Exercices corrigés - Ensembles

Différentes écritures d'ensembles

Exercice 1 - Écriture en extension [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Q};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ x = \frac{p}{n} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}.$$

Indication

Pour B, prendre garde aux répétitions.

Corrigé

On a :

$$A = \{2,3,4,5,6\}.$$

Pour écrire B, on remarque que $1/2 \leq n \leq 7/2 \implies n = 1, 2$ ou 3. Pour chaque valeur possible de n, on détermine ensuite les valeurs possibles de p :

- Pour $n = 1$, on a $p \in \{1,2\}$.
- Pour $n = 2$, on a $p \in \{1,2,3,4\}$.
- Pour $n = 3$, on a $p \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Finalement, on trouve

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

On n'a pas écrit plusieurs fois 1, qui s'obtient aussi avec 2/2 et 3/3, ni plusieurs fois 2, qu'on obtient avec 2/1, 4/2 et 6/3.

Exercice 2 - Deux descriptions d'un même ensemble [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1, 4t+3);\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = C$.

Corrigé

On va procéder par double inclusion. Le plus facile est de prouver que $C \subset A$. En effet, prenons un couple $(x, y) \in C$. Alors on sait qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Mais alors,

$$4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

et donc on a bien $(x, y) \in A$.
Réciproquement, prenons $(x, y) \in A$ et prouvons que $(x, y) \in C$. C'est plus difficile, car il faut construire un réel t. On va procéder par analyse-synthèse. Si un tel t existe, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors, $y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3$. On a donc bien $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ et $(x, y) \in C$.

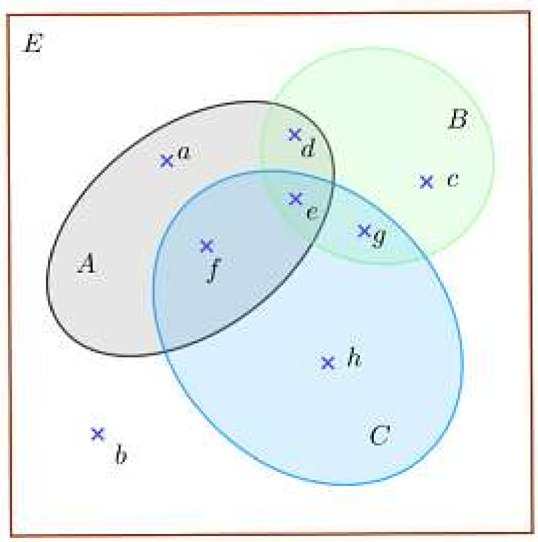
Opérations sur les ensembles : intersection, réunion, complémentaire

Exercice 3 - Diagramme de Venn

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des élements de E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $g \in A \cap \overline{B}$;
2. $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$;
3. $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $f \in C \backslash A$;
5. $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
6. $\{h, b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
7. $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Corrigé

1. Faux car $g \in B$ et donc $g \notin \overline{B}$.

2. Faux pour la même raison.
3. Vrai car $g \in \overline{A}$.
4. Faux car $f \in A$;
5. Faux car $e \in A$;
6. Ceci revient à démontrer que $h \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$: c'est vrai!
7. Ceci revient à démontrer que $a \in A \cup C$ et $f \in A \cup C$: c'est vrai!

Exercice 4 - Partie d'une union

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraîne $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Indication

Faire un dessin et donner un contre-exemple.

Corrigé

Non! Prendre par exemple $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ et $C = \{2,3\}$.

Exercice 5 - Trois ensembles

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Corrigé

Prenons $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in B$, et donc $A \subset B$.
Prenons maintenant $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, et donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in C$, et donc $B \subset C$.

Exercice 6 - Privé de ...

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Démontrer que

$$A \backslash C \subset (A \backslash B) \cup (B \backslash C).$$

Indication

Choisir $x \in A \backslash C$ et raisonner par disjonction de cas, suivant que $x \in B$ ou non.

Corrigé

Soit $x \in A \backslash C$ ce qui signifie $x \in A$ et $x \notin C$. On raisonne par disjonction de cas :

- Soit $x \notin B$. Dans ce cas $x \in A \backslash B$ donc $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$.
- Soit $x \in B$. Dans ce cas $x \in B \backslash C$ et donc $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$.

Exercice 7 - Lois de De Morgan [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Pour $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E. Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Indication

Raisonner à chaque fois par double inclusion.

Corrigé

On raisonne à chaque fois par double inclusion.

1. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors ($x \in A$ et $x \in B$) ou $x \in C$. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, et l'inclusion est prouvée. Sinon, c'est que $x \in C$, et dans ce cas on a aussi $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$.
Réciproquement, si $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$, on distingue deux cas :
   - Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B)$ ou $x \in C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.
   - Sinon, $x \notin C$. Mais alors, puisque $x \in A \cup C$, on a $x \in A$. De même, puisque $x \in B \cup C$, on a $x \in B$. Ceci prouve que $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$.
2. On suppose que $x \in (A^c)^c$. Alors $x \notin A^c$, et donc $x \in A$. Réciproquement, si $x \in A$, alors $x \notin A^c$ et donc $x \in (A^c)^c$.
3. Soit $x \in (A \cap B)^c$. Alors $x \notin A \cap B$. On a donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A^c$ ou $x \in B^c$. On en déduit que $x \in A^c \cup B^c$. Réciproquement, soit $x \in A^c \cup B^c$. Alors $x \in A^c$ ou $x \in B^c$, c'est-à-dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^c$.
4. On peut présenter aussi les raisonnements précédents sous forme d'équivalence. C'est ce que l'on fait pour ce dernier exemple :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ et } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Exercice 8 - Réunion et intersection égales [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle?

Indication

1. Prendre $x \in A$ et démontrer par l'absurde que $x \in B$.
2. Prendre $x \in B$ et distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.

Corrigé

1. Par symétrie du problème en A et B, il suffit de démontrer que $A \subset B$. Prenons $x \in A$ et supposons que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$ et donc les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ sont différents, une contradiction. C'est donc que $x \in B$.
2. Par symétrie du problème en B et C, il suffit de démontrer l'inclusion $B \subset C$. Soit donc $x \in B$. On distingue deux cas :
   - ou bien $x \in A$. Dans ce cas, $x \in A \cap B = A \cap C$, et donc $x \in C$.
   - ou bien $x \notin A$. Dans ce cas, $x \in A \cup B = A \cup C$ et donc $x \in A$ ou $x \in C$. Puisqu'on est dans le cas $x \notin A$, on en déduit que $x \in C$.

   Dans tous les cas, on a démontré $x \in C$, et donc $B \subset C$. Une seule des deux conditions n'est pas suffisante :
   - Si on suppose seulement que $A \cup B \subset A \cup C$, il suffit de prendre $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. On a bien $A \cup B \subset A \cup C$, mais on n'a pas $B \subset C$.
   - Si on suppose seulement que $A \cap B \subset A \cap C$, il suffit de prendre $A = C = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$.

Exercice 9 - Différence symétrique

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$, $A\Delta C_E A$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

Indication

1.
2. Raisonner par double inclusion.
3. Utiliser par exemple l'écriture précédente.
4. Raisonner par double inclusion.

Corrigé

1. Les éléments de $A\Delta B$ sont les éléments qui appartiennent à A ou à B, mais qui n'appartiennent pas simultanément aux deux (dans un langage informatique, on pourrait parler de "ou exclusif").

2. Soit $x \in A\Delta B$. Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$. On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$.
Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. L'autre possibilité se traite exactement de la même façon.
3. En utilisant ou la définition (c'est plus clair avec l'interprétation de la première question), ou le résultat précédent, on a :

$$A\Delta A = \varnothing.$$

$$A\Delta\varnothing = A.$$

$$A\Delta E = C_E A.$$

$$A\Delta C_E A = E.$$

4. Comme toujours, on raisonne par double inclusion. Si $x \in (A\Delta B) \cap C$, alors $x \in A\Delta B$ et $x \in C$. Si on a $x \in A$, alors $x \notin B$, et $x \in C$, ce qui donne encore : $x \in A \cap C$ et $x \notin B \cap C$. On a bien $x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C)$. Le cas où $x \in B$ se traite exactement de la même façon (par symétrie).
Réciproquement, si $x \in (A \cap C)\Delta(B \cap C)$, supposons par exemple que $x \in (A \cap C)$. Alors $x \notin B \cap C$, ce qui implique $x \notin B$ ou $x \notin C$. Mais, $x \in (A \cap C) \implies x \in A$ et $x \in C$. On en déduit que $x \notin B$. D'où $x \in A\Delta B$, et $x \in C$, ce qui est le résultat que nous voulions prouver. L'autre cas se traite également par symétrie.

Exercice 10 - Retour sur la différence symétrique

[Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On rappelle que la différence symétrique de A et B est définie par

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

où $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}$) désigne le complémentaire de A (resp. de B) dans E. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \varnothing$.

Indication

Pour la réciproque, prouver séparément que $A \cap B = \varnothing$ et que $A \cap \bar{B} = \varnothing$.

Corrigé

Il y a d'abord un sens qui est facile : si $A = \varnothing$, alors par définition de la différence symétrique, on a bien $A\Delta B = B$ car $A = \varnothing$ et $\bar{A} \cap B = B$. Réciproquement, si $A\Delta B = B$, il faut prouver que $A = \varnothing$. On va découper la preuve en deux parties :

1. on prouve que $A \cap B = \varnothing$. En effet, prenons $x \in B$. Alors, en particulier $x \in A\Delta B$, et donc $x \in A \cap \bar{B}$ ou $x \in \bar{A} \cap B$. La première éventualité est impossible (car $x \in B$) et donc on a $x \in \bar{A} \cap B$. Ainsi, tout élément de B est aussi dans $\bar{A}$, et donc $A \cap B = \varnothing$.
2. on va aussi prouver que $A \cap \bar{B} = \varnothing$. En effet, imaginons qu'on puisse trouve un élément dans $A \cap \bar{B}$. Alors cet élément serait aussi dans $A\Delta B = B$, ce qui est impossible puisqu'il serait simultanément dans B et dans $\bar{B}$.

La confrontation des deux propriétés précédentes entraîne alors que $A=\varnothing$.

Exercice 11 - Équations et ensembles [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble et soit $A,B\in\mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X\in\mathcal{P}(E)$:

1. $A\cup X=B$;
2. $A\cap X=B$.

Indication

Il faut d'abord réfléchir à quelle(s) condition(s) sur A et sur B une solution peut exister.

Corrigé

Traitons d'abord la première équation. Puisque $A\subset A\cup X$, une telle équation ne peut avoir une solution que si $A\subset B$. Supposons donc cette condition remplie, et déterminons toutes les solutions. Supposons d'abord que X est une solution. Puisque $X\subset A\cup X$, on a nécessairement $X\subset B$. De plus, X doit nécessairement contenir tous les éléments de B qui ne sont pas dans A. Autrement dit, on a $B\backslash A\subset X\subset B$. Réciproquement, soit X une partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que $B\backslash A\subset X\subset B$. Alors $A\cup X\subset B\cup B=B$. De plus,

$$B=A\cup(B\backslash A)\subset A\cup X,$$

et donc $A\cup X=B$. Donc toutes les solutions sont les parties X telles que $B\backslash A\subset X\subset B$.
La deuxième équation se traite de façon similaire. Elle peut aussi se ramener à la première équation en prenant le complémentaire. On trouve qu'il existe des solutions si et seulement si $B\subset A$ et que, dans ce cas, toutes les solutions sont les parties X telles que $B\subset X\subset(B\cup\bar{A})$.

Exercice 12 - Fonction caractéristique [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ telle que :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$;
2. fg;
3. $f+g-fg$.

Indication

On retrouve les trois opérations classiques sur les ensembles.

Corrigé

1. $h=1-f$ est la fonction caractéristique du complémentaire de A, $\bar{A}$. En effet, on a $h(x)=0$ si $f(x)=1$, c'est-à-dire si $x\in A$, c'est-à-dire si $x\notin\bar{A}$, et $h(x)=1$ si $f(x)=0$, c'est-à-dire si $x\notin A$, c'est-à-dire si $x\in\bar{A}$.
2. $h=fg$ est la fonction caractéristique de $A\cap B$. En effet, si $x\in A\cap B$, alors $f(x)=g(x)=1$, et donc $h(x)=1$. Si $x\notin A\cap B$, alors ou bien $x\notin A$ et $f(x)=0$ ou bien $x\notin B$ et $g(x)=0$. Dans tous les cas, $h(x)=0$.
3. $h=f+g-fg$ est la fonction caractéristique de $A\cup B$. En effet, si $x\notin A\cup B$, alors $f(x)=g(x)=0$, et donc $h(x)=0$. Si $x\in A\cup B$, alors on peut distinguer trois cas :
   - $x\in A$ et $x\in B$: on a alors $f(x)=g(x)=1$, et $h(x)=1+1-1=1$;
   - $x\in A$ et $x\notin B$: on a alors $f(x)=1$ et $g(x)=0$, soit $h(x)=1+0-0=1$;
   - $x\notin A$ et $x\in B$: on a alors $f(x)=0$ et $g(x)=1$, soit $h(x)=0+1-0=1$.

Ensemble des parties

Exercice 13 - Ensemble des parties [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Écrire l'ensemble des parties de $E=\{a,b,c,d\}$.

Indication

Écrire toutes les parties à 0 éléments, toutes les parties à 1 éléments, etc... On doit trouver $2^4=16$ éléments dans $\mathcal{P}(E)$.

Corrigé

On classe les parties suivant leur nombre d'éléments :

1. 0 éléments : Il n'y a que l'ensemble vide : $\varnothing$.
2. 1 élément : Il y a les 4 singletons : $\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\}$.
3. 2 éléments : Il y a 6 parties à 2 éléments :
$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\}.$$
4. 3 éléments : Il y a 4 parties à 3 éléments :
$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\}.$$
5. 4 éléments : Il n'y a qu'une partie à 4 éléments : l'ensemble E lui-même.

L'ensemble des parties de E comporte donc $16=2^4$ éléments.

Exercice 14 - Ensemble des parties, intersection et réunion [Signaler une erreur]
[Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient deux ensembles E et F.

1. Soit A une partie de $E\cap F$. A est-elle une partie de E? de F? En déduire une comparaison de $\mathcal P(E\cap F)$ avec $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$.
2. Soit B un ensemble qui est a la fois contenu dans E et aussi dans F. B est-il contenu dans $E\cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal P(E\cap F)$ avec $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$.
3. Démontrer que $\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)$ est inclus dans $\mathcal P(E\cup F)$.
4. Donner un exemple simple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Indication

1.
2.
3.
4. L'idée est qu'une partie de $E\cup F$ n'est pas forcément une partie de E ou une partie de F. Trouver un exemple l'illustrant.

Corrigé

1. Si A est une partie de $E\cap F$, alors $A\subset E\cap F$, donc on a à la fois $A\subset E$ et $A\subset F$. A est bien une partie de E et une partie de F. Autrement dit, on a prouvé que si $A\in\mathcal P(E\cap F)$, alors $A\in\mathcal P(E)$ et $A\in\mathcal P(F)$. Ceci signifie que $\mathcal P(E\cap F)\subset\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$.
2. Oui, si $B\subset E$ et $B\subset F$, alors $B\subset E\cap F$. Autrement dit, si $B\in\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)$, alors $B\subset P(E\cap F)$. Ainsi, on a prouvé l'autre inclusion $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)\subset\mathcal P(E\cap F)$. Finalement, on a $\mathcal P(E)\cap\mathcal P(F)=\mathcal P(E\cap F)$
3. Prenons $A\in\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)$. Alors, ou bien $A\in\mathcal P(E)$. Donc A est une partie de E, et en particulier une partie de $E\cup F$, donc $A\in\mathcal P(E\cup F)$. Sinon, $A\in\mathcal P(F)$. Donc A est une partie de F, et en particulier une partie de $E\cup F$. Donc $A\in\mathcal P(E\cup F)$. Dans tous les cas, $A\in\mathcal P(E\cup F)$, et ceci prouve l'inclusion $\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)\subset\mathcal P(E\cup F)$.
4. L'idée est qu'une partie de $E\cup F$ n'est pas forcément une partie de E ou une partie de F. Prenons par exemple $E=\{1,2\}$ et $F=\{3,4\}$. Alors $A=\{2,3\}$ est une partie de $E\cup F$, mais n'est ni une partie de E, ni une partie de F. Dans ce cas, $\mathcal P(E\cup F)$ n'est pas inclus dans $\mathcal P(E)\cup\mathcal P(F)$.

Produit cartésien

Exercice 15 - Produit cartésien [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$. Démontrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Indication

Faire un dessin, raisonner par l'absurde et considérer $(1,0)$ et $(0,1)$.

Corrigé

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $A,B\subset\mathbb{R}$ tels que $D=A\times B$. Alors le point $(1,0)\in D$, et donc $1\in A$. De même, $(0,1)\in D$, et donc $1\in B$. On en déduit que $(1,1)\in A\times B=D$, ce qui n'est pas le cas. D n'est donc pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 16 - Produit cartésien et intersection [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E et F deux ensembles, soit A,C deux parties de E et B,D deux parties de F. Démontrer que

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

Indication

Procéder par double inclusion!

Corrigé

On va procéder par double inclusion. Soit $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$. Alors $(x,y)\in A\times B$ et donc $x\in A$, $y\in B$. On a aussi $(x,y)\in(C\times D)$, et donc $x\in C$ et $y\in D$. Ainsi, $x\in A\cap C$ et $y\in B\cap D$. Ceci prouve que $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Réciproquement, soit $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$. Alors $x\in A\cap C$ et donc $x\in A$ et $x\in C$. De même $y\in B\cap D$, donc $y\in B$ et $y\in D$. Ainsi, $(x,y)\in A\times B$ et $(x,y)\in C\times D$. On conclut que $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$.