

## Logique, ensembles, raisonnements

---

### 1 Logique

#### Exercice 1

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :  $\Leftrightarrow$ ,  $\Leftarrow$ ,  $\Rightarrow$ .

1.  $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots \dots x = 2 ;$
2.  $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots \dots z \in \mathbb{R} ;$
3.  $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots \dots e^{2ix} = 1.$

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000108]

#### Exercice 2

Soient les quatre assertions suivantes :

- (a)  $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 ;$
- (b)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 ;$
- (c)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 ;$
- (d)  $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000106]

#### Exercice 3

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit les ensembles  $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$  et  $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x \geq 0\}$ . On note  $M_1M_2$  la distance usuelle entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de  $\mathbb{R}^2$ . Évaluer les propositions suivantes :

1.  $\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad M_1M_2 < \varepsilon$
2.  $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad M_1M_2 < \varepsilon$
3.  $\exists \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad M_1M_2 < \varepsilon$
4.  $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad M_1M_2 < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000109]

#### Exercice 4

Nier la proposition: "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000110]

#### Exercice 5

Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier  $x$ , il existe un entier  $y$  tel que, pour tout entier  $z$ , la relation  $z < x$  implique la relation  $z < x + 1$  ;
4.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$ .

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000112]

### Exercice 6

Soient  $f, g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1.  $f$  est majorée;
2.  $f$  est bornée;
3.  $f$  est paire;
4.  $f$  est impaire;
5.  $f$  ne s'annule jamais;
6.  $f$  est périodique;
7.  $f$  est croissante;
8.  $f$  est strictement décroissante;
9.  $f$  n'est pas la fonction nulle;
10.  $f$  n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts;
11.  $f$  atteint toutes les valeurs de  $\mathbb{N}$ ;
12.  $f$  est inférieure à  $g$ ;
13.  $f$  n'est pas inférieure à  $g$ .

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000120]

### Exercice 7

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) \leq 1$ .
2. L'application  $f$  est croissante.
3. L'application  $f$  est croissante et positive.
4. Il existe  $x \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f(x) \leq 0$ .
5. Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que quel que soit  $y \in \mathbb{R}$ , si  $x < y$  alors  $f(x) > f(y)$ .

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000107]

### Exercice 8

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon).$$

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000119]

## 2 Ensembles

### Exercice 9

Soit  $A, B$  deux ensembles, montrer  $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$  et  $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ .

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000123]

### Exercice 10

Montrer par contraposition les assertions suivantes,  $E$  étant un ensemble :

1.  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B,$
2.  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000122]

### Exercice 11

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$ . Démontrer que :

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),$   
 $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$   
 $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$   
 $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$   
 $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000124]

### Exercice 12

Montrez que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right] \quad \text{et} \quad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[ 1 + \frac{1}{n}, n \right]$$

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000137]

## 3 Absurde et contraposée

### Exercice 13

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de l'ensemble  $\mathbb{N}$  dans lui-même. On définit une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  en posant  $f(n) = f_n(n) + 1$ . Démontrer qu'il n'existe aucun  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f = f_p$ .

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000150]

### Exercice 14

1. Soit  $p_1, p_2, \dots, p_r, r$  nombres premiers. Montrer que l'entier  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  n'est divisible par aucun des entiers  $p_i$ .
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000151]

## 4 Récurrence

### Exercice 15

Montrer :

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

[Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000153]

### Exercice 16

Soit  $X$  un ensemble. Pour  $f \in \mathcal{F}(X, X)$ , on définit  $f^0 = id$  et par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$   $f^{n+1} = f^n \circ f$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} f^{n+1} = f \circ f^n$ .
2. Montrer que si  $f$  est bijective alors  $\forall n \in \mathbb{N} (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ .

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000157]

### Exercice 17

Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 4$  et  $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ .
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$ .
4. La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?

[Indication ▾](#) [Correction ▾](#) [Vidéo ■](#)

[000155]

## Indication pour l'exercice 2 ▲

Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

---

## Indication pour l'exercice 3 ▲

Faire un dessin de  $F_1$  et de  $F_2$ . Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de  $\varepsilon$  “petit” (c'est-à-dire proche de 0) ou de  $\varepsilon$  “grand” (quand il tend vers  $+\infty$ ).

---

## Indication pour l'exercice 8 ▲

En fait, on a toujours :  $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$ . Puis chercher une condition sur  $n$  pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

---

## Indication pour l'exercice 9 ▲

Il est plus facile de raisonner en prenant un élément  $x \in E$ . Par exemple, soit  $F, G$  des sous-ensembles de  $E$ . Montrer que  $F \subset G$  revient à montrer que pour tout  $x \in F$  alors  $x \in G$ . Et montrer  $F = G$  est équivalent à  $x \in F$  si et seulement si  $x \in G$ , et ce pour tout  $x$  de  $E$ . Remarque : pour montrer  $F = G$  on peut aussi montrer  $F \subset G$  puis  $G \subset F$ .

Enfin, se rappeler que  $x \in \complement F$  si et seulement si  $x \notin F$ .

---

## Indication pour l'exercice 13 ▲

Par l'absurde, supposer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f = f_p$ . Puis pour un tel  $p$ , évaluer  $f$  et  $f_p$  en une valeur bien choisie.

---

## Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition ou par l'absurde.

---

## Indication pour l'exercice 16 ▲

Pour les deux questions, travailler par récurrence.

---

## Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Récurrence : calculer  $x_{n+1} - 3$ .
  2. Calculer  $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ .
  3. Récurrence.
-

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $\Leftarrow$
  2.  $\Leftrightarrow$
  3.  $\Rightarrow$
- 

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$  est vraie. Étant donné  $x \in \mathbb{R}$  il existe toujours un  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $x + y \leq 0$ , par exemple on peut prendre  $y = -(x+1)$  et alors  $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$ .
  2. (b) est vraie, pour un  $x$  donné, on peut prendre (par exemple)  $y = -x + 1$  et alors  $x + y = 1 > 0$ . La négation de (b) est  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$ .
  3. (c) :  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$  est fausse, par exemple  $x = -1, y = 0$ . La négation est  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$ .
  4. (d) est vraie, on peut prendre  $x = -1$ . La négation est:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y^2 \leq x$ .
- 

## Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. Cette proposition est vraie. En effet soit  $\varepsilon > 0$ , définissons  $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$  et  $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$ , alors  $M_1 M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . Ceci étant vrai quelque soit  $\varepsilon > 0$  la proposition est donc démontrée.
2. Soit deux points fixés  $M_1, M_2$  vérifiant cette proposition, la distance  $d = M_1 M_2$  est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc  $M_1 = M_2$ ; or les ensembles  $F_1$  et  $F_2$  sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$$\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad M_1 M_2 \geq \varepsilon$$

et cela exprime le fait que les ensembles  $F_1$  et  $F_2$  sont disjoints.

3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors  $\varepsilon$  correspondant à cette proposition. Soit  $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$  et  $M_2 = (1, 1)$ , on a  $M_1 M_2 > \varepsilon + 1$  ce qui est absurde. La négation est :

$$\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad M_1 M_2 \geq \varepsilon$$

C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4. Cette proposition est vraie, il suffit de choisir  $\varepsilon = M_1 M_2 + 1$ . Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !
- 

## Correction de l'exercice 4 ▲

---

“Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.”

---

## Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. “Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit.” Bien sûr cette dernière phrase est fausse !
2. “Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.”

3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{Z} \ \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x + 1),$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \ \forall y \in \mathbb{Z} \ \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geq x + 1).$$

4.  $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon).$

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

1.  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M;$
  2.  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M;$
  3.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x);$
  4.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x);$
  5.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0;$
  6.  $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+a) = f(x);$
  7.  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y));$
  8.  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y));$
  9.  $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0;$
  10.  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y));$
  11.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = n;$
  12.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x);$
  13.  $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > g(x).$
- 

### Correction de l'exercice 7 ▲

Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : ( Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ) ( $f(x) \leq 1$ ). La négation de “( Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ )” est “Il existe  $x \in \mathbb{R}$ ” et la négation de “( $f(x) \leq 1$ )” est  $f(x) > 1$ . Donc la négation de l'assertion complète est : “Il existe  $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$ ”.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion “L'application  $f$  est croissante” : “pour tout couple de réels  $(x_1, x_2)$ , si  $x_1 \leq x_2$  alors  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ”. Cela se décompose en : “(pour tout couple de réels  $x_1$  et  $x_2$  ( $x_1 \leq x_2$  implique  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ))”. La négation de la première partie est : “(il existe un couple de réels  $(x_1, x_2)$ )” et la négation de la deuxième partie est : “( $x_1 \leq x_2$  et  $f(x_1) > f(x_2)$ )”. Donc la négation de l'assertion complète est : “Il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1 \leq x_2$  et  $f(x_1) > f(x_2)$ ”.
3. La négation est : “l'application  $f$  n'est pas croissante ou n'est pas positive”. On a déjà traduit “l'application  $f$  n'est pas croissante”, traduisons “l'application  $f$  n'est pas positive” : “il existe  $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ ”. Donc la négation de l'assertion complète est : “ Il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , ou il existe  $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ ”.
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : “(Il existe  $x \in \mathbb{R}^+$ ) ( $f(x) \leq 0$ )”. La négation de la première partie est : “(pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ”, et celle de la seconde est :“( $f(x) > 0$ )”. Donc la négation de l'assertion complète est : “Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0”.$

5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : “ $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$ ”. La négation de la première partie est “ $(\forall x \in \mathbb{R})$ ”, celle de la seconde est “ $(\exists y \in \mathbb{R})$ ”, et celle de la troisième est “ $(x < y \text{ et } f(x) \leq f(y))$ ”. Donc la négation de l’assertion complète est : “ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x < y \text{ et } f(x) \leq f(y)$ ”.
- 

### Correction de l'exercice 8 ▲

Remarquons d’abord que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$  car  $2n+1 \leq 2(n+2)$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$ , nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur  $n$  pour que l’inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon &< \frac{2n+1}{n+2} \Leftrightarrow (2 - \varepsilon)(n+2) < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici  $\varepsilon$  nous est donné, nous prenons un  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ , alors pour tout  $n \geq N$  nous avons  $n \geq N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$  et par conséquent:  $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ . Conclusion: étant donné  $\varepsilon > 0$ , nous avons trouvé un  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  on ait  $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$  et  $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$ .

En fait nous venons de prouver que la suite de terme  $(2n+1)/(n+2)$  tend vers 2 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$


---

### Correction de l'exercice 10 ▲

Nous allons démontrer l’assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d’abord de façon “directe”. Nous supposons que  $A$  et  $B$  sont tels que  $A \cap B = A \cup B$ . Nous devons montrer que  $A = B$ .

Pour cela étant donné  $x \in A$  montrons qu’il est aussi dans  $B$ . Comme  $x \in A$  alors  $x \in A \cup B$  donc  $x \in A \cap B$  (car  $A \cup B = A \cap B$ ). Ainsi  $x \in B$ .

Maintenant nous prenons  $x \in B$  et le même raisonnement implique  $x \in A$ . Donc tout élément de  $A$  est dans  $B$  et tout élément de  $B$  est dans  $A$ . Cela veut dire  $A = B$ .

2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que  $A \neq B$  et nous devons montrer que  $A \cap B \neq A \cup B$ .

Si  $A \neq B$  cela veut dire qu'il existe un élément  $x \in A \setminus B$  ou alors un élément  $x \in B \setminus A$ . Quitte à échanger  $A$  et  $B$ , nous supposons qu'il existe  $x \in A \setminus B$ . Alors  $x \in A \cup B$  mais  $x \notin A \cap B$ . Donc  $A \cap B \neq A \cup B$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

Montrons quelques assertions.

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Si  $y \in f(A \cap B)$ , il existe  $x \in A \cap B$  tel que  $y = f(x)$ , or  $x \in A$  donc  $y = f(x) \in f(A)$  et de même  $x \in B$  donc  $y \in f(B)$ . D'où  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Tout élément de  $f(A \cap B)$  est un élément de  $f(A) \cap f(B)$  donc  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \quad \text{car } f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$


---

### Correction de l'exercice 12 ▲

$$I = [0, 2] \text{ et } J = ]1, +\infty[.$$


---

### Correction de l'exercice 13 ▲

Par l'absurde, supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f = f_p$ . Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour  $n = p$ ,  $f(p) = f_p(p)$ . D'autre part la définition de  $f$  nous donne  $f(p) = f_p(p) + 1$ . Nous obtenons une contradiction car  $f(p)$  ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f \neq f_p$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Montrons en fait la contraposée.

S'il existe  $i$  tel que  $p_i$  divise  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  ( $i$  est fixé) alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $N = kp_i$  donc

$$p_i(k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r) = 1$$

soit  $p_i q = 1$  (avec  $q = k - p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$  un nombre entier). Donc  $p_i \in \mathbb{Z}$  et  $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$ , alors  $p_i$  vaut 1 ou  $-1$ . Et donc  $p_i$  n'est pas un nombre premier.

Conclusion : par contraposition il est vrai que  $N$  n'est divisible par aucun des  $p_i$

2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini  $r$  de nombres premiers  $p_1, \dots, p_r$  alors  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui-même (c'est le 1.).

Mais  $N$  est strictement supérieur à tous les  $p_i$ . Conclusion on a construit un nombre premier  $N$  différent des  $p_i$ , il y a donc au moins  $r + 1$  nombres premiers, ce qui est absurde.

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

Rédigeons la deuxième égalité. Soit  $\mathcal{A}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  l'assertion suivante:

$$(\mathcal{A}_n) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- $\mathcal{A}_0$  est vraie ( $1 = 1$ ).
- Étant donné  $n \in \mathbb{N}^*$  supposons que  $\mathcal{A}_n$  soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Ce qui prouve  $\mathcal{A}_{n+1}$ .

- Par le principe de récurrence nous venons de montrer que  $\mathcal{A}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. Montrons la proposition demandée par récurrence: soit  $\mathcal{A}_n$  l'assertion  $f^{n+1} = f \circ f^n$ . Cette assertion est vraie pour  $n = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  supposons  $\mathcal{A}_n$  vraie. Alors

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Nous avons utiliser la définition de  $f^{n+2}$ , puis la proposition  $\mathcal{A}_n$ , puis l'associativité de la composition, puis la définition de  $f^{n+1}$ . Donc  $\mathcal{A}_{n+1}$  est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence: soit  $\mathcal{A}_n$  l'assertion  $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ . Cette assertion est vraie pour  $n = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  supposons  $\mathcal{A}_n$  vraie. Alors

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Donc  $\mathcal{A}_{n+1}$  est vraie. Par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

---

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. Montrons par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$ . Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad x_n > 3.$$

- La proposition  $\mathcal{H}_0$  est vraie car  $x_0 = 4 > 3$ .
- Soit  $n \geq 0$ , supposons  $\mathcal{H}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence  $x_n > 3$ , donc  $x_n + 2 > 0$  et  $2x_n^2 - 3x_n - 9 > 0$  (ceci par étude de la fonction  $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$  pour  $x > 3$ ). Donc  $x_{n+1} - 3$  et  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

- Nous avons montré

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme  $\mathcal{H}_0$  est vraie alors  $\mathcal{H}_n$  est vraie quelque soit  $n$ . Ce qui termine la démonstration.

- Montrons que  $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$  est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - 3x_n}{x_n + 2}$$

Ce dernier terme est positif car  $x_n > 3$ .

- Montrons par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N} x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ . Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition  $\mathcal{H}_0$  est vraie.
- Soit  $n \geq 0$ , supposons que  $\mathcal{H}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.  
D'après la question précédente  $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$  et par hypothèse de récurrence  $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$  ; en réunissant ces deux inégalités nous avons  $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ .
- Nous concluons en résumant la situation :  
 $\mathcal{H}_0$  est vraie, et  $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$  quelque soit  $n$ . Donc  $\mathcal{H}_n$  est toujours vraie.

- La suite  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$  et n'est donc pas convergente.
-