

Interpolación de Permeabilidades relativas en el flujo multifasico de fluidos en medios porosos

José Villegas Salabarría

November 19, 2018

1 Introducción

La Ley de Darcy (1856) permite describir el flujo de un fluido en medios porosos a través de la ecuación (1), en esta ecuación \mathbf{u} representa el flujo, \mathbf{K} es el tensor de permeabilidad absoluta, μ la viscosidad, p la presión, g la constante gravitacional

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \left(\frac{1}{\mu} \right) \nabla (p - \rho \mathbf{g}) \quad (1)$$

La ley de Darcy establece que el flujo es determinado principalmente por el gradiente de presión y la permeabilidad absoluta que es una propiedad del medio.

Algunos años más después del descubrimiento de Darcy fue realizada una generalización de esta Ley para representar el flujo de múltiples fases en medios porosos, para esto fue necesario incluir en la ecuación (1) un término o factor de escala que representa la facilidad con la que una fase determinada puede “movilizarse” en presencia de las otras fases, este factor es conocido como permeabilidad relativa.

$$\mathbf{u}_\alpha = -\mathbf{K} \left(\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right) \nabla (p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}) \quad (2)$$

La ecuación (2) es conocida como la Ley generalizada de Darcy, en la cual para el caso black oil $\alpha = o, w, g$. Describir correctamente las funciones de

permeabilidades relativas ($k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_\alpha)$) es realmente un desafío, la industria del petroleo ha puesto particular interés en la realización de experimentos de laboratorio que permitan caracterizar la interaccion de fluidos en medios porosos.

A pesar de existir actualmente modelos de permeabilidades relativas para algunos casos (Corey, Brooks-Corey, StoneI, StoneII, etc), para la realizacion de simulaciones de flujo en medios porosos se utilizan como datos de entrada tablas con puntos discretos de la permeabilidad relativa medidas a distintas saturaciones, generalmente obtenidas de pruebas realizadas en núcleos (de yacimientos), y a partir de estas generar curvas de permeabilidades relativas que describan de mejor forma el problema especifico a simular.

2 Flujo Bifásico

En un yacimiento puede coexistir varios fluidos interactuando entre sí. Considerando por ejemplo la interaccion agua-petroleo en un desplazamiento inmisible el sistema de ecuaciones para el caso de las velocidades puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_o = -\mathbf{K} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \nabla (p_o - \rho_o \mathbf{g}) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_w = -\mathbf{K} \left(\frac{k_{rw}}{\mu_{rw}} \right) \nabla (p_w - \rho_w \mathbf{g}) \quad (4)$$

La ecuacion (3) y la ecuación (4) definen el flujo para el caso bifásico, en ambas ecuaciones se tiene un termino de permeabilidades relativas, siendo $k_{ro} = k_{ro}(S_o)$ y $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ con la restricción $S_w + S_o = 1$.

Para efectos de la simulación numerica de yacimientos pueden considerarse modelos simples como linear (Ecuaciones 5, 6) y cuadrático, que no necesariamente representan físicamente lo que ocurre en el yacimiento. Modelos mas complejos fueron desarrollados a partir de experimentos de laboratorio. En la practica las permeabilidades relativas varian en cada caso por lo que se realizan experimentos en muestras y se tienen puntos discetos de la funcion, de los cuales a partir de un método numérico adecuado se obtienen funciones depermeabilidades relativas.

$$k_{rw}(S_w) = S_w \quad (5)$$

$$k_{ro}(S_w) = 1 - S_w \quad (6)$$

La Figura (1a) muestra el modelo de permeabilidades relativas lineal y la Figura (1b) el modelo de permeabilidades relativas cuadráticas.

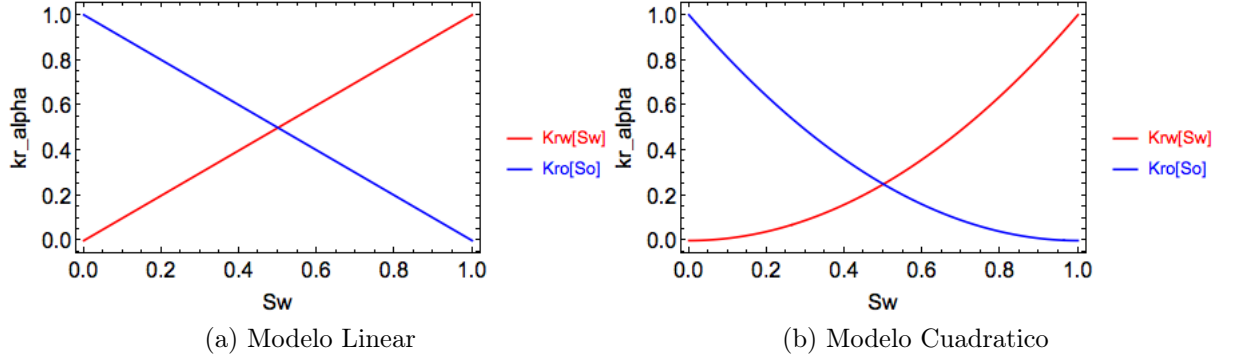


Figure 1: Modelos de permeabilidades relativas simples

En los yacimientos de petroleos generalmente se tiene un porcentaje de agua que se encuentra presente en la fase de petroleo, esta saturacion de agua inicial o saturación de agua connata (s_{wc}) la cual no puede ser desplazada. De igual forma existe en algunos casos determinado porcentaje de petroleo que no puede ser desplazado (s_{or}), por lo que la saturación de agua no puede ser menor que (s_{wc}) y la de petroleo no puede ser mayor a ($1 - s_{or} - s_{wc}$), estos conceptos que definen los puntos finales (“end-points”) de las curvas de permeabilidades relativas. Las saturaciones en los “end-points” son introducidos en los modelos de permeabilidades relativas a través de una normalizacion de la saturacion como sigue:

$$S_{we} = \frac{S_w - s_{wc}}{1 - s_{wc} - s_{or}}, \quad S_w > s_{wc} \quad (7)$$

Modelos mas complejos como el de Brooks-Corey, ecuaciones (8) y (9) incluyen un factor de distribucion de los poros λ para el calculo de las permeabilidades relativas.

$$k_{rw}(S_w) = S_{we}^{(2+3\lambda)/\lambda} \quad (8)$$

$$k_{ro}(S_w) = (1 - S_{we}) \left(1 - S_{we}^{(2+\lambda)/\lambda}\right) \quad (9)$$

En la figura (2) se observa la forma del modelo de permeabilidades relativas de Brooks-Corey considerando el factor $\lambda = 2$.

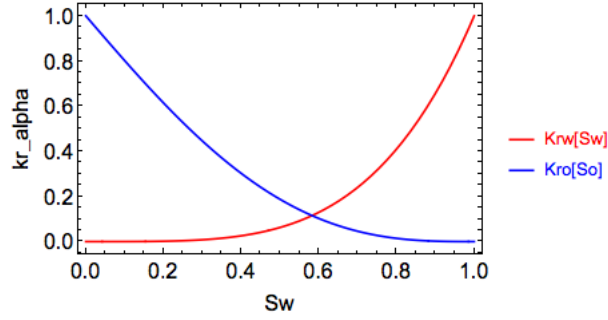


Figure 2: Modelo de Corey con $\lambda = 2$.

El modelo de permeabilidades relativas graficado en la figura (3) fue construido a partir de los datos de la tabla (3), obtenidos experimentalmente.

S_w	k_{rw}	k_{ro}
0.17	0.00	0.58
0.20	0.00	0.51
0.25	0.00	0.41
0.30	0.00	0.32
0.35	0.00	0.24
0.40	0.01	0.18
0.45	0.02	0.13
0.50	0.04	0.09
0.55	0.06	0.05
0.60	0.10	0.03
0.65	0.15	0.02
0.70	0.21	0.01
0.75	0.28	0.00
0.79	0.36	0.00
0.82	0.42	0.00

Table 1: Datos de permeabilidades relativas

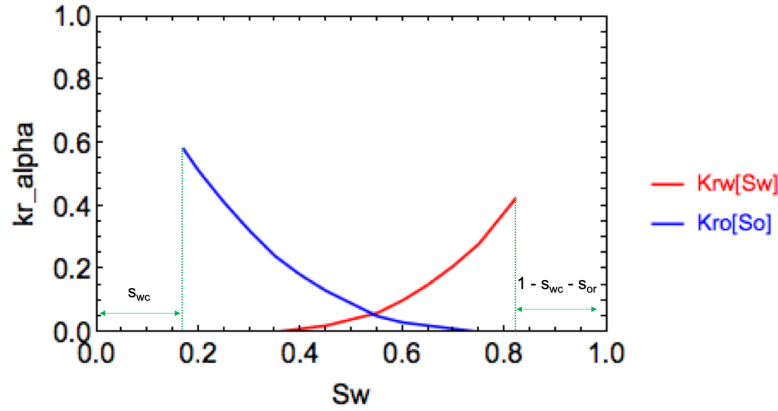


Figure 3: Modelo construido a partir de datos de laboratorio

3 Flujo Trifásico

Como ya fue dicho anteriormente estimar las funciones de permeabilidades relativas es realmente complejo y la mejor forma de obtenerlas es a través de experimentos de laboratorio. Esto puede demandar de mucho tiempo y dinero, por esto para casos prácticos los modelos de permeabilidades relativas pueden ser obtenidos como una interpolación de los casos bifásicos ($o - w$ y $o - g$). La figura (4) muestra esquemas de permeabilidades relativas para el caso bifásico, a partir de las cuales a partir de interpolación pueden obtenerse curvas de permeabilidades relativas para el petróleo en el caso trifásico.

En el caso trifásico las permeabilidades relativas tienen que ser graficadas en diagramas ternarios como el de la figura (5a). En la figura (5b) se tiene la ubicación de un punto $S_w = 0.30$, $S_g = 0.30$, $S_o = 0.40$ en el diagrama ternario.

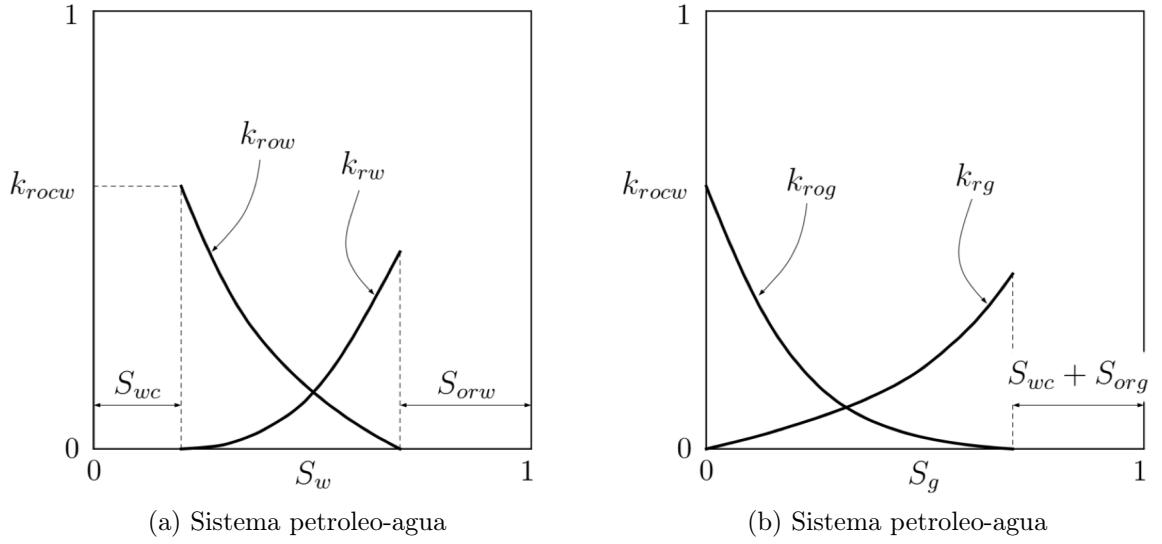


Figure 4: Esquema de permeabilidades relativas.

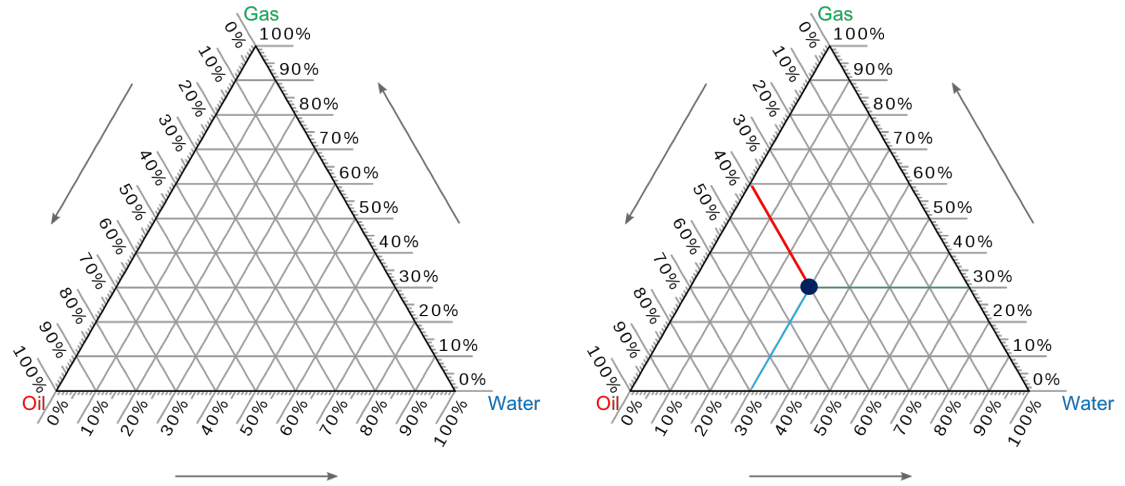


Figure 5: Diagrama Ternario

3.1 Modelo de Stone I

Este modelo fue propuesto por Stone[1970], se considera saturacion de agua connata y la saturacion residual de petróleo por lo que es necesario normalizar las saturaciones como sigue:

$$S_w^* = \frac{S_w - s_{wc}}{1 - s_{wc} - s_{or}} \quad , \quad S_w > s_{wc} \quad (10)$$

$$S_g^* = \frac{S_g}{1 - s_{wc} - s_{or}} \quad , \quad (11)$$

$$S_o^* = \frac{S_o - s_{or}}{1 - s_{wc} - s_{or}} \quad , \quad S_o > s_{or} \quad (12)$$

En el caso trifásico, la saturacion de agua residual es una funcion no lineal de la saturacion de gas. Fayers and Matthews [1974] concluyeron que una interpolacion linear entre los valores extremos de S_{orw} (saturación residual de petroleo en la fase agua) y S_{org} (saturación residual en la fase gas).

$$S_{om} = \alpha S_{orw} + (1 - \alpha) S_{org} \quad , \quad \text{con } \alpha = 1 - \frac{S_g}{1 - s_{wc} - S_{org}} \quad S_o > s_{or} \quad (13)$$

La permeabilidad relativa al petroleo es obtenida por la siguiente expresion:

$$k_{ro}(S_w, S_g) = k_{rocw} S_o^* \beta_w \beta_g \quad (14)$$

donde k_{rocw} es la permeabilidad relativa al petroleo evaluado en la saturacion de agua connata, β_w y β_g son dados por:

$$\beta_w = \frac{k_{row}(S_w) / k_{rocw}}{1 - S_w^*} \quad (15)$$

$$\beta_g = \frac{k_{rog}(S_g) / k_{rocw}}{1 - S_g^*} \quad (16)$$

Nótese que la derivada de la permeabilidad relativa al petroleo con respecto a la saturacion de agua esta dada por:

$$\frac{\partial (k_{ro}(S_w, S_g))}{\partial S_w} = k_{rocw} \left(\frac{\partial S_o^*}{\partial S_w} \right) \beta_w \beta_g + k_{rocw} S_o^* \left(\frac{\partial \beta_w}{\partial S_w} \right) \beta_g \quad (17)$$

y la derivada de la permeabilidad relativa al petroleo con respecto a la saturacion de gas esta dada por:

$$\frac{\partial (k_{ro}(S_w, S_g))}{\partial S_g} = k_{rocw} \left(\frac{\partial S_o^*}{\partial S_g} \right) \beta_w \beta_g + k_{rocw} S_o^* \beta_w \left(\frac{\partial \beta_g}{\partial S_w} \right) \quad (18)$$

3.2 Modelo de Stone II

En este modelo la separacion de la saturacion de petroleo residual no es requerida, la permeabilidad relativa al petroleo es dada por:

$$k_{ro}(S_w, S_g) = k_{rocw} \left[\left(\frac{k_{row}(S_w)}{k_{rocw}} + k_{rw}(S_w) \right) \left(\frac{k_{rog}(S_g)}{k_{rocg}} + k_{rg}(S_g) \right) - (k_{rw}(S_w) + k_{rg}(S_g)) \right] \quad (19)$$

Cuando la equacion (19) retorna un valor negativo, la permeabilidad relativa es considerada cero.

Nótese que la derivada de la permeabilidad relativa al petroleo con respecto a la saturacion de agua esta dada por:

$$\frac{\partial (k_{ro}(S_w, S_g))}{\partial S_w} = k_{rocw} \left[\left(\frac{\partial k_{row}(S_w)}{\partial S_w} \left(\frac{1}{k_{rocw}} \right) + \frac{\partial k_{rw}(S_w)}{\partial S_w} \right) \left(\frac{k_{rog}(S_g)}{k_{rocg}} + k_{rg}(S_g) \right) - \frac{\partial k_{rw}(S_w)}{\partial S_w} \right] \quad (20)$$

y la derivada de la permeabilidad relativa al petroleo con respecto a la saturacion de gas esta dada por:

$$\frac{\partial (k_{ro}(S_w, S_g))}{\partial S_g} = k_{rocw} \left[\left(\frac{k_{row}(S_w)}{k_{rocw}} + k_{rw}(S_w) \right) \left(\frac{\partial (k_{rog}(S_g))}{\partial S_g} \left(\frac{1}{k_{rocg}} \right) + \frac{\partial k_{rg}(S_g)}{\partial S_g} \right) - \frac{\partial k_{rg}(S_g)}{\partial S_g} \right] \quad (21)$$

4 Resultados numéricos

Se tiene en la tabla (2) los datos de permeabilidades relativas para los casos bifásicos petroleo-agua y petroleo-gas respectivamente y se desea obtener la curva de permeabilidades relativas $k_{ro}(S_w, S_g)$ y sus derivadas utilizando el modelo de Stone I y II.

Fue creado un proyecto (<https://github.com/labmec/ReservoirSimulator>), dentro del cual se encuentra la clase “Interpol3RelPerm.h” el cual implementa el modelo de Stone I y II. Para crear un objeto de la clase “Interpol3RelPerm” es necesario ingresar informacion correspondiente a las permeabilidades relativas para los casos bifásicos petroleo-agua y petroleo gas, en este caso esos datos estan dados por la tabla (2) , con estos datos a través de la funcion “ReadData” de “Interpol3RelPerm” son creados objetos del tipo “TRSLinear-Interpolator” la cual es una clase que permite interpolar a partir de datos discretos (interpolacion Linear o interpolacion de Hermite), con esta informacion fueron construidos 4 interpoladores lineales: $k_{rw}(S_w)$, $k_{row}(S_w)$, $k_{rg}(S_g)$ y $k_{rog}(S_g)$, las funciones de interpolacion creadas permiten evaluar las ecuaciones (14) y (19) en cualquier valor de saturacion como puede observarse en la figura (6).

S_w	k_{rw}	k_{rog}
0.17	0.00	0.58
0.20	0.00	0.51
0.25	0.00	0.41
0.30	0.00	0.32
0.35	0.00	0.24
0.40	0.01	0.18
0.45	0.02	0.13
0.50	0.04	0.09
0.55	0.06	0.05
0.60	0.10	0.03
0.65	0.15	0.02
0.70	0.21	0.01
0.75	0.28	0.00
0.79	0.36	0.00
0.82	0.42	0.00

(a) Permeabilidades relativas para el sistema petroleo-agua

S_g	k_{rg}	k_{rog}
0.00	0.000	0.58
0.18	0.002	0.387
0.20	0.003	0.309
0.25	0.006	0.203
0.30	0.010	0.143
0.35	0.017	0.102
0.40	0.026	0.072
0.45	0.037	0.050
0.50	0.052	0.034
0.55	0.070	0.021
0.60	0.093	0.014
0.65	0.119	0.006
0.70	0.150	0.000

(b) Permeabilidades relativas para el sistema petroleo-gas

Table 2: Datos de permeabilidades relativas

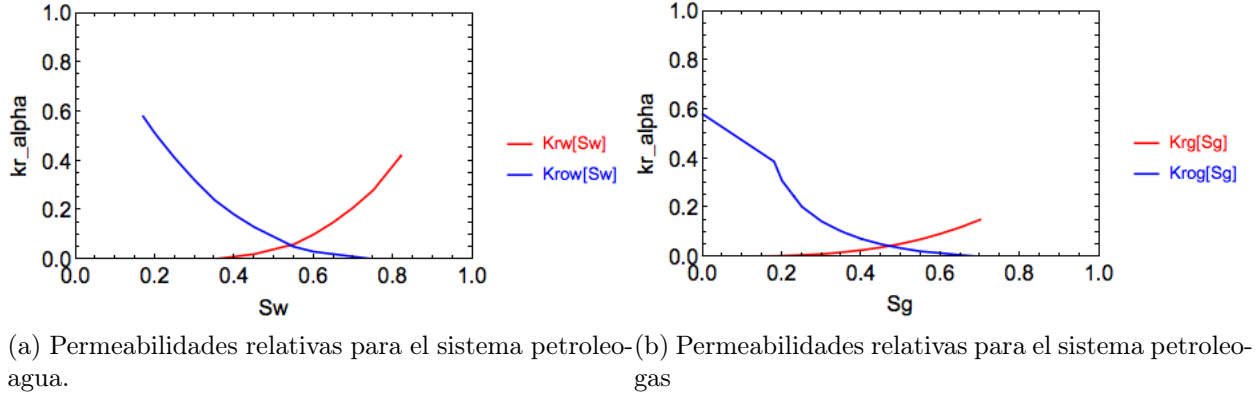
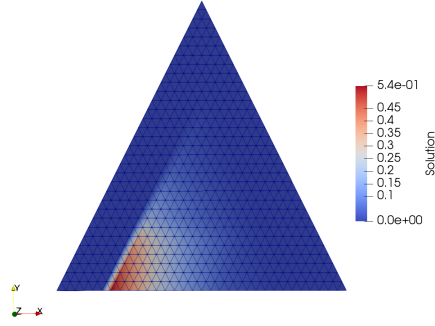
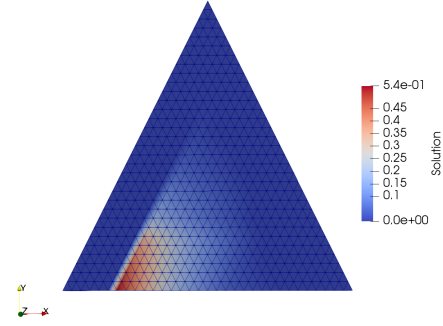


Figure 6: Permeabilidades relativas para los sistemas bifásicos

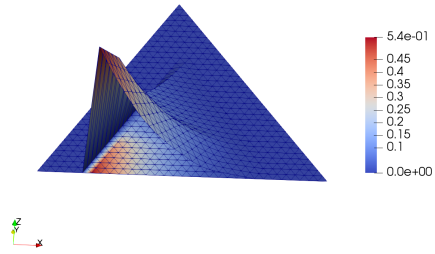
Utilizando el objeto “Interpol3RelPerm” fue obtenida la siguiente curva de permeabilidades relativas $k_{ro}(S_w, S_g)$. La figura (7) muestra la distribución de permeabilidades relativas usando el método de Stone I y II.



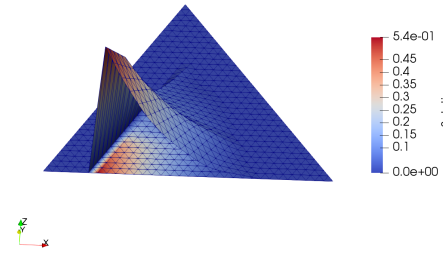
(a) $k_{ro}(S_w, S_g)$ usando el modelo de STONE I



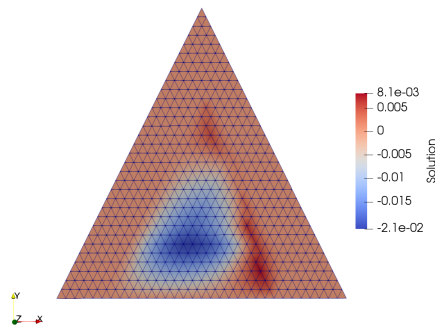
(b) $k_{ro}(S_w, S_g)$ usando el modelo de STONE II



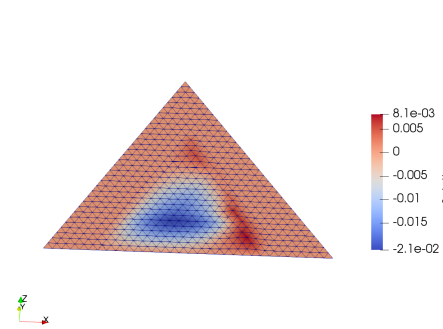
(c) $k_{ro}(S_w, S_g)$ (3d) usando el modelo de STONE I



(d) $k_{ro}(S_w, S_g)$ (3d) usando el modelo de STONE II



(e) Diferencia entre el modelo Stone I y II (2d)



(f) Diferencia entre el modelo Stone I y II (3d)

Figure 7: Modelos de permeabilidad relativa trifasico

5 Conclusiones

Para modelar adecuadamente las permeabilidades relativas es necesario utilizar un método numérico adecuado para obtener las funciones de interpolación, es importante considerar condiciones de extrapolación si fuere necesario. Debe tomarse en cuenta que los datos ingresados sean precisos.