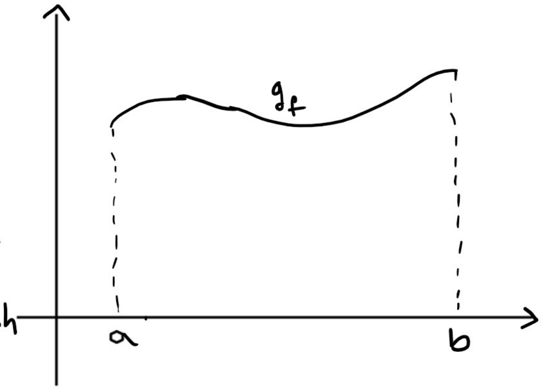
Explicație Cuadraturi Gauss.

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

Folosind metoda dreptunghiurilor în cea mai simplă formă, cu $h = \frac{b-a}{4}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)\cdot h + f(x_2)\cdot h + f(x_3)\cdot h + f(x_4)\cdot h$$



Cuadraturile Gaussiene ne ajută să găsim inteligent valori w_i, x_i așa încât

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(x_i) \quad (1)$$

P.P. cazul cu $n=4$ și intervalul $[-1,1]$, vrem să aproximăm exact $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, având w_1, w_2, w_3, w_4, aplicând (1)

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + w_3 f(x_3) + w_4 \cdot f(x_4)$$ (este o pb liniară în raport cu f) (2)

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2; \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}; \quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

Pentru a calcula precis integralele de mai sus, folosind (2), impunem sistemul

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Obs că A - Vandermond $\Rightarrow$ prost condiționată (cum aș putea evita folosirea ei?)

Rezolvarea sist de mai sus, ne oferă ponderile w_i, pentru aflarea valorilor x_i, considerăm cazul folosirii polinoamelor Legendre.

Având polinomul $P(x)$, gradul lui $P(x) = 2n-1$

Împărțim $P(x)$ la $L_n(x) \Rightarrow P(x) = q_{n-1}(x) \cdot L_n(x) + r_{n-1}(x)$

Integrând ambii membrii obținem: $\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} \overbrace{q_{n-1}(x) \cdot L_n(x)}^{\text{ortogonalitate}}\,dx}_{(4)} + \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)\,dx$.

Alegem punctele x_i, să fie rădăcinile polinomului $L_n(x)$, așa încât $(4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)\,dx$ (5). Având punctele x_i, putem calcula ponderile w_i, rezolvând (3). Având x_i, w_i putem calcula exact (5).

! Nu am înțeles exact cum să folosim matricea Jacobi pt a calcula rădăcinile lui $L_n(x)$ și nu sunt nici sigur dacă intuiția mea asupra cuadraturilor Gaussiene este corectă.