Exo 14.2: La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde.

P : a irrationel positif

Q : racine carree de a est irrationnelle

$$a\ irrationnel\ positif\ \rightarrow\ \sqrt{a}\ irrationnel$$

$$P\ \rightarrow Q\ \leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow P \wedge\ \neg Q$$

Supposons qu'on ait a un irrationnel positif et la racine carrée de a est rationnel.

$$a\ irrationnel\ positif\ \leftrightarrow\ \nexists\ (p,q) \in\ \mathbb{Z}\ \times \mathbb{Z}^*, a = \frac{p}{q}\ positif$$

$$\sqrt{a}\ rationnel\ \leftrightarrow\ \exists\ (r,s)\ \in\ \mathbb{Z}\ \times \mathbb{Z}^*, \qquad \sqrt{a} = \frac{r}{s}$$

$$\leftrightarrow\ (\sqrt{a})^2 =\ \frac{r^2}{s^2}$$

$$\leftrightarrow a =\ \frac{r^2}{s^2}$$

$$\leftrightarrow a\ est\ rationnel$$

Ce qui est absurde car a est irrationnel.

Par conséquent, la racine carrée d'un nombre irrationnel posiif est irrationnel.

Exo 15.1 : Si n^2 (avec $n \in\ \mathbb{N}$) est impair, alors n est impair.

Démonstration.

P : Si n^2 (avec $n \in\ \mathbb{N}$) est impair

Q : n est impair

Raisonnons par contraposée.

$$P \to Q \ \leftrightarrow \ \neg Q \to \neg P$$

$\neg Q$: n est pair

$\neg P$: n^2 est pair

On doit montrer alors n est pair implique que n^2 est pair.

$$n\ pair \ \leftrightarrow \ \exists\ k \ \in \mathbb{N}, n = 2k$$

$$\to \ n^2 = 4k^2$$

$$\to \ n^2 = 2(2k^2), avec\ k \ \in \mathbb{N}$$

$$\to n^2\ est\ pair$$

Par contraposée, on peut conclure que si n^2 est impair alors n est impair.

Exe 24.1 : Pour tout $n \ \geq 1, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \ n^2$.

Démonstration.

Raisonnons par récurrence.

1) Initialisation
   Prenons $n = 1$.
   $1 = \ 1^2 \ \leftrightarrow 1 = 1$.
   Ce qui est toujours vrai.
   Prenons $n = 2$.
   $1 + (2 * 2 - 1) = \ 2^2 \ \leftrightarrow 1 + 3 = 4$
   $\leftrightarrow 4 = 4$
   $\leftrightarrow 1 = 1$.
   Ce qui est toujours vrai.
2) Hérédité
   Soit $n \ \in \mathbb{N}^*$.
   Supposons que l'assertion est vraie pour n telle que l'on a :
   $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \ n^2$.
   Montrons que l'assertion est vraie pour le rang $n + 1$.
   Nous aurons donc à montrer que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = \ (n + 1)^2$.
   On a :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1)$$
$$= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

On a donc :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+1)$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

L'assertion est vraie au rang $n+1$.

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.