УДК 531 075.8; 629.7.05

© 2017 г. С. Е. Переляев, Ю. Н. Челноков

АЛГОРИТМЫ ОРИЕНТАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА С РАЗДЕЛЕНИЕМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ БЫСТРЫХ И МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Рассматриваются уравнения и алгоритмы определения ориентации движущегося объекта в инерциальной и нормальной географической системах координат с разделением интегрирования быстрых и медленных движений на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы. Алгоритмы сверхбыстрого цикла построены с использованием кватернионного кинематического уравнения типа Риккати и метода последовательного приближения Пикара, в качестве входной информации используются приращения интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним координатные оси (квазикоординаты). Алгоритм быстрого цикла реализует вычисление классического кватерниона поворота объекта на шаге быстрого цикла в инерциальной системе координат. Алгоритм медленного цикла используется для вычисления кватерниона ориентации объекта в нормальной географической системе координат и самолетных углов. Приводятся и обсуждаются результаты моделирования различных версий алгоритмов быстрого и сверхбыстрого циклов для вычисления параметров инерциальной ориентации объекта. Также излагается опыт авторов в разработке алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы, развиваются и обобщаются результаты, полученные ими ранее в этой области.

Авторы статьи занимаются разработкой теории и алгоритмов бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) с середины 70-х годов [1–14]. В статье обобщается их опыт разработки алгоритмического обеспечения БИНС в части построения бортовых алгоритмов определения ориентации движущихся объектов в инерциальной и нормальной географической системах координат. Рассматриваются также сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы алгоритмов ориентации БИНС, реализующие раздельное интегрирование на бортовом вычислителе быстрых и медленных угловых движений объекта и нормальной географической системы координат (НГСК) по интегральной первичной информации гироскопов о вращательном движении объекта, непосредственное использование которой в БИНС делает невозможным применение классических методов интегрирования дифференциальных уравнений инерциальной ориентации объекта и требует разработки специальных алгоритмов интегрирования этих уравнений. В сверхбыстром и быстром циклах осуществляется интегрирование быстрых абсолютных угловых движений объекта в инерциальной системе координат, в медленном цикле – интегрирование медленных угловых движений НГСК в той же системе координат.

Алгоритмы сверхбыстрого цикла были построены с использованием кватернионного кинематического уравнения (ККУ) типа Риккати [7] (см. также [9–14]) и метода последовательного приближения Пикара. В качестве переменной выступает кватернион поворота $\mathbf{x}$ с нулевой скалярной частью, который ставится в соответствие классическому кватерниону поворота Гамильтона $\boldsymbol{\lambda}$ [7, 15, 16] с помощью кватернионного аналога формулы Кэли [7, 17]. Алгоритмы имеют второй, третий, четвертый порядок точности и формируют на шаге сверхбыстрого цикла по интегральной первичной информации гироскопов о вращательном движении объекта приращение $\delta\mathbf{x}$ кватерниона $\mathbf{x}$ поворота объекта в инерциальной системе координат. Для сложения приращений $\delta\mathbf{x}_1$, $\delta\mathbf{x}_2$, ..., $\delta\mathbf{x}_n$ внутри сверхбыстрого цикла (для формирования приращения $\Delta\mathbf{x}$ кватерниона поворота $\mathbf{x}$ на шаге быстрого цикла) используется новая формула сложения конечных поворотов, описываемых кватернионами $\delta\mathbf{x}_i$, или ее приближения различных порядков точности [12, 14].

Алгоритм быстрого цикла реализует переход от приращения $\Delta\mathbf{x}$ кватерниона поворота $\mathbf{x}$ к приращению $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ классического кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$ на шаге быстрого цикла с помощью кватернионного аналога формулы Кэли [7, 17], а также реализует кватернионную формулу сложения конечных поворотов, предложенную В.Н. Бранцем и И.П. Шмыглевским [7, 15, 16], для вычисления кватерниона ориентации объекта $\boldsymbol{\lambda}$ в инерциальной системе координат в текущий момент времени. Далее приводятся и анализируются результаты математического моделирования разных версий алгоритмов быстрого и сверхбыстрого циклов для вычисления параметров инерциальной ориентации объекта.

Алгоритм медленного цикла используется для вычисления классического кватерниона ориентации объекта в НГСК по приращениям (на шаге медленного цикла) классических кватернионов ориентации объекта и НГСК в инерциальной системе координат. Алгоритм реализует либо кватернионную вычислительную схему в приращениях, либо матричную вычислительную схему, использующую коммутирующие кватернионные матрицы двух типов [7, 18]. Эффект коммутативности кватернионных матриц позволяет построить более простые алгоритмы медленного цикла. Кватернион инерциальной ориентации НГСК вычисляется с помощью численного интегрирования ККУ, описывающего вращение НГСК, методом средней скорости (алгоритмом второго порядка точности) с использованием информации, вырабатываемой БИНС.

Разделение алгоритмов ориентации БИНС на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы, как уже отмечалось, дает возможность осуществить раздельное интегрирование на бортовом вычислителе быстрых и медленных угловых движений объекта и НГСК, что позволяет повысить точность численного решения задач ориентации, снизить загрузку бортового вычислителя, а также разработать компактные высокоточные специализированные алгоритмы интегрирования быстрых движений (т.е. абсолютных угловых движений объекта), которые непосредственно используют интегральную первичную информацию гироскопов об угловом движении объекта.

Отметим, что введение сверхбыстрого и быстрого циклов позволяет компенсировать погрешности определения инерциальной ориентации маневренных и высокоманевренных летательных аппаратов вследствие конических движений основания БИНС, вызванных высокочастотными вибрациями, угловыми ускорениями и другими динамическими нагрузками и перегрузками основания БИНС. Конические движения основания инерциальных датчиков – значительный источник ошибок и помех современных БИНС. Поэтому для их компенсации необходимы вычисления таких движений в сверхбыстром цикле БИНС с частотой, минимум в десять-двадцать раз превышающей частоты движений основания БИНС.

Повышение точности определения ориентации объектов актуально для всех БИНС. Снижение загрузки бортового вычислителя особенно актуально для БИНС, используемых в системах ориентации, навигации и управления движением небольших объектов мирного и военного назначения (миниатюрных роботов, беспилотных летательных аппаратов, снарядов, бомб (“умного” оружия)), поскольку возможности бортовых вычислителей (процессоров) систем навигации и управления движением таких объектов существенно ограничены.

Эти и другие причины, вызывающие необходимость разделения алгоритмов ориентации БИНС на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы, более подробно рассмотрены в разд. 2 и 3.

1. Уравнения задачи определения ориентации движущегося объекта с помощью БИНС в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона). Алгоритмы функционирования БИНС, служащие для определения ориентации движущегося объекта в инерциальной и нормальной географической системах координат, позволяют вычислять на борту объекта те или иные параметры его ориентации по сигналам чувствительных элементов БИНС (проекциям вектора абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним координатные оси (или приращениям интегралов от этих проекций)) и информации о географической широте и долготе местонахождения объекта или информации о проекциях вектора абсолютной угловой скорости НГСК на ее же координатные оси, высоте и широте объекта. Эти алгоритмы строятся на основе уравнений идеальной работы БИНС, т.е. на основе дифференциальных и функциональных соотношений, связывающих между собой параметры ориентации объекта с величинами, измеряемыми чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования) или идеально вырабатываемыми самой БИНС. Возможны разные варианты уравнений идеальной работы БИНС [3–7, 16, 19–24], различающиеся видом используемых кинематических параметров ориентации и навигации, выбором систем координат, в которых производится интегрирование дифференциальных уравнений ориентации и навигации.

При решении задач навигации и определения ориентации объекта с помощью БИНС необходимо интегрировать кинематические уравнения ориентации в той или иной их форме и осуществлять преобразования координат посредством тех или иных кинематических параметров. К наиболее распространенным, используемым в инерциальной навигации, кинематическим параметрам относятся углы Эйлера–Крылова, направляющие косинусы и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона (РГ)). Уравнения и соотношения инерциальной ориентации и навигации в направляющих косинусах и параметрах Эйлера имеют хорошо известные аналитические и вычислительные преимущества перед уравнениями и соотношениями в углах Эйлера–Крылова [1, 2, 7, 15, 16, 25, 26]. Поэтому углы Эйлера–Крылова не являются конкурентно способными в большинстве задач ориентации и навигации движущегося объекта, решаемых посредством БИНС, по сравнению с направляющими косинусами и параметрами Эйлера (РГ).

При использовании в уравнениях идеальной работы БИНС направляющих косинусов применяются дифференциальные уравнения ориентации объекта и НГСК в направляющих косинусах, имеющие вид кинематических уравнений Пуассона. Анализ показывает [2, 7], что в случае, когда для интегрирования дифференциальных уравнений ориентации используется алгоритм первого порядка точности (т.е. простейший метод Эйлера, являющийся первым приближением к методу средней скорости [2, 7, 15, 23]), преимущество в смысле объема вычислений, производимых на одном шаге реализации уравнений инерциальной ориентации БИНС, имеют направляющие косинусы. В случаях же, когда для интегрирования уравнений ориентации используются алгоритмы второго порядка точности и выше, преимущество в этом смысле имеют параметры Эйлера (в частности, это имеет место уже при использовании в качестве алгоритма численного интегрирования второго приближения к методу средней скорости).

При интегрировании уравнений ориентации в параметрах Эйлера и аналогичных им уравнений в направляющих косинусах алгоритмом первого порядка точности шаг интегрирования должен быть малым (как правило, он составляет тысячные доли секунды). Алгоритмы численного интегрирования второго и третьего порядков точности позволяют существенно увеличить шаг интегрирования (на порядок и более) и снизить загрузку бортового вычислителя. Следует также отметить, что алгоритм численного интегрирования в параметрах Эйлера, реализующий один из основных методов – метод средней скорости, широко используемый в БИНС космического назначения [23], дает лучшую точность определения ориентации объекта, чем аналогичный алгоритм в направляющих косинусах [2, 7]. Кроме того, применение параметров Эйлера позволяет получить для определения ориентации объекта относительно нормальной системы координат (географической или ортодромической) рациональную вычислительную схему в приращениях, использующую эффект коммутативности кватернионных матриц двух типов [7].

В силу изложенного уравнения идеальной работы БИНС, записанные с использованием параметров Эйлера (РГ), имеют в большинстве случаев преимущество перед уравнениями, записанными с использованием углов Эйлера–Крылова или направляющих косинусов. Поэтому здесь в качестве основных используются уравнения и алгоритмы определения ориентации движущегося объекта с помощью БИНС в параметрах Эйлера.

При рассмотрении задач ориентации движущегося объекта будем использовать следующие системы координат:

$O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ) – геоцентрическая инерциальная система координат с началом в центре масс Земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Ось ξ_1 направлена по полярной оси Земли (вдоль вектора $\boldsymbol{u}$ угловой скорости вращения Земли); оси ξ_2, ξ_3 расположены в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли.

$O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ (η) – геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землей. Ось η_1 направлена по оси ξ_1; оси η_2 и η_3 расположены в плоскости экватора, причем ось η_2 совпадает с линией пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана.

$O_2Y_1Y_2Y_3$ (Y) – НГСК, начало O_2 которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс ньютонометров). Ось Y_2 направлена по географической вертикали вверх, ось Y_1 – вдоль касательной к меридиану h эллипсоида на север, ось Y_3 – вдоль касательной к параллели на восток.

$O_2X_1X_2X_3$ (X) – связанная с объектом система координат. Ось X_1 направлена по продольной оси объекта, ось X_2 – по нормальной, а ось X_3 – по поперечной.

Взаимную ориентацию введенных координатных трехгранников будем задавать собственными кватернионами поворотов $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\kappa}$, компоненты которых – параметры Эйлера (РГ) λ_j, ν_j и κ_j (j = 0, 1, 2, 3) соответственно. Кватернионы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\nu}$ характеризуют ориентацию объекта (трехгранника X) в инерциальной и географической системах координат ξ и Y соответственно, кватернион $\boldsymbol{\kappa}$ характеризует ориентацию географической системы координат Y в инерциальной системе координат ξ.

Для определения инерциальной ориентации движущегося объекта (его ориентации в инерциальной системе координат) и управления угловым движением объекта часто используется классическое ККУ вращательного движения твердого тела [7, 15, 16]

$$2\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$$

Здесь кватернион $\boldsymbol{\omega}_x$ – отображение вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним координатные оси X_i (ω_i – проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на связанную координатную ось X_i), $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, центральный кружок $\circ$ – символ кватернионного произведения, верхняя точка означает производную по времени t (при дифференцировании кватерниона дифференцируются лишь его скалярные компоненты).

В линейном ККУ (1.1) переменной служит классический кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}$, имеющий норму, равную единице. В скалярной записи кватернионному уравнению

(1.1) соответствует система четырех линейных дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера (РГ) λ_j, имеющая вид

$$2\dot{\lambda}_0 = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3$$

$$2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3 \tag{1.2}$$

$$2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0 - \omega_3\lambda_1 + \omega_1\lambda_3$$

$$2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2$$

Ориентация движущегося объекта в нормальной географической системе координат Y может быть определена кватернионом $\boldsymbol{\nu}$ с помощью кватернионного соотношения

$$\boldsymbol{\nu} = \bar{\mathbf{k}} \circ \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\nu} = \nu_0 + \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_0 + \kappa_1\mathbf{i}_1 + \kappa_2\mathbf{i}_2 + \kappa_3\mathbf{i}_3 \tag{1.3}$$

Здесь и далее верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Фигурирующие в равенствах (1.3) компоненты κ_j кватерниона $\boldsymbol{\kappa}$ ориентации НГСК в инерциальной системе координат ξ могут быть найдены через географическую широту φ и долготу λ местонахождения объекта, которые вырабатываются самой БИНС или получаются из внешних источников (например, с использованием спутниковой навигационной системы ГЛОНАСС) с помощью соотношений

$$\kappa_0 = \cos(\varphi/2)\cos(\lambda_a/2), \quad \kappa_1 = \cos(\varphi/2)\sin(\lambda_a/2)$$

$$\kappa_2 = \sin(\varphi/2)\sin(\lambda_a/2), \quad \kappa_3 = -\sin(\varphi/2)\cos(\lambda_a/2) \tag{1.4}$$

$$\lambda_a = \lambda + \mu_0 + ut$$

где λ_a – абсолютная долгота движущегося объекта, μ_0 – значение угла разворота системы координат η относительно ξ в начальный момент времени t, u – угловая скорость суточного вращения Земли.

Компоненты κ_j кватерниона $\boldsymbol{\kappa}$ в случае, когда в БИНС вычисляются северная υ_N, вертикальная υ_H и восточная υ_E составляющие относительной (по отношению к поверхности Земли) скорости объекта, могут быть найдены с помощью интегрирования ККУ

$$2\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} \circ \boldsymbol{\Omega}_y, \quad \boldsymbol{\Omega}_y = \Omega_N\mathbf{i}_1 + \Omega_H\mathbf{i}_2 + \Omega_E\mathbf{i}_3 \tag{1.5}$$

$$\Omega_N = u\cos\varphi + \upsilon_E/R_1, \quad \Omega_H = u\sin\varphi + (\upsilon_E/R_1)\mathrm{tg}\varphi, \quad \Omega_E = -(1/R_2)\upsilon_N$$

$$R_1 = (A + H)/l, \quad R_2 = (A + H)(1 - e^2)/l^3, \quad l = (1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2} \tag{1.6}$$

В уравнении (1.5) $\boldsymbol{\Omega}_y$ – отображение вектора $\boldsymbol{\Omega}$ абсолютной угловой скорости НГСК на ее же координатные оси (Ω_N, Ω_H и Ω_E – северная, вертикальная и восточная составляющие угловой скорости НГСК). В соотношениях (1.6) H – высота объекта над уровнем моря; фундаментальные геодезические константы и параметры общеземного эллипсоида, принятые в системе координат ПЗ-90.02, имеют следующие значения: угловая скорость Земли $u = 7.292115 \cdot 10^{-5}$ 1/c, квадрат первого эксцентриситета $e^2 = 0.006694368$, большая полуось земного эллипсоида вращения $A = 6378136$ м.

В скалярной записи уравнению (1.5) соответствует система четырех дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера (РГ) κ_j

$$2\dot{\kappa}_0 = -\Omega_N\lambda_1 - \Omega_H\lambda_2 - \Omega_E\lambda_3$$

$$2\dot{\kappa}_1 = \Omega_N\lambda_0 + \Omega_E\lambda_2 - \Omega_H\lambda_3$$

$$2\dot{\kappa}_2 = \Omega_H\lambda_0 - \Omega_E\lambda_1 + \Omega_N\lambda_3 \tag{1.7}$$

$$2\dot{\kappa}_3 = \Omega_E\lambda_0 + \Omega_H\lambda_1 - \Omega_N\lambda_2$$

Ориентация движущегося объекта в НГСК Y может быть также определена кватернионом $\mathbf{v}$ с помощью интегрирования ККУ относительного движения объекта

$$2\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\Omega}_y \circ \mathbf{v} \tag{1.8}$$

Этому ККУ в скалярной записи соответствует система четырех дифференциальных уравнений в параметрах Эйлера (РГ) ν_j, имеющая вид

$$\begin{aligned}
2\dot{\nu}_0 &= -(\omega_1 - \Omega_N)\nu_1 - (\omega_2 - \Omega_H)\nu_2 - (\omega_3 - \Omega_E)\nu_3 \\
2\dot{\nu}_1 &= (\omega_1 - \Omega_N)\nu_0 + (\omega_3 + \Omega_E)\nu_2 - (\omega_2 + \Omega_H)\nu_3 \\
2\dot{\nu}_2 &= (\omega_2 - \Omega_H)\nu_0 - (\omega_3 + \Omega_E)\nu_1 + (\omega_1 + \Omega_N)\nu_3 \\
2\dot{\nu}_3 &= (\omega_3 - \Omega_E)\nu_0 + (\omega_2 + \Omega_H)\nu_1 - (\omega_1 + \Omega_N)\nu_2
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Дифференциальные уравнения (1.8) и (1.9) должны быть дополнены алгебраическими соотношениями (1.6) для составляющих Ω_N, Ω_H и Ω_E абсолютной угловой скорости НГСК.

Удобство использования ККУ (1.8) или скалярных уравнений (1.9) для определения ориентации движущегося объекта в НГСК заключается с аналитической точки зрения в их компактности (вместо двух ККУ (1.1) и (1.5) или восьми скалярных дифференциальных уравнений (1.2), (1.7) и кватернионного алгебраического соотношения (1.3) используется лишь одно ККУ (1.8) или четыре скалярных дифференциальных уравнения (1.9)), а также в том, что в нем непосредственно используются проекции ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости объекта на связанные с объектом оси, измеряемые на борту объекта пространственным измерителем абсолютной угловой скорости, и проекции Ω_N, Ω_H и Ω_E вектора абсолютной угловой скорости НГСК на ее же координатные оси, вырабатываемые инерциальной навигационной системой.

Для вычисления самолетных углов (географического курса ψ, тангажа ϑ и крена γ), характеризующих ориентацию объекта в НГСК, используются соотношения

$$\mathrm{tg}\psi = c_{13}/c_{11} = (\nu_1\nu_3 - \nu_0\nu_2)/(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 1/2)$$

$$\sin\vartheta = c_{12} = 2(\nu_1\nu_2 + \nu_0\nu_3)$$

$$\mathrm{tg}\gamma = -c_{32}/c_{22} = (\nu_0\nu_1 - \nu_2\nu_3)(\nu_0^2 + \nu_2^2 - 1/2)$$

Здесь $c_{ij}\,(i, j = 1, 2, 3)$ – направляющие косинусы углов между осями связанной с объектом системы координат и осями НГСК.

Отметим, что для однозначного определения углов ψ, ϑ и γ через параметры Эйлера ν_j существуют специальные алгоритмы, использующие значения и других элементов c_{ij} матрицы направляющих косинусов углов, найденные через параметры Эйлера ν_j.

2. Особенности интегрирования кватернионных уравнений ориентации БИНС на бортовом вычислителе. Инерциальная ориентация движущегося объекта в параметрах Эйлера (РГ) может быть определена с помощью численного интегрирования на бортовом вычислителе БИНС в реальном масштабе времени линейного ККУ (1.1) по измеренной с помощью гироскопов мгновенной $\omega_i(t)$ или интегральной первичной информации об абсолютном угловом движении объекта (приращениям интегралов γ_i от проекций ω_i вектора абсолютной угловой скорости объекта), измеряемой на борту с помощью гироскопов.

Специфика алгоритмов численного интегрирования ККУ (1.1) обусловлена тем, что на борту объекта во многих случаях имеется не мгновенная информация об абсолютном угловом движении объекта, а интегральная первичная информация (т.е. не величины ω_i, а приращения интегралов γ_i от этих величин). В этих случаях оказывается невозможным непосредственное использование классических численных методов интегрирования дифференциальных уравнений ориентации, например, широко используемого метода Рунге–Кутты.

Кроме того, следует отметить, что алгоритмы численного интегрирования ККУ (1.1), использующие интегральную первичную информацию об абсолютном угловом движении объекта, предпочтительнее классических алгоритмов численного интегрирования, использующих непосредственно значения проекций ω_i, не только потому, что в большинстве случаев измерители абсолютной угловой скорости объекта (чувствительные элементы БИНС) с цифровым выходом выдают не мгновенную, а интегральную первичную информацию, но и потому, что с их помощью, как показывает моделирование, достигается лучшая точность в определении ориентации объекта при наличии инструментальных погрешностей (помех в показаниях) гироскопов.

Алгоритм определения ориентации объекта относительно НГСК, как уже отмечалось, может быть построен либо на основе ККУ относительного углового движения объекта (1.8), либо на основе ККУ (1.1) и (1.5) абсолютных угловых движений объекта и НГСК с использованием кватернионного алгебраического соотношения (1.3). Коэффициенты ω_i ККУ (1.8) характеризуют мгновенное абсолютное угловое движение объекта и являются быстроменяющимися функциями времени, а коэффициенты Ω_N, Ω_H и Ω_E этого уравнения характеризуют мгновенное абсолютное угловое движение НГСК и являются медленно меняющимися функциями времени. Величины ω_i на несколько порядков превосходят величины Ω_N, Ω_H и Ω_E. Тем не менее, несмотря на принципиальное различие мгновенных абсолютных угловых движений объекта и сопровождающего трехгранника (НГСК) их интегрирование при использовании ККУ (1.8) проводится совместно одним и тем же численным методом (поскольку этими уравнениями одновременно охватываются и мгновенное быстрое абсолютное угловое движение объекта и мгновенное медленное абсолютное угловое движение сопровождающего трехгранника). При этом алгоритмы численного интегрирования ККУ (1.8) второго порядка точности и выше, использующие интегральную первичную информацию об угловом движении объекта, оказываются сложными и громоздкими. Их реализация на БЦВМ с требуемой степенью точности сопряжена с дополнительными трудностями, обусловленными ограниченностью разрядной сетки БЦВМ (из-за разного порядка величин ω_i и Ω_N, Ω_H, Ω_E).

При замене одного ККУ (1.8) совокупностью ККУ (1.1) и (1.5) происходит естественное разделение угловых движений на быстрые абсолютные угловые движения объекта (они описываются ККУ (1.1)) и на медленные абсолютные угловые движения НГСК (они описываются ККУ (1.5)). Поэтому при использовании ККУ (1.1) и (1.5) производится раздельное интегрирование мгновенных быстрых и медленных движений, для чего могут быть использованы разные по сложности численные методы интегрирования (например, для интегрирования ККУ (1.5) может быть использован алгоритм, реализующий первое или второе приближение к методу средней скорости, имеющему второй порядок точности, а для интегрирования ККУ (1.1) – алгоритм третьего или четвертого порядка точности). На точность интегрирования мгновенных абсолютных угловых движений объекта не будут влиять инструментальные погрешности акселерометров, входящие в погрешности формирования величин Ω_N, Ω_H и Ω_E (как при интегрировании ККУ (1.8)). Кроме того, при вычислении параметров ориентации ν_j, характеризующих ориентацию объекта в НГСК, с помощью интегрирования

ККУ (1.1) и (1.5) и использования соотношения (1.3) может быть применена эффективная вычислительная схема в приращениях, позволяющая за счет использования эффекта коммутативности кватернионных матриц двух типов и свойств параметров Эйлера построить наиболее рациональные алгоритмы вычисления параметров ν_j.

На основании изложенного можно сделать вывод: использование ККУ (1.1) и (1.5), описывающих абсолютные угловые движения объекта и НГСК, при построении алгоритмов ориентации объекта в НГСК предпочтительнее использования ККУ (1.8), описывающего угловое движение объекта относительно НГСК. Это служит обоснованием целесообразности интегрирования быстрых движений объекта в сверхбыстром и быстром циклах, а интегрирования медленных движений НГСК – в медленном цикле. Целесообразность разделения процесса интегрирования быстрых движений объекта на сверхбыстрый и быстрый циклы обоснована в разд. 3.

3. Использование вспомогательных переменных для определения инерциальной ориентации движущегося объекта. Описанный в разд. 1 и 2 подход к определению инерциальной ориентации движущегося объекта, основанный на непосредственном интегрировании ККУ (1.1) для вычисления кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ инерциальной ориентации объекта, широко используется при создании математического обеспечения современных БИНС [7, 15, 16, 23] наряду с другим подходом [7–14, 16, 23, 27–30], основанным на использовании вспомогательных (промежуточных) переменных, также описывающих инерциальную ориентацию объекта, но удовлетворяющих другим кинематическим уравнениям. При этом кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ вычисляется по соответствующим формулам через вспомогательные переменные с равной или большей дискретностью, чем приращения вспомогательных переменных. Целесообразность использования вспомогательных переменных, вычисляемых в сверхбыстром цикле, объясняется следующими причинами.

1. Компонента λ_0^* скалярной части и компоненты λ_i^* ($i = 1, 2, 3$) векторной части $\boldsymbol{\lambda}_v^*$ кватерниона приращения $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, вычисляемые на шаге интегрирования, различаются на несколько порядков: величина λ_0^* близка к единице, в то время как величины λ_i^* имеют порядок 10^{-5} и меньше (в зависимости от вида углового движения объекта и шага интегрирования). Близость компоненты λ_0^* приращения $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, вычисляемого на шаге интегрирования, к единице может приводить к потере точности определения ориентации при малой ограниченной разрядной сетке бортового вычислителя. В отличие от приращений λ_0^* и λ_i^* компонент кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$ все приращения компонент векторной или кватернионной, или матричной вспомогательной переменной на шаге интегрирования имеют одинаковый порядок малости, равный 10^{-5} и меньше. Поэтому указанной сложности, возникающей при использовании кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, не будет при использовании вспомогательных переменных.

2. Вектор или кватернион абсолютной угловой скорости движущегося объекта или соответствующая им матрица угловых скоростей входят в неоднородные части дифференциальных кинематических уравнений, которым удовлетворяют вспомогательные переменные, аддитивным образом, в отличие от классического ККУ (1.1), в котором кватернион $\boldsymbol{\omega}_x$ абсолютой угловой скорости объекта входит только мультипликативно. Поэтому первым приближением решений уравнений для вспомогательных переменных на шаге интегрирования, построенным методом последовательного приближения Пикара, будет приращение интеграла на шаге интегрирования от вектора абсолютной угловой скорости объекта, непосредственно измеряемое на борту движущегося объекта большинством современных датчиков угловой скорости. Это делает указанные уравнения более удобными для построения сверхбыстрых циклов алгоритмов определения ориентации движущегося объекта [12, 23, 30], использующих интегральную первичную информацию о движении объекта, в сравнении с классическим ККУ (1.1)

(или скалярными уравнениями (1.2)). При этом кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ вычисляется в быстрых циклах алгоритмов определения ориентации, использующих в качестве входной информации результаты вычислений сверхбыстрых циклов этих алгоритмов.

4. Сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы алгоритмов ориентации БИНС. Алгоритмы ориентации БИНС, предназначенные для определения ориентации движущегося объекта в инерциальной и нормальной географической системах координат целесообразно (с точек зрения обеспечения требуемой точности определения ориентации и объема необходимых вычислений) разделить на сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы. Алгоритмы сверхбыстрого цикла предназначены для интегрирования быстрых абсолютных угловых движений объекта с использованием промежуточных переменных. Алгоритм быстрого цикла реализует вычисление классического кватерниона поворота объекта на шаге быстрого цикла в инерциальной системе координат. Алгоритм медленного цикла используется для вычисления классического кватерниона ориентации объекта в НГСК и самолетных углов (рыскания, курса, тангажа и крена).

Сверхбыстрый цикл. Алгоритмы сверхбыстрого цикла могут быть построены с использованием ККУ типа Риккати [7, 11, 13, 14]

$$4\mathbf{x}^{\cdot} = (1 + \mathbf{x}) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1 - \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}_x - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{x} \tag{4.1}$$

и метода последовательного приближения Пикара (здесь и далее $\times$ – символ векторного произведения).

В уравнении (4.1) переменной служит кватернион поворота $\mathbf{x}$ с нулевой скалярной частью, который ставится в соответствие классическому кватерниону поворота Гамильтона $\boldsymbol{\lambda}$ (см. вторую формулу (1.1)) с помощью кватернионного аналога формулы Кэли [7, 11, 13, 14]:

$$\mathbf{x} = (\boldsymbol{\lambda} + 1)^{-1} \circ (\boldsymbol{\lambda} - 1) = (\boldsymbol{\lambda} - 1) \circ (\boldsymbol{\lambda} + 1)^{-1}$$

$$\boldsymbol{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = \mathrm{tg}(\varphi/4)\,(e_1\mathbf{i}_1 + e_2\mathbf{i}_2 + e_3\mathbf{i}_3)$$

$$\mathbf{x} = (1 + \lambda_0)^{-1}\boldsymbol{\lambda}_\upsilon; \quad \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \boldsymbol{\lambda}_\upsilon = \sin(\varphi/2)(e_1\mathbf{i}_1 + e_2\mathbf{i}_2 + e_3\mathbf{i}_3)$$

Компоненты кватерниона $\mathbf{x}$ определяются формулами $x_i = \mathrm{tg}(\varphi/4)e_i$ $(i = 1, 2, 3)$, в которых φ – эйлеров угол поворота движущегося объекта в инерциальной системе координат ξ, e_i – проекции единичного вектора $\mathbf{e}$ эйлеровой оси конечного поворота движущегося объекта на оси инерциальной ξ и связанной X систем координат (одинаковые при условии, что в начальном положении одноименные оси систем координат X и ξ совпадали). Компонентами кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$, по-прежнему, являются параметры Эйлера (РГ) λ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$, характеризующие ориентацию объекта в инерциальном базисе ξ. В уравнении (4.1) также используется кватернион $\boldsymbol{\omega}_x$ (см. последнюю формулу (1.1)).

Отметим, что векторы конечных поворотов $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и соответствующие векторные кинематические уравнения, а также двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности для численного интегрирования дифференциального уравнения для вектора $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ по интегральной первичной информация о вращательном движении объекта рассматривались А.П. Пановым [28, 29]. Так, векторное кинематическое уравнение для вектора $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ имеет вид [28, 29]

$$\boldsymbol{\theta}^{\cdot} = (1 - \theta^2)\,\boldsymbol{\omega}/4 + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}/2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\theta}/2, \quad \theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \tag{4.2}$$

где центральная точка – символ скалярного произведения векторов, θ_i – проекция вектора $\boldsymbol{\theta}$ на связанную координатную ось X_i.

При построении алгоритмов сверхбыстрого цикла часто используется векторное дифференциальное уравнение Борца [27]

$$\boldsymbol{\varphi}^{\cdot} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}/2 + (1/\varphi^2)(1 - (\varphi/2)\mathrm{ctg}(\varphi/2))\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{4.3}$$

где $\varphi = \varphi\mathbf{e}$ – вектор эйлерова конечного поворота твердого тела. В уравнениях (4.2) и (4.3) используются локальные производные по времени.

Кватернион $\mathbf{x}$ соответствует четырехмерной кососимметрической матрице (КМ4), а векторы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ – трехмерным кососимметрическим матрицам (КМ3). Как известно [7, 17], КМ3 (нечетного) и КМ4 (четного) порядков имеют качественно различные свойства: если КМ3 – особые (их определители равны нулю), то КМ4 – нет (их определители всегда отличны от нуля); кроме того, если многочлен любой степени от КМ3 сводится к многочлену второй степени, то многочлен любой степени от КМ4 сводится к многочлену первой степени. Это делает использование ККУ (4.1) при построении алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью БИНС более удобным и эффективным в сравнении с векторными кинематическими уравнениями (4.2) и (4.3).

Предлагаемые нами алгоритмы сверхбыстрого цикла имеют второй или третий порядок точности и формируют на шаге h сверхбыстрого цикла по интегральной первичной информации о вращательном движении объекта приращение $\delta\mathbf{x}$ кватерниона поворота $\mathbf{x}$. Для сложения приращений кватерниона поворота x внутри сверхбыстрого цикла используется новая формула сложения конечных поворотов или ее приближения разных порядков точности [12, 14]. Сверхбыстрый цикл выполняется на интервале времени $[t_{m-1}, t_m]$, равном шагу H быстрого цикла, с шагом $h = t_n - t_{n-1} = H/l$ по приводимым ниже алгоритмам (l – количество шагов сверхбыстрого цикла).

Алгоритмы сверхбыстрого цикла.

1. Алгоритмы вычисления приращения $\delta\mathbf{x}_n$ кватернионной переменной $\mathbf{x}$, фигурирующей в уравнении (4.1), на шаге h сверхбыстрого цикла, основанные на предложенных авторами алгоритмах [8–11]: упрощенный

$$\delta\mathbf{x}_n = a\boldsymbol{\gamma}_n + b\boldsymbol{\gamma}_{n-1} \times \boldsymbol{\gamma}_n \tag{4.4}$$

и неупрощенный

$$\delta\mathbf{x}_n = a\boldsymbol{\gamma}_n + b\boldsymbol{\gamma}_{n-1} \times \boldsymbol{\gamma}_n - c\boldsymbol{\gamma}_n \circ \boldsymbol{\gamma}_{n-1} \circ \boldsymbol{\gamma}_n \tag{4.5}$$

одношаговые алгоритмы третьего порядка точности, где

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}(t)dt, \quad \boldsymbol{\gamma}_{n-1} = \int\limits_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \boldsymbol{\omega}(t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots, l$$

a, b, c – числовые коэффициенты.

Были предложены также другие алгоритмы сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (одношаговые алгоритмы) и четвертого порядка точности (двухшаговые алгоритмы, не требующие предварительной разгонки алгоритмов), построенные с использованием кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (4.1) [8–11].

2. Алгоритмы вычисления приращения $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$ кватерниона $\mathbf{x}$ на шаге быстрого цикла, использующие точную или упрощенные формулы сложения приращений кватерниона $\mathbf{x}$ внутри сверхбыстрого цикла, полученные авторами [12, 14]: алгоритмы второго

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \delta\mathbf{x}_n + 2x_{n-1} \times \delta x_n \tag{4.6}$$

и третьего

$$\mathbf{x}_n = (1 + 2\mathbf{x}_{n-1} \cdot \delta\mathbf{x}_n - \delta\mathbf{x}_n^2)\mathbf{x}_{n-1} + (1 + 2\mathbf{x}_{n-1} \cdot \delta\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}^2)\delta\mathbf{x}_n + 2\mathbf{x}_{n-1} \times \delta\mathbf{x}_n \tag{4.7}$$

порядка точности и точный алгоритм

$$\mathbf{x}_n = (1 - 2\mathbf{x}_{n-1}\cdot\delta\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}^2\delta\mathbf{x}_n^2)^{-1}[(1-\delta\mathbf{x}_n^2)\mathbf{x}_{n-1} + (1-\mathbf{x}_{n-1}^2)\delta\mathbf{x}_n + 2\mathbf{x}_{n-1}\times\delta\mathbf{x}_n] \quad (4.8)$$

где $n = 1, 2, ..., l$. Кватернион

$$\Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{x}_l \;\; (l = (t_m - t_{m-1})/(t_n - t_{n-1}) = H/(t_n - t_{n-1}))$$

вычисленный по одному из алгоритмов сверхбыстрого цикла (4.4), (4.6); (4.4), (4.7); (4.4), (4.8); (4.5), (4.6); (4.5), (4.7); (4.5), (4.8), используется в быстром цикле для вычисления кватерниона ориентации $\boldsymbol{\lambda}(t_m)$.

3. Алгоритм сверхбыстрого цикла Сэвейджа [23, 30], использующий вектор эйлерова поворота $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_{n-1} + \boldsymbol{\gamma}_n + (1/2)\,\boldsymbol{\varphi}_{n-1}^* \times \boldsymbol{\gamma}_n + (1/12)\boldsymbol{\gamma}_{n-1}\times\boldsymbol{\gamma}_n$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{n-1}^* = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\gamma}_3 + \ldots + \boldsymbol{\gamma}_{n-1} \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\omega}(t)dt, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\omega}(t)dt, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\boldsymbol{\omega}(t)dt, \quad t_n - t_{n-1} = h$$

В этом алгоритме $\boldsymbol{\varphi}_0^* = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_1^* = \boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2^* = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3^* = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\gamma}_3$, ... при $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно.

Отметим, что алгоритм, аналогичный (4.9), получен В.Н. Бранцем [23].

Быстрый цикл. Предлагаемый алгоритм быстрого цикла реализует переход от приращения $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_l$ кватерниона поворота $\mathbf{x}$ к приращению $\boldsymbol{\lambda}^*$ классического кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$ на шаге быстрого цикла с помощью кватернионного аналога формулы Кэли, а также реализует кватернионную формулу сложения конечных поворотов, предложенную В.Н. Бранцем и И.П. Шмыглевским [15], для вычисления кватерниона ориентации объекта $\boldsymbol{\lambda}$ в инерциальной системе координат.

При определении только инерциальной ориентации объекта быстрый цикл выполняется с шагом $H = t_m - t_{m-1}$ один раз на интервале времени $[t_{m-1}, t_m]$ по общей кватернионной рекуррентной схеме

$$\boldsymbol{\lambda}(t_m) = \boldsymbol{\lambda}(t_{m-1})\circ\boldsymbol{\lambda}^*, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_\upsilon, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \lambda_0^* + \boldsymbol{\lambda}_\upsilon^*$$

или, в векторной записи, по схеме

$$\lambda_0(t_m) = \lambda_0(t_{m-1})\lambda_0^* - \boldsymbol{\lambda}_\upsilon(t_{m-1})\cdot\boldsymbol{\lambda}_\upsilon^*$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\upsilon(t_m) = \lambda_0(t_{m-1})\boldsymbol{\lambda}_\upsilon^* + \lambda_0^*\boldsymbol{\lambda}_\upsilon(t_{m-1}) + \boldsymbol{\lambda}_\upsilon(t_{m-1})\times\boldsymbol{\lambda}_\upsilon^*,$$

где $\boldsymbol{\lambda}_\upsilon$ и $\boldsymbol{\lambda}_\upsilon^*$ – векторные части кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$, или векторы с компонентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ соответственно; $\boldsymbol{\lambda}(t_{m-1})$ и $\boldsymbol{\lambda}(t_m)$ – кватернионы инерциальной ориентации объекта в моменты времени t_{m-1} и t_m соответственно; $\boldsymbol{\lambda}^*$ – приращение кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ инерциальной ориентации на интервале времени $H = t_m - t_{m-1}$.

Скалярная λ_0^* и векторная $\boldsymbol{\lambda}_\upsilon^*$ части кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^*$ в случае использования ККУ в кососимметрических операторах (4.1) вычисляется по формулам

$$\lambda_0^* = (1 - \Delta x^2)/(1 + \Delta x^2), \quad \boldsymbol{\lambda}_\upsilon^* = 2\Delta\mathbf{x}/(1 + \Delta x^2)$$

$$\Delta x^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 = \|\Delta\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

Здесь $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_m)$ – приращение на шаге H быстрого цикла кватернионной переменной $\mathbf{x}$ с нулевой скалярной частью, вычисленное в конце сверхбыстрого цикла по одному из алгоритмов, приведенных в подразд. 1 и 2; $\|\Delta\mathbf{x}\|$ – норма кватерниона $\Delta\mathbf{x}$.

В случае использования кинематического уравнения Борца (4.3) приращение $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватерниона инерциальной ориентации вычисляется по известной формуле

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \cos(\varphi_m/2) + (\boldsymbol{\varphi}_m/\varphi_m)\sin(\varphi_m/2), \quad \varphi_m = |\boldsymbol{\varphi}_m|$$

где $\boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\varphi}(t_m)$ – приращение на шаге H быстрого цикла векторной переменной $\boldsymbol{\varphi}$, вычисленное в конце сверхбыстрого цикла по алгоритму (4.9).

При наличии медленного цикла вычисления ориентации объекта в НГСК быстрый цикл, как правило, состоит не из одного шага, а из p шагов. Длительность быстрого цикла в этом случае $pH = H^*$ где H^* – шаг медленного цикла вычислений.

Медленный цикл. Алгоритм медленного цикла используется для вычисления классического кватерниона ориентации объекта в НГСК по приращениям (на шаге медленного цикла) классических кватернионов ориентации объекта и НГСК в инерциальной системе координат. Алгоритм реализует либо кватернионную вычислительную схему в приращениях, либо матричную вычислительную схему [7], использующую коммутирующие кватернионные матрицы двух типов.

В первом случае вычисления проводятся по кватернионной формуле

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nu}_s = \bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^* \circ \boldsymbol{\nu}_{s-1} \circ \boldsymbol{\lambda}_s^*, \quad \boldsymbol{\nu}_{s-1} = \boldsymbol{\nu}(t_{s-1}), \quad \boldsymbol{\nu}_s = \boldsymbol{\nu}(t_s) \\ &\bar{\boldsymbol{\kappa}}_s^* = \kappa_{0s}^* - \kappa_{1s}^*\mathbf{i}_1 - \kappa_{2s}^*\mathbf{i}_2 - \kappa_{3s}^*\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\lambda}_s^* = \lambda_{0s}^* + \lambda_{1s}^*\mathbf{i}_1 + \lambda_{2s}^*\mathbf{i}_2 + \lambda_{3s}^*\mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{s-1} = \nu_{0s-1} + \nu_{1s-1}\mathbf{i}_1 + \nu_{2s-1}\mathbf{i}_2 + \nu_{3s-1}\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\nu}_s = \nu_{0s} + \nu_{1s}\mathbf{i}_1 + \nu_{2s}\mathbf{i}_2 + \nu_{3s}\mathbf{i}_3$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – кватернион ориентации объекта в НГСК, $\boldsymbol{\lambda}_s^*$ и κ_s^* приращения на шаге медленного цикла кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ ориентации объекта и НГСК в инерциальной системе координат, λ_{js}^* и κ_{js}^* ($j = 0, 1, 2, 3$) – приращения на шаге медленного цикла параметров Эйлера (РГ) λ_j и κ_j (приращения компонент кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и κ). В случае, когда быстрый цикл состоит из одного шага, $\boldsymbol{\lambda}_s^* = \boldsymbol{\lambda}^*$. Особенность кватернионной формулы (4.10) заключается в использовании при определении относительной ориентации объекта не полных кватернионов ориентации $\boldsymbol{\lambda}$ и κ, а их приращений на шаге медленного цикла, причем здесь сложение приращений носит не аддитивный, а мультипликативный характер, отвечающий мультипликативной кватернионной формуле сложения конечных поворотов.

Во втором случае вычисления проводятся по матричной формуле

$$\nu_s = n\{\boldsymbol{\lambda}_s^*\}m^T\{\kappa_s^*\}\nu_{s-1}, \quad \nu_{s-1} = \nu(t_{s-1}), \quad \nu_s = \nu(t_s) \tag{4.11}$$

где $n\{\boldsymbol{\lambda}_s^*\}$ и $m\{\kappa_s^*\}$ – кватернионные матрицы поворотов типов n и m [7], сопоставляемые с кватернионами $\boldsymbol{\lambda}_s^*$ и κ_s^*, верхний индекс T – символ транспонирования, ν_s и ν_{s-1} – четырехмерные векторы-столбцы, составленные из параметров Эйлера ν_{sj} и ν_{s-1j} (компонент кватернионов $\boldsymbol{\nu}_s$ и $\boldsymbol{\nu}_{s-1}$). При получении матричного алгоритма (4.11) использовано свойство коммутативности кватернионных матриц двух типов (n и m), которое позволило выделить произведение матриц $n\{\boldsymbol{\lambda}_s^*\}m^T\{\kappa_s^*\}$, элементы которых – приращения λ_{js}^* и κ_{js}^* ($j = 0, 1, 2, 3$) параметров Эйлера. Такая матричная запись алгоритма нахождения параметров относительной ориентации объекта позволяет упрощать алгоритм, используя малость приращений λ_{is}^* и κ_{is}^* ($i = 1, 2, 3$). Приращение κ_s^* кватерниона $\boldsymbol{\kappa}$ инерциальной ориентации НГСК вычисляется с помощью численного интегрирования ККУ (1.5), описывающего вращение НГСК в инерциальной системе координат, методом средней скорости (алгоритмом второго порядка точности), имеющим в скалярной записи следующий вид:

$$\kappa_{0s}^* = \cos(\gamma/2)$$

$$\kappa_{1s}^* = \Omega_s^{-1}\Omega_{Ns}\sin(\gamma/2), \quad \kappa_{2s}^* = \Omega_s^{-1}\Omega_{Hs}\sin(\gamma/2), \quad \kappa_{3s}^* = \Omega_s^{-1}\Omega_{Es}\sin(\gamma/2)$$

$$\Omega_{Ns} = \Omega_N(t_s), \quad \Omega_{Hs} = \Omega_H(t_s), \quad \Omega_{Es} = \Omega_E(t_s)$$

$$\Omega_s = (\Omega_{Ns}^2 + \Omega_{Hs}^2 + \Omega_{Es}^2)^{1/2}, \quad \gamma = \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \Omega_s(t)dt$$

5. Результаты математического моделирования алгоритмов ориентации сверхбыстрого и быстрого циклов. Точность определения инерциальной ориентации объекта в основном определяется точностью алгоритмов сверхбыстрого и быстрого циклов. Поэтому приведем результаты моделирования этих алгоритмов, выполненного Л.А. Челноковой.

Были оценены методические погрешности

$$\Delta\psi = |\psi_в - \psi_т|, \quad \Delta\vartheta = |\vartheta_в - \vartheta_т|, \quad \Delta\gamma = |\gamma_в - \gamma_т|$$

определения углов ориентации ψ, ϑ, γ объекта (курса, тангажа и крена) по алгоритмам сверхбыстрого и быстрого циклов при наличии гармонических колебаний объекта по каждой из угловых переменных для малых ($\psi_+ = 1$ град, $\vartheta_+ = 2$ град, $\gamma_+ = 3$ град) и больших ($\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град) амплитуд угловых гармонических колебаний объекта. Угловые частоты колебаний в обоих случаях полагались равными: $\omega_\psi = \omega_\gamma = 2\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = \pi$ рад/с (частоты колебаний: $f_\psi = f_\gamma = 1$ Гц, $f_\vartheta = 0.5$ Гц). При определении ориентации объекта по одношаговому алгоритму ориентации третьего порядка точности [11, 13] (без разделения алгоритма определения ориентации на сверхбыстрый и быстрый циклы) шаг интегрирования выбирался равным от 0.0005 с до 0.1 с. При определении ориентации объекта по алгоритмам сверхбыстрого и быстрого циклов шаг h сверхбыстрого цикла интегрирования выбирался равным 0.0005 с или 0.001 с. Время движения объекта (интегрирования) – 600 с.

Анализ результатов моделирования позволил сформулировать следующие выводы.

1. Использование в алгоритмах ориентации сверхбыстрого цикла приближенной формулы (4.6) сложения конечных поворотов, описываемых кватернионами $\mathbf{x}_i$, второго порядка точности приводит к потере точности определения ориентации объекта на два-четыре порядка, в то время как использование приближенной формулы сложения конечных поворотов третьего порядка точности (4.7) дает практически ту же точность, что и точная (но более сложная) формула (4.8) сложения конечных поворотов.

2. Реализация алгоритма сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (4.5), (4.8) или (4.5), (4.7) с тем же шагом интегрирования, что и традиционная реализация одношагового алгоритма ориентации третьего порядка точности (без разделения на быстрый и сверхбыстрый циклы), дает, как и следовало ожидать, ту же точность определения ориентации, что и традиционная реализация.

3. Упрощенный одношаговый алгоритм сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (4.4), (4.8) или (4.4), (4.7) дает точность на порядок меньшую, чем неупрощенный одношаговый алгоритм сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (4.5), (4.8) или (4.5), (4.7) (точность по углам ψ и γ меньше на полтора порядка).

4. Уменьшение шага сверхбыстрого цикла в два раза увеличивает точность определения ориентации в пять-восемь раз.

5. Упрощенный одношаговый алгоритм сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (4.4), (4.7) имеет точность определения инерциальной ориентации объекта, превосходящую точность алгоритма Сэвейджа (4.9), реализующего интегрирование кинематического уравнения Борца, более чем на полтора-два порядка, а неупрощенный одношаговый алгоритм сверхбыстрого цикла третьего порядка точности (4.5), (4.7) — более чем на два-четыре порядка (для больших амплитуд угловых колебаний объекта и шага $h = 0.001$ с.).

Для больших амплитуд угловых колебаний объекта и шага $h = 0.0005$ с точность алгоритма Сэвейджа сопоставима с точностью алгоритма (4.4), (4.6). Методические погрешности алгоритма Сэвейджа по переменным ψ, ϑ и γ в этом случае составляют величины (в градусах) $7.27 \cdot 10^{-4}$, $7.11 \cdot 10^{-5}$ и $1.11 \cdot 10^{-3}$ соответственно, а алгоритма (4.4), (4.6) — величины $3.27 \cdot 10^{-4}$, $1.98 \cdot 10^{-4}$ и $7.01 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Вместе с тем точность алгоритма (4.5), (4.7) для этого случая движения объекта гораздо выше и составляет величины (в градусах) $7.12 \cdot 10^{-8}$, $3.42 \cdot 10^{-7}$ и $1.05 \cdot 10^{-7}$ соответственно.

Авторы благодарят Л.А. Челнокову за проведенный большой объем математического моделирования алгоритмов ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига—Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11—20.
2. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Сравнительный анализ точности алгоритмов определения ориентации объекта в параметрах Родрига—Гамильтона и направляющих косинусах // Космич. исслед. 1979. Т. 17. Вып. 3. С. 371—377.
3. *Челноков Ю.Н., Петров С.В.* О задачах ориентации и навигации объекта в географической и ортодромической системах координат. Деп. в ВИМИ 27.05.88, № Д07701. 21 с.
4. *Челноков Ю.Н., Челнокова Л.А., Ланденок И.В.* Алгоритм идеальной работы системы ориентации для подвижного объекта // Вопросы авиационной науки и техники. Сб. тр. М. 1988. Вып.10. С. 57—65.
5. *Челнокова Л.А., Челноков Ю.Н.* Моделирование работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы, определяющей ориентацию объекта в ортодромической и географической системах координат, на универсальных ЭВМ. Сарат. политехн. ин-т. Саратов, 1988. Деп. в ВИНИТИ 11.05.88, № 3763—В88. 21 с.
6. *Челнокова Л.А, Челноков Ю.Н.* Моделирование работы БИНС на универсальных ЭВМ. Сарат. политехн. ин-т. Саратов, 1989. Деп. в ВИНИТИ 13.06.89, № 3909—В89. 15 с.
7. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
8. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Новые уравнения и алгоритмы ориентации БИНС в четырехмерных кососимметрических операторах // Сб. тез. докл. 14-й Междунар. научн. конф. “Системный анализ, управление и навигация”. М: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 35—36.
9. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Дифференциальные кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в четырехмерных кососимметрических операторах и новые алгоритмы ориентации БИНС // Матер. Всеросс. научн. конф. с междунар. участием “Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении”. Саратов: ООО Изд. центр “Наука”, 2013. С. 315—320.
10. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е.* Новые уравнения и алгоритмы ориентации и навигации БИНС в четырехмерных кососимметрических операторах // *XXI* Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ “Электроприбор”, 2014. С. 308—312 = *Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E.* New equations and algorithms for orientation and navigations of SDINS with four-dimensional skew-symmetric operators // 21th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 — Proceedings. St Petersburg: SRC RF CSRI “Elektropribor”, 2014. P. 365—369.

11. *Переляев С.Е., Челноков Ю.Н.* Новые алгоритмы определения инерциальной ориентации объекта // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 778–789. = *Perelyayev S. E., Chelnokov Yu. N.* New algorithms for determining the inertial orientation of an object // J. Appl. Math. Mech. 2014. V. 78. № 6. P. 560–567.
12. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Сверхбыстрый, быстрый и медленный циклы алгоритмов ориентации БИНС // XXII Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2015. С. 220–224. = *Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E., Chelnokova L. A.* Ultrafast, fast and slow loops in orientation algorithms for strapdown INS // 22th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015 – Proceedings. St Petersburg: SRC RF CSRI "Elektropribor", 2015. P. 240–244.
13. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. 2016. Т. 16. Вып. 1. С. 80–95.
14. *Челноков Ю.Н.* Уравнения кинематики твердого тела в четырехмерных кососимметрических операторах и их приложения в инерциальной навигации // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 6. С. 525–540.
15. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
16. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
18. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1970 = *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
19. *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Физматгиз, 1966. 579 с.
20. *Захарин М.И., Захарин Ф.М.* Кинематика инерциальных систем навигации. М.: Машиностроение, 1968. 236 с.
21. *Бромберг П.В.* Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 296 с.
22. *Анучин О.Н., Емельянцев Г.И.* Бесплатформенные инерциальные системы навигации и ориентации (БИНС И БИСО). Учебн. пособие. СПб.: ИТМО, 1995. 110 с.
23. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М.: МФТИ, 2009. 304 с.
24. *Матвеев В.В., Распопов В.Я.* Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Учебн. пособие для специальности "Приборостроение". СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2009. 280 с.
25. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
26. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
27. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst. 1971. AES-7. № 1. P. 61–66.
28. *Панов А.П.* О выборе кинематических параметров и уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ // Киберн. вычисл. техн. 1984. Вып. 62. С. 104–111.
29. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наукова думка, 1995. 279 с.
30. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms // J. Guidance Control Dynamics. 1998. V. 21. № 1. P. 19–28.

ООО "Аэроспецпроект",
Жуковский
Институт проблем точной механики и управления РАН,
Саратов
e-mail: pers2030@yandex.ru
chelnokovyun@gmail.com

Поступила в редакцию
15.X.2016