόνα 1. 3D γραφική παράσταση της f(x,y)), οι αλγόριθμοι περνούν από τα σημεία όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται, οπότε και εγκλωβίζονται. Έτσι, ούτε με αυτό το σημείο εκκίνησης καταφέρνουμε να βρεθούμε στην ελάχιστη τιμή. Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε το (-1, -1) ως αρχικό σημείο εκκίνησης των αλγορίθμων, οι μέθοδοι πράγματι καταφέρνουν να φτάσουν στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Όμως, ανάλογα με τον τρόπο επιλογής της παραμέτρου γ_k, καταλήγουν στο ελάχιστο σε διαφορετικό αριθμό βημάτων *k*. Σε κάποιες περιπτώσεις τιμών γ_k, οι αλγόριθμοι δεν λειτουργούν με σωστό τρόπο και κινούνται προς λάθος κατεύθυνση και εγκλωβίζονται στο $f(x,y) = 0$. Η συμπεριφορά των δύο αλγορίθμων για αρχικό σημείο το (-1, -1) και διάφορες τιμές του γ_k συνοψίζονται στους παρακάτω πίνακες.

Πίνακας 1. Steepest Descent με αρχικό σημείο (-1, -1)

$\boldsymbol{\gamma_k}$	**Συμπεριφορά αλγορίθμου**	**Βήματα *k* που απαιτούνται**
0.5	Εύρεση ελάχιστη τιμής $f(x,y) = -0.409$	28
3	Ταλαντώσεις μέχρι Εύρεση ελάχιστη τιμής $f(x,y) = -0.409$	56
5.5	Λάθος συμπεριφορά αλγορίθμου	-
8	Λάθος συμπεριφορά αλγορίθμου	-
Ελαχιστοποίηση $\boldsymbol{f(x_k + \gamma_k d_k)}$	Εύρεση ελάχιστης τιμής $f(x,y) = -0.409$	1
Κανόνας Armijo	Εύρεση ελάχιστης τιμής $f(x,y) = -0.409$	14

Πίνακας 2. Levenberg-Marquardt με αρχικό σημείο (-1, -1)

$\boldsymbol{\gamma_k}$	**Συμπεριφορά αλγορίθμου**	**Βήματα *k* που απαιτούνται**
0.5	Εύρεση ελάχιστη τιμής $f(x,y) = -0.409$	14
3	Λάθος συμπεριφορά αλγορίθμου	-
5.5	Λάθος συμπεριφορά αλγορίθμου	-
8	Λάθος συμπεριφορά αλγορίθμου	-
Ελαχιστοποίηση $\boldsymbol{f(x_k + \gamma_k d_k)}$	Εύρεση ελάχιστης τιμής $f(x,y) = -0.409$	7
Κανόνας Armijo	Εύρεση ελάχιστης τιμής $f(x,y) = -0.409$	18

Από τους παραπάνω πίνακες, βλέπουμε πως η μέθοδος Steepest Descent είχε καλύτερη απόδοση όταν για το γ_k ακολουθήθηκε κάποιος βελτιωμένος κανόνας εύρεσης του, ενώ, για σταθερό $\gamma_k = 0.5$, η μέθοδος Levenberg-Marquardt είχε καλύτερη απόδοση.