Séance 1 Logique

Mathématiques pour linformatique (Bac+2)

Geovany Batista Polo LAGUERRE

FSGA & Université Quisqueya

Version du 11/09/2025

Objectifs de la séance

- Comprendre la notion d'**assertion** (vrai/faux) et les **connecteurs logiques**.
- Construire et lire des **tables de vérité**.
- Utiliser quelques **équivalences clés** (De Morgan, contraposée, $p \Rightarrow q \ \Leftrightarrow \ \neg p \vee q$).
- Découvrir les **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$ et négations associées.
- Pratiquer des **méthodes de raisonnement** : direct, cas par cas, contraposée, absurde, contre-exemple, aperçu récurrence.

Motivation & bases

Pourquoi la logique ?

- Lever les **ambiguïtés** du langage naturel ; formaliser conditions et validations.
- Langage commun pour **raisonner**, prouver, **déboguer** des conditions en code.
- Exemples : ń fromage **ou** dessert ż (XOR) vs ń as **ou** coeur ż (OU inclusif).

Assertions (propositions)

- Une **assertion** est une phrase vraie *ou* fausse (pas les deux).
- Ex. ń Il pleut. ż ; ń $2 + 2 = 4$ ż ; ń $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ ż.
- À partir de P et Q, on construit de nouvelles assertions via des **connecteurs**.

Connecteurs & tables de vérité

Connecteurs de base

- **NON** $\neg P$: vrai si P est faux.
- **ET** $P \wedge Q$: vrai si P et Q sont vrais.
- **OU** $P \vee Q$: vrai si *au moins* lun des deux est vrai (OU inclusif).

Table de vérité ET

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Table de vérité OU (inclusif)

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Table de vérité NON

P	$\neg P$
1	0
0	1

OU exclusif (XOR)

- ń Lun *ou* lautre, *pas les deux* ż. Utile pour certaines règles métiers.

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implication $P \Rightarrow Q$

- **Définition** : $P \Rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee Q$.
- **Fausse seulement** quand $P = 1$ et $Q = 0$.
- Lecture ń si P alors Q ż ; attention aux idées reçues.

Table Implication et Biconditionnel

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Équivalences classiques

Équivalences incontournables

- **Double négation** : $P \Leftrightarrow \neg\neg P$.
- **De Morgan** : $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$; $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
- **Distributivité** : $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$; etc.
- **Contraposée** : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Atelier vérifier des équivalences

- Montrer $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ par table.
- Tester les deux lois de De Morgan.
- Écrire deux variantes logiquement équivalentes dune même condition (plus lisible).

Quantificateurs

Quantificateurs $\forall$ et $\exists$

- $\forall x \in E\; P(x)$: vrai si $P(x)$ est vrai pour **tous** les x de E.
- $\exists x \in E\; P(x)$: vrai sil **existe** au moins un x dans E tel que $P(x)$.
- **Négations** : $\neg(\forall x\, P) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P$; $\neg(\exists x\, P) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P$.
- **Attention à lordre** : $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \neq \exists y\, \forall x\, P(x,y)$.

Exercices traductions et négations

- Traduire : ń Tout réel a un carré ≥ 0 ż ; ń Il existe un entier pair > 1000 ż.
- Négations : ń Tous les étudiants sont à lheure ż ; ń Il existe un graphe connexe ... ż.
- Comparer $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ et $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ sur un exemple concret.

Méthodes de raisonnement

Panorama des méthodes

- **Direct** : enchaîner des implications vraies $P \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q$.
- **Cas par cas** : partitionner lunivers (ex. $x \geq 1$ / $x < 1$).
- **Contraposée** : prouver $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- **Par labsurde** : supposer P et $\neg Q$ et conclure à une contradiction.
- **Contre-exemple** : réfuter un universel $\forall x\, P(x)$.
- **Récurrence** : initialisation + hérédité $\Rightarrow$ conclusion.

Exemples rapides I

- **Direct** : si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$ (écrire $a = p/q$, $b = p'/q'$).
- **Cas par cas** : $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$ selon $x \geq 1$ ou $x < 1$.

Exemples rapides II

- **Contraposée** : si n^2 est pair alors n est pair $\Leftrightarrow$ si n^2 est impair alors n est impair.
- **Absurde** : $a/(1+b) = b/(1+a)$ avec $a, b > 0 \Rightarrow a = b$ (sinon contradiction).
- **Contre-exemple** : pour ń $\forall x\, P(x)$ ż, exhiber un x qui viole P.

Principe de récurrence (aperçu)

- **Initialisation** : montrer $P(n_0)$ vrai.
- **Hérédité** : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- **Conclusion** : tous les $n \geq n_0$ vérifient $P(n)$.
- Exemples : $2^n > n$ $(n \geq 0)$; $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

UniQ FSGA Faculté des Sciences, de Génie et d'Architecture

Mini-quiz & synthèse

Mini-quiz (rapide)

1. V/F $P \Rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee Q$.
2. Contraposée de ń si p alors q ż ?
3. Simplifier $\neg(\neg p \vee q)$.
4. Donner un exemple où XOR est pertinent.

Wrap-up

- Connecteurs, tables, équivalences (De Morgan, contraposée, $\neg P \vee Q$)
- Quantificateurs & négations
- Méthodes de raisonnement (direct, cas, contraposée, absurde, contre-ex.)
- **Suite** : Ensembles, relations & fonctions ; puis combinatoire / probas discrètes.