ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 4, с. 563–573

УДК 531.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДАРБУ, УРАВНЕНИИ БОРЦА И ПОДХОД К АЛГОРИТМУ ОРИЕНТАЦИИ БИНС НА ИХ ОСНОВЕ

А. В. Молоденков[1,*], Я. Г. Сапунков[1,*], Т. В. Молоденкова[2,], С. Е. Переляев[3,***]**

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
[2]Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия
[3]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
**e-mail: molalexei@yandex.ru*
***e-mail: moltw@yandex.ru*
****e-mail: sergey-perelyaev@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.12.2018 г.
После доработки 10.05.2019 г.
Принята к публикации 06.06.2019 г.

Рассматривается задача определения углового положения твердого тела в пространстве по его известной угловой скорости и начальному положению (задача Дарбу) в кватернионной постановке. На основе полученного точного решения приближенного дифференциального уравнения Борца относительно вектора ориентации твердого тела аналитически решена задача определения кватерниона ориентации твердого тела при произвольном векторе угловой скорости и малом угле поворота твердого тела. Исходя из этого решения, предложен подход к построению нового алгоритма для вычисления ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Ключевые слова: аналитическое решение, ориентация, произвольная угловая скорость, твердое тело, БИНС, кватернион, алгоритм

DOI: 10.1134/S003282351904009X

Введение. В процессе функционирования многих бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) периодически вычисляется вектор ориентации твердого тела (объекта) относительно инерциального пространства путем приближенного решения приближенного линейного дифференциального уравнения Борца (в теории и практике построения БИНС в сверхбыстрых циклах алгоритмов нелинейным членом в уравнении Борца при малых углах поворотов пренебрегают) [1–3]. В уравнении Борца входной величиной является вектор угловой скорости твердого тела. Отметим, что полное нелинейное уравнение Борца относительно вектора ориентации твердого тела является аналогом кватернионного линейного уравнения относительно кватерниона ориентации твердого тела; вектор и кватернион ориентации связаны между собой известными соотношениями. Приближенное линейное векторное дифференциальное уравнение Борца в литературе решают различными численными методами, например, методом Пикара, тогда вторая итерация этого метода в практике БИНС может быть принята за окончательную. Слагаемое, отвечающее этому в итерационной формуле метода Пикара, называют вектором некоммутативного поворота или “конингом”. При определенных движениях твердого тела это слагаемое вносит существенный вклад в погрешность метода. Исследование некоммутативных поворотов (или “конинга”) как вида механического движения тел, разделение численных алгоритмов определения ориентации твердого тела (БИНС) на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы счета направлены на компенсацию влияния этого явления [2–5]. Между тем для некоторого нового вектора угловой скорости, который получается в задаче определения ориентации твердого тела (БИНС) на основе исходного произвольного вектора угловой скорости при осуществлении взаимно-однозначных замен переменных в уравнениях движения твердого тела, приближенное уравнение Борца допускает точное аналитическое решение. Покажем это.

Ставится задача определения кватерниона ориентации $\mathbf{\Lambda}(t)$ твердого тела по произвольному заданному вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и начальному угловому положению твердого тела в пространстве на основе кватернионного кинематического уравнения, известная как задача Дарбу. Далее производятся замены переменных ($\mathbf{\Lambda} \to \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}$ – кватернион ориентации некоторой введенной системы координат; при этом всегда возможен обратный переход $\mathbf{U} \to \mathbf{\Lambda}$), которые носят характер преобразований вращения и сводят исходную задачу определения ориентации твердого тела (кватерниона $\mathbf{\Lambda}$) с произвольным переменным вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ к задаче, где вектор угловой скорости введенной системы координат $\mathbf{w}(t)$, оставаясь в общем случае переменным по модулю, совершает вполне определенное движение – вращается вокруг одной из осей системы координат (данное движение является обобщенной конической прецессией и хорошо согласуется с известной концепцией Пуансо, что всякое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки можно представить как некоторое коническое движение). Нахождение аналитического решения полученного кватернионного дифференциального уравнения относительно нового неизвестного кватерниона $\mathbf{U}$ по-прежнему остается трудной задачей. Однако уравнение, отличающееся от этого только коэффициентом “1/2” в правой части (т.е. с вектором угловой скорости $\mathbf{w}(t)/2$) решается в замкнутой форме. При этом отметим, что кватернионному дифференциальному уравнению изоморфно однородное векторное дифференциальное уравнение Пуассона.

Полученной задаче с вектором угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ и неизвестным кватернионом ориентации $\mathbf{U}$ ставится в соответствие полное уравнение Борца относительно неизвестного вектора ориентации $\boldsymbol{\varphi}$. Приближенное линейное уравнение Борца, которое представляет собой неоднородное векторное дифференциальное уравнение, однородная часть которого эквивалентна уравнению Пуассона с векторным коэффициентом $\mathbf{w}(t)/2$, становится аналитически разрешимым и, следуя методу Лагранжа, его решение $\boldsymbol{\varphi}^*$ находится в элементарных функциях и квадратурах.

В статье на основе полученного точного решения приближенного линейного уравнения Борца аналитически решена задача определения кватерниона ориентации твердого тела при произвольном векторе угловой скорости и малом угле поворота твердого тела. Исходя из этого решения, предложен подход к построению нового алгоритма для вычисления инерциальной ориентации БИНС:

1) по заданным компонентам вектора угловой скорости твердого тела $\boldsymbol{\omega}(t)$ на основе взаимно-однозначных замен переменных в каждый момент времени вычисляется новый вектор угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ некоторой новой введенной системы координат;

2) используя новый вектор угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ и начальное положение твердого тела, находится с помощью квадратур точное решение $\boldsymbol{\varphi}^*$ приближенного линейного уравнения Борца с нулевым начальным условием;

3) по вектору ориентации определяется значение кватерниона ориентации твердого тела (БИНС) по схеме $\boldsymbol{\varphi}^* \approx \boldsymbol{\varphi} \Leftrightarrow \mathbf{U} \to \mathbf{\Lambda}$.

Отметим, что при построении алгоритма ориентации БИНС на каждом последующем шаге замена переменных учитывает предыдущий шаг алгоритма таким образом, что начальное значение вектора ориентации твердого тела каждый раз будет нулевым.

Предлагаемый алгоритм аналитического решения приближенного линейного уравнения Борца в связи с тем, что он является точным, носит регулярный характер при всех угловых движениях твердого тела.

Статья продолжает исследования, начатые ранее [6, 7].

1. Постановка кватернионной задачи определения ориентации твердого тела (БИНС). Рассмотрим задачу Коши для кватернионного кинематического уравнения [8] с произвольной заданной вектор-функцией угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, записанную в следующей форме (эта задача известна как проблема Дарбу):

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \tag{1.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ — кватернион, описывающий положение твердого тела в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ — вектор угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси системы координат, связанной с твердым телом; i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; символ “$\circ$” означает кватернионное произведение; $\boldsymbol{\Lambda}_0$ — начальное значение кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ при $t = t_0$, $t \in [t_0, \infty)$ (t_0 можно положить равным 0). Требуется определить кватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$.

Кватернионной записи задачи эквивалентна запись в матричной форме с использованием, например, кватернионных матриц $\mathbf{n}$-типа [9]:

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{2n}(\boldsymbol{\Lambda})^{\cdot} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}(t_0)) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}_0) \tag{1.5}$$

Известно несколько подходов к решению данной задачи: сведение с помощью замен переменных исходных уравнений к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати (подход Дарбу [10]) или к линейному дифференциальному уравнению второго порядка [9] с переменными коэффициентами относительно комплексной неизвестной; отождествление проблемы Дарбу с задачей определения вектор-функции по известным модулям ее производных [11], когда задача Дарбу сводится к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами относительно действительной неизвестной. При этом аналитическое решение задачи Дарбу в замкнутой форме для произвольного вектора угловой скорости твердого тела при всех подходах не найдено. Найдено лишь несколько частных случаев, допускающих построение точного решения этой задачи [6, 8, 9, 11–17].

Вместе с тем, как показано в [18], система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кососимметрической матрицей коэффициентов является приводимой по Ляпунову, т.е. существует замена переменных (преобразование Ляпунова), приводящая данную систему к системе с постоянными коэффициентами. Система уравнений (1.4) задачи Дарбу имеет кососимметрическую матрицу коэффициентов и, таким образом, задача является приводимой по Ляпунову. Следовательно, поиск решения задачи Дарбу в замкнутой форме для общего случая заданной угловой скорости твердого тела не является безнадежным. Также, из-за отсутствия на настоящий момент точного решения задачи Дарбу, продолжает быть актуальным построение новых высокоэффективных алгоритмов функционирования БИНС, реализующих интегрирование на бортовом вычислителе в реальном масштабе времени дифференциальных уравнений ориентации по информации чувствительных элементов БИНС.

С использованием подходов, связанных с поиском решения задачи Дарбу в замкнутой форме [6], в данной статье предлагается новый алгоритм определения ориентации твердого тела (БИНС).

2. Задача определения ориентации в виде уравнения Борца. Также может ставиться задача определения вектора ориентации твердого тела $\boldsymbol{\varphi}(t)$ относительно инерциального пространства путем решения точного дифференциального уравнения Борца [1, 2]

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\varphi}\left(1 - \frac{\varphi\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\right)\boldsymbol{\varphi}\times(\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\omega}) \quad \mathbf{(2.1)}$$

где “×” означает векторное произведение. В уравнении (2.1) входной величиной является вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Отметим, что нелинейное уравнение Борца (2.1) для вектора ориентации твердого тела $\boldsymbol{\varphi}$ является аналогом кватернионного линейного уравнения (1.1); вектор $\boldsymbol{\varphi}$ и кватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ связаны соотношениями:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = e_1\mathbf{i}_1 + e_2\mathbf{i}_2 + e_3\mathbf{i}_3, \quad |\mathbf{e}| = \left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right)^{1/2} = 1 \\ \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_j = \sin(\varphi/2)e_j, \quad j = 1,2,3\end{gathered} \quad (2.2)$$

где φ является углом ориентации твердого тела, $\mathbf{e}$ — эйлеровой осью вращения. В практике построения алгоритмов ориентации БИНС путем численного решения уравнения (2.1) на временном отрезке $t_{m-1} \le t < t_m$ третьим членом в этом уравнении при малых углах φ пренебрегают (он является величиной порядка φ^2). Если полученное упрощенное (приближенное) дифференциальное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^* = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varphi}^*\times\boldsymbol{\omega}/2 \quad (2.3)$$

решать итерационным методом Пикара, то вторая итерация этого метода принимается за окончательную [2]:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varphi}_m^* = \int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}(\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)/2)dt = \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\beta}_m \\ \boldsymbol{\alpha}(t) = \int\limits_{t_{m-1}}^{t}\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau, \quad \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\alpha}(t_m), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \int\limits_{t_{m-1}}^{t}\boldsymbol{\alpha}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau/2 \\ \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\beta}(t_m)\end{gathered} \quad (2.4)$$

где вектор $\boldsymbol{\beta}$ называют вектором некоммутативного поворота, или “конингом”. При определенных движениях твердого тела слагаемое $\boldsymbol{\beta}_m$ в формуле (2.4) вносит существенный вклад в погрешность метода. Исследование некоммутативных поворотов (или “конинга”) как вида механического движения тел, разделение численных алгоритмов определения ориентации твердого тела (БИНС) на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы счета направлены на компенсацию влияния этого явления. В связи с этим отметим, что алгоритмы сверхбыстрого цикла предназначены для интегрирования быстрых абсолютных угловых движений объекта с использованием промежуточных переменных (например, вектора ориентации или вектора конечного поворота). Алгоритм быстрого цикла реализует вычисление классического кватерниона поворота объекта на шаге быстрого цикла в инерциальной системе координат. Алгоритм медленного цикла используется для вычисления классического кватерниона ориентации объекта в нормальной географической системе координат и самолетных углов [19].

Между тем для некоторого нового вектора угловой скорости $\mathbf{w}(t)$, который получается в задаче определения ориентации твердого тела (БИНС) на основе исходного произвольного вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ при осуществлении взаимно-однозначных замен переменных в уравнениях движения твердого тела, приближенное уравнение Борца допускает точное аналитическое решение. Покажем это.

3. Замены переменных и связанные с ними эффекты. Запишем взаимно-однозначную замену переменных типа преобразования Ляпунова в задаче (1.1), (1.2) по схеме $\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}(t)$ – кватернион ориентации некоторой введенной системы координат (новая переменная), кватернион $\mathbf{V}(t)$ – задаваемый оператор перехода, $\mathbf{K}$ – произвольный постоянный кватернион:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{V}(t), \quad \|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{V}\| = 1 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{V}(t) = (-\mathbf{i}_1 \sin \mathrm{N}(t) + \mathbf{i}_2 \cos \mathrm{N}(t)) \circ \exp(\mathbf{i}_3 \mathrm{N}(t)/2) \circ \exp(\mathbf{i}_1 \Omega_1(t)/2) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{N}(t) = \int_0^t \nu(\tau)\, d\tau, \quad \Omega_1(t) = \int_0^t \omega_1(\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

$$\nu(t) = \omega_2(t) \sin \Omega_1(t) + \omega_3(t) \cos \Omega_1(t) \tag{3.4}$$

Здесь "$\|g\|$" означает норму кватерниона ($\|\mathbf{K}\| = k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$), а "$\exp(g)$" – кватернонную экспоненту [8]

$$\exp(\mathbf{Z}) = \exp(z_0)\left(\cos(|\mathbf{z}_v|) + \sin(|\mathbf{z}_v|)\, \mathbf{z}_v / |\mathbf{z}_v|\right) \tag{3.5}$$

где z_0, $\mathbf{z}_v = z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3$ – скалярная и векторная части кватерниона $\mathbf{Z}$ соответственно, векторная часть кватерниона $\mathbf{Z}(t)$ при этом должна иметь постоянное направление.

В результате исходная задача (1.1), (1.2) перейдет в задачу с новым вектором угловой скорости $\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}$:

$$2\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{K} \circ \mathbf{V} \circ (\boldsymbol{\omega}(t) - 2\dot{\mathbf{V}}) \circ \tilde{\mathbf{V}} \circ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{w}(t) = \mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin \mathrm{N}(t) + \mathbf{i}_2 \cos \mathrm{N}(t)) - 2\mathbf{i}_3 \nu(t) \tag{3.7}$$

$$\mu(t) = \omega_2(t) \cos \Omega_1(t) - \omega_3(t) \sin \Omega_1(t) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{U}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}} \tag{3.9}$$

где $\mathrm{N}(t)$, $\Omega_1(t)$, $\nu(t)$ определяются выражениями (3.3), (3.4), "$\sim$" обозначает сопряжение кватерниона, а ортогональное преобразование, входящее в правую часть кватернионного дифференциального уравнения (3.6), на примере вектора угловой скорости $\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}$ в покомпонентной форме запишется так:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}_1 : w_1(k_0^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) + 2w_2(k_1k_2 - k_0k_3) + 2w_3(k_1k_3 + k_0k_2) \\
&\mathbf{i}_2 : 2w_1(k_1k_2 + k_0k_3) + w_2(k_0^2 + k_2^2 - k_1^2 - k_3^2) + 2w_3(k_2k_3 - k_0k_1) \\
&\mathbf{i}_3 : 2w_1(k_1k_3 - k_0k_2) + 2w_2(k_2k_3 + k_0k_1) + w_3(k_0^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Векторный коэффициент в уравнении (3.6) по-прежнему имеет смысл вектора угловой скорости некоторой системы координат, но в отличие от произвольного переменного вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ в уравнении (1.1), вектор угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ (3.7), оставаясь, в общем случае, переменным по модулю, совершает вполне определенное движение – вращается в плоскости $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ вокруг оси $\mathbf{i}_3$ (данное движение является конической прецессией). Введенный произвольный постоянный кватернион $\mathbf{K}$ обобщает это движение, оно становится обобщенной конической прецессией и хорошо согласуется с известной концепцией Пуансо, что всякое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки можно представить как некоторое коническое движение.

Отметим, что задача (3.6)–(3.9) взаимно-однозначно соответствует исходной задаче (1.1), (1.2) определения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости и начальному угловому положению в пространстве.

Нахождение аналитического решения полученного кватернионного дифференциального уравнения (3.6) по-прежнему остается трудной задачей. Однако уравнение, отличающееся от этого только коэффициентом “1/2” в правой части (т.е. с вектором угловой скорости $\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}/2$)

$$2\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}/2 \tag{3.11}$$

$$\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}} \tag{3.12}$$

решается в замкнутой форме. Установление этого факта носит эвристический характер и имеет математическую природу. Следует отметить, что с задачей Дарбу, приведенной к виду типа (3.6)–(3.9), связан ряд парадоксальных результатов [6], не имеющих ясного физико-механического толкования. Выберем кватернион $\mathbf{K}$ в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \tag{3.13}$$

чтобы начальные условия (3.9), (3.12) стали единичными $\mathbf{U}(0) = \mathbf{\Psi}(0) = 1$. Отметим, что этот прием с кватернионом $\mathbf{K}$ важен при последующем построении алгоритма ориентации БИНС. Точное решение задачи Коши (3.11)–(3.13) при этом запишется так:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{\Phi}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \tag{3.14}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_2 \mathrm{M}(t)/4\right) \circ \exp\left(-\mathbf{i}_3 \mathrm{N}(t)/2\right), \quad \mathrm{M}(t) = \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau \tag{3.15}$$

где функция $\mu(t)$ определяется через известные компоненты вектора угловой скорости твердого тела $\boldsymbol{\omega}(t)$ по формулам (3.3), (3.8).

Проверим правильность полученного решения задачи (3.11)–(3.13) путем дифференцирования выражения (3.14) с учетом (3.3), (3.7), (3.8), (3.15), используя выражение кватернионной экспоненты (3.5) и формулы для ортогонального преобразования типа (3.10):

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{\Psi}}(t) = \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{\Phi}(t) \circ (\mu(t) \exp\left(\mathbf{i}_3 \mathrm{N}(t)/2\right) \circ \mathbf{i}_2 \circ \exp\left(-\mathbf{i}_3 \mathrm{N}(t)/2\right)/4 - \\ - \mathbf{i}_3 \nu(t)\ /\ 2) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 = \mathbf{\Psi}(t) \circ \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \\ \circ (\mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin \mathrm{N}(t) + \mathbf{i}_2 \cos \mathrm{N}(t)) - 2\mathbf{i}_3 \nu(t)) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0/4\end{gathered}$$

или иначе

$$2\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi} \circ \mathbf{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{w}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0/2$$

при этом $\mathbf{\Psi}(0) = 1$, что совпадает с выражениями (3.11), (3.12) при условии (3.13).

Следует отметить, что кватернионному дифференциальному уравнению (3.11) эквивалентно векторное дифференциальное уравнение Пуассона [8]

$$d(\tilde{\mathbf{\Psi}}(t) \circ \mathbf{c} \circ \mathbf{\Psi}(t))/dt = (\tilde{\mathbf{\Psi}}(t) \circ \mathbf{c} \circ \mathbf{\Psi}(t)) \times (\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}})/2 \tag{3.15}$$

где $\mathbf{c}$ – произвольная векторная постоянная, точное решение которого также строится на основании формул (3.14), (3.15). Это будет использовано при получении аналитического решения приближенного уравнения Борца в явном виде.

4. Точное решение приближенного уравнения Борца и построение на его основе алгоритма определения ориентации БИНС. На основе выражений типа (2.2) поставим в соответствие приведенной задаче определения кватерниона ориентации $\mathbf{U}(t)$ (3.6)–(3.8) с единичным начальным условием (3.9) задачу с нелинейным векторным уравнением

Борца типа (2.1) и нулевым начальным условием (тем самым корректность перехода от исходной проблемы (1.1), (1.2) через задачу (3.6)–(3.9) к уравнению (2.1) не будет нарушена). Далее, как это принято в теории и практике БИНС, вместо полного векторного уравнения Борца, соответствующего кватернионному (3.6), рассмотрим упрощенное уравнение Борца типа (2.3) относительно вектора ориентации $\boldsymbol{\varphi}^*(t)$ с нулевым начальным условием:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^* = \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\varphi}^* \times (\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}})/2 \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^*(0) = 0 \tag{4.2}$$

Отметим, что однородная часть векторного линейного дифференциального уравнения (4.1) эквивалентна разрешимой системе (3.9), записанной в форме векторного дифференциального уравнения Пуассона (3.15). Следуя методу Лагранжа решения линейных неоднородных дифференциальных систем уравнений, на основании (3.14), (3.15) точное решение приближенного уравнения Борца (4.1) с начальным условием (4.2) будет иметь вид

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{K} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau) d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \tag{4.3}$$

Проверим правильность полученного решения уравнения (4.1) путем дифференцирования выражения (4.3):

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^* = \mathbf{K} \circ (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau) d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \mathbf{w}(t) -$$

$$- \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau) d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t)) \circ \tilde{\mathbf{K}}/4 + \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} =$$

$$= \mathbf{K} \circ (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau) d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) -$$

$$- \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau) d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t)) \circ \tilde{\mathbf{K}}/4 +$$

$$+ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\varphi}^* \times (\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}})/2 + \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}$$

Тем самым задача определения ориентации твердого тела (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) на основе (2.3) с учетом представленных в разд. 3 замен переменных полностью решена с помощью квадратур. Приведем аналитический алгоритм определения ориентации твердого тела (БИНС).

1) По заданным компонентам вектора угловой скорости твердого тела $\boldsymbol{\omega}(t)$ вычисляются функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ по формулам:

$$\begin{gathered} \Omega_1(t) = \int_0^t \omega_1(\tau)\, d\tau \\ \mu(t) = \omega_2(t) \cos \Omega_1(t) - \omega_3(t) \sin \Omega_1(t) \\ \nu(t) = \omega_2(t) \sin \Omega_1(t) + \omega_3(t) \cos \Omega_1(t) \end{gathered} \tag{4.4}$$

2) По вычисленным $\mu(t)$, $\nu(t)$ определяется вектор $\mathbf{w}(t)$:

$$\begin{gathered} \mathrm{N}(t) = \int_0^t \nu(\tau)\, d\tau, \\ \mathbf{w}(t) = \mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin \mathrm{N}(t) + \mathbf{i}_2 \cos \mathrm{N}(t)) - 2\mathbf{i}_3 \nu(t) \end{gathered} \tag{4.5}$$

3) Используя вектор $\mathbf{w}(t)$ и начальное положение твердого тела $\boldsymbol{\Lambda}_0$ вычисляется значение вектора ориентации твердого тела $\boldsymbol{\varphi}^*$:

$$\mathrm{M}(t) = \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau$$
$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_2\mathrm{M}(t)/4\right) \circ \exp\left(-\mathbf{i}_3\mathrm{N}(t)/2\right) \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{K} \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) \circ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\tau)d\tau \circ \boldsymbol{\Phi}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \tag{4.7}$$

4) По вектору ориентации $\boldsymbol{\varphi}^*$ определяются компоненты кватерниона $\mathbf{U}$:

$$u_0 = \cos(\varphi/2), \quad u_j = \sin(\varphi/2)e_j, \quad j = 1,2,3$$
$$\varphi = |\boldsymbol{\varphi}^*|, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varphi}^*/\varphi, \quad \varphi(t) \neq 0, \quad \forall t \tag{4.8}$$

5) Находим приближенное значение кватерниона ориентации твердого тела (БИНС) $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{approx}}$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{approx}} = \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{K} \circ \left(-\mathbf{i}_1 \sin \mathrm{N}(t) + \mathbf{i}_2 \cos \mathrm{N}(t)\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_3\mathrm{N}(t)/2\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\Omega_1(t)/2\right). \tag{4.9}$$

При реализации алгоритма ориентации БИНС с дискретизацией времени на каждом последующем шаге алгоритма m кватернион $\mathbf{K}$ следует выбирать в виде $\mathbf{K}_m = \boldsymbol{\Lambda}_{m-1} \circ (-\mathbf{i}_2)$. Тогда начальное значение по переменной $\boldsymbol{\varphi}^*$ каждый раз будет нулевым. Накопление информации о траектории углового движения твердого тела (объекта) по формуле типа (4.9) происходит за счет кватерниона $\mathbf{K}$.

Заключение. Предлагаемый кватернионный алгоритм определения ориентации твердого тела (объекта с помощью БИНС) на основе аналитического решения приближенного линейного уравнения Борца в связи с тем, что это решение является точным, носит регулярный характер при всех угловых движениях твердого тела. В отличие от описанных в [1–5] алгоритмов определения ориентации с использованием приближенных численных решений усеченного уравнения Борца и считывающих информацию об угловой скорости объекта непосредственно с чувствительных элементов БИНС, суть предложенного в статье подхода заключается в том, что предварительно преобразуя эту информацию по формулам (4.4), (4.5), уравнение Борца становится явно разрешимым по формулам (4.6), (4.7). Кватернион $\boldsymbol{\Phi}(t)$, на основе которого строится решение задачи, записывается в элементарных функциях и квадратурах по формулам (3.5), (4.6).

Следует отметить, что в теории и практике БИНС также используются нелинейное дифференциальное уравнение для вектора конечного поворота твердого тела $\mathbf{x}(t)$, являющееся аналогом линейного кватернионного уравнения (1.1) [8]

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}(t)/2 + (\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{x}/4$$

и кватернионное уравнение Риккати относительно кватерниона $\mathbf{y}(t)$ со скалярной частью $y_0 = 0$ [9, 20]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}(t) + 2\mathbf{y} \times \mathbf{a}(t) - \mathbf{y} \circ \mathbf{a}(t) \circ \mathbf{y}, \quad \mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)/4$$

где “$(\,\cdot,\cdot\,)$” означает скалярное произведение векторов, компоненты кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ и вектора конечного поворота твердого тела $\mathbf{x}(t)$ связаны соотношениями:

$$\mathbf{x} = 2\boldsymbol{\lambda}_v/\lambda_0 = 2\,\mathrm{tg}(\phi/2)\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3$$
$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\lambda}_v/\sqrt{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|}, \quad \cos\varphi = \lambda_0, \quad \sin\varphi = \sqrt{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|}, \quad 0 \le \varphi < \pi$$

а между кватернионом с нулевой скалярной частью $\mathbf{y}(t)$ и кватернионом ориентации $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ существует взаимно-однозначное соответствие [9, 20].

Для линейных частей этих дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}(t)/2$$

$$\dot{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\omega}(t)/2 + \mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}(t))/2$$

возможны такие же рассуждения, как и приведенные в настоящей статье относительно уравнения Борца [21].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst. 1971. AES-7. № 1. P. 61–66.
2. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms // J. Guidance Control Dyn. 1998. V. 21. № 1. P. 19–28.
3. *Savage P.G.* Strapdown Analytics. Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota, 2007
4. *Бабич О.А.* Исследование некоммутативных поворотов в алгоритмах ориентации БИНС методом аксоидов // Тр. МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. 2013. Вып. 6. С. 2–18.
5. *Mark J.G., Tazartes D.A.* Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics // J. Guidance Control Dyn. 2001. V. 24, № 4. P. 641–646.
6. *Молоденков А.В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3–13.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г., Молоденкова Т.В., Переляев С.Е.* Точное решение приближенного уравнения Борца и построение на его основе кватернионного алгоритма ориентации БИНС // Юбилейная XXV Санкт–Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2018. С. 267–270.
8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
9. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
10. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
11. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 45–52.
12. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
13. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О применении методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8–14.
14. *Bodewadt U.T.* Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft // Math. Zeitschrift. 1952. V. 55. № 3. P. 310–320.
15. *Сачков Г.П., Харламов Ю.М.* Об интегрируемости кинематических уравнений вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 11–15.
16. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига-Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.
17. *Плотников П.К.* Измерительные гироскопические системы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. 167 с.
18. *Еругин Н.П.* Приводимые системы // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 1947. Т. 13. С. 1–95.
19. *Переляев С.Е., Челноков Ю.Н.* Алгоритмы ориентации движущегося объекта с разделением интегрирования быстрых и медленных движений // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 1. С. 18–32.
20. *Переляев С.Е.* О новых кинематических параметрах конечного вращения твердого тела // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 528–537.
21. *Молоденков А.В., Переляев С.Е., Сапунков Я.Г., Молоденкова Т.В.* Аналитическое решение приближенного уравнения для вектора конечного поворота и построение на его основе алгоритма определения ориентации БИНС // XXVI Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2019. С. 215–218.

Analytical Solutions in the Darboux Problem and the Bortz Equation and the Approach to Orientation Algorithm Based on Them

A. V. Molodenkov[a,#], Ya. G. Sapunkov[a,#], T. V. Molodenkova[b,##], and S. E. Perelyaev[c,###]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, Russia*
[b] *Gagarin Saratov State Technical University, Saratov, Russia*
[c] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: molalexei@yandex.ru*
[##] *e-mail: moltw@yandex.ru*
[###] *e-mail: sergey-perelyaev@mail.ru*

We consider the problem of determining the angular position of a rigid body in space from its known angular velocity and initial position (the Darboux problem) in quaternion setting. The exact solution of the Bortz approximate linear equation with respect to the orientation vector of a rigid body has made it possible to solve the problem of determining the quaternion of orientation of a rigid body for an arbitrary angular velocity and small angle of rotation of a rigid body. Proceeding from this solution, the following approach to the design of a new algorithm for computation of SINS orientation has been implemented.

Keywords: analytical solution, orientation, arbitrary angular velocity, rigid body, strapdown INS, quaternion, algorithm

REFERENCES

1. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst., 1971, AES-7, no. 1, pp. 61–66.
2. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms // J. Guidance Control Dyn., 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
3. *Savage P.G.* Strapdown Analytics. Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota, 2007.
4. *Babich O.A.* Analyzing noncommutativity errors of SINS by means of axoids method // Trudy Mat. Inst. Elektromekh. i Avtomat., 2013, no. 6, pp. 2–18. (in Russian)
5. *Mark J.G., Tazartes D.A.* Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics // J. Guidance Control Dyn., 2001, vol. 24, no. 4, pp. 641–646.
6. *Molodenkov A.V.* On the solution of the Darboux problem // Mech. Solids, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176.
7. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G., Molodenkova T.V, Perelyaev S.E.* The exact solution of the Bortz approximate equation and construction of the quaternion orientation algorithm of strapdown INS on its basis // 25th Anniversary Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2018. Proceedings. St Petersburg: SRC RF CSRI "Elektropribor", 2018. pp. 392–395.
8. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Application of Quaternions to Rigid Body Orientation Problems. Moscow: Nauka, 1973. 320 pp. (in Russian)
9. *Chelnokov YuN.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods in Mechanics of Solids and Their Applications. Moscow: Fizmatlit, 2006 (in Russian)
10. Lurie A.I. Analytic Mechanics. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 824 p. (in Russian)
11. *Ivanova E.A.* On one approach to solving the Darboux problem // Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, 2000, no. 1, pp. 45–52. (in Russian)
12. *Zubov V.I.* Analytic Dynamics of Gyro Systems. Leningrad: Sudostroenie, 1970. 317 p. (in Russian)
13. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* On the application of reducibility methods to problems of dynamics of gyro systems // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela, 1987, no. 1, pp. 8–14. (in Russian)
14. *Bodewadt U.T.* Der symmetrische kreisel bei zeitfester drehkraft // Math. Zeitschrift, 1952, vol. 55, no. 3, pp. 310–320.
15. *Sachkov G.P., Kharlamov Yu.M.* On the integrability of kinematic equations of rotation // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela, 1991, no. 6, pp. 11–15. (in Russian)
16. *Chelnokov Yu.N.* On determining the object orientation in Rodrigues-Hamilton parameters from its angular velocity // Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela, 1977, no. 3, pp. 11–20. (in Russian)

17. *Plotnikov P.K.* Gyroscopic Measurement Systems. Saratov: Izd-vo Saratov Univ., 1976. 167 p. (in Russian)
18. *Erugin N.P.* Reducible systems // Trudy Mat. Inst. Steklov, 1947, no. 13, pp. 1–95. (in Russian)
19. *Perelyayev S.E.,Chelnokov Yu.N.* Algorithms for the orientation of a moving object with separation of the integration of fast and slow motions // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 11–20.
20. *Perelyayev S.E.* New kinematic parameters of the finite rotation of a rigid body // JAMM, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 380–385.
21. *Molodenkov A.V., Perelyaev S.E., Sapunkov Ya.G., Molodenkova T.V.* Analytical solution of an approximate equation for the vector of a rigid body finite rotation and its application to construct the algorithm for determining the strapdown INS orientation // 26th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2019. Proceedings. St. Petersburg: SRC RF CSRI “Elektropribor”, 2019. P. 307–309.