Test lab 1 şi 2

Băditţă Marin-Georgian - gr 231

testerr2

Problema 1

Dupa o analiză detaliată a graficului de mai jos, se observă că apelul funcţiei *Higham* (definită în enunţul problemei) pentru vectorul x, conduce la un rezultat foarte diferit faţă de vectorul iniţial, grupând elementele vectorlului x în drepte. Mai mult decât atât, numerle din fiecare interval de forma $[e^k, e^{k+1}), k \in \mathbb{N}$ se află aceeaşi dreaptă.

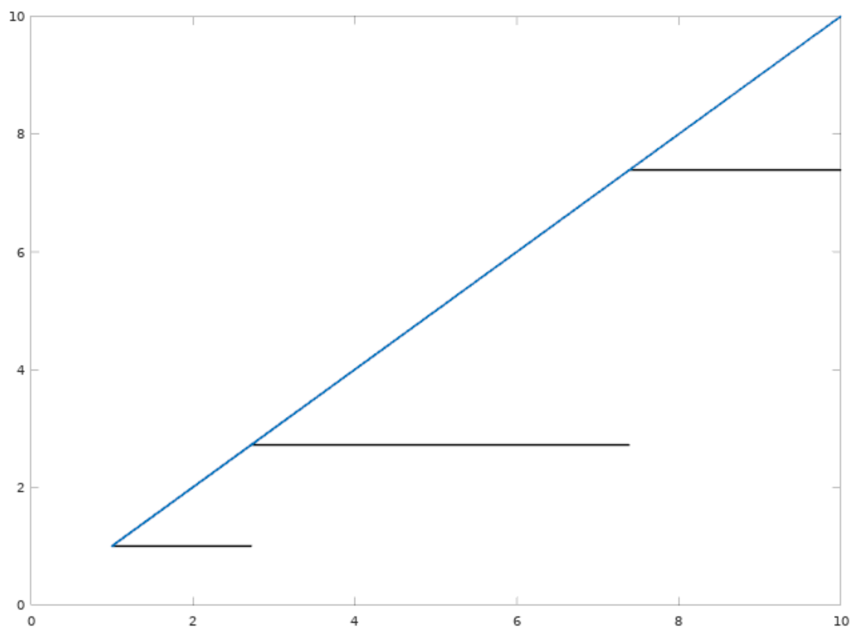

Figure 1: Higham plot

Pentru a simplifica analiza problemei am împărţit funcţia *Higham* în 2 funcţii, *h_sq(x)* care aplică ridicare la putere de 52 de ori şi *h_rt(x)* care aplică radical de 52 de ori.

```
function x = h_sq(x):
    for i = 1:52
        x = x.^2;
    end

function x = h_rt(x):
   for i = 1:52
       x = sqrt(x);
   end

function x = Higham(x):
    x = h_rt(x);
    x = h_sq(x);
```

Pentru rezolvarea problemei, plecăm de la următoarea lemă: fie $x \in \mathbb{F}, x > 0$, atunci $fl(\sqrt{fl(x^2)}) = x$ [1].

Fie $x > 0, x \in \mathbb{F}$ şi $x_{k+1} = fl(x_k^2)$, $k = 0, 1, \ldots, 52$. În continuare avem

$$x_{52} = h\_sq(x_0)$$

Apoi $h\_rt(x_{52})$ generează şirul următor:

$$x_{52} \to \sqrt{x_{52}} = fl(\sqrt{fl(x_{51}^2)}) \overset{lema}{=} x_{51} \to \sqrt{x_{51}} = fl(\sqrt{fl(x_{50}^2)}) = x_{50} \to ... \to x_0$$

Deci

$$h\_rt(x_{52}) = x_0 \Rightarrow x_0 = h\_rt(h\_sq(x_0))$$

Ceea ce implică că

$$Higham(h\_sq(x_0)) = h\_sq(h\_rt(h\_sq(x_0))) = h\_sq(x_0)$$

Prin urmare punctele fixe ale funcţiei $Higham$ sunt punctele de forma

$$h\_sq(0) = 0, h\_sq(1 + k * eps), k = -745, -744 \ldots, 709$$

Ca şi ultimă observaţie, dacă $x \in \mathbb{F}$ satisface inegalitatea: $h\_sq(1 + k * eps) \leq x < h\_sq(1 + (k + 1) * eps)$ atunci $Higham(x) = h\_sq(1 + k * eps)$

Problema 2

Pentru rezolvarea problemei 2, am început prin a face câteva comparaţii, aşa încât să putem răspunde la întrebarea: *"Ne asigură MATLAB suficientă previzie pentrua determina efectul relativist al unui vehicul ce se mişcă cu v = 100.000 km/h?"*.

```
>> lorentzTest(100000);
approx_matlab =  1.00000000429263
approx_taylor_O4 =  1.00000000429263
approx_taylor_conv =  1.00000000429263
approx_vpa =  1.00000000429263
err_matlab = 0
err_taylor_O4 = 0
err_taylor_conv = 0
```

Figure 2: Error results

După cum se poate observa, în figura de mai sus, MATLAB ne asigură destulă precizie pentru a reprezenta rezultaul efectului relativist pentru un obiect cu v = *100000 km/h* (evident această valoare a fost transformată în prealabil in m/s), deoarece diferenţa dintre rezultatul calculat utilizând *vpa* cu 1000 de zecimale (convertit la double) şi rezultaul calculat de MATLAB este 0. Pe de altă parte, se observă convergenţa rapidă a seriei Taylor, obţinând o eroare nulă pentru o valoare a lui v = *100000 km/h*. De asemenea polinomul Taylor de grad 2 pentru $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ obţine acelaşi rezultat ca şi seria Taylor calculată până la precizia maşinii. Având în vedere convergenţa foarte rapidă a seriei putem reprezenta bine factorul Lorentz având cifrele semnificative ale lui v. Fişierul $lorentzTest.m$ conţine calculul factorului Lorentz, prin 4 metode: calcul simplu MATLAB, folosind polinomul Taylor de grad 2, folosind seria Taylor calculată până la precizia maşinii şi folosind *vpa cu 1000 de zecimale* din MATLAB. De asemenea, tot în acest fisier avem şi calculul erorii pentru fiecare dintre aceste metode. În fişierele $lorentzTaylorCov.m$ şi $lorentzTaylorDeg3.m$ sunt calculate seriile Taylor până la precizia maşinii, respectiv polinomul Taylor de grad 2 pentru factorul Lorentz. De easemean ca şi ultimă observaţie, folosind MATLAB vom obţine rezultate cu precizia masinii în double representation 53 de biţi.

References

[1] Boldo, S., 2015. Stupid is as stupid does: Taking the square root of thesquare of a floating-point number. Seventh and Eighth International Workshop on Numerical Software Verification URL: `https://hal.inria.fr/hal-01148409/document`.