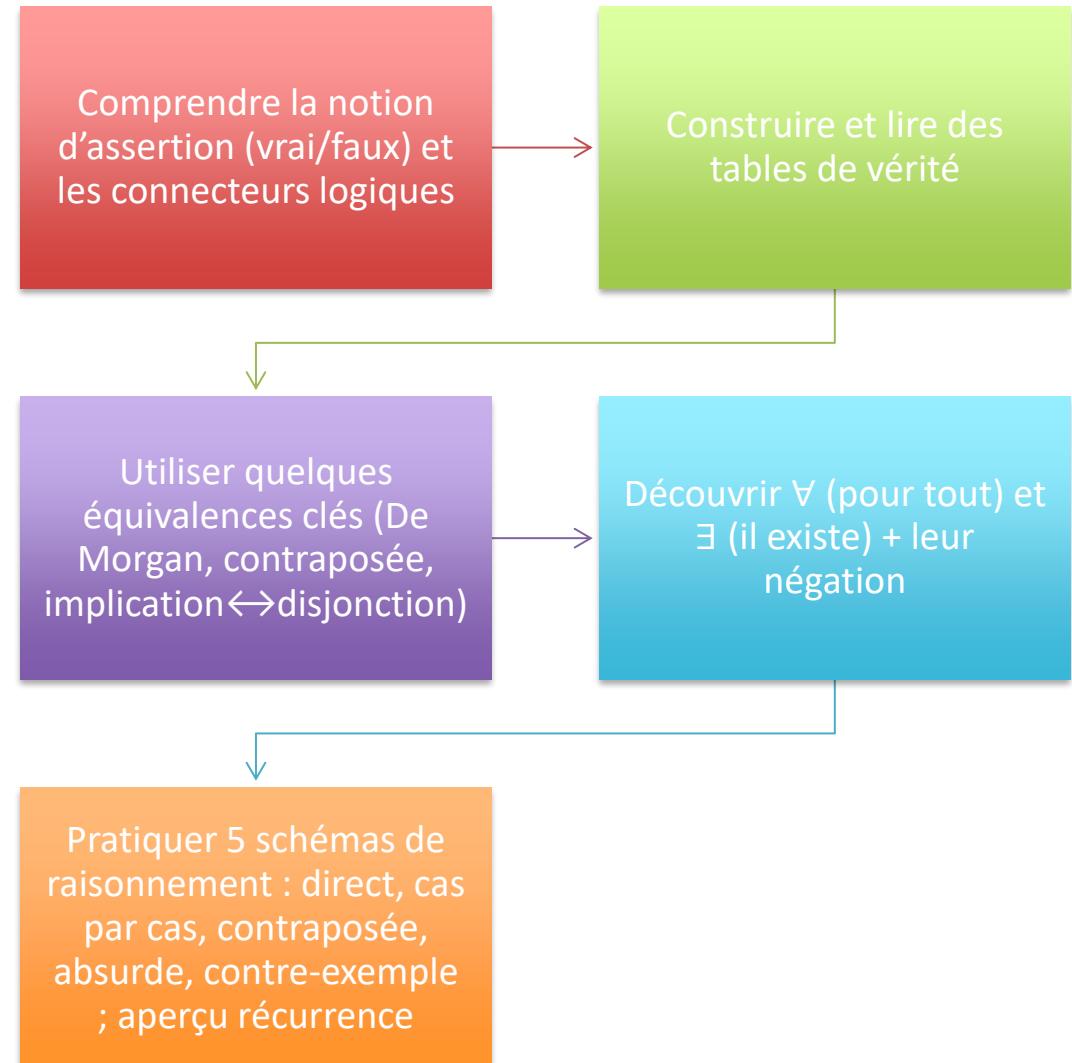


Séance 2 - Logique Mathématiques pour Informaticien

Préparé par: Geovany Batista Polo - Data Science & Analytics Engineer

Ambiguïtés du langage • Connecteurs • Tables de vérité • Implication/équivalence • Quantificateurs • Méthodes de raisonnement

Objectifs de la séance



Pourquoi la logique ? Ambiguïtés & rigueur

Ambiguïtés naturelles

- « fromage ou dessert » vs « as ou cœur » ; réponses à « As-tu 10€ ? »

Définitions rigoureuses

- Langage mathématique pour lever l'ambiguïté (ex : continuité)

Valider/invalider

- Distinguer vrai/faux par une démarche convaincante

Assertions (propositions)

Une assertion est une phrase vraie ou fausse (pas les deux)

Exemples

« Il pleut. » ; « $2+2=4$ » ; « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$ » ; etc.

À partir de P et Q, on construit de nouvelles assertions avec des connecteurs

Connecteurs logiques — définitions

ET (\wedge)

- vrai si P et Q sont vrais

OU (\vee)

- vrai si au moins l'un des deux est vrai (OU inclusif)

NON (\neg)

- vrai si P est faux

Table de vérité - ET ($P \wedge Q$)

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Table de vérité - OU (P ∨ Q)

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Table de vérité - NON ($\neg P$)

P	$\neg P$
1	0
0	1

OU exclusif (XOR)

P

Q

$P \oplus Q$

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implication $(P \Rightarrow Q)$

Définition : $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$

Seule fausse quand $P=1$ et $Q=0$

Lecture

- « si P alors Q » ; attention aux idées reçues

Table de vérité - Implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Biconditionnel $(P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Équivalences à connaître

Double négation : $P \Leftrightarrow \neg\neg P$

De Morgan : $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$;
 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Distributivité : $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$; $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Atelier - vérifier des équivalences

Montrer $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
par table

Tester les deux lois de De
Morgan

Écrire deux variantes d'une
même condition (plus lisible)

Quantificateurs - \forall et \exists

$\forall x \in E P(x)$

- vrai si $P(x)$ est vrai pour tous les x de E

$\exists x \in E P(x)$

- vrai s'il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ est vrai

Négation

- $\neg(\forall x P) \Leftrightarrow \exists x \neg P$;
- $\neg(\exists x P) \Leftrightarrow \forall x \neg P$

Attention à l'ordre

- $\forall x \exists y \dots \neq \exists y \forall x \dots$

Exercices — traduire en logique

« Tout réel a un carré ≥ 0 » ; « Il existe un entier pair > 1000 »

Négations : « Tous les étudiants sont à l'heure » ; « Il existe un graphe connexe ... »

Comparer $\forall x \exists y P(x,y)$ et $\exists y \forall x P(x,y)$ par un exemple humain

Méthodes de raisonnement - panorama

Direct (P donc Q)

Cas par cas (partition de l'univers)

Contraposée ($\neg Q \Rightarrow \neg P$)

Par l'absurde (P et $\neg Q \Rightarrow \perp$)

Contre-exemple (pour réfuter \forall)

Récurrence (initialisation + hérédité)

Exemple (direct) - somme de rationnels

Si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$

Idée : écrire $a=p/q$,
 $b=p'/q'$ puis additionner
et montrer que le résultat
est encore rationnel

Exemple (cas par cas) -
 $|x-1| \leq x^2-x+1$

Cas 1 : $x \geq 1 \rightarrow |x-1| = x-1$
; comparer avec x^2-x+1

Cas 2 : $x < 1 \rightarrow$
 $|x-1| = -(x-1)$; comparer
avec x^2-x+1

Conclusion : inégalité vraie dans tous les cas

Exemple
(contraposée)
- si n^2 est pair
alors n est pair

P : « n est pair » ; Q : « n^2 est pair »

Contraposée : $\neg Q \Rightarrow \neg P$,
i.e., « si n^2 est impair
alors n est impair »

Démontrer cette forme
est souvent plus
naturelle

Exemple
(absurde) -
 $a/(1+b)=b/(1+a)$
 $\Rightarrow a=b$ ($a,b>0$)

Supposer $a/(1+b)=b/(1+a)$
ET $a \neq b$

Manipulations algébriques
 \Rightarrow contradiction ($a+b=-1$
impossible)

Donc $a=b$

Contre-exemple — réfuter une assertion universelle

Pour « $\forall x P(x)$ », un seul x qui viole P suffit à réfuter

Ex : « Tout entier positif est somme de trois carrés » — 7 est un contre-exemple

Réurrence — principe et exemple

Principe

- Initialisation (n_0) ;
Hérédité ($n \rightarrow n+1$) ;
Conclusion

Exemple simple

- $2^n > n$ pour $n \geq 0$; ou
somme $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

Mini-quiz (rapide)

$\vee/F - P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Contraposée de « si p alors q » ?

Simplifier $\neg(\neg p \vee q)$

Donner un exemple où OU exclusif (XOR) est pertinent

Wrap-up & transition vers les exercices

2-3 équivalences à retenir : De Morgan,
implication \leftrightarrow disjonction,
contraposée

Méthodes de raisonnement :
choisir la stratégie adaptée

Prochaine étape : pratique
guidée + tickets de sortie