Ensembles, relations & fonctions

Mathématiques pour Informaticiens

Geovany Batista Polo LAGUERRE | Data Scientist

FSGA - Université Quisqueya

21 septembre 2025

- Maîtriser les notions d'**ensemble** et d'**opérations** (union, intersection, complémentaire) ;
- Manipuler le **produit cartésien** et les **applications** (composition, image, image réciproque) ;
- Caractériser **injection, surjection, bijection** et l'**inverse** d'une bijection ;
- Introduire les **cardinaux**, le **principe des tiroirs** et quelques dénombrements utiles ;
- Définir une **relation d'équivalence** et les **classes**, aperçu des *partitions*.

Idée

Le langage naïf des ensembles mène à des paradoxes (ex. : ń ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes ż). Objectif du cours : manipuler des **définitions précises** et des **preuves rigoureuses**, sans entrer dans l'axiomatique profonde.

Définition

Un **ensemble** est une collection d'objets (éléments) distincts. On note $x \in E$ si x appartient à E. Deux ensembles sont égaux s'ils ont les **mêmes éléments**.

Inclusion : $A \subseteq B \iff (\forall x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$.

- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$;
- $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
- A^c : complémentaire (dans un univers U fixé).

De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Définition

$E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$.

Exemple

Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ alors $E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.

Définition

Une **application** $f : E \to F$ associe à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$.

- **Composition** : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;
- **Image directe** : $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$;
- **Image réciproque** : $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ (toujours définie).

Injection $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Surjection $\forall y \in F, \ \exists x \in E : f(x) = y$.

Bijection f est injective et surjective.

Inverse

f bijective $\iff$ il existe $f^{-1} : F \to E$ avec $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Théorème

Une application $f : E \to F$ est bijective ssi il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Idée de preuve.

($\Rightarrow$) Si f bijective, définir $g(y)$ comme l'unique antécédent de y : $g = f^{-1}$. ($\Leftarrow$) Si g existe, alors f est injective (car $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'$) et surjective (pour tout y, $f(g(y)) = y$). $\square$

Définition

Si E fini, son **cardinal** $\mathrm{Card}(E)$ est le nombre d'éléments.

Théorème (Principe des tiroirs)

Si $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$, *toute application* $E \to F$ *n'est pas injective.*

Preuve éclair.

Supposons injective : alors $|E| \leq |F|$. Contradiction avec $|E| > |F|$. $\square$

- Nombre d'applications $f : E \to F$ si $\mathrm{Card}(E) = m$ et $\mathrm{Card}(F) = n$: n^m.
- Nombre d'injections $E \hookrightarrow F$ $(m \leq n)$: $n(n-1)\cdots(n-m+1)$.
- Nombre de parties de un ensemble à n éléments : 2^n.

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ pour } 0 \leq k \leq n.$$

Théorème (Binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Preuve combinatoire.

Développer $(x+y)^n$ revient à choisir, pour chaque facteur, x ou y. Le terme $x^{n-k}y^k$ apparaît pour chaque choix de k positions où l'on prend y : il y en a $\binom{n}{k}$. □

Définition

Une relation $\sim$ sur E est une **équivalence** si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Proposition

Les classes d'équivalence forment une ***partition*** *de* E *; réciproquement, toute partition définit une équivalence.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de a la fonction est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de a la fonction est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution. Si $a = 0$, f est constante $\Rightarrow$ ni injective ni surjective. Si $a \neq 0$, f est strictement monotone et affine $\Rightarrow$ bijective (donc injective et surjective).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$. Soit $B = [1, 4]$.

1. Calculer $(f \circ g)(x)$;
2. $f^{-1}(B)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$. Soit $B = [1, 4]$.

1. Calculer $(f \circ g)(x)$;
2. $f^{-1}(B)$.

Solution. $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
$f^{-1}([1, 4]) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 4\} = (-\infty, -1] \cup [1, 2] \cup [-2, -1]$; en simplifiant :
$[-2, -1] \cup [1, 2]$.

On place 13 objets dans 12 tiroirs. Montrer qu'au moins un tiroir contient ≥ 2 objets.

On place 13 objets dans 12 tiroirs. Montrer qu'au moins un tiroir contient ≥ 2 objets.
Solution. Si chaque tiroir contenait 0 ou 1 objet, on ne placerait au plus que 12 objets. Contradiction. Donc un tiroir contient au moins 2 objets.

Combien d'applications $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ sont surjectives ?

Combien d'applications $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ sont surjectives ?
Solution. Surjection impossible car $|\mathrm{dom}| = 3 < 4 = |\mathrm{codom}|$; il faut au moins autant d'éléments dans le domaine que dans le codomaine pour ń couvrir ż toutes les valeurs.

Dans $E = \mathbb{Z}$, définir $x \sim y \iff x - y$ est pair. Montrer que $\sim$ est une équivalence et décrire les classes.

Dans $E = \mathbb{Z}$, définir $x \sim y \iff x - y$ est pair. Montrer que $\sim$ est une équivalence et décrire les classes.

Solution. Réflexive ($x - x = 0$ pair), symétrique (si $x - y$ pair, $y - x = -(x - y)$ pair), transitive (somme de pairs). Classes : $[\overline{0}] = \{$entiers pairs$\}$ et $[\overline{1}] = \{$entiers impairs$\}$ (partition en deux classes).

1. Vrai/Faux : l'image réciproque préserve les inclusions : $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
2. Pour $|E| = m, |F| = n$, le nombre de fonctions $E \to F$ est n^m (V/F ?).
3. Si f est bijective, f^{-1} est-elle bijective ? (Oui/Non)

1. Vrai/Faux : l'image réciproque préserve les inclusions : $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
2. Pour $|E| = m, |F| = n$, le nombre de fonctions $E \to F$ est n^m (V/F ?).
3. Si f est bijective, f^{-1} est-elle bijective ? (Oui/Non)

Réponses. (1) Vrai ; (2) Vrai ; (3) Oui.

Pour $n \geq 2$, la relation $a \equiv b\,[n] \iff n \mid (a-b)$ est une équivalence sur $\mathbb{Z}$. Les classes sont $[0],[1],\ldots,[n-1]$; l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ regroupe les résidus.

- Savoirs : ensembles/ops., applications, bijection & inverse, cardinaux, tiroirs, équivalences/partitions.
- Savoirs-faire : *raisonnements* (direct, par cas), preuves courtes (tiroirs, Newton).

À suivre : Relations d'ordre, relations de préférence, et premières structures combinatoires.