

Séance - Ensembles, relations & fonctions

Mathématiques pour Informaticiens

Ensembles & opérations • Fonctions •
Injection/Surjection/Bijection • Cardinaux •
Relations d'équivalence

Objectifs de la séance

Manipuler inclusion, union, intersection, complémentaire et produit cartésien

Comprendre image directe et image réciproque d'un ensemble par une application

Distinguer injection, surjection, bijection et savoir les reconnaître

Relier bijection \leftrightarrow inverse, et utiliser la composition

Compter : cardinal, nombre d'applications/injections/bijections, parties (coefficients binomiaux)

Identifier une relation d'équivalence et ses classes (ex. Z/nZ)

Motivation - Paradoxe de Russell (intuition)

L'« ensemble de tous les ensembles » mène à une contradiction

Construire $F = \{E \in E \mid E \notin E\}$ et demander “ $F \in F ?$ ” → impossible

On travaille avec des définitions sûres ; objectif = manipuler des ensembles concrets

Définir un ensemble

Deux manières

- Énumération : {0,1}, {rouge,noir}
- Compréhension : { $x \in R \mid |x-2| < 1$ }

Ensemble vide

- \emptyset ne contient aucun élément

Appartenance

- $x \in E$ (ou $x \notin E$)

Inclusion & égalité

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E (x \in F)$$
$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Ensemble des parties $P(E)$

Union, intersection, complémentaire

Union

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (OU inclusif)

Intersection

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

Complémentaire

- $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Règles de calcul (rappels)

Commutativité,
associativité,
neutres/absorbants

Distributivité :
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan : $C(A \cap B) = C A \cup C B$
 $; C(A \cup B) = C A \cap C B$

Produit cartésien

$E \times F$

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}$$

Exemples :

$R^2 = R \times R$; $[0,1] \times R$;
 $[0,1]^3$

Applications (fonctions)

$f : E \rightarrow F$; à $x \in E$
associer l'unique
 $f(x) \in F$

Graphe $\Gamma_f \subset E \times F$
; égalité $f=g \Leftrightarrow$
 $\forall x f(x)=g(x)$

Composition & restriction

$g \circ f : E \rightarrow G$ avec
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Restriction $f|_A : A \rightarrow F$,
 $x \mapsto f(x)$

Exemple : $f(x) = 1/x$,
 $g(x) = (x-1)/(x+1) \Rightarrow (g \circ f)(x) = -g(x)$

Image directe & image réciproque

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset F$$
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \} \subset E$$

(existe toujours)

$f(\{x\})$ est un singleton ;
 $f^{-1}(\{y\})$ peut être \emptyset , un singleton, multiple, voire E

Antécédents

Antécédents de y :
 $f^{-1}(\{y\})$

Lien avec
injectivité/surjectivité

Injection • Surjection • Bijection

Injective

- $f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$ (au plus un antécédent)

Surjective

- $\forall y \in F \exists x \in E : f(x)=y$ (au moins un antécédent)

Bijective

- Injective ET surjective
(exactement un antécédent)

Exemples (rapides)

$f_1 : N \rightarrow Q, x \mapsto 1/(1+x)$
: injective, non
surjective (images \leq
1)

$f_2 : Z \rightarrow N, x \mapsto x^2$: ni
injective (2 et -2), ni
surjective (3 sans
antécédent)

Bijection et inverse

f bijective $\Leftrightarrow \exists g: F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$

Inverse unique ; $(f^{-1})^{-1} = f$;
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Exemple : $\exp : R \rightarrow]0, +\infty[$,
inverse \ln

Ensembles finis — cardinal

$E \text{ fini} \Leftrightarrow \text{bijection } E \Leftrightarrow \{1, \dots, n\}$ (Card $E=n$)

Injective \Rightarrow Card $E \leq$ Card F ; Surjective \Rightarrow Card $E \geq$ Card F

Si Card $E =$ Card F (finis) :
Injective \Leftrightarrow Surjective \Leftrightarrow Bijective

Principe des tiroirs (pigeonhole)

Si $n > k$ objets dans k tiroirs \Rightarrow au moins un tiroir a ≥ 2 objets

Ex : 400 étudiants
 \Rightarrow deux mêmes anniversaires (jour)

Dénombrément d'applications

Card E=n, Card F=p

Applications $E \rightarrow F : p^n$
; Injections :
 $p \cdot (p-1) \dots (p-n+1)$;
Bijections $E \rightarrow E : n!$

Parties & coefficients binomiaux

Card $P(E) = 2^n$ (nb de sous-ensembles)

Nb de parties à k éléments :
 $C(n,k)=n!/(k!(n-k)!)$

Identités : $C(n,k)=C(n,n-k)$;
 $\sum_k C(n,k)=2^n$;
 $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0..n} C(n,k) a^{n-k} b^k$$

Ex : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Relations & équivalences

Relation sur E : Vrai/Faux
pour chaque $(x,y) \in E \times E$

Équivalence : réflexive ;
symétrique ; transitive

Classes d'équivalence
 $cl(x)$; partition de E

Exemples d'équivalences

« Être parallèle »,
« Être du même
âge »

Contre-ex. : « Être
perpendiculaire
», « \leq »

Q via des
classes

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:
 $(p,q) \sim (p',q') \Leftrightarrow$
 $pq' = p'q$

$2/3 = 4/6$: mêmes
classes (représentants
différents)

Congruence modulo n et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{n} \iff$
 $n \mid (a-b)$; classes
 $: 0, 1, \dots, n-1$

Ex : $10 \equiv 3 \pmod{7}$, $-1 \equiv 20 \pmod{7}$

Mini-exercices

Prouver $C(A \cup B) = C A \cap C B$

Lister $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$

Pour $f(x) = x^2$: $f([0,1[)$, $f(]-1,2[)$,
 $f^{-1}([1,2[)$, $f^{-1}(\{3\})$

Injection/surjection pour f :
 $[0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[, x \mapsto x^2$?

Combien de listes de k éléments distincts choisis parmi n ?

Wrap-up & transition

Ensembles & lois ✓ ;
Fonctions ✓ ;
Dénombrément ✓ ;
Équivalences ✓

→ Prochain chapitre : combinatoire/probabilité discrète ou approfondissements