

# Séance - Ensembles, relations & fonctions

## Mathématiques pour Informaticiens

Ensembles & opérations • Fonctions •  
Injection/Surjection/Bijection • Cardinaux •  
Relations d'équivalence

# Objectifs de la séance

Manipuler inclusion, union, intersection, complémentaire et produit cartésien

Comprendre image directe et image réciproque d'un ensemble par une application

Distinguer injection, surjection, bijection et savoir les reconnaître

Relier bijection  $\leftrightarrow$  inverse, et utiliser la composition

Compter : cardinal, nombre d'applications/injections/bijections, parties (coefficients binomiaux)

Identifier une relation d'équivalence et ses classes (ex.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ )

# Motivation - Paradoxe de Russell (intuition)

L'« ensemble de tous les ensembles » mène à une contradiction

Construire  $F = \{E \in E \mid E \notin E\}$  et demander “ $F \in F ?$ ”  $\rightarrow$  impossible

On travaille avec des définitions sûres ; objectif = manipuler des ensembles concrets

# Définir un ensemble

## Deux manières

- Énumération :  $\{0,1\}$ ,  
 $\{\text{rouge, noir}\}$
- Compréhension :  $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1 \}$

## Ensemble vide

- $\emptyset$  ne contient aucun élément

## Appartenance

- $x \in E$  (ou  $x \notin E$ )

# Inclusion & égalité

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E (x \in F)$$

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Ensemble des parties  $P(E)$

# Union, intersection, complémentaire

## Union

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  (OU inclusif)

## Intersection

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

## Complémentaire

- $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

# Règles de calcul (rappels)

Commutativité,  
associativité,  
neutres/absorbants

Distributivité :  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ;  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan :  $C(A \cap B) = CA \cup CB$   
 ;  $C(A \cup B) = CA \cap CB$

Produit  
cartésien  
 $E \times F$

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; [0, 1] \times \mathbb{R} ; [0, 1]^3$$

# Applications (fonctions)

$f : E \rightarrow F$  ; à  $x \in E$   
associer l'unique  
 $f(x) \in F$

Graphe  $\Gamma_f \subset E \times F$   
; égalité  $f = g \Leftrightarrow$   
 $\forall x \ f(x) = g(x)$

# Composition & restriction

$g \circ f : E \rightarrow G$  avec  
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Restriction  $f|_A : A \rightarrow F$ ,  
 $x \mapsto f(x)$

Exemple :  $f(x) = 1/x$ ,  
 $g(x) = (x-1)/(x+1) \Rightarrow (g \circ f)(x) = -g(x)$

# Image directe & image réciproque

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset F$$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \} \subset E$$

(existe toujours)

$f(\{x\})$  est un singleton ;  
 $f^{-1}(\{y\})$  peut être  $\emptyset$ , un  
singleton, multiple, voire  $E$

# Antécédents

Antécédents de  $y$  :  
 $f^{-1}(\{y\})$

Lien avec  
injectivité/surjectivité

# Injection • Surjection • Bijection

## Injective

- $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$  (au plus un antécédent)

## Surjective

- $\forall y \in F \exists x \in E : f(x)=y$  (au moins un antécédent)

## Bijective

- Injective ET surjective  
(exactement un antécédent)

## Exemples (rapides)

$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 1/(1+x)$   
: injective, non  
surjective (images  $\leq$   
1)

$f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$  : ni  
injective (2 et -2), ni  
surjective (3 sans  
antécédent)

## Bijection et inverse

$f$  bijective  $\Leftrightarrow \exists g: F \rightarrow E$  telle  
que  $f \circ g = \text{id}_F$  et  $g \circ f = \text{id}_E$

Inverse unique ;  $(f^{-1})^{-1} = f$  ;  
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Exemple :  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ ,  
inverse  $\ln$

# Ensembles finis — cardinal

$E \text{ fini} \iff \text{bijection } E \longleftrightarrow \{1, \dots, n\} \text{ (Card } E = n)$

$\text{Injective} \Rightarrow \text{Card } E \leq \text{Card } F$  ;  $\text{Surjective} \Rightarrow \text{Card } E \geq \text{Card } F$

Si  $\text{Card } E = \text{Card } F$  (finis) :  
 $\text{Injective} \iff \text{Surjective} \iff \text{Bijective}$

## Principe des tiroirs (pigeonhole)

Si  $n > k$  objets dans  $k$   
 tiroirs  $\Rightarrow$  au moins  
un tiroir a  $\geq 2$  objets

Ex : 400 étudiants  
 $\Rightarrow$  deux mêmes  
anniversaires (jour)

## Dénombrement d'applications

Card  $E=n$ , Card  $F=p$

Applications  $E \rightarrow F : p^n$   
 ; Injections :  
 $p \cdot (p-1) \dots (p-n+1) ;$   
 Bijections  $E \rightarrow E : n!$

# Parties & coefficients binomiaux

Card  $P(E) = 2^n$  (nb de sous-ensembles)

Nb de parties à  $k$  éléments :  
 $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Identités :  $C(n,k) = C(n,n-k)$  ;  
 $\sum_k C(n,k) = 2^n$  ;  
 $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$

# Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0..n} C(n,k) a^{n-k} b^k$$

$$\text{Ex : } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

## Relations & équivalences

Relation sur  $E$  : Vrai/Faux  
pour chaque  $(x,y) \in E \times E$

Équivalence : réflexive ;  
symétrique ; transitive

Classes d'équivalence  
 $cl(x)$  ; partition de  $E$

## Exemples d'équivalences

« Être parallèle »,  
« Être du même  
âge »

Contre-ex. : « Être  
perpendiculaire  
», «  $\leq$  »

Q via des  
classes

Sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  :

$$(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$

$2/3 = 4/6$  : mêmes  
classes (représentants  
différents)

Congruence  
modulo  $n$  et  
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b) ; \text{ classes } : 0, 1, \dots, n-1$$

$$\text{Ex : } 10 \equiv 3 \pmod{7}, -1 \equiv 20 \pmod{7}$$

## Mini-exercices

Prouver  $C(A \cup B) = C A \cap C B$

Lister  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$

Pour  $f(x) = x^2$  :  $f([0, 1[)$ ,  $f(]-1, 2[)$ ,  
 $f^{-1}([1, 2[)$ ,  $f^{-1}(\{3\})$

Injection/surjection pour  $f$  :  
 $[0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $x \mapsto x^2$  ?

Combien de listes de  $k$  éléments  
distincts choisis parmi  $n$  ?

## Wrap-up & transition

Ensembles & lois ✓ ;  
Fonctions ✓ ;  
Dénombrement ✓ ;  
Équivalences ✓

---

→ Prochain chapitre :  
combinatoire/probabilité  
discrète ou  
approfondissements