Logique & méthodes de raisonnement

Mathématiques pour Informaticiens

Geovany Batista Polo LAGUERRE | Data Scientist

FSGA - Université Quisqueya

21 septembre 2025

- Lever les ambiguïtés du langage naturel par un langage formel ;
- Manipuler connecteurs et tables de vérité ;
- Comprendre implication et équivalence ; pratiquer les quantificateurs ;
- Savoir utiliser : raisonnement direct, cas, contraposée, absurde, récurrence ;
- Ancrer par des mini-exercices corrigés.

Ambiguïté typique : ń ou ż

- **Ou inclusif** : $P \vee Q$ (vrai si au moins l'un est vrai) ;
- **Ou exclusif (XOR)** : $P \oplus Q$ (vrai si exactement un des deux est vrai).

But du cours

Passer d'énoncés informels à des **assertions** formelles, puis à des **preuves** courtes et rigoureuses.

Définition

Une **assertion** est une phrase qui a une valeur de vérité (vraie ou fausse, pas les deux).

Exemples : ń Il pleut ż, ń $2+2=4$ ż, ń $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ ż.

- NON : $\neg P$;
- ET : $P \wedge Q$;
- OU : $P \vee Q$;
- Implication : $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$;
- Équivalence :
  $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Équivalences utiles

- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;
- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
- $(P \wedge (Q \vee R)) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
- $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (contraposée).

P	Q	$P \land Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	Q	$P \lor Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

P	$\neg P$
1	0
0	1

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$;
- Fausse seulement si P vraie et Q fausse ;
- Contraposée : $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

- $\forall x \in E\, P(x)$: vrai si P vaut pour tout x ;
- $\exists x \in E\, P(x)$: vrai si P vaut pour au moins un x ;
- Négations : $\neg(\forall x\, P) \equiv \exists x\, \neg P$; $\neg(\exists x\, P) \equiv \forall x\, \neg P$;
- Attention à l'ordre : $\forall x \exists y \neq \exists y \forall x$ en général.

- Direct ; par cas ; par contraposée ; par l'absurde ;
- Par récurrence (simple/forte) ; bon ordre / plus petit contre-exemple ;
- Invariants (jeux/processus).

Direct - somme de rationnels

Si $a, b \in \mathbb{Q}$, écrire $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, alors $a + b = \frac{ps+rq}{qs} \in \mathbb{Q}$.

Cas par cas - $|x-1| \leq x^2 - x + 1$

Étudier $x \geq 1$ (alors $|x-1| = x-1$) et $x < 1$ ($|x-1| = 1-x$) : dans les deux cas l'inégalité se vérifie.

Contraposée - si n^2 pair alors n pair

Supposer n impair $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k(k+1)+1$ impair. Donc contraposée prouvée.

Absurde - $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$ (a,b>0)

Supposer $a \neq b$. Par croisement :
$a(1+a) = b(1+b) \Rightarrow a - a^2 = b - b^2 \Rightarrow (a-b)(1-a-b) = 0$. Or $a \neq b$ et $a, b > 0 \Rightarrow 1 - a - b < 0$ impossible avec égalité. Contradiction $\Rightarrow a = b$.

Contre-exemple

Tous les entiers >0 sont somme de deux carrés est faux : 3 ne convient pas (et 7 non plus).

Récurrence - exemple

Montrer $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$: initialisation $n = 1$, hérédité $n \to n + 1$ par ajout de $(n + 1)$.

1. V/F : $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$;
2. Donner la table de vérité de XOR ;
3. Écrire la négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$.

- Outils : connecteurs, équivalences, quantificateurs ;
- Méthodes : direct, cas, contraposée, absurde, récurrence, invariants ;
- Prochaine étape : mise en pratique sur ensembles/relations/fonctions.