Exercices (BIBMATH)

1- On lance un dé (cubique) non truqué six fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 et au moins un 5?

Solution.

$A = \{obtenir\ au\ moins\ un\ 6\}$

$\bar{A} = \{obtenir\ au\ plus\ 5\}$

(1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5) et (1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5) et (1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5) et (1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5) et (1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5) et (1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5)

Probabilité pour une lancée du dé se réalise : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$P(\bar{A}) = (\frac{5}{6})^6$

On déduit alors:

$P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^6$

2- Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Solution.

1. $N = 20 \times 19 \times 18$
   $N = A_{20}^{3}$
2. $N = 1 \times 19 \times 18$
3. $N = 3 \times 19 \times 18$
4. $N = C_{20}^{3}$

3- Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. On note m sa moyenne et σ son écart-type. Calculer la probabilité $P(X \in [m - \sigma, m + \sigma])$.

Solution.

$m = \frac{a+b}{2}$

$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$

$\Rightarrow \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

$m + \sigma = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b \qquad (1)$

$m - \sigma = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a \qquad (2)$

On en déduit donc :
$a \leq m - \sigma \leq m + \sigma \leq b$

On peut donc réécrire :

$[m - \sigma, m + \sigma] \subset [a, b]$

Alors,

$P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$

$P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f(x)dx$

$P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} \frac{1}{b-a} dx$, car $[m - \sigma, m + \sigma] \subset [a, b]$

$P(X \in [m - \sigma, m + \sigma]) = \frac{2\sigma}{b-a}$

$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

$P(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f(x)dx$

$P(m \leq X \leq n) = \int_{m}^{n} f(x)dx$