


Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2020)
GUÍAS DE TRABAJOS PRÁCTICOS
Primera parte. Versión 1.0 [En construcción]


Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, “abstraernos” de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.


A. N. KOLMOGOROV

GLOSARIO DE SÍMBOLOS

 : Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

 : Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso.

 : “Siga siga”. Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

 : Solo para artesanos. Estos ejercicios son de naturaleza teórica y exigen un buen dominio del arte y una cuota de imaginación.

 : Oráculo. Proporciona pistas y sugerencias para resolver algunos ejercicios. A veces, propone una situación.

 . El ejercicio requiere utilizar una máquina.

Guía 1

PRELIMINARES Y NOTACIÓN

En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, se utiliza la siguiente notación:

1. \mathbb{N} denota el conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. \mathbb{Z} denota el conjunto de todos los números enteros,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. \mathbb{N}_0 denota el conjunto de todos los números enteros no negativos,

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

4. \mathbb{R} denota el conjunto (cuerpo) de todos los números reales.
5. \mathbb{R}^+ denota el conjunto de números reales no negativos, y \mathbb{R}_*^+ el conjunto de los números reales positivos.
6. \mathbb{C} denota el conjunto (cuerpo) de todos los números complejos. Por definición $z \in \mathbb{C}$ si, y sólo si $z = a + ib$, donde $i^2 = -1$ y $a, b \in \mathbb{R}$.
7. Si $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z} = a - ib$ denota el conjugado de z . Obsérvese que $z + \bar{z} = 2a$ y que $z - \bar{z} = i2b$.
8. La *fórmula de Euler* establece que para cada $z \in \mathbb{C}$ vale que

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)).$$

9. Dado $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{I}_n denota el conjunto $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Nótese que $\{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ denota el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son x_1, x_2, \dots, x_n .
10. Dado un conjunto no vacío \mathbb{I} , $\{x_i : i \in \mathbb{I}\}$ denota el conjunto cuyos elementos están indexados por el conjunto \mathbb{I} .
11. Dado un conjunto X , $|X|$ denota el cardinal de X . Obsérvese que de acuerdo con la definición, $|\{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}| = n$.
12. Salvo que se diga lo contrario, las letras i, j, k, l denotan índices en algún subconjunto de \mathbb{N} , n y m denotan números naturales, u, v, w, x, y denotan vectores, A, B, C denotan matrices.
13. \mathbb{K} denota un cuerpo.
14. $\mathbb{K}^{m \times n}$ denota el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con entradas en \mathbb{K} . Para denotar las entradas de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, se utilizan las notaciones $A = [A_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_m \\ j \in \mathbb{I}_n}}$ o $A = [a_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_m \\ j \in \mathbb{I}_n}}$.
15. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se denota por $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ a su matriz traspuesta, definida por $A_{ij}^T := A_{ji}$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $j \in \mathbb{I}_m$.
16. El símbolo

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se llama *delta de Kronecker*

17. La matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$ con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra entrada, $\mathbf{I} := [\delta_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}}$, se llama *la matriz identidad de orden n* .

18. \mathbb{K}^n denota el conjunto de todas las matrices de $n \times 1$ con entradas en \mathbb{K} : $x \in \mathbb{K}^n$ si, y sólo si

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$


para algunos $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

19. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Las columnas de A se pueden pensar como elementos de \mathbb{K}^m y las filas de A como elementos de \mathbb{K}^n . La notación $A_{i*} \in \mathbb{K}^n$ se utiliza para denotar la i -ésima fila de A , y la notación $A_{*j} \in \mathbb{K}^m$ para denotar la j -ésima columna de A .
20. El conjunto $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ cuyos elementos están definidos por $e_j := \mathbf{I}_{*j}$ se denomina *la base canónica de \mathbb{K}^n* .
21. Dado un intervalo I de la recta real, $C(I)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de I en \mathbb{R} , y para cada $n \in \mathbb{N}$, $C^n(I)$ denota el conjunto de todas las funciones de I en \mathbb{R} que son n -veces derivables y cuyas derivadas sucesivas son continuas hasta el orden n inclusive. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, se designa por $C^\infty(I)$, es decir, $C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$.
22. $\mathbb{K}[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} : $p \in \mathbb{K}[x]$ si, y sólo si, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y algunos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
23. $\mathbb{K}_n[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} cuyo grado no supera n .

EJERCICIOS

1.1 Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}_*^+$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si la suma vectorial \oplus y la multiplicación escalar \odot se definen por

$$\begin{aligned} v \oplus w &:= vw, \\ \alpha \odot v &:= v^\alpha. \end{aligned}$$


Verificar que $(\mathbb{V}, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial, donde 1 es el vector cero y v^{-1} es el vector opuesto de v . : repasar la definición axiomática de \mathbb{K} -espacio vectorial.

1.2 Describir geoméricamente los siguientes conjuntos y verificar que son subespacios de \mathbb{R}^3 .

(a) $\mathbb{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0 \right\},$

(b) $\mathbb{S}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\},$

(c) $\mathbb{S}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0 \wedge x + y + z = 0 \right\}.$

1.3  Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) Para cada $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{K}^n$ el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

es un subespacio de \mathbb{K}^n .

(b) Para cada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ el conjunto

$$\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$$

es un subespacio de \mathbb{K}^n .

(c) El conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

es un subespacio de $C(\mathbb{R})$.

(d) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\left\{ y \in C^n(\mathbb{R}) : \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \right\}$$

es un subespacio de $C^n(\mathbb{R})$.

1.4 Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) El conjunto $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

(b) El conjunto $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

(c) El conjunto $\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \sin(2k\pi t)] : a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

1.5 Comprobar que los conjuntos de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{C} definidos por

$$\mathcal{G}_1 := \{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_2 := \{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}$$

generan el mismo \mathbb{C} -espacio vectorial.

1.6 ☉ Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Comprobar que $B \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 .


(b) Hallar una sistema de generadores del subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T : x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \right\}.$$

(c) Representar cada una de las matrices A_i como una combinación lineal de las otras dos.

(d) Comprobar que para cada pareja $i, j \in \mathbb{I}_3$ tal que $i \neq j$ se verifica que

$$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}.$$

1.7  En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio \mathbb{S} mediante un sistema de generadores minimal.


(a) $\mathbb{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}.$



(b) $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^1 p(x)dx = 0, \int_{-1}^1 xp(x)dx = 0 \right\}.$

(d) $\mathbb{S} = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' + \lambda y = 0\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}.$


(e) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}.$

1.8  Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto de vectores de \mathbb{V} . Sabiendo que $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ y $2v_1 + v_3 - v_4 = 0$, hallar todos los subconjuntos de \mathcal{G} que pueden ser un sistema de generadores minimal del subespacio generado por \mathcal{G} .

1.9  Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de generadores de \mathbb{V} . Probar que \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de \mathbb{V} si, y sólo si, \mathcal{G} es linealmente independiente. : ¿qué significa que \mathcal{G} sea un sistema de generadores que no es minimal?

1.10 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 .

(b) El subconjunto $\{1 + 3x - 2x^2, 3 + 5x - 6x^2, -5x + 6x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$. : puede mirar el **Ejercicio 1.12**.


(c) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1.11  Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) El subconjunto $\{1 + ax + 3x^2, 4 + 5x + 7x^2, a + x + x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3a+1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 .

(c) El subconjunto $\left\{ [1 \ 2a \ 1 \ 2]^T, [2 \ a \ 4 \ 8]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 2]^T \right\}$ de \mathbb{R}^4 .

1.12  Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$. Mostrar que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

1.13 Comprobar que las siguientes parejas de funciones son linealmente independientes.

(a) $\phi_1(x) = e^{2x}$, $\phi_2(x) = e^{3x}$.

(b) $\phi_1(x) = e^{3x}$, $\phi_2(x) = xe^{3x}$.

(c) $\phi_1(x) = \cos(5x)$, $\phi_2(x) = \sin(5x)$.


(d) $\phi_1(x) = e^{3x} \cos(5x)$, $\phi_2(x) = e^{3x} \sin(5x)$.

1.14 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

(a) $\mathcal{F} = \{1, \sin(x), \cos(x)\}$. : calcular el Wronskiano de \mathcal{F} .


(b) $\mathcal{G} = \{1 + 3 \sin(x) - 2 \cos(x), 3 + 5 \sin(x) - 6 \cos(x), -5 \sin(x) + 6 \cos(x)\}$.

(c) $\tilde{\mathcal{G}} = \{1 + 2 \sin(x) + 3 \cos(x), 4 + 5 \sin(x) + 7 \cos(x), 2 + \sin(x) + \cos(x)\}$.

1.15  Observar que los siguientes conjuntos de funciones están contenidos en el \mathbb{R} -espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$ y comprobar que son linealmente independientes.

(a) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

(b) $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^n e^{\lambda x}\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son n números reales distintos dos a dos. : observar que si $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0.$$


1.16 Sean $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ las funciones definidas por $\phi_1(x) = x^3$ y $\phi_2(x) = |x|^3$. Comprobar que $\mathcal{L} = \{\phi_1, \phi_2\}$ es un conjunto linealmente independiente pero el Wronskiano de \mathcal{L} , $\mathcal{W}_{\mathcal{L}}$, es la función idénticamente nula:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}}(x) = \det \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{bmatrix} = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

: examinar el comportamiento de la función ϕ_2/ϕ_1 .

1.17 Hallar una base y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

- (a) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}$;
 - (b) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p(2) = 0\}$;
 - (c) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0, p'(1) = 0, p''(1) = 0\}$;
 - (d) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p + (1-x)p' = 0\}$;
 - (e) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}[x] : p^{(n)} = 0\}$.
-

1.18  [ver **Ejercicio 1.13**] Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

tiene dimensión 2, comprobar que

(a) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq a$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b) \frac{dy}{dx} + aby = 0;$$

(b) para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación


$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0;$$



(c) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, el conjunto de funciones

$$\{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\}$$

es una base del espacio solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0.$$

: en cada caso, mostrar que la pareja de funciones satisface la ecuación y es linealmente independiente, el remate se obtiene por comparación de dimensiones.

1.19   En cada uno de los siguientes casos, hallar y graficar la solución $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la ecuación diferencial indicada que satisface las siguientes condiciones: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(a) $y'' + 4y = 0$; (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; (c) $y'' + 4y' + 5y = 0$.


1.20 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Hallar todas las soluciones del sistema lineal $Ax = b$. ¿Es A inversible?

1.21 Sea x_p una solución particular del sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $b \in \mathbb{R}^3$.

(a) ¿Qué significa el conjunto $x_p + \text{nul}(A) = \{x_p + h : h \in \text{nul}(A)\}$?

(b) Si $\text{rango}(A) = 1$, representar gráficamente $x_p + \text{nul}(A)$ en \mathbb{R}^3 .

(c) Repetir el inciso anterior para el caso en que $\text{rango}(A) = 2$.

1.22  Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $b = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 3 + 2i \end{bmatrix}$, ¿existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

1.23 Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sea $b = [1 \ 2 \ 3]^T$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

1.24  Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y $b \in \mathbb{K}^n$.

(a) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible si, y sólo si, $b \in \text{col}(A)$.

(b) Si $b \in \text{col}(A)$, explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ tiene una única solución si, y sólo si, $\text{nul}(A) = \{0\}$.

1.25 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\text{col}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ y $\text{nul}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$, y sea $b = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(a) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

(b) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ no puede tener una única solución.

1.26  Lucas y Monk resolvieron el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lucas encontró la solución

$$S_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y Monk la solución

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

¿Alguno de los dos encontró la solución correcta?

1.27 Hallar una matriz A que satisfaga las propiedades siguientes, o explicar por qué no existe una matriz que satisfaga dichos requerimientos.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \subset \text{col}(A)$ y $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\} \subset \text{fil}(A)$.

(b) $\text{col}(A) = \text{gen} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} \right)$ y $\text{nul}(A) = \text{gen} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \right\} \right)$.

1.28 Sean $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que \mathcal{B} es una base de \mathbb{C}^3 y determinar el vector de coordenadas de v respecto de la base \mathcal{B} .

1.29 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$ y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

(a) Verificar que $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base \mathcal{B} es

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base \mathcal{B} .

1.30 ☉ Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ sea $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio de grado $n-1$ definido por

$$p_i(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. ☞: para cada polinomio p de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ estudiar el grado y la cantidad de raíces del polinomio

$$r(x) = p(x) - \sum_{i=1}^n p(x_i) \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(b) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ es $[p]^{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = \sum_{i=1}^n p(x_i)e_i$, donde $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . En particular, se tiene que $[x^k]^{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} = [x_1^k \ x_2^k \ \cdots \ x_n^k]^T$.

(c) Concluir que dados $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ el polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definido por

$$p(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

es el único polinomio de grado menor o igual que $n-1$ tal que su gráfico $\Gamma_p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ contiene al conjunto $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{I}_n\}$.

1.31 En cada uno de los siguientes casos hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1 = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ en la base \mathcal{B}_2 y determinar el vector de coordenadas de $v = \sum_{i=j}^n x_j v_j$ en la base \mathcal{B}_2 .

(a) \mathcal{B}_1 es la base canónica de \mathbb{R}^3 y \mathcal{B}_2 es la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{B}_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ es la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definida en el **Ejercicio 1.29**.

(c) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y \mathcal{B}_2 es la base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.


1.32 ☉ Sea \mathcal{B}_1 la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Hallar una base \mathcal{B}_2 de \mathbb{R}^3 tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 en la base \mathcal{B}_2 sea


$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) Sea \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^3 . Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{E} en la base \mathcal{B}_2 y para cada $x \in \mathbb{R}^3$ determinar la expresión del vector de coordenadas de x en la base \mathcal{B}_2 .

1.33  Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 dos subespacios de \mathbb{V} tales que ninguno contiene al otro. Comprobar que para cualquier pareja de vectores v y w tales que $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ y $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ la recta \mathbb{L} que pasa por w y es paralela a v

$$\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$$

tiene un único punto en común con \mathbb{S}_1 y ninguno con \mathbb{S}_2 . Utilizar este resultado para comprobar que \mathbb{V} no puede ser la unión de dos subespacios propios. En particular, es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro.

1.34  Para las siguientes elecciones de subespacios \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 del espacio vectorial \mathbb{V} , hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio que los contiene.

(a) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}. \end{aligned}$$

(b) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^5 definidos por $\mathbb{S}_1 := \text{col}(A)$ y $\mathbb{S}_2 := \text{nul}(A)$, donde A es la siguiente matriz de $\mathbb{R}^{5 \times 5}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &:= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

1.35 Para cada $\theta \in [0, \pi)$ sea $u_\theta \in \mathbb{R}^2$ el vector del plano definido por

$$u_\theta := [\cos(\theta) \quad \sin(\theta)]^T,$$

y sea $\mathbb{S}_\theta \subset \mathbb{R}^2$ el subespacio generado por el vector u_θ .


(a) Graficar los conjuntos del plano \mathcal{T} y \mathcal{U} definidos más abajo:

- $\mathcal{T} := \{u_\theta : \theta \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}\}.$
- $\mathcal{U} := \mathbb{S}_{\frac{\pi}{4}} \cup \mathbb{S}_{\frac{3\pi}{4}}.$ (¿Es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?)

(b) Comprobar que para cualquier pareja $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$ tal que $\theta_1 \neq \theta_2$ se verifica que

- $\mathcal{B}_{\theta_1, \theta_2} := \{u_{\theta_1}, u_{\theta_2}\}$ es una base de \mathbb{R}^2 .
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}_{\theta_1} \oplus \mathbb{S}_{\theta_2}.$

(c) Dado $\theta \in (0, \pi)$ representar cada $v \in \mathbb{R}^2$ en la forma $v = v_0 + v_\theta$ con $v_0 \in \mathbb{S}_0$ y $v_\theta \in \mathbb{S}_\theta$ y explicar el significado geométrico de la componente v_0 . ¿Qué ocurre cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$?

1.36  Sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 los subespacios de \mathbb{R}^6 definidos por $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^6 : Ax = 0\}$, donde

$$v_1 = [1 \quad 1 \quad -3 \quad 7 \quad 9 \quad 3]^T, \quad v_2 = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 3]^T,$$

$$v_3 = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 6 \quad 4 \quad 1]^T, \quad A = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^6 tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^6$.

Guía 2

PRELIMINARES Y NOTACIÓN

1. Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de \mathcal{X} en \mathcal{Y} , es una relación entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} que a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le asigna un único elemento del conjunto \mathcal{Y} que se denota mediante $f(x)$.
2. Con $\text{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ se denota la aplicación identidad de \mathcal{X} :

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(x) = x \quad \text{cualquiera sea } x \in \mathcal{X}.$$

3. Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una aplicación de \mathcal{X} en \mathcal{Y} .
 - Dados $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, si $f(x) = y$ se dice que *y es la imagen de x por f* y que *x es imagen inversa de y*. El conjunto de todas las imágenes inversas de y por f , se denomina *la preimagen de y en \mathcal{X}* y se designa con $f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) = y\}.$$

- Se dice que f es *inyectiva* si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ cualesquiera sean $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, o equivalentemente si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cada vez que $x_1 \neq x_2$. Notar que f es inyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como máximo una solución en \mathcal{X} .
- Se dice que f es *sobreyectiva* si para todo $y \in \mathcal{Y}$ existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como mínimo una solución en \mathcal{X} .
- Se dice que f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva. Notar que f es biyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite exactamente una solución en \mathcal{X} .
- Si $X \subseteq \mathcal{X}$, el conjunto de todas las imágenes de elementos de X por f se designa por $f(X)$

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathcal{Y} : \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$

y se denomina *el conjunto imagen de X por f*.

- La *imagen de f* es el conjunto $f(\mathcal{X})$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
- Si $Y \subseteq \mathcal{Y}$, el conjunto de todos aquellos elementos de \mathcal{X} cuyas imágenes pertenecen a Y se designa con $f^{-1}(Y)$

$$f^{-1}(Y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in Y\}$$

y se denomina *la preimagen de Y en \mathcal{X}* .

4. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ conjuntos. Sean $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ dos aplicaciones. La *composición de g con f* es la aplicación

$$g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$$

definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

5. Los símbolos \mathbb{V} y \mathbb{W} están reservados para designar \mathbb{K} -espacios vectoriales.
6. El conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathbb{V} en \mathbb{W} se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Cuando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, escribimos $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.
7. Con $\mathbf{0} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ denotamos la transformación lineal nula de \mathbb{V} en \mathbb{W} .

8. Con $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ denotamos la transformación lineal identidad de \mathbb{V} . Cuando el contexto sea inequívoco escribiremos I en lugar de $I_{\mathbb{V}}$.
9. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ se dice que
- T es un *monomorfismo* cuando T es inyectiva,
 - T es un *epiiformismo* cuando T es sobreyectiva,
 - T es un *isomorfismo* cuando T es biyectiva.
10. \mathbb{V} y \mathbb{W} se dicen *isomorfos* cuando existe un isomorfismo de \mathbb{V} en \mathbb{W} .
11. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
- La preimagen de $0_{\mathbb{W}}$ en \mathbb{V} se llama *el núcleo de T* y se denota por $\text{Nu}(T)$

$$\text{Nu}(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}.$$
 - La imagen de T se denota por $\text{Im}(T)$

$$\text{Im}(T) := \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}.$$
12. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Los símbolos T^k con $k \in \mathbb{N}_0$ se utilizan para denotar las transformaciones lineales definidas por: $T^0 := I$, $T^1 := T$, $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T^2$, etcétera.
13. Cuando las letras del abecedario no son suficientes se recurre a las letras griegas. He aquí la equivalencia con el abecedario de las letras griegas que usamos a lo largo de esta guía.

Figura	Nombre	Equivalencia	Figura	Nombre	Equivalencia
$A \ \alpha$	Alfa	A	$\Pi \ \pi$	Pi	P
$B \ \beta$	Beta	B	$\Sigma \ \sigma$	Sigma	S
$\Delta \ \delta$	Delta	D	$\Phi \ \phi$	Phi	Ph (f)
$\Theta \ \theta$	Theta	Th (t)	$\Omega \ \omega$	Omega	O larga
$\Lambda \ \lambda$	Lambda	L			

14. La expresión ϕ es una *funcional lineal de \mathbb{V}* significa que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$.
15. Dado $k \in \mathbb{N}$, $[0 : k]$ denota el conjunto $\{0, 1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}_0$.
16. En todo lo que sigue \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .
17. Dado $v \in \mathbb{K}^n$, v^* es el traspuesto conjugado del vector v . Esto es, $v^* = \overline{v^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v^* = v^T$.
18. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n \times m}$ es la matriz traspuesta conjugada de A . Esto es, $A^* = \overline{A^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^* = A^T$.
19. Dados $i \in \mathbb{I}_m$ y $j \in \mathbb{I}_n$, la matriz de $\mathbb{K}^{m \times n}$ con 1 en la entrada ij y ceros en cualquier otra entrada, $E_{ij} := [\delta_{pi}\delta_{qj}]_{\substack{p \in \mathbb{I}_m \\ q \in \mathbb{I}_n}}$ se llama *la matriz ij de la base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$* . Por ejemplo, las matrices E_{ij} de la base canónica de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ son
- $$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
20. El conjunto $\{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^{m \times n}$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$.
21. Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, su traza es el número $\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ que se obtiene de sumar todos los elementos de la diagonal principal de A .
22. El conjunto $\{x^j : j \in [0 : n]\} \subset \mathbb{K}_n[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, y el conjunto $\{x^j : j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{K}[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}[x]$.

23. El símbolo $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ se utiliza para designar al conjunto de las funciones infinitamente derivables de \mathbb{R} en \mathbb{K} .
24. La letra D está reservada para designar el operador de derivación $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ definido por

$$D[y] := \frac{dy}{dx}.$$

25. **Principio de inducción.** Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si
 (1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y
 (H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$,
 entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.¹
26. Toda $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$ que tenga la forma

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ se denomina *operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes*. El polinomio $p \in \mathbb{K}_n[x]$ que se obtiene de L intercambiando papeles entre D y x

$$p(x) = x^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}x^{n-k},$$

se denomina *el polinomio característico del operador L* . Se puede demostrar que: si p se factoriza en la forma

$$p(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_i},$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ y $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ son tales que $\sum_{i=1}^r k_i = n$, entonces L se factoriza de manera análoga

$$L = \prod_{i=1}^r (D - \lambda_i I)^{k_i}.$$

La prueba está basada sobre el principio de inducción y en la propiedad conmutativa de los operadores diferenciales de la forma $D - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, con respecto a la composición.²

¹Este principio deberá ponerse en práctica en el **Ejercicio 2.29**.

²Este hecho será utilizado desde el **Ejercicio 2.32** hasta el **Ejercicio 2.36**.

EJERCICIOS

2.1 Verificar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T \left([x, y, z]^T \right) := 2z - 3y$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \left([x, y, z]^T \right) := [2z - 3y \quad -z + 3x]^T$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_3 \left([x, y, z]^T \right) := [2z - 3y \quad -z + 3x \quad y - 2x]^T.$$

2.2 [comparar con **Ejercicio 1.3**] Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) Para cada $v \in \mathbb{K}^n$, la aplicación $T_v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$T_v(x) := v^*x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{K}^n$$

es una funcional lineal de \mathbb{K}^n .

(b) Para cada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, la aplicación $T_A : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$T_A(X) := \text{tr}(A^*X) \quad \text{para toda } X \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

es una funcional lineal de $\mathbb{K}^{m \times n}$.

(c) Para cada $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la aplicación $T_g : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$T_g(f) := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{para toda } f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

es una funcional lineal de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(d) Para cada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, la aplicación $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ definida por


$$T_A(x) := Ax \quad \text{para todo } x \in \mathbb{K}^n$$

es una transformación lineal de \mathbb{K}^n en \mathbb{K}^m .

(e) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, la aplicación $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$L[y] := \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y \quad \text{para toda } y \in C^\infty(\mathbb{R})$$

es una transformación lineal de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $C^\infty(\mathbb{R})$.

2.3  Usando que toda transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ verifica que

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_k T(v_k)$$

para toda cantidad k de vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, comprobar que

$$T \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T.$$

Concluir que todas las transformaciones lineales de \mathbb{K}^n en \mathbb{K}^m son de la forma $T(x) = A_T x$, donde $A_T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es la matriz definida por

$$A_T := \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Cómo se relaciona esta última conclusión con las afirmaciones enunciadas en los incisos (d) y (a) del **Ejercicio 2.2**?

(b) ¿Cuáles son las matrices A_{T_1} , A_{T_2} , A_{T_3} de las transformaciones lineales T_1, T_2, T_3 definidas en el **Ejercicio 2.1**?

2.4 Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{R} -espacios vectoriales, $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, y sean P, Q dos puntos distintos de \mathbb{V} .

(a) Sea $L_{P,Q} := \{P + t(Q - P) : t \in \mathbb{R}\}$ la recta que pasa por los puntos P y Q . Mostrar que si $T(P) \neq T(Q)$, entonces la imagen de $L_{P,Q}$ por T es la recta que pasa por los puntos $T(P)$ y $T(Q)$. En otras palabras, mostrar que

$$T(L_{P,Q}) = L_{T(P),T(Q)}.$$

¿Qué ocurre cuando $T(P) = T(Q)$?

(b) Sea $[P, Q] := \{P + t(Q - P) : 0 \leq t \leq 1\}$ el segmento de recta que une a los puntos P y Q . Mostrar que si $T(P) \neq T(Q)$ la imagen de $[P, Q]$ por T es el segmento de recta que une a los puntos $T(P)$ y $T(Q)$. En otras palabras, mostrar que

$$T([P, Q]) = [T(P), T(Q)].$$

¿Qué ocurre cuando $T(P) = T(Q)$?

2.5 Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{R} -espacios vectoriales, $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, y $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ dos vectores linealmente independientes. Mostrar que si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son linealmente independientes, entonces la imagen por T del *paralelogramo generado por v_1 y v_2*

$$\mathcal{P}_{v_1, v_2} := \{t_1 v_1 + t_2 v_2 : (t_1, t_2) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

es el paralelogramo generado por $T(v_1)$ y $T(v_2)$. En otras palabras, mostrar que

$$T(\mathcal{P}_{v_1, v_2}) = \mathcal{P}_{T(v_1), T(v_2)}.$$

¿Qué ocurre si $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son linealmente dependientes?

2.6  Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por T del conjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

- (a) $\mathcal{R} = \{e_1, e_2\}$ (la base canónica de \mathbb{R}^2),
- (b) $\mathcal{R} = \text{gen}\{e_1\} \cup \text{gen}\{e_2\}$ (los ejes coordenados),
- (c) $\mathcal{R} = [e_1, e_1]$ (el segmento de recta que une a e_1 con e_2),
- (d) $\mathcal{R} = \mathcal{P}_{e_1, e_2}$ (el paralelogramo generado por e_1 y e_2),

2.7 [ver **Ejercicio 1.35**] Sea $\theta \in (0, \pi)$. Se sabe que todo vector v de \mathbb{R}^2 se escribe de manera única como


$$v = \phi_1(v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \phi_2(v) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}^T,$$

donde $\phi_1(v)$ y $\phi_2(v)$ son las coordenadas del vector v respecto de la base de \mathbb{R}^2 definida por $\mathcal{B}_\theta := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}^T \right\}$.

- (a) Verificar que \mathcal{B}_θ es una base de \mathbb{R}^2 .
- (b) Para cada $v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ hallar la expresión de $\phi_1(v)$ y $\phi_2(v)$ y mostrar que $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funcionales lineales de \mathbb{R}^2 .
- (c) Explicar por qué la aplicación $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Pi(v) := \phi_1(v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$
 es una transformación lineal de \mathbb{R}^2 en sí mismo.
- (d) Mostrar que la imagen de Π es el eje de las abscisas.
- (e) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ graficar la preimagen del punto $\begin{bmatrix} x_0 & 0 \end{bmatrix}^T$ por Π y describirla geoméricamente.
- (f) Explicar el significado geométrico de la transformación lineal Π .
- (g) Explicar por qué la aplicación $\Sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Sigma(v) := \phi_1(v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T - \phi_2(v) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}^T$$
 es una transformación lineal biyectiva de \mathbb{R}^2 en sí mismo.
- (h) Hallar la imagen por Σ de la base \mathcal{B}_θ y explicar el significado geométrico de Σ .
- (i) Observar que $\Pi^2 = \Pi$ y que $\Sigma^2 = I_{\mathbb{R}^2}$.

2.8  Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, $\{\phi_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ un conjunto de n -funcionales lineales de \mathbb{V} y w_1, \dots, w_n una colección de vectores de \mathbb{W} . Mostrar que la aplicación $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ definida por

$$T(v) := \sum_{j=1}^n \phi_j(v)w_j$$

es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{W} .

(a) Observar que las transformaciones lineales Π y Σ del **Ejercicio 2.7** se definieron utilizando esa forma.

(b) Mostrar que las transformaciones lineales del **Ejercicio 2.1** y del **Ejercicio 2.6** también pueden definirse de esa manera.

2.9 Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{V} . Se sabe que todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como una combinación lineal $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$.

(a) Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ sea $\phi_j : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ la aplicación definida por

$$\phi_j(v) := x_j.$$

Verificar que ϕ_1, \dots, ϕ_n son funcionales lineales de \mathbb{V} .

(b) Explicar por qué la aplicación $\Phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ que a cada vector $v \in \mathbb{V}$ le asigna su vector de coordenadas en la base \mathcal{B}

$$\Phi(v) := \sum_{j=1}^n \phi_j(v)e_j$$

es una transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{K}^n .

(c) Comprobar que Φ es un isomorfismo.

(d) Concluir que todo \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a \mathbb{K}^n .

2.10 Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de \mathbb{V} . Sea $\Lambda : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{V}$ la aplicación de \mathbb{K}^n en \mathbb{V} definida por

$$\Lambda \left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \right) := \sum_{j=1}^n x_j v_j.$$

(a) Explicar por qué Λ es una transformación lineal de \mathbb{K}^n en \mathbb{V} .

(b) Describir la imagen de Λ .

(c) Comprobar que


1. Λ es monomorfismo si, y sólo si, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente,

2. Λ es epimorfismo si, y sólo si, $\mathbb{V} = \text{gen}\{v_1, \dots, v_n\}$,
3. $\Lambda_{\mathbb{V}}$ es isomorfismo si, y sólo si, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{V} .

(d) Mostrar que si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{V} entonces

$$\Lambda \circ \Phi = I_{\mathbb{V}} \quad \text{y} \quad \Phi \circ \Lambda = I_{\mathbb{K}^n},$$

donde Φ es la transformación lineal que a cada vector $v \in \mathbb{V}$ le asigna su vector de coordenadas en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

2.11  Sean a y b dos números reales tales que $a < b$ y sea $\{x_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ un conjunto de n números reales del intervalo $[a, b]$.

(a) Mostrar que para cualquier $x_0 \in [a, b]$ la aplicación $\delta_{x_0} : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta_{x_0}(f) := f(x_0)$$

es una funcional lineal de $C([a, b])$.

(b) Explicar por qué la aplicación $M : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$M(f) := \sum_{j=1}^n \delta_{x_j}(f) e_j$$

es una transformación lineal de $C[a, b]$ en \mathbb{R}^n .

(c) Comprobar que M es un epimorfismo pero no es un isomorfismo.

2.12 Sea \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\},$$


y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ una transformación lineal que actúa sobre la base \mathcal{B} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}^T, \\ T \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) &= \begin{bmatrix} -3 & \frac{9}{2} & -6 \end{bmatrix}^T, \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right) &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$


(a) Hallar $T \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T \right)$

(b) Hallar una base del núcleo de T y describirlo geométricamente.

(c) Hallar una base de la imagen de T y describirla geométricamente.

2.13  Utilizar bases de \mathbb{R}^3 para construir transformaciones lineales $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tales que


- (a) $T^2 = \mathbf{0}$ pero $T \neq \mathbf{0}$
 - (b) $T^2 = I$ pero $T \neq I$
 - (c) $T^2 = T$ pero $T \notin \{\mathbf{0}, I\}$
 - (d) $T^3 = \mathbf{0}$ pero $T^2 \neq \mathbf{0}$
-

2.14  Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comprobar que la aplicación $T : \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C}_n[x]$ definida por $T(p) := p' - \lambda p$ es un isomorfismo.

2.15 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por


$$T \left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

- (a) Comprobar que T es un isomorfismo.
 - (b) Resolver la ecuación $T \left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \right) = x$.
 - (c) Resolver la ecuación $T \left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \right) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
 - (d) Hallar la transformación lineal inversa de T .
-

2.16  Sea $v \in \mathbb{R}^3$ y sea $C_v : \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ la aplicación definida por $C_v(x) := v \times x$ para todo $x \in \mathbb{R}_3$. En otras palabras, si $v = (a, b, c)$ y $x = (x_1, x_2, x_3)$


$$C_v(x) = \text{“det} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \text{”}.$$

- (a) Explicar por qué C_v es una transformación lineal.
- (b) Describir y graficar el núcleo de $C_{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T}$.
- (c) Hallar una base del núcleo de C_v .
- (d) Hallar una base de la imagen de C_v .
- (e) Sabiendo que $(1, 1, 1) \in \text{Im}(C_v)$ resolver la ecuación $C_v(x) = (1, 1, 1)$.

2.17  Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por

$$T(p) = p + (1 - x)p'.$$

- (a) Explicar por qué T está bien definida y es una transformación lineal.
 - (b) Hallar una base del núcleo de T .
 - (c) Hallar una base de la imagen de T .
 - (d) Comprobar que el polinomio $q(x) = 1 + x + x^2 - x^3$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(p) = q$.
-

2.18  Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ con \mathbb{V} y \mathbb{W} de dimensión finita. Sea $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matriz de T con respecto a las bases \mathcal{B} de \mathbb{V} y \mathcal{C} de \mathbb{W} . Verificar las siguientes afirmaciones.

- (a) T es monomorfismo si, y sólo si, $\text{nul}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \{0\}$.
 - (b) T es epimorfismo si, y sólo si, $\text{col}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.
 - (c) T es isomorfismo si, y sólo si, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es inversible.
-

2.19 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, donde \mathbb{V} y \mathbb{W} son algunos de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales: \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{R}_n[x]$. Hallar, para cada uno de los siguientes casos, la matriz de T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{V} y \mathbb{W} , y analizando las propiedades de dicha matriz determinar las propiedades de T .

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (c) $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(10) & p(100) \end{bmatrix}^T.$$

- (d) $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

2.20 Sea $T_{12} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.12**, y sea $T_{15} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.15**.

(a) Hallar las matrices de T_{12} , T_{15} y T_{15}^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(b) Hallar la matriz de $T_{12} \circ T_{15}^{-1}$ con respecto a las mismas bases y utilizarla para hallar una base de $\text{Nu}(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$.

2.21 Sea $O(2, \mathbb{R}) := \{R_\theta, S_\theta : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 definidas por

$$R_\theta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$S_\theta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de \mathbb{R}^2 por $R_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(b) Hallar y graficar la imagen de la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}$$

por $S_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(c) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de \mathbb{R}^2 por R_θ y explicar el significado geométrico de la acción de R_θ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(d) Comprobar que

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de \mathbb{R}^2 y hallar su imagen por S_θ .

(e) ¿Cuál es el significado geométrico de la acción de S_θ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 ?

(f) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hallar las matrices respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones lineales, y en cada caso explicar su significado geométrico:

$$R_\alpha \circ R_\beta; \quad S_\alpha \circ S_\beta, \quad S_\alpha \circ R_\beta, \quad R_\beta \circ S_\alpha.$$

(g) Concluir que el conjunto $O(2, \mathbb{R})$ es cerrado por composiciones.

(h) Observar que $R_0 = I_{\mathbb{R}^2}$.

(i) Comprobar que R_θ y S_θ son isomorfismos y hallar R_θ^{-1} y S_θ^{-1} .

2.22 Observar que la transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T &:= [\cos \theta & \sin \theta & 0]^T, \\ R\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T &:= [-\sin \theta & \cos \theta & 0]^T, \\ R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T &:= [0 & 0 & 1]^T, \end{aligned}$$

es la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z .

(a) Hallar y graficar la imagen de los siguientes vectores por la rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(b) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x .

(c) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario zx alrededor del eje y .

2.23 🚧 Diseñar un método, basado en las rotaciones definidas en el **Ejercicio 2.22**, que permita transformar el punto $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ en cualquier otro punto de la esfera de radio 1

$$S_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Utilizando esa metodología elaborar un sistema de instrucciones que permita asir un objeto situado en el punto $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}^T$ y trasladarlo hasta el punto $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}^T$.

2.24 🛑 [ver **Ejercicio 2.7**] Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios complementarios de \mathbb{V} (i.e., todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$). La *proyección de \mathbb{V} sobre \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2* , denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} definida por

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

(a) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

y comprobar que $\mathbb{V} = \text{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \text{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})$.

(b) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}^2 = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

(c) Observar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

(d) Mostrar que $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ es la única transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} tal que

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ -v & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ se denomina *la simetría de \mathbb{V} con respecto a \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2* .

(e) Explicar por qué $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}^2 = I_{\mathbb{V}}$.

2.25 En cada uno de los siguientes casos, hallar la matriz respecto de la base canónica de las transformaciones lineales indicadas:

(a) La proyección de \mathbb{R}^3 sobre el plano xy en la dirección del eje generado por el vector $[1 \ 1 \ 1]^T$.

(b) La proyección de \mathbb{R}^3 sobre el plano $\text{gen}\{[1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 0]^T\}$ en la dirección de $\text{gen}\{[0 \ 1 \ 2]^T\}$.

(c) La simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $\text{gen}\{1, x\}$ en la dirección de $\text{gen}\{1 + x + x^2\}$.

(d) La simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $\text{gen}\{1 + x, 1 + x + x^2\}$ en la dirección de $\text{gen}\{x + 2x^2\}$.

2.26 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección de \mathbb{R}^3 sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

2.27 Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de \mathbb{V} sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

(c) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

(d) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de \mathbb{V} con respecto a $\text{Nu}(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ en la dirección de $\text{Im}(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$.

(e) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V} = \text{Nu}(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus \text{Nu}(S + I_{\mathbb{V}})$.

2.28  Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ las transformaciones lineales definidas por

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobar que T es una proyección y hallar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Comprobar que S es una simetría y hallar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.29 Sea $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el operador de derivación

(a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$(D - \lambda I)^k [f(x)e^{\lambda x}] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.


(b) Comprobar que $\text{Nu}(D - \lambda I) = \text{gen}\{e^{\lambda x}\}$.

(c) Para cada $k \in \mathbb{N}$ verificar que si

$$\text{Nu}\left((D - \lambda I)^k\right) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\},$$

entonces

$$\text{Nu}\left((D - \lambda I)^{k+1}\right) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}.$$

: escribir la ecuación $(D - \lambda I)^{k+1}[y] = 0$ en la forma $(D - \lambda I)^k[z] = 0$, donde $z = (D - \lambda I)[y]$.

(d) Utilizar los incisos (b) y (c) junto al principio de inducción para demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x^i e^{\lambda x} : i \in [0 : k - 1]\}$ es una base $\text{Nu}\left((D - \lambda I)^k\right)$.


(e) Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comprobar que la ecuación

$$(D - \lambda I)^k [y] = g,$$

admite una solución particular de la forma $y_p = f(x)e^{\lambda x}$, donde $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.


2.30 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y' - y = 0$,
 - (b) $y' - y = e^{2x}$,
 - (c) $y' - y = xe^{2x}$,
 - (d) $y' - y = (3 + 5x)e^{2x}$,
 - (e) $y'' - 2y' + y = (3 + 5x)e^{2x}$,
 - (f) $(D - I)^3[y] = (3 + 5x)e^{2x}$.
-

2.31  Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean L y A dos transformaciones lineales de \mathbb{V} en \mathbb{V} que satisfacen las siguientes propiedades

- (i) $L \circ A = A \circ L$,
- (ii) $\text{Nu}(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Verificar que

- (a) $\text{Nu}(L) + \text{Nu}(A) \subseteq \text{Nu}(A \circ L)$;
 - (b) si $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$, entonces toda solución de la ecuación $L(v) = w$ pertenece a $\text{Nu}(A \circ L)$;
 - (c) si $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$ y si \mathbb{S} es un subespacio de $\text{Nu}(A \circ L)$ tal que $\text{Nu}(L) \oplus \mathbb{S} = \text{Nu}(A \circ L)$, entonces existe un único $v \in \mathbb{S}$ tal que $L(v) = w$;
- : repasar la demostración del teorema de la dimensión para las transformaciones lineales definidas en dominios de dimensión finita.
- (d) si además $\text{Nu}(L) \cap \text{Nu}(A) = \{0\}$, entonces
 - para cada $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$ existe un único $v \in \text{Nu}(A)$ tal que $L(v) = w$,
 - $\text{Nu}(A \circ L) = \text{Nu}(A) \oplus \text{Nu}(L)$.
-

2.32  Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D - 2)(D - 4)(D + 3)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3e^{-3x}$.

- (a) Hallar una base \mathcal{B}_L de $\text{Nu}(L)$.
- (b) Comprobar que el operador $A = (D + 3I)^4$ es un *aniquilador* de p : $A[p] = 0$.
- (c) Hallar una base \mathcal{B}_{AL} de $\text{Nu}(A \circ L)$ que contenga a la base \mathcal{B}_L .

(d) Comprobar que existe una solución particular y_p de la ecuación $L[y] = p$ perteneciente al subespacio $\text{gen}(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$.

(e) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = p$.

2.33 🏠 Para cada $\omega \in \{1, 7/4, 2\}$, hallar y graficar la solución del problema

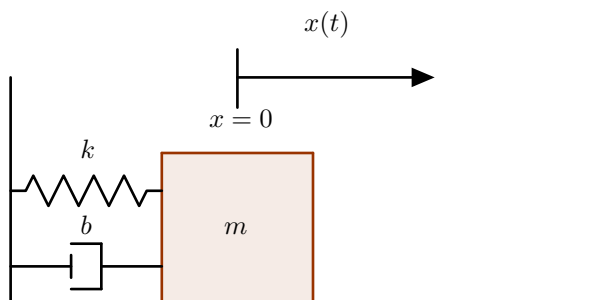
$$y'' + 4y = \cos(\omega t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.

2.34 🛑 [ver **Ejercicio 1.18** y **Ejercicio 1.19**] Se considera la ecuación diferencial general

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

donde m , b y k son constantes positivas. Esta ecuación representa la dinámica de un sistema masa-resorte-amortiguador como el que se muestra en la figura



Sistema masa-resorte-amortiguador: m es la masa del objeto, k es la constante elástica del resorte y b es el coeficiente de roce viscoso del amortiguador.


(a) Mostrar que las raíces del polinomio característico de la ecuación (1) son

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

(b) En cada uno de los siguientes casos, hallar la solución general x_h de la ecuación

(1) en términos de las constantes b , m y $\Omega := \sqrt{\left|\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right|}$ y explicar por qué $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_h(t) = 0$.

1. *Sobreamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$.
2. *Críticamente amortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$.
3. *Subamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$.

(c)  Para cada $b \in \{15, 20, 25, 30\}$ hallar y graficar la solución de la ecuación diferencial $4x'' + bx' + 25x = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1/2$, $x'(0) = 0$.

2.35 En cada uno de los siguientes casos construir una ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, del menor orden posible que tenga como soluciones a las funciones indicadas.


(a) $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$;

(b) $y_1 = te^t$;

(c) $y_1 = t^2e^{2t}$;

(d) $y_1 = te^{4t} \sin(t)$;

(e) $y_1 = t$, $y_2 = \cos(3t)$, $y_3 = e^{-t}$.

2.36  Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y,$$

de orden mínimo tal que la ecuación diferencial $L[y] = 0$ tiene como soluciones a las funciones $y_1 = t$, $y_2 = e^{-2t}$, $y_3 = \cos(3t)$.

(a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L[y] = 0$.

(b) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = te^t$.

(c) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = t$.

(d) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = t(5 + 8e^t)$.

(e) Resolver el problema $L[y] = 0$ con las condiciones iniciales $y^{(i)}(0) = c_i$ para todo $i \in [0 : n - 1]$.

(f) ¿Cómo deben ser las condiciones iniciales, $(y^{(i)}(0) : i \in [0 : n - 1])$ para que la solución del problema $L[y] = 0$ satisfaga que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$?

Guía 3

PRELIMINARES

Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto \mathcal{X} es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
 - b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
 - c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).
 La expresión $d(x, y)$ se lee *la distancia entre los puntos x e y* . El par (\mathcal{X}, d) , constituido por el conjunto \mathcal{X} munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.
2. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .
3. Una *norma* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
 - b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
 - c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).
 Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de x* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de x representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$ que une a los puntos 0 y x . Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por x y $\|u_x\| = 1$.
4. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:

- a) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre x e y no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
- b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor λ , la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
- c) En particular, $d(x, y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

Sobre espacios euclídeos

5. Un *producto interno* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ que posee las siguientes propiedades:
 - (i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$
 - 1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
 - 2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
 - (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$.
 - (iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.
6. Un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} munido de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es

un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.

7. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathcal{X} = (x_i : i \in \mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de \mathcal{X}* y se denota por $G_{\mathcal{X}}$

$$G_{\mathcal{X}} := [\langle x_i, x_j \rangle]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}.$$

El *Gramiano de \mathcal{X}* , denotado por $G(\mathcal{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathcal{X}}$.

8. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{V} determina unívocamente al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y se llama *la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B}* .
9. Todo espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se convierte en un espacio normado, si para cualquier $x \in \mathbb{V}$ se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ así definida es una norma en \mathbb{V} y se llama la *norma inducida* por el producto interno.

10. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{V}.$$

11. Si \mathbb{V} es un \mathbb{R} -espacio vectorial el *ángulo θ entre dos vectores no nulos x e y* se define mediante la fórmula

$$\cos \theta := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|},$$

donde $\theta \in [0, \pi]$. Notar que $\cos \theta = \langle u_x, u_y \rangle$.

12. Si $\langle y, x \rangle = 0$ se dice que *los vectores x e y son ortogonales* y se denota por $y \perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a x se denota por x^\perp , y se llama el *subespacio ortogonal a x*

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x \rangle = 0\}.$$

En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y, x \rangle = 0$ implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ salvo que $x = 0$ o $y = 0$.

13. Obsérvese que si $x \neq 0$, entonces para todo $y \in \mathbb{V}$ vale que

$$y = \langle y, u_x \rangle u_x + (y - \langle y, u_x \rangle u_x).$$

14. El *teorema de Pitágoras* establece que si x e y son ortogonales, vale que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

15. Un sistema de vectores $\mathcal{S} = \{v_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Obsérvese que \mathcal{S} es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de \mathcal{S} son diagonales.

16. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando

$$\|u_i\| = 1 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{I}.$$

17. Si \mathcal{V} es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a \mathcal{V}* , denotado por \mathcal{V}^\perp , se define por

$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathbb{V} : \langle x, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$$

18. El *producto interno canónico en \mathbb{K}^n* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ se define por


$$\langle x, y \rangle := y^* x,$$

donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y . Notar que $y^* x = x^T \overline{y}$.

19. El *producto interno canónico en $\mathbb{K}^{m \times n}$* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ se define por

$$\langle X, Y \rangle := \text{tr}(Y^* X),$$

donde $Y^* := \overline{Y^T}$ es la matriz traspuesta conjugada de Y . Notar que $\text{tr}(Y^* X) = \text{tr}(X^T \overline{Y})$.

3.1  [ver **Ejercicio 2.2**] Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

(a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por


$$\phi(v) := \langle v, v_0 \rangle$$

es una funcional lineal de \mathbb{V} . Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que $\mathbb{V} = \text{Nu}(\phi) \oplus \text{gen}\{v_0\}$.

(b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(v) := \langle v_0, v \rangle$$

no es una funcional lineal de \mathbb{V} .

: repasar la definición de producto interno.

3.2 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo de dimensión 2 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de \mathbb{V} . Sean $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ y $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$ vectores cualesquiera de \mathbb{V} .

(a) Utilizar las propiedades del producto interno para comprobar que

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} \langle v_1, v_1 \rangle + x_1 \overline{y_2} \langle v_1, v_2 \rangle + x_2 \overline{y_1} \langle v_2, v_1 \rangle + x_2 \overline{y_2} \langle v_2, v_2 \rangle.$$

(b) Observar que la identidad precedente se puede escribir en cualquiera de las siguientes dos formas equivalentes

$$\langle x, y \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$


(c) Notar que las identidades anteriores significan que

$$\langle x, y \rangle = [x]^{\mathcal{B}^T} G_{\mathcal{B}} \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = [y]^{\mathcal{B}^*} G_{\mathcal{B}}^T [x]^{\mathcal{B}},$$

donde $G_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es la matriz de Gram definida por

$$G_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix}$$

(d) Comprobar que $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^*$ y que $\det(G_{\mathcal{B}}) > 0$.

: repasar la definición de producto interno y la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ¿Qué papel juega la hipótesis $\dim(\mathbb{V}) = 2$? ¿Qué forma adoptaría este ejercicio si se asume que $\dim(\mathbb{V}) = n$?

3.3 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo de dimensión n y sean $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ una base de \mathbb{V} .

(a) Comprobar que

$$G_{\mathcal{B}} := [\langle v_i, v_j \rangle]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix},$$

es la única matriz en $\mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$\langle x, y \rangle = [x]^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} \overline{[y]^{\mathcal{B}}} = [y]^{\mathcal{B}*} G_{\mathcal{B}}^T [x]^{\mathcal{B}}, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{V}.$$

(b) Comprobar que si $\mathcal{B}' = \{v'_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es otra base de \mathbb{V} vale que

$$G_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}T} G_{\mathcal{B}} \overline{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}},$$

donde $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}' en la base \mathcal{B} .

3.4  En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y \rangle := y^T G x$$


define un producto interno en \mathbb{R}^2 :


(a) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}.$


(c) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1 \ell_2 \cos \theta \\ \ell_1 \ell_2 \cos \theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi), \ell_1 > 0, \ell_2 > 0 \right\}.$

(d) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0, \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}.$

: observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en \mathbb{R}^2 ? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G ? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vértices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G ?

3.5  Hallar todos los productos internos en \mathbb{R}^2 que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = [1 \ 1]^T$ y $v_2 = [-1 \ 1]^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2 ? ¿Cómo depende del producto interno elegido?


3.6 Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno en \mathbb{V} . Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes. Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ es π .

: Razón por la cual se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo real.

3.7 En el espacio euclídeo de las matrices de 2×2 a coeficientes reales con el producto interno canónico se consideran las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$


- (a) Calcular las siguientes magnitudes: $\langle A_1, A_2 \rangle$, $\|A_1\|$ y $\|A_2\|$, $\arccos \left(\frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\|A_1\| \|A_2\|} \right)$.
- (b) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, A_1, A_2 - \lambda A_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?
- (c) Calcular el perímetro y el área del triángulo de vértices $0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, A_1, A_2$.

3.8  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de \mathbb{V} tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

- (a) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B}
- (b) Hallar la matriz $\Theta := [\arccos(\langle u_i, u_j \rangle)]_{\substack{i \in \mathbb{I}_3 \\ j \in \mathbb{I}_3}}$.
- (c) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3 .
- (d) Determinar los vértices de un triángulo rectángulo T tal que $T \subset \text{gen}\{u_1, u_2\}$ y cuyos catetos midan 3 y 4. [ver el inciso (b) del **Ejercicio 3.7**]

3.9  Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ munido con $\langle A, B \rangle_W := \text{tr}(A^T W B)$, donde

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ define un producto interno en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$, hallar una base ortogonal del subespacio


$$\mathbb{S} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y otra del subespacio \mathbb{S}^\perp .

(c) Escribir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

en la forma $A = A_{\mathbb{S}} + A_{\mathbb{S}^\perp}$ con $A_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $A_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$.

: En general, ¿cómo debe ser la matriz $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ para que $\langle A, B \rangle_W := \text{tr}(A^T W B)$ defina un producto interno en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?


3.10 Para cada uno de los siguientes productos internos definidos en $\mathbb{R}_2[x]$ hallar una base ortogonal del subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\{x^2\}^\perp$ y descomponer cada polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ en la forma $p = p_{\mathbb{S}} + p_{\mathbb{S}^\perp}$, donde $p_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$, $p_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$:

(a) $\langle p, q \rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

(b) $\langle p, q \rangle := \frac{1}{0!}p(0)q(0) + \frac{1}{1!}p'(0)q'(0) + \frac{1}{2!}p''(0)q''(0)$.


(c) $\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 \frac{1}{2}p(x)q(x)dx$.

(d) $\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$.

: En cada uno de los casos considerados, ¿es única la descomposición $p = p_{\mathbb{S}} + p_{\mathbb{S}^\perp}$, donde $p_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$, $p_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$?

3.11 En \mathbb{R}^n con el producto interno canónico consideramos, \mathbb{S} , el subespacio definido por $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$, donde A es una matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$. Observar que $\mathbb{S}^\perp = \text{fil}(A)$ y expresar las dimensiones de \mathbb{S} y \mathbb{S}^\perp en función del rango de la matriz A . ¿Vale qué $\mathbb{R}^n = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$? ¿Por qué?

: ¿Qué forma adoptaría este problema si en el lugar de \mathbb{R} apareciese \mathbb{C} ?

3.12  En cada uno de los siguientes casos, hallar una base del subespacio \mathbb{S}^\perp y descomponer cada vector $v \in \mathbb{V}$ en la forma $v = v_{\mathbb{S}} + v_{\mathbb{S}^\perp}$, donde $v_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$, $v_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$:

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ munido del producto interno canónico,


$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ munido del producto interno canónico,

$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{C}^4$ munido del producto interno canónico,

$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^4 : \begin{cases} x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 0 \\ (2+i)x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

3.13  [comparar con **Ejercicio 2.22**] Sean $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(a) Comprobar que el conjunto $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde

$$u_1 = \begin{bmatrix} \sen \theta \cos \varphi \\ \sen \theta \sen \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -\sen \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sen \varphi \\ \sen \theta \end{bmatrix}$$

es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 con el producto interno canónico.

(b) Utilizar la base \mathcal{B} para construir la rotación de ángulo α en sentido antihorario del plano generado por u_2 y u_3 alrededor de la recta generada por u_1 y hallar su representación matricial respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(c) Hallar la representación matricial respecto de la base canónica de la rotación de ángulo $\pi/3$ alrededor de la recta generada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

3.14 [ver **Ejercicio 1.30**] Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_{n+1}\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de $n+1$ números reales. Se considera el espacio $\mathbb{R}_n[x]$ munido con

$$\langle p, q \rangle := \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i)q(x_i).$$

Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $\mathbb{R}_n[x]$ y que el sistema de polinomios $\mathcal{L} = \{p_j : j \in \mathbb{I}_{n+1}\}$, donde

$$p_j(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_{n+1} : k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}_n[x]$.

3.15 Comprobar que los siguientes sistemas de vectores son ortonormales en su correspondiente espacio euclídeo.

(a) La bases canónicas de los espacios \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbb{C}^{m \times n}$ con sus respectivos productos internos canónicos.

(b) La base canónica $\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ del espacio de polinomios $\mathbb{R}[x]$ con el producto interno definido por


$$\langle p, q \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \frac{q^{(k)}(0)}{k!}.$$

(c) [comparar con **Ejercicio 1.4** y **Ejercicio 1.13**] El sistema $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sen(kt), \cos(kt) : k \in \mathbb{N} \right\}$ en el espacio $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

(d) [comparar con **Ejercicio 1.5** y **Ejercicio 1.13**] El sistema $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ en el espacio $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

3.16  Sea $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal de vectores en un \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dados $v \in \mathbb{V}$ y $n \in \mathbb{N}$, se considera el problema de hallar el vector $\hat{v}_n \in \text{gen}\{u_i : i \in \mathbb{I}_n\} =: \mathbb{U}_n$ más cercano a v .

(a) Mostrar que para todo $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n a_i u_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - \langle v, u_i \rangle)^2,$$

y deducir de allí que el $\min_{w \in \mathbb{U}_n} \|v - w\|$ se realiza en el vector

$$\hat{v}_n := \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i,$$

y que su valor es

$$\|v - \hat{v}_n\| = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2}.$$

(b) Observar que, para todo $v \in \mathbb{V}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, el vector $v - \hat{v}_n \in \mathbb{U}_n^\perp$ y deducir de allí que $\mathbb{V} = \mathbb{U}_n \oplus \mathbb{U}_n^\perp$ para todo $n \in \mathbb{N}$.


3.17 En \mathbb{R}^4 con el producto interno canónico, sea $\mathbb{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$, donde

$$v_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T \text{ y } v_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T.$$

(a) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^4 sobre \mathbb{S} .

(b) Hallar la proyección ortogonal de $b = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ sobre el subespacio \mathbb{S} .

(c) Calcular la distancia de b al subespacio \mathbb{S} .

3.18  En $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ con el producto interno canónico consideramos el subespacio \mathbb{S} de todas las matrices simétricas.

(a) Dada $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, hallar la expresión de $P_{\mathbb{S}}(X)$.


(b) Hallar la proyección ortogonal de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre \mathbb{S} . ¿Cuánto vale la distancia de B al subespacio \mathbb{S} ?

3.19 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por


$$\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx.$$

Calcular

$$\min_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^\infty (1 - a_1x - a_2x^2)^2 e^{-x} dx$$

3.20  [ver **Ejercicio 2.27**] Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ una proyección (i.e., $T^2 = T$). Verificar que la siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) T es una proyección ortogonal.
- (b) Para todo $x, y \in \mathbb{V}$ vale que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$.
- (c) Para todo $x \in \mathbb{V}$ vale que $\|T(x)\| \leq \|x\|$.

3.21  Sea $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio euclídeo canónico. Se consideran un subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^n y una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ cuyas columnas son una base de \mathbb{S} .


(a) Explicar por qué la proyección ortogonal $\mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v)$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones:


$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v) = A\hat{x} \text{ para algún } \hat{x} \in \mathbb{R}^m, \\ A^T(v - \mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v)) = 0. \end{cases}$$

y comprobar que $\hat{x} = A^\#v$, donde $A^\# := (A^T A)^{-1} A^T$.

(b) Deducir que $AA^\# = P_{\mathbb{S}}$ y que $A^\#A = I_{\mathbb{R}^m \times m}$.

(c) Concluir que $d(v, \mathbb{S})^2 = \|v - A\hat{x}\|^2$. Motivo por el cual el vector \hat{x} se denomina *la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = v$* .

: Recordar que, por definición, $P_{\mathbb{S}}(v)$ es el único vector tal que $\mathbb{P}_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ y $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Esto junto con el teorema de Pitágoras es suficiente para comprobar que $d(v, \mathbb{S}) = \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|$.

3.22  En cada uno de los siguientes casos, hallar, \hat{x} , la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = v$ y calcular el error cuadrático $\|v - A\hat{x}\|^2$:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 5.07 \\ 10.43 \\ 15.94 \end{bmatrix}.$$

3.23 Se consideran n datos experimentales $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, y se propone un modelo polinomial para explicar el comportamiento de los mismos. Esto es, se postula la existencia de un polinomio p_m de grado $m < n-1$ tal que

$$p_m(x_i) = y_i + \varepsilon_i$$

donde ε_i son errores producidos por los instrumentos de medición utilizados en la realización del experimento. El objetivo del investigador es hallar p_m de manera tal que el promedio los cuadrados de los errores sea minimal. En otras palabras, se trata de minimizar *el error cuadrático medio* definido por

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_m(x_i) - y_i)^2.$$

(a) Escribir $p_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ y comprobar que el problema de minimizar el error cuadrático medio es equivalente al de hallar la proyección ortogonal del vector $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ sobre el espacio columna de la matriz

$$V_m(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$$

(b) Observar que la matriz $V_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ es la matriz de cambio de coordenadas $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}}$ de la base canónica de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ en la base de los polinomios interpoladores de Lagrange correspondientes al conjunto de abscisas $\{x_1, \dots, x_m\}$:

$$\mathcal{L} := \left\{ \prod_{k \in \mathbb{I}_m: k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} : i \in \mathbb{I}_m \right\}$$

(c) Deducir que el rango de la matriz $V_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es $m+1$.

(d) Concluir que $[p_m]^{\mathcal{E}} = V_m(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\#} y$.

3.24 🏠 Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

mediante una recta $y = a_0 + a_1x$, y mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
¿Cuál de estas dos curvas se ajusta mejor a los datos?

3.25 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad virósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x , de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t , medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b , utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

t	1	2	3	4	5
x	16	27	45	74	122

Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

🔗: ¿Qué transformación convierte una función exponencial en una función lineal?

3.26 🛑 En cada uno de los siguientes casos, utilizar el siguiente algoritmo para producir un sistema ortonormal \mathcal{U}_i a partir del conjunto linealmente independiente \mathcal{L}_i dado.

Algorithm 1 Gram-Schmidt

Require: $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente.


Ensure: $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema ortonormal.

```

1:  $k \leftarrow 1$ 
2:  $u_1 \leftarrow v_1 / \|v_1\|$ 
3:  $\mathcal{U} \leftarrow \{u_1\}$ 
4: while  $k < n$  do
5:    $w_{k+1} \leftarrow v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, u_i \rangle u_i$ 
6:    $u_{k+1} \leftarrow w_{k+1} / \|w_{k+1}\|$ 
7:    $\beta \leftarrow \beta \cup \{u_{k+1}\}$ 
8:    $k \leftarrow k + 1$ 
9: end while
10: return  $\mathcal{U}$ .
```

En \mathbb{R}^3 con el producto interno canónico:

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

: ¿Qué modificaciones hay que introducir en el algoritmo anterior si se desea producir un sistema ortonormal a partir de un conjunto finito de vectores cualquiera?

3.27 Hallar una base ortogonal de \mathbb{R}^4 que contenga al vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

3.28 Se consideran el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$


y el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) Utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir una base ortonormal $\{p_0, p_1, p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base $\{q_0, q_1, q_2\}$, donde

$$q_0 = 1, \quad q_1 = x, \quad q_2 = x^2.$$

(b) Hallar las siguientes proyecciones ortogonales: $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\sin x)$, $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos x)$.

(c) Calcular las distancias $d(\sin x, \mathbb{R}_2[x])$, $d(\cos x, \mathbb{R}_2[x])$.

: Los polinomios p_0, p_1, p_2 así obtenidos son los primeros tres polinomios de Legendre normalizados. Se puede comprobar que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, el polinomio p_n es solución de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$


3.29 Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango n .

(a) Comprobar que existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

1. Las columnas de Q son una base ortonormal de $\text{col}(A)$.
2. La matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos.
3. $A = QR$

: Las columnas de Q se obtienen aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las columnas de A .

(b) Comprobar que la factorización $A = QR$ del inciso anterior es única.


3.30  [ver **Ejercicio 3.26** y **Ejercicio 1.32**] Hallar la descomposición QR de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

3.31  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo finito dimensional.

(a) Sea $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ tal que $\phi \neq 0$. Mostrar que $\phi(v) = \langle v, \overline{\phi(w)}w \rangle$, para cualquier $w \in \text{Nu}(\phi)^\perp$ tal que $\|w\| = 1$.

(b) Notar que $\overline{\phi(w)}w$ no depende de la elección de w .

3.32  [comparar con **Ejercicio 2.11**] En $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

se considera $\delta : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por

$$\delta(p) := p(0).$$

Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ hallar y graficar el polinomio $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $\delta(\cdot) = \langle \cdot, p_n \rangle$.
