TD - Logique & Raisonnement

Mathématiques pour Informaticiens

Enseignant :	Geovany Batista Polo LAGUERRE | Data Scientist
Institution :	FSGA & Université Quisqueya
Semestre :	Semestre 1
Année académique :	2025–2026
Version :	14 septembre 2025

Ce document de Travaux Dirigés regroupe des exercices de logique (propositions, tables de vérité, équivalences, quantificateurs, méthodes de preuve).

Table des matières

Quelques motivations

Les mathématiques fournissent un *langage rigoureux* pour lever les ambiguïtés du langage naturel et une méthode pour décider du *vrai* et du *faux*. Exemples classiques : le mot ń ou ż peut être *exclusif* (restaurant ń fromage ou dessert ż) ou *inclusif* (jeu de cartes ń as ou cœurs ż). Les notions complexes (ex. continuité) se formalisent mieux avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in I \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

1 Logique

1.1 Assertions

Une **assertion** est une phrase *vraie ou fausse*, mais pas les deux. Exemples : ń Il pleut. ż, ń $2 + 2 = 4$ ż, ń $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ ż. À partir de deux assertions P et Q, on fabrique de nouvelles assertions à l'aide de **connecteurs**.

1.2 Connecteurs et tables de vérité

NON, ET, OU (inclusif).

ET $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

OU $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

NON $\neg P$

P	$\neg P$
1	0
0	1

Implication et biconditionnel. Par définition, $P \Rightarrow Q \iff \neg P \vee Q$; elle est *fausse seulement* pour $(P, Q) = (1, 0)$. Le **biconditionnel** est $P \Leftrightarrow Q \iff (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Équivalences classiques.

— Double négation : $P \Leftrightarrow \neg\neg P$.

— De Morgan : $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$; $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

— Distributivité : $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

— Contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

1.3 Quantificateurs

Pour une propriété $P(x)$ et un ensemble E :

— $\forall x \in E \ P(x)$: vrai si $P(x)$ est vraie pour *tous* les $x \in E$;

— $\exists x \in E \ P(x)$: vrai s'il existe *au moins un* $x \in E$ tel que $P(x)$.

Négations : $\neg(\forall x \, P) \Leftrightarrow \exists x \, \neg P$; $\neg(\exists x \, P) \Leftrightarrow \forall x \, \neg P$.
Attention à l'ordre : en général $\forall x \, \exists y \, P(x, y) \neq \exists y \, \forall x \, P(x, y)$.

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on suppose P vraie et on déduit Q par calculs/arguments.

Exemple. Si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$ (écrire $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{p'}{q'}$ et sommer).

2.2 Cas par cas

On partitionne les possibilités et on traite chaque cas.

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ selon $x \geq 1$ ou $x < 1$.

2.3 Contraposée

Utiliser $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Exemple. Si n^2 est pair alors n est pair $\Leftrightarrow$ si n est impair alors n^2 est impair.

2.4 Absurde

Supposer P et $\neg Q$ et obtenir une contradiction.

Exemple. Si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ avec $a, b > 0$ alors $a = b$.

2.5 Contre-exemple

Pour réfuter $\forall x \in E\, P(x)$, exhiber $x \in E$ tel que $\neg P(x)$.

Exemple. ń Tout entier positif est somme de trois carrés ż est fausse : 7 ne convient pas.

2.6 Récurrence (aperçu)

Pour $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$: **initialisation** $P(n_0)$; **hérédité** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$; **conclusion**.

Exemples. $2^n > n$ pour $n \geq 0$; $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Mini-exercices

1. Écrire la table de vérité du **ou exclusif** (XOR).
2. Vérifier $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ par la table.
3. Écrire la négation de ń $P \Rightarrow Q$ ż.
4. Rédiger les démonstrations des équivalences ci-dessus.
5. Donner la négation de ń $P \wedge (Q \vee R)$ ż.
6. Traduire avec quantificateurs : ń Tout réel a un carré positif ż et écrire la négation.
7. Récurrence : montrer $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; montrer $(1+x)^n > 1 + nx$ pour $x > 0$.

Auteurs du chapitre d'origine : Arnaud Bodin, Benjamin Boutin, Pascal Romon.