

Feuille d'exercices n°1 :

Logique et raisonnements mathématiques

Opérateur d'implication

Exercice 1. (☆)

- 1) A-t-on $(1 = 2) \Rightarrow (1 = 1)$?
- 2) A-t-on $(1 = 2) \Rightarrow (\ln 1 = 1)$?
- 3) A-t-on, pour x réel, $(x > 1) \Rightarrow (x \geq 2)$?
- 4) A-t-on, pour x réel, $(x^2 - 3x + 2 = 0) \Rightarrow (x \geq 0)$?
- 5) Que peut-on dire des réciproques des propositions précédentes ?

Exercice 2. (★)

On considère la proposition « s'il pleut, mon jardin est mouillé ». Quelle est sa négation ?

- a. « s'il ne pleut pas, mon jardin n'est pas mouillé »
- b. « s'il ne pleut pas, mon jardin est mouillé »
- c. « s'il pleut, mon jardin n'est pas mouillé »
- d. « si mon jardin n'est pas mouillé, il ne pleut pas »
- e. « il pleut et mon jardin n'est pas mouillé »
- f. autre réponse.

Exercice 3. (★)

Traduire les propositions suivantes (exprimées en français) à l'aide de symboles mathématiques.

- 1) Pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie.
- 2) Pour que p soit vraie, il suffit que q soit vraie.
- 3) La proposition q est une condition suffisante de la proposition p .
- 4) Pour qu'un réel x soit positif, il suffit qu'il ne soit pas négatif.

Opérateur d'équivalence

Exercice 4. (☆)

Soit x un réel. A-t-on $(x^2 = 9) \Leftrightarrow (x = 3)$?
(en français : pour que $x^2 = 9$ il faut et il suffit que $x = 3$)

Exercice 5. (★)

Démontrer que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{NON}(q) \Rightarrow \text{NON}(p))$.

Exercice 6. (★)

Soient p et q deux propositions. Montrer que :

- 1) $\text{NON}(p \text{ ET } q) \Leftrightarrow (\text{NON}(p) \text{ OU } \text{NON}(q))$
- 2) $\text{NON}(p \text{ OU } q) \Leftrightarrow (\text{NON}(p) \text{ ET } \text{NON}(q))$
- 3) $\text{NON}(\text{NON}(p)) \Leftrightarrow p$
- 4) $[(p \Rightarrow q) \text{ ET } (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Exercice 7. (★)

Soient p et q deux propositions. Exprimer la proposition $(p \Leftrightarrow q)$ en n'utilisant que les connecteurs logiques ET, OU et NON.

Utilisation de quantificateurs

Exercice 8. (★)

Établir la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Exercice 9. (★) Vrai ou faux ?

Justifier les assertions suivantes quand elles sont justes et donner un contre-exemple quand elles sont fausses.

- a. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant x$
- b. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$

Exercice 10. (★) Vrai ou faux ?

Parmi les propositions ci-dessous, exhiber un élément qui permet de satisfaire celles qui sont justes.

- a. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$
- b. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \leqslant n$
- c. $\exists p \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, p \leqslant n$
- d. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, e^y = xz^2$

Exercice 11. (★★)

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes définies sur \mathbb{N} .

- 1) Tout entier est le carré d'un entier.
- 2) Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.
- 3) Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.
- 4) Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.
- 5) L'entier n est impair.

Exprimer la négation de ces propositions.

Exercice 12. (★★)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Que signifient les deux propositions suivantes ?

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists M \in \mathbb{R}^+), f(x) \leqslant M$
- 2) $(\exists M \in \mathbb{R}^+), (\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \leqslant M$

Exercice 13. (★★)

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

- a. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum.
- b. L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans \mathbb{R} .
- c. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- d. La fonction f est constante.
- e. Tout réel a un antécédent par f .
- f. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur.
- g. La fonction f est strictement croissante.

Méthodes de démonstration**Exercice 14. (☆)**

Démontrer que la proposition suivante est fausse.

$$\forall x \in]-\infty, 1[, 2^{3x} \cdot (\ln(1-x) + 1) \cdot (3x^3 + xe^x - 4) \geqslant 0$$

Exercice 15. (★★)

Pour x élément de \mathbb{R} , montrer que : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.

On procédera par contraposée.

Exercice 16. (★★)

Pour x élément de \mathbb{R} , montrer que : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.

On procédera par l'absurde.

Exercice 17. (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que si n^2 est pair alors n est pair.

Faire de nouveau la démonstration en procédant par contraposée.

Exercice 18. (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2 - n$ est pair.