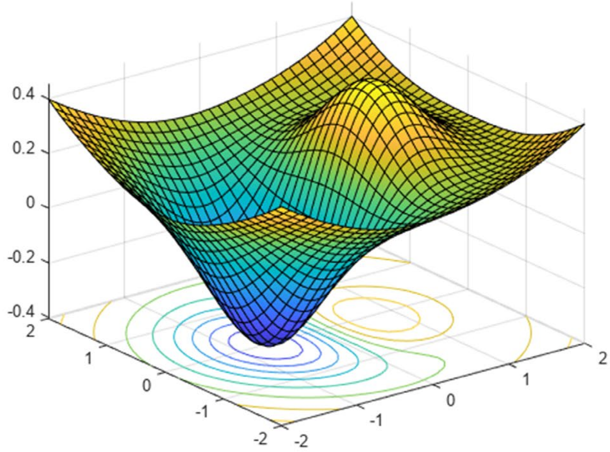


Νομικός Γεώργιος
ΑΕΜ: 9857

Καθηγητής: **Γεώργιος Ροβιθάκης**

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Περιγραφή του προβλήματος

Στην εργασία αυτή, σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση μίας δοσμένης αντικειμενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και συγκεκριμένα της:

$$f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$$

με $x = [x_1, x_2]^T$.

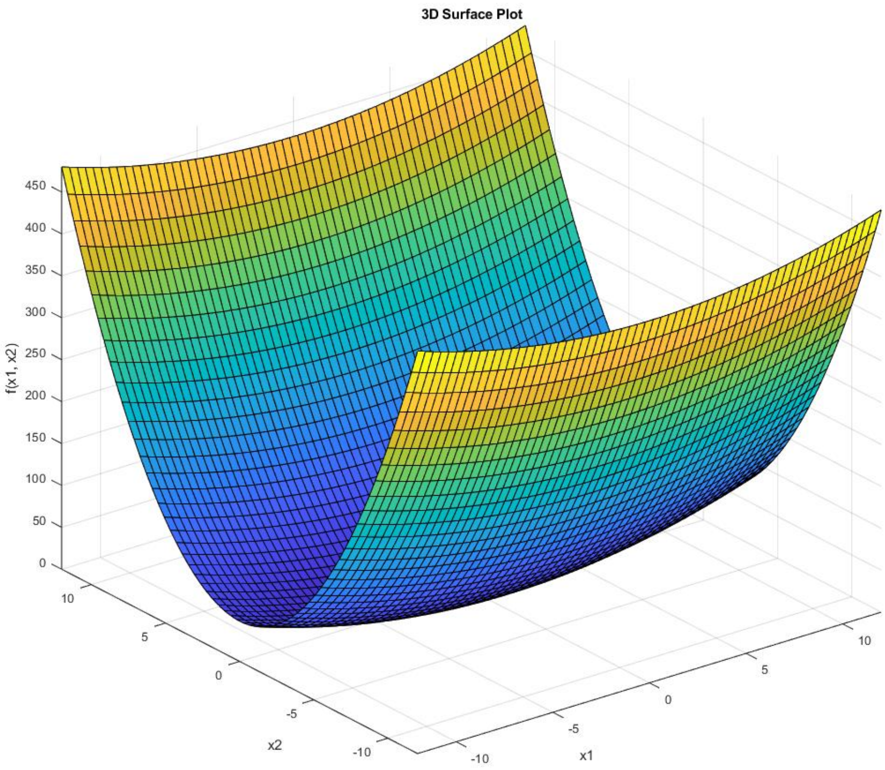
Αρχικά, θα γίνει χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου, χωρίς περιορισμούς, (Ενότητα 3 της αναφοράς). Στη συνέχεια, θα προστεθούν περιορισμοί για τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές x_1, x_2 και θα γίνει χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου με προβολή (Ενότητα 4 της αναφοράς).

Οι μέθοδοι αναζήτησης ελαχίστου υλοποιήθηκαν σε υπολογιστικό περιβάλλον Matlab, όπου, για τη συγγραφή του κώδικα κάθε αλγορίθμου, ακολουθήθηκαν τα βήματα που περιγράφονται αναλυτικά στο βιβλίο «ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ» (συγγραφέας: Γεώργιος Α. Ροβιθάκης), στα κεφάλαιο 5 και 6 του βιβλίου.

Στον φάκελο της εργασίας περιλαμβάνονται τέσσερα scripts, ένα για κάθε ερώτημα της εργασίας, με ονόματα «Thema1», «Thema2», «Thema3» και «Thema4». Επίσης, περιλαμβάνονται δύο scripts για τις δύο μεθόδους αναζήτησης ελαχίστου, με ονόματα «Steepest_Descent» και «Steepest_Descent_with_projection», όπως, ακόμη, και ένα script με όνομα «Function_Visualization», για τον σχεδιασμό της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση.

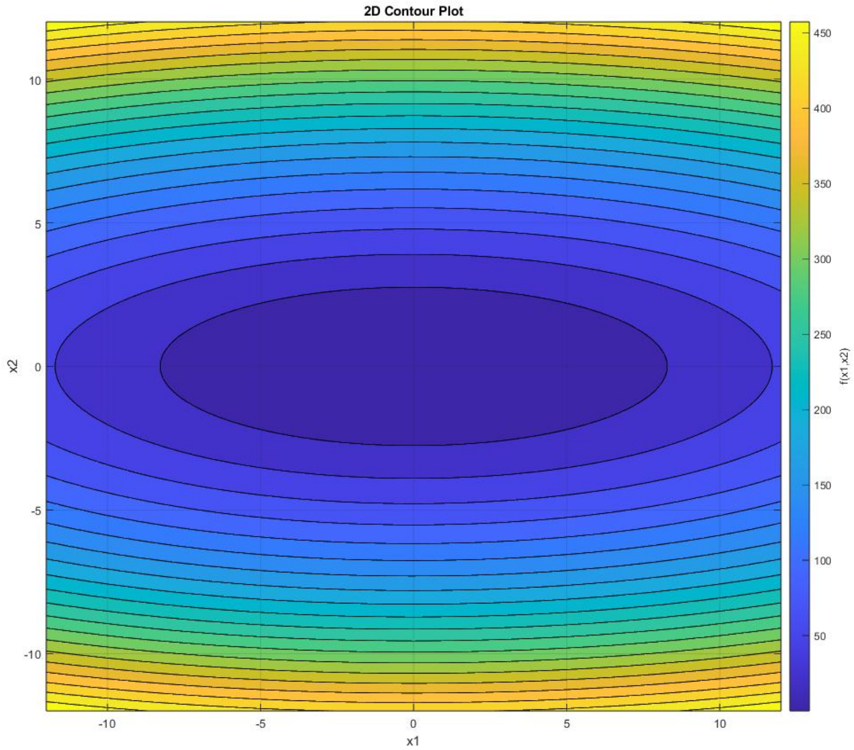
2. Σχεδιασμός της αντικειμενικής συνάρτησης f

Εκτελώντας τον κώδικα στο αρχείο «Function_Visualization», δημιουργούμε τα δύο παρακάτω σχήματα, όπου φαίνεται η συνάρτηση της εργασίας. Το πρώτο σχήμα είναι μια 3D αναπαράσταση, όπου στους δύο άξονες έχουμε τις τιμές για τις μεταβλητές x_1 και x_2 και στον τρίτο άξονα τις τιμές $f(x_1, x_2)$.



Εικόνα 1. 3D γραφική παράσταση της $f(x)$

Το δεύτερο συνιστά την προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο των μεταβλητών της $f(\boldsymbol{x})$. Η μεταβολή στις τιμές $f(x_1, x_2)$ φαίνεται με τη μεταβολή του χρώματος στην γραφική παράσταση.



Εικόνα 2. Προβολή της f στο επίπεδο των μεταβλητών x_1, x_2

Από τα δύο αυτά σχήματα, αλλά και από την έκφραση της συνάρτησης $f(\boldsymbol{x})$, καταλαβαίνουμε πως η ελάχιστη τιμή της είναι $f(\boldsymbol{x}) = 0$, για $(x_1, x_2) = (0,0)$.

3. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)

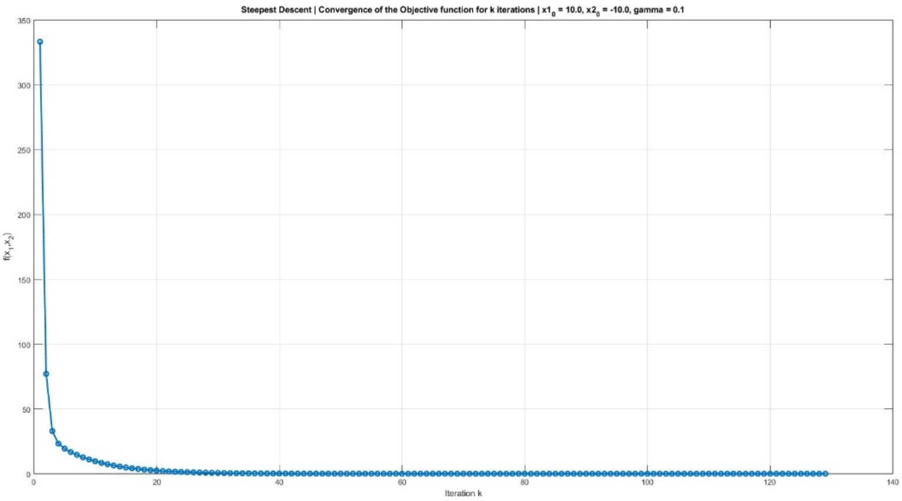
3.1 Πειραματικά αποτελέσματα σύγκλισης

Σε αυτό το μέρος της εργασίας, ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση $f(x)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέγιστης καθόδου (Steepest Descent). Ο αλγόριθμος αυτός περιλαμβάνει την παράμετρο βήματος γ_k, στην οποία θα δώσουμε τέσσερις σταθερές τιμές. Συγκεκριμένα, θα θέσουμε:

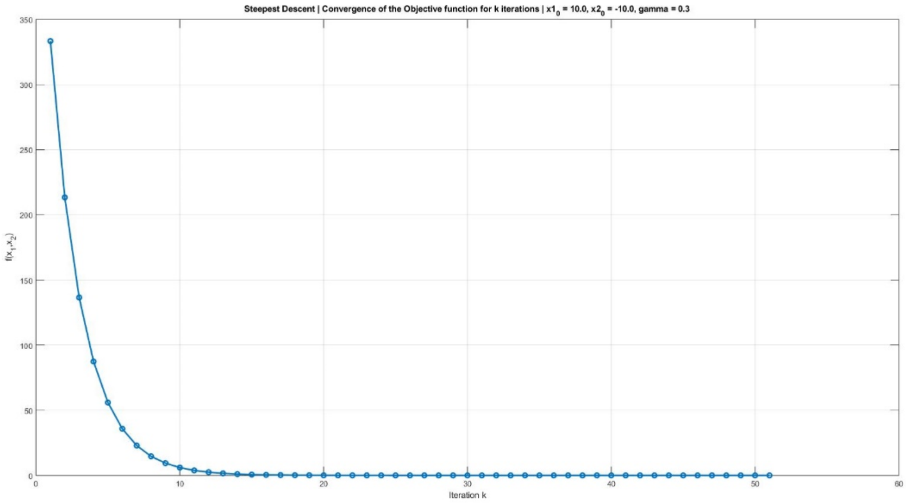
- $\gamma_k = 0.1$
- $\gamma_k = 0.3$
- $\gamma_k = 3$
- $\gamma_k = 5$

Επίσης, θέτουμε στην ακρίβεια του αλγορίθμου τη τιμή *ε = 0.001.* Ως σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου, ζητείται να ορίσουμε ένα σημείο αυθαίρετα, διαφορετικό του $(x_1, x_2) = (0,0)$, καθώς αυτό συνιστά, όπως προαναφέραμε, το ελάχιστο. Επιλέγουμε για σημείο εκκίνησης το $(x_1, x_2) = (6, -10)$.
Τρέχουμε τον κώδικα στο script με όνομα «Thema1» και προκύπτουν τα τέσσερα παρακάτω σχήματα σύγκλισης του αλγορίθμου, όπου στον οριζόντιο άξονα έχουμε των αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου και στον κάθετο τις τιμές της συνάρτησης σε κάθε επανάληψη:

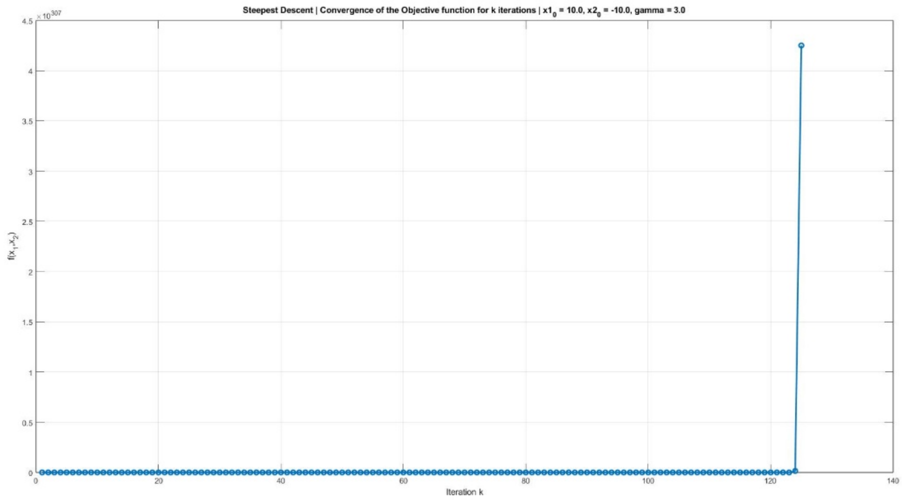
$$\boldsymbol{\gamma_k = 0.1}$$



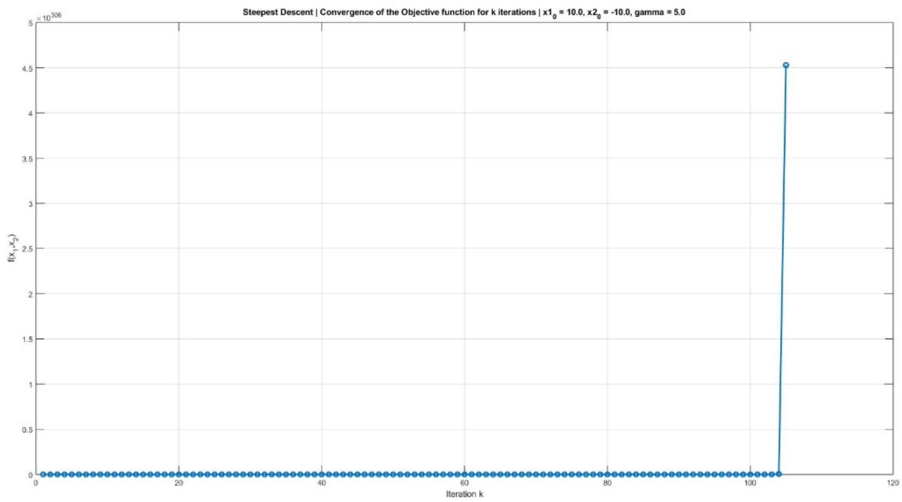
$\gamma_k = 0.3$



$\gamma_k = 3$



$\gamma_k = 5$



Από τα σχήματα, παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος χρειάζεται 129 βήματα για να φτάσει στο ελάχιστο σημείο, για $\gamma_k = 0.1$, με τη δοθείσα ακρίβεια *ε = 0.001.* Για $\gamma_k = 0.3$, απαιτούνται 51 βήματα. Στις περιπτώσεις των $\gamma_k = 3$ και $\gamma_k = 5$, ο αλγόριθμος καταλήγει σε δυσθεώρητα μεγάλες τιμές $f(x)$, δηλαδή αποκλίνει. Τα πειραματικά αποτελέσματα συνηγορούν πως υπάρχει περιορισμός στις τιμές που μπορεί να λάβει το βήμα γ_k της μεθόδου Steepest Descent. Αυτός ο περιορισμός αναλύεται παρακάτω.

3.2 Θεωρητική ανάλυση

Σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου μέγιστης καθόδου (σελ. 121 του βιβλίου), για τις τιμές των σημείων της συνάρτησης, σε κάθε βήμα k, ισχύει:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k) \ (1)$$

Υπολογίζουμε την κλίση της συνάρτησης $f(x)$:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left[\frac{2}{3}x_1 \quad 6x_2\right]^T$$

Οπότε, με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε για τις δύο μεταβλητές

$$\begin{cases} x_{1(k+1)} = x_{1(k)} - \gamma_k \dfrac{2}{3} x_{1(k)} \\ x_{2(k+1)} = x_{2(k)} - \gamma_k \, 6x_{2(k)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1(k+1)} = x_{1(k)}\left(1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k\right) \\ x_{2(k+1)} = x_{2(k)}(1 - 6\gamma_k) \end{cases} \xLeftrightarrow{x_{1(k)},\ x_{2(k)} \neq 0} \begin{cases} \dfrac{x_{1(k+1)}}{x_{1(k)}} = 1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k \\ \dfrac{x_{2(k+1)}}{x_{2(k)}} = 1 - 6\gamma_k \end{cases}$$

Αφού γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο βρίσκεται στο $(x_1, x_2) = (0,0)$, προκειμένου ο αλγόριθμος να συγκλίνει, πρέπει, για κάθε βήμα k, να ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{|x_{1(k+1)}|}{|x_{1(k)}|} < 1 \\ \dfrac{|x_{2(k+1)}|}{|x_{2(k)}|} < 1 \end{cases}$$

Οπότε

$$\begin{cases} \left|1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k\right| < 1 \\ \left|1 - 6\gamma_k\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1 - \dfrac{2}{3}\gamma_k < 1 \\ -1 < 1 - 6\gamma_k < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < -\dfrac{2}{3}\gamma_k < 0 \\ -2 < -6\gamma_k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{2}{3}\gamma_k < 2 \\ 0 < 6\gamma_k < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \gamma_k < 3 \\ 0 < \gamma_k < 0.33 \end{cases}$$

Από τους δύο παραπάνω περιορισμούς, ισχυρότερος είναι ο $0 < \gamma_k < 0.33$. Αυτός, λοιπόν, είναι ο λόγος για τον οποίο στα πειραματικά αποτελέσματα είχαμε απόκλιση του αλγορίθμου για τις τιμές 3 και 5, ενώ για 0.1 και 0.3 ο αλγόριθμος λειτούργησε σωστά.

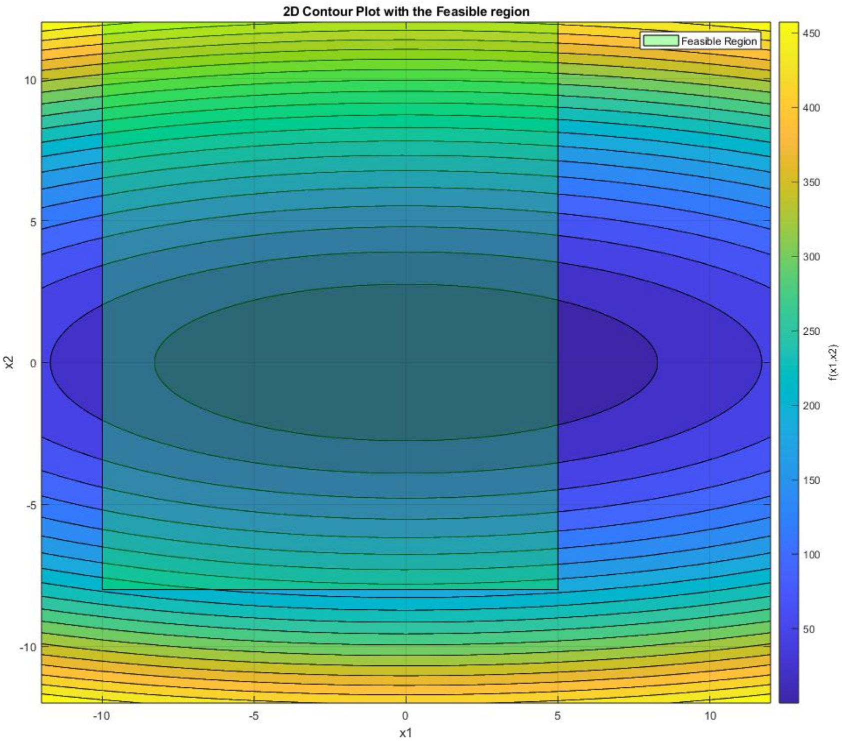
4. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

4.1 Θεωρητικό υπόβαθρο

Σε αυτή την ενότητα, προστίθενται οι περιορισμοί για τις τιμές που μπορούν να λάβουν οι δύο μεταβλητές:

$$-10 \leq x_1 \leq 5 \text{ και } -8 \leq x_2 \leq 12$$

Οι περιορισμοί αυτοί δημιουργούν μία εφικτή περιοχή X στην οποία θέλουμε να βρούμε τη τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $f(x)$. Τρέχοντας το αρχείο «Function_Visualization», σχεδιάζουμε την εφικτή περιοχή πάνω στο σχήμα της προβολής της συνάρτησης στο επίπεδο των δύο μεταβλητών. Η εφικτή περιοχή σημειώνεται με πράσινο χρώμα:



Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή, όπως αυτή παρουσιάζεται στο 6ο κεφάλαιο του βιβλίου. Σκοπός της μεθόδου είναι να βρει το ελάχιστο, περιορίζοντας την αναζήτηση στην εφικτή περιοχή. Για να το επιτύχει αυτό, κάθε φορά που οδηγείται σε κάποιο σημείο εκτός της εφικτής περιοχής X, μεταβαίνει στην προβολή του σημείου αυτού στην εφικτή περιοχή X. Ειδικότερα, στο βήμα k έχουμε ότι

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(\bar{x}_k - x_k), \gamma_k \in (0,1]$$

και

$$\bar{x}_k = Pr_X\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}, s_k > 0$$

Δηλαδή, το $\bar{x}_k$ αποτελεί την προβολή του σημείου $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ στην εφικτή περιοχή. Η παράμετρος s_k συνιστά το βήμα της μεθόδου της μέγιστης καθόδου, ενώ η παράμετρος γ_k είναι το βήμα της μεθόδου των εφικτών κατευθύνσεων. Αν το σημείο $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ ανήκει στην εφικτή περιοχή, τότε η προβολή του είναι το ίδιο το σημείο. Στην περίπτωσή μας, όπου ισχύουν οι περιορισμοί $-10 \leq x_1 \leq 5$ και $-8 \leq x_2 \leq 12$, η προβολή πραγματοποιείται ως:

$$\bar{x}_{1(k)} = \begin{cases} -10, & if\ x_{1(k)} - s_k \nabla f\left(x_{1(k)}\right) < -10 \\ 5, & if\ x_{1(k)} - s_k \nabla f\left(x_{1(k)}\right) > 5 \\ x_{1(k)} - s_k \nabla f\left(x_{1(k)}\right), & otherwise \end{cases}$$

για τη μεταβλητή $x_{1(k)}$
και

$$\bar{x}_{2(k)} = \begin{cases} -8, & if\ x_{2(k)} - s_k \nabla f\left(x_{2(k)}\right) < -8 \\ 12, & if\ x_{2(k)} - s_k \nabla f\left(x_{2(k)}\right) > 12 \\ x_{2(k)} - s_k \nabla f\left(x_{2(k)}\right), & otherwise \end{cases}$$

για τη μεταβλητή $x_{2(k)}$.

Στο σχήμα βλέπουμε πως το ελάχιστο της συνάρτησης, δηλαδή το σημείο (0,0), βρίσκεται εντός της εφικτής περιοχής X. Ισχύει πως, αν το σημείο $x_k - s_k \nabla f(x_k)$ είναι εφικτό, η μέθοδος της μέγιστης καθόδου με προβολή μετατρέπεται στη μέθοδο της μέγιστης καθόδου χωρίς περιορισμούς. Οπότε, σε αυτή τη περίπτωση,

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k (x_k - s_k \nabla f(x_k) - x_k) \Rightarrow\ x_{k+1} = x_k - \gamma_k s_k \nabla f(x_k)$$

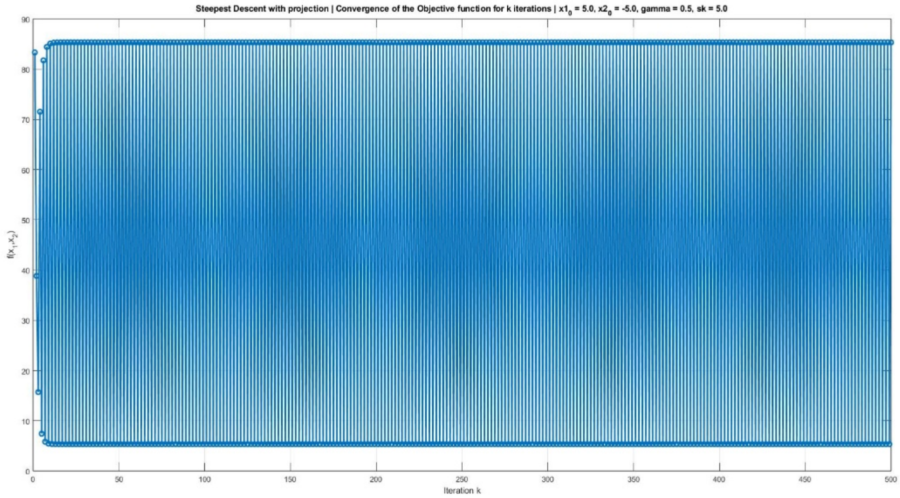
Έτσι, το βήμα γ_k, για το οποίο κάναμε διερεύνηση των τιμών που μπορεί να λάβει στην προηγούμενη ενότητα, γίνεται πλέον $\gamma_k s_k$. Για το $\gamma_k s_k$ θα ισχύουν οι ίδιοι περιορισμοί, δηλαδή:

$$0 < \gamma_k s_k < 0.33$$

Έχοντας όλα αυτά υπόψη, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω και συνιστούν τα θέματα 2,3 και 4 της εργασίας.

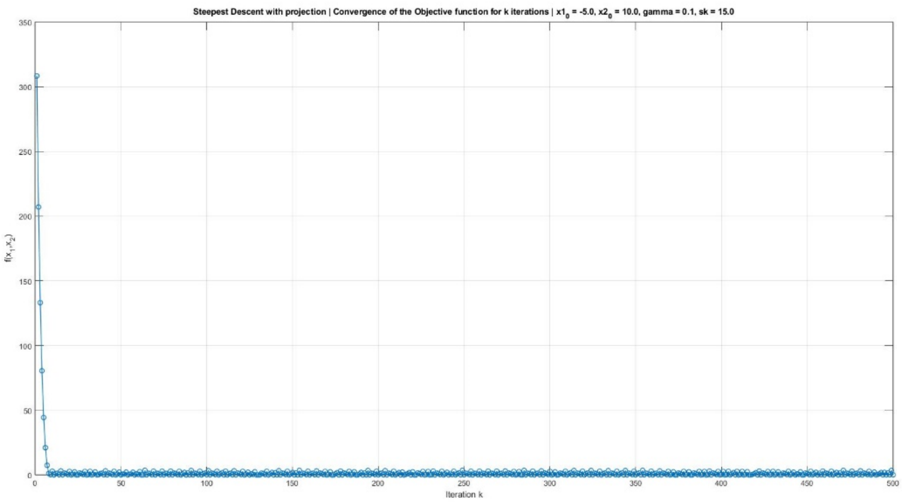
4.2 Σημείο εκκίνησης (5,-5)

Ορίζουμε ως σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (5,-5) και θέτουμε στις παραμέτρους τις τιμές $s_k = 5$, $\gamma_k = 0.5$. Η ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου λαμβάνει την τιμή $\varepsilon = 0.01$. Παρατηρούμε πως $\gamma_k s_k = 5 * 0.5 = 2.5 > 0.33$. Συνεπώς, αναμένουμε πως αλγόριθμος θα αποκλίνει. Πράγματι, τρέχοντας τον κώδικα του αρχείου «Thema2.m», ο αλγόριθμος ταλαντώνεται, λόγω του μεγάλου βήματος, και δεν τερματίζει ποτέ. Θέτουμε έναν μέγιστο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου για $k = 500$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα:



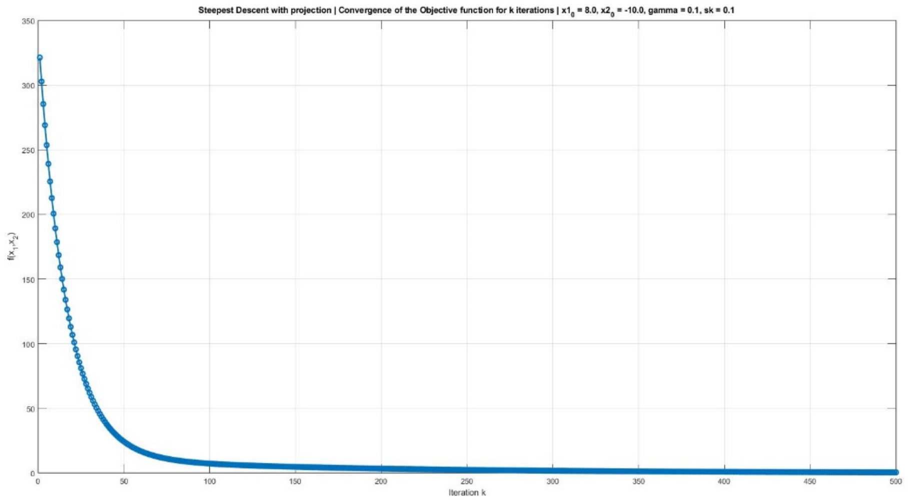
4.3 Σημείο εκκίνησης (-5,10)

Ορίζουμε ως σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (-5,10) και θέτουμε στις παραμέτρους τις τιμές $s_k = 15$, $\gamma_k = 0.1$. Η ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου λαμβάνει την τιμή $\varepsilon = 0.01$. Παρατηρούμε πως $\gamma_k s_k = 0.1 * 15 = 1.5 > 0.33$. Συνεπώς, αναμένουμε πως αλγόριθμος θα αποκλίνει. Πράγματι, τρέχοντας τον κώδικα του αρχείου «Thema3.m», ο αλγόριθμος, αν και φτάνει κοντά στο ελάχιστο, ταλαντώνεται και δεν τερματίζει ποτέ. Θέτουμε έναν μέγιστο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου για $k = 500$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα:



4.4 Σημείο εκκίνησης (8,-10)

Ορίζουμε ως σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (8,-10) και θέτουμε στις παραμέτρους τις τιμές $s_k = 0.1$, $\gamma_k = 0.2$. Η ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου λαμβάνει την τιμή $\varepsilon = 0.01$. Παρατηρούμε πως $\gamma_k s_k = 0.1 * 02 = 0.02 < 0.33$. Συνεπώς, αναμένουμε πως αλγόριθμος θα συγκλίνει. Πράγματι, τρέχοντας τον κώδικα του αρχείου «Thema4.m», ο αλγόριθμος οδηγείται στην ελάχιστη τιμή. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα:



Βέβαια, λόγω του μικρού βήματος, η σύγκλιση είναι πολύ αργή και απαιτεί πολλά βήματα. Ο αλγόριθμος τερματίστηκε στα 500 βήματα.

Γενικά, στις περιπτώσεις που δεν είχαμε σύγκλιση, ένας απλός τρόπος για να την πετύχουμε είναι να φροντίσουμε να ισχύει ο περιορισμός $0 < \gamma_k s_k < 0.33$. Επίσης, μπορούμε να αλλάζουμε το βήμα γ_k , όπως στην προηγούμενη εργασία.