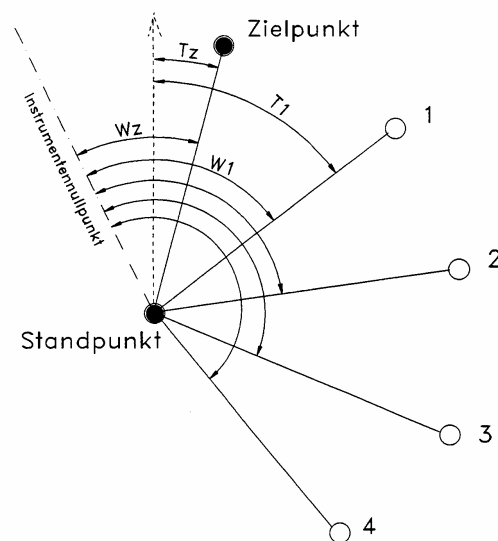


Vermessungskunde und Photogrammetrie
für Bauingenieure



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Definition des Begriffes "Vermessungskunde"	5
1.2	Aufgaben und Zweck des Vermessungswesens	5
1.3	Historischer Überblick	6
1.4	Bezugsflächen	7
1.4.1	Das Geoid	7
1.4.2	Das Ellipsoid	8
1.4.3	Die Kugel	8
1.4.4	Die Ebene	9
1.5	Maßeinheiten	10
1.5.1	Längenmaße	10
1.5.2	Winkelmaße	10
1.5.3	Umrechnung von Gradmaßen (gon) ins Bogenmaß	11
2	Koordinatensysteme	12
2.1	Allgemeine Betrachtungen zur Wahl eines Koordinatensystems	12
2.2	Ebene Koordinatensysteme	13
2.2.1	Mathematische Definitionen	13
2.2.2	Geodätische Definitionen	13
2.3	Sphärische Koordinatensysteme auf der Kugel	14
2.3.1	Geographisches Koordinatensystem	14
2.3.2	Geographische Soldner-Koordinaten	14
2.4	Abbildung sphärischer Koordinaten in die Ebene	15
2.4.1	Ordinantentreue Abbildung der Kugel in die Ebene - Ebene Soldnerkoordinaten	15
2.4.2	Konforme Abbildung der Kugel in die Ebene - Gauß-Krüger-Koordinaten	16
3	Koordinatenbestimmung	18
3.1	Messelemente zur Koordinatenbestimmung	18
3.1.1	Horizontalwinkel	18
3.1.2	Vertikalwinkel	18
3.1.3	Horizontalstrecke	19
3.2	Winkelmessung	20
3.2.1	Der Theodolit	20
3.2.2	Libellen	21
3.2.3	Die Theodolitenfehler	23
3.3	Streckenmessung	25
3.3.1	Mechanische Streckenmessung mit Stahlmessbändern	25
3.3.2	Elektronische Entfernungsmessung	25
3.4	Elektronische Tachymeter	28
3.5	Grundaufgaben der ebenen Koordinatenbestimmung	30
3.5.1	Mathematische Grundlagen	30
3.5.2	Punktbestimmung mittels Polygonzügen (mehrfaches polares Anhängen)	31
3.5.3	Berechnung von Kleinpunkten	33
4	Lagemessungen in Detailausschnitten der Erdoberfläche	36
4.1	Aufzunehmende Gegenstände	36
4.2	Verfahren zur Lageaufnahme	37
4.2.1	Einbindeverfahren	37
4.2.2	Polarverfahren	37
4.2.3	Orthogonalverfahren	38
4.3	Vergleich der drei Verfahren	38
5	Höhenbestimmung	39
5.1	Höhensysteme und Bezugsflächen	39

5.2	Instrumente und Verfahren der Höhenbestimmung	40
5.2.1	Das Nivellier	40
5.2.2	Das geometrische Nivellement	42
5.2.3	Einfaches Liniennivellement, Feldarbeiten und Auswertung	43
5.2.4	Flächennivellement	44
5.2.5	Prüfung und Berichtigung eines Nivellierinstruments (Justierung)	45
5.3	Moderne Nivelliergeräte	47
5.3.1	Nivelliere mit CCD Sensortechnik	47
5.3.2	Trigonometrische Messung von Höhenunterschieden	49
6	Höhenaufnahmen von Teilgebieten der Erdoberfläche	52
6.1	Längs- und Querprofile	52
6.1.1	Aufnahme des Längsprofils	52
6.1.2	Aufnahme der Querprofile	54
6.2	Das Flächennivellement	54
6.2.1	Aufnahme eines Flächennivellements durch Profile	55
6.2.2	Flächennivellement mit Polaraufnahme	55
6.2.3	Abstecken eines Quadratnetzes (Rost)	55
6.3	Ausarbeitung des Höhenlinienplanes	56
6.3.1	Rechnerisches Verfahren	56
6.3.2	Zeichnerisches Verfahren	56
7	Fehlerlehre	57
7.1	Aufgaben der Fehlerlehre	57
7.2	Fehlerarten	57
7.3	Definitionen und Genauigkeitsmaße	57
7.4	Fehlerfortpflanzung	59
7.4.1	Das "ABC" der Fehlerfortpflanzung	59
7.4.2	Fehlerfortpflanzungsgesetz für wahre Fehler	61
7.4.3	Fehlerfortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler	61
7.4.4	Gewichtung von Messgrößen und das Gewichtsfortpflanzungsgesetz	63
7.4.5	Gewichtsfortpflanzungsgesetz	65
7.5	Die praktische Berechnung von mittleren Fehlern aus Beobachtungsreihen	66
7.6	Formelzusammenstellung	70
7.7	Einige Aufgaben zur Fehlerlehre	73
8	Flächen- und Massenberechnung	76
8.1	Graphische Flächenbestimmung	76
8.1.1	Flächenbestimmung mit dem Anlegemaßstab	76
8.1.2	Flächenbestimmung mit dem Polarplanimeter	77
8.2	Halbgraphische Flächenbestimmung	80
8.3	Flächenbestimmung aus Feldmaßen	80
8.3.1	Zerlegung in Dreiecke	80
8.3.2	Berechnung aus rechtwinkligen Koordinaten	81
8.4	Massenberechnungen	82
8.4.1	Das Querschnittverfahren	82
8.4.2	Das Höhenschichtlinienverfahren	82
8.4.3	Das Prismenverfahren	82
9	Absteckungen	84
9.1	Absteckungen von Gebäuden	84
9.2	Absteckungen von langen Geraden	86
9.2.1	Abstecken einer langen Geraden bei gegenseitig sichtbaren Endpunkten	86
9.2.2	Allmähliches Vortreiben einer langen Geraden (Tunnelabsteckung)	86
9.2.3	Absteckung einer Geraden, deren Endpunkte gegenseitig nicht sichtbar bzw. unzugänglich sind	86
9.3	Absteckungen von Kreislängen	87
9.3.1	Absteckung der Hauptpunkte	87
9.3.2	Absteckung der Kleinpunkte	90

10	Positionsbestimmung mit Satellitenverfahren.....	94
10.1	Grundlagen	94
10.2	Satellitenbahnen	94
10.3	Bezugssysteme	95
10.4	Das Global Positioning System - GPS	95
10.4.1	Bestandteile des Systems	96
10.4.2	Signalstrukturen	97
10.4.3	Militärische Vorbehalte	97
10.4.4	Messgrößen.....	98
10.4.5	Codephasen Messung.....	98
10.4.6	Trägermischphase Messung.....	98
10.4.7	Punktbestimmung	99
10.4.8	Fehlereinflüsse bei der Pseudostreckenmessung.....	99
10.4.9	Geodätische Meßverfahren	100
11	Photogrammetrie.....	102
11.1	Geschichte der Photogrammetrie	102
11.2	Vorteile und Grenzen der Photogrammetrie	102
11.3	Messkammer	103
11.4	Einbildphotogrammetrie	103
11.4.1	Radiale Versetzung.....	103
11.4.2	Entzerrung	104
11.5	Mehrbildphotogrammetrie	105
11.5.1	Stereoskopisches Sehen.....	105
11.5.2	Bildtrennung.....	105
11.6	Orientierungsvorgänge	106
11.6.1	Innere Orientierung	106
11.6.2	Relative Orientierung.....	107
11.6.3	Absolute Orientierung.....	107
11.7	Zusammenfassung	107
11.8	Anwendungen der Photogrammetrie	107
12	Geoinformationssysteme GIS.....	109
12.1	Einführung	109
12.2	Theorie	109
12.2.1	Datenstrukturen.....	109
12.2.2	GIS Systemarchitekturen	110
12.2.3	Datenbanktechnologie.....	111
12.3	GIS Funktionalitäten	112
12.3.1	Selektionsfunktionen.....	113
12.3.2	Analysefunktionen.....	113
12.3.3	Topologiefunktionen.....	113
12.4	GIS Daten	113
12.4.1	Basisdaten der Vermessungsverwaltungen.....	113
12.5	Literatur	114
13	Liegenschaftskataster und Bodenordnung	115
13.1	Liegenschaftskataster	115
13.2	Bodenordnung	116

1 Einführung

1.1 Definition des Begriffes “Vermessungskunde”

Der Begriff Vermessungskunde wird im allgemeinen Sprachgebrauch umfassend als die Lehre von der Ausmessung der Erdoberfläche und ihrer Veränderungen sowie der Darstellung der Ergebnisse in Karten, Plänen und Zahlenwerken interpretiert.

Der Begriff wird in die Gebiete

- a) Erdmessung,
- b) Landesvermessung,
- c) Land- oder Feldvermessung

unterteilt.

Die frühere Unterscheidung in

Höhere Geodäsie (a und b) und
Niedere Geodäsie (c)

ist heute kaum noch gebräuchlich.

Man bevorzugt die dem englischen Sprachgebrauch nach folgende Trennung in
Geodäsie (geodesy) und
Vermessung (surveying).

Zu vermessende Objekte sind z.B.

die Erdgestalt,
die Erdoberfläche,
Grundstücke,
Bauwerke über und unter Tage,
etc..

Die Darstellung in Karten und Plänen ermöglicht - je nach Maßstab- eine anschauliche, übersichtliche Gesamt- und/oder Detaildarstellung. Zahlenwerke sind eine 1:1 Abbildung des Vermessungsobjektes in abstrakter Form. Sie erlauben eine Rekonstruktion des Objekts im Rahmen des vorhandenen Zahlenmaterials.

1.2 Aufgaben und Zweck des Vermessungswesens

Die Aufgabe gliedert sich in 2 Hauptbestandteile:

1. Aufnahme
2. Absteckung

Die *Bestandsaufnahme* im weitesten Sinne gab den wesentlichen Anstoß für die Entwicklung der Vermessungskunde.

- Kataster - Bestandsaufnahme des Grundbesitzes zu Steuerzwecken und zur Eigentumssicherung
- topographische Bestandsaufnahme der physischen Erdoberfläche für die Herstellung von Karten zur Navigation etc.
- Bestandsaufnahme der Erdfigur (alte Bez.: Höhere Geodäsie)

Die *Absteckung* gliedert sich in die Problemkreise:

- Rekonstruktion aufgenommener Objekte,
- Übertragung geplanter Objekte in die Natur, auf der Grundlage der Bestandsaufnahme.

Bsp.:

- Grenzabsteckung
- Grenzwiederherstellung
- Bauwerksabsteckung

Zwecke der Vermessung:

- 1.) Erfassung und Darstellung der Eigentumsverhältnisse
 - für die Veranlagung zur Grundsteuer
 - zur Sicherung des Eigentums (Grundbuch)
 - als Grundlage für die Neuordnung der Eigentumsverhältnisse
 - (Flurbereinigung, Baulandumlegung, Sanierung etc.)
- 2.) Erfassung und Darstellung des Bebauungszustandes und der Geländegestaltung für Planungszwecke aller Art, wie z.B. :
 - Straßenbau, Wasserbau, Eisenbahnbau, Wasserversorgung
 - Energieversorgung, Gas, Elektrizität, (Leitungskataster)
 - Städtebau, Siedlungsbau
 - Bergbau, Geologie
 - Schifffahrt
 - Statistik (Landschaftsverbrauch, Bevölkerungsdichte etc.)
 - Landwirtschaft (Bodenschätzung, -güte)
 - Wirtschaft (Grundstücksverkehr, Hypotheken)
 - Bauabsteckung und Baukontrolle
 - Staumauern, Brücken, Türme etc.
 - Landinformationssysteme
- 3.) Erfassung und Bestimmung der physikalischen Figur der Erde mittels Satelliten (Satellitengeodäsie) bzw. Präzisionsbeobachtungen, wie z.B. :
 - Krustenbewegungen auf der Erdoberfläche
 - Erdbebenprognose
 - Hebung der Alpen
 - Einrichtung globaler Navigationssysteme

1.3 Historischer Überblick

Vermessungen bei den verschiedenen Darstellungen der Erde

- als Scheibe
- als Halbkugel
- als Kugel (erste Bestimmung des Kugelradius durch Eratosthenes 202 v. Chr.)
- geozentrisches und heliozentrisches Weltsystem, Erddrehung (Kopernikus)
- Newton
- Gradmessungen

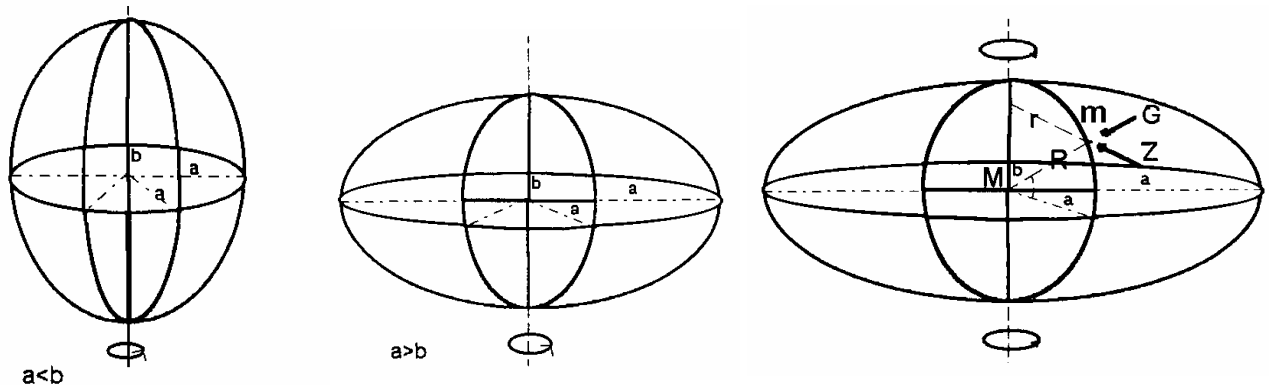
a) Bestimmung des Erdradius durch Eratosthenes (276-195 v.Ch)

Eratosthenes war bekannt, dass in Syrene (Assuan) zur Sommersonnenwende die Sonnenstrahlen senkrecht in einen Brunnen fallen, wogegen sie in Alexandria, das fast auf demselben Meridian liegt, einen Winkel mit der Lotrichtung bilden. Die Entfernung Syrene-Alexandria schätzte er aus der Kamelreisezeit.

Genauigkeit: der Winkelmessung = 5 %
 der Entfernungsmessung = 10 %
 und damit des Radius = 16 %

b) Abplattung der Erde

Ein bedeutendes Problem der Geowissenschaften im 17. Jahrhundert war die Betrachtung der Erde als Rotationskörper unter Berücksichtigung dynamischer Aspekte



Lösung durch Newtonsches Gravitationsgesetz:

Abplattung der Erde

$$G = -c \cdot \frac{m \cdot M}{R \cdot R} \quad (G = \text{Gravitationskraft}, c = \text{Gravitationskonstante})$$

$$z = m \cdot r \cdot \omega^2 \quad (z = \text{Zentrifugalkraft}, \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit})$$

G ist für eine rotierende Kugel mit homogener Massenbelegung vom Mittelpunktabstand abhängig. Symmetrie!

$$z = m \cdot R \cdot \cos \varphi \cdot \omega^2$$

Die Zentrifugalkraft ist also von der geographischen Breite abhängig.

$$z(\text{Pol}) = 0 \quad \text{mit } \varphi = 90^\circ$$

$$z(\text{Äqu.}) = m \cdot R \cdot \omega^2 \quad \text{mit } \varphi = 0^\circ$$

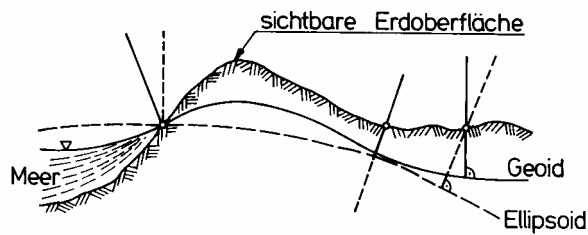
Die Gesamtkraft auf ein Masseteil ist am Pol größer als am Äquator (d.h. die Gravitationskraft wird am Äquator um die Zentrifugalkraft gemindert, so dass mit wachsendem ω ein zunehmendes Auseinanderstreben der Erdmasse zu erwarten ist).

1.4 Bezugsflächen

1.4.1 Das Geoid

Zur Darstellung von Objekten verwendet man mathematische und physikalische Modelle, die eine der Aufgabenstellung entsprechend genaue Objektbeschreibung gewährleisten. In der Geodäsie benötigt man demzufolge Bezugsflächen, die der Erdfigur möglichst nahe kommen und mathematisch gut erfassbar sind.

Als Erdfigur betrachtet man die zu den Lotlinien senkrecht verlaufende Niveaulfläche, die mit dem in Ruhe befindlichen Meeresspiegel zusammenfällt und die man sich unter den Kontinenten fortgesetzt denken kann: **das Geoid**. Die Niveaulfläche des Geoids ist somit eine Gleichgewichtsfläche. Auf dieser Fläche fließt kein Wasser.

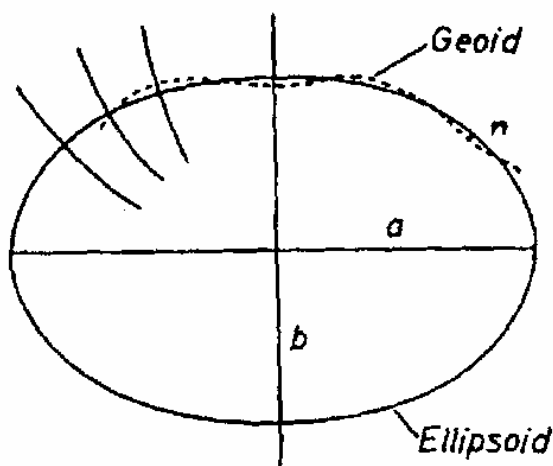


heterogenen Massenverteilungen in der Erde nicht parallel.

Das Geoid wird als physikalische Figur der Erde betrachtet. Die Meeresoberfläche stellt sich nach Maßgabe der Schwerkraft ein. Aufgrund der unregelmäßigen Massenverteilung der Erde ist das Geoid keine regelmäßige Fläche und damit als mathematische Bezugsfläche ungeeignet.

Andere Niveaulächen sind wegen der

1.4.2 Das Ellipsoid



Da das Geoid keine mathematisch definierte Fläche ist, sind strenge Berechnungen auf diesem nicht möglich. Aus diesem Grunde wählt man für Lagebestimmungen je nach Ausdehnung des Bearbeitungsgebietes mathematische Bezugsflächen wie das **Rotationsellipsoid**, die (Schmiegungs-) **Kugel** oder die **Tangentialebene**.

Neben der mathematischen Erfassbarkeit fordert man für eine Bezugsfläche, dass sie dem Geoid möglichst nahekommt, eine solche Fläche ist **das Ellipsoid**.

Beim Ellipsoid sind die Lotrichtungen gekrümmt und konvergent. Das von der I.U.G.G. (Internationale Union für Geodäsie und Geophysik) 1987 festgelegte Umdrehungsellipsoid weist Abweichungen von weniger als 80 m zum Geoid auf und ist wie folgt festgelegt:

Äquatorhalbmesser	a	=	6 378 137 m
Abplattung	f	=	1 / 298,25

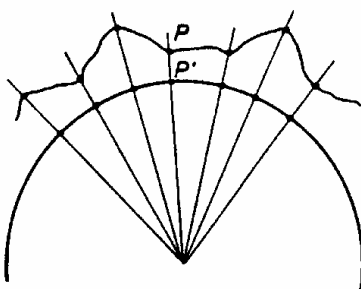
Damit erhält man für den

Polhalbmesser	b	=	6 356 751 m
und für die Differenz	$a-b$	etwa	21,4 km.

Die Drehachse ist also nur rund 3‰ kürzer als die Äquatorachse.

Anwendung findet das Rotationsellipsoid bei Bezugsflächen größerer Länder (z.B. die Bundesrepublik Deutschland).

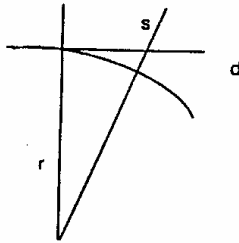
1.4.3 Die Kugel



Man kann für die Vermessung kleinerer Länder die komplizierten Berechnungen auf dem Ellipsoid vermeiden, indem man eine Kugel als **Approximationsfläche** benutzt, die sich im Messgebiet möglichst eng an das Geoid anpasst (**Schmiegungskugel**). Mit Hilfe der konvergenten, aber nun geraden Lotlinien kann man Erdoberflächenpunkte P auf die Bezugskugel projizieren und die an der Erdoberfläche gewonnenen Messdaten so umrechnen, als ob sie auf der Kugeloberfläche gewonnen worden wären.

1.4.4 Die Ebene

Wenn das Vermessungsgebiet **kleiner als 10x10 km** bleibt, reicht im Allgemeinen eine Ebene (**Tangentialebene**) als Bezugsfläche für die Lagemessungen aus. In diesem Fall gilt die Modellvorstellung, dass die Lotlinien parallele Geraden sind.



Da die Richtung der Projektion auf die Bezugsfläche und die physikalische Lotrichtung nicht übereinstimmen, treten bei jeder Projektion Strecken- und Winkelverzerrungen auf. Die Bezugsflächen sind daher so zu wählen, dass die **Verzerrungen** hinreichend **klein bleiben**. Für die Ebene ist dies bei einem Vermessungsgebiet von kleiner als 10x10 km im Hinblick auf die Lage erfüllt. Für die Höhenmessung ist dies nicht der Fall.

Für $s = 1\text{ km}$ und $r = 6370\text{ km}$ erhält man $d = 8\text{ cm}$. Das ist der Abstand zwischen Berührungsebene und Kugel, welcher mit dem Quadrat der Entfernung wächst.

s [km]	1	2	2	5	10
d [m]	0,08	0,31	0,71	1,96	7,85

Diese Fehler sind zu groß, um sie bei der Modellwahl vernachlässigen zu können. Wir werden daher für die Höhenmessung die Kugel bzw. das Geoid und für die Lagemessung je nach Anwendungszweck folgende Flächen als Bezugsflächen verwenden:

- Kleinvermessung: Erde kann als **eben** betrachtet werden (einige km Gebietsausdehnung)
- Landesvermessung: Erde kann nicht mehr als eben, jedoch als **Kugel** betrachtet werden (kleinere Länder; $< 100\text{ km}$). Wenn die Abweichung der Erdgestalt von der Kugel nicht mehr zu vernachlässigen ist, dann muss auf das **Ellipsoid** übergegangen werden (gesamte Erde und Erdteile; $> 100\text{ km}$)
- Erdmessung: Erdgestalt ist Gegenstand der Vermessung, **Geoid**

1.5 Maßeinheiten

Gemessen werden:

Strecken,

Winkel (Richtungen),

Höhen,

Zeit (astron. Geodäsie).

In der Bundesrepublik Deutschland gilt das SI-System ("Systeme International d'Unités"). Eingeführt kraft Gesetz über die Einheiten im Messwesen v. 2.7.1979.

1.5.1 Längenmaße

Definition des Meters:

Alte Definitionen:	- Abstand der zwei mittleren Striche des Urmeters (Paris)
	- $\frac{1}{10\,000\,000}$ des Erdquadranten; (Der Erdumfang beträgt 40 000 km.)
Neue Definition:	1 650 763.73-faches der Wellenlänge der von den Atomen des Nuklids ^{86}Kr , eines Isotops des Edelgases Krypton mit der Masse 86, beim Übergang vom Zustand 5 d_5 zum Zustand 2 P_{10} ausgesandten Strahlung
Ältere Maße:	1 preuß. Fuß = 0.313853497m
	1 preuß. Linie = 2.26 mm
Englische Maße:	1 Yard = 3 Fuß = 0.91439180 m
	1 Fuß = 0.30479727 m
	1 Zoll = 1/12 Fuß = 0.02539977 m
	1 Furlong = 220 Yards = 660 Fuß = 201.16620 m
	1 Meile = 8 Furlong = 1760 Yards = 5280 Fuß = 1609.32960m
	= 63360 Zoll

1.5.2 Winkelmaße

Das Grad (engl. degree)

$1^\circ = 60' =$ Winkel zwischen 2 Radien eines Kreises, die vom Umfang des Kreises $1/360$ ausschneiden.

1 Minute = $1' = 60''$ (Sekunden)

Das Gon (engl., frz. Bez.: grade)

1 gon = 100 cgon (= 100 Centigon) = 1000 mgon (= 1000 Milligon) = Winkel zwischen 2 Radien eines Kreises, die vom Umfang des Kreises $1/400$ ausschneiden.

Das Bogenmaß

1 rad (Radiant) = der ebene Winkel, der zwischen 2 Radien eines Kreises mit dem Radius r entsteht, wenn der Radius r des Kreises auf seinem Umfang abgewickelt wird.

Somit: Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis des Bogens b zu seinem Radius r

$$\alpha = \frac{b}{r}$$

Bei astronomischen Messungen kommt oft die Umrechnung vom Zeitmaß ins Gradmaß vor:
 $360^\circ = 24 \text{ h}$ (1 Erddrehung in 24h).

$$\begin{aligned} 1 \text{ h} &= 15^\circ = 900' \Rightarrow 1^\circ = 4 \text{ min} \\ 1 \text{ min} &= 15' \Rightarrow 1' = 4 \text{ sec} \\ 1 \text{ sec} &= 15'' \Rightarrow 1'' = 1/15 \text{ sec} \end{aligned}$$

In der Literatur kommt noch häufig die alte Bezeichnung für Gon vor: *das Neugrad*.

$$\begin{aligned} 1 \text{ gon} &= 1 \text{ Neugrad} = 1^g \\ 1^g &= 100^c \text{ Neuminuten} \\ 1^c &= 100^{cc} \text{ Neusekunden} \quad \text{somit: } 10^{cc} = 1 \text{ mgon} \end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Grad (Altgrad) und Gon (Neugrad):

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 1.111... \text{ gon} & 1 \text{ gon} &= 0.9^\circ \\ 1' &= 1.851\,851\,851 \dots \text{ cg} & 1 \text{ cgon} &= 0.54' \\ 1'' &= 0.308641975 \dots \text{ mgon} & 1 \text{ mgon} &= 3.24'' \end{aligned}$$

1.5.3 Umrechnung von Gradmaßen (gon) ins Bogenmaß

Vermessungstechnisches Sonderzeichen: ρ (gr.: Rho)
 (ist der Winkel, dem die Bogenlänge 1 des Einheitskreises entspricht.)

$$\text{Es gilt: } \frac{4 \cdot \perp}{2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot \perp}{\pi} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} = \rho$$

somit: (lies: Rho in Grad etc.)

$$\begin{aligned} \rho (^\circ) &= 57.295779 & \rho (\text{gon}) &= 63.661977 \\ \rho (') &= 3437.7467 & \rho (\text{cgon}) &= 6366.1977 \\ \rho (') &= 206264.8 & \rho (\text{mgon}) &= 63661.977 \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt: } \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\alpha}{4 \cdot \perp}$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit 2 erhält man:

$$\frac{b}{r} = \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\text{somit: } b[\text{m}] = r[\text{m}] \cdot \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\alpha[^\circ] = \frac{b[\text{m}]}{r[\text{m}]} \cdot \rho[^\circ] \quad \text{oder: } \alpha[\text{gon}] = \frac{b[\text{m}]}{r[\text{m}]} \cdot \rho[\text{gon}] \quad \text{oder: } \alpha[\text{mgon}] = \frac{b[\text{cm}]}{r[\text{cm}]} \cdot \rho[\text{mgon}]$$

Betrachtung für kleine Winkel : $b \ll r$

$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ [Bogenmaß] und Bogenlängen für $r = 100\text{m}$

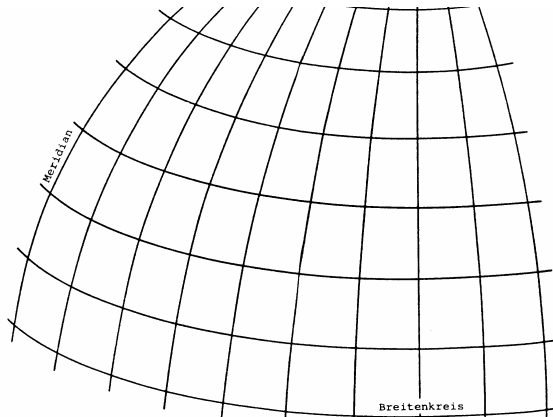
$$\begin{aligned} &b & b \\ 1^\circ: &1.75 \text{ m} & 1 \text{ gon: } 1.57 \text{ m} \\ 1': &2.9 \text{ cm} & 1 \text{ cgon: } 1.57 \text{ cm} \\ 1'': &0.48 \text{ mm} & 1 \text{ mgon: } 1.57 \text{ mm} \end{aligned}$$

2 Koordinatensysteme

2.1 Allgemeine Betrachtungen zur Wahl eines Koordinatensystems

Die Orientierung auf der rotierenden Erde erfolgt in einem Koordinatensystem, das durch die Umdrehungsachse der Erde und durch den Äquator gebildet wird. Die Definition des Koordinatenursprungs erfolgt willkürlich. Mit einem derartigen sphärischen System kann eine Orientierung gegenüber dem scheinbar ruhenden Fixsternhimmel erfolgen.

Für die Angabe der Lage werden zunächst geographische Koordinaten verwendet. Sie sind aber für praktische Bedürfnisse wenig geeignet, da sie mit unseren normalen Maßen, dem Metermaß, nicht ohne weiteres vergleichbar sind.



Für die praktische Vermessung führt man deshalb rechtwinklige Koordinaten ein. Um einen Punkt P festzulegen, zieht man durch P einen Großkreis auf der Kugel bzw. die entsprechende Linie (geod. Linie) auf dem Ellipsoid. Dieser Großkreis steht senkrecht auf dem Meridian durch den Ausgangspunkt P. Der Abschnitt (nach Norden) auf dem Meridian ist die Abszisse x , die Länge des Kreisbogens (nach Osten positiv) die Ordinate y .

Betrachten wir zwei Punkte mit gleichem y , aber verschiedenem x , so sehen wir, dass die Großkreise bei P_1 , P_2 einen kleineren Abstand voneinander haben als auf dem Meridian. Der Unterschied ist aber im Allgemeinen klein, wenn wir das rechtwinklige System nicht weiter als etwa 100 km ausdehnen.

Es ist daher möglich, die rechtwinkligen Koordinaten auf der Kugel so zu betrachten, als ob sie rechtwinklige Koordinaten in der Ebene wären. Das vereinfacht die Rechnung sehr erheblich.

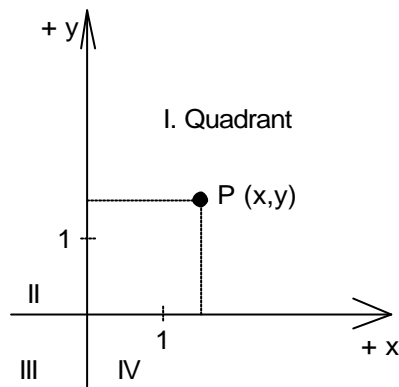
Im vorigen Jahrhundert hat man als Nullpunkte bedeutende Punkte des betreffenden Landes gewählt. Man findet die auf dieses System bezogenen Werte häufig noch in Katasterkarten oder als Koordinaten von Katasterpunkten.

Ausdehnung des Gebietes	Bezugsfläche
0 - 10 x 10 km ²	Ebene
Berlin, Württemberg, Bayern, Baden	Schmiegekugel
Deutschland	Ellipsoid

Die Wahl des Koordinatensystems und seiner Bezugsfläche ist abhängig von der Größe des Vermessungsgebietes.

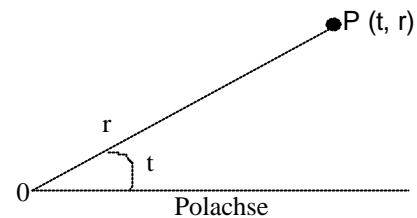
2.2 Ebene Koordinatensysteme

2.2.1 Mathematische Definitionen



Kartesische Koordinaten $P(x,y)$

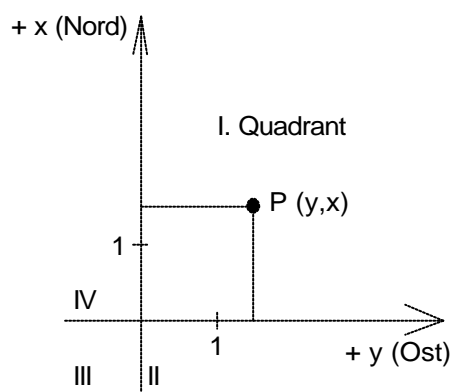
Abszisse: x
 Ordinate: y
 Orientierung: entgeg. Uhrzeigersinn



Polarkoordinaten $P(r,t)$

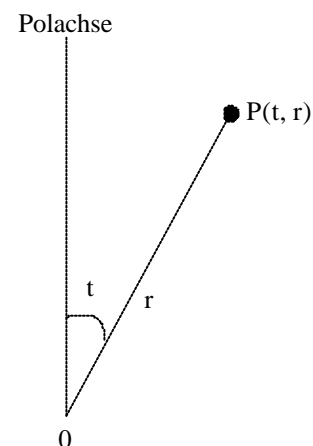
Abweichung t : Winkel gegen die Polachse
 Radiusvektor r : Entfernung
 Orientierung: entgeg. Uhrzeigersinn

2.2.2 Geodätische Definitionen



Kartesische Koordinaten $P(x,y)$

Rechts: y
 Hoch: x
 Orientierung: im Uhrzeigersinn



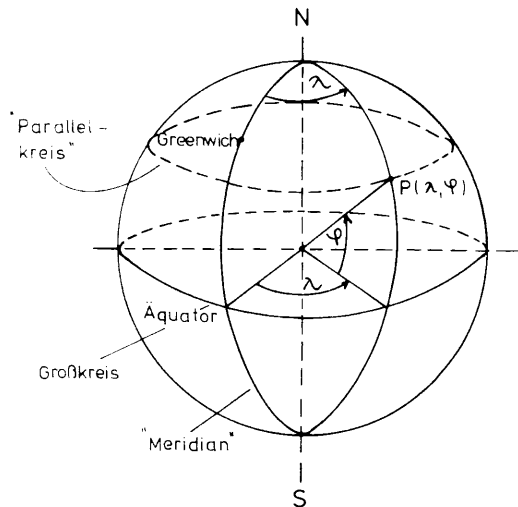
Polarkoordinaten $P(r,t)$

Abweichung t : Winkel gegen die Polachse
 Radiusvektor r : Entfernung
 Orientierung: mit dem Uhrzeigersinn

t wird als Richtungswinkel bezeichnet, wenn die Polachse mit der Parallelen der x -Achse zusammenfällt.

2.3 Sphärische Koordinatensysteme auf der Kugel

2.3.1 Geographisches Koordinatensystem



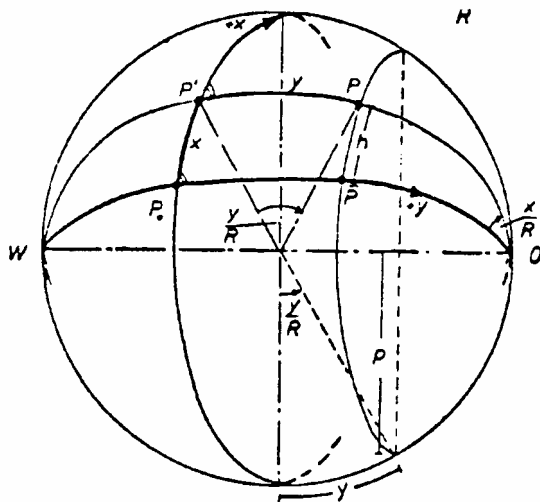
Geographische Länge λ

Geographische Breite φ

Die geographische Länge eines Punktes P ist der Winkel zwischen der Ebene durch den Nullmeridian (z.B. Greenwich) und der Meridianebene im Punkt P.

Die geographische Breite stellt den Winkel dar, den die in P errichtete Flächennormale mit der Äquatorebene bildet.

2.3.2 Geographische Soldner-Koordinaten



Im Soldnerschen System wird ein in der Mitte des Vermessungsgebietes liegender Hauptmeridian als Abszissenachse festgelegt. Die Ordinate (y-Koordinate) des Punktes P ist die Bogenlänge des Großkreises, der den Hauptmeridian senkrecht schneidet und durch P geht. Die Abszisse (x-Koordinate) ist die Meridianbogenlänge vom Koordinatenursprung bis zum Ordinatenfußpunkt.

Wie man erkennt, konvergieren die Ordinaten mit zunehmendem Abstand vom Nullmeridian. Deshalb wird der Geltungsbereich von Soldnersystemen auf folgende Ausdehnung beschränkt:

- x-Richtung: beliebig weit
- y-Richtung: bis ca. 200 km

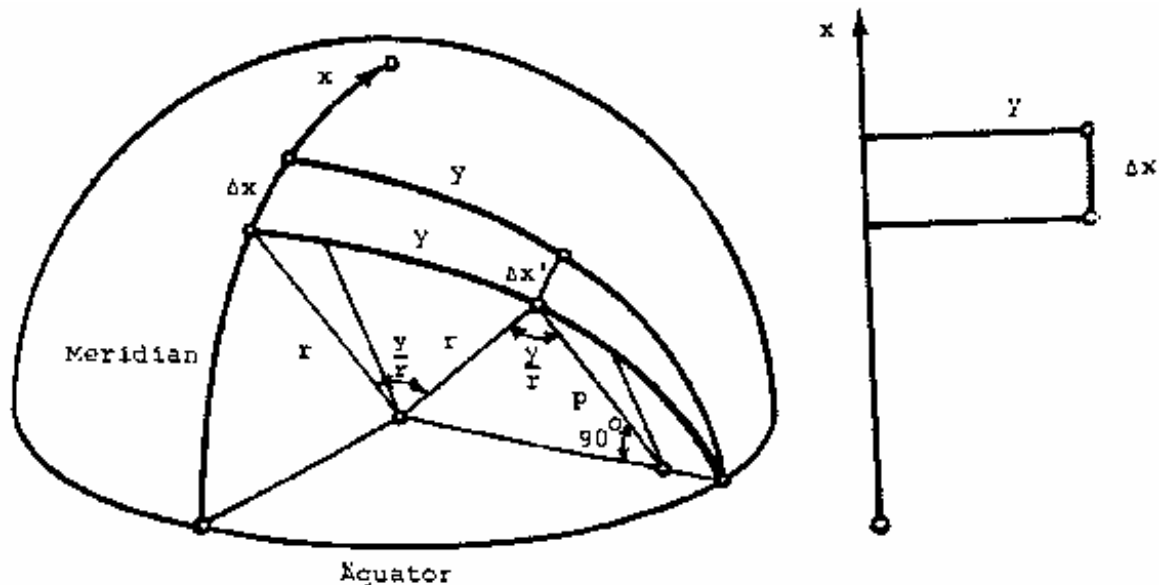
Bezugsfläche ist die Kugel, deren Radius so gewählt wird, dass sie sich im Geltungsbereich möglichst gut an das Ellipsoid anschmiegt (Schmiegekugel).

2.4 Abbildung sphärischer Koordinaten in die Ebene

2.4.1 Ordinatenentreue Abbildung der Kugel in die Ebene - Ebene Soldnerkoordinaten

Die rechtwinkligen sphärischen Soldnerkoordinaten X, Y werden ohne jede Änderung in die Ebene übertragen und als rechtwinklig ebene Koordinaten x, y behandelt.

Abbildungsgleichung: $X = x \quad Y = y$



Eine Karte in **ordinatenentreuer** Abbildung nach Soldner erhält man also in einfachster Weise dadurch, dass man die Soldnerschen Koordinaten als ebene Koordinaten aufträgt. Ein solches verebnetes Bild der Kugel (Karte) weist gegenüber dem Urbild der Kugel **Verzerrungen** auf. **Entnimmt man der Karte Entfernungen und Richtungswinkel oder berechnet sie aus den als eben betrachteten Koordinaten, so stimmen diese nicht mit den wirklichen (sphärischen) Entfernungen und Richtungswinkeln auf der Kugel überein.** D.h. zwei Punkte, die den gleichen Abstand zum Nullmeridian haben ($y_1 = y_2$), unterscheiden sich in ihren Abszissendifferenzen Δx (auf dem Nullmeridian) und $\Delta x'$ (auf dem Parallelkreis zur x-Achse).

$$\Delta x' = \Delta x \cdot \cos \frac{y}{R} \quad \text{mit} \quad y = \text{Ordinate und} \quad R = \text{Radius der Schmiegekugel}$$

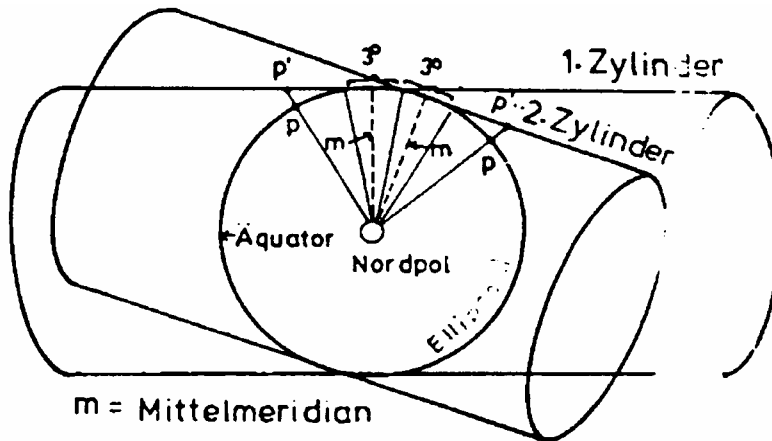
Beispiele für die Verzerrungen zwischen 2 Punkten: $x_1 = 20\,000 \text{ m} \quad y_1 = y$
 $x_2 = 21\,000 \text{ m} \quad y_2 = y + 1000 \text{ m}$

$y \text{ [km]}$	0	50	100	150	200
$\Delta x - \Delta x' \text{ [cm]}$	0	3.1	12.3	27.7	49.3
$\varphi - \varphi' \text{ [mgon]}$	0	1.0	3.9	8.8	15.7

Besonders störend ist die große Richtungsverzerrung, deshalb ist die seitliche Ausdehnung des Koordinatensystems begrenzt. In Entfernungen über 100 km von der x-Achse müssen sogar die Kleintriangulation und der Polygonzug sphärisch berechnet werden, was sehr umständlich ist.

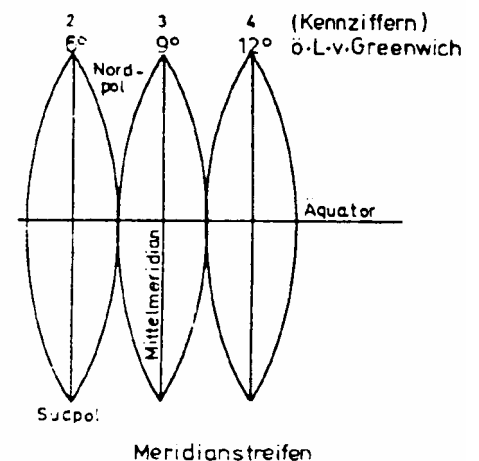
2.4.2 Konforme Abbildung der Kugel in die Ebene - Gauß-Krüger-Koordinaten

Da Soldnersysteme verschiedene Ursprünge und oft verschiedene Orientierungen haben ist das Zusammenpassen der einzelnen Landesvermessungen schwierig. Deshalb wurden die Gauß-Krüger-Koordinaten eingeführt. Diese **konforme (winkeltreue) Abbildung** eines **3° breiten Meridianstreifens** vom Ellipsoid in die Ebene wurde erstmals von Gauß hergeleitet und später von Krüger weiterentwickelt. Streifen in dieser Ausdehnung bieten in ihrer ebenen Ausdehnung noch *eine hinreichend genaue längen- und winkeltreue Abbildung* der Erdoberfläche.

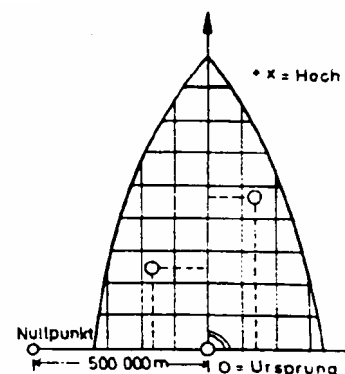


Dieses System ist eine "transversale Mercatorprojektion", bei der nicht - wie üblich - der Äquator als unverzerrte Grundlinie abgebildet wird, sondern ein Meridian (x-Achse). Das kann man sich so vorstellen, dass um die Erde ein Zylinder mit dem Radius dieses Meridians gelegt wird.

Zur Unterscheidung, in welchem der Gauß-Krüger-Systeme man sich befindet, erhält jeder Bezugsmeridian eine **Ordnungsziffer**. Da das System sich rechts und links des Bezugsmeridians ausdehnt, erhält er zur Vermeidung negativer Ordinaten einen **Zuschlag von 500 000 m**. Anstelle von y und x werden die Bezeichnungen "**Rechts**" und "**Hoch**" eingeführt.



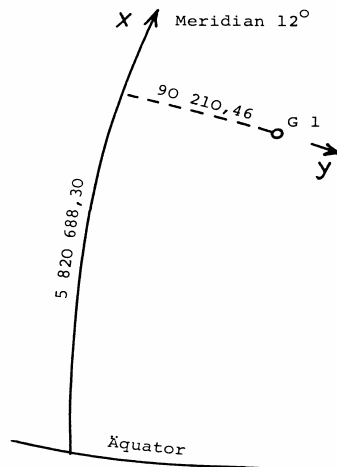
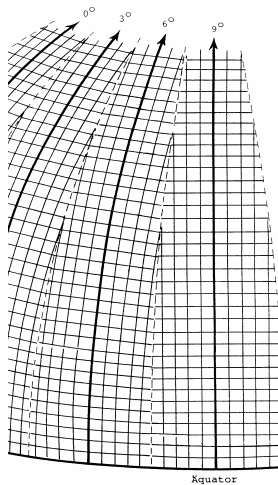
Meridian östlich von Greenwich	Ordnungsziffer
3°	1
6°	2
9°	3
12°	4
15°	5



Ausdehnung N-S: theoretisch von Pol zu Pol

Ausdehnung W-O: 1° 40' nach jeder Seite (am Äquator: ca. 185 km, in Dt.: ca. 111 km)

Überlappung der Systeme: 20' (ca. 27 km am Äquator, ca. 22 km in Dt.)



Beispiel: Der Punkt G1 hat folgende Gauß-Krüger-Koord.:

Rechts: 4 590 210.46 m

Hoch: 5 820 688.30 m

Der Hochwert gibt den Abstand auf dem Bezugsmeridian zum Äquator an. Für den Rechtswert wird zuerst die Ordnungszahl des Systems ermittelt ($12^\circ \Rightarrow 4$). Dann wird auf den Abstand zum Meridian (90 210.46 m) 500 000 m aufgeschlagen. Dem Ergebnis wird dann die Ordnungsziffer vorangestellt.

Läge der Punkt links des Bezugsmeridians, würde der Abstand zum Meridian von 500 000 m abgezogen.

Um aus den Soldnerkoordinaten auf der Kugel ebene Gauß-Krüger-Koordinaten zu erhalten, gelten für kurze Seiten und kleine Flächen folgende Abbildungsgleichungen:

$$x_G = X_S$$

$$y_G = Y_S + \frac{Y_S^3}{6R^2}$$

Um eine auf der Erdoberfläche gemessene Strecke in die Gauß-Krüger-Ebene zu reduzieren, gilt folgende Formel:

$$s_G = \left(1 + \frac{y_m^2}{2R^2} \right) \cdot s_{\text{gem}} \quad \text{mit } y_m = \text{mittlere Ordinate}$$

Streng genommen gilt die Winkeltreue nur im Differentiellen. Wenn man jedoch nachfolgende Tabelle betrachtet, so erkennt man, dass die Richtungsverzerrung nicht nur wesentlich kleiner als bei Soldner, sondern auch für Kleintriangulation und Polygonzüge mit Gauß-Krüger-Koordinaten vernachlässigbar ist.

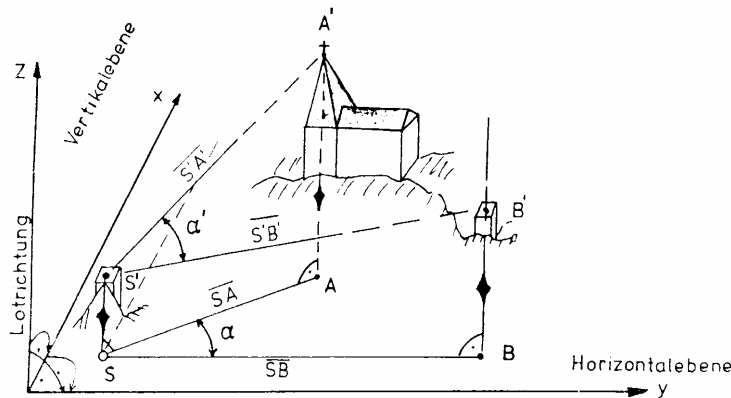
$$\Delta T = T - t = 0.08 \text{ mgon} \cdot \frac{\Delta x [\text{km}] \cdot y_m [\text{km}]}{100 \text{ km}}$$

	$\Delta x = 1 \text{ km}$	$\Delta x = 5 \text{ km}$	$\Delta x = 1 \text{ km}$
mittlere Ordinate	$\Delta T [\text{mgon}]$	$\Delta T [\text{mgon}]$	$\Delta T [\text{mgon}]$ (Soldner)
0 km	0	0	0
50 km	0.04	0.2	1.0
100 km	0.08	0.4	3.9
150 km	0.12	0.6	8.8
200 km	0.16	0.8	15.7

3 Koordinatenbestimmung

3.1 Messelemente zur Koordinatenbestimmung

Alle bis hier dargestellten Verfahren der Koordinatenbestimmung erfolgten auf Bezugsflächen bzw. in ebenen Koordinatensystemen. Messelemente wie Winkel und Strecken, die zwischen, auf der physischen Erdoberfläche räumlich verteilten Punkten gemessen werden, müssen daher auf diese Bezugsfläche projiziert werden.



Beispiel: Der Winkel α' in der geneigten Ebene durch $S'A'B'$ ist ein Raumwinkel und größer als der Winkel zwischen den Seiten SA und SB , der in der Horizontalebene liegt.

Da die Lotrichtung bzw. die Horizontalebene überall auf der Erde schnell realisierbar ist (Senklot, Wasserwaage), projiziert man alle Strecken und Winkel vertikal auf die Bezugsfläche, die bei kleineren Vermessungsgebieten (< 10 km) als Ebene betrachtet wird.

3.1.1 Horizontalwinkel

Der Horizontalwinkel ist die Vertikalprojektion eines Winkels auf eine Horizontalebene.

Der Winkel zwischen zwei räumlichen Geraden $S'A'$ und $S'B'$ ist ein Raumwinkel. Die **Vertikalprojektionen** dieser geneigten Geraden auf die Horizontalebene **bilden Richtungen**.

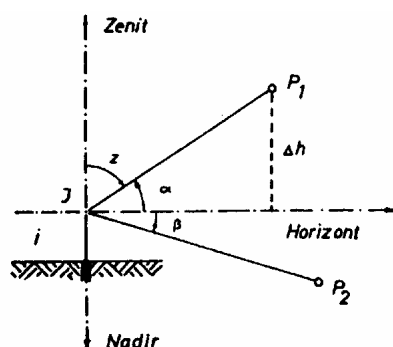
Ein Horizontalwinkel ergibt sich als Differenz zweier Richtungen Ein Winkel kann messtechnisch nur durch die Ablesung von 2 Richtungen und anschließende Berechnung erhalten werden.

3.1.2 Vertikalwinkel

Vertikalwinkel liegen in der gleichnamigen Ebene und werden durch eine vorgegebene Bezugsrichtung und eine Zielpunktrichtung gebildet.

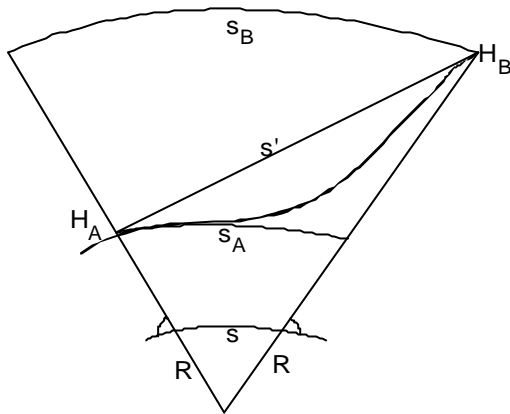
Ist die Bezugsrichtung die Zenitrichtung, werden **Zenitwinkel** (Zenitdistanzen) bestimmt.

Ist die Bezugsrichtung die Horizontale, werden Höhen- bzw. Tiefenwinkel bestimmt.



z = Zenitdistanz
 α = Höhenwinkel
 β = Tiefenwinkel
 J = Instrumentenhorizont
 i = Instrumentenhöhe

3.1.3 Horizontalstrecke



Eine Horizontalstrecke ist der Abstand s der Vertikalprojektion zweier Punkte, gemessen in der Bezugsfläche.

Aus dieser Definition sieht man deutlich, dass die Horizontalstrecke zweier Punkte von der Höhe der Punkte über der Bezugsfläche abhängt.

Um eindeutige, in einer Karte - dem ebenen Abbild der Erdoberfläche - darstellbare Ergebnisse zu erhalten, reduziert man die Entfernungsangaben auf die Meereshöhe bzw. einen anderen geeigneten Bezugshorizont.

$$s = s_A \frac{R}{R + H_A} = s_B \frac{R}{R + H_B}$$

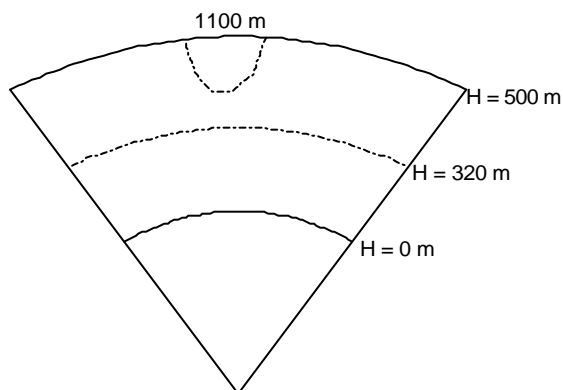
mit $R \approx 6370 \text{ km}$

Diese Reduktion ist bei Arbeiten im übergeordneten Landeskoordinatensystem wichtig.

Für einzelne Bauvorhaben in großer Höhe führt man jedoch zweckmäßigerweise einen Bezugshorizont ein.

Beispiel: Kochertalbrücke

- Höhe: 500 m über NN
- Bauwerkshöhe: 180 m
- Bauwerkslänge: 1100 m



$$\Delta s = 1100 \text{ m} - 1100 \text{ m} \cdot \frac{6370 \text{ km}}{6370.5 \text{ km}} = 0.086 \text{ m}$$

Würden alle baubezogenen Maße als auf den Meeresspiegel bezogen angesehen, würde die Brücke also 8.6 cm zu kurz gebaut.

Mit dem Bezugshorizont 320 m:

$$\Delta s = 1100 \text{ m} - 1100 \text{ m} \cdot \frac{6370 \text{ km}}{6370.18 \text{ km}} = 0.031 \text{ m}$$

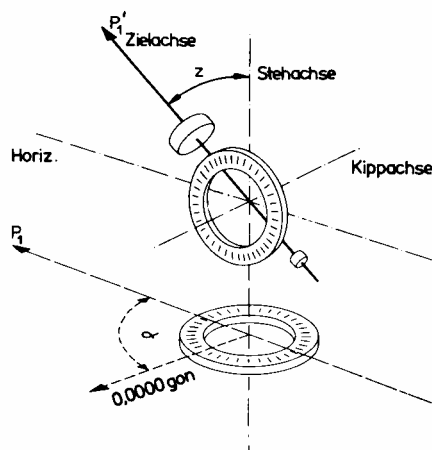
In den Einzelfehlern würde jedoch ein Reduktionsrestfehler auftreten. Diese Überlegung sollte besonders beim Fertigteilbau in größeren Höhen Berücksichtigung finden. Bei Großbaustellen umgeht man dieses Problem im Allgemeinen durch Einführung eines Sondernetzes ohne Anschluss an Landeskoordinaten. So vermeidet man Auswirkungen der Netzspannungen des Landesnetzes auf das Aufnahmenetz.

3.2 Winkelmessung

3.2.1 Der Theodolit

Der Theodolit ist ein Instrument zur **Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln**. Der Theodolit besteht aus dem festen **Unterbau** und dem um die Stehachse drehbar gelagerten **Oberbau**. Der Unterbau besteht aus dem **Dreifuß** mit den Fußschrauben und dem **Horizontalkreis**. Der Oberbau setzt sich aus den **Fernrohrträgern**, dem **Messfernrohr** und dem **Vertikalkreis** zusammen.

Das Messfernrohr ist um die auf den Fernrohrträgern liegende Kippachse beweglich. Damit ist die optische Achse des Messfernrohres - die Zielachse - kardanisch gelagert und kann jede beliebige räumliche Richtung einnehmen.



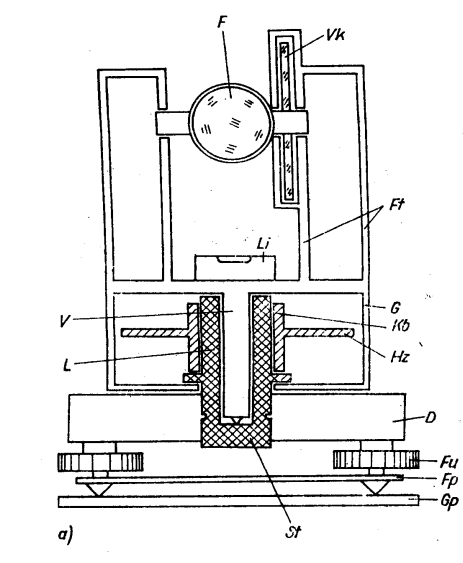
Um Horizontalwinkel zwischen 2 beliebigen räumlichen Richtungen zu messen, werden diese auf eine Horizontalebene projiziert. Ein justierter Theodolit in Messstellung erfüllt folgende **Achsenbedingungen**:

- Zielachse \perp Kippachse
- Kippachse \perp Stehachse
- Stehachse \perp Libellenachse

D.h.: **Die drei Hauptachsen des Theodoliten stehen senkrecht aufeinander.**

Das Vertikalstellen der Stehachse bzw. Horizontieren des Theodoliten erfolgt mit den Fußschrauben und der Röhrenlibelle, wobei die letzte Forderung Stehachse \perp Libellenachse erfüllt sein muss.

Der Vertikalkreis wird über eine besondere Röhrenlibelle (Höhenindexlibelle oder automatischer Höhenindex) vertikal orientiert. Diese Libelle oder der Kompensator sind zusätzlich erforderlich, da sich in der Regel die Stehachse des Theodoliten mit der Horizontierlibelle nicht ausreichend genau für die Vertikalmessung lotrecht stellen lässt.



F	-	Fernrohr
Vk	-	Vertikalkreis
Ft	-	Fernrohrträger
Li	-	Libelle
G	-	Gehäuse
Hz	-	Horizontalkreis
Fu	-	Fußschraube

Die **Teilkreise** des Theodoliten bestehen aus Metall (in modernen Instrumenten aus Glas) und werden über besondere Ablesevorrichtungen, die bei modernen Geräten in einem Ablesefernrohr neben dem Messfernrohr angeordnet sind, abgelesen.

3.2.2 Libellen

3.2.2.1 Beschreibung der charakteristischen Daten einer Libelle

Die Röhrenlibelle ist eine zylindrische Glasröhre, deren Innenseite im oberen Teil tonnenförmig ausgeschliffen ist, so dass sie im Längsschnitt als Kreisbogen erscheint. Die Libelle ist an beiden Enden zugeschmolzen und mit Äther, Toluol, Sylal oder Cumol gefüllt, bis auf eine längliche Blase. Dosenlibellen sind immer kugelförmig geschliffen.

Die Libellenblase wandert an die jeweils höchste Stelle der Libelle, d.h. die Normale zur Schlifffläche im Blasenmittelpunkt fällt mit der Lotrichtung zusammen. Auf der Röhre ist eine Teilung zur Ablesung der Blasenenden angebracht. Der Abstand der Teilstriche beträgt bei älteren Libellen 2.26 mm (eine Pariser Linie), bei neueren Libellen 2 mm. Der Abstand zweier Teilstriche heißt **Pars**. Der Mittelpunkt der Teilung ist der **Normalpunkt**.

Die **Libellenachse** ist die in die Innenwandung gelegte Tangente im Punkt N. Daraus folgt, dass die Libellenachse waagrecht ist, wenn die Blase im Normalpunkt einspielt. Die Projektion der Libellenachse auf die Unterseite der Fassung, d.h. Projektion auf diejenige Ebene, mit der die Fassung aufliegt, nennt man die Setzlinie.

Der Winkel, um den die Libelle geneigt werden muss, damit die Blase um 1 Pars weiterläuft heißt **Libellenangabe** ϵ . Dieser Winkel tritt auch zwischen zwei Radiusvektoren, welche zwei aufeinander folgende Teilstriche mit dem Mittelpunkt verbinden, auf. Wenn die Blase um n Teilstriche vom Normalpunkt entfernt ist, dann bildet die Libellenachse mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = n \cdot \epsilon$. Die Libellenangabe wird in der Regel in Altsekunden gezählt. Sie ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Libelle.

Zu jeder Libellenangabe gehört natürlich ein entsprechender Schliffradius. Dazu folgende Tabelle:

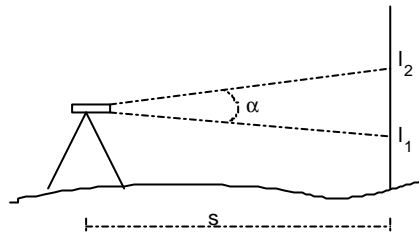
Libellenangabe ϵ ["]	Schliffradius [m]	Name
1"	412.5	feinste Röhrenlibelle
5"	82.5	feine Röhrenlibelle
10"	41.2	gewöhnliche Röhrenlibelle
20"	20.6	gewöhnliche Röhrenlibelle
30"	13.75	gewöhnliche Röhrenlibelle
60"	6.9	Dosenlibelle

Die **Genauigkeit der Libelle** ist von vielen Faktoren abhängig. Einige davon sind:

- die Güte der Lauffläche (z.B. Abweichungen vom kreisförmigen Schliff)
- der Krümmungsradius der Lauffläche
- die Oberflächenspannung der Flüssigkeit
- die Dämpfung
- Temperaturschwankungen
- Temperaturgefälle in der Libelle
- die Blasenlänge bzw. der Blasendurchmesser

3.2.2.2 Bestimmung von Libellenangabe und Libellenradius

Ist die Libelle mit dem Fernrohr fest verbunden (jedoch dejustiert), so stellt man das Instrument so auf, dass eine Fußschraube zur Nivellierlatte weist. Man stellt im Abstand s eine Nivellierlatte auf und liest den Stand eines Blasenendes und die Lattenablesung l_1 ab. Nun läßt man durch Bewegen der Fußschraube die Blase um n Pars weiterwandern und liest l_2 ab.



Latte	Blasenende
l_1 [m]	A_1 [Pars]
l_2 [m]	A_2 [Pars]

Nun kann man den Neigungswinkel α zweimal ausdrücken:

- aus Beobachtung auf der Latte:
$$\alpha = \frac{l_2 - l_1}{s} \cdot \rho[']$$

- aus Beobachtung auf der Libelle:
$$\alpha = (A_2 - A_1) \cdot \varepsilon$$

Gleichsetzen ergibt die Libellenangabe:
$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{(A_2 - A_1) \cdot s} \cdot \rho[']$$

3.2.2.3 Anwendungen der Libelle

- als Setzlibelle, aufgeschraubt auf Setzteller für die Aufnahme von Querprofilen für Erd- und Straßenbauten
- als “Wasserwaage”; zum Horizontieren von Balken, Trägern, Treppenstufen usw.
- in Verbindung mit einem Fernrohr; als Nivelliergerät
- als Höhenmesslibelle beim Theodolit; zum Festlegen des Horizonts bei Höhenwinkel-messungen
- als Alhidadenlibelle beim Theodolit; zum Lotrechtstellen der Stehachse

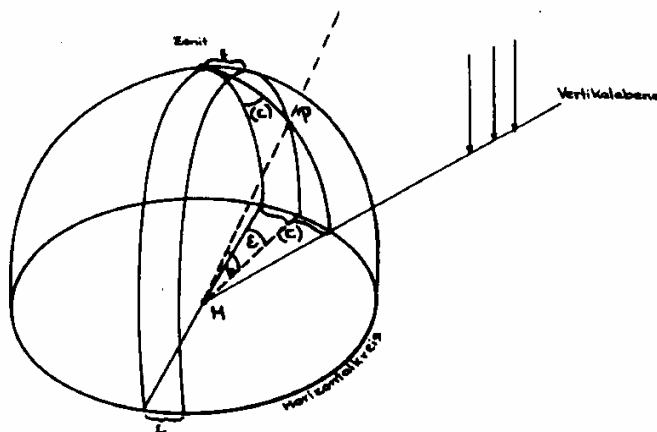
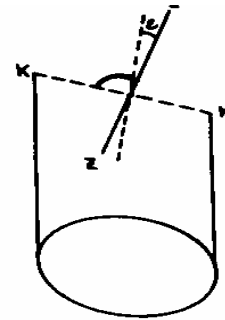
3.2.3 Die Theodolitenfehler

3.2.3.1 Zielachsenfehler

Wird die Bedingung

$$\text{Zielachse} \perp \text{Kippachse}$$

nicht erfüllt, so spricht man vom **Zielachsenfehler c**.



Betrachtet man diesen Fehler auf der Einheitskugel, so bildet die Spur von ZZ auf dieser einen Parallelkreis. Weicht also die Zielachse um c von der Senkrechten zur Kippachse ab, so ist die Projektion der räumlichen Richtung zu P auf den Horizontalkreis um den Betrag (c) versetzt. Wie ersichtlich, ist dieser Einfluss (c) des Zielachsenfehlers vom Höhenwinkel h (oder der Zenitdistanz z) und der Zielweite abhängig.

$$(c) \approx \frac{\varepsilon}{\cosh} \approx \frac{\varepsilon}{\sin z}$$

Eine weitere wichtige Folgerung ist, dass für die Messung eines Winkels zwischen 2 Zielen mit gleicher Zenitdistanz der Einfluss des Zielachsenfehlers herausfällt.

Bei der praktischen Messung wird jeder Horizontalwinkel in **2 Lagen** gemessen. Hierdurch wird folgendes erreicht:

Ist in Lage I der Einfluss des Zielachsenfehlers z.B. positiv, dann tritt dieser Einfluss bei durchgeschlagenem Fernrohr (Lage II) negativ auf.

Das arithmetische Mittel beider Messungen ist dann frei vom Zielachsenfehler.

Berichtigung eines Zielachsenfehlers:

Zielt man einen möglichst weit entfernten und horizontalen Punkt in Lage I und II an, so erhält man den Zielachsenfehler zu:

$$c = \frac{A_I - A_{II} \pm 200 \text{ gon}}{2}$$

Zur Justierung verschiebt man das Fadenkreuz so, dass für das Ziel die Sollablesung:

$$A = \frac{A_I + A_{II} \pm 200 \text{ gon}}{2} \quad \text{erhalten wird.}$$

3.2.3.2 Kippachsenfehler

Bildet die Kippachse bei lotrechter Stehachse einen Winkel mit der Horizontalen, so liegt ein Kippachsenfehler vor.

Berichtigung eines Kippachsenfehlers:

Ebenso wie der Zielachsenfehler, ist der Kippachsenfehler auf Restjustierfehler zurückzuführen. Da moderne Instrumente keine Möglichkeit zur Justierung der Kippachsenlagerung erlauben, sei nur darauf verwiesen, dass auch dieser Fehler durch Messung in 2 Lagen eliminiert wird. Der Betrag des Fehlers wird durch werkseitige Justierung gering gehalten.

3.2.3.3 Stehachsenfehler

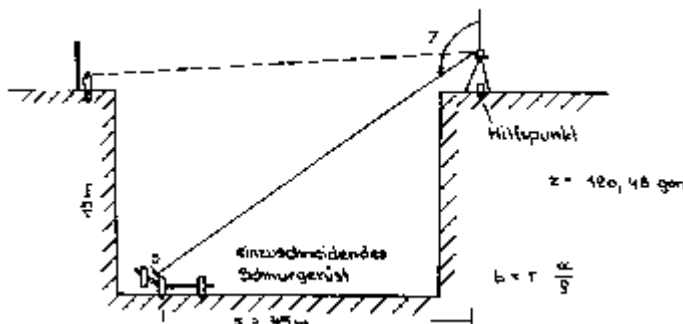
Eine Stehachsenfehler ist auf die ungenügende Lotrechtstellung der Umdrehungsachse (Stehachse) zurückzuführen.

Berichtigung eines Stehachsenfehlers:

Im Gegensatz zum Ziel- und Kippachsenfehler kann der Stehachsenfehler **nicht** durch eine entsprechende Messanordnung **eliminiert** werden. Der Betrag des Stehachsenfehlers verfälscht die Richtungsmessung folgendermaßen: $v \approx i \cdot \tan h \approx i \cdot \cot z$.

Der gefährliche Einfluss des Stehachsenfehlers, besonders bei steilen Visuren (in Baugruben hinein, auf Pfeiler hinauf) sei an Beispielen gezeigt.

Beispiel: Baugrube für ein Hochhaus mit mehreren Kellergeschossen



Für die Absteckung auf einem Schnurgerüst wird am Rand einer Baugrube ein Theodolit aufgestellt. Die Röhrenlibelle des Theodoliten hat eine Angabe von $\frac{20''}{\text{pars}} = 6 \text{ mgon}$. Beim Horizontieren wird nicht sorgfältig gearbeitet, d.h. beim Drehen des Theodoliten wandert die Libelle um einen Teilstrich aus. Es ist also ein Stehachsenfehler von $20''$ vorhanden.

Der Richtungsfehler in der Baugrube beträgt:

$$v = i \cdot \cot z$$

mit $i = 20''$ und $z = 120.48 \text{ gon}$

$$v = 20'' \cdot \cot 120.48 \text{ gon}$$

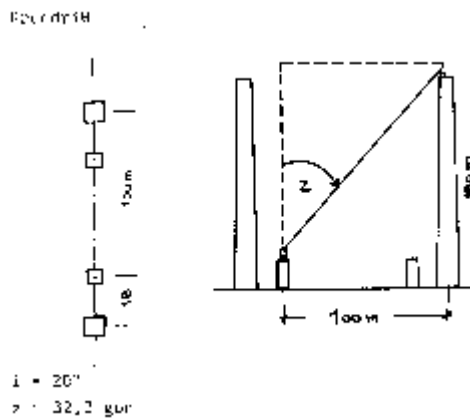
$$v = 6.7'' = 2 \text{ mgon}$$

Bei einer Horizontalentfernung $s = 45 \text{ m}$ vom Theodolit zum Schnurgerüst ist der Absteckfehler

$$\Delta = \frac{s \cdot v}{\rho} = \frac{45 \text{ m} \cdot 6.7''}{206265''} = 0.0015 \text{ m} = 1.5 \text{ mm}$$

In diesem Fall wirkt sich der Stehachsenfehler also noch nicht gravierend aus. Andere Dimensionen zeigt dieser Fehler bei steilen Visuren $z < 50 \text{ gon}$.

Beispiel: Absteckung von Gebäudeachsen vom Boden aus



$$v = i \cdot \cot z$$

mit $i = 20''$ und $z = 32,3 \text{ gon}$

$$v = 20'' \cdot \cot 32,3 \text{ gon}$$

$$v = 36'' = 11 \text{ mgon}$$

$$s = 100 \text{ m}$$

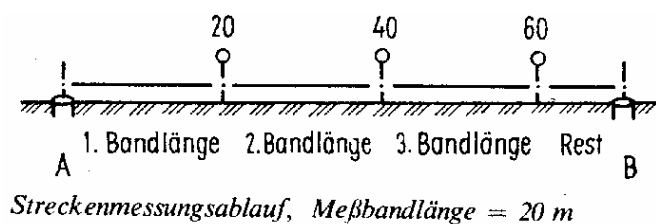
$$\Delta = \frac{s \cdot v}{\rho} = \frac{100 \text{ m} \cdot 36''}{206265''} = 0,017 \text{ m} = 17 \text{ mm}$$

Ein Betrag, der durch sorgfältiges Horizontieren vermieden werden kann.

3.3 Streckenmessung

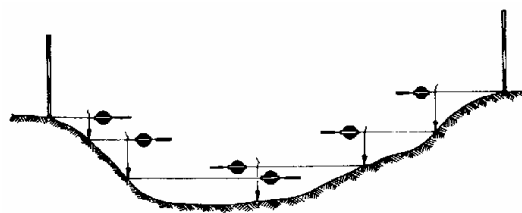
3.3.1 Mechanische Streckenmessung mit Stahlmessbändern

Stahlmessbänder werden für die Streckenmessung eingesetzt, wenn kleinere Gebiete nach dem Orthogonal- oder Einbindeverfahren aufgenommen werden. Auch für spezielle Aufgaben der Ingenieurgeodäsie kommen Messbänder zum Einsatz.



Für die Streckenmessung im ebenen Gelände über größere Entfernungen werden Messbandlängen in einer Flucht aneinandergereiht. Die gemessene Strecke erhält man durch Aufsummierung der Bandlängen und der gemessenen Reststrecke.

Für die Messung im geneigten Gelände wendet man die Staffelmessung an. Durch Staffelmessung wird der horizontale Abstand zweier Punkte A und B bestimmt, indem Bandlängen oder Teillängen des Messbandes herabgelotet werden.



3.3.2 Elektronische Entfernungsmessung

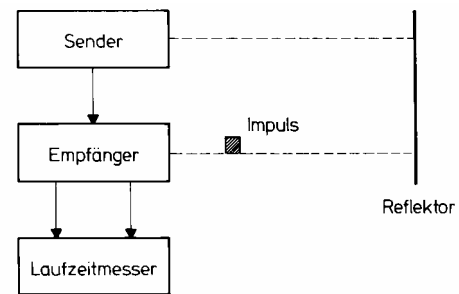
Das Grundprinzip der elektronischen Entfernungsmessung basiert auf einem Sender, der eine elektromagnetische Welle als Trägerwelle des eigentlichen Messsignals erzeugt. Diese Welle wird ausgesendet und die Zeit, die die Welle zum Durchlaufen der Strecke benötigt, gemessen. Dazu dient ein der Welle anhaftendes Signal, wie z.B. die Phase.

Als Trägerwellen moderner Nahbereichsentfernungsmesser werden Infrarotlicht ($\lambda \approx 600 \text{ nm}$), Laser und Mikrowellen ($\lambda \approx 1\text{-}10 \text{ cm}$) eingesetzt. Diese Trägerwelle wird mit einer Messinformation moduliert.

Die am weitesten verbreiteten Messsignale sind impuls- oder frequenzmodulierte Schwingungen.

3.3.2.1 Impulsmessverfahren

Der elektromagnetischen Welle wird ein scharf definierter Impuls aufmoduliert und ausgesendet. Zum Empfänger gelangt unmittelbar ein geringer Teil des ausgesendeten Impulses sowie der über die Strecke gelaufene Impuls. Die Differenz zwischen Aussendung und Empfang des Impulses entspricht der Zeit t , die der externe Impuls für das zweimalige Durchlaufen der Strecke benötigt.

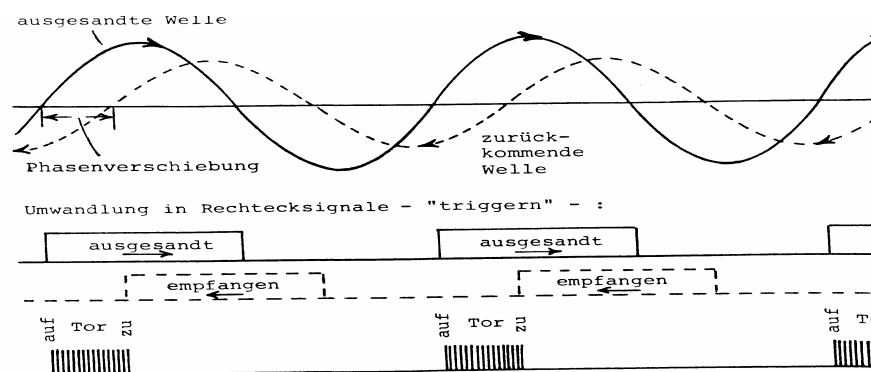


Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum beträgt $c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, so dass die Entfernung wie folgt bestimmt wird:

$$s = c \cdot \frac{t}{2}$$

Da für eine Entfernungsgenauigkeit von 0.5 cm die Zeit auf 0.03 ns genau bestimmt werden muss, wird dieses Verfahren für genaue Streckenmessungen kaum eingesetzt. Hauptanwendungsgebiete sind Radar- und Ortungsverfahren.

3.3.2.2 Phasenmessverfahren



Hier wird der Trägerfrequenz des Messgerätes eine relativ langperiodische Schwingung (z.B. 30 MHz, $\lambda = 10\text{m}$) aufmoduliert. Die Entfernung s ergibt sich dann aus einer zunächst unbekannten Anzahl n von ganzen Schwingungen der Länge λ und dem Reststück R , das durch ein Phasenmessgerät genau gemessen werden kann. Die Entfernung ergibt sich also zu:

$$s = \frac{n \cdot \lambda + R}{2}$$

Die Anzahl n bestimmt man z.B. dadurch, dass in dekadischen Frequenzschritten die Modulationsfrequenz erhöht wird, so dass die aufmodulierte Messwelle immer kürzer wird

Die Gesamtentfernung wird aus verschiedenen Messungen unterschiedlicher Modulationsfrequenzen bestimmt.

Beispiel:

Wellenlänge λ	Reststück R
$\lambda_1 = 10\,000\text{ m}$	8260 m
$\lambda_2 = 1000\text{ m}$	261 m
$\lambda_3 = 100\text{ m}$	61.3 m
$\lambda_4 = 10\text{ m}$	1.35 m

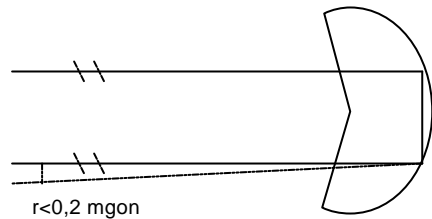
Es ergibt sich also $2 \cdot s = 8261.35\text{ m}$

und damit $s = 4130.68\text{ m}$

Die Reichweite dieses Entfernungsmessgerätes beträgt 10 km. Da die Laufzeit vom Zustand der Luftschichten die das Signal durchläuft abhängig ist, müssen atmosphärische Korrekturen angebracht werden. Dann lässt sich eine Genauigkeit von $m_s [mm] = 0,5 + \sqrt{s [km]}$ erreichen.

Reflektoren

Da sich der Sender und Empfänger in einem Gerät befinden, muss das Messsignal reflektiert werden. Dazu verwendet man neben Spiegeln (ältere Geräte) heute im Wesentlichen Tripelprismen. Diese Prismen reflektieren Licht mit hoher Genauigkeit ($\approx 0,2$ mgon) parallel zu seiner Einfallsrichtung.



Somit ist nur ein ungefähres Ausrichten des Prismas auf das Messgerät erforderlich.

Für größere Entfernungen verwendet man Prismenzusätze, so dass die mit Quadrat der Entfernung abnehmende Signalstärke kompensiert werden kann.

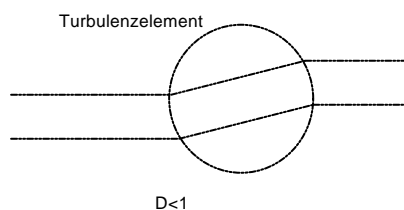
Elektromagnetische Wellen in der Atmosphäre

Der Weg elektromagnetischer Wellen wird durch Brechung beim Übergang zwischen zwei unterschiedlich dichten Medien eine räumliche Kurve. Denkt man sich die Erde als Kugel mit konzentrischen, homogenen atmosphärischen Schichten, so lässt sich die Lichtkurve als Kreisbogen mit dem 8-fachen Erdradius darstellen. Diese Modellvorstellung geht jedoch davon aus, dass keine weiteren lokalen Unterschiede im Brechungsindex auftreten.

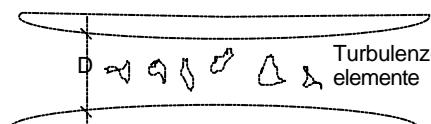
Refraktion in turbulenter Luft

In der Praxis wird der Wellenweg laufend durch Turbulenzelemente verändert und ist starken zeitlichen Schwankungen unterworfen. Man unterscheidet Turbulenzelemente, deren Durchmesser größer und kleiner als der Strahldurchmesser ist. Die Folge dieser Turbulenzelemente ist eine Strahlbewegung.

Mit $D = \frac{\text{Strahldurchmesser}}{\text{Durchmesser des Turbulenzelementes}}$ ergibt sich folgendes:



Ist das Turbulenzelement größer als der Strahldurchmesser ($D < 1$), so ergibt sich eine Strahlablenkung.



Für $D > 1$ pulsiert der Strahl und wird verbreitert.

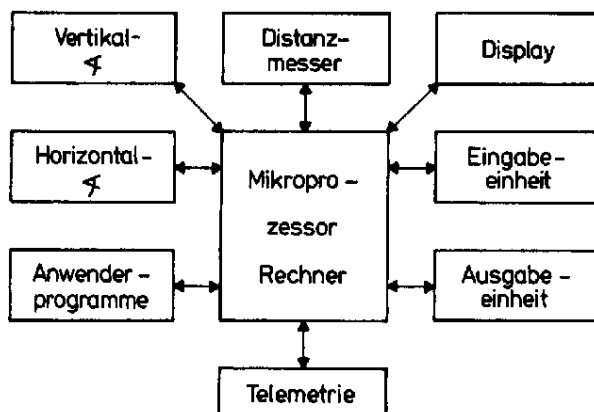
Diese Vorgänge sorgen für eine stetige Phasenfluktuation mit Zeitkonstanten von Millisekunden bis zu Stunden. Daher kann es durch Refraktionseinflüsse zu Streckenfehlern im cm- und dm-Bereich kommen. Messungen mit Millimetergenauigkeit sind daher ohne umfassende Erfassung der Atmosphäre nicht möglich.

3.4 Elektronische Tachymeter

Bei elektronischen Tachymetern handelt es sich um Messgeräte, welche in der Lage sind, elektronisch Horizontalwinkel, Zenitwinkel und Distanzen zu messen und zu speichern. Mit der Entstehung dieser Geräte gab es erstmals einen elektronischen Datenfluss von der Aufnahme der Messdaten im Feld bis zur Erzeugung von Karten.

Diese Geräte sind sowohl für alleinige Winkelmessungen als auch für Winkel- und Distanzmessungen einsetzbar.

Neuere Tachymeter verfügen über eine umfangreiche Verarbeitungssoftware. Dadurch wird schon vor Ort eine vielfältige Verarbeitung der gemessenen Winkel und Strecken möglich. Aus diesem Grunde haben diese Geräte bei vermessungstechnischen Aufgaben eine sehr große Bedeutung erlangt.



Distanzmesser und elektronischer Theodolit sind beim elektronischen Tachymeter in einem Instrument integriert.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Struktur eines solchen integrierten Systems.

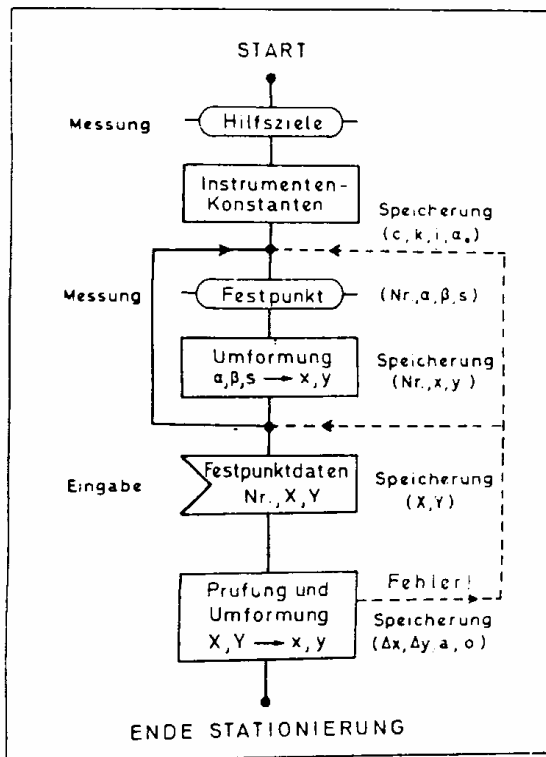
Die Kontrolle und Steuerung der elektronischen Tachymeter wird von Mikroprozessoren übernommen. Dabei werden die Winkel- und Streckenmessung sowie die Registrierung weitestgehend automatisiert. Außerdem ist im Allgemeinen die Berechnung bestimmter Parameter (Horizontaldistanz, Koordinatendifferenzen usw.) und deren Anzeige möglich. Der Messvorgang reduziert sich dabei auf das Anzielen des aufzunehmenden Punktes und das Auslösen der Messung.

Die geräteinternen Anwenderprogramme, können je nach Anwendungsgebiet die Arbeitsabläufe erheblich vereinfachen. So ist es z.B. möglich, Gerätekonstanten (Ziellinienverbesserung, Indexverbesserung, Maßstabsfaktor usw.) zu ermitteln und zu speichern, so dass sie bei nachfolgenden Messungen automatisch berücksichtigt werden können. Auch Parameter für die Absteckung und Aufnahme (z.B. Polarkoordinaten für abzusteckende Punkte, Orientierungen, Koordinatendifferenzen usw.) können berechnet und in die nachfolgenden Arbeiten einbezogen werden.

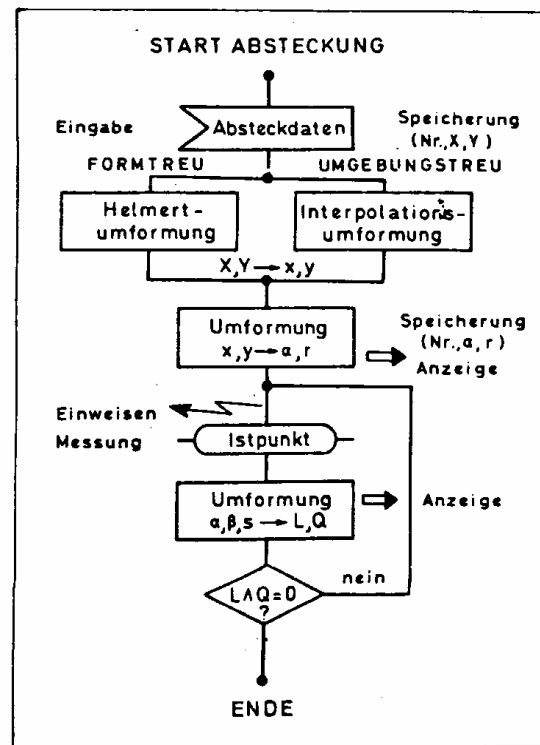
Dazu das folgende Beispiel einer Stationierung und anschließenden Absteckung koordinatenmäßig bekannter Punkte mit einem elektronischen Tachymeter.

Die in freier Stationierung ermittelten Messwerte des Tachymeters werden On-Line vom Computer verarbeitet und mit den Sollkoordinaten verglichen. Die Korrekturen zum Sollpunkt erscheinen im Computerdisplay.

ABLAUFSCHEMA STATIONIERUNG



ABLAUFSCHEMA ABSTECKUNG



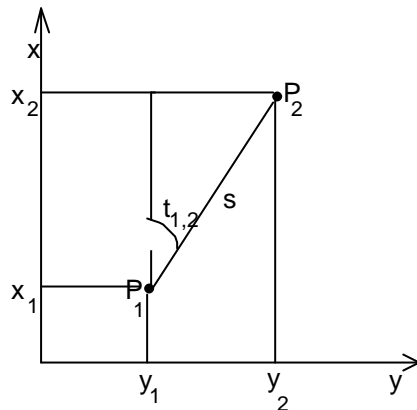
Wie die Theodolite kann man auch die Tachymeter nach der Genauigkeit in Bau-, Ingenieur- und Feinmesstachymeter unterteilen.

Dabei werden bei der elektrooptischen Distanzmessung je nach Gerät Genauigkeiten von $\pm 1 \dots 5 \text{ mm}$ $\pm 1 \dots 5 \cdot 10^{-6} D$ (D = Distanz in km) erreicht und durchschnittlich Reichweiten von $2 \dots 5 \text{ km}$ angegeben. Wobei für die größeren Reichweiten im Allgemeinen mehr als ein Prisma (zur Verstärkung des reflektierten Signals) benötigt wird. Bei der Richtungsmessung, die nach dem Code- oder Inkrementalverfahren erfolgt, werden Genauigkeiten von $0,001 \text{ gon}$ bis zu $0,0001 \text{ gon}$ erreicht.

3.5 Grundaufgaben der ebenen Koordinatenbestimmung

3.5.1 Mathematische Grundlagen

3.5.1.1 *Polarkoordinaten, Richtungswinkel und Strecke*



1.) Transformation kartesischer Koordinaten in Polarkoordinaten.

2.) Berechnung von Richtungswinkel und Strecke aus Koordinaten.

Gegeben: $P_1 (x_1; y_1)$ und $P_2 (x_2; y_2)$

Gesucht: die ebene Entfernung $s = \overline{P_1 P_2}$ und der Richtungswinkel $t_{1,2}$

$$\tan t_{1,2} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \quad t_{1,2} = \arctan \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \quad \text{und} \quad t_{2,1} = t_{1,2} + 200 \text{ gon}$$

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{außerdem gilt: } \sin t_{1,2} = \frac{(y_2 - y_1)}{s}$$

$$\cos t_{1,2} = \frac{(x_2 - x_1)}{s}$$

$$\text{damit ergeben sich folgende Kontrollen:} \quad s = \frac{(y_2 - y_1)}{\sin t_{1,2}}$$

$$s = \frac{(x_2 - x_1)}{\cos t_{1,2}}$$

3.5.1.2 *Polares Anhängen*

Gegeben: $P_1 (x_1; y_1)$ sowie s und $t_{1,2}$

Gesucht: die Koordinaten von $P_2 (x_2; y_2)$

$$\text{Aus} \quad \sin t_{1,2} = \frac{(y_2 - y_1)}{s} \quad \text{bzw.} \quad \cos t_{1,2} = \frac{(x_2 - x_1)}{s}$$

ergeben sich durch Umformung die Koordinaten von P_2 zu:

$$y_2 = y_1 + s \cdot \sin t_{1,2}$$

$$x_2 = x_1 + s \cdot \cos t_{1,2}$$

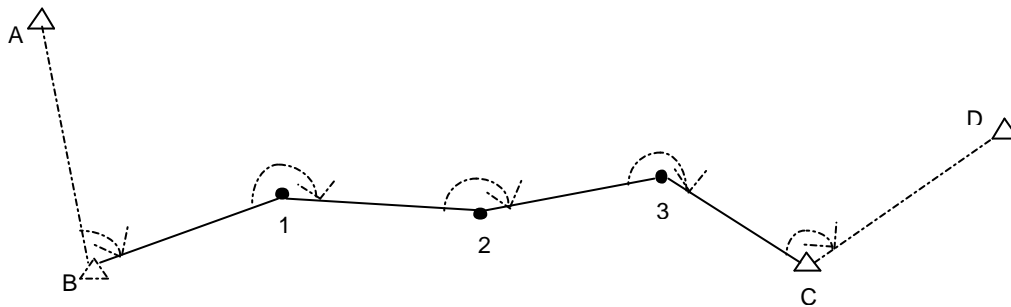
3.5.2 Punktbestimmung mittels Polygonzügen (mehrfaches polares Anhängen)

Wie schon beschrieben, lassen sich von einem bekannten Punkt die Koordinaten eines zweiten über die Horizontalstrecke und den Richtungswinkel berechnen. Sollen nun mehrere unbekannte Punkte hintereinander bestimmt werden, so verwendet man dazu **Polygonzüge**. Mit ihnen werden auch die Aufnahmepunkte bzw. Messungslinien für die Orthogonalaufnahme, das Einbindeverfahren und die Polaraufnahme, die bei kleineren Vermessungsgebieten Anwendung finden, geschaffen.

Bei langgestreckten, schmalen Aufnahmegebieten (Verkehrswege) werden die Polygonzüge selbst, ohne zusätzliche Verdichtung, für Aufnahme und Absteckung verwendet. Schließlich sind Polygonzüge auch häufig ein geeignetes Mittel (z.B. in Waldgebieten), um das Dreiecksnetz zu verdichten.

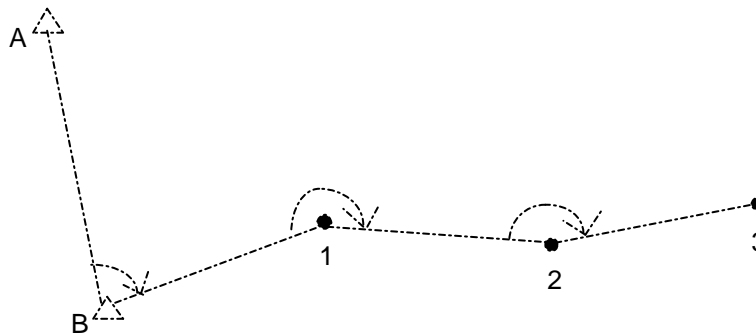
Nach Lage und Form des Gebietes entscheidet man sich für einen der folgenden Polygonzüge.

Beidseitig richtungs- und koordinatenmäßig angeschlossener Polygonzug

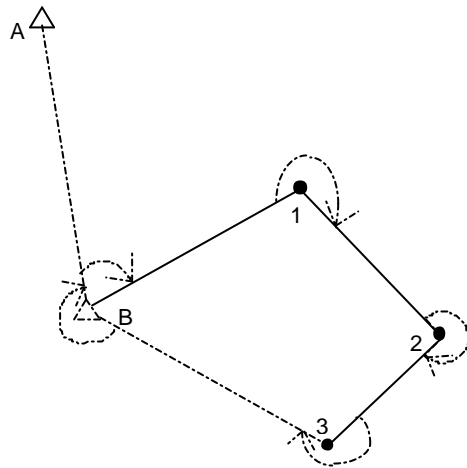


Der Polygonzug sollte möglichst **gestreckt** sein. Da Anschlusspunkte B und C sowie die Fernziele A und D koordinatenmäßig bekannt sind, sind die Winkel- und auch die Streckenmessung kontrollierbar.

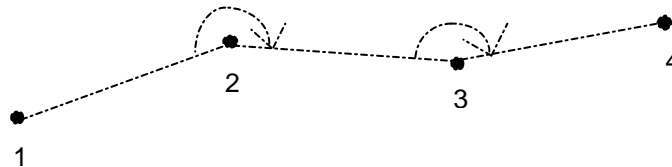
Einseitig angeschlossener Polygonzug



Dieser Polygonzug sollte nur in zwingenden Sonderfällen angewendet (z.B. **Tunnel** während des Vortriebs) werden, da keine Richtungs- und Streckenkontrolle möglich sind und damit die Lage der Neupunkte völlig unkontrolliert ist. Zur Sicherung gegen grobe Fehler sollte man eine Doppelmessung durchführen.

Ringpolygonzug

Auch dieser Polygonzug ist nur in zwingenden Sonderfällen anzuwenden, da zwar die Winkelmessung kontrollierbar ist (Winkelsumme im Vieleck), jedoch keine Absicherung gegen Fehler im Anschlusswinkel AB1 und gegen Maßstabsfehler besteht. Grobe Streckenfehler werden aber erkannt.

Freier Polygonzug

Ein freier Polygonzug wird meistens für die Anlage eines beliebigen Koordinatensystems benutzt. Maßstabs- und Winkelfehler gegenüber dem Landesnetz können natürlich nicht aufgedeckt werden.

Feldarbeiten bei der Polygonierung (Erkundung, Vermarkung, Signalisierung, Messung):

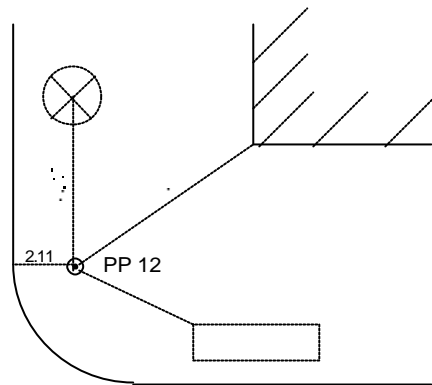
a) Erkundung und Auswahl der Polygonpunkte

Die Auswahl der Polygonpunkte hängt hauptsächlich vom Zweck ihrer selbst ab. Das heißt, soll eine Aufnahme, Absteckung oder auch beides durchgeführt werden.

Von den Polygonpunkten sollten möglichst viele Einzelheiten für die Aufnahme und Absteckung sichtbar sein. Eine einwandfreie Sicht zwischen den Punkten ist Bedingung. Die Bodenpunkte sollten für die Winkelmessung möglichst anzielbar sein.

Die Streckenmessung muss mit den gewählten und zur Verfügung stehenden Messgeräten möglich sein. Die Länge der Polygonseiten ist abhängig von Zweck und dem Messgerät für Strecke, normalerweise jedoch zwischen 50 und 200 m.

Außerdem ist die gute Aufstellungsmöglichkeit für Theodolit wichtig (Sumpfgebiet, Straßenmitte/Verkehr usw. vermeiden). Bei Ingenieurvermessungsaufgaben sollten die Punkte möglichst außerhalb des Baufeldes gewählt werden, so dass sie während der Bauausführung erhalten bleiben.

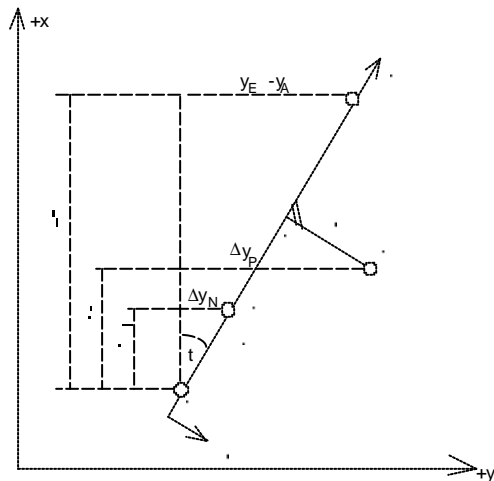
b) **Vermarkung und Signalisierung**

Die Punkte werden immer vor der eigentlichen Messung und dauerhaft vermarkt! Vermarkungsmaterial können Steine, Tonrohre oder Eisenrohre mit Schutzkappen sein. Die Vermarkung wird unterirdisch und oberirdisch durchgeführt. Zur Sicherung und zum Aufsuchen der Punkte werden Einmessskizzen (siehe Abbildung) angefertigt.

Bei der Messung werden die Polygonpunkte mit Fluchtstäben signalisiert. Es ist darauf zu achten, dass die Zentrierung des Instrumentes sorgfältig durchgeführt wird, da diese einen großen Fehlereinfluss hat. Für genauere Polygonzüge verwendet man Zwangszentrierung, eine Vorrichtung, mit der man bei unverändertem Stativ und Dreifuß, Theodolit und Zieltafel auswechseln kann.

3.5.3 Berechnung von Kleinpunkten

Wenn Anfangs- und Endpunkt einer örtlichen Messungslinie in Landeskoordinaten gegeben sind, so können die Landeskoordinaten der Kleinpunkte nach folgenden Formeln berechnet werden:



Geg.:

- Koordinaten von A (x_A ; y_A)
- Koordinaten von E (x_E ; y_E)

Gem.:

- Entfernung $AE = s$
- Teilstrecken s_N ; s_P und h_P

Ges.:

- Koordinaten von N (x_N ; y_N)
- Koordinaten von S (x_S ; y_S)

1.) Vergleich der gemessenen Strecke (s) mit der aus Koordinaten gerechneten Strecke (S_{ger})

$$S_{ger} = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$$

$$d = S_{ger} - s_{gem}$$

$$\text{Maßstabsfaktor: } m = \frac{S}{s} \Rightarrow s \cdot m = S \quad \text{oder} \quad \Delta s \cdot m = \Delta S$$

2.) Berechnung der x-Koordinaten für Punkte auf der Messungslinie

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\Delta x_N}{\Delta S_N} = \frac{(x_E - x_A)}{S} \quad \frac{\Delta x_N}{s_N} = \frac{(x_E - x_A)}{s}$$

ger. Werte gem. Werte

$$\Rightarrow \Delta x_N = \frac{(x_E - x_A)}{s} \cdot s_N = a \cdot s_N \quad \Rightarrow a = \frac{(x_E - x_A)}{s}$$

Die x-Koordinaten ergeben sich zu: $x_N = x_A + \Delta x_N$

3.) Berechnung der y-Koordinaten für Punkte auf der Messungslinie

Nach Strahlensatz gilt ebenfalls:

$$\frac{\Delta y_N}{\Delta S_N} = \frac{(y_E - y_A)}{S} \quad \frac{\Delta y_N}{s_N} = \frac{(y_E - y_A)}{s}$$

ger. Werte gem. Werte

$$\Rightarrow \Delta y_N = \frac{(y_E - y_A)}{s} \cdot s_N = o \cdot s_N \quad \Rightarrow o = \frac{(y_E - y_A)}{s}$$

Die y-Koordinaten ergeben sich dann zu: $y_N = y_A + \Delta y_N$

4.) Berechnung seitwärts liegender Punkte

Zuerst wird, wie oben beschrieben, der Fußpunkt (x_F ; y_F) von P auf der Messungslinie AE berechnet. Vom ihm ausgehend lassen sich die Koordinaten von P wie folgt ermitteln.

$$\frac{-(x_P - x_F)}{h_P} = \frac{(y_E - y_A)}{s} \quad \frac{(y_P - y_F)}{h_P} = \frac{(x_E - x_A)}{s}$$

$$x_P - x_F = -\frac{(y_E - y_A)}{s} \cdot h_P = -o \cdot h_P \quad y_P - y_F = -\frac{(x_E - x_A)}{s} \cdot h_P = a \cdot h_P$$

$$x_P = x_F - o \cdot h_P \quad y_P = y_F + a \cdot h_P$$

Wichtig: Alle Punkte die links von der Messungslinie AE liegen, müssen mit negativem h berechnet werden.

5.) direkte Berechnung seitwärts liegender Punkte

Durch Einsetzen der unter 2.) und 3.) ermittelten Formel in 4.) ergeben sich folgende Formeln zur direkten Berechnung seitwärts gelegener Punkte:

$$\begin{aligned} \Delta x_F &= a \cdot s_P & \Delta y_F &= o \cdot s_P \\ x_F &= x_A + \Delta x_F & y_F &= y_A + \Delta y_F \\ x_P &= x_F - o \cdot h_P & y_P &= y_F + a \cdot h_P \\ x_P &= x_A + \Delta x_F - o \cdot h_P \\ y_P &= y_A + \Delta y_F + a \cdot h_P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_p = x_A + a \cdot s_p - o \cdot h_p$$

$$y_p = y_A + o \cdot s_p + a \cdot h_p$$

6.) Kontrolle der Transformationskonstanten a und o

$$a^2 + o^2 = \frac{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}{s^2} = \frac{S^2}{s^2} = m^2$$

$$\text{mit } d = S - s; S = d + s$$

$$m^2 = \frac{(d+s)^2}{s^2} \approx 1 + 2 \frac{d}{s}$$

4 Lagemessungen in Detailausschnitten der Erdoberfläche

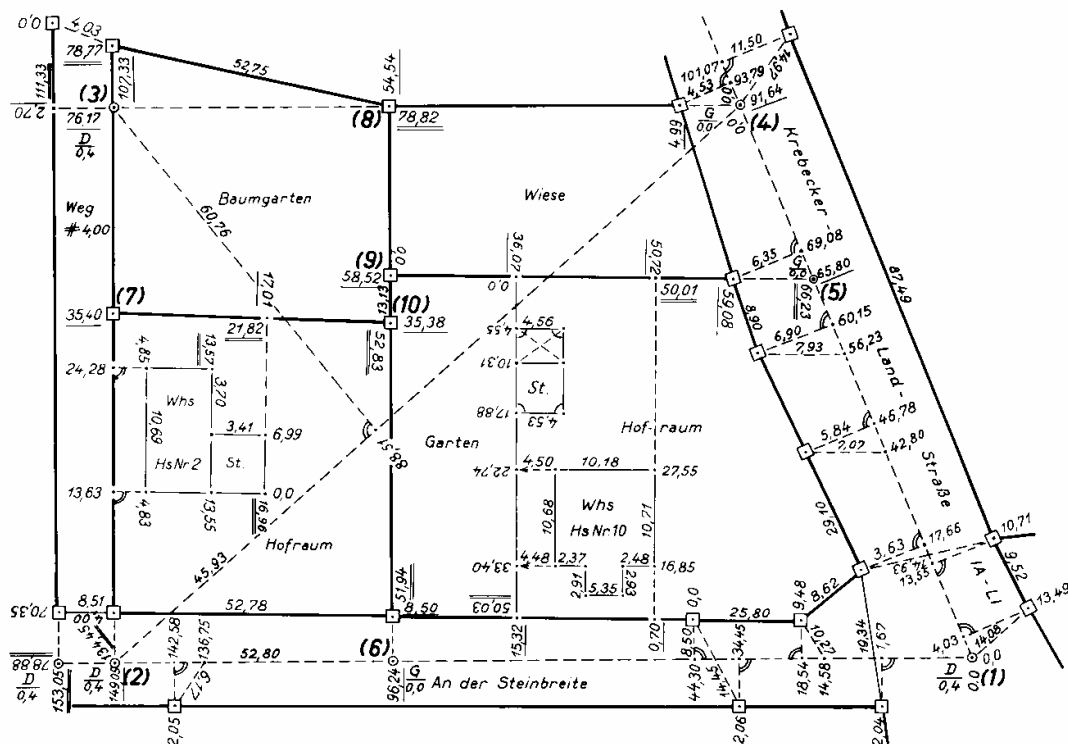
4.1 Aufzunehmende Gegenstände

Die Aufnahmegegenstände, die sich nach dem Zweck der Aufnahme richten, können sein:

- Eigentums- und Kulturgrenzen,
- Gebäude, Nutzungsarten,
- Flüsse, Bäche,
- Straßen, Wege (mit Kunstbauten wie Brücken, Böschungen usw.),
- Mauern, Zäune, Hecken,
- unterirdische und oberirdische Leitungen.

Hinweise zur Feldbuchführung:

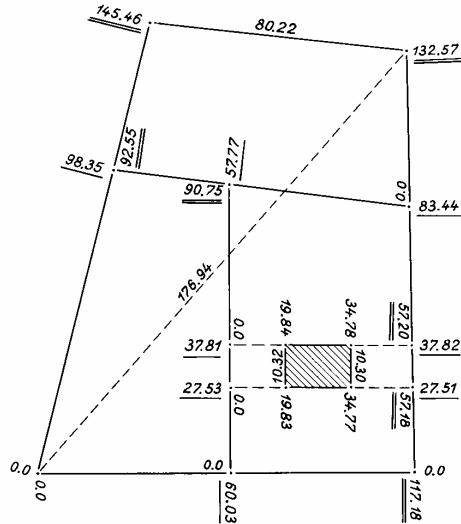
- Der Feldriss soll **ungefähr maßstäblich** sein.
- Die Maße sollen sachgerecht aufgeschrieben sein, so dass ein fremder Bearbeiter das Feldbuch weiterverwenden kann.
- Das Feldbuch soll enthalten: **Nordpfeil, Angabe des Ortes, Datum der Aufnahme, Name des Aufnehmenden**
- Das Feldbuch soll vollständig sein und vor Abschluss der Messung daraufhin überprüft werden.



4.2 Verfahren zur Lageaufnahme

Zur Aufnahme eines Gebietes müssen mindestens so viele Maße gemessen werden, dass die aufgenommenen Gegenstände wieder eindeutig aufgezeichnet werden können.

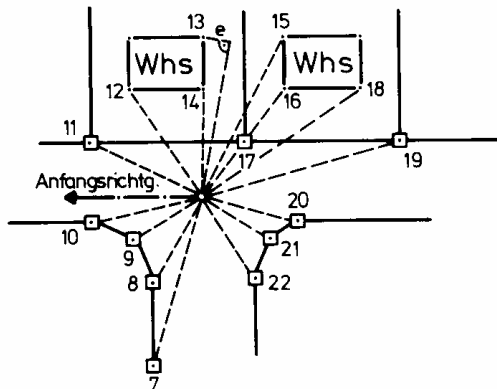
4.2.1 Einbindeverfahren



Die Seiten der aufzunehmenden Gegenstände (Häuser usw.) werden durch **Verlängerung** mit Grenz- und Messungslinien zum Schnitt gebracht und diese Schnitte werden eingemessen.

benötigte Instrumente: Messband, Fluchtstäbe

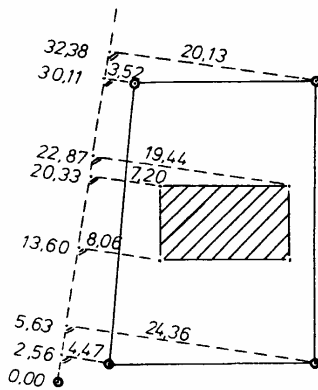
4.2.2 Polarverfahren



Von einem Standpunkt aus werden die aufzunehmenden Punkte durch **Messung von Winkel und Strecke** gegenseitig festgelegt.

benötigte Instrumente: Theodolit und Messband oder EDM, Fluchtstäbe oder Reduktionstachymeter (Streckenmessung optisch) oder elektronischer Theodolit, der die Schrägentfernung, Seiten- und Höhenwinkel misst. (Alle diese Werte können im Feld automatisch registriert werden).

4.2.3 Orthogonalverfahren



Auf eine geeignete Messungslinie werden die aufzunehmenden Punkte **rechtwinklig** aufgenommen.

benötigte Instrumente: Kreuzscheibe (oder Prisma, Winkelspiegel), Messband, Fluchtstäbe

4.3 Vergleich der drei Verfahren

Das **Einbindeverfahren** erfordert **wenig Geräteaufwand**, ist **aber umständlich**.

Das **Polarverfahren** ist von der Aufnahme her recht **einfach** und eignet sich gut zur **Automatisierung**. Von geeignet gewählten Standpunkten können viele Punkte aufgenommen werden.

Das **Orthogonalverfahren** liefert direkt örtliche **rechtwinklige Koordinaten**. Damit können Spannmaße über Pythagoras sofort im Feld kontrolliert werden.

Feldarbeiten bei der Orthogonalaufnahme:

- Erkundung des aufzunehmenden Gebietes und Festlegung der Messungslinien
- Vermarkung der Punkte zur Festlegung der Messungslinien
- Vorbereitung des Handrisses
- Aufnahme
- Einmessung der Messungslinien

Bei der Aufnahme müssen die Maße gemessen werden, die zur eindeutigen Festlegung der Aufnahmegegenstände nötig sind. Weiterhin müssen Kontrollmaße gemessen werden, mit deren Hilfe die gemessenen Abszissen und Ordinaten und der rechte Winkel nach Pythagoras verprobt werden können. Diese Verprobung sollte mit dem elektronischen Feldbuch oder mit einem Taschenrechner sofort im Feld durchgeführt werden.

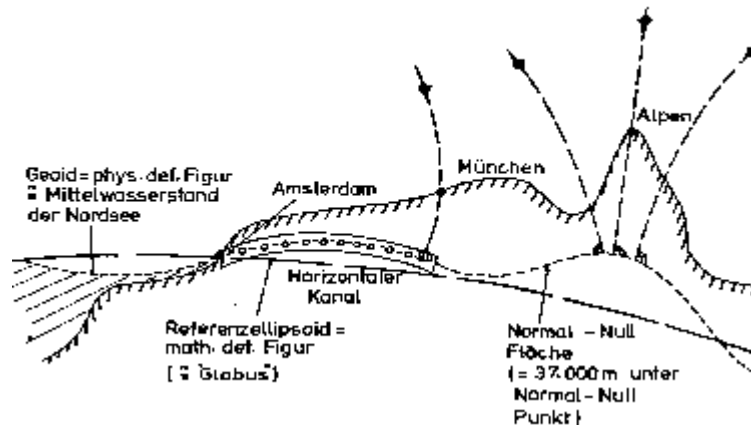
Häusliche Bearbeitung aller Lageaufnahmen:

Die häusliche Bearbeitung besteht aus der Kartierung und aus Folgeberechnungen (z.B. Flächenberechnungen und Kleinpunktberechnungen).

5 Höhenbestimmung

5.1 Höhensysteme und Bezugsflächen

Grundlage jeder Höhenmessung ist die schwerkraftbedingte Lotrichtung. Im Gegensatz zu den geometrisch definierten Bezugssystemen der geodätischen Lagemessung (Ebene, Kugel, Rotationsellipsoid) ist das Bezugssystem der Höhenmessung physikalisch definiert. Bezugsfläche für Höhenmessungen ist das **Geoid**. Eine nähere Erläuterung soll anhand eines Vertikalschnittes durch die europäische Küstenregion bei Amsterdam erfolgen:

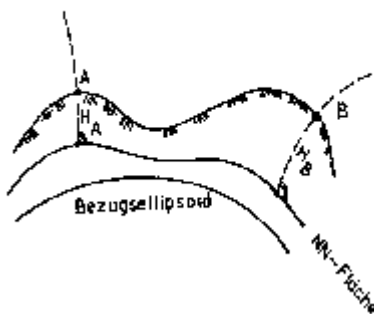


Die Lotlinien sind entsprechend der auf oder unter der ruhenden Meeresoberfläche befindlichen Massen (Kontinente) gekrümmt; z. B. konvergieren die Lotrichtungen in Alpennähe infolge der größeren Gravitation. Unter den Kontinenten liegt das Geoid oberhalb des Ellipsoids.

Am Amsterdamer Pegel wurde im ausklingenden 19. Jahrhundert aus langjähriger Beobachtung das Mittelwasser der Nordsee als "Mittelwasserstand der Nordsee" berechnet. Für Deutschland wurde 1913 an der Berliner Sternwarte ein Normalhöhenpunkt geschaffen, der ca. 37 m über dem Amsterdamer Mittelwasser liegt. Als Bezugsfläche "Normal Null" wurde dann diejenige Äquipotentialfläche (Niveaufläche) definiert, die exakt 37.00 m unter dem NN Punkt an der Berliner Sternwarte liegt. Diese Definition stimmt infolge der unvermeidbaren Messungenauigkeiten nur ungefähr mit dem Mittelwasser der Nordsee bei Amsterdam überein. Auf diese Niveaufläche beziehen sich alle amtlichen Höhenangaben in Deutschland nach 1913, die den Zusatz "NN" tragen. Höhenangaben, die sich auf Pegelbeobachtungen vor 1913 beziehen, können erheblich von NN-Höhen abweichen.

Definitionen:

NN-Höhe eines Punktes: lotrechter Abstand eines Punktes von der NN-Fläche, gemessen entlang der gekrümmten Lotlinie



Höhenunterschied zweier Punkte:

Differenz der NN-Höhen beider Punkte:

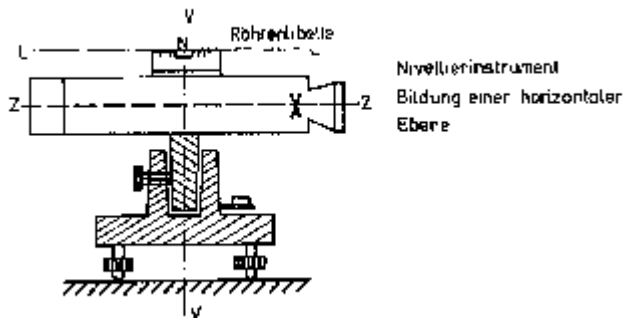
$$\Delta H = H_A - H_B$$

5.2 Instrumente und Verfahren der Höhenbestimmung

5.2.1 Das Nivellier

Nivellierinstrumente sind Messinstrumente, die es gestatten, eine Zielachse horizontal auszurichten. Man unterscheidet 3 Typen von Nivellierinstrumenten:

1. Nivellierinstrument ohne Kippschraube (Norddeutsches Nivellier)



Ein um die Umdrehungsachse drehbar angeordnetes Messfernrohr mit Röhrenlibelle in Richtung der Zielachse, bietet die Möglichkeit, optisch eine Horizontalebene aufzuspannen.

Hierfür muss zunächst die Umdrehungsachse (VV) vertikal gestellt werden. Das wird erreicht, indem man sie mit Hilfe der Fußschrauben senkrecht zur Libellenachse (= Tangente an den Normalpunkt der

Röhrenlibelle) einstellt. Damit ist das Messgerät horizontiert.

1. Forderung $VV \perp LL$ (Umdrehungsachse \perp Libellenachse)

Dreht man jetzt das nicht justierte Instrument, so beschreibt die geneigte Zielachse einen Kegelmantel. Erst durch Erfüllung der 2. Forderung wird eine horizontale Ebene bei Drehung des Fernrohrs um die Umdrehungsachse erhalten.

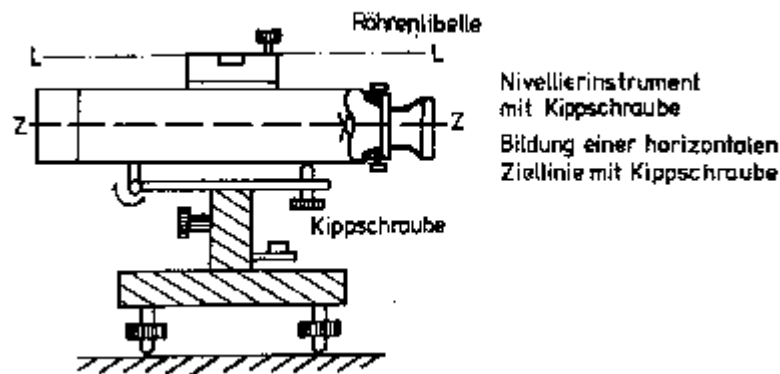
2. Forderung $LL \parallel ZZ$ (Libellenachse \parallel Zielachse)

2. Nivellierinstrument mit Kippschraube (Süddeutsches Nivellier)

Da beim Liniennivellement im Allgemeinen nur 2 ausgewählte Richtungen horizontal visiert werden müssen, nämlich Rück- und Vorblick, stellt die allseitige Horizontierung des zuvor beschriebenen Instrumententyps einen erheblichen Aufwand dar. Der lässt sich bei Verwendung eines Kippschrauben-Nivelliergerätes vermeiden. Hier ist das Messrohr, dass die Forderung

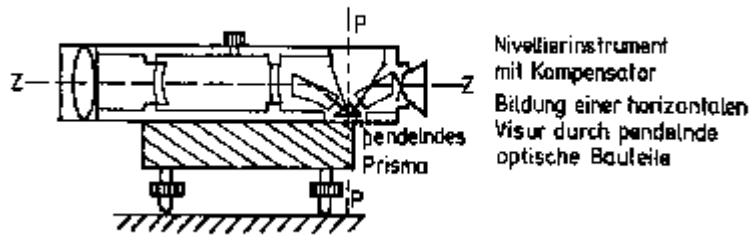
$LL \parallel ZZ$

erfüllen muss, um geringe Beträge kippbar gelagert.

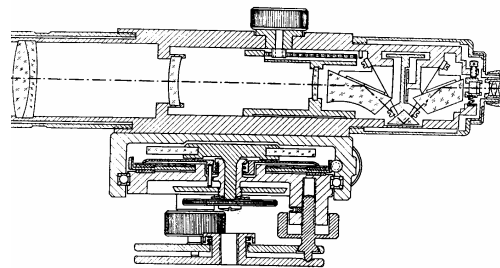


Man horizontiert das Instrument mit einer Dosenlibelle grob vor (2' Angabe) und horizontiert nur in Ableserichtung die empfindliche Röhrenlibelle mit der Kippschraube. Diese Bauart wird auch für Präzisionsnivelliere verwendet. Eine Erfüllung der Forderung $LL \perp VV$ ist nicht notwendig.

3. Automatische Nivelliergeräte (Kompensatornivelliere)



Bei diesem Instrumententyp wird das Einspielen der Kippschraube (= Horizontierung der Zielachse in Messrichtung) durch das Einpendeln schwerkraftgeffesselter Bauteile ersetzt.



Längsschnitt durch Zeiss Ni 2

Das Nivelliergerät wird nur noch mit einer Dosenlibelle grob horizontiert. Die Achsforderung $ZZ \parallel LL$ besteht prinzipiell weiter. Jedoch muss sie hier in modifizierter Form

$$ZZ \perp PP$$

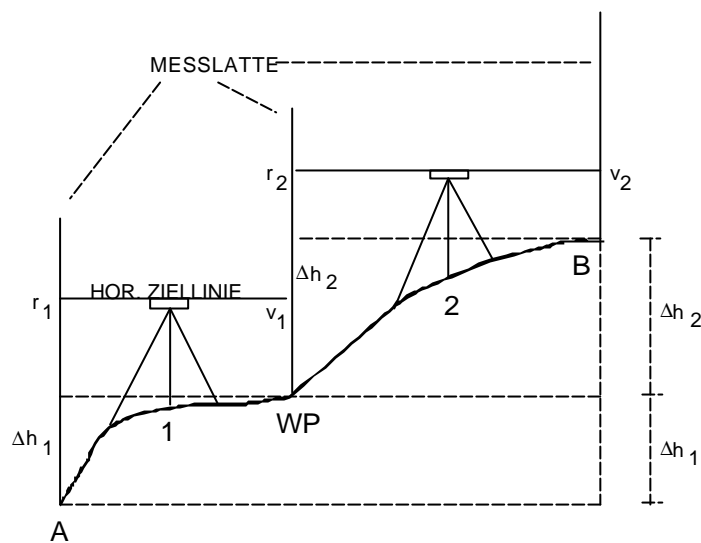
d.h. Zielachse senkrecht Pendelachse (= Lotrichtung) erfüllt werden, da keine Libellenachse im Sinn des Wortes existiert.

Bei diesem Gerätetyp lassen sich Ingenieurnivellements mit $m_{km} = \pm 2$ mm durchführen. Durch das automatische Feinhorizontieren lassen sich gegenüber dem Kippschraubennivellier ca. 40% der Messzeit einsparen.

Achtung : Justierung $ZZ \perp PP$ erfolgt manuell.

5.2.2 Das geometrische Nivellement

Das Prinzip des Nivellements geht aus folgender Skizze hervor:



$$\Delta h_1 = r_1 - v_1$$

$$\Delta h_2 = r_2 - v_2$$

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2$$

Mit einem Nivellierinstrument schafft man sich eine horizontale Ziellinie. In einem Festpunkt A, dessen Höhe - z.B. über NN - bekannt ist, liest man an einem vertikal stehenden Maßstab (= Nivellierlatte) den Rückblick r_1 als Höhenunterschied zwischen Festpunkt und Instrument ab. Ohne das Nivelliergerät höhenmäßig zu verändern, dreht man es in Richtung auf den Wechsellpunkt WP und liest wieder an einer Nivellierlatte den

Höhenunterschied v_1 zwischen Instrument und Wechsellpunkt ab.

Der Höhenunterschied von A nach WP ergibt sich aus:

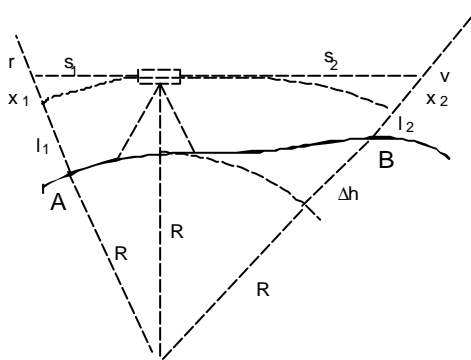
$$\Delta h_{A,WP} = r_1 - v_1 \text{ (Höhenunterschied = Rückblick - Vorblick)}$$

”Rückblick” = Visur zum höhenmäßig bekannten Punkt (rückwärts im Sinne der Messrichtung)

”Vorblick” = Visur zum höhenmäßig unbekannten Punkt (vorwärts im Sinne der Messrichtung)

Will man Höhen über größere Entfernungen übertragen und summiert dazu die Höhenunterschiede, so reduziert man sie auf eine Ebene. Betrachtet man aber die Höhenangaben als auf die NN-Fläche bezogen, kann deren Krümmung nicht vernachlässigt werden.

Approximiert man die NN-Fläche im Standpunkt durch eine Kugel mit dem Radius $R = 6370 \text{ km}$ (Erdradius) und wählt für Rück- und Vorblick ungleiche Zielweiten, so ergibt sich:



$$\text{Rückblick: } r = l_1 + x_1$$

$$\text{mit } x_1 = \frac{s_1^2}{2R}$$

$$r = l_1 + \frac{s_1^2}{2R}$$

$$\text{Vorblick: } v = l_2 + x_2$$

$$v = l_2 + \frac{s_2^2}{2R}$$

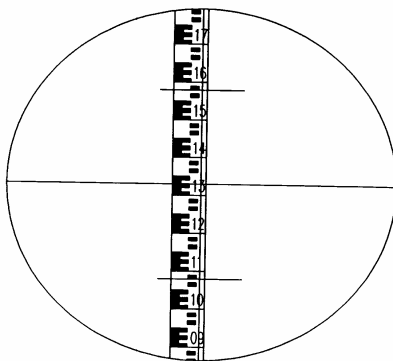
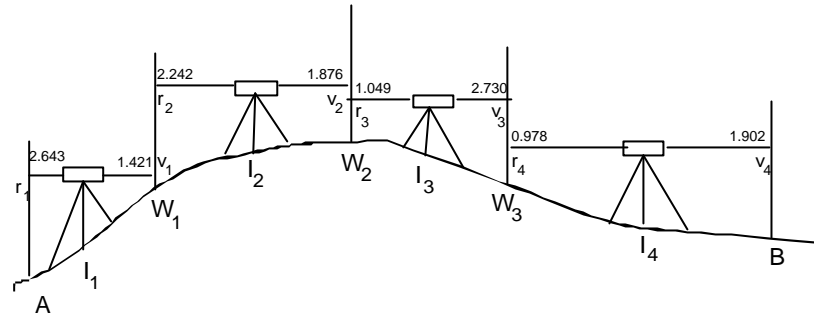
$$\Rightarrow r - v = l_1 - l_2 + \frac{s_1^2 - s_2^2}{2R} = \Delta h + \frac{s_1^2 - s_2^2}{2R}$$

Um die Größe des Einflusses der Erdkrümmung abzuschätzen, setzen wir $s_1 = 50 \text{ m}$ und $s_2 = 0 \text{ m}$ und erhalten somit:

$$\frac{s_1^2 - s_2^2}{2R} = \frac{(50 \text{ m})^2 - (0 \text{ m})^2}{2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m}} = 0.0002 \text{ m} = 0.2 \text{ mm}$$

Wählt man jedoch $s_1 = s_2$, so fällt der Einfluss der Erdkrümmung heraus!

5.2.3 Einfaches Liniennivellement, Feldarbeiten und Auswertung



Ablesung: $l = 1,329 \text{ m}$

Nivellierlattenablesung

Der Höhenunterschied der Punkte A und B soll durch ein Nivellement bestimmt werden. Die Nivellierlatte wird auf dem Festpunkt A aufgestellt und die Latte wird abgelesen. Dabei werden Meter, Dezimeter und Zentimeter abgelesen; die Millimeter werden geschätzt. Anschließend wird die Latte auf den Wechsellpunkt W_1 gebracht, wobei durch Abschreiten darauf zu achten ist, dass die Strecken AI_1 und I_1W_1 ungefähr gleich sind. Dadurch fällt der Einfluss einer eventuellen Schiefe der Ziellinie heraus. Damit die Latte in den Wechsellpunkten gut steht, wird hier eine Bodenplatte fest in den Boden eingetreten. Nachdem die Ablesung in W_1 erfolgt ist, wandert das Instrument nach I_2 , während die Latte in W_1 gedreht wird. In I_2 wird wieder W_1 abgelesen, dann wandert die Latte nach W_2 . So wiederholt sich der ganze Vorgang.

Es ist darauf zu achten, dass die Zielweiten in einem Standpunkt ungefähr gleich sind und dass die Latte in den Wechsellpunkten fest steht. Die Zielweiten sollen 50 m nicht überschreiten. Soll die Höhe eines Punktes bestimmt werden, so wird man das Nivellement auf einem anderen bekannten Höhenfestpunkt abschließen oder zum Ausgangspunkt zurücknivellieren. Um Refraktionseinflüsse zu vermeiden, soll jede Zielung mindestens 50 cm über dem Boden verlaufen.

Das Feldbuch für die obige Messung sieht folgendermaßen aus:

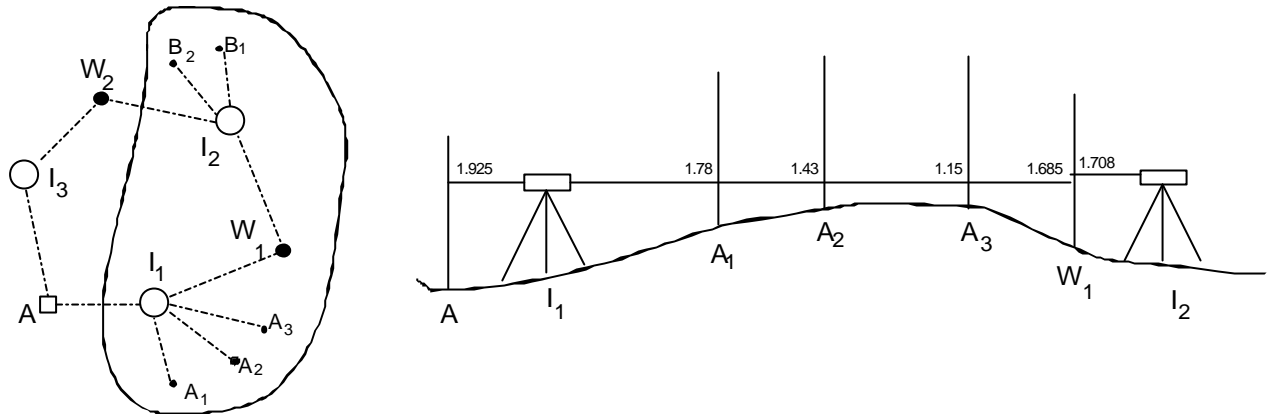
Zielpunkt	Ablesung Rückblick	Ablesung Vorblick	Höhenunterschied $\Delta h = r - v$	Verb.	Höhe	Bemerkung
A	2.643		+1.222		248.346	NN-Höhe A
W_1	2.242	1.421	+0.366		249.568	NN-Höhe W_1
W_2	1.049	1.876	-1.681		249.934	NN-Höhe W_2
W_3	0.978	2.730	-0.924		248.253	NN-Höhe W_3
B		1.902			247.329	NN-Höhe B
	$\Sigma r = 6.912$	$\Sigma v = 7.929$	$\Sigma \Delta h = -1.017$		$\Delta H = H_B - H_A$	

$$\text{Proben: } \Sigma \Delta h = \Sigma r - \Sigma v$$

$$\Delta H = H_B - H_A = \Sigma \Delta h$$

5.2.4 Flächennivellement

Beim Flächennivellement wird nicht jeder **Vorblick** zu einem Wechsellpunkt ausgeführt, sondern man beobachtet, ausgehend von der **Instrumentenhöhe** (= Höhe der horizontalen Zielachse), mehrere **Zwischenblicke**. Diese Ablesungen sind nicht über eine Abschlussprobe kontrollierbar. Im Allgemeinen nimmt man Geländepunkte niedriger Genauigkeit so auf.



Die Punkte A_1 , A_2 , A_3 , B_1 und B_2 sind Zwischenablesungen eines Liniennivellements, das auf dem Höhenpunkt A beginnt und endet.

Ziel-punkt	Ablesung Rückblick	Ablesung Zwischen-blick	Ablesung Vorblick	Höhen-unterschied	Verb.	Höhe des Punktes	Bemer-kung
A	1.925					329.643	
A_1		1.78		+0.14		329.78	
A_2		1.43		+0.50		330.14	
A_3		1.15		+0.78		330.42	
W_1	1.708		1.685	+0.240	+0.001	329.884	
B_2		0.12		-1.59		328.29	
B_1		0.37		-1.34		328.54	
W_2	0.574		0.978	+0.730	+0.001	330.615	
A			1.547	-0.973	+0.001	329.643	
	$\Sigma r = 4.207$		$\Sigma v = 4.210$				

Probe: $\Sigma r - \Sigma v = 0$

$\Sigma r - \Sigma v = -0.003$

(Soll-Wert; Schleifennivellement)

Verbesserung = Soll - Ist = $0 - (-0.003) = 0.003$

5.2.5 Prüfung und Berichtigung eines Nivellierinstrumentes (Justierung)

- Forderungen: 1. Libellenachse muss senkrecht zur Umdrehungsachse sein. $LL \perp VV$
 2. Zielachse muss parallel zur Libellenachse sein. $LL \parallel ZZ$

Diese beiden Forderungen sind in folgender Art und Weise zu erfüllen.

1. Senkrechtstellen der Libellenachse zur Umdrehungsachse

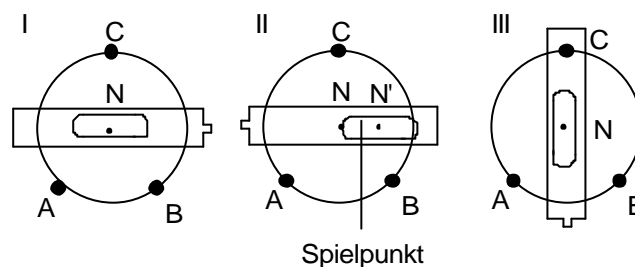
Das Fernrohr mit der Libelle wird parallel zu zwei Fußschrauben (A,B) gestellt und die Libelle wird durch Drehen der Fußschrauben eingespielt. Damit wird erreicht, dass die Umdrehungsachse zur Vertikalen den gleichen Winkel bildet wie die Libellenachse zur Setzlinie (I).

Das Fernrohr wird um 200 gon gedreht (II). Die Libellenblase wandert um den Betrag $2a$ von N nach N'. Die Hälfte des Ausschlages (a) wird mit den beiden Fußschrauben (A,B) beseitigt. Die Libelle steht dann im Spielpunkt.

Der restliche Ausschlag wird mit Hilfe der Justierschrauben der Libelle beseitigt. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis der restliche Ausschlag kleiner als ein Teilstrich ist. Damit ist die Projektion von V auf die Vertikalebene durch L lotrecht.

Spielpunkt: Lage der Blasenmitte bei vertikaler Umdrehungsachse (horiz. Setzlinie).

Fernrohr und Libelle werden senkrecht zu AB gestellt (III). Mit der Fußschraube C wird die Libelle eingespielt. Damit steht die Stehachse lotrecht. Die Libelle muss bei beliebiger Richtung des Fernrohrs eingespielt bleiben.

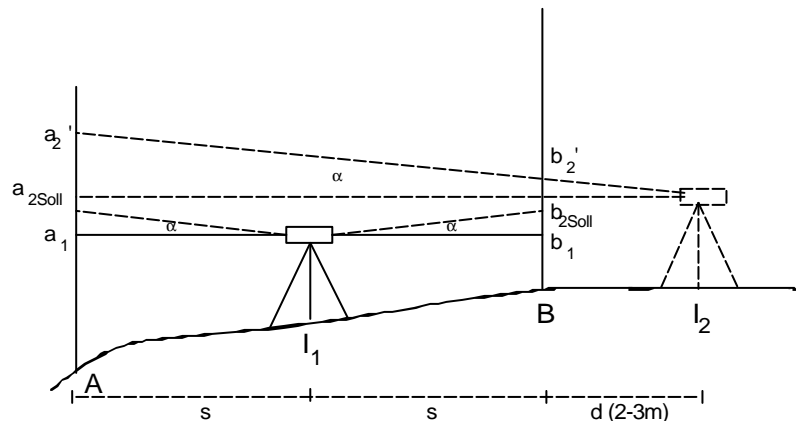


2. Parallelstellen von Zielachse und Libellenachse

Justierung aus der Mitte

Zunächst wird der Höhenunterschied zwischen zwei sicheren, etwa 40-60 m voneinander entfernten Lattenstandpunkten durch Nivellieren **aus der Mitte**, bei eingespielter Libelle, bestimmt. Wenn beide Zielungen gleich lang sind, hat ein Fehler der Zielachse keinen Einfluss auf die Höhendifferenz.

Nachdem der Höhenunterschied Δh im Standpunkt I_1 ermittelt ist, stellt man das Instrument 2-3 m von einem der beiden Punkte entfernt auf und zielt wieder beide Latten an.



Nun ergeben sich folgenden Berechnungen:

fehlerfreier Höhenunterschied: Standpunkt I₁: $\Delta h = a_1 - b_1$
 Standpunkt I₂: $\Delta h = a_{2\text{soll}} - b_{2\text{soll}}$

Sollablesung $a_{2\text{soll}}$: $a_{2\text{soll}} = b_{2\text{soll}} + \Delta h = b_2' + \Delta h$

Die Differenz zwischen b_2' und $b_{2\text{soll}}$ kann vernachlässigt werden. Ergibt die Ablesung an Latte A den von $a_{2\text{soll}}$ abweichenden Wert a_2' , so hat man das Fadenkreuz an den vertikal wirkenden Justierschrauben so weit zu verschieben, bis der Wert $a_{2\text{soll}}$ im Fadenkreuz des Fernrohrs erscheint. Das Verfahren wird nun zur Kontrolle wiederholt bis die Bedingung $a_2' = a_{2\text{soll}}$ erfüllt ist.

Diese Methode hat jedoch den **Nachteil**, dass man bei der Aufstellung in der Nähe eines Punktes stark umfokussieren muss, wodurch Fehler entstehen können.

Beispiel:

Standpunkt I ₁		Standpunkt I ₂	
Ablesung a_1	2.055	Ablesung a_2'	2.425
Ablesung b_2	1.537	Ablesung b_2'	1.915
$\Delta h = a_1 - b_1$	0.518	$\Delta h = a_2' - b_2'$	0.510

$$a_{2\text{soll}} = 1.915 + 0.518 = 2.433$$

Andere Verfahren, die den Nachteil der starken Umfokussierung umgehen und längere Zielweiten verwenden sind u.a.:

- das Näbauer – Justierverfahren
- das Kukkamäki – Justierverfahren

Diese Verfahren werden für die Justierung von Feinnivellieren verwendet und schalten den Einfluss der Zwischenlinse weitgehend aus.

5.3 Moderne Nivelliergeräte

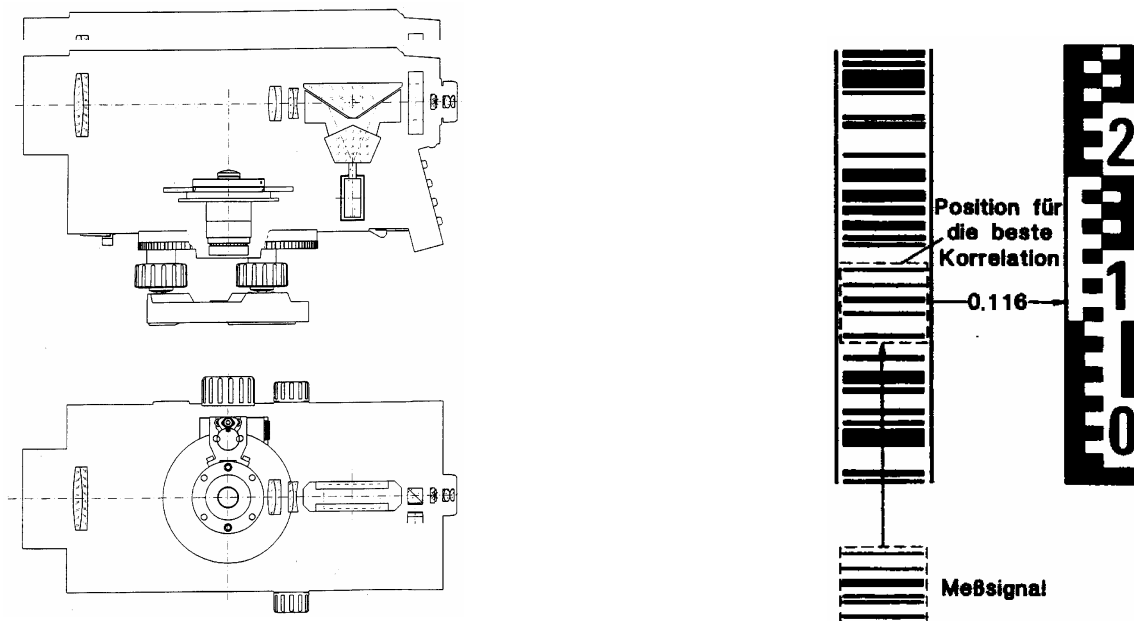
Bei den Eigenschaften der digitalen Nivelliere ist vor allem der Vorteil des automatischen Datenflusses zu erwähnen, welcher Ablese- und Übertragungsfehler vermeidet und ein schnelleres Arbeiten gewährleistet. Bei der Entwicklung der automatisierten Nivelliere wurde anfangs versucht, den horizontalen Zielstrahl durch einen Laserstrahl zu realisieren und diesen an der Nivellierlatte zu detektieren. Aus dieser Entwicklung sind die heutigen Nivelliere mit **rotierendem Laser** hervorgegangen, welche unter anderem sehr gut für die Durchführung von **Flächennivellements** geeignet sind. Bei der Durchführung von Liniennivellements ist es für die Kontrollen und Genauigkeitsabschätzungen erforderlich, die Messdaten im Messgerät zu erfassen. Aus diesem Gesichtspunkt heraus entwickelte sich ein Verfahren, welches sich auf die digitale Bildverarbeitung stützt und mit Wild NA 2000 im Jahre 1990 erstmals in Serie herausgebracht wurde.

5.3.1 Nivelliere mit CCD Sensortechnik

Der Aufbau dieser Nivelliere basiert auf dem Prinzip von Kompensatornivellieren. Eine optische Ablesung ist bei diesen Geräten möglich. Ergänzt werden sie durch **CCD** - Sensoren zur Bildaufnahme

(CCD - Charge Coupled Device).

Bei der Arbeit mit diesen Geräten ist auf eine möglichst **genaue Fokussierung** zu achten, da das Bild der Messlatte auf der CCD - Zeile abgebildet wird und bei nicht zureichender Fokussierung Fehler auftreten können.



Die oben stehende Abbildung zeigt ein Schnittbild durch das Digitalnivellier DiNi 10 der Firma Zeiss und eine Messlatte mit **Binärkode** für die elektrooptische und der normalen Einteilung für die optische Ablesung (Vorder- bzw. Rückseite).

Die angezielte Messlatte wird von dem Objektiv und der Fokussierlinse über das pendelnd aufgehängte und das feststehende Prisma sowie das Teilerprisma zum einen auf das Strichkreuz und zum anderen durch den teildurchlässigen Spiegel auf die CCD-Zeile abgebildet.

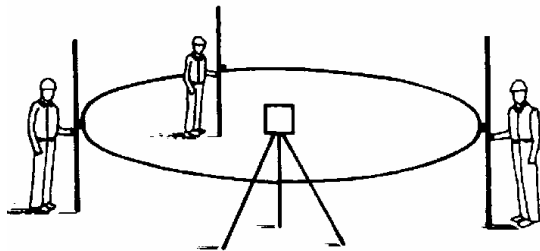
Dieses Lattenbild erzeugt in einem CCD-Sensor Hell-/Dunkelsignale. Diese Signale werden **einem Analog-Digital-Wandler** zugeführt. Die erzeugten digitalen Werte werden von einer Bildbearbeitungssoftware decodiert und kommen als Lattenablesungen im Display zur Anzeige. Die Ablesungen können im wechselbaren Datenspeicher abgelegt werden.

5.3.1.1 Nivelliere mit rotierendem Laser

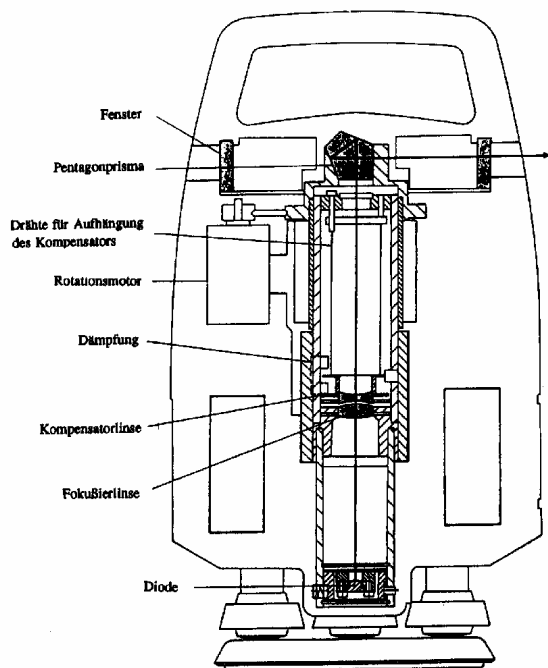
Das Anwendungsgebiet des Rotationslasernivelliers erstreckt sich vor allem auf Flächennivellements, Bauabsteckungen, Deformationsmessungen und ähnliche Aufgabenstellungen.

5.3.1.2 Messverfahren

Mit dem rotierenden Laser wird eine Bezugsebene definiert. Diese Ebene kann horizontal, vertikal oder geneigt sein.



Im Bezug auf diese Ebene kann der Abstand bzw. der Höhenunterschied weiterer Raumpunkte mit einer Nivellierlatte bestimmt werden. Wobei die Stelle auf die der Laser an der Latte trifft entweder abgelesen oder automatisch erfasst werden kann.



Die nebenstehende Abbildung zeigt die Prinzipskizze eines Nivelliers mit Rotationslaser und nicht sichtbarem Laserstrahl, Telemat (Theis).

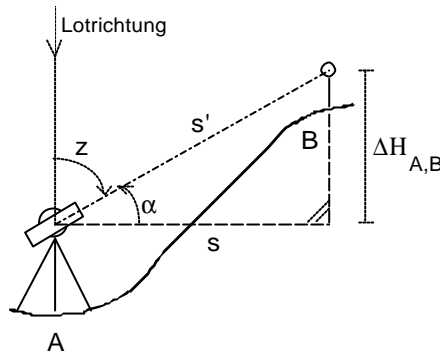
Das Messprinzip dieser Nivelliere ist folgendermaßen: Eine von einem Laser erzeugte Laserstrahlung wird durch ein optisches Abbildungssystem auf ein rotierendes Pentagonprisma projiziert. Durch dieses Prisma wird der Laserstrahl aus seiner ursprünglichen Richtung um 90° abgelenkt. Durch das rotierende Prisma wird die Bezugsebene hergestellt. Je nach Art des Laserstrahls kann nun eine Ablesung an der Nivellierlatte (bei sichtbarem Laserstrahl) oder eine Erfassung von einem Detektor erfolgen. Das Nivelliergerät kann auf einem Stativ je nach Ausführung entweder mit der Hilfe von Libellen oder von einem Kompensator feinhorizontiert werden.

Die Reichweite dieser Nivelliere wird im Allgemeinen mit 300 bis 500m angegeben. Die erreichbaren Genauigkeiten liegen bei 5 bis 10mm auf 100m.

5.3.2 Trigonometrische Messung von Höhenunterschieden

Der direkten Höhenmessung mit Nivellierinstrumenten mit seiner eingeschränkten Höhendifferenz von max. 3.5-4.0 m (bedingt durch die Länge der Nivellierlatten) steht die trigonometrische Höhenmessung als indirektes Verfahren gegenüber.

Grundprinzip:



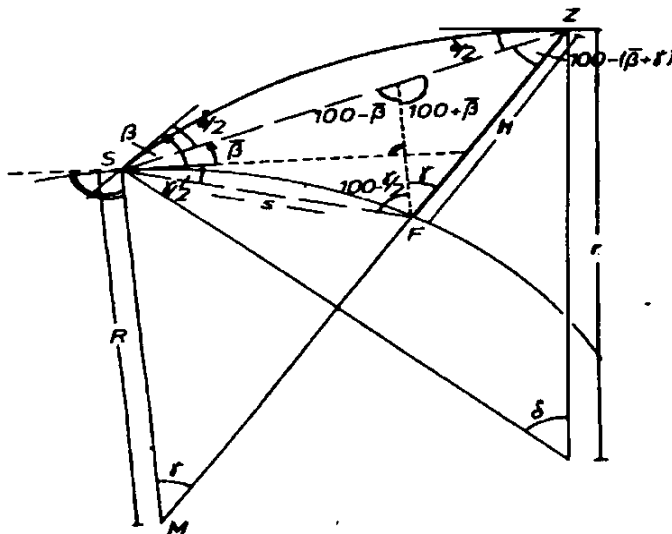
Moderne Theodolite sind neben dem Horizontalkreis mit einem Vertikalkreis gekoppelt und mit einer Indexlibelle oder einem Kompensator ausgestattet. Damit wird es möglich, **Zenitdistanzen (z)** oder **Höhenwinkel (α)** mit dem Theodolit zu messen. Kennt man außerdem die Schräggenauigkeit (s'), so lässt sich $\Delta H_{A,B}$ wie folgt berechnen:

$$\Delta H_{A,B} = s' \cdot \cos z ; \quad \Delta H_{A,B} = s' \cdot \sin \alpha$$

Wenn die **Horizontalentfernung s** bekannt ist gilt:

$$\Delta H_{A,B} = s \cdot \cot z ; \quad \Delta H_{A,B} = s \cdot \tan \alpha$$

Bei Entfernungen **über 150m** müssen außerdem **Erdkrümmung** und **Refraktion** im Ansatz beachtet werden.



Bei der trigonometrischen Höhenmessung macht sich der Einfluss von Erdkrümmung und Refraktion bemerkbar. Infolge der Lichtbrechung in den verschiedenen dichten Luftschichten um die Erde verläuft der Strahl SZ nicht geradlinig, sondern beschreibt näherungsweise einen Bogen mit dem **Radius $r \gg 8R$** (R = Erdradius). Der **Refraktionskoeffizient k** ist das Verhältnis $\frac{R}{r} \approx 0.13$.

Auf Grund der gleichen Bogenlänge gilt:

$$R \cdot \gamma = r \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{R}{r} \cdot \gamma = k \cdot \gamma$$

Ansatz: Sinussatz im Dreieck SFZ

$$\frac{H}{\sin(\bar{\beta} + \frac{\gamma}{2})} = \frac{s}{\sin(100 - (\bar{\beta} + \gamma))} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{s \cdot \sin(\bar{\beta} + \frac{\gamma}{2})}{\sin(100 - (\bar{\beta} + \gamma))} = \frac{s \cdot \sin(\bar{\beta} + \frac{\gamma}{2})}{\cos(\bar{\beta} + \gamma)}$$

da $\bar{\beta} = \beta - \frac{\delta}{2}$; mit β als beobachteten Winkel

$$H = \frac{s \cdot \sin(\beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta))}{\cos(\beta + (\gamma - \frac{\delta}{2}))}$$

allgemein gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

Speziell für sehr kleines y gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x + y \cdot \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x - y \cdot \sin x$$

$$\text{im Zähler: } x = \beta; \quad y = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$$

$$\text{im Nenner: } x = \beta; \quad y = \gamma - \frac{\delta}{2}$$

$$\text{Also: } H = \frac{s \cdot \left(\sin \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \cdot \cos \beta \right)}{\cos \beta - \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \sin \beta}$$

$$H = \frac{s \cdot \left(\sin \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \cdot \cos \beta \right)}{\cos \beta - \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \sin \beta} \quad \left| \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta} \right.$$

$$\Rightarrow H = \frac{s \cdot \left(\tan \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \right)}{1 - \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan \beta}$$

Der Nenner wird in einer Potenz-Reihe entwickelt: allgemein: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ für $|x| < 1$

$$\text{hier gilt also: } \frac{1}{1 - \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan \beta} = 1 + \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan \beta + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

$$\text{daraus folgt: } H = s \cdot \left\langle \tan \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \right\rangle \cdot \left\langle 1 + \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan \beta + \dots \right\rangle$$

$$H = s \cdot \left\langle \tan \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) + \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan^2 \beta + \frac{1}{2}(\gamma - \delta) \cdot \left(\gamma - \frac{\delta}{2} \right) \cdot \tan \beta \right\rangle$$

$$\text{Vereinfachungen: } \gamma = \frac{s}{R} \quad \delta = \gamma \cdot k = \frac{s}{R} \cdot k$$

$$H = s \cdot \tan \beta + \left(\frac{s^2}{2R} - \frac{s^2}{2R} \cdot k \right) + \tan^2 \beta \cdot \left(\frac{s^2}{R} - \frac{s^2}{2R} \cdot k \right) + \left(\frac{s^2}{2R} - \frac{s^2}{2R} \cdot k \right) \cdot \left(\frac{s^2}{2R} - \frac{s^2}{4R} \cdot k \right) \cdot \tan \beta$$

$$H = s \cdot \tan \beta + \frac{s^2}{2R}(1 - k) + \frac{s^2}{2R} \cdot \tan^2 \beta \cdot (2 - k) + \frac{s^2}{4R}(2 - 2k) \cdot (2 - k) \cdot \tan \beta + i - t$$

wobei i = Instrumentenhöhe, t = Zieltafelhöhe.

Für flache Visuren und mittlere Entfernungen gilt die Gebrauchsformel:

$$H = s \cdot \tan \beta + \frac{s^2}{2R} \cdot (1 - k) + i - t$$

$$H = s \cdot \tan \beta + \underbrace{\frac{s^2}{2R}}_{\text{Einfluss der Erdkrümmung}} - \underbrace{\frac{s^2}{2R} \cdot k}_{\text{Einfluss der Refraktion}} + i - t$$

Einfluss der Erdkrümmung Einfluss der Refraktion für $k = 0.13$ und $R = 6370 \text{ km}$

$$\begin{aligned} H &= s \cdot \tan \beta + 0.078 \text{ m} \cdot \left(\frac{s[\text{km}]}{1 \text{ km}} \right)^2 - 0.01 \text{ m} \cdot \left(\frac{s[\text{km}]}{1 \text{ km}} \right)^2 + i - t \\ &= s \cdot \tan \beta + 0.068 \text{ m} \cdot \left(\frac{s[\text{km}]}{1 \text{ km}} \right)^2 + i - t \end{aligned}$$

Die Größenordnung von Erdkrümmung und Refraktion zeigt folgende Tabelle:

Zielweite s	Einfluss der Erdkrümmung	Einfluss der Refraktion
1 km	+0.078m	-0.01m
5 km	+1.96m	-0.25m
10 km	+7.85m	-1.00m
50 km	~196m	-25m
100 km	~785m	-100m

6 Höhenaufnahmen von Teilgebieten der Erdoberfläche

6.1 Längs- und Querprofile

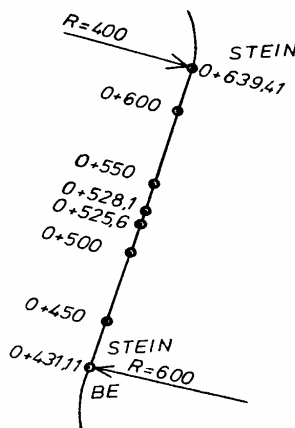
Wenn eine längere Straße, eine Eisenbahn, ein Kanal oder sonst ein langgestrecktes größeres Bauwerk ausgeführt werden soll, so wird man in der Regel so vorgehen:

1. Entwurf der Linienführung in einem Höhenlinienplan
2. Abstecken der Leitlinie (Achse) des Bauwerkes
3. Aufnahme der Höhen längs der Leitlinie (Längsprofil)
4. Aufnahme eines Geländestreifens links und rechts der Leitlinie durch Querprofile

Das Längsprofil und die Querprofile dienen als Grundlage für die genaue Ausarbeitung des Bauvorhabens und die Massenberechnung.

Längs der Leitlinie werden alle Punkte verpflockt, durch die ein Querprofil gelegt werden soll:

- a) Stationspunkte
- b) Geländebrechpunkte
- c) Bogenhauptpunkte (Anfang, Ende, Mitte)



Die Leitlinie stützt sich auf gut gesicherte Messungslinien (meist Polygonseiten), die neben dem Bauwerk herlaufen. Die Messungslinien müssen so angelegt sein, dass sie durch den Bau selbst nicht zerstört werden und müssen so gesichert sein, dass verlorengegangene Absteckpunkte des Bauwerks von ihnen aus jederzeit wiederhergestellt werden können.

6.1.1 Aufnahme des Längsprofils

Bei der Höhenaufnahme der Leitlinie werden alle längs der Leitlinie geschlagenen Pflöcke auf Millimeter einnivelliert und alle Proben durchgeführt. Das Längsnivellement wird nach Möglichkeit an gegebene Höhenfestpunkte angeschlossen.

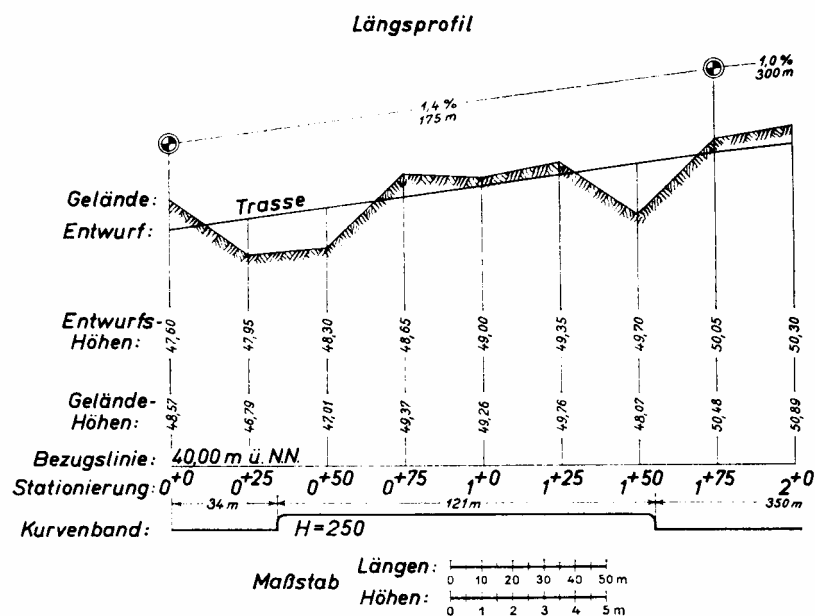
Beim Aufstellen des Nivellierinstrumentes achtet man darauf, dass man sich in der Mitte zwischen den Stationspfählen befindet, damit diese als Wechsellpunkte mit gleichen Zielweiten verwendet werden können. Alle anderen Punkte werden als Zwischenblicke aufgenommen, wobei die Lattenablesung unkontrolliert ist. In der Nähe befindliche Festpunkte, Kilometersteine, Treppen, Mauern und Durchlässe werden mit einnivelliert.

Feldbuch mit Kontrolle der Berechnung der Zwischenpunkte

Zielpunkt	Ablesung Rückblick	Ablesung Zwischen- blick	Ablesung Vorblick	Höhen- unterschied	Höhe des Punktes	Bemerkung
0+431.11 St.	2.768				245.364	Bogenende
0+450		1.330		+1.438	246.802	
0+500	1.724		1.142	+0.188	246.990	
0+525.6		3.421		-1.697	245.293	Graben
0+528.1		3.271		+0.150	245.443	Graben
0+550	1.865		0.707	+2.564	248.007	
0+600		2.416		-0.551	247.456	
0+639.41		2.785		-0.369	247.087	Bogenanfang
0+639.41 St.			3.051	-0.266	246.821	Oberkante Stein
	$\Sigma r = 4.207$		$\Sigma v = 4.210$	$\Sigma \Delta h = 1.457$		

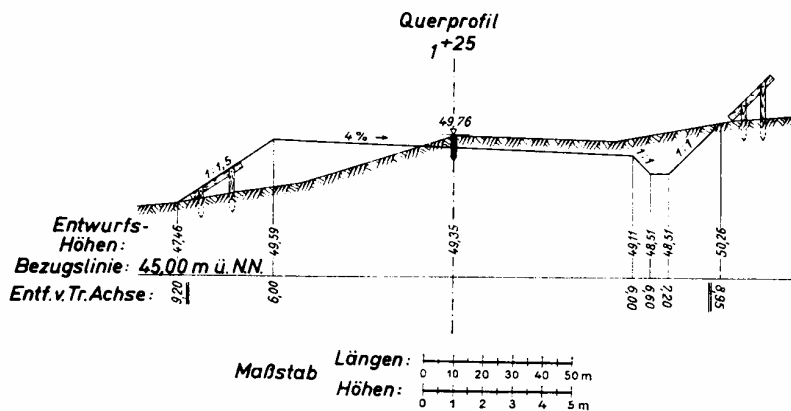
$$\Sigma r - \Sigma v = \Sigma \Delta h = 1.457 \quad \Delta H = \Sigma \Delta h = (246.821 - 245.364) = 1.457$$

Beispiel : Längsprofil



6.1.2 Aufnahme der Querprofile

Ein Querprofil ist der Schnitt einer Vertikalebene, die rechtwinklig zur Richtung des Längsprofils ist, mit dem Gelände.

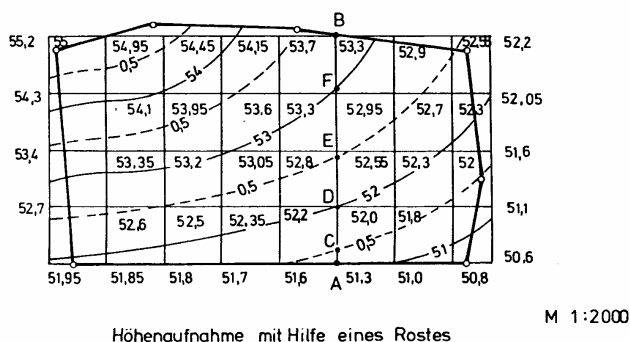


Die Querprofile werden mit der Kreuzscheibe, Winkelspiegel oder Winkelpisma abgesteckt. Die Aufnahme geschieht durch gleichzeitige Längen- und Höhenmessung.

Die Längs- und Querprofile werden am günstigsten auf Millimeterpapier aufgetragen. Die Längsprofile werden überhöht gezeichnet (z.B. Längenmaßstab 1 : 1000, Höhenmaßstab 1 : 200). Querprofile werden nicht überhöht gezeichnet.

6.2 Das Flächennivellement

Längs- und Querprofile sind nicht immer ausreichend. Für größere Planungsarbeiten, für Be- und Entwässerungen, Planierungen ist ein Höhenplan notwendig. Dieser kann durch ein Flächennivellement erhalten werden. Die Höhenunterschiede sollten jedoch nicht zu groß sein, weil sonst ein zu häufiges Umsetzen des Nivellierinstrumentes notwendig und das Verfahren bald unwirtschaftlich wird. In stark geneigtem Gelände ist die Tachymeteraufnahme zweckmäßiger.

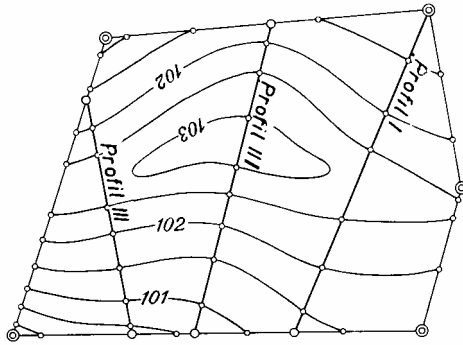


Ist ein reich detaillierter Lageplan mit vielen im Feld leicht auffindbaren Grenzzeichen vorhanden, so ist die Bestimmung der Höhen dieser Punkte ausreichend. Liegen keine Vermessungsunterlagen vor, so überzieht man das Gelände mit einem Netz sich rechtwinklig schneidender und paralleler Geraden, die gleiche (**Quadratrost**) oder ungleichmäßige (**Viereckrost**) Abstände haben.

Wichtige Geländepunkte werden dabei auf das Rost eingemessen. Die ausgewählten Punkte müssen den Verlauf aller höchsten und tiefsten Geländelinien, Gefällewechsel und Böschungskanten erfassen. Zunächst legt man ein Nivellement durch das aufzunehmende Gebiet, um Höhenfestpunkte zu erhalten. Das Nivellierinstrument wird dann so aufgestellt, dass möglichst viele Punkte der zu nivellierenden Fläche abgelesen werden können.

Für das Flächennivellement selbst sind zwei Techniker notwendig, einer zur Führung der Risse, zur Auswahl der Punkte und zum Einmessen nicht kartierter Punkte, ein zweiter als Beobachter am Instrument.

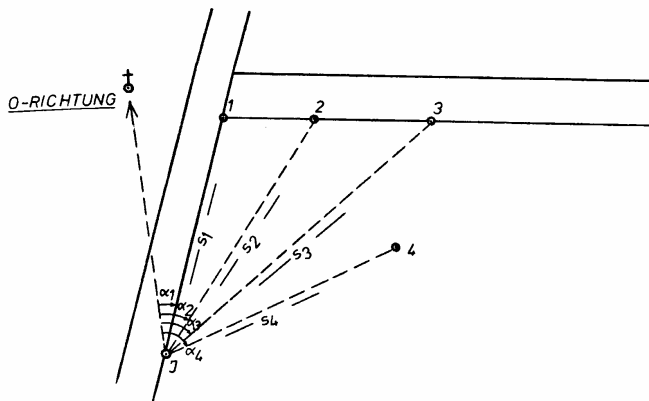
6.2.1 Aufnahme eines Flächennivellements durch Profile



Ist das Aufnahmegebiet nur in den Umringsgrenzen bekannt, so kann man quer durch das Gebiet gerade Profile legen, deren Anfangs- und Endpunkte in die Umringsgrenzen eingebunden werden.

6.2.2 Flächennivellement mit Polaraufnahme

Hat das Nivellierinstrument einen Horizontalkreis und Distanzfäden, so kann die Lage der einnivellierten Punkte statt durch ein starres Gitternetz auch durch Polarkoordinaten festgelegt werden.



Von einer beliebigen 0-Richtung ausgehend, werden die Winkel und Entfernungen zu den einzelnen Punkten gemessen. Die Messung der Entfernungen erfolgt optisch mit dem "Fadendistanzmesser".

Bei ausgeprägten Geländeformen ist dieses Verfahren rationeller als die Aufnahme eines Rostes; vor allem auch wenn die Absteckung des Rostes Schwierigkeiten bereitet.

Für die Auswahl der Punkte und die Ausarbeitung der Aufnahme gelten die gleichen Grundsätze wie bei der **Tachymetrischen Geländeaufnahme**.

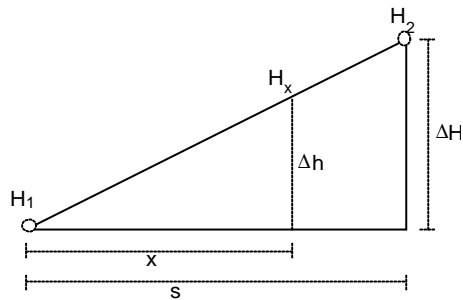
6.2.3 Abstecken eines Quadratnetzes (Rost)

Es wird ein Quadratnetz von 5 .. 50 m Maschenweite (je nach Gelände!) abgesteckt. Einige Eckpunkte werden auf Punkte der Karte eingemessen. Die somit lagemäßig bestimmten Punkte des Netzes werden durch ein Nivellement höhenmäßig aufgenommen. Diese Aufnahme ist zu empfehlen, wenn eine Oberfläche vollständig umgestaltet werden soll (Planierungen).

6.3 Ausarbeitung des Höhenlinienplanes

Zuerst wird der Lageplan gezeichnet und die zugehörigen Höhenangaben eingetragen. Danach erfolgt die Konstruktion der Höhenlinien nach einem der folgenden Verfahren. Bei der Interpolation der Höhenlinien geht man immer davon aus, dass der Geländeverlauf zwischen den ausgenommenen Höhenpunkten geradlinig ist.

6.3.1 Rechnerisches Verfahren



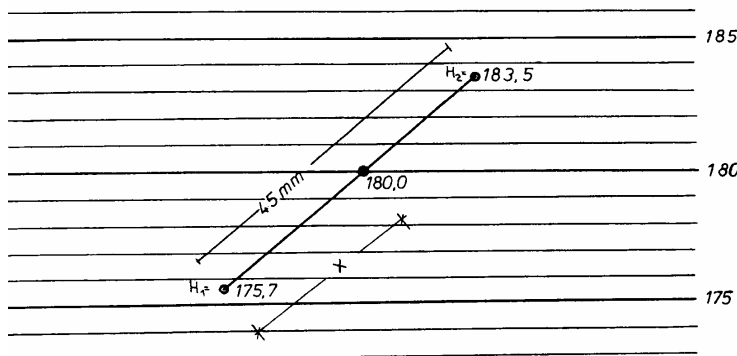
Gegeben: aufgenommene Höhen: $H_1 = 175.7\text{m}$
 $H_2 = 183.5\text{m}$

Abstand der Höhenpunkte in der Karte: $s = 45\text{ mm}$

Gesucht: Verlauf der 180 m Höhenlinie
 $\Rightarrow \Delta h = 4.3\text{m}$

$$\text{Es gilt der Strahlensatz: } \frac{x}{\Delta h} = \frac{s}{\Delta H} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\Delta h \cdot s}{\Delta H} = \frac{4.3\text{ m} \cdot 45\text{ mm}}{7.8\text{ m}} = 24.8\text{ mm}$$

6.3.2 Zeichnerisches Verfahren



Eine auf Transparentpapier gezeichnete Schar paralleler Geraden mit gleichem Abstand zueinander, die den einzelnen Höhen entsprechen, wird auf die Punkte H_1 und H_2 aufgepasst, wie es die Zeichnung zeigt. Der Punkt, der der 180 m Höhenlinie entspricht wird auf die Karte durchgestochen.

Hat man nach einem der genannten Verfahren zwischen benachbarten Punkten die Punkte mit den Höhen der Höhenlinien interpoliert, so erhält man die Höhenlinie als Kurve durch diese Punkte.

7 Fehlerlehre

7.1 Aufgaben der Fehlerlehre

Völlig fehlerfreie Messungen (Beobachtungen) sind infolge von Geräteungenauigkeiten und der Unzulänglichkeit der menschlichen Sinne nicht möglich. Geodätische Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer bestimmten Genauigkeit ausgeführt werden. Dieses gilt grundsätzlich auch für Beobachtungen anderer Disziplinen.

Die Beobachtungen (Messungen) werden daher in der Regel mehrere Male wiederholt, um ihre Zuverlässigkeit (statistische Wahrscheinlichkeit) zu erhöhen.

Bei der Auswertung der Messungen entsteht die Aufgabe:

- a) aus den Beobachtungen den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Größe abzuleiten (Mittelwert)
- b) eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung der Messreihe anzugeben
- c) die Genauigkeit des Mittelwertes und dessen Vertrauensbereich abzuschätzen

7.2 Fehlerarten

Messfehler unterscheidet man nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler

- sind grob fehlerhafte Beobachtungen, die durch Irrtümer, Verwechslungen o.ä. entstanden sind. Sie werden durch Kontrollmessungen aufgedeckt.

Systematische Fehler

- verfälschen das Messergebnis stets im selben Sinne (z.B. unzureichende Eichung; einseitige Handhabung; systematische Einflüsse wie Temperatur, Drift, etc. auf Messgerät bzw. Messobjekt)

Zufällige Fehler

- sind die Summe der, nach dem Ausscheiden der oben genannten Fehler, übrigbleibenden Fehler (z.B. begrenzte Schärfe der menschlichen Sinne, Unvollkommenheiten der Messinstrumente). Die zufälligen Fehler nehmen ebenso oft ein positives wie ein negatives Vorzeichen an. Sie sind, statistisch ausgedrückt, stochastisch unabhängige Veränderliche. Sie unterliegen trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit den Gesetzen des Zufalls.

Grobe und systematische Fehler lassen sich erkennen und eliminieren. Deshalb sind **die zufälligen Fehler Gegenstand der Vorlesung.**

7.3 Definitionen und Genauigkeitsmaße

Zufällige Fehler beziehen sich

- entweder auf den wahren Wert einer Größe ($= L$)
- oder auf einen wahrscheinlichsten bzw. plausibelsten Wert einer Größe ($= x$).

Unter dem **wahren Wert** versteht man den **Erwartungswert** einer Größe, z.B. die Winkelsumme im Dreieck oder den Mittelwert aus n nur mit zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungen.

Unter dem wahrscheinlichsten bzw. **plausibelsten Wert** einer Größe versteht man den **Näherungswert** des wahren Wertes. Diesen erhält man aus dem **arithmetischen Mittel** aus $n \Rightarrow \infty$ nur mit zufälligen Fehlern behafteten Beobachtungen.

Weitere Bezeichnungen:

- l = gemessener Wert (Beobachtung) einer Größe; (**Ist-Wert**)
- ε = wahrer Fehler
- m = mittlerer Fehler
- G = Maximal- oder Grenzfehler
- t = durchschnittlicher Fehler
- v = scheinbarer Fehler bzw. plausibelste **Verbesserung**
- n = Anzahl der Beobachtungen

Wahrer Fehler

$$\begin{aligned} \text{Wahrer Fehler } \varepsilon &= \text{Soll} - \text{Ist} \\ &= \text{Wahrer Wert} - \text{gemessener Wert} \\ \varepsilon &= L - l \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Wahrer Wert } L = l + \varepsilon \quad (1^*)$$

Beispiel: Wahrer Wert = Winkelsumme im Viereck = 360°

Mittlerer Fehler (Standardabweichung)

- Mittlerer Fehler m einer Beobachtung l_i

$$\begin{aligned} \text{Die Beobachtungen } l_1, l_2, l_3, \dots, l_i, \dots, l_n \quad (\text{für } n \Rightarrow \infty) \text{ einer Größe haben die wahren Fehler} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varepsilon_i = L - l_i \quad (2)$$

Dann ist der mittlere Fehler einer Beobachtung als Genauigkeitsmaß definiert zu:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}} \quad n \Rightarrow \infty$$

oder in Gaußscher Schreibweise: $\sum \varepsilon_i^2 = [\varepsilon\varepsilon]$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad n \Rightarrow \infty \quad (3)$$

- Mittlerer Fehler m einer Beobachtung l_i berechnet sich aus den scheinbaren Fehlern.

Sofern keine $n \Rightarrow \infty$ Beobachtungen vorliegen, erhält man die scheinbaren Fehler bzw. plausibelsten Verbesserungen mit Hilfe des wahrscheinlichsten Wertes (Erwartungswert; x) der beobachteten Größe wie folgt:

$$\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\vdots \\ v_i &= x - l_i \end{aligned} \quad (4)$$

Verbesserung = Soll - Ist

$$\text{Probe: } [v] = n \cdot x - [l] = 0$$

Also ergibt sich:

- die Varianz einer Beobachtung l :
$$m^2 = \frac{v_1^2 + v_1^2 + v_1^2 + \dots + v_1^2}{n-1} = \frac{[vv]}{n-1}$$

- der mittlere Fehler einer Beobachtung l :
$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad (5)$$

- der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, das aus n Beobachtungen ermittelt wurde:

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (6)$$

- Maximal- oder Grenzfehler

Auf die Maximal- oder Grenzfehler G gründen sich die amtlichen Fehlergrenzen, die bei Messungen einzuhalten sind.

$$G = 3 \cdot m \quad (7)$$

- Durchschnittlicher Fehler t

Der durchschnittliche Fehler t wird definiert zu:

$$t = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|}{n} = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \quad n \Rightarrow \infty \quad (8)$$

7.4 Fehlerfortpflanzung

Häufig ist es von großem Interesse, wie stark sich Unzulänglichkeiten (Fehler) von Beobachtungen auf von diesen Beobachtungen abgeleitete Größen durchschlagen und auswirken.

Das heißt, dass neben dem mittleren Fehler einer einzelnen Messung (Messreihe) oftmals auch der mittlere Fehler einer Funktion gemessener Größen benötigt wird. Hierbei findet das **Fehlerfortpflanzungsgesetz** Anwendung.

7.4.1 Das “ABC” der Fehlerfortpflanzung

Allgemeine **Regeln** für die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

- A) **Darstellung der Zielfunktion** U , deren Fehler gesucht ist, als Funktion der voneinander unabhängigen Beobachtungen. Unabhängig bedeutet, dass eine Beobachtung nicht als Funktion einer anderen Beobachtung darstellbar sein darf.

$$U = f(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n) \quad (9)$$

Gegeben: Beobachtungen $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ und ihre Genauigkeitsmaße

- B) Bildung des totalen Differentials**, welches sich durch Taylor-Entwicklung der Funktion U an den Stellen l_i (Linearisierung, Approximation) und Auflösung nach ΔU ergibt.

$$\Delta U = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right) \cdot \Delta l_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right) \cdot \Delta l_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right) \cdot \Delta l_n \quad (10)$$

Beispiel für den eindimensionalen Fall: $U = y = f(x)$

Taylor-Entwicklung der Funktion y an der Stelle a

$$U = y = f(x) = f(a) + \left(\frac{(x-a)}{1!} \right) f'(a) + \left(\frac{(x-a)^2}{2!} \right) f''(a) + \dots$$

\uparrow an dieser Stelle wird, in der Regel, die Entwicklung abgebrochen

Anmerkung:

$$f' = \tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dy = \tan \alpha \cdot dx = \tan \alpha \cdot (x - a)$$

$$\Rightarrow \Delta y = f' \cdot dx$$

durch Abbruch gilt also: $y = f(a) + \Delta y$

und analog für U: $U = U_a + \Delta U$

$$\Rightarrow \Delta U = U - U_a$$

$$\Delta U = f(x) - f(a) = \left(\frac{(x-a)}{1!} \right) f'(a)$$

Somit ergibt sich das totale Differential einer Veränderlichen zu:

$$\Delta U = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \Delta x$$

Handelt es sich bei der Fehlerfortpflanzung nicht um wahre, sondern um mittlere Fehler, so ist der Übergang auf den mittleren Fehler notwendig.

- C) Übergang zum mittleren Fehler** erfolgt durch elementweises Quadrieren mit den formalen Übergängen

$$(\Delta U)^2 \Rightarrow m_U^2 \quad (\Delta l_i)^2 \Rightarrow m_{l_i}^2$$

Damit erhält man aus dem totalen Differential den mittleren Fehler der Funktion U nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$m_U^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 \cdot m_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 \cdot m_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right)^2 \cdot m_{l_n}^2 \quad (11)$$

bzw.:

$$m_U = \pm \sqrt{\left(\frac{f}{l_1} \right)^2 \cdot m_{l_1}^2 + \left(\frac{f}{l_2} \right)^2 \cdot m_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{f}{l_n} \right)^2 \cdot m_{l_n}^2}$$

7.4.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz für wahre Fehler

Es seien l_1, l_2, \dots, l_n gegenseitig unabhängige Beobachtungen

$\varepsilon_1 = \Delta l_1, \varepsilon_2 = \Delta l_2, \dots, \varepsilon_n = \Delta l_n$ wahre Fehler dieser beobachteten Größen

und $U = f(l_1, l_2, \dots, l_n)$ eine Funktion der beobachteten Größen

$\Delta U = \varepsilon_U$ der wahre Fehler der Funktion U

wegen:

$$\Delta U = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right) \cdot \Delta l_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right) \cdot \Delta l_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right) \cdot \Delta l_n$$

gilt:

$$\varepsilon_U = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \cdot \varepsilon_n \quad (12)$$

7.4.3 Fehlerfortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler

Spezialisierungen

1. Die Funktion U sei in der Form gegeben: $U = f(l) = \alpha \cdot l$ mit $\alpha = \text{const.}$

Dann gilt:

$$\Delta U = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \Delta l \quad \frac{\partial f}{\partial l} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \alpha \cdot \Delta l$$

und damit:

$$m_U^2 = \alpha^2 \cdot m_l^2 \quad m_U = \alpha \cdot m_l \quad (11.1)$$

mittlerer Fehler bei Multiplikation der Beobachtung mit einer Konstanten

2. Die Funktion U sei in der Form gegeben: $U = \pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n$

$$\Rightarrow \Delta U = (\pm 1) \Delta l_1 (\pm 1) \Delta l_2 \dots (\pm 1) \Delta l_n$$

Übergang zum mittleren Fehler:

$$m_U^2 = m_{l_1}^2 + m_{l_2}^2 + \dots + m_{l_n}^2$$

bzw.

$$m_U = \pm \sqrt{m_{l_1}^2 + m_{l_2}^2 + \dots + m_{l_n}^2} \quad (11.2)$$

mittlerer Fehler bei Addition und Subtraktion der Beobachtungen

Sind in der obigen Form alle Messungen gleich genau, d.h. $m_{l_1} = m_{l_2} = m_{l_n} = m$ so gilt:

$$m_U^2 = m_{l_1}^2 + m_{l_2}^2 + \dots + m_{l_n}^2 \quad \Rightarrow \quad m_U^2 = m^2 + m^2 + \dots + m^2 = n \cdot m^2$$

$$\Rightarrow \quad m_U = \pm \sqrt{n} \cdot m \quad (11.3)$$

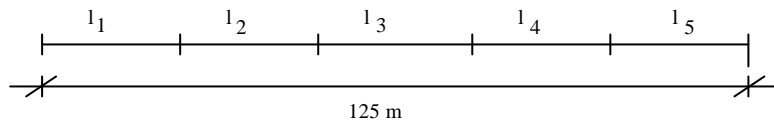
Der mittlere Fehler steigt nur \sqrt{n} -fach an.

Beispiele für die Anwendung von (11.3)

- Streckenmessung mit Messbänder oder Messlatten
- Nivellement

- Geradenabsteckung (Verlängern)

Bsp.: Eine Strecke von $E = 125$ m Länge wird mit einem 30 m-Bandmaß gemessen. Der mittlere Fehler jeder einzelnen Bandmessung wird mit einem mittleren Fehler von $m = \pm 2$ cm angenommen. Welchen mittleren Fehler hat die Strecke E ?



Zielfunktion: $E = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$

Totales Differential: $\Delta E = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5$ da $\frac{\partial E}{\partial l_i} = 1$

Übergang zum mittleren Fehler: $m_E = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2}$

mit $m_1 = m_2 = \dots = m_i = \pm 2$ cm

mittlerer Fehler der Strecke E : $m_E = \pm \sqrt{5} \cdot 2 \text{ cm} = \pm 4.5 \text{ cm}$

3. Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels

Für das arithmetische Mittel x aus gleichgenauen Beobachtungen $l_1 \dots l_n$ gilt:

Zielfunktion: $x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot l_1 + \frac{1}{n} \cdot l_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot l_n$

Totales Differential:

$\Delta x = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Delta l_1 + \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Delta l_2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Delta l_n$ da $\frac{\partial x}{\partial l_i} = \frac{1}{n}$

Übergang zum mittleren Fehler:

$m_x^2 = \left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot m_{l_1}^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot m_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot m_{l_n}^2$

mit $m_{l_1} = m_{l_2} = \dots = m_{l_n} = m$

$m_x^2 = \left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot n \cdot m^2 \Rightarrow \boxed{m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}} \quad (11.4)$

mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

Man erkennt, dass der Messaufwand quadratisch zur Genauigkeit ansteigt; d.h. um den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels zu halbieren, muss man die Anzahl der Messungen vervierfachen. Der mittlere Fehler geht mit Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zurück.

Man beachte den Unterschied zwischen den Formeln (11.3) und (11.4). In (11.4) wird dieselbe Größe in n -fach wiederholten, gleichgenauen Messungen beobachtet und der mittlere Fehler des Mittelwertes bestimmt.

In (11.3) dagegen wird die Funktion U als Summe (bzw. Differenz) aus gleichgenauen Einzelbeobachtungen erhalten und der mittlere Fehler dieser Summe (bzw. Differenz) bestimmt.

7.4.4 Gewichtung von Messgrößen und das Gewichtsfortpflanzungsgesetz

Ist **eine Messgröße mehrere Male** mit **unterschiedlicher Genauigkeit** beobachtet worden, so muss das bei der Ermittlung des Mittelwertes und der Genauigkeitsangabe berücksichtigt werden. Dazu werden **Gewichte** bzw. Gewichtsverhältnisse eingeführt.

Gewichtung von Beobachtungen



Problem:

Die Strecke E wurde 1 mal mit dem Maßband (E_M) und 1 mal elektrooptisch (E_S) gemessen. Die Maßbandmessung habe einen mittleren Fehler von $m_M = \pm 9$ mm, der mittlere Fehler der elektrooptischen Entfernungsmessung beträgt $m_S = \pm 4$ mm.

Wie groß ist der mittlere Fehler des gewichteten arithmetischen Mittels von E? Wie soll dabei gewichtet werden? (Genauere Messungen sollen stärker ins Gewicht fallen als ungenauere)

$$E = \frac{P_M \cdot E_M + P_S \cdot E_S}{P_M + P_S} = \frac{P_M}{\sum P} \cdot E_M + \frac{P_S}{\sum P} \cdot E_S$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{P_M}{\sum P} \cdot \Delta E_M + \frac{P_S}{\sum P} \cdot \Delta E_S$$

Der mittlere Fehler von E ergibt sich dann zu:

$$m_E = \pm \sqrt{\left(\frac{P_M}{\sum P}\right)^2 \cdot m_M^2 + \left(\frac{P_S}{\sum P}\right)^2 \cdot m_S^2}$$

Die Gewichte P_M und P_S sollen so gewählt werden, dass ihre Summe 1 ergibt (Gewichtsverhältnisse) und m_E minimal wird, d.h. $m_E' = 0$.

$$m_E = f(P_M, P_S) = \frac{1}{P_M + P_S} \sqrt{P_M^2 \cdot m_M^2 + P_S^2 \cdot m_S^2} \quad \text{da } \sum P = 1, \text{ folgt:}$$

$$m_E = \sqrt{P_M^2 \cdot m_M^2 + P_S^2 \cdot m_S^2}$$

D.h. für die partielle Ableitung nach den Gewichten gilt:

$$m_E' = \frac{P_M \cdot m_M^2}{\sqrt{P_M^2 \cdot m_M^2 + P_S^2 \cdot m_S^2}} + \frac{P_S \cdot m_S^2}{\sqrt{P_M^2 \cdot m_M^2 + P_S^2 \cdot m_S^2}} = 0$$

$$\Rightarrow P_M \cdot m_M^2 = -P_S \cdot m_S^2$$

$$\Rightarrow \frac{P_M}{P_S} = -\frac{m_S^2}{m_M^2} \quad (12)$$

Für den Gewichtsansatz gilt also:

$$P_M = -\frac{P_S \cdot m_S^2}{m_M^2} \quad \Rightarrow \quad P_M \sim \frac{1}{m_M^2}$$

$$P_S = -\frac{P_M \cdot m_M^2}{m_S^2} \quad \Rightarrow \quad P_S \sim \frac{1}{m_S^2}$$

Mit der willkürlichen Konstante c gilt allgemein:

$$P_i = \frac{c}{m_i^2} \quad (13)$$

Aus (13) folgt: die Gewichte verhalten sich umgekehrt proportional zu den Quadraten ihrer mittleren Fehler.

Gewichtseinheitsfehler

Zweckmäßigerweise wird c so gewählt, dass eine bestimmte Beobachtung b_0 mit dem mittleren Fehler m_0 das Gewicht $P_0 = 1$ erhält.

Nach (13) gilt dann:

$$P_0 = \frac{c}{m_0^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = m_0^2 \quad (14)$$

Den mittleren Fehler m_0 derjenigen Beobachtungen, welche das Gewicht $P_0 = 1$ haben, nennt man den mittleren Fehler der Gewichtseinheit (Gewichtseinheitsfehler) oder anders ausgedrückt:

$$m_0 = m. \text{ F. einer Beobachtung mit dem Gewicht } 1$$

Gewicht und Wiederholungszahl bei Beobachtung ein und derselben Größe

Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich das Gewicht als Wiederholungszahl deuten.

Ein und dieselbe Größe, z.B. ein Winkel α , sei mit dem gleichen Instrument unter gleichen Bedingungen wiederholt gemessen worden. Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird a priori (von vornherein) zu $m_\alpha = \pm 1.2 \text{ mgon}$ angenommen.

Insgesamt liegen 29 Messungen vor. Diese werden zu folgenden Gruppen zusammengefasst:

A	mit $n_A = 9$ Messungen	Messwert α_A mit m.F. $\pm m_{\alpha A}$
B	mit $n_B = 4$ Messungen	Messwert α_B mit m.F. $\pm m_{\alpha B}$
C	mit $n_C = 16$ Messungen	Messwert α_C mit m.F. $\pm m_{\alpha C}$

Da alle 29 Messungen als gleichgenau angenommen werden, können wir auch ansetzen:

$$m_{\alpha 1} = m_{\alpha 2} = m_{\alpha 3} = \dots = m_{\alpha 29} = m_\alpha = \pm 1.2 \text{ mgon}$$

Dann lassen sich aber Gleichung (11.4) sofort die mittleren Fehler der Gruppenmittel angeben, nämlich:

$$\begin{aligned}
m_{\alpha A} &= \pm \frac{m_{\alpha}}{\sqrt{n_A}} = \pm \frac{1.2 \text{ mgon}}{3} = \pm 0.4 \text{ mgon} \Rightarrow m_{\alpha A}^2 = 0.16 \text{ mgon}^2 \\
m_{\alpha B} &= \pm \frac{m_{\alpha}}{\sqrt{n_B}} = \pm \frac{1.2 \text{ mgon}}{2} = \pm 0.6 \text{ mgon} \Rightarrow m_{\alpha B}^2 = 0.36 \text{ mgon}^2 \\
m_{\alpha C} &= \pm \frac{m_{\alpha}}{\sqrt{n_C}} = \pm \frac{1.2 \text{ mgon}}{4} = \pm 0.3 \text{ mgon} \Rightarrow m_{\alpha C}^2 = 0.09 \text{ mgon}^2
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\alpha A} &= \frac{c}{0.16 \text{ mgon}^2} \\ P_{\alpha B} &= \frac{c}{0.36 \text{ mgon}^2} \\ P_{\alpha C} &= \frac{c}{0.09 \text{ mgon}^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } c = m_{\alpha}^2 = 1.44 \text{ mgon}^2 = m_0^2 = \text{Quadrat des m.F. der Gewichtseinheit}$$

es folgt:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha A} &= \frac{1.44 \text{ mgon}^2}{0.16 \text{ mgon}^2} = 9 = n_A \\
P_{\alpha B} &= \frac{1.44 \text{ mgon}^2}{0.36 \text{ mgon}^2} = 4 = n_B \\
P_{\alpha C} &= \frac{1.44 \text{ mgon}^2}{0.09 \text{ mgon}^2} = 16 = n_C
\end{aligned}$$

d.h. das Gewicht entspricht der Wiederholungszahl

7.4.5 Gewichtsfortpflanzungsgesetz

Setzt man im Fehlerfortpflanzungsgesetz (11):

$$m_U^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 \cdot m_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 \cdot m_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right)^2 \cdot m_{l_n}^2$$

die folgenden Beziehungen ein:

$$\begin{aligned} m_{l_1}^2 &= \frac{m_0^2}{P_1} && \text{aus (13) und (14)} \\ m_U^2 &= \frac{m_0^2}{P_U} \end{aligned}$$

so erhält man nach beidseitiger Division durch m_0^2 das **Gewichtsfortpflanzungsgesetz**

$$\frac{1}{P_U} = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_2}} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_n}} \quad (15)$$

7.5 Die praktische Berechnung von mittleren Fehlern aus Beobachtungsreihen

Beobachtungsreihen aus Beobachtungen gleicher Genauigkeit

l_1, l_2, \dots, l_n = gegenseitig unabhängige Beobachtungen gleicher Genauigkeit

x = günstigster oder plausibelster Wert für die beobachtete Größe

Der günstigste Wert ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \quad (16)$$

Die scheinbaren Fehler oder plausibelsten Verbesserungen werden berechnet aus:

$$v_i = x - l_i \quad \text{mit } i = 1 \dots n \quad \text{und der Probe} \quad [v] = n \cdot x - [l] = 0$$

und ergeben dann den mittleren Fehler m **einer** der gleichgenau beobachteten Größen

$$m^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1} = \frac{[vv]}{n-1}$$

Mittlerer Fehler einer Einzelbeobachtung:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Mittlerer Fehler m_x des berechneten arithmetischen Mittels:

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot (n-1)}}$$

Es gilt auch:

$$m_x = \frac{\text{mittlerer Fehler der Einzelbeobachtung}}{\text{Wurzel aus der Anzahl der Beobachtungen}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

Durch wiederholtes Messen ein und derselben Größe wird die Genauigkeit des Mittels erhöht, der mittlere Fehler m_x also verkleinert.

Beobachtungsreihen aus Beobachtungen verschiedener Genauigkeit

l_1, l_2, \dots, l_n = gegenseitig unabhängige Beobachtungen

P_1, P_2, \dots, P_n = Gewichte der einzelnen Beobachtungen, welche aus Beobachtungsreihen entsprechend (13) zu ermitteln oder zu schätzen sind.

x = günstigster oder plausibelster Wert

Bestimmung des günstigsten Wertes (allgemeines oder gewogenes arithmetisches Mittel):

$$x = \frac{l_1 \cdot P_1 + l_2 \cdot P_2 + \dots + l_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{[l \cdot P]}{[P]} \quad (17)$$

Die scheinbaren Fehler oder plausibelsten Verbesserungen v werden wieder berechnet aus:

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = x - l_1 & \text{Gewicht } P_1 \\
 v_2 = x - l_2 & \text{Gewicht } P_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 v_n = x - l_n & \text{Gewicht } P_n
 \end{array}
 \quad \text{Probe: } [Pv] = [P] \cdot x - [Pl] = 0$$

und ergeben den mittleren Fehler m_0 einer gedachten Beobachtung mit dem Gewicht 1 (mittlerer Fehler der Gewichtseinheit) nach:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \pm \sqrt{\frac{v_1 \cdot P_1 + v_2 \cdot P_2 + \dots + v_n \cdot P_n}{n-1}} \\
 m_0 &= \pm \sqrt{\frac{[vvP]}{n-1}}
 \end{aligned}
 \quad (18)$$

Der mittlere Fehler m_i einer tatsächlichen Beobachtung l_i lässt sich a posteriori (aus der Erfahrung) wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned}
 m_i^2 &= \frac{m_0^2}{P_i} \\
 m_i &= \pm \frac{m_0}{\sqrt{P_i}}
 \end{aligned}
 \quad (19)$$

wobei $i = 1 \dots n$

Der mittlere Fehler m_x des günstigsten Wertes x (allgemeines arithmetisches Mittel) ist:

$$\begin{aligned}
 m_x^2 &= \frac{m_0^2}{P_x} = \frac{m_0^2}{[P]} \\
 m_x &= \pm \sqrt{\frac{[vvP]}{[P] \cdot (n-1)}}
 \end{aligned}
 \quad (20)$$

Einführung von Näherungswerten

Die ursprünglichen Beobachtungen seien: l_1, l_2, \dots, l_n
 ihre zu ermittelnden Verbesserungen seien: v_1, v_2, \dots, v_n
 und ihr günstigster Wert sei: x

Um mit kleineren Zahlen rechnen zu können, wählt man für x einen (irgendwie angenommenen) Näherungswert x_0 und setzt

$$x = x_0 + \Delta x \quad (21)$$

Die ursprünglichen Beobachtungen l_i werden durch die umgeformten Beobachtungen Δl_i ersetzt.

$$\begin{aligned}
 l_i &= x_0 + \Delta l_i \\
 \Delta l_i &= l_i - x_0
 \end{aligned}
 \quad (22)$$

Der günstigste Wert ergibt sich dann aus (16):

$$x = \frac{[1]}{n}$$

$$x = \frac{[x_0 + \Delta l_i]}{n} = \frac{n \cdot x_0 + [\Delta l_i]}{n}$$

mit (21) folgt: $\Delta x = \frac{[\Delta l_i]}{n}$ (16*)

und die Verbesserungen lauten nach (4):

$$v_i = x - l_i \quad \Rightarrow \quad v_i = (x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta l_i)$$

$$v_i = \Delta x - \Delta l_i \quad (4*)$$

Die weiteren Berechnungen erfolgen wie bei der Verwendung der ursprünglichen Beobachtungen.

Beobachtungen mit Doppelbeobachtungen

In den bisher behandelten Fällen ist ein und dieselbe Größe n-mal beobachtet worden.

Ein mittlerer Fehler lässt sich jedoch auch dann berechnen, wenn n Doppelbeobachtungen verschiedener, jedoch gleichartiger Beobachtungsgrößen vorliegen.

Beobachtungspaare gleicher Genauigkeit

Mehrere gleichartige Größen seien je zweimal beobachtet worden, z.B. Nivellement mit einer Doppelteilung auf der Latte ($l = \Delta h$). Es seien:

l_1, l_2, \dots, l_n = Beobachtungen der ersten Beobachtungsreihe

l_1', l_2', \dots, l_n' = Beobachtungen der zweiten Beobachtungsreihe

Aus den Beobachtungsdifferenzen d_i für jede doppelt beobachtete Größe:

$$d_i = l_i - l_i' \quad (23)$$

ergibt sich dann der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung l_i oder l_i' :

$$m^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{2n}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \quad (24)$$

Mittlerer Fehler des aus beiden Beobachtungen gemittelten Wertes:

$$M^2 = \frac{m^2}{2} = \frac{[dd]}{4n}$$

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm 0.5 \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \quad (25)$$

Beobachtungspaare verschiedener Genauigkeit

l_1, l_2, \dots, l_n = Beobachtungen der ersten Beobachtungsreihe

l'_1, l'_2, \dots, l'_n = Beobachtungen der zweiten Beobachtungsreihe

P_1, P_2, \dots, P_n = Gewichte der einzelnen Beobachtungen

$d_i = l_i - l'_i$ Gewicht P_i

Fehlerberechnung für Beobachtungen vom Gewicht $P=1$

a) Mittlerer Fehler m_0 einer Beobachtung

$$m_0^2 = \frac{d_1^2 \cdot P_1 + d_2^2 \cdot P_2 + \dots + d_n^2 \cdot P_n}{2n}$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[ddP]}{2n}} \quad (26)$$

b) Mittlerer Fehler M_0 des Mittels aus beiden Beobachtungen

$$M_0 = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm 0.5 \sqrt{\frac{[ddP]}{n}} \quad (27)$$

Fehlerberechnung für Beobachtungen vom Gewicht P_i

a) Mittlerer Fehler m_i einer der Beobachtungen l_i oder l'_i (d.h. einer einfachen Messung)

$$m_i^2 = \frac{m_0^2}{P_i}$$

$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{P_i}} = \pm \sqrt{\frac{[ddP]}{P_i \cdot 2n}} \quad (28)$$

b) Mittlerer Fehler des Mittels $L_i = \frac{1}{2} (l_i + l'_i)$ (d.h. einer Doppelbeobachtung)

$$M_i^2 = \frac{m_i^2}{2} = \frac{m_0^2}{2P_i}$$

$$\Rightarrow M_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2P_i}} = \frac{M_0}{\sqrt{P_i}}$$

oder:

$$M_i = \pm 0.5 \sqrt{\frac{[ddP]}{P_i \cdot n}} \quad (29)$$

7.6 Formelzusammenstellung

Fehlermaße

Wahrer Fehler

ε = Soll - Ist
 = Wahrer Wert - Beobachtung
 = Soll - Ist

Verbesserung

$v = x - l$
 = plausibelster Wert - Beobachtung
 = Soll - Ist

Mittlerer Fehler einer Beobachtung

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad \text{für } n \Rightarrow \infty$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad \text{für ein beliebiges } n$$

Mittlerer Fehler des einfachen arithmetischen Mittels

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$

Maximal- oder Grenzfehler

$$G = 3 \cdot m$$

Durchschnittlicher Fehler

$$t = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \quad \text{für } n \Rightarrow \infty$$

Fehlerfortpflanzung

Der Einfluss wahrer Fehler auf eine Funktion der beobachteten Größen

$$\varepsilon_U = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \cdot \varepsilon_n$$

Der Einfluss der mittleren Fehler auf eine Funktion von gegenseitig unabhängigen Beobachtungsgrößen

$$m_U = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 \cdot m_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 \cdot m_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 \cdot m_{l_n}^2}$$

Gewichte

$$P_i = \frac{c}{m_i^2}$$

Gewichtseinheitsfehler $m_0 = c$

$$m_0 = m_i \cdot \sqrt{P_i}$$

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{P_i}}$$

Gewichtsfortpflanzungsgesetz

$$\frac{1}{P_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_1}} + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_2}} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_{l_n}}$$

Genauigkeitsangaben aus Beobachtungen

Gleiche Gewichte	Ungleiche Gewichte
Günstigster Wert	
$x = \frac{[l]}{n}$	$x = \frac{[l \cdot P]}{[P]}$
Ursprüngliche Verbesserungsgleichungen $v_i = x - l_i$	
Einführung von Näherungswerten x_0 $x = x_0 + \Delta x$ $\Delta l_i = l_i - x_0$	
Umgeformte Verbesserungsgleichungen	
$v_i = \Delta x - \Delta l_i$	$v_i = \Delta x - \Delta l_i; P_i$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung	
$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$	$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vvP]}{n-1}} \quad \text{für } P = 1$ $m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{P_i}}$
Mittlerer Fehler des günstigsten Wertes	
$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$ $m_x = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n \cdot (n-1)}} \quad P_x = n$	$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[P]}}$ $m_x = \pm \sqrt{\frac{[vvP]}{[P] \cdot (n-1)}} \quad P_x = [P]$

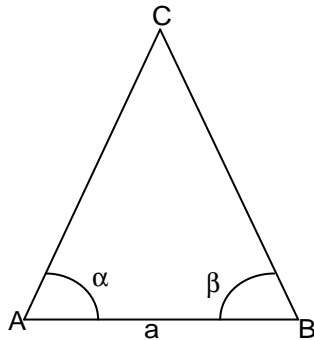
Genauigkeitsangaben aus Doppelmessungen

Gleiche Gewichte	Ungleiche Gewichte
Beobachtungsdifferenzen $d_i = l_i - l_i'$	
Mittlerer Fehler einer Einzelbeobachtung	
$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$	$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[ddP]}{2n}} \text{ für } P = 1$ $m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{P_i}}$
Mittlerer Fehler einer Doppelmessung	
$M = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}$ $M = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}}$	$M_0 = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2}}$ $M_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[ddP]}{n}} \text{ für } P = 1$ $M_i = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[ddP]}{P_i \cdot n}}$

7.7 Einige Aufgaben zur Fehlerlehre

Aufgabe 1

In einem Dreieck ABC wurden die Seite a und die Winkel α , β wie folgt gemessen:



a
53.56 m
53.53 m
53.57 m

α	β
65.7689 gon	71.3428 gon
65.7697 gon	71.3419 gon
65.7686 gon	71.3434 gon
65.7678 gon	71.3426 gon
65.7692 gon	71.3438 gon

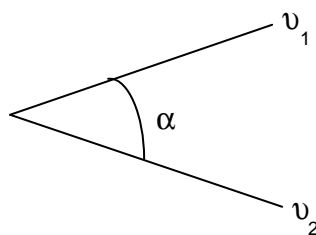
Zu berechnen sind: -Mittlerer Fehler der Einzelmessungen
-Mittlere Fehler der Mittel

Ergebnisse:

- (I) Mittlerer Fehler einer Einzelmessung: 0.021 m
Strecke $a = (53.55 \pm 0.012) \text{ m}$
- (II) Mittlerer Fehler einer Einzelmessung: 0.00071 gon
Winkel $\alpha = (65.7688 \pm 0.00032) \text{ gon}$
- (III) Mittlerer Fehler einer Einzelmessung: 0.00073 gon
Winkel $\beta = (71.3429 \pm 0.00032) \text{ gon}$

Aufgabe 2

Zur Bestimmung des Winkels α wurden folgende Werte gemessen:

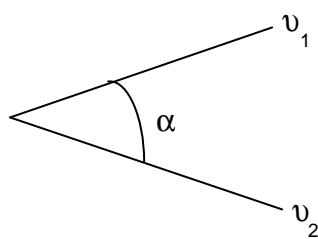


v_2	v_1
131.5173 gon	22.3723 gon
131.5168 gon	22.3718 gon
131.5165 gon	22.3725 gon
131.5176 gon	22.3728 gon
131.5171 gon	22.3717 gon

Zu berechnen sind: a) der mittlere Fehler der Richtungen v_1 und v_2
b) der mittlere Fehler des Winkels α

Ergebnisse:

- (I) Richtung $\overline{v_2} = (131.5171 \pm 0.00019) \text{ gon}$
- (II) Richtung $\overline{v_1} = (22.3722 \pm 0.00021) \text{ gon}$
- (III) Winkel $\alpha = (109.1449 \pm 0.00028) \text{ gon}$

Aufgabe 3Der Winkel α wurde 5-mal gemessen

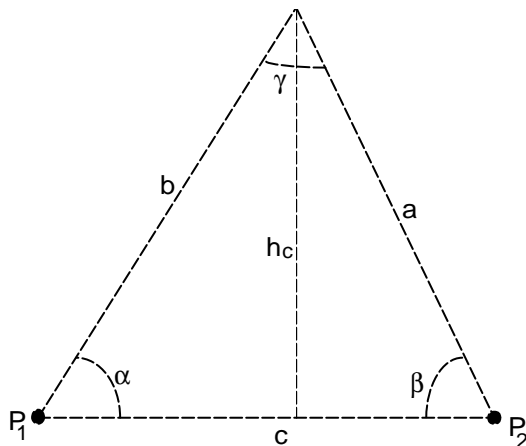
α
40.9665 gon
40.9659 gon
40.9671 gon
40.9669 gon
40.9663 gon

Zu berechnen sind:

- a) der mittlere Fehler des Winkels
 b) der mittlere Fehler der Richtungen v_1 und v_2 in der Annahme, dass $m_{xv1} = m_{xv2}$ gilt.

Ergebnisse:

- (I) Winkel $\alpha = (40.9665 \pm 0.00021)$ gon
 (II) mittlerer Fehler der Richtungen $m_{xv1} = m_{xv2} = 0.00015$ gon

Aufgabe 4Die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 sind unabhängig voneinander gegeben:

$$x_1 = 540\,7681,45 \pm 0,02 \text{ m}$$

$$x_2 = 540\,7753,21 \pm 0,04 \text{ m}$$

$$y_1 = 351\,4892,84 \pm 0,03 \text{ m}$$

$$y_2 = 351\,5168,48 \pm 0,01 \text{ m}$$

Die Winkel α , β sind gemessen wie in Aufgabe 1.

Gesucht sind: I) die mittleren Fehler der gemessenen Größen,

- II) die Werte für die Seiten c , a und b , den Winkel γ und die Höhe h_c mit den zugehörigen mittleren Fehlern,

- III) die Fläche $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ mit dem zugehörigen Fehler.

Ergebnisse:

- (I) siehe Aufgabe 1
 (II) $c = (284.83 \pm 0.033)$ m
 $a = (293.03 \pm 0.034)$ m
 $b = (307.19 \pm 0.036)$ m
 $h_c = (263.84 \pm 0.031)$ m
 $\gamma = (62.8883 \pm 0.00045)$ gon
 (III) $F = (37575 \pm 6) \text{ m}^2$

Aufgabe 5

Die Funktion $U = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \ln a}{a}$ ist für die nachstehenden Werte einschließlich der zugehörigen mittleren Fehlern zu berechnen:

α	β	a
17.6978 gon	58.1342 gon	167.32 m
17.6971 gon	58.1348 gon	167.39 m
17.6964 gon	58.1336 gon	167.48 m
17.6973 gon	58.1352 gon	167.45 m

Ergebnisse:

- (I) Winkel α = (17.6972 \pm 0.00029) gon
Winkel β = (58.1344 \pm 0.00035) gon
Strecke a = (167.41 \pm 0.035) m
- (II) Funktionswert $U = (5.13042 \text{ E-}3 \pm 8.7 \text{ E-}7) \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$

8 Flächen- und Massenberechnung

Ein wesentliches Ziel der Lagevermessung ist die Bestimmung von Grundstücksgrößen, die Flächenberechnung. Man unterscheidet prinzipiell zwischen der **graphischen** bzw. der **halbgraphischen** Flächenbestimmung und der **rechnerischen** Flächenbestimmung.

Bei der graphischen Flächenbestimmung werden aus der Karte abgegriffene Werte zur Flächenberechnung verwendet, wohingegen bei der rechnerischen Flächenbestimmung Feldmaße bzw. Koordinaten benutzt werden. Die graphische Flächenbestimmung ist, auf Grund der verkleinerten maßstäblichen Abbildung, ungenauer als die im Maßstab 1:1 durchgeführte Berechnung aus Feldmaßen und Koordinaten.

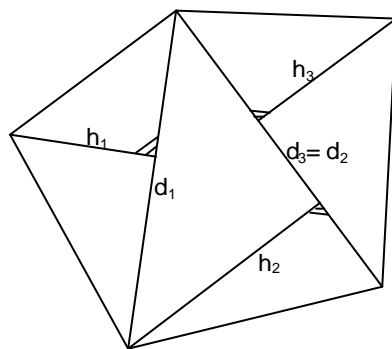
Bei der halbgraphischen Flächenbestimmung werden nicht nur aus der Karte abgegriffene Werte, sondern auch Maße aus dem Feldbuch zur Berechnung herangezogen.

Grundlage der Verfahren ist die Zerlegung der zu ermittelnden Fläche in Dreiecke oder andere geometrische Formen, die Bestimmung dieser Teilflächen und Zusammenfassung zur Gesamtfläche.

8.1 Graphische Flächenbestimmung

8.1.1 Flächenbestimmung mit dem Anlegemaßstab

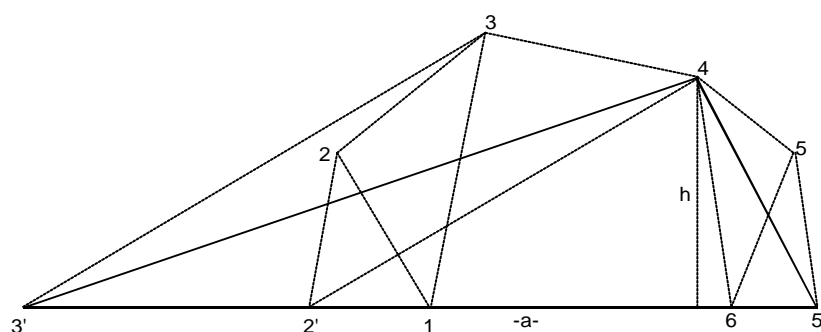
1. Zerlegung in Dreiecke



Regelmäßig geformte Grundstücke werden in Dreiecke zerlegt und die Grundlinie und Höhe gemessen.

$$2F = h_1 \cdot d_1 + h_2 \cdot d_2 + h_3 \cdot d_3$$

2. Verwandlung in ein flächengleiches Dreieck

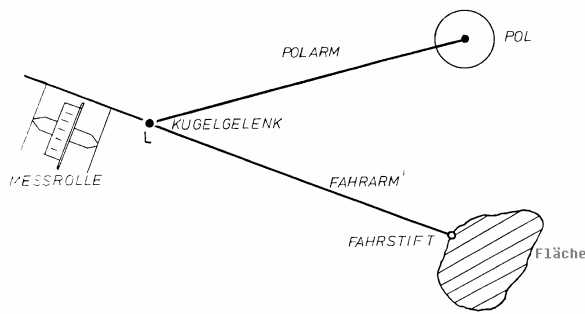


Um das Grundstück 123456 in ein gleich großes Dreieck zu überführen, werden einige Hilfspunkte konstruiert.

Hilfspunkt	Konstruktion	alte Fläche	neue Fläche	Basis
2'	durch 2 zu 31	$\Delta 123$	$\Delta 12'3$	13
3'	durch 3 zu 42'	$\Delta 2'34$	$\Delta 2'3'4$	2'4
5'	durch 5 zu 46	$\Delta 645$	$\Delta 645'$	64

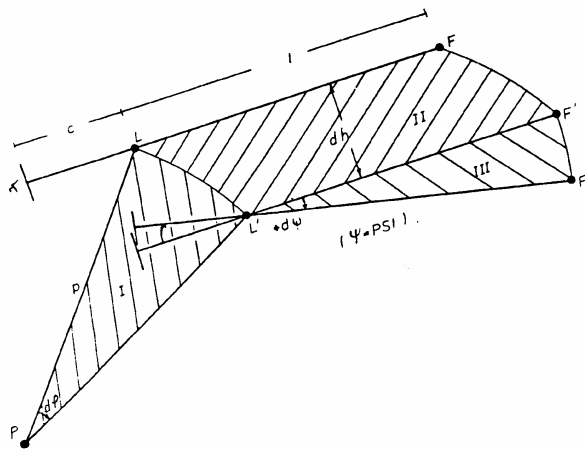
Somit ergibt sich: Fläche 123456 = Fläche 3'45' = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

8.1.2 Flächenbestimmung mit dem Polarplanimeter



Das Planimeter ist ein mechanisches Integrierinstrument, mit dem der Inhalt einer Fläche durch Umfahren der Umfangslinie bestimmt wird. Sein Einsatz ist immer dann sinnvoll, wenn die Fläche eine unregelmäßige Form hat oder durch gekrümmte Linien begrenzt ist.

Die zu bestimmende Fläche wird mit dem Fahrstift umfahren. Zu Beginn und Ende der Umfahrung wird die Messrolle abgelesen. Die Fläche ergibt sich als Produkt aus der Planimeterkonstanten und der Differenz der Messrollenablesungen.



Bezeichnungen:

- P = Pol
- p = Polarm (Länge)
- L = Leitpunkt
- l = Fahrarm (Länge)
- F = Fahrstift
- r = Radius der Messrolle
- U = Anzahl der Rollenumdrehungen bei einer Umfahrung
- A = Abwicklung = $2\pi r U$
- $d\phi$ = Drehung (Rotation) des Polarms
- $d\psi$ = Drehung (Rotation) des Fahrarms
- dh = Translation des Fahrarms

Bei einer differentiellen Verschiebung des Fahrstiftes F von der Ausgangslage F über die Zwischenlage F' (Parallelverschiebung) nach F'' (Parallelverschiebung und Drehung) werden die Teilflächen I, II, III überstrichen.

Fläche	diff. Flächenelement dF	Rollenabwicklung dA
I	$\frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot d\phi$	$\left. \begin{array}{l} dh \\ -c \cdot d\psi \end{array} \right\}$
II	$l \cdot dh$	
III	$\frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot d\psi$	
	$dF = \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot d\phi + l \cdot dh + \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot d\psi \quad (1)$	$dA = dh - c \cdot d\psi$

Das Vorzeichen von dF regelt sich durch die rechts- bzw. linksläufige Bewegung von F bezüglich P. Die Größe dh muss aus (1) eliminiert werden, da sie nicht messbar ist. Die übrigen Größen ϕ , ψ , A sind leicht ermittelbar.

$$dh = dA + c \cdot d\psi \quad (2)$$

Somit führt Einsetzen von (2) in (1) zu

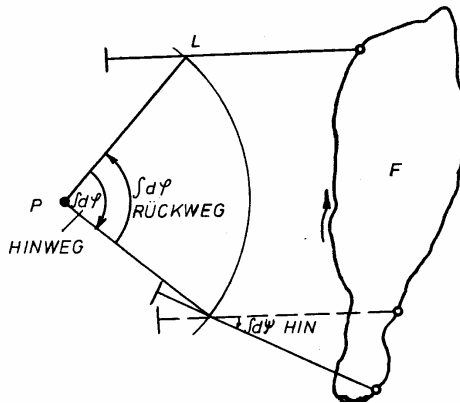
$$dF = \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot d\phi + l \cdot (dA + c \cdot d\psi) + \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot d\psi$$

und nach Integrieren und Ordnen in der Reihenfolge $d\psi$, $d\phi$, dA findet man

$$F = (\frac{1}{2} \cdot l^2 + l \cdot c) \cdot \int d\psi + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \int d\phi + l \cdot \int dA.$$

Es werden nun 2 verschiedene Fälle betrachtet:

1. Pol außerhalb der umfahrenen Fläche



Nach Umfahren der Fläche kehrt der Fahrarm in die Ausgangslage zurück.

Es folgt: $\int d\varphi = 0^\circ$ $\int d\psi = 0^\circ$

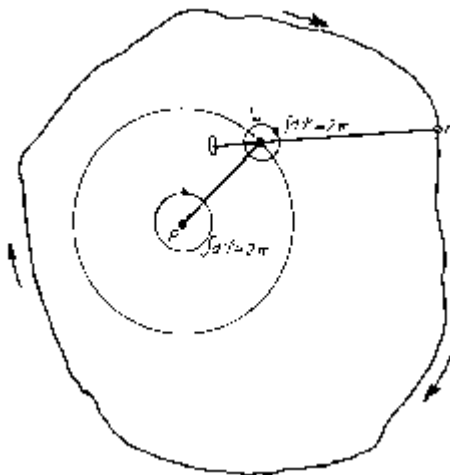
$$\begin{aligned} \int d\mathbf{F} &= \mathbf{l} \cdot \int d\mathbf{A} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4)$$

Da $A = 2\pi \cdot r \cdot U$ gilt, können wir für (4) auch folgendes schreiben:

$$F = 2\pi \cdot r \cdot l \cdot U = K_1 \cdot U \quad (4a)$$

Also ist die Planimeterkonstante K_1 für "Pol außen" proportional zur Länge des Fahrarms.

2. Pol innerhalb der umfahrenen Fläche



In diesem Fall wird:

$$\int d\varphi = 2\pi$$

$$\int d\psi = 2\pi$$

aus (3) erhält man:

$$F = (\frac{1}{2} \cdot l^2 + l \cdot c) \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot 2\pi + l \cdot A$$

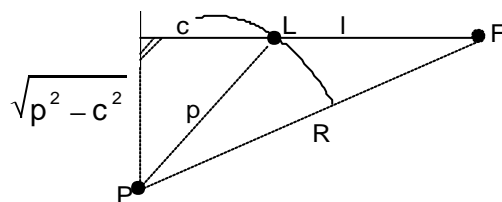
$$F = 1 \cdot A + (p^2 + l^2 + 2 \cdot 1 \cdot c)\pi$$

mit (4a)

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_2 \quad (5)$$

Geometrische Bedeutung von K_2 :

Dreht man in der unten abgebildeten Stellung das Planimeter um P, so erfolgt keine Abwicklung der Rolle. Der Kreis, den das Planimeter in dieser Stellung umschreibt, nennt man den Grundkreis.



Bestimmung von R mittels Pythagoras

$$\begin{aligned} R^2 &= (1+c)^2 + \left(\sqrt{p^2 - c^2}\right)^2 \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot c + c^2 + p^2 - c^2 \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot c + p^2 \end{aligned}$$

Fläche des Grundkreis: $F_G = \pi \cdot R^2 = \pi(l^2 + 2 \cdot l \cdot c + p^2) = K^2$

Praktische Anwendung des Polarplanimeters:

Zur praktischen Anwendung der Formeln (4a) und (5) müssen noch folgende Werte ermittelt werden:

- Anzahl der Rollenumdrehungen U bei einer Umfahrung der Fläche
- die Planimeterkonstanten K_1 und $F_G = K_2$

Ermittlung der Anzahl der Rollenumdrehungen:

Der Umfang der Messrolle wird in 1000 Nonieneinheiten eingeteilt. Es sei nun n die Anzahl der Nonieneinheiten bei der Umfahrung der Fläche, wobei $n = 1000$ einer Umdrehung entspricht.

$$n = \text{Ablesung Ende Umfahrung} - \text{Ablesung Anfang Umfahrung} = A_e - A_a$$

dann ergibt sich die Anzahl der Rollenumdrehungen
$$U = \frac{n}{1000} \quad (6)$$

Ermittlung der Planimeterkonstanten

Die Formel (6) in (4a) und (5) eingesetzt führt zu den praktischen Formeln:

$$F = K_1 \cdot U = 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \left(\frac{n}{1000}\right) \Rightarrow F = C_1 \cdot n \quad \text{“Pol außen” (4a*)}$$

$$F = K_1 \cdot U + F_G \Rightarrow F = C_1 \cdot n + F_G \quad \text{“Pol innen” (5a*)}$$

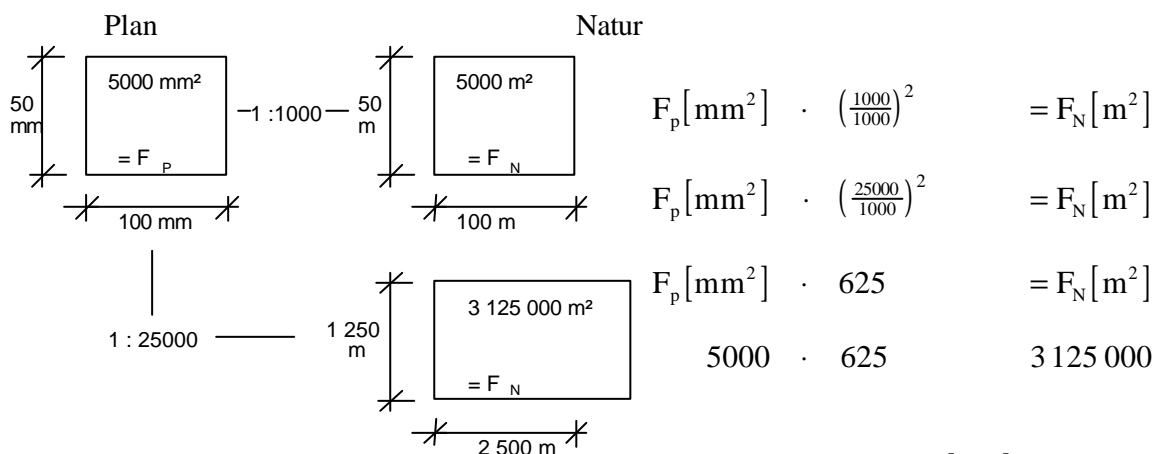
Dabei hat C_1 die Dimension $\left[\frac{\text{mm}^2}{\text{N.E.}}\right]$ und kann aus einer Eichung - Umfahrung einer Figur bekannten Inhalts - erhalten werden. Es sei z.B. F_b [mm^2] eine solche Fläche bekannten Inhalts, zu der n_b [N.E.] gehöre.

$$\text{Dann gilt } F_b = C_1 \cdot n_b \Rightarrow C_1 = \frac{F_b}{n_b}$$

Wenn nun von der Fläche F_p [mm^2] im Plan auf die Fläche in der Natur F_N [m^2] übergegangen werden soll, dann muss F_p - wenn der Planmaßstab $1 : M$ ist - mit dem Faktor $\left(\frac{M}{1000}\right)^2$ multipliziert werden.

$$F_N [\text{m}^2] = F_p [\text{mm}^2] \cdot \left(\frac{M}{1000}\right)^2$$

Beispiele:



Somit kann, wenn C_1 in $\left[\frac{\text{mm}^2}{\text{N.E.}}\right]$ und F_p in [mm^2] bekannt sind, leicht zu einem beliebigen Planmaßstab $1:M$ übergegangen werden:

Aus (4a)

$$F_p [\text{mm}^2] = C_1 \cdot n \Rightarrow \underbrace{F_p [\text{mm}^2] \cdot \left(\frac{M}{1000}\right)^2}_{F_N [\text{m}^2]} = \underbrace{C_1 \cdot \left(\frac{M}{1000}\right)^2}_{C_M \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{N.E.}}\right]} \cdot n$$

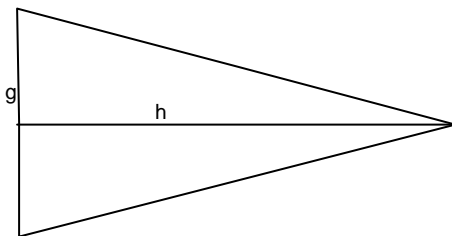
Für die Fläche in der Natur bei Planmaßstab 1:M gilt:

$$\begin{aligned} \text{mit } C_M \left[\frac{\text{m}^2}{\text{N.E.}} \right] &= C_1 \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{N.E.}} \right] \cdot \left(\frac{M}{1000} \right)^2 \left\{ \begin{array}{ll} F_N [\text{m}^2] = C_M \cdot n & \text{"Pol außen"} \\ \text{und } F_G = F_G \cdot \left(\frac{M}{1000} \right)^2 & F_N [\text{m}^2] = C_M \cdot n + F_G \quad \text{"Pol innen"} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Praktisch wird so verfahren, dass die Eichung in dem Plan erfolgt, in dem die Flächen zu bestimmen sind. Einen runden Wert für C erhält man, indem die Fahrarmlänge entsprechend eingestellt wird.

8.2 Halbgraphische Flächenbestimmung

Wenn von einem Gebiet, dessen Fläche bestimmt werden soll, eine Karte und teilweise Feldmaße bzw. Koordinaten vorliegen, kann die halbgraphische Flächenbestimmung zur Anwendung kommen. Diese Methode ist angebracht, wenn die zu bestimmende Fläche in schmale Dreiecke zerlegt werden kann, deren kurze Grundseiten aus Feldmaßen bzw. Koordinaten (mit höherer Genauigkeit) und deren relativ lange Höhen aus der maßstäblichen Karte (mit geringer Genauigkeit) abgegriffen werden können.



Der Flächenfehler ergibt sich wie folgt:

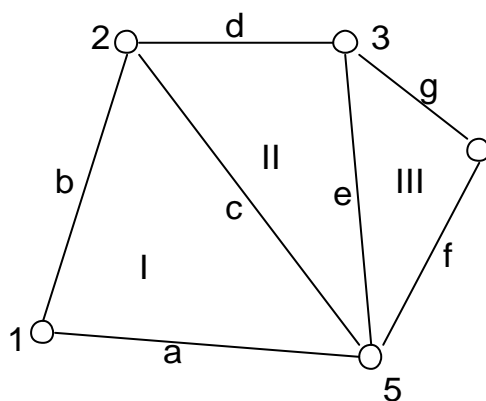
$$dF = 1/2 (g \, dh + h \, dg)$$

Um dF klein zu halten, muss vor allem der Fehler der Grundseite g, welcher mit dem großen Wert der Höhe multipliziert wird gering sein, was durch dieses Verfahren gegeben ist.

8.3 Flächenbestimmung aus Feldmaßen

8.3.1 Zerlegung in Dreiecke

Wenn in einem Dreieck die Seiten a, b, c bekannt sind, kann der Flächeninhalt folgendermaßen ermittelt werden:



Um den Gesamtinhalt des 5Ecks 12345 zu ermitteln, wurde die Fläche in 3 Dreiecke zerlegt. Es gilt:

$$F_I = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$F = F_I + F_{II} + F_{III}$$

8.3.2 Berechnung aus rechtwinkligen Koordinaten

Trapezformel

Die unten abgebildete Fläche wird zur Berechnung mit Hilfe der Koordinatenachse gedanklich in Trapeze aufgeteilt.

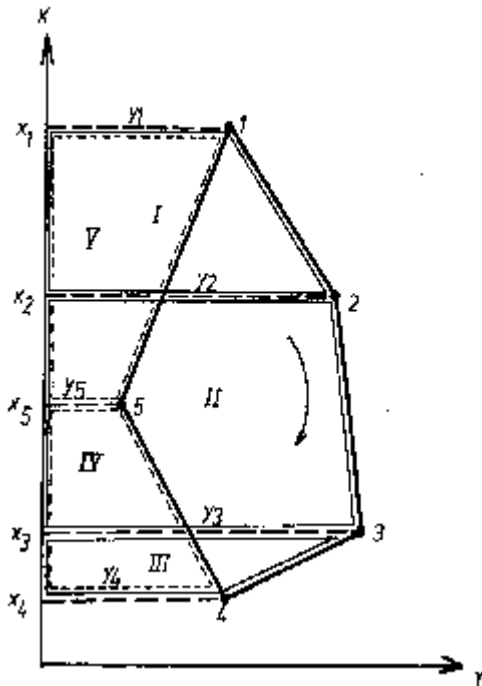
$$F = F_I + F_{II} + F_{III} - F_{IV} - F_V$$

bzw.

$$2F = 2F_I + 2F_{II} + 2F_{III} - 2F_{IV} - 2F_V$$

Grundlinien der Trapeze: y_i und y_{i+1}

Höhen der Trapeze: $x_i - x_{i+1}$



$$\begin{aligned} 2F &= (x_1 - x_2) \cdot (y_1 + y_2) + (x_2 - x_3) \cdot (y_2 + y_3) + (x_3 - x_4) \cdot (y_3 + y_4) - (x_5 - x_4) \cdot (y_4 + y_5) - (x_1 - x_5) \cdot (y_5 + y_1) \\ &= (x_1 - x_2) \cdot (y_1 + y_2) + (x_2 - x_3) \cdot (y_2 + y_3) + (x_3 - x_4) \cdot (y_3 + y_4) + (x_4 - x_5) \cdot (y_4 + y_5) + (x_5 - x_1) \cdot (y_5 + y_1) \end{aligned}$$

allgemein ergibt sich:

$$2F = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}) \quad (1)$$

oder, wenn man von der y-Achse ausgehen würde:

$$2F = \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i) \cdot (x_i + x_{i+1}) \quad (2)$$

Dreieckformel bzw. Gauß'sche Flächenformel

Die Formeln (1) bzw. (2) ausmultipliziert und nach den indizierten x im Uhrzeigersinn geordnet, ergibt:

$$\begin{aligned} 2F &= x_1(y_1 - y_1 - y_5 + y_2) + x_2(y_2 - y_2 - y_1 + y_3) + x_3(y_3 - y_3 - y_2 + y_4) + x_4(y_4 - y_4 - y_3 + y_5) + x_5(y_5 - y_5 - y_4 + y_1) \\ &= x_1(y_2 - y_5) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_1 - y_4) \end{aligned}$$

allgemein:

$$2F = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3)$$

und entsprechend nach steigenden y_i geordnet:

$$2F = \sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (4)$$

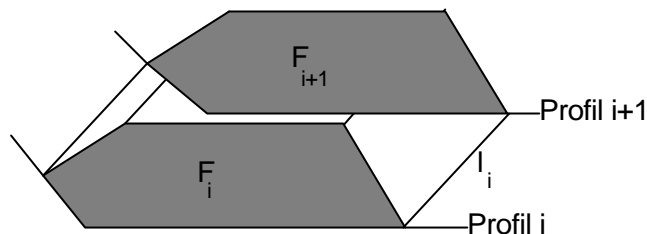
Die Formeln (1) bis (4) sind für beliebige n -Ecke gültig. Man erhält ein positives Ergebnis bei Umfahrung der Figur im Uhrzeigersinn, sonst ein negatives.

8.4 Massenberechnungen

Im Bauwesen hat die Berechnung von Massen große Bedeutung, da sie wesentliche Unterlagen für die Planung und Kostenermittlung einer Baumaßnahme sind. Es gibt verschiedene Verfahren zur Massenberechnung:

8.4.1 Das Querschnittsverfahren

Dieses Verfahren eignet sich besonders für langgestreckte Baukörper (Verkehrswege).



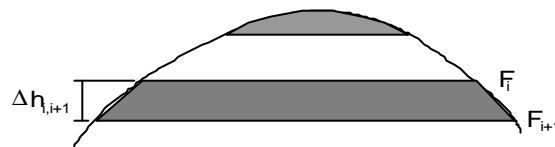
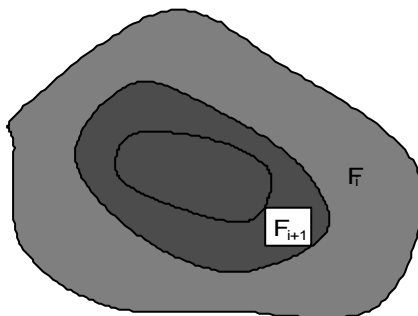
Auf der abgesteckten Trasse werden in regelmäßigen Abständen Querprofile gemessen und aufgezeichnet. In diese wird der Kunstkörper einkonstruiert und der Querschnitt der aufzutragenden oder abzuhebenden "Massen" graphisch oder rechnerisch bestimmt.

Das Volumen errechnet sich dann aus: $V_{i,i+1} = \frac{1}{2} \cdot l_i \cdot (F_i + F_{i+1})$ und $V = \sum V_{i,i+1}$.

Die Genauigkeit von V hängt davon ab, wie genau das Gelände im Querprofil erfasst ist und wie groß der Abstand l ist. Das Verfahren wird ungünstig, wenn sich F_1 und F_2 stark unterscheiden.

8.4.2 Das Höhengichtlinienverfahren

Dieses Verfahren eignet sich für flächenhafte Baukörper. Beim Höhengichtlinienverfahren wird der zu berechnende Körper durch horizontale Schnitte in dünne Scheiben zerlegt, deren Dicke dem Abstand der Höhenlinien entspricht. In den Höhenplan wird der Kunstkörper einkonstruiert, sowie seine Höhenlinien.



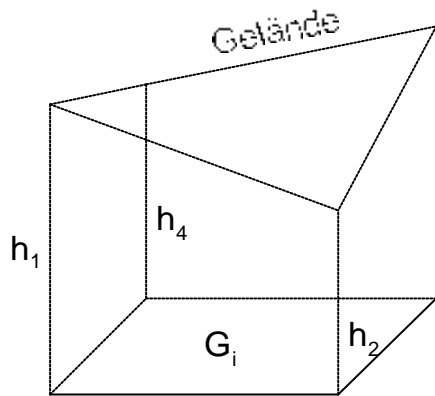
Das Volumen ergibt sich wie folgt:

$$V_{i,i+1} = \frac{1}{2} \Delta h_{i,i+1} (F_i + F_{i+1}) \quad \text{und} \quad V = \sum V_{i,i+1}$$

8.4.3 Das Prismenverfahren

Bei diesem Verfahren wird der zu berechnende Körper in senkrechte Prismen eingeteilt, deren Grundflächen meist Quadrate sind. Für eine solche Massenberechnung ist deshalb die Erfassung durch ein Flächennivellement notwendig, dessen Punkte auf einem quadratischen Raster liegen. Ist das Gelände damit nicht zu erfassen, kann man es auch mit einem Dreiecksrost überdecken, dessen Punkte tachymetrisch eingemessen werden.

Die Anlage quadratischer Roste hat dabei den Vorteil, dass eine besondere Flächenberechnung entfällt, da der Flächeninhalt der Quadrate bekannt und gleich groß ist.



Das Volumen ergibt sich zu:

$$V_i = \frac{1}{4} G_i (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \quad \text{und} \quad V = \sum V_i$$

h_3 mit G_i = Grundfläche

Das Gesamtvolumen des von dem Quadratnetz bedeckten Körpers lässt sich in einem Zuge berechnen, indem man die Eckhöhen der Gesamtfäche je einmal, die Randhöhen je zweimal und die Innenhöhen je viermal ansetzt und die Summe mit 1/4 der Fläche eines Quadrates multipliziert. (Innenhöhen sind an 4, Randhöhen an zwei Quadraten und Eckhöhen an einen Quadrat beteiligt.)

Das Gesamtvolumen ergibt sich also zu:

$$V = \frac{1}{4} G_i \left(\sum h_{i_{\text{ecke}}} + 2 \sum h_{i_{\text{rand}}} + 4 \sum h_{i_{\text{innen}}} \right)$$

9 Absteckungen

Vorbemerkungen

Abstecken bedeutet die **Übertragung eines geplanten Bauwerkes in die Natur**. Dazu muss ein Zusammenhang zwischen in der Natur bereits vorhandenen Punkten und Linien sowie den Punkten und Linien des Bauwerkes gegeben sein. Sind solche Linien und Punkte nicht bereits in der Natur vorhanden, so müssen sie geschaffen werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass diese Linien später auch zur Absteckung verwendet und auch während des Baubetriebs zu Kontrollmessungen (falls erforderlich) verwendet werden können.

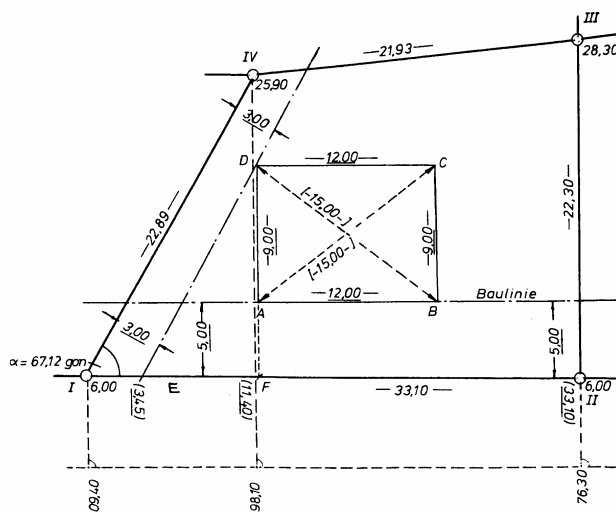
Die Lage und Verteilung solcher Lage- und Höhenfestpunkte richtet sich nach der Gestalt des Bauwerkes. Bei flächenhaften Bauwerken wird man die Punkte durch die Messung eines trigonometrischen Netzes bestimmen, während es für linienhafte Bauwerke (Straßen) günstiger ist, wenn man Polygonzüge legt.

Zur Sicherung der Punkte sollen außerhalb der Baustelle ebenfalls Punkte bestimmt werden, von denen aus während des Baus verlorengegangene Punkte wieder bestimmt werden können.

Das Absteckverfahren richtet sich nach der Form des Bauwerks. Es kann nach denselben Verfahren wie die Aufnahme erfolgen. Die Absteckung ist stets durch ein zweites unabhängiges Verfahren zu kontrollieren, da falsche Absteckungen unangenehme und teure Folgen haben können.

9.1 Absteckungen von Gebäuden

Beispiel: Die Gebäudeecken sollen aus dem Lageplan ins Gelände übertragen und gesichert werden.



Katastermaß:	-21.93-
Absteckmaß:	-12.00-
Gerechnetes Absteckmaß:	(11.40)
Kontrollmaß:	[15.00]

1.) Absteckung der Flucht AB (Baulinie)

- 5.00 m Parallele zur Grenze I, II.

2.) Absteckung der Gebäudeecken A und D

a) ohne Hilfsberechnung:

- 3.00 m Parallele zur Grenze I, IV
- 14.00 m Parallele zur Grenze I, II
- D durch Einweisen in beide Geraden
- A ist Winkelfußpunkt von D auf der Baulinie.

b) mit Hilfsberechnung:

- Berechnung von α aus den Koordinaten der Grenzpunkte I und IV:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{IV} - y_I}{x_{IV} - x_I}$$

$$\text{hier: } \alpha = \arctan \frac{25.90 - 6.00}{109.40 - 98.10} = \arctan 1.7611 = 67.12 \text{ gon}$$

- Berechnung der Abszisse \overline{IF}

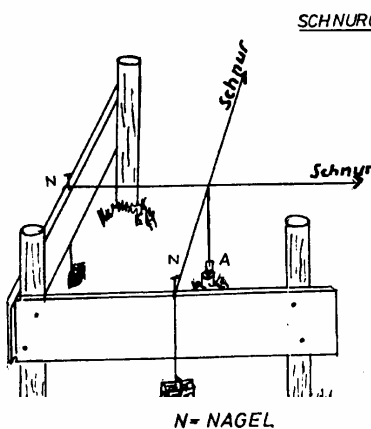
$$\overline{IF} = \overline{IE} + \overline{EF}$$

$$\text{wobei: } \overline{IE} = \frac{3.00 \text{ m}}{\sin \alpha} = \frac{3.00 \text{ m}}{0.8696} = 3.45 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = \frac{14.00 \text{ m}}{\tan \alpha} = \frac{14.00 \text{ m}}{1.7609} = 7.95 \text{ m}$$

$$\overline{IF} = 11.40 \text{ m}$$

- F wird nun auf der Grenzlinie I, II von I aus im Abstand \overline{IF} abgesteckt und rechtwinklig dazu A und D mit den bekannten Maßen von F aus.

**3.) Absteckung der Gebäudeecken B und C**

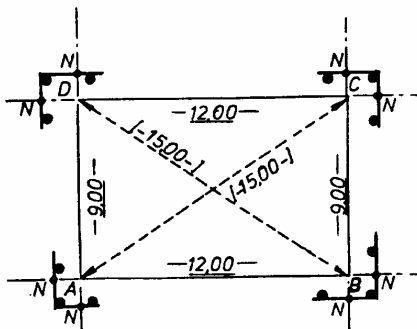
- B auf der Baulinie im Abstand \overline{AB} von A; C rechtwinklig zur Baulinie im Abstand \overline{BC} von B aus.

4.) Absteckungskontrollen

- Messung der Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} sowie der Strecke \overline{CD}

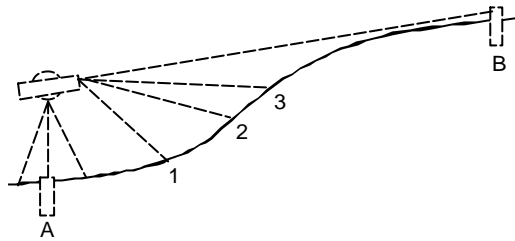
5.) Verpflocken der abgesteckten Ecken.**6.) Versicherung der Absteckung mittels Schnurgerüsts.**

- Die abgesteckten Fluchten \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} und \overline{AD} werden genau auf die horizontalen Bretter des Schnurgerüsts eingewiesen (z.B. mit der Kreuzscheibe) und dort mit einem Nagel vermarktet. Durch Drähte oder Schnüre, die zwischen den entsprechenden Nägeln gespannt werden, wird später die Flucht für die Bauarbeiten sichtbar gemacht.



9.2 Absteckungen von langen Geraden

9.2.1 Abstecken einer langen Geraden bei gegenseitig sichtbaren Endpunkten



- 1.) Theodolit über A aufbauen, Punkt B signalisieren.
- 2.) Punkt B in Fernrohrlage I anzielen und Punkt 1 einweisen $\Rightarrow l_I$
- 3.) Punkt B in Fernrohrlage II anzielen und Punkt 1 einweisen $\Rightarrow l_{II}$
- 4.) Mitte zwischen l_I und l_{II} ergibt Punkt 1

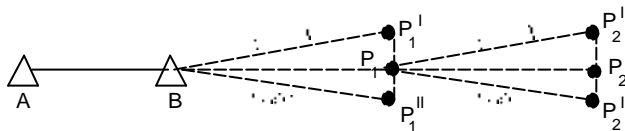
5.) Für die Punkte 2, 3 und alle weiteren Punkte werden 2.), 3.) und 4.) wiederholt

Durch Messung in beiden Fernrohrstellungen und Mittelung der Ergebnisse fallen der Einfluss von Zielachsen- und Kippachsenfehler heraus.

9.2.2 Allmähliches Vortreiben einer langen Geraden (Tunnelabsteckung)

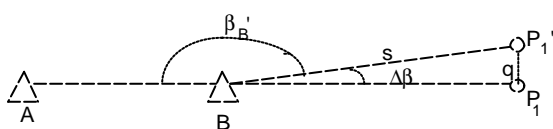
Die Gerade AB soll über B hinaus verlängert werden

a) **durch Durchschlagen des Fernrohres**



- 1.) Theodolit über B aufbauen, A signalisieren.
- 2.) Punkt A in Fernrohrlage I anzielen, Fernrohr durchschlagen, P_1^I einweisen.
- 3.) Punkt A in Fernrohrlage II anzielen, Fernrohr durchschlagen, P_1^{II} einweisen.
- 4.) Mitte zwischen P_1^I und P_1^{II} ergibt P_1
- 5.) Theodolit über P_1 aufstellen.
für alle weiteren Punkt werden 2.), 3.), 4.) wiederholt
- 6.) Kontrolle: Polygonzugsberechnung und Ermittlung der Verschiebung.

b) **durch Absetzen von 200 gon Winkeln**

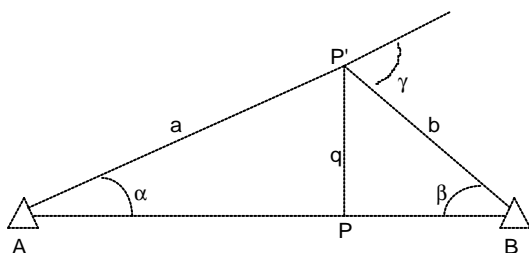


- 1.) Theodolit in B aufstellen, A signalisieren.
- 2.) Absetzen des Winkels $\beta_B' \approx 200 \text{ gon}$ ergibt P_1'
- 3.) Genaue Messung des Winkels β_B' in mehreren Sätzen.

$$4.) \text{ Errechnen der Querverschiebung } q: \quad \Delta\beta = 200 \text{ gon} - \beta_B' \quad q = \frac{s \cdot \Delta\beta [\text{mgon}]}{\rho [\text{mgon}]}$$

- 5.) Verschiebung des Punktes P_1' um q ergibt P_1
- 6.) Kontrolle: Winkel ABP_1 muss 200 gon sein.

9.2.3 Absteckung einer Geraden, deren Endpunkte gegenseitig nicht sichtbar bzw. unzugänglich sind



- 1.) Näherungsweise Einweisen ergibt P' in der Nähe der Geraden AB.
- 2.) Winkel γ in P' messen, Strecken a und b schätzen.
- 3.) Die gesuchte Querverschiebung q bis zum Geradenpunkt P findet man:

$$\text{Sinussatz: } \frac{\sin \gamma}{(a+b)} \approx \frac{\sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \alpha \approx \frac{a \cdot \sin \gamma}{(a+b)}$$

$$\text{da: } q = b \cdot \sin \alpha \text{ ergibt sich: } q = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{(a+b)}$$

$$\text{Da } \gamma \text{ ein kleiner Winkel ist, kann man auch setzen: } q = \frac{a \cdot b}{(a+b)} \cdot \frac{\gamma [\text{mgon}]}{\rho [\text{mgon}]}$$

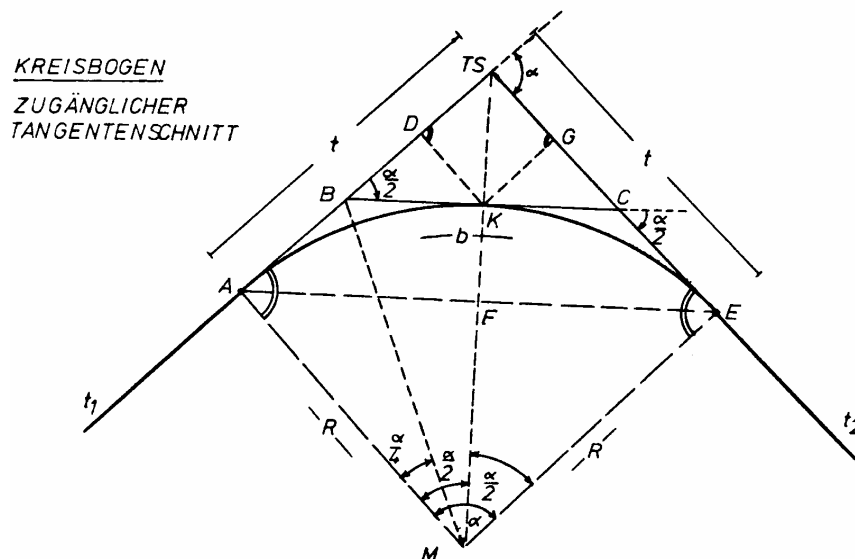
4.) Kontrolle: Winkelmessung in P, Wiederholung des Verfahrens, wenn notwendig.

9.3 Absteckungen von Kreisbögen

Von allen abzusteckenden Kreisbögen sind die Tangenten t_1 und t_2 sowie der Radius R gegeben. Diese Maße werden durch die örtlichen Gegebenheiten bzw. durch planerische Vorgaben festgelegt.

9.3.1 Absteckung der Hauptpunkte

1. Zugänglicher Tangentenschnittpunkt

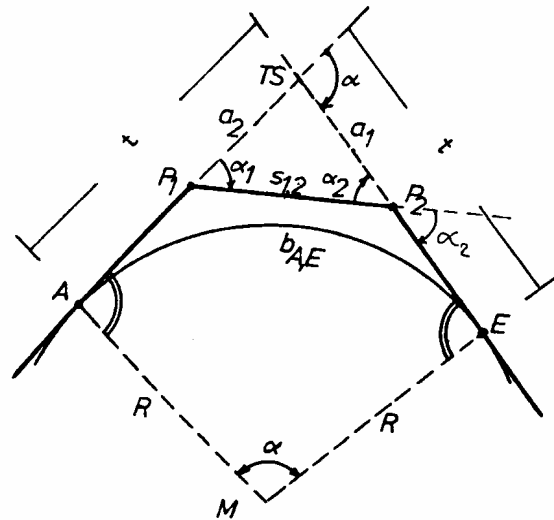


- 1.) Herstellung des Tangentenschnittpunktes TS im Gelände
- 2.) Messung des Winkels α auf TS
- 3.) Berechnung der Absteckmaße nach den unten angegebenen Formeln und Absteckung der Hauptpunkte auf der Tangenten t_1, t_2

Formeln:

Tangentenlänge:	$\overline{A, TS} = \overline{E, TS} = R \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$
Bogenlänge:	$b = \overline{A, E} = R \cdot \frac{\alpha}{\rho}$
Scheitelabstand:	$\overline{TS, K} = R \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) = R \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{4}$
Scheiteltangente:	$\overline{A, B} = \overline{B, K} = \overline{C, E} = \overline{C, E} = R \cdot \tan \frac{\alpha}{4}$
Abszisse des Scheitels = halbe Sehnenlänge:	$\overline{A, D} = \overline{A, F} = \overline{E, F} = \overline{E, G} = R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$
Ordinate des Scheitels = Pfeilhöhe der Bogenmitte:	$\overline{D, K} = \overline{G, K} = \overline{F, K} = R \cdot \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}$

2. Unzugänglicher Tangentschnittpunkt mit einer Zwischenseite



Da der Tangentschnittpunkt nicht zugänglich ist, kann man den Tangentenwinkel= Zentriwinkel α nicht direkt messen. Man misst, mit Hilfe der verlängerten Geraden $\overline{P_1P_2}$, ersatzweise die Winkel α_1 und α_2 auf P_1 bzw. P_2 und die Strecke $s_{12} = \overline{P_1P_2}$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{und} \quad t = R \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{wie 1.}$$

und

$$a_1 = \frac{s_{12} \cdot \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

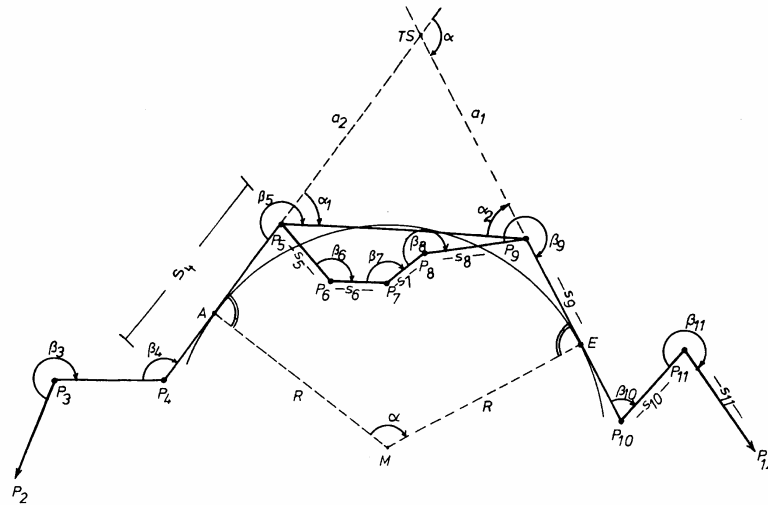
$$a_2 = \frac{s_{12} \cdot \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Die Punkte A und E werden nun von P_1 bzw. P_2 aus abgesteckt.

$$\overline{P_1A} = t - a_2$$

$$\overline{P_2E} = t - a_1$$

3. Unzugänglicher Tangentenschnittpunkt mit beliebig vielen Zwischenseiten



Aus dem gemessenen und berechneten Polygonzug P_1, P_2, \dots, P_{12} werden die Seiten

als Tangenten für einen Kreisbogen mit gegebenem Radius R ausgewählt. Gesucht werden die Absteckmaße $\overline{P_5, A}$ und $\overline{P_9, E}$ für den Anfangspunkt A und den Endpunkt E des Kreisbogens, der Zentriwinkel α und die übrigen geometrischen Elemente der Hauptpunktberechnung wie unter 1.

Lösung: Rückführung auf den 2. Fall mit Hilfe der bekannten Koordinaten des Polygonzuges.

Seite $s = \overline{P_5, P_9}$ des Hilfsdreiecks P_5, TS, P_9 nach Grundaufgabe

$$s = \sqrt{(x_9 - x_5)^2 + (y_9 - y_5)^2}$$

Winkel α_1 und α_2 aus der Differenz von Richtungswinkeln

$$\alpha_1 = \varphi_{5,9} - \varphi_{4,5} \quad \text{mit} \quad \tan \varphi_{5,9} = \frac{y_9 - y_5}{x_9 - x_5}$$

und $\tan \varphi_{4,5} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$

$$\alpha_2 = \varphi_{10,9} - \varphi_{9,5} \quad \text{mit} \quad \tan \varphi_{10,9} = \frac{y_9 - y_{10}}{x_9 - x_{10}}$$

und $\varphi_{9,5} = \varphi_{5,9} \pm 200 \text{ gon}$

Danach weiter wie unter 2. Die gesuchten Absteckmaße findet man analog:

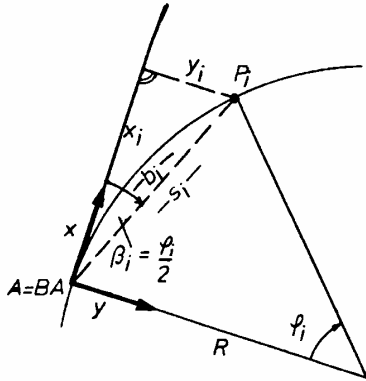
$$\overline{P_5 A} = t - a_2$$

$$\overline{P_9 E} = t - a_1$$

9.3.2 Absteckung der Kleinpunkte

9.3.2.1 Absteckung rechtwinkliger Koordinaten

A) Absteckung der Kleinpunkte von der Tangente aus.



Gegeben:

- Anfangspunkt des Kreises bzw. beliebiger Berührungspunkt A = BA
- aus der Stationslänge ist die Bogenlänge BA - P_i bekannt

Dann gelten die folgenden Grundgleichungen:

$$1.) \text{ Sehnen-Tangenten-Winkel} \quad \beta_i = \frac{\varphi_i}{2} \quad (1)$$

$$2.) \text{ Sehnenlänge } s_i \quad s_i = R \cdot \sin \frac{\varphi_i}{2} + R \cdot \sin \frac{\varphi_i}{2} = 2 R \cdot \sin \frac{\varphi_i}{2} \quad (2)$$

$$3.) \text{ Koordinaten } x_i, y_i \text{ von } P_i \text{ bezogen auf das örtliche System der Tangente}$$

$$x_i = R \cdot \sin \varphi_i$$

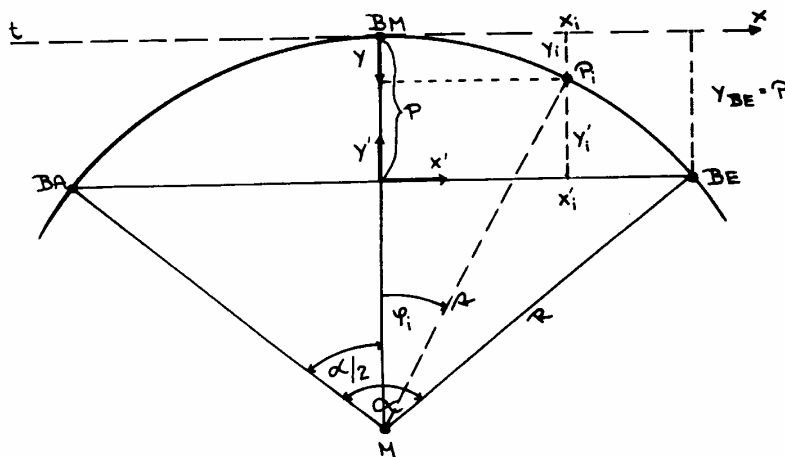
$$y_i = R - R \cdot \cos \varphi_i = R(1 - \cos \varphi_i) \quad (3)$$

$$y_i = s_i \cdot \sin \frac{\varphi_i}{2} = 2 R \cdot \sin^2 \frac{\varphi_i}{2}$$

4.) Beziehung zwischen den rechtwinkligen Koordinaten (x_i vorgegeben)

$$y_i = R - \sqrt{R^2 - x_i^2} = R - \sqrt{(R + x_i)(R - x_i)} \quad (4)$$

B) Absteckung der Kleinpunkte von der Sehne aus



BA = Bogenanfang

BE = Bogenende

BM = Bogenmitte

$\overline{BA, BE} \parallel$ Tangente in BM

Beziehung zwischen den Tangentenkoordinaten (Ursprung BM) und den Sehnenkoordinaten:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \\ y_i' &= p - y_i \end{aligned} \quad (5)$$

weiter gilt:

$$\begin{aligned} p &= y_{BE} \\ \varphi_{BE} &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

nach (3) folgt:
$$p = 2R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} \quad (6)$$

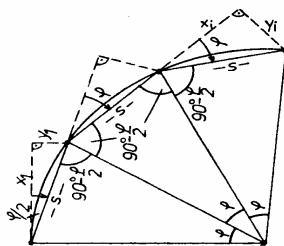
Also folgen die Gleichungen für die Sehnenkoordinaten:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i = R \cdot \sin \varphi_i \\ y_i' &= p - y_i = 2R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4} - 2R \cdot \sin^2 \frac{\varphi_i}{2} \\ y_i' &= 2R \left(\sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\varphi_i}{2} \right) \end{aligned}$$

oder:

$$y_i' = R \cdot \cos \varphi_i - R \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = R \left(\cos \varphi_i - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

C) Einrückmethode



Der Kreisbogen wird langsam vorangetrieben, indem man alle Kleinpunkte rechtwinklig von der vorherigen Sehne \overline{AM} absteckt. Der erste Kleinpunkt wird auf die Gerade \overline{AM} bezogen. Alle Bogenlängen und Sehnen seien gleich groß.

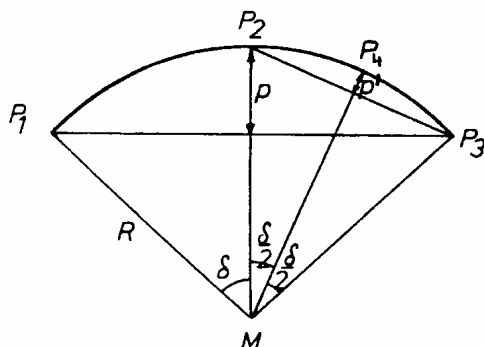
Nach (2) gilt für eine Sehne:
$$s = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

Also gilt:
$$x_1 = s \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad y_1 = s \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

sowie:
$$x_i = s \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad y_i = s \cdot \sin \varphi = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi$$

D) Viertelsmethode

Alle abzusteckende Kleinpunkte liegen genau zwischen zwei, bereits abgesteckten, Kreispunkten.



p = Pfeilhöhe von P_2 bezogen auf die Sehne $\overline{P_1P_3}$

dann gilt nach (3):
$$p = R(1 - \cos \delta)$$

bzw.:
$$p = 2R \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (a)$$

p' = Pfeilhöhe von P_4 bezogen auf die Sehne $\overline{P_2P_3}$

analog gilt:
$$p' = 2R \cdot \sin^2 \frac{\delta}{4} \quad (b)$$

Division von (b) durch (a) ergibt:

$$\frac{p'}{p} = \frac{2R \cdot \sin^2 \frac{\delta}{4}}{2R \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\delta}{4}}{4 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{4} \cdot \cos^2 \frac{\delta}{4}} = \frac{1}{4 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{4}}$$

für kleine Winkel gilt:

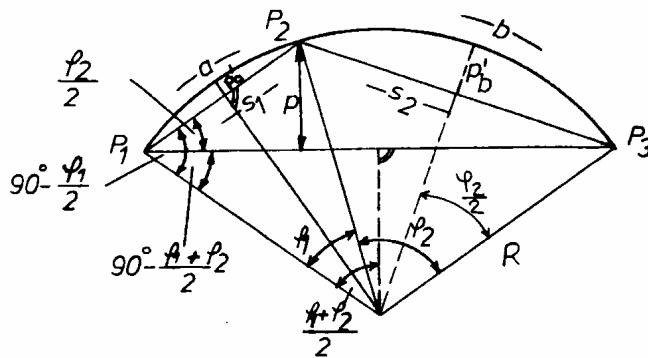
$$\cos^2 \frac{\delta}{2} \Rightarrow 1$$

also gilt:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{1}{4} p \quad (7)$$

E) Erweiterung der Viertelsmethode

Die abzusteckende Kleinpunkte liegen beliebig zwischen zwei, bereits abgesteckten, Kreispunkten.



für p gilt:

$$p = s_1 \cdot \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{s_2}{2R}$$

daraus folgt:

$$p = \frac{s_1 \cdot s_2}{2R} \quad (8)$$

(exakte Formel)

für kleine Bögen gilt:

$$a \approx s_1 \quad b \approx s_2$$

und damit:

$$p \approx \frac{a \cdot b}{2R} \quad (8a)$$

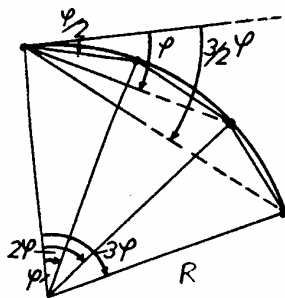
Werden dann die Bögen a und b jeweils für sich abgesteckt, so gelten folgende Beziehungen (mit 8a):

$$p_b' = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2R} = \frac{b^2}{4 \cdot 2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_b'}{p} = \frac{b^2}{4 \cdot 2R} \cdot \frac{2R}{a \cdot b} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a}$$

$$p_a' = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2R} = \frac{a^2}{4 \cdot 2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_a'}{p} = \frac{a^2}{4 \cdot 2R} \cdot \frac{2R}{a \cdot b} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{b}$$

Für weitere Zwischenpunkte ist gleichermaßen zu verfahren.

9.3.2.2 Absteckung mit Hilfe eines Theodoliten

A) Polares Abstecken mit Sehnen und Sehnen-Tangenten-Winkeln (Peripheriewinkelmethode)

allgemein: $s = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$

1. Mit dem Theodolit werden die Winkel abgedreht und somit die Richtung, in der der Kreispunkt liegt, festgelegt. Dann werden gleiche Sehnenlängen (z.B. 20m) vom benachbarten Punkt in diese Richtung abgesetzt.

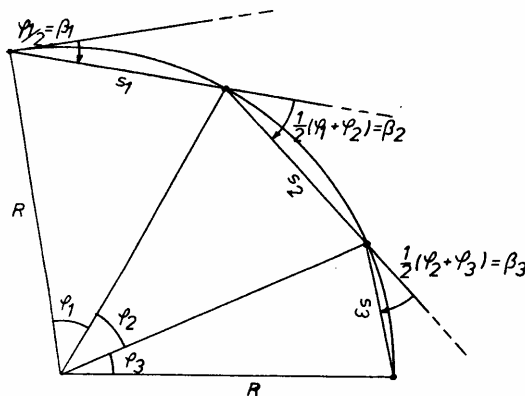
ODER:

$$s_1 = 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} ; s_2 = 2R \cdot \sin \varphi ; s_3 = 2R \cdot \sin \frac{3}{2}\varphi ; \dots$$

2. Die Winkel werden ebenfalls mit dem Theodolit abgedreht. Die Sehnen s_1, s_2, s_3, \dots werden jetzt vom Theodolitenstandpunkt aus abgesetzt.

B) Einrückmethode mit Sehnen und Winkeln

Diese Methode sollte nur für sehr große Sehnen angewendet werden. Hier werden die Winkel auf die davorliegenden Sehne (bzw. für Punkt 1 auf die Tangente) bezogen. Die Sehnen werden auch wieder von Punkt zu Punkt abgesetzt.



$$s_1 = 2R \cdot \sin \frac{j_1}{2}$$

$$b_1 = \frac{j_1}{2}$$

für $i > 1$ gilt dann:

$$s_i = 2R \cdot \sin \frac{j_i}{2}$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i) \quad (9)$$

10 Positionsbestimmung mit Satellitenverfahren

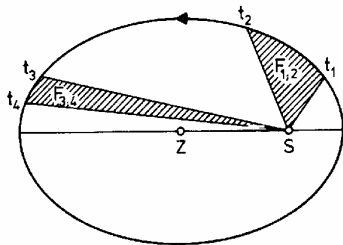
10.1 Grundlagen

Satellitensysteme werden seit ungefähr 1960 für die weltweite Navigation und Positionsbestimmung aufgebaut. Es werden **Distanzen zwischen den Satelliten und Stationen** auf der Erde gemessen. Diese Stationen können beweglich, z.B. Schiff, oder statisch sein, z.B. geodätischer Festpunkt. Aus diesen Distanzmessungen ist es möglich, **dreidimensionale geozentrische** (auf den Erdschwerpunkt bezogene) Koordinaten der Stationen zu berechnen... Inzwischen sind einige verschiedene Navigationssysteme entstanden, so z.B. NAVSTAR/GPS, GLONASS, STARFIX, EUTELTRACS. Für die Geodäsie hat das System NAVSTAR/GPS (NAVigation System with Time and Ranging - Global Positioning System) der USA eine besondere Bedeutung erlangt, weshalb dieses System im weiteren detaillierter betrachtet wird. Das System GLONASS (Global Navigation Satellite System) ist das Gegenstück der GUS zum NAVSTAR/GPS und seit 1996 voll operabel und für geodätische Zwecke nutzbar. Da viele Merkmale von GLONASS denen von GPS entsprechen, ist auch eine gemeinsame Nutzung beider Systeme denkbar, wobei dies zu einem System führen wird, dessen Systemparameter Integrität, Verfügbarkeit und Genauigkeit wesentlich besser sind als die entsprechenden Einzelparameter der beiden Einzelsysteme. Eine solche Nutzung befindet sich zur Zeit noch im Aufbau.

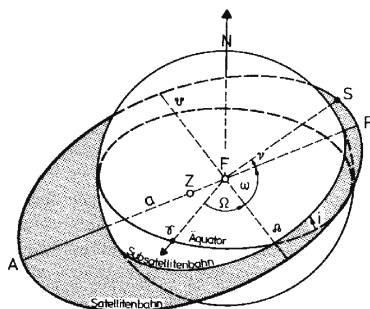
Die beiden anderen oben erwähnten Navigationssysteme sowie andere existierende Navigationssysteme sind für geodätische Zwecke noch nicht nutzbar und werden deshalb auch nicht weiter betrachtet.

10.2 Satellitenbahnen

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts entdeckte der Astronom J. Kepler die Gesetze über die Planetenbewegung, die nach ihm benannten Keplerschen Gesetze.



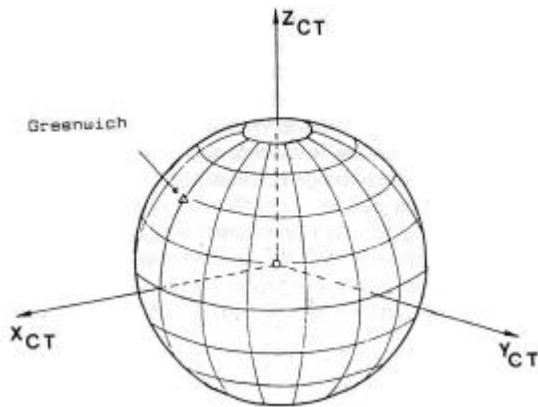
1. Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt.
2. Der Radiusvektor (Sonne – Planet) überstreicht in gleichen Zeitspannen gleiche Flächen. d.h. wenn $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, dann $F_{1,2} = F_{3,4}$.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen.



Mit der Annahme, dass die Erde eine homogene Kugel ist, gelten die Keplerschen Gesetze ebenso für ungestörte Bahnen von Satelliten mit der Erde als Gravitationszentrum. Mit diesen Festlegungen ist es möglich, die Satellitenposition als Funktion der Zeit zu beschreiben.

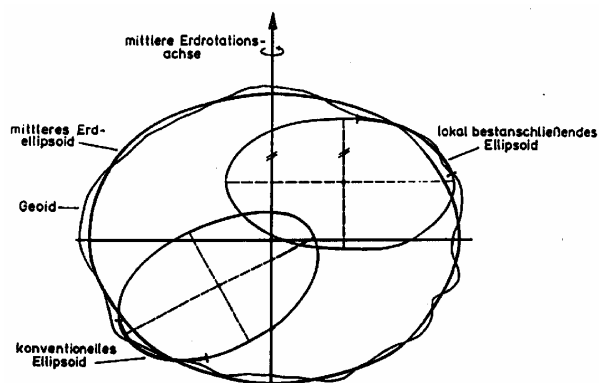
10.3 Bezugssysteme

Nach dem ersten Keplerschen Gesetz erfolgt die Satellitenbewegung mit Bezug auf das Massenzentrum der Erde in einem Brennpunkt der Bahnellipse. Aus diesem Grunde werden die Satellitenpositionen in einem räumlichen Koordinatensystem beschrieben, dessen Ursprung in diesem Massenzentrum liegt, dem sogenannten Geozentrum. Das für die Berechnung der GPS-Satellitenbahnen genutzte Bezugssystem heißt **WGS 84** (World Geodetic System 1984), entsprechend beziehen sich alle mit GPS bestimmten Koordinaten ebenfalls auf WGS 84.



Das Koordinatensystem wird so angeordnet, dass die Z-Achse in Richtung des mittleren Pols zeigt und die X-Achse in Richtung des mittleren Meridians von Greenwich. Da kartesische geozentrische Koordinaten für praktische Aufgaben, insbesondere für Ingenieur Anwendungen, sehr unanschaulich sind, werden sie in der Regel in ellipsoidische Koordinaten umgerechnet. Dabei können die Ellipsoidparameter (Erdabplattung, große Halbachse) so gewählt werden, dass sich das Ellipsoid der Gesamtfigur der Erde möglichst gut anpasst. Fällt der Ursprung dieses ellipsoidischen Systems mit dem Massenzentrum der Erde zusammen, spricht man vom globalen

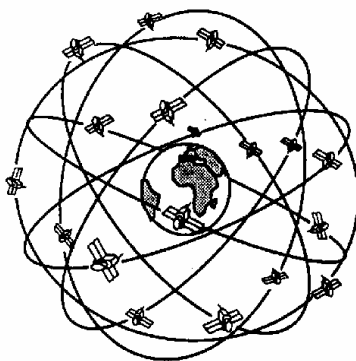
ellipsoidischen System. Für klassische Landesvermessungsaufgaben wurden die Ellipsoidparameter früher so gewählt, dass sie sich bestmöglich einem gegebenen Gebiet (Land oder Kontinent) anpassten. Diese Ellipsoide waren in der Rege lokal und nicht geozentrisch.



Die Beziehung zwischen einem solchen lokalen und globalen geozentrischen System heißt geodätisches Datum.

Falls die Achsen des lokalen und des globalen Ellipsoids parallel sind oder für kleinräumige Anwendungen als parallel betrachtet werden, genügen für den Datumsübergang drei Verschiebungsparameter. Für eine allgemeine Transformation müssen jedoch noch drei Rotationswinkel und ein Maßstabsfaktor hinzugefügt werden, so dass die vollständige Transformationsformel sieben Parameter enthält.

10.4 Das Global Positioning System - GPS



GPS ist vor allem ein militärisches Navigationssystem und wurde ursprünglich nicht für Vermessungsaufgaben entwickelt. Dieses satellitengestützte Navigationssystem liefert dem Nutzer dreidimensionale Positions- und Navigations- sowie Zeitinformationen.

10.4.1 Bestandteile des Systems

Das System besteht aus dem Weltraumsegment, dem militärischen Kontrollsegment bzw. dem zivilen Bahndienst und dem Benutzersegment.

Weltraumsegment

Wie später noch erläutert wird, benötigt man zur Ortung mit GPS die gleichzeitige Beobachtung bzw. Verbindung zu mindestens 4 Satelliten. Um dies auf der gesamten Erde zu realisieren, wurden folgende Satellitenkonstellationen festgelegt:

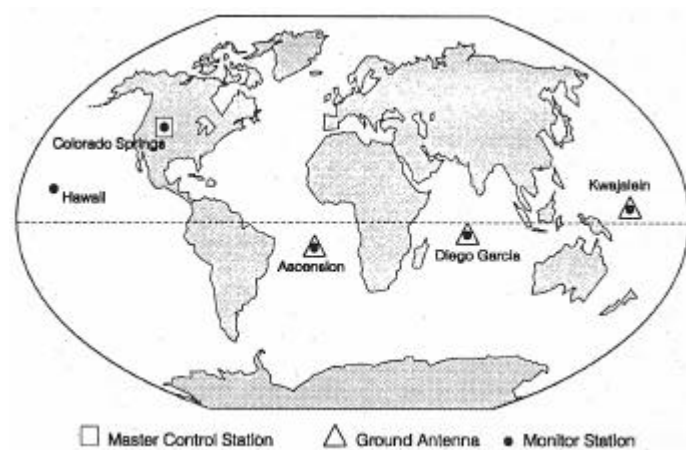
- geneigte Bahnen gegenüber den Polbahnen, um polnah zu beobachten ohne am Pol eine Häufung von Satelliten zu haben.
- Gleichverteilung der Satelliten bewirkt eine komplette Überdeckung bei minimalem Aufwand.
- eine feste Symmetrie der Satellitenbahnen bewirkt, dass auf alle Satelliten im Mittel der gleiche Fehler wirkt.

Die Satelliten sind auf 6 Bahnen angeordnet mit einer Bahnneigung von 55° . Alle 60° beginnt eine neue Bahn.

Militärisches Kontrollsegment

Dieses Segment hat die Aufgabe, die für die Echtzeitnavigation wichtigen Daten zu erzeugen und die Satelliten damit zu speisen. Dabei sind folgende Teilaufgaben zu erledigen:

- Beobachtung der Satellitenbahnen und Berechnung der Bahndaten,
- Beobachtung der Satellitenuhren und Extrapolation ihres Verhaltens,
- Übersendung der Daten an die Satelliten zur weiteren Versendung der Daten (Almanach Daten - Ephemeriden) an das Benutzersegment.



Ziviler Bahndienst des IGS (International GPS Service for Geodynamics)

Die Genauigkeit der vom militärischen Kontrollsegment in Echtzeit bestimmten Bahndaten liegt bei etwa ± 20 m. Diese Genauigkeit ist auch für die meisten zivilen Anwendungen – einschließlich einfacher geodätischer Messungen – vollkommen ausreichend. Es hat sich aber gezeigt, dass mittels GPS auch grundlegende geodätische und geowissenschaftliche Lösungen (Lagefestpunktfeld, Verdichtung und Überwachungsnetze, Plattentektonik) möglich sind. Hierzu sind allerdings wesentlich genauere Bahndaten notwendig, als sie vom Satelliten bzw. vom militärischen Kontrollsegment zur Verfügung gestellt werden.

Die Bestimmung der Bahndaten wird durch Beobachtungen der Satellitenbahnen von ca. 80 zivilen Stationen auf der ganzen Welt vorgenommen. Diese Stationen senden ihre Daten an sieben Analysezentren, die dann zwei Wochen später für jeden Satelliten genaue Bahndaten zu Verfügung stellen. Diese Informationen können dann im sogenannten „Postprocessing“ zur Auswertung meist wissenschaftlicher GPS Probleme benutzt werden.

Benutzersegment

Hierunter sind alle Geräte zu verstehen, die zur Ortung das GPS benutzen. Man unterscheidet hier zwischen mobilen Hand - GPS Geräten und Feststationen, sowie zwischen 1- und 2-Frequenzempfängern.

10.4.2 Signalstrukturen

Jeder GPS Satellit sendet permanent Signale auf zwei Frequenzen (nur die Träger der Codes):

Signal		Frequenz	Wellenlänge	σ der Pseudoentfernung
Träger	L ₁	1575,60 MHz	19,05 cm	<0,2-2,5 mm
	L ₂	1227,60 MHz	24,45 cm	<0,2-2,5 mm
PRN Codes	C/A	10,23 MHz	29,31 m	<0,03-0,3 m
	P	1,023 MHz	293,1 m	<0,3-3,0mm

Frequenzen und Wellenlängen der GPS Träger und PRN Codes

Für die Wahl dieser Frequenzen, die im L-Band der Mikrowelle liegen, gibt es mehrere Gründe.

- die im Folgenden noch zu beschreibenden Codes benötigen eine große Bandbreite von 2 MHz für den CA Code - 20 MHz für den P-Code. Derartige Bandbreiten lagen in anderen Frequenzbereichen nicht mehr frei zur Verfügung.
- Die Abweichung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen von der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist frequenzabhängig. Je höher die Frequenz, desto geringer die Verzögerung.
- durch die Wahl zweier unterschiedlicher Wellenlängen kann man sich deren unterschiedliches Verhalten in der Atmosphäre zu nutzen machen. Bei tiefen Frequenzen (< 100 MHz ist die ionosphärische Verzögerung besonders hoch. Bei Signalen (>10 GHz) ist die Dämpfung in der Troposphäre der hindernde Faktor.
- Bei der Auswertung zweier Frequenzen ist eine umfassende Berücksichtigung der Verzögerung in der Ionosphäre möglich und in gewissen Grenzen modellierbar.

Alle Frequenzen, die in GPS Satelliten benutzt werden, sind auf die Grundfrequenz $f_0=10,23$ MHz (λ_0) ableitbar.

Codierung des L₁ Signals

Die Trägerfrequenz f_1 wird durch Multiplikation der Grundfrequenz f_0 mit dem Faktor 154 gewonnen. Dieser Träger wird in eine Sinus- und Kosinuswelle zerlegt. Die Sinuswelle beinhaltet die sogenannte C/ A Code und Daten Code Modulation, die Cosinuswelle die P-Code und Daten Code Modulation.

Codierung des L₂ Signals

Die Codierung dieses Signals erfolgt in nahezu gleicher Weise wie beim Signal L₁. Einziger Unterschied ist, dass hier nur eine Kosinuswelle mit aufmoduliertem P-Code und Daten Code ausgesendet wird.

10.4.3 Militärische Vorbehalte

Das System NAVSTAR-GPS ist in erster Linie ein Navigationssystem der US-amerikanischen Streitkräfte und unterliegt der Entscheidungskraft der Regierung der USA. In diesem Zusammenhang haben die USA schon früh entschieden, das volle Genauigkeitspotential von GPS nicht freizugeben.

Das Genauigkeitspotential von GPS wird in zwei Klassen unterteilt:

- Standard Positioning Service (SPS)
SPS steht jedermann auf der Welt mit einer absoluten Genauigkeit von ca. 100 m (2σ) zur Verfügung.
- Precise Positioning Service (PPS)
PPS schöpft das Genauigkeitspotential von GPS voll aus. Beim C/A Code kann mit einer absoluten Genauigkeit von 40 m, beim P bzw. Y-Code von 20 m (2σ) ausgegangen werden. Der PPS ist allerdings ursprünglich nur für die militärische Nutzung vorgesehen.

Um den Zugang zu PPS zu unterbinden, haben die USA die Techniken „Selective Availability“ (SA) bzw. „Anti-Spoofing“ (A-S) entwickelt.

Wörtlich heißt „Selective Availability“ ausgewählte Verfügbarkeit. Der Systembetreiber verschlechtert durch verfälschte Bahndaten sowie künstliches Verrauschen des Signals die potentielle Genauigkeit der absoluten Ortung in Echtzeit.

Das „Anti-Spoofing“ ist auf das englische to spoof: beschwindeln zurückzuführen. Ein GPS Empfänger wird „beschwindelt“, wenn ein feindlicher Sender falsche Informationen sendet, die der Empfänger aber als GPS Signale erkennt. Eine Ortung ist somit fehlerhaft.

Seit dem 2.5.2000 ist „Selective Availability“ (SA) abgeschaltet. (Stand: 07.2001)

10.4.4 Messgrößen

Man unterscheidet im Wesentlichen zwei Verfahren der Echt-Zeit Messung mit GPS Satelliten.

- Codephasen Messung
- Trägermischphasen Messung

10.4.5 Codephasen Messung

Bei diesem Verfahren wird die Zeitdifferenz ΔT zwischen der Abstrahlung des Signals von Satelliten und dem Empfang am Gerät gemessen. Da diese Zeitmessung im Zeitrahmen des Satellitenempfängers erfolgt, bei dem Satellitenempfänger aber mit einem Uhrenfehler gerechnet werden muss und die Geschwindigkeit der Signale nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, ergibt $\Delta T \cdot c$ (c ...Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) nicht die Entfernung Satellit - Empfänger. Diese fehlerhafte Strecke wird „Pseudoentfernung“ genannt.

Als Ergebnis aufwendiger Berechnungen erhält man die Laufzeit bzw. Zeitdifferenz ΔT , sowie die Entfernung R :

$$\Delta T = \frac{f}{2p \cdot f_s} \Rightarrow R = \Delta T \cdot c ,$$

Diese Rechnung funktioniert allerdings nur, wenn die Satelliten- und Empfängeruhr exakt übereinstimmen würden. Um die technischen Anforderungen an die Empfängeruhren im Rahmen zu halten, wurde eine stets unbekannte Zeitkonstante Δt , der sogenannte Empfängeruhrenfehler eingeführt.

Damit ergibt sich:

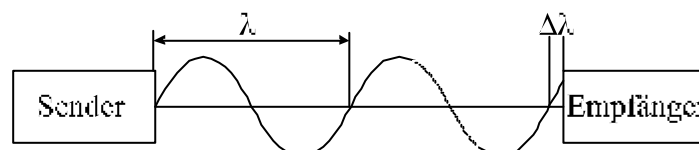
$$R = (\Delta T + \Delta t) \cdot c$$

Drei Streckenmessungen bzw. drei Satelliten sind für eine dreidimensionale Ortung notwendig, wobei noch ein vierter für den Uhrzeitfehler bzw. die Synchronisation der Uhren benötigt wird.

10.4.6 Trägermischphase Messung

Statt der Codemessungen können mit dem Trägersignal auch Phasenvergleichsmessungen durchgeführt werden. Die Messung erfolgt im Grundprinzip folgendermaßen:

Der Sender (z.B. Satellit) schickt eine harmonische Welle zum Empfänger. Dort wird das Signal empfangen und die Restwellenlänge $\Delta\lambda$ erkannt.



Mit der Formel $D = N \cdot \lambda + \Delta\lambda$, wobei D die Strecke und N eine Vielzahl ganzer Zahlen ist, kann die Entfernung berechnet werden.

Die Anzahl N der verbleibenden vollen Wellendurchgänge, die sogenannten „ambiguity“, sind unbekannt. Mittels statistischer Auswerteverfahren versucht man dies zu lösen.

10.4.7 Punktbestimmung

Ausgehend von den bekannten Satellitenkoordinaten in einem geozentrischen Bezugssystem können dann die Koordinaten der Nutzerantenne über einen räumlichen Bogenschlag berechnet werden.

Da neben den drei Standpunktkoordinaten jeweils noch der Uhrfehler mitbestimmt werden muss, erfolgt die Positionsbestimmung im Prinzip durch simultane Messung von **Pseudoentfernungen zu mindestens vier Satelliten**. Moderne Empfänger, auch einfache Handgeräte, führen die Positionsbestimmung praktisch in Echtzeit durch, so dass bei einer Taktrate von beispielsweise 1 Hertz zu jeder Sekunde eine Position zur Verfügung steht.

Die Genauigkeit dieser absoluten Punktbestimmung (Koordinatenbestimmung) mit Hilfe des C/A Code Signals beträgt 50 - 100 m. Diese Genauigkeit ist für viele Navigationsaufgaben ausreichend, jedoch nicht für geodätische Zwecke.

10.4.8 Fehlereinflüsse bei der Pseudostreckenmessung

Der Gesamtfehler bei einer Pseudostrecke setzt sich aus einer Vielzahl von Fehlern zusammen, die in die Gruppen Satellitenfehler, Signalausbreitungsfehler und Empfängerfehler unterteilt werden können.

Satellitenfehler

Genauigkeit der Ephemeriden, also der Satellitenkoordinaten

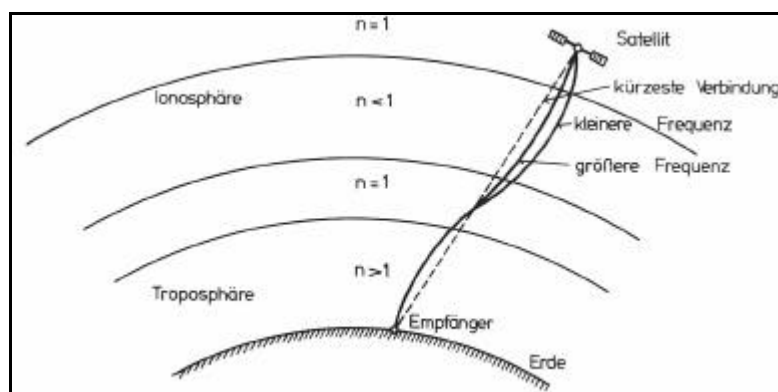
Uhrenfehler: Abweichung der Satellitenzeit von der GPS Zeit

Signalausbreitungsfehler

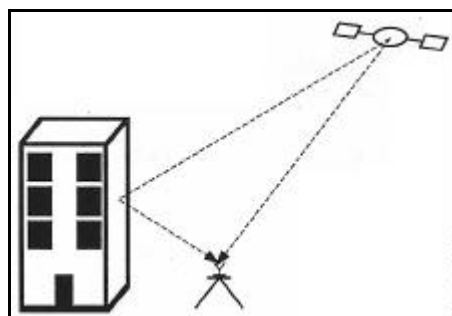
Unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Ionosphäre und Troposphäre führen dazu, dass das Signal einen kurvenförmigen Weg mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durchläuft

Die Ionosphäre ist für Mikrowellen ein dispersives Medium, d.h. die Signalausbreitung ist frequenzabhängig. Es besteht also die Möglichkeit, durch Messung auf zwei Frequenzen den Ausbreitungseinfluss der Ionosphäre zu berechnen und weitgehend zu eliminieren. Dies ist der wesentliche Grund für die Abstrahlung der GPS Signale auf zwei Frequenzen.

Die Troposphäre ist für Mikrowellen kein dispersives Medium. Die Signalausbreitung in der Troposphäre muss deshalb auf der Grundlage der Zustandsparameter Luftdruck, Temperatur und Wasserdampfgehalt durch Modelle erfasst werden.



Fehler durch Mehrwegeausbreitung („multipath“), Signal wird in der Nähe des Empfängers an einer Fläche reflektiert und dann empfangen.



Empfängerfehler

Messrauschen verhält sich proportional zur Wellenlänge, zufälliger Fehler

10.4.9 Geodätische Messverfahren*10.4.9.1 Absolute Ortung*

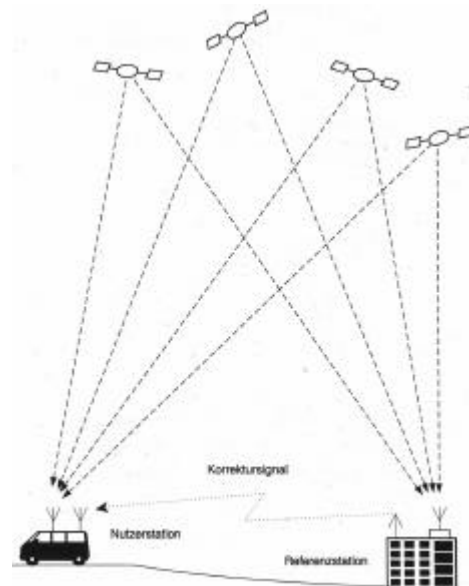
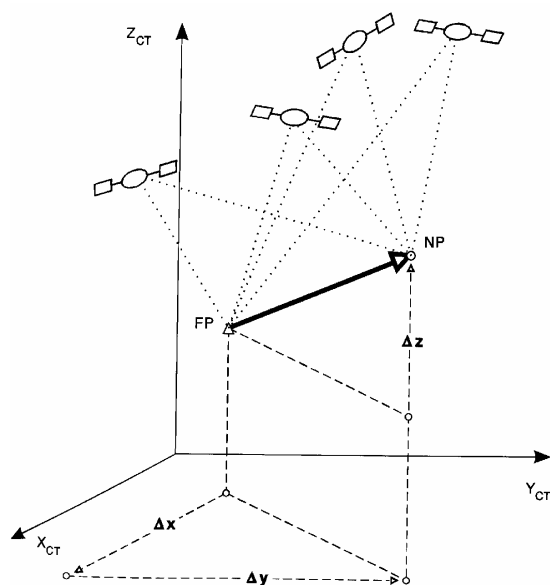
Hierbei wird die Position mit nur einem Empfänger bestimmt. Unter Ausnutzung z.B. der C/A Codephasen-messungen kann man sich mit einem GPS Empfänger weltweit positionieren. Diese absoluten Koordinaten liegen in erster Form im WGS 84 System, indem auch die Koordinaten der Satelliten angegeben werden, vor. In einem zweiten Schritt werden dann diese Koordinaten in die jeweiligen Koordinaten des Landessystems oder einer Karte umtransformiert. Diese Methode der Positionierung wird in den gängigen Navigationssystemen der Automobil, Luft- und Seeschifffahrt verwendet.

10.4.9.2 Differentielle Ortung

Bei voller Ausschöpfung von GPS ist nur eine autonome, absolute Ortung auf ± 10 m, bei eingeschaltetem SA sogar nur ± 100 m, möglich. Um diese Genauigkeit zu steigern, verwendet man folgendes, einfaches Prinzip:

In der konzeptionell einfachsten Form werden auf einer Basisstation, deren Koordinaten bekannt sind, durch aktuelle Messdaten die Koordinaten der Basisstation permanent neu bestimmt. Aus der Differenz zwischen bekannten und neu bestimmten Koordinaten können Korrekturwerte bestimmt werden. Unter der Annahme, dass weitere GPS Empfänger in der Nähe der Basisstation in gleicher Weise mit den Fehlern des Systems beeinflusst sind, können an diese, Korrekturdaten (quasi Δx , Δy , Δz Werte) geschickt werden.

So kann die Ortung dieser GPS Empfänger deutlich verbessert werden. Man spricht dann von Differentiellem GPS oder DGPS.



Allerdings treten auch hier einige Probleme auf:

- Empfängerfehler und Probleme durch Multipath können nicht eliminiert werden,
- je weiter der Empfänger von der Basisstation entfernt ist, desto größer wird der Fehleranteil in der Differenzbildung (< 20 km).

Die Korrekturdaten bei DGPS liegen in der Regel im sogenannten RTCM Format („Radio Commission for Maritime Services“) vor und können über Radio, Funk, GSM oder Satellit (OmniSTAR System - weltweiter DGPS Service) versendet werden.

Die erreichbare Genauigkeit liegt bei 13 m bei der Codephasenmessung und bei 15 cm bei der Trägermischphasenmessung.

Im Ergebnis werden die Komponenten des Basisvektors (Basislinie) zwischen den beteiligten Stationen berechnet. Die Basislinien können in einem anschließenden Auswerteschritt zu Netzen zusammengefügt werden. Die Basislinienbeobachtung kann als Urform der GPS-Beobachtung bei hohen Genauigkeitsanforderungen angesehen werden. Unter Verwendung von zwei Satellitenempfängern werden durch simultane Beobachtung auf zwei Standpunkten hochgenaue Koordinatendifferenzen zwischen den Empfängerstandpunkten bestimmt. *Um die absoluten Koordinaten der Empfängerstandpunkte zu ermitteln, müssen die absoluten Koordinaten mindestens eines Empfängerstandpunktes bekannt sein.*

11 Photogrammetrie

Definition:

In der Photogrammetrie werden Objekte nach Lage und Form indirekt, also berührungsfrei, vermessen. Die eigentliche Vermessung erfolgt dabei in Bildern des Objekts. Die Photogrammetrie umfasst die Aufnahme der Messbilder, deren Verarbeitung und die Ausgabe der Ergebnisse in analoger und digitaler Form. /Buchholtz u. Rüger 1974/

11.1 Geschichte der Photogrammetrie

Die Geschichte der Photogrammetrie geht im Wesentlichen auf den Baumeister Albrecht Meydenbauer zurück. Dieser drohte im Jahr 1858 bei der Bauaufnahme am Dom zu Wetzlar abzustürzen, als er von einem Korb aus versuchte, wieder in den Turm zu steigen. Dieses Ereignis muss ihn tief beeindruckt haben, so dass er begann, sich Gedanken über ein berührungsloses Messverfahren auf der Basis von Bildern zu machen. Er baute Kameras, entwickelte photographische Emulsionen und Auswerteverfahren. Später griffen andere Personen die Idee Meydenbauers auf und entwickelte diese weiter.

Neben der technischen Entwicklung lag Meydenbauer die systematische Dokumentation der Deutschen Baudenkmäler am Herzen. 1885 wurde daraufhin die „Königl. Preußische Messbild-Anstalt für Denkmäler-Aufnahmen“ im Preußischen Kultusministerium geschaffen. Bis in die 20-Jahre hinein wurden von dieser Einrichtung ca. 20000 Messbilder von etwa 2000 Baudenkmälern erfasst. Im übrigen unterrichtete Meydenbauer im Sommersemester 1882 an der TH Berlin einen Kurs „Architekturphotogrammetrie“.

11.2 Vorteile und Grenzen der Photogrammetrie

Die Photogrammetrie hat gegenüber anderen Verfahren der Aufnahme einige Vorteile.

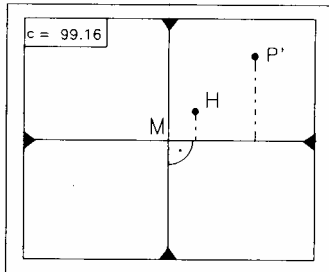
- Die Photogrammetrie arbeitet berührungsfrei, d.h.:
 - Man kann auf teure und wenig flexible Gerüste verzichten,
 - Man beeinträchtigt das Objekt (das Bauwerk) nicht,
 - Man senkt dabei die Unfallgefahr
- Die Aufnahmen und die aufwendigere Auswertung erfolgen räumlich und zeitlich getrennt.
 - Prophylaktische Dokumentation und Archivierung
 - Geringe Kosten durch Aufenthalt am Objekt, die Auswertung erfolgt im Büro.
- Die Aufnahme erfolgt schnell.
- Man erzielt eine hohe Genauigkeit.
- Es lassen sich bewegte Objekte erfassen.

Nachteile:

- Die Auswertung erfolgt mit den Augen, als einzigem Sinn. Was die Bilder nicht enthalten oder was nicht erkennbar ist, kann nicht erfasst werden.
- Es existiert ein erheblicher Grundaufwand: für die Erfassung weniger Punkte ist die Photogrammetrie wenig geeignet.

11.3 Messkammer

Die photographischen Aufnahmen werden in der Regel mit *Messkammern* erstellt. Die Messkammern zeichnen sich im Allgemeinen durch Rahmenmarken und physische Stabilität aus. Durch die Rahmenmarken, die bei jeder Aufnahme mit abgebildet werden, und die kalibrierte Brennweite des Objektivs ist der erste Schritt der geometrischen Rekonstruktion des Strahlenbündels gegeben (**Innere Orientierung**).



Ein Messbild unterscheidet sich ganz erheblich von einem Amateurphoto. Hauptmerkmal eines Amateurphotos ist z.B. dass es eine Zentralperspektive der photographierten Objekte ist. Es treten jedoch Spezialeffekte ("Fischaugen") auf und oft werden auch verschiedene Zoom-Objektive verwendet. *Von einem Messbild, das ebenfalls eine Zentralperspektive ist, ist die innere Orientierung bekannt, d.h. die Lage des Bildhauptpunktes H und die Kammerkonstante c.* Außerdem zeichnet es sich durch die Rahmenmarken und Nebenabbildungen aus. Es treten keine Verzeichnungen am Bildrand auf, es wird für eine gleichmäßige Bildausleuchtung gesorgt und große Bildformate (23x23

cm) überwiegen bei den Messbildern.

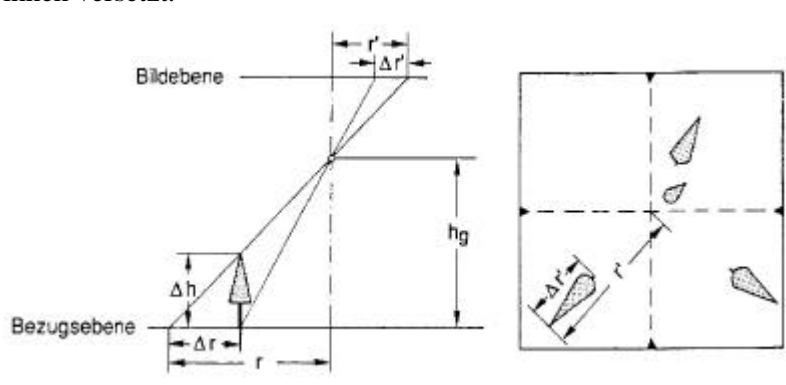
11.4 Einbildphotogrammetrie

Das photographische Bild ist eine zentralperspektivische Abbildung eines räumlichen Gegenstandes in die Bildebene.

Eine Rekonstruktion des Gegenstandes aus **einer Aufnahme** ist nur möglich, wenn der Gegenstand als **eben** (Hausfassade, ebenes Gelände) betrachtet werden kann (nur ein Strahl ist als geometrischer Ort für einen Punkt gegeben). Man erhält eine geometrisch ähnliche ebene Darstellung des Gegenstandes.

11.4.1 Radiale Versetzung

Aufgrund der Zentralperspektive werden außerhalb der Bezugsebene gelegene Punkte vom Bildmittelpunkt aus radial versetzt. Höher liegende Punkte nach außen und tiefer liegende Punkte nach innen versetzt.



11.4.2 **Entzerrung**

Um Verzerrungen aufgrund z.B. einer Schräglage zu korrigieren wird eine Entzerrung des Bildes durchgeführt. Es gibt zwei Verfahren der Entzerrung:

- Perspektive Entzerrung
- Differentialentzerrung

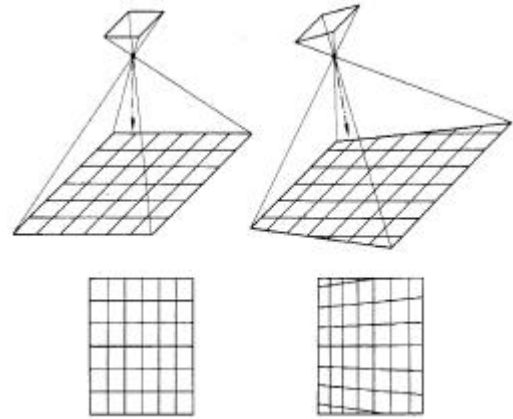
11.4.2.1 *Perspektive Entzerrung*

Die perspektive Entzerrung erfolgt durch perspektivische Umbildung zur Rekonstruktion der Zentralprojektion.

Hierbei werden zwei Ebenen aufeinander abgebildet und es fallen 7 Parameter an: 3 Translationen und 3 Rotationen, dazu ein Maßstab.

Diese Parameter werden durch mindestens 4 identische Passpunkte im Bild ermittelt.

Dieses Verfahren ist streng genommen nur für ebene Objekte gültig.



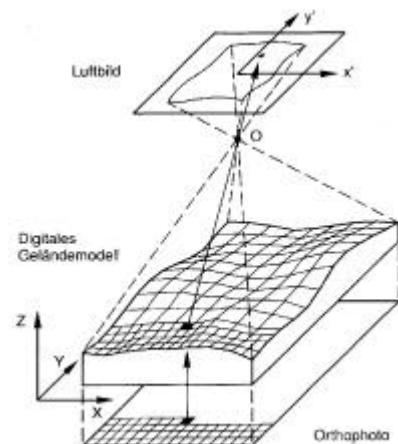
11.4.2.2 *Differentialentzerrung*

Bei unzulässig großen Höhenunterschieden im Gelände versagt das Verfahren der perspektiven Entzerrung in die Ebene.

Die durch radiale Versetzung verursachten Lagefehler lassen sich aber unter Einbeziehung eines Geländemodells korrigieren.

Hierfür wird ein Digitales Geländemodell (DGM) benötigt. Die Daten eines DGM werden meist als Punktraster mit Höheninformation gespeichert.

Das weitere Prinzip beruht auf der Umformung von Teilen eines Bildes in vielen Einzelschritten. Das Ergebnis ist ein Orthophoto.

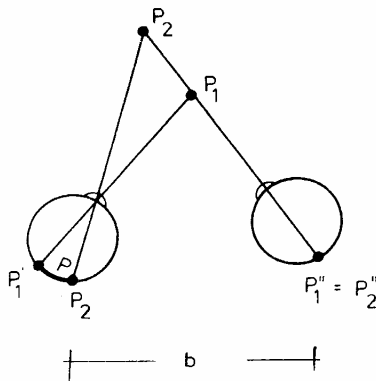


11.5 Mehrbildphotogrammetrie

Durch die Einbildphotogrammetrie lassen sich nur Lage-Koordinaten in einer Ebene (2D) bestimmen. Ein weiteres Bild hingegen liefert uns Informationen über die dritte Dimension. Somit lassen sich aus mindestens zwei Bildern dreidimensionale Koordinaten ableiten.

11.5.1 Stereoskopisches Sehen

Betrachtet man einen räumlichen Gegenstand mit beiden Augen, entstehen auf der Netzhaut aufgrund des **Augabstandes** (b) zwei voneinander verschiedene Abbildungen. Die Punkte P_1 und P_2 werden im rechten Auge als ein Punkt abgebildet, da sie auf einem Strahl liegen. Im linken Auge werden sie als zwei Punkte abgebildet, wodurch **Parallaxen** (p) entstehen. Im Gehirn werden die beiden Einzelbilder zu einem Raumbild vereinigt (Vorwärtseinschnitt).



Dieses **stereoskopische** (räumliche) Sehvermögen des Menschen macht man sich in der Photogrammetrie zunutze.

Nimmt man ein räumliches Objekt von zwei verschiedenen Aufnahmestandpunkten aus auf, so kann mit Hilfe dieser beiden ebenen Aufnahmen das Objekt räumlich rekonstruiert werden.

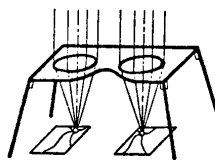
Dabei muss das linke Bild dem linken Auge und das rechte Bild dem rechten Auge getrennt zugeführt werden. Dies kann auf verschiedene Art und Weise geschehen.

11.5.2 Bildtrennung

Die Bildtrennung ermöglicht das künstliche stereoskopische Sehen. Beide Augen blicken auf zwei verschiedene Bilder desselben Gegenstandes. Schneiden sich die Sehstrahlen bei richtiger Lage der Bilder zueinander in einander zugehörigen Punkten, wird ein räumliches Modell dargestellt.

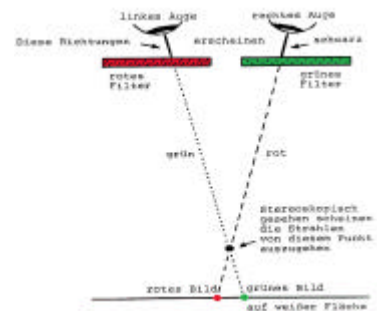
Optische Trennung mittels:

- Stereoskop
- Anaglyphenverfahren
- Polarisationsfilter

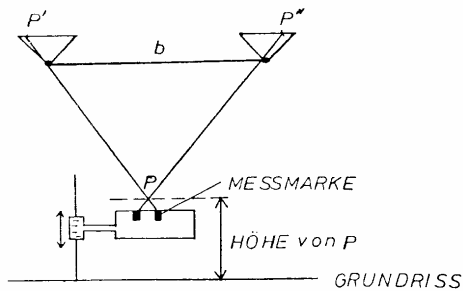


Mechanische Trennung mittels:

- Stroboskopische Verfahren (zeitliche Verschachtelung)
- Rasterverfahren (räumliche Verschachtelung)



In den photogrammetrischen Auswertegeräten (Analoginstrumenten) wird das Prinzip der Bildtrennung angewendet.



Das einfachste und anschaulichste photogrammetrische Auswertegerät ist der Doppelprojektor. Die beiden Aufnahmen des Objekts werden in Projektoren gelegt, deren Daten denen der Aufnahmekammern entsprechen (Innere Orientierung). Die Projektoren werden in die gleiche gegenseitige Lage (Relative Orientierung), wie sie die Aufnahmekammern bei der Aufnahme bezüglich des Objektes (Gelände) hatten, gebracht und der Abstand der Projektoren (Basis b) wird entsprechend dem Maßstab verkleinert. So erhält man ein räumliches, maßstäbliches Modell des aufgenommenen Gegenstandes, das nach dem Anaglyphenverfahren

sichtbar gemacht und mit einer Messmarke ausgemessen werden kann.

Die beiden Projektkammern müssen schließlich so orientiert werden, dass das projizierte Bild im gewünschten Modellmaßstab mit mindestens drei koordinatenmäßig bekannten Punkten des Objektes bzw. des Geländes, die auch im Modell sichtbar sind, lagemäßig übereinstimmt (Absolute Orientierung). Es wird also das beliebige im Raum liegende Stereomodell in das übergeordnete Landeskoordinatensystem gebracht.

Nun kann die Messmarke auf beliebige Punkte des Modells eingestellt werden. Die Koordinaten X , Y , Z können dann abgelesen oder der Punkt im Grundriss kartiert werden.

Die Orientierung der Modelle und die Bestimmung der Koordinaten von Punkten kann auch rein rechnerisch durchgeführt werden (Analytische Photogrammetrie). Ausgehend von Bild- bzw. Modellkoordinaten, welche an Präzisionsmessgeräten mit automatischer Registriereinrichtung ermittelt wurden, ist die analytische Photogrammetrie in der Lage, mittels Softwarepaketen schnell und zuverlässig Geländekoordinaten zu erhalten. (Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen, Bündelmethode).

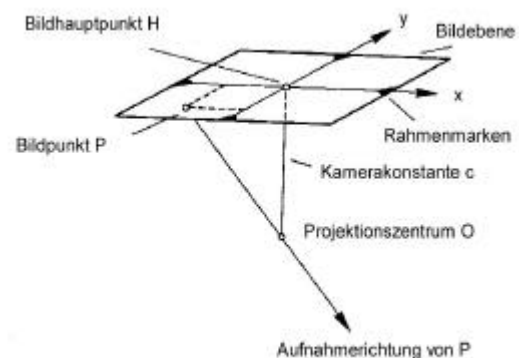
11.6 Orientierungsvorgänge

Zur Bestimmung der geometrischen Beziehungen zwischen Bild- & Geländekoordinaten werden unter Verwendung von Passpunkten folgende Orientierungsschritte durchgeführt.

- Innere Orientierung
- Äußere Orientierung
 - Relative Orientierung
 - Absolute Orientierung

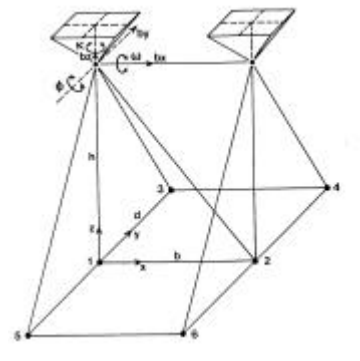
11.6.1 Innere Orientierung

Die innere Orientierung legt das Projektionszentrum in Bezug zur Bildebene fest. Dazu werden die *Kammerkonstante c* und die *Bildkoordinaten des Bildhauptpunktes* benötigt. Der Bildhauptpunkt ist die senkrechte Projektion des Projektionszentrums im Bild. Bildhauptpunkt und Bildmittelpunkt müssen nicht identisch sein. Des Weiteren zählen Verzeichnungsparameter – aufgrund der Linsenoptik der Kameramechanik und der Photographie – ebenfalls zu den Parametern der Inneren Orientierung.



11.6.2 Relative Orientierung

Die relative Orientierung wird mit Hilfe von *5 Punkten* (keine Passpunkte), die in beiden Bildern gut identifizierbar sind durchgeführt. Mittels dieser Punkte wird die gegenseitige räumliche Lage der Bilder wieder hergestellt und ein beliebiges Stereomodell des Objekts konstruiert. Das Modell hat zunächst keinen Bezug zum Koordinatensystem des Objektes. Die Bilder werden gedreht (3 Rotationen) und verschoben (2 Translationen) und damit die 5 Orientierungsparameter der relativen Orientierung gesucht.



11.6.3 Absolute Orientierung

Das Stereomodell der relativen Orientierung ist noch ohne Bezug zum Koordinatensystem des Objektes. Diese Einpassung des Auswertemodells in ein Auswertesystem erfolgt durch eine räumliche Ähnlichkeitstransformation. Vor der Aufnahme müssen, um die 7 Orientierungsunbekannten zu bestimmen, *2 Lagepasspunkte* (Y, X) und *3 Höhenpasspunkte* (H) signalisiert werden. Diese Signalisierung muss so erfolgen, dass eine eindeutige Identifizierung im Bild möglich ist. Mithilfe dieser Punkte wird das Stereomodell der relativen Orientierung gedreht (3 Rotationen), verschoben (3 Translationen) und ein Maßstab angebracht.

11.7 Zusammenfassung

Einbildphotogrammetrie

Voraussetzungen:	Messobjekt muss eben sein (Gebäudefassade, ebenes Gelände, Senkrechtaufnahme)
Merkmale:	Auswertung nur eines Bildes und damit nur Gewinnung von 2 Dimensionen
Ergebnisse:	Orthophotokarten, keine Strichkarten

Mehrbildphotogrammetrie

Voraussetzungen:	Eine Überdeckung in beiden Bildern muss gegeben sein. Zur Auswertung muss eine Bildtrennung durchgeführt werden. Parallaxen dürfen nur noch parallel zur Aufnahmebasis vorhanden sein.
Merkmale:	Durch die Aufnahme von 2 Bildern von verschiedenen Aufnahmeorten ist die Auswertung eines Modells in allen 3 Dimensionen möglich.
Ergebnisse:	Strichkarten, Punktkoordinaten, Höhenlinien

11.8 Anwendungen der Photogrammetrie

Eine weitere Unterteilung erfolgt in Aerophotogrammetrie (Aufnahme aus Flugzeugen) und der terrestrischen Photogrammetrie (erdfest).

Die Aerophotogrammetrie eignet sich zur Bestandsaufnahme größerer Gebiete, da sie oft wesentlich schneller als die herkömmlichen Aufnahmemethoden ist und ungefähr die gleiche Genauigkeit liefert.

Sie findet Anwendung:

- zur Herstellung differentiell entzerrter maßstäblicher Photokarten (Orthophotos)
- zur Verdichtung trigonometrischer Netze
- zur Herstellung und Aktualisierung von Kartenwerken
- zur Gewinnung digitaler Geländemodelle
- in der Archäologie, Landinformationssystemen, etc.

Die terrestrische Photogrammetrie dagegen findet Anwendung auf folgenden Gebieten:

- Architekturvermessung
- zur Beweissicherung bei Unfällen
- zur Dokumentation von Baudenkmälern
- zur Vermessung von Entwurfsmodellen
- in der Medizin
- zur Kluftvermessung in der Geologie
- zur Deformationsmessung in der Materialprüfung, etc.

12 Geoinformationssysteme GIS

12.1 Einführung

Ein GIS System gibt uns die Möglichkeit Sach- und Geometriedaten in ihrem komplexen und räumlichen Zusammenhängen zu erfassen und zu verwalten. Darüber hinaus lassen sich mittels **räumlicher Analysemöglichkeiten** – ein wesentlicher Unterschied zu verwandten Produkten wie Desktop Mapping, CAD und Bildverarbeitungsprogrammen - neue Informationen generieren.

Während in früheren Jahren im wesentlichen das Vermessungswesen und der Umweltschutz Anwendungsgebiete für GIS darstellten, finden wir GIS heute z.B. in der Leitungsdokumentation großer Energieversorgungsunternehmen, Verkehrsmanagementsystemen, Standortsuche aller Art, Marketing und Raumplanung.

Nach [BARTELME 1995] kann die Entwicklung von GIS in fünf teilweise überlappende Phasen eingeteilt werden:

- 1955 - 1975: Zeit der Pioniere; individuelle, isolierte Lösungswege der Entwickler
- 1970 - 1985: Zeit der Behörden, Entwicklung von Konzepten (z.B. ALK - Automatisierte Liegenschaftskarte) und beginnende Umstellung von Basisdaten in digitale Form, GIS als Erfassungswerkzeug.
- 1979 - 1990: Die Zeit der Firmen. Es entsteht ein GIS-Markt, die Hardware wird leistungsfähig und eine Umstellung von Großrechnern auf Workstation findet statt.
- 1988 - 1998: Die Zeit der Nutzer. GIS entwickelten sich mehr und mehr weg von Universalwerkzeugen hin zu Systemen, die - modular aufgebaut - einen Werkzeugkasten darstellen, der, jeweils an Benutzerwünsche angepasst, zu sogenannten Fachschalen zusammengestellt werden kann.
- Ab ca. 1995: Zeit des offenen Marktes: Angebot und Nachfrage statt behördlicher Vorgaben und einiger Großprojekte bestimmen den Markt sowohl für GIS-Software als auch für Geodaten.

12.2 Theorie

Grundthese: die räumliche Lage und somit die Geometrie eines Realweltobjekts ist eine Eigenschaft, ein Attribut des Objekts. Bis heute sind die herkömmlichen (relationalen) Datenbanken nicht in der Lage, die Geometrie als Attribut zu speichern. Die GIS Hersteller bieten daher unterschiedliche Lösungsansätze an - siehe GIS Systemarchitekturen. Erst seit den 90-ziger Jahren gibt es erste Ansätze dies auch datenbankseitig zu lösen (ORACLE, INFORMIX).

12.2.1 Datenstrukturen

Um Realwelt-Objekte im Computer verwalten zu können, benutzen GIS zwei unterschiedliche Datentypen: Raster- und Vektordaten.

12.2.1.1 Rasterdaten

Rasterdaten entstehen durch Scannen von Plänen. Luftbildern u.ä. oder auch direkt bei der Aufnahme durch digitale Kameras. Es handelt sich um eine Matrix von Bildpunkten (Pixel). Jedem Pixel ist eine Position und ein Farb- oder Grauwert zugeordnet.

Verarbeitungsmöglichkeiten:

Geokodierung: Durch Koordinatentransformation lassen sich Rasterdaten in das Landeskoordinatensystem transformieren.

Klassifizierung: Mit Methoden der digitalen Bildverarbeitung können die Pixel klassifiziert werden. Es bilden sich Flächen gleicher Klassen.

Darstellung: Rasterdaten können in der Regel keine Sachdaten zugewiesen werden. Daher werden sie in hybriden Systemen als Hintergrundbilder geladen.

Analysen: Verschneidungen unterschiedlicher Datenschichten, Distanzberechnungen sind in Rasterdaten möglich.

12.2.1.2 Vektordaten

Für objektbezogene Datenverarbeitung sind jedoch Vektordaten notwendig. Nur so können topologische und komplexe Datenmodelle realisiert werden. Rasterdaten gelten häufig als „dumm“, Vektordaten als „intelligent“. Eine Vektorlinie weiß z.B. das sie eine Grundstücksgrenze ist und zu einem Flurstück gehörend. Eine Rasterlinie kann solche Informationen nicht verarbeiten.

12.2.1.3 Objektorientierte Strukturen

Die reale Welt lässt sich nicht nur mit Hilfe von Linien und Punkten beschreiben. Bäume, Leitungen, Grundstücke sind Objekte der Realwelt und müssen als solche abgebildet werden. Diese Herangehensweise entspricht viel eher dem menschlichen Denken als konventionelle Ansätze. Jedes Objekt besteht aus Daten und zugehörigen Zugriffsmethoden. Objekte können zu Klassen zusammengefasst werden und erben gegebenenfalls die Klasseneigenschaften einer übergeordneten Klasse (Vererbung). Dies setzt objektorientierte Datenbanken für GIS voraus.

12.2.2 GIS Systemarchitekturen

Für die Entscheidung zugunsten einer GIS Software – insbesondere bei langfristig angelegten Projekten – sind die Fähigkeiten der Datenmodellierung und Fortführung wichtig. Das Problem ist, dass Unterschiede sämtlicher Systeme im Endergebnis nicht erkennbar sind.

Folgende Systemkonzepte gibt es:

- Reine Graphik mit CAD
- Desktop Mapping und GIS Viewer
- Rastersysteme
- „Echte“ GIS-systeme

CAD Daten sind reine Graphikelemente und kennen nur bedingt Sachinformationen. Fortführungen sind aufwendig. Es gibt keine räumlichen Analyseverfahren.

GIS Viewer sind Systeme, die die Ursprungsdaten aus „echten“ GIS übernehmen, diese aber nicht verändern. Sie sind eine preisgünstige Variante für raumbezogene Auswertungen und Auskünfte.

Desktop-Mapping Systeme integrieren einfache Sachdatenstrukturen und graphische Auswertungen.

Gegen den Einsatz von GIS Viewer und Desktop-Mapping Systemen sprechen:

- Oftmals große Beschränkungen der Datenmenge
- Geringe Leistungsfähigkeit des Datenbankteils
- CAD orientierte Datenstrukturen
- Fortführungen sind kaum möglich

Rastersysteme sind geeignet für Analysen wie Distanz- und Ausbreitungsberechnungen. Mehrere Ebenen können gemeinsam ausgewertet werden. Sie sind mit umfangreichen Funktionen der Digitalen Bildverarbeitung ausgestattet. Einsatz erfolgt vornehmlich im Bereich kleinmaßstäbiger Bereiche.

Dagegen spricht, dass es sich hier um ein „dummes“ System handelt. Eine Linie wird aus einer Reihe von Pixeln gebildet und kann keine weiteren Sachdaten speichern. Außerdem entstehen hierbei große Mengen von Daten.

„Echte“ GIS-systeme sind in erster Linie Vektor-orientiert, können jedoch Rastertechniken (hybride Systeme) einbinden. Hier werden Präsentationsorientierte und Informationssysteme unterschieden.

Weit verbreitet ist das **Zusammenwirken von CAD-Graphik mit Datenverwaltung** sowie räumliche Analysemöglichkeiten von GIS. Verwendet wird im Wesentlichen eine relationale Datenbank. Es gibt Pointer zwischen Datenbankobjekt und Geometrieelement. Die Geometrie wird in einer eigenen

Struktur, z.B. einem Filesystem, getrennt von den Sachdaten verwaltet. Es gibt Probleme bei Datensynchronisation, Fortführung.

Andere Systeme hingegen sind **informationsorientierte Systeme**. Im Vordergrund steht das (Realwelt)-Objekt. Jedes (Realwelt)-Objekt wird in einer Datenbank abgebildet und durch seine Attribute beschrieben. Also auch die Geometrie ist eine Eigenschaft und damit ein Attribut. Der Vorteil von objektorientierten Datenbanken ist die gemeinsame Verwaltung von Sach- und Geometriedaten. Synchronisationsprobleme sind daher ausgeschlossen.

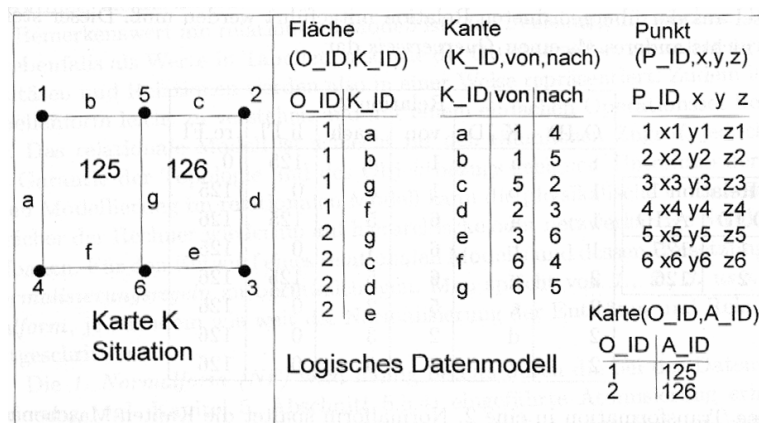
12.2.3 Datenbanktechnologie

12.2.3.1 Relationale Datenbanken (RDBMS)

Das relationale Datenmodell ist ein tabellarisches Datenkonzept, in dem die Daten und Beziehungen zwischen den Daten verwaltet werden. Die Verwaltung in Tabellen ist leicht verständlich und mit einem einfachen Operationsset bedienbar. Durch das Verteilen der Informationen auf einzelne Tabellen werden Datenredundanzen vermieden. Die meisten heute gängigen Datenbanken sind relationale Datenbanken.

Beispiel nach [Bill, 1998]

Das relationale Datenbankmodell soll an der Verwaltung eines zusammenhängenden räumlichen Objekts, welches aus zwei Flächen besteht, verdeutlicht werden. Es werden eine Knoten-(Punkt), Kanten- und Maschentabelle angelegt.



12.2.3.2 Datenbanksprachen

Viele relationale Datenbanken wie z.B. ORACLE, INFORMIX unterstützen eine standardisierte Datenbankabfragesprache SQL (*Structured Query Language*). Darüberhinaus gibt es auch andere Abfragesprachen wie z.B. QUEL (*Query Language*) und QBE (*Query by Example*). SQL Anweisungen werden sowohl zur Daten-Anfrage als auch zur Daten-Definition verwendet. Man kann mit den typischen und einfachen SQL-Befehlen "Select", "Insert", "Update", "Delete", "Create", and "Drop" und daraus konstruierten Kombinationen mächtige allgemein verwendbare Operationen in Datenbanken ausführen. Desweiteren lässt sich SQL in Programmiersprachen wie FORTRAN, C, PASCAL einbinden. SQL unterstützt Standardtypen (Character, Float, Integer), die logisch in WHERE Klauseln verknüpfbar sind mit AND, OR etc. Relationale Datenbanken haben große Schwierigkeiten mit der Implementation raumbezogener Daten.

Beispiel nach [Bill, 1998]: Folgende Daten liegen in Tabellen vor:

Flurbuch					
O_ID	Flur	Lage	Nutzung	Groesse	LB_NR
125	12	In den Wiesen	Bauplatz	519	512
126	12	In den Wiesen	Bauplatz	520	674
0	12	Außenraum	Unland	NULL	NULL

LB-Buch				
LB_NR	Name	Geburtsdatum	Wohnort	Grundbuch
512	Hubert Schmitz	30.1.1919	Stuttgart	15-481
674	Marion Huber	12.5.1927	Muenchen	15-498

Aufgabe: Finde einen Bauplatz mit der Lagebezeichnung „In den Wiesen“ dessen Größe > 500 m² ist und dessen Eigentümer nicht in Stuttgart wohnt.

SQL-Datensatz:

SELECT LB-Buch.NAME, LB-Buch.WOHNORT, Flurbuch.O_ID, Flurbuch.FLUR,
Flurbuch.LAGE, Flurbuch.NUTZUNG, Flurbuch.GROESSE

FROM LB-Buch, Flurbuch

WHERE Flurbuch_ID= O_ID **AND** LB_Buch_ID=LB_NR **AND NOT** (LB-
Buch.WOHNORT=Stuttgart) **AND** Flurbuch.LAGE = In den Wiesen **AND** Flurbuch.NUTZUNG =
Bauplatz **AND** Flurbuch.GROESSE = > 500

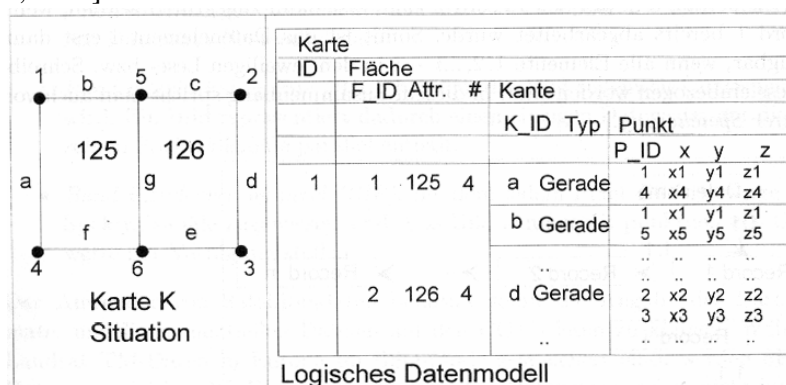
Ergebnis:

Marion Huber	Muenchen	126	12	In den Wiesen	Bauplatz	520
--------------	----------	-----	----	---------------	----------	-----

12.2.3.3 Objektorientierte Datenbanken (OODBMS)

Das Ziel objektorientierter Datenbanken ist die Unterstützung neuer Datentypen (d.h. z.B. eine Linie als Grundelement – Atom – in der Datenbank), der dazugehörigen Operatoren (Geradenschnitt etc.) und der Implementation raumbezogener Speicher- und Zugriffsmechanismen. OODBMS können die Realwelt in Objekten abbilden. Objekte mit gleichen Strukturen werden in Klassen zusammengefasst, die Klassen sind in einer Vererbungshierarchie angeordnet. Dadurch erbt eine Klasse von der über ihr stehenden Klasse die Elemente der internen Struktur und die auf diese Klasse anwendbaren Methoden. Noch sind objektorientierte Datenbanken selten verfügbar, werden aber zukünftig größere Bedeutung erlangen.

Beispiel nach [Bill, 1998]



12.3 GIS Funktionalitäten

Neben der Systemarchitektur gilt die Funktionalität eines GIS-System als ein wichtiges Leistungskriterium. Von entscheidender Bedeutung sind Möglichkeiten der raumbezogenen Analyse.

12.3.1 Selektionsfunktionen

Selektionsfunktionen:

- räumlich
- sachtechnisch
- komplexe räumlich-sachtechnisch
- topologisch

Mittels einer Abfragesprache –bei Standard-Datenbanken SQL – können Abfragen bezüglich der Sachdaten erfolgen. Aufgrund der räumlichen Komponenten eines GIS lassen sich auch räumliche Selektionen, auch gekoppelt mit Sachabfragen durchführen.

12.3.2 Analysefunktionen

Wie bereits erwähnt, sind es die räumlichen Analysemethoden, die GIS von reinen CAD- oder Desktop Mapping Programmen unterscheiden. Ein GIS hingegen kann analysieren und darüber hinaus neue Informationen erzeugen. Dies ist z.B. möglich durch Verschneidung und Puffern.

Beim **Verschneiden** wird ein neuer Datensatz mit eigener Topologie und Geometrie erzeugt. In manchen Systemen lassen sich auch mehr als zwei Ebenen miteinander verschneiden. Außerdem können in die Verschneidung auch Auswertefunktionen (z.B. Gewichtungen) integriert werden.

Mit **Puffern** lassen sich Randzonen um Punkte (z.B. Städte) visualisieren und weiterverarbeiten. Diese Puffer werden anschließend benötigt, um z.B. mögliche Naherholungsgebiete innerhalb des Puffers zu finden.

Puffer lassen sich auch entlang von Linien z.B. Trassen bilden.

12.3.3 Topologiefunktionen

Die Suche nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten A und B gehört zu den einfachsten **Netzberechnungen**. Außerdem existieren Funktionen, die die Netztopologie mit Integration von Sachdaten auswerten.

Werden Netze topologisch abgebildet (Kanten-Knoten-Modell) sind Funktionen der **Netzverfolgung** möglich. Bei Rohrbruch innerhalb eines Rohrleitungsnetzes lassen sich die Anschlüsse ermitteln, die unmittelbar betroffen sind. Komplizierter wird es, wenn es z.B. bei Bauarbeiten darum geht, welcher Schieber oder Regler zu schließen sind, um die Anzahl betroffener Anschlüsse zu minimieren.

12.4 GIS Daten

12.4.1 Basisdaten der Vermessungsverwaltungen

ALK (Automatisierte Liegenschaftskarte) und ATKIS (Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystem) sind die amtlichen Basisdaten der Vermessungsverwaltung.

12.4.1.1 *Automatisierte Liegenschaftskarte – ALK*

Die Automatisierte Liegenschaftskarte bildet gemeinsam mit dem Automatischen Liegenschaftsbuch (ALB) das Liegenschaftskataster. Wichtigster Bestandteil ist das Flurstück, dessen Lage die ALK und dessen Nutzungsarten, Eigentumsverhältnisse (aus dem Grundbuch entnommen), Flächengröße etc. das ALB nachweist.

Das ALK-Konzept geht von einem getrennten Datenbank- und einen Verarbeitungsteil aus. Die Daten werden sämtlich im Datenbankteil gehalten, in sogenannten Primärdateien (Grundrissdatei, Punktdaten u.a.). Der Verarbeitungsteil dient lediglich zur Bearbeitung der Daten und zum Datenaustausch (z.B. Datenabgabe an Benutzer). Der Verarbeitungsteil, also die GIAPs (Graphik-Systeme) sollen mit dem Datenbankteil über EDBS kommunizieren. Die Bearbeitung ist in komplexen Verfahrensabläufen (über EDBS) festgeschrieben, welche auch umfangreiche Kontrollen auf Vollständigkeit, Flächendeckung etc. durchführen. Daneben gibt es logisch-geometrische Bedingungen wie etwa "Eine Flurstücksgrenze darf nur an Grenzpunkten knicken (Geradheitsbedingung)".

12.4.1.2 ATKIS - Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystem

Die Erstellung einer digitalen Topographischen Datenbasis wurde in den 80er Jahren durch die AdV (Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen) unter anderem unter Mitwirkung des Innen- und Verteidigungsministerium vorbereitet. Mit der Durchführung wurden die Landesvermessungsämter beauftragt. ATKIS basiert auf den Ideen und Konzepten der ALK, erweitert diese jedoch an ATKIS - Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystemerschiedenen Stellen.

Prinzipiell ist ATKIS in zwei Modelle getrennt, das Digitale Landschaftsmodell (DLM) und das Digitale Kartographische Modell (DKM). Als spezielle Darstellungsform ist die Digitale Topographische Karte (DTK) konzipiert. Das DLM enthält in hierarchischer Struktur Elemente (Objekte) der Landschaft mit ihrer Lage und Bedeutung (beschrieben im Objektartenkatalog ATKIS-OK). Das DKM enthält dagegen eine Art Zeichenvorschrift (Signaturenkatalog ATKIS-SK) zur Umsetzung der Objekte des DLM in eine kartographische Darstellung, welche durch die Vermessungsverwaltung resp. die ATKIS-Definition vorgegeben ist.

12.4.1.3 EDBS - Schnittstelle für Geo-Basisdaten

Als Austauschformat für ATKIS und ALK-Daten wird die sogenannte "Einheitliche Datenbank-Schnittstelle" (EDBS) verwendet. Obwohl die ALK (wie auch ATKIS) dem Gedanken der Einheitlichkeit folgen sollten und die AdV (Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen) ca. 600-1000 Objektklassen benannt hat, verwenden die einzelnen Länder, Kreise und Kommunen meist nur einen für sie tatsächlich relevanten Auszug. Dies führt zu erheblichen Problemen beim Datenaustausch.

12.5 Literatur

- Bill, Ralf: Grundlagen der Geo-Informationssysteme, Band 1. - 4., völlig überarb. und erw. Aufl. – Heidelberg : Wichmann, 1999
- Das GIS-Tutorial; Internet: www.gis-tutor.de

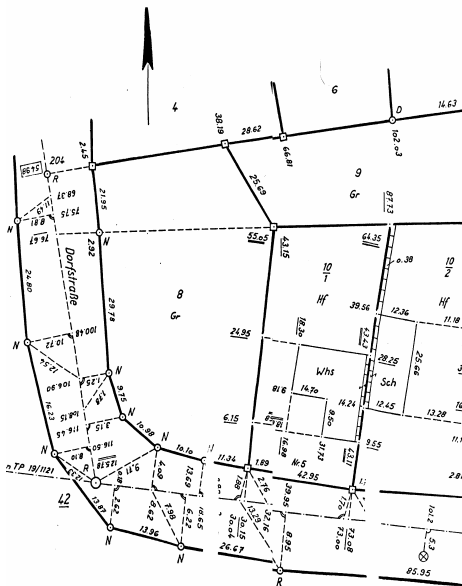
13 Liegenschaftskataster und Bodenordnung

13.1 Liegenschaftskataster

Das “Liegenschaftskataster” ist der Nachweis der tatsächlichen Verhältnisse an Grundstücken. In ihm sind die Grundstücksgrenzen, die Gebäude, die Nutzungsarten und die Flächen nachgewiesen. Es wurde ab 1811 im Rheinland und ab 1865 in Preußen eingerichtet und diente zunächst steuerlichen Zwecken. Später erhielt die rechtliche Sicherung der Grundstücksgrenzen - mit steigender Genauigkeit - erhöhte Bedeutung. Auch für Planungen ist das Kataster die “maßgebende” Grundlage. Dazu gehört seit 1934 auch der Nachweis der Bodenarten und der Ertragsfähigkeit der Böden.

Zur Sicherung der Rechte an Grundstücken steht das “Grundbuch” in Verbindung mit dem Liegenschaftskataster. Die Angaben des Grundbuchs und des Katasters haben “öffentlichen Glauben” und müssen besonders zuverlässig hergestellt sein. Das Liegenschaftskataster wird von staatlichen Katasterämtern -teils in Verbindung mit kommunalen Vermessungsämtern- geführt. An seiner aktuellen Fortführung anlässlich von Grundstücksteilungen und Grenzänderungen, bei Grenzfeststellungen, bei der Herstellung von Lageplänen und bei der Absteckung von Baufluchtlinien nehmen auch “Öffentlich bestellte Vermessungsingenieure” – ÖbVI – teil.

Die Liegenschaften waren ursprünglich nur in Katasterkarten und zugehörigen Registern nachgewiesen. Später wurden alle bei Vermessungen anfallenden Maße im Kataster gesammelt. In “Vermessungsrissen” (Feldbücher, Handrisse) sind die Grenzen, Gebäude usw. unmaßstäblich dargestellt und alle Maßzahlen an den Objekten und an den zur Aufmessung benutzten Messungslinien - mit Kontrollmaßen - eingetragen.



Der ungefähre Maßstab der Risse richtet sich nach der Fülle der erforderlichen Zahlen. Damit die richtige Zuordnung der vielen Zahlen zu den Messungslinien erleichtert wird, gibt es für ihre Eintragung Vorschriften. In dem Vermessungsriß erkennt man folgendes:

- Maße für Strecken werden mit dem Fuß zu ihnen eingetragen.
- Bei einer Messungslinie zeigen die Abszissenmaße mit ihrem Fuß zum Anfang der Linie.
- Maße für eingebundene Linien werden unterstrichen.
- Das Endmaß einer Messungslinie wird doppelt unterstrichen.
- Die Abszissenabschnitte werden nicht einzeln gemessen, sondern es wird eine durchlaufende Messung aller Abszissen nachgewiesen.

Früher war die *Karte* das allgemein wichtigste Endprodukt der Vermessung. Neben der Karte und den einzelnen Maßzahlen erlangten die *Koordinaten* zunehmende Bedeutung. Sie definieren eindeutig - im Rahmen der Genauigkeit der zugrundeliegenden Messungen- die Lage des betreffenden Punktes.

“Grundstücksdatenbanken” sind z.B.:

- “automatisierte Liegenschaftskataster”
- “Amtliches Topographisch-Kartographisches Informationssystem” (ATKIS)

Weil die Daten unanschaulich und unübersichtlich in ihren vielfältigen Verbindungen sind, ist die graphische Darstellung erforderlich. Früher geschah das in Form einer Karte oder eines großmaßstäblichen Planes, heute hingegen auf dem Monitor. Das hat den Vorteil, dass stets aktuelle Daten vorhanden sind.

Die Vermessungsämter und Katasterämter wirken auch bei Aufgaben nach dem “Baugesetzbuch” mit, und zwar bei

- Wertermittlungen für bebaute und unbebaute Grundstücke
- Maßnahmen zur Bodenordnung, d.h. Grenzregulierungen und Baulandumlegungen im Bebauungs- oder Siedlungsbereich - insbesondere am Rande von sich ausbreitenden Orten -
- Flurbereinigungen zur ländlichen Neuordnung.

13.2 Bodenordnung

Weitere Anforderungen an die Vermessungsverwaltung richten sich auf die Neuordnung des Bodens, wenn die bisherige Form (und vielleicht auch die Verstreuung) der Besitzstücke eine günstige Nutzung für den Eigentümer und die Bedürfnisse der Allgemeinheit verhindert.

Zuerst betrachten wir die Gegebenheiten in Siedlungen oder am Rande von Orten, wo die Bebauung ausgedehnt werden soll:

Die dort vorhandenen Grundstücke haben oft nicht diejenige Form, welche die geplante Bebauung erfordert. So sind z.B. die Grundstücke zu schmal und haben dabei eine ungünstige Länge. Die erforderliche neue Straßenführung durchschneidet die vorhandene Besitzstruktur. Außerdem muss die Fläche für die neuen Straßen und für gemeinschaftliche Anlagen aufgebracht werden. In kleinem Umfang helfen dann Grenzregulierungen im Wege des Austausches von Flächen zwischen benachbarten Eigentümern.

Für größere Gebiete muss eine “Baulandumlegung” durchgeführt werden. Aus der Gesamtheit der in das Verfahren einbezogenen Grundstücksflächen erfolgt - nach Abzug eines Anteils für die erforderlichen Gemeinschaftsflächen - eine wertproportionale Zuteilung der neuen Besitzstücke. Bei der Schätzung des Wertes der eingebrachten Grundstücke und der zugeteilten Grundstücke werden nicht nur deren Flächen zugrundegelegt, sondern auch besondere Eigenschaften des Grundstücks berücksichtigt, z. B. die Lage. Das Verfahren der Baulandumlegung ist im Baugesetzbuch geregelt.

Entsprechend gravierende Probleme gibt es auch im ländlichen Bereich. Es gibt oft viele kleine, ungünstig geformte und weit verstreut gelegene Grundstücke, die infolge der Realteilung bei der Vererbung entstanden sind. Auch wird der Einsatz von landwirtschaftlichen Maschinen wegen zu schmaler oder nicht parallel begrenzter Form der Grundstücke erschwert oder das Wegenetz ist nicht zureichend. Mängel liegen oft auch für die Be-/Entwässerung vor und der Hochwasser-/Windschutz genügt nicht.

Abhilfe gegen diese Mängel schafft die “Flurbereinigung”. Das Verfahren ist im Flurbereinigungsgesetz geregelt. “Zur Verbesserung der Produktions- und Arbeitsbedingungen in der Land- und Forstwirtschaft sowie zur Förderung der allgemeinen Landeskultur und der Landentwicklung kann ländlicher Grundbesitz durch Maßnahmen nach diesem Gesetz neu geordnet werden (Flurbereinigung)”.

Die erforderlichen Strukturverbesserungen werden durch Neuordnung des Wege- und Gewässernetzes, Zusammenlegung des Besitzes, günstige Form der Flächen, naturerhaltende Maßnahmen, Aufforstung landwirtschaftlich unrentabler Flächen, Errichtung von Freizeitanlagen und Dorferneuerung erreicht.

Notwendigkeit für ein Flurbereinigungsverfahren besteht auch bei überregional neu erforderlichen Verkehrsverbindungen -Autobahnen, Schnellstraßen, Eisenbahn-Neubaustrecken- sowie wasserwirtschaftlichen Maßnahmen. In diesen Fällen muss zunächst einmal die dafür erforderliche Grundfläche aufgebracht werden; einzelne Betriebe, die direkt davon betroffen wären, dürfen jedoch nicht übermäßig beeinträchtigt werden. Die Beeinträchtigung wird von einem größeren, als dem direkt betroffenen Gebiet getragen.

Ähnlich wie bei der Baulandumlegung wird der neue Besitz wertproportional zugeteilt, nachdem die für die allgemeinen Belange erforderlichen Flächen von der Gesamtfläche des Verfahrens abgezogen wurden. Zuschüsse zum Wegebau, für Maßnahmen zur Be- und Entwässerung, für neue

landwirtschaftliche Gebäude sowie Abfindungen für unrentable Betriebe, deren Fläche damit zur Verfügung steht, wiegen die entstehenden Nachteile auf.

Die Durchführung der Flurbereinigungsverfahren obliegt in erster Linie den Vermessungsfachleuten, weil viele geometrische Bedingungen zu berücksichtigen und Grenzen zu erstellen sind. An dem Verfahren sind neben dem Vermessungsingenieur viele andere Verwaltungen beteiligt: Landwirtschaft Straßenbau, Wasserwirtschaft, Naturschutzbehörde usw.

