Reinforcement learning

Geonhee Lee
gunhee6392@gmail.com

Outline

- Introduction to Reinforcement learning
- Markov Decision Process(MDP)
- Dynamic Programming(DP)
- Monte Carlo Method(MC)
- Temporal Difference Method(TD)
    - SARSA
    - Q-Learning
- Planning and Learning with Tabular Methods
- On-policy Control with with Approximation
- On-policy Prediction with Approximation
- Policy Gradient Method
- Actor Critic Method

Introduction to Reinforcement learn

RL 특성

다른 ML paradigms과의 차이점

- No supervisor, 오직 reward signal.
- Feedback이 즉각적이지 않고 delay 된다.
- Time이 큰 문제가 된다(연속적인, Independent and Identically Distributed(i.i.d, 독립항등분포) data가 아니다).
- Agent의 행동이 agent가 수용하는 연속적인 data에 영향을 준다.

Reward

- **Reward**: scalar feedback signal.
- agent가 step t에서 얼마나 잘 수행하는 지 나타냄.
- agent의 목표는 전체 reward의 합을 최대화하는 것

Sequential Decision Making

- Goal: Total future reward를 최대화하는 action 선택.
- Action들은 long term 결과들을 가질 것.
- Reward는 지연될 것.
- long-term reward를 더 크게 얻기 위해 즉각적인 reward를 희생하는 것이 나을 수도 있음.

History and State

- history: observations, actions, rewards의 연속.
- State: 다음에 어떤 일이 일어날 것인지 결정하기 위해 사용된 정보(다음 수식을 위한 정의로 보임)
- 공식으로는, state는 history의 함수이다.

$$S_t = f(H_t)$$

Information State

- Information state(a.k.a. Markov state)는 history로부터 모든 유용한 정보를 포함한다.
- 정보이론 관점에서의 information state 혹은 Markov state라는 상태가 있다. 데이터 관점에서 history의 유용한 정보들을 포함하고 있는 state를 의미한다.

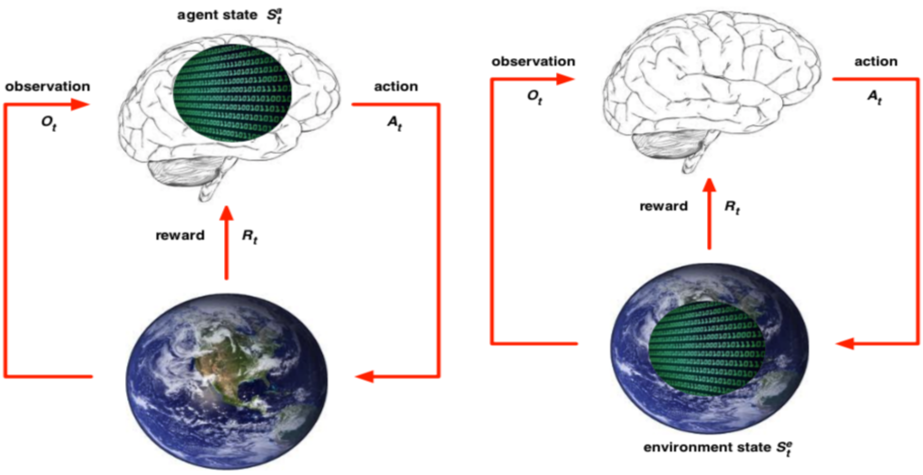
> Definition
>
> > state S_t는 Markov 이다 if and only if $P[S_{t+1}|S_t] = P[S_{t+1}|S_1, \ldots, S_t]$

- 미래는 현재의 과거와 독립적이다.
- State가 주어지면, history는 버려질 수 있다.

Fully Observable Environments

- **Full observability**: agent는 직접적으로 enviroment state를 관찰한다.

$$O_t = S_t^a = S_t^e$$



- Agent state = environment state = information state.
- 형식적으로, 이것은 Markov decision precess(MDP).

Partially Observable Environments

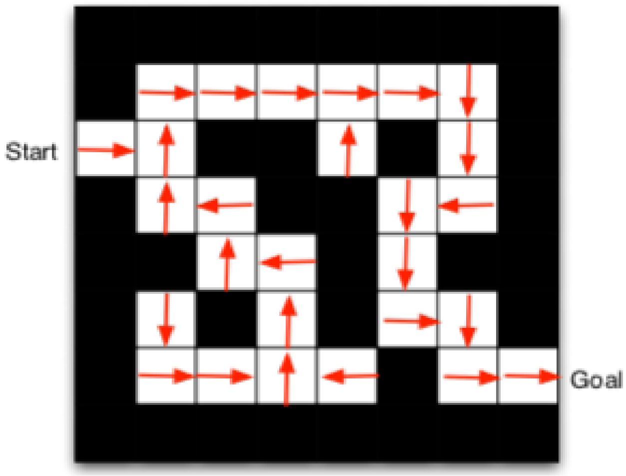
- Partial observability: agent는 간접적으로 environment를 관찰.
  - (ex)robot이 카메라를 가지고 절대적인 위치를 알지못하는 것.
  - (ex)포커를 하는 agent는 오직 오픈한 card들만 볼 수 있는 것.
- 여기서는, agent state $\neq$ environment state.
- 형식적으로, 이것을 partially observable Markob decision process(POMDP).
- Agent는 자체 state representation S_t^a을 구성해야만 한다.
  - 다음과 같은 방법으로 만들 수 있다(1. 전체 history 사용, 2. 확률을 사용, 3. RNN 방식 사용).
    - Complete history: $S_t^a = H_t$.
    - **Beliefs** of environment state: S_t^a = $\mathbb{P}\left[S_t^e = s^1\right], \ldots, \mathbb{P}[S_t^e = s^n])$.
    - Recurrent neural network: $S_t^a = \sigma(S_{t-1}^a W_s + O_t W_o)$.

RL Agent의 주요 성분

- **Policy**: agent의 행동 함수.
- **Value function**: 각 state 및/혹은 action이 얼마나 좋은지.
- **Model**: agent's representation of the environment.

Policy

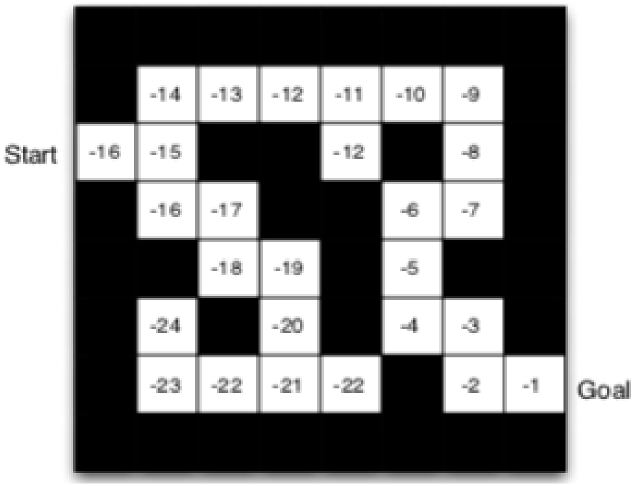
- **Policy**: Agent의 행동.
- State에서 action으로 매핑.
  - Deterministic policy: a = $\pi(s)$.
  - Stochastic policy: $\pi(a|s)$ = $\mathbb{P}[A_t = a|S_t = s]$.



Value function

- **Value functionn**: Future reward 예측 값.
- State의 좋은것/나쁜것인지 판단하기 위해 사용.
- Value function을 이용하여 action 선택

$$V_\pi = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + ... |S_t = s]$$

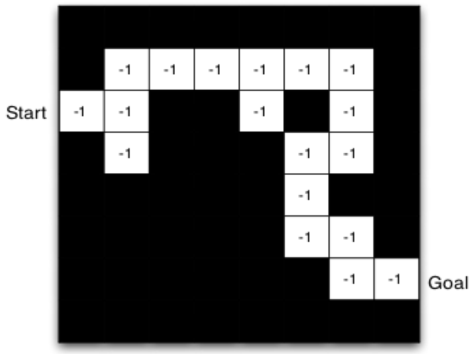


Model

- **Model**: environment에서 다음에 행해질게 무엇인지 예측.
- P: 다음 state를 예측.
- R: 다음(즉각적인) reward를 예측.

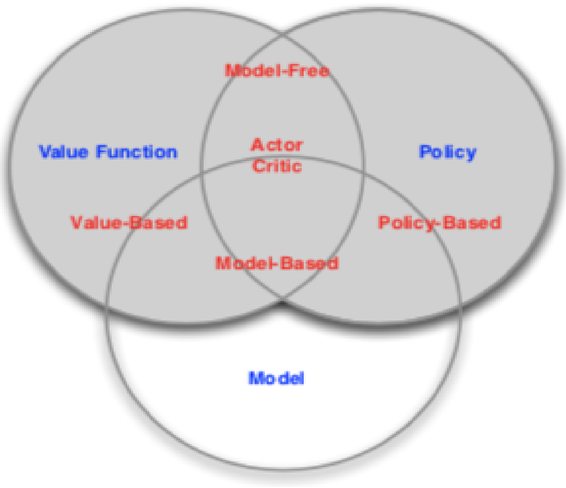
$$P_{ss'}^{a} = \mathbb{P}\left[S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a\right]$$

$$R_{s}^{a} = \mathbb{E}\left[R_{t+1} | S_t = s, A_t = a\right]$$



- Agent는 env의 내부 모델을 가지고 있다고 가정.
  - Dynamics: action들이 state를 변화시키는 방법.
  - Rewards: 각 state으로부터 얼마의 reward를 받는 지.
  - Model은 불완전할 것.
- Grid layout은 transition model ($P_{ss'}^{a}$)를 나타낸다.
- 숫자들은 (모든 행동에 동일한) 각 state s로부터 즉각적인 reward (R_{s}^{a})를 나타낸다.

RL Agent 분류



Learnign and Planning

Sequential decision making에서 두 가지 근본적인 문제

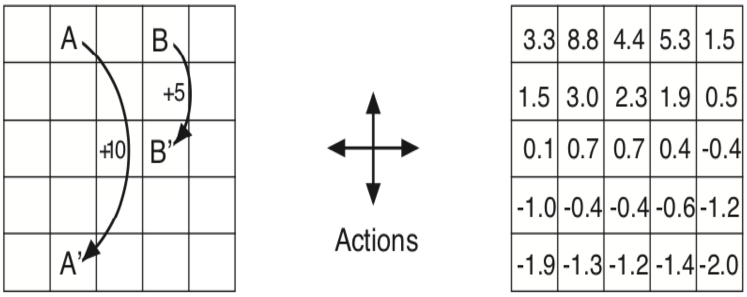
- Reinforcement Learning:
    - Env는 초기에 알려져있지 않음.
    - Agent는 Env와 상호작용.
    - Agent는 policy를 향상시킴.
- Planning:
    - Env 모델은 알려져 있음.
    - Agent는 (어떠한 외부 상호작용 없이) 모델과 계산을 수행.
    - Agent는 policy를 향상시킴.
    - a.k.a. deliberation, reasoning, introspection, pondering, thought, search.

Exploration and Exploitation

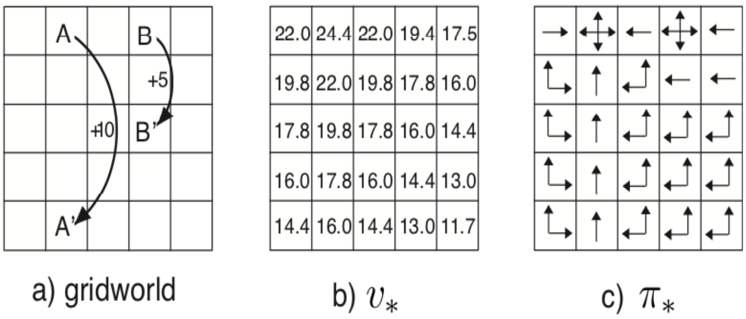
- RL은 trial-and-error learning과 유사.
- Agent는 good policy를 발견해야만 한다.
    - Env의 경험으로부터
    - 도중에 많은 reward를 잃지 않도록
- **Exploration**은 Env에 대한 더 많은 정보를 찾는다.
- **Exploitation**은 reward를 최대화하기 위해 알려진 정보를 exploit.
- Exploit만큼 explore도 일반적으로 중요하다.

Prediction and Control

- **Prediction**: future를 평가.
    - 주어진 policy를 이용하여 계산 및 평가.
        - (아래그림)Uniform random policy의 value function은 무엇인가?



- **Control**: future를 최적화.
    - best policy를 찾는 것.
        - (아래그림)모든 가능한 정책들에서 optimal value function은 무엇인가?
        - (아래그림)Optimal policy는 무엇인가?



Markov Decision Process(MDP)

Outline

- Markov Processes
- Markob Reward Processes
- Markov Decision Processes
- Extensions to MDPs

Introduction to MDPs

- Markov decision processes(MDP)는 RL에서 Env를 형식적으로 기술.
    - 여기서 Env는 fully observable.
    - i.e., 현재 state는 완전하게 process의 특성을 나타냄.
- 대부분 모든 RL 문제들은 MDPs 로 공식화될 수 있다.
    - Optimal control은 주로 continous MDPs를 다룬다.
    - Partially Observable problem은 MDPs로 변환을 할 수 있다.
    - Bandits은 하나의 state를 가진 MDPs이다.

Markov Property

"미래는 현재에서의 과거와 독립적이다."

> Definition
>
> > state S_t는 *Markov* if and only if
> >
> > $$\mathbb{P}[S_{t+1}|S_t] = \mathbb{P}[S_{t+1}|S_1, \dots, S_t]$$

- State는 history로부터 모든 관련정보를 수집한다.
- State가 알려졌다면, history는 버릴 수 있다.
    - i.e. State는 미래의 sufficient statistic.

State Transition Matrix

Markov state s 및 successor state s'에 대하여, **state transition probability** 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s'|S_t = s]$$

State transition matrix P는 모든 state s에서 모든 successor s'로의 transition probabilities를 다음과 같이 정의한다.

to P = from $\begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$

여기서 각 행렬의 행의 합은 1이다.

Markov Process

Markov process 는 memoryless random process, i.e. Markov property를 가진 random states $S_1, S_2, ...$ 의 sequence.

Definition

A *Markov Process* (or *Markov Chain*) is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{P} \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a (finite) set of states
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix,
  $\mathcal{P}_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s]$

Markov Reward Process

Markov reward process 는 value를 가진 Markov chain(Markov Process)

Definition

A *Markov Reward Process* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix,
  $\mathcal{P}_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s]$
- γ is a discount factor, $\gamma \in [0, 1]$

Return

Definition

The *return* G_t is the total discounted reward from time-step t.

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

- Discount $\gamma \in [0, 1]$은 미래 보상들의 현재 값.
- k+1 time-step 이후에 받게되는 reward의 값은 $\gamma^k R$.
- 지연되는 reward는 즉각적인 reward를 중요시한다.
  - γ가 0에 가까우면, "myopic(근시안적)" 평가를 도출.
  - γ가 1에 가까우면, "far-sighted(미래를 내다보는)" 평가를 도출.

Discount

대부분 **Markov reward** 및 **decision process** 는 discount된다. 왜?

- 수학적으로 discount reward에 대해 편리하다.
- Cyclic Markov process에서 infinite return을 피한다.
- 미래에 대한 uncertainty는 fully representation 하지 않아도 된다.
- 동물/인간의 행동은 즉각적인 보상에 대해 선호하는 것을 볼 수 있다.

Value Function

Value function $v(s)$는 state s의 long-term 값을 제공한다.

Definition

The *state value function* $v(s)$ of an MRP is the expected return starting from state s

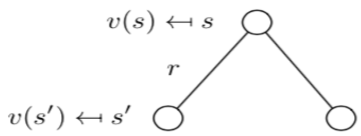
$$v(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s]$$

Bellman Equation for MRPs

Value function은 두 개의 part로 분리할 수 있다.

- 즉각적인 reward R_{t+1}
- Successor state $\gamma v_{(S_{t+1})}$의 discounted value.

$$v(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s]$$



$$\begin{aligned} v(s) &= \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots \mid S_t = s\right] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \ldots) \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s] \end{aligned}$$

$$v(s) = \mathcal{R}_s + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'} v(s')$$

Solving the Bellman Equation

- Bellma Equation은 linear equation.
- 이 식은 다음과 같이 직접 풀 수 있다:

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P} v \\ (I - \gamma \mathcal{P}) v &= \mathcal{R} \\ v &= (I - \gamma \mathcal{P})^{-1} \mathcal{R} \end{aligned}$$

- Computational complexity는 n state에 대해 O(n^3).
- **Small MRPs** 에 대해서만 직접 풀 수 있다.
- **Large MRPs** 에 대해 여러 iterative method가 있다.

- Dynamic programming(DP)
- Monte-Carlo evaluation(MC)
- Temporal-Difference learning(TD)

Markov Decision Process

Markov decision process(MDP) 는 **decision** 을 가진 Markob reward process이다. 모든 state들이 Markov인 Environment이다.

Definition

A *Markov Decision Process* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{A}$ is a finite set of actions
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}^a_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}^a_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a]$
- γ is a discount factor $\gamma \in [0, 1]$.

Policies

Definition

A *policy* π is a distribution over actions given states,

$$\pi(a|s) = \mathbb{P}[A_t = a \mid S_t = s]$$

- **Policy** 는 agent의 behavior를 완벽히 정의.
- MDP policy는 현재 state에만 의존(not the history).
  - i.e. Policy는 stationary(time-independent). $A_t \sim \pi(\cdot|S_t), \forall t > 0$
- MDP $M =< S, A, P, R, \gamma >$ 및 policy π 주어지고
  - State sequence $(S_1, S_2, ...)$는 Markov process $< S, P^\pi >$
  - State 및 reward sequence $(S_1, R_2, S_2, ...)$는 Markov reward process $< S, P^\pi R^\pi, \gamma >$
  - 여기서,

$$P^\pi_{s,s'} = \sum_{a \in A} \pi(a|s) P^a_{ss'}$$

$$R^\pi_s = \sum_{a \in A} \pi(a|s) R^a_s$$

Value Function

Definition

The *state-value function* $v_\pi(s)$ of an MDP is the expected return starting from state s, and then following policy π

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi\left[G_t \mid S_t = s\right]$$

Definition

The *action-value function* $q_\pi(s, a)$ is the expected return starting from state s, taking action a, and then following policy π

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi\left[G_t \mid S_t = s, A_t = a\right]$$

Bellman Expectation Equation

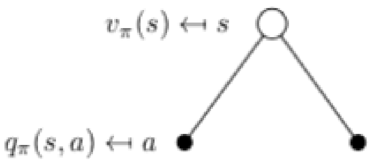
State-value(V) function은 즉각적인 reward와 successor state의 discounted value의 합으로 다시 분해할 수 있다.

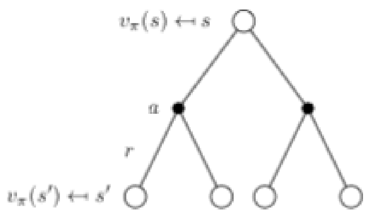
$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1})|S_t = s]$$

Action-value(Q) function 은 유사하게 분해할 수 있다.

$$q_\pi(s,a) = \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma q_\pi(S_{t+1}, A_{t+1})|S_t = s, A_t = a]$$

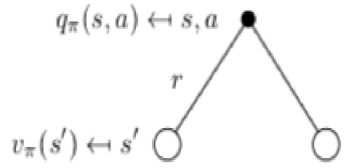
Bellman Expectation Equation for V^π

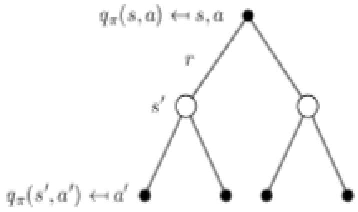




$$v_\pi(s) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \pi(a|s) q_\pi(s,a) \qquad v_\pi(s) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \pi(a|s) \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s')\right)$$

Bellman Expectation Equation for Q^π





$$q_\pi(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s') \qquad q_\pi(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') q_\pi(s',a')$$

Optimal Value Function

Definition

The *optimal state-value function* $v_*(s)$ is the maximum value function over all policies

$$v_*(s) = \max_\pi v_\pi(s)$$

The *optimal action-value function* $q_*(s, a)$ is the maximum action-value function over all policies

$$q_*(s, a) = \max_\pi q_\pi(s, a)$$

- Optimal value function은 MDP에서 best possible performance를 명시한다.
- MDP는 optimal value fucntion을 안다면 풀 수 있다.

Optimal Policy

Policy의 부분 순서를 정의

$$\pi \geq \pi' \text{ if } v_\pi(s) \geq v_{\pi'}(s), \forall s$$

Theorem

For any Markov Decision Process

- *There exists an optimal policy π_* that is better than or equal to all other policies, $\pi_* \geq \pi, \forall \pi$*
- *All optimal policies achieve the optimal value function, $v_{\pi_*}(s) = v_*(s)$*
- *All optimal policies achieve the optimal action-value function, $q_{\pi_*}(s, a) = q_*(s, a)$*

Finding an Optimal policy

Optimal policy는 $q_*(s, a)$를 최대화하여 찾을 수 있다.

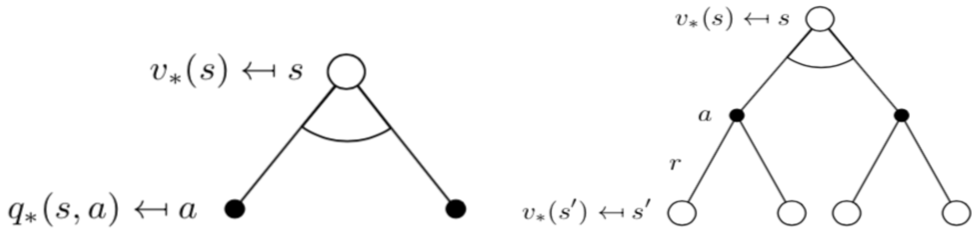
$$\pi_*(a|s) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = \underset{a \in \mathcal{A}}{\text{argmax}}\ q_*(s, a) \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

- 어떤 MDP에 대해서도 항상 deterministic optimal policy.
- 만약 $q_*(s, a)$를 알고 있다면, 즉시 optimal policy를 가질 수 있다.

Bellman Optimality Equation

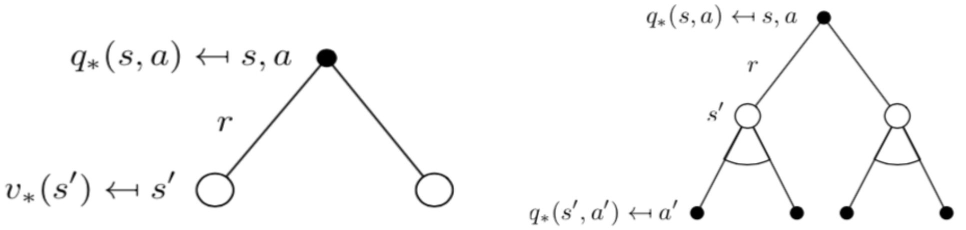
Bellman Optimality Equation for V^*

Optimal value function은 재귀적으로 bellman optimality equation과 관련 있다.



$$v_*(s) = \max_a q_*(s,a) \qquad v_*(s) = \max_a \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s')$$

Bellman Optimality Equation for Q^*



$$q_*(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s') \qquad q_*(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \max_{a'} q_*(s',a')$$

Solving the Bellman Optimality Equation

- Bellman Optimality Equation은 non-linear.
- (일반적으로) closed form solution은 없다.
- 많은 iterative solution 방법:
  - Value Iteration.
  - Policy Iteration.
  - Q-learning.
  - Sarse.

Extensions to MDPs

- Infinite and continous MSPs

- Parially observable MDPs
- Undiscounted, average reward MDPs

Infinite MDPs

다음 extension은 모두 이용가능하다:

- Countably infinite state and/or action spaces
    - Straightforward(명확, 간단한)
- Continuous state and/or action spaces
    - Closed form for linear quadratic model(LQR)
- Continous time
    - Requires partial differential equations
    - Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation
    - Limiting case of Bellman equation as time-step $\rightarrow 0$

Partially Observable Markov Decision Process(POMDPs)

POMDPs: Hidden state들을 가진 MDP. action을 가진 hidden Markov model.

Definition

A *POMDP* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{Z}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{A}$ is a finite set of actions
- $\mathcal{O}$ is a finite set of observations
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}^a_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}^a_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{Z}$ is an observation function, $\mathcal{Z}^a_{s'o} = \mathbb{P}[O_{t+1} = o \mid S_{t+1} = s', A_t = a]$
- γ is a discount factor $\gamma \in [0, 1]$.

Belief States

- History: action, observation, reward의 sequence.
- Belief state: history 조건에서의 state의 확률 분포.

Definition

A *history* H_t is a sequence of actions, observations and rewards,

$$H_t = A_0, O_1, R_1, ..., A_{t-1}, O_t, R_t$$

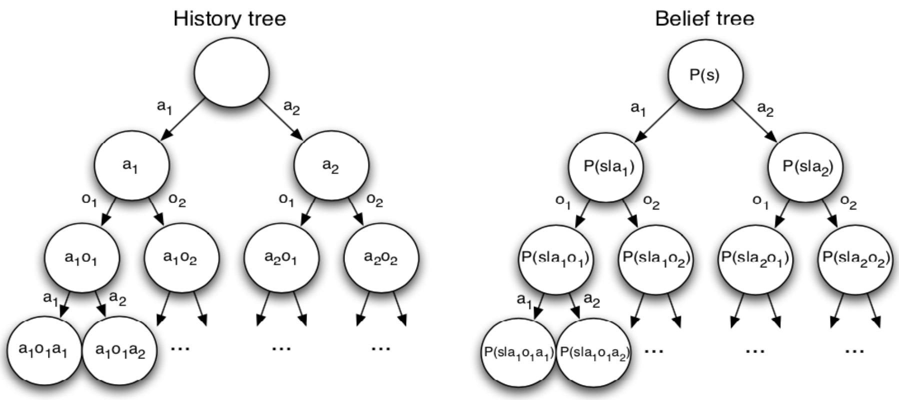
Definition

A *belief state* $b(h)$ is a probability distribution over states, conditioned on the history h

$$b(h) = (\mathbb{P}\left[S_t = s^1 \mid H_t = h\right], ..., \mathbb{P}[S_t = s^n \mid H_t = h])$$

Reductions of POMDPs

- History H_t는 Markov property 만족.
- Belief state $b(H_t)$는 Markov property 만족.



- POMDP는 (infinite) history tree로 축소될 수 있음.
- POMDP는 (infinite) belief state로 축소될 수 있음.

Ergodic Markov Process

- Ergodic Markov process는
    - Recurrent: 각 state는 무한히 방문됨
    - Aperiodic: 각 state는 systematic 주기없이 방문됨.
- Ergodic Markov process는 제한된 고정 분포 $d^{\pi}(s)$를 가짐.
- 정의:
    - 어떠한 policy에 의해 유도된 Markov chain이 ergodic이라면 MDP는 ergodic.
- 어떠한 policy π 에 대해서, ergodic MDP는 start state의 독립적인 time-step ρ^{π} 분의(per) average reward를 가짐.

Theorem

An ergodic Markov process has a limiting stationary distribution $d^{\pi}(s)$ with the property

$$d^{\pi}(s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} d^{\pi}(s')\mathcal{P}_{s's}$$

Definition

An MDP is ergodic if the Markov chain induced by any policy is ergodic.

For any policy π, an ergodic MDP has an *average reward per time-step* ρ^{π} that is independent of start state.

$$\rho^{\pi} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} R_t\right]$$

Average Reward Value Function

- Undiscounted의 value function, ergodic MDP는 average reward의 관점으로 표현될 수 있다.
- $\tilde{v}_\pi(s)$는 state s 에서 시작하기 때문에 extra reward.

$$\tilde{v}_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=1}^{\infty} (R_{t+k} - \rho^\pi) \mid S_t = s \right]$$

이것은 average reward Bellman equation과 상응한다.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi \left[(R_{t+1} - \rho^\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} (R_{t+k+1} - \rho^\pi) \mid S_t = s \right] \\ &= \mathbb{E}_\pi \left[(R_{t+1} - \rho^\pi) + \tilde{v}_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s \right] \end{aligned}$$

Planning by Dynamic Programming(DP)

1. Introduction
2. Policy Evaluation
3. Policy Iteration
4. Value Iteration
5. Extensions to Dynamic Programming
6. Contraction Mapping

Introduction

What is Dynamic Programming

Dynamic : 문제에 대한 sequential 또는 temporal component,

Programming : "Program"을 최적화하는 것, i.e., policy

- c.f.(참조) linear programming

Dynamic programming :

- 복잡한 문제들을 푸는 방법.
- 문제들은 subproblem으로 분해하고,
  - subproblem을 풀고,
  - subproblem의 해를 결합.

Requirements for Dynamic Programming

DP는 두 가지 특성을 가지는 문제들에 대한 가장 일반적인 솔루션.

1. Optimal substructure
   - Optimality 원리를 적용함.
   - Optimal solution은 subproblem으로 분해될 수 있음.
2. Overlapping subproblems
   - Subproblem들은 여러번 반복됨.
   - Solution은 저장 및 재사용 될 수 있음.

- Markov decision process(MDP)는 두 가지 특성을 모두 만족:
  - Bellman equation은 recursive decomposition을 제공.
  - Value function은 solution을 저장 및 재사용.

Planning by Dynamic Programming

- Dynamic Programming은 MDP의 **full knowledge** 를 가정.
- MDP에서 *planning* 을 위해 사용 됨.
  - For *prediction*:
    - **Input**:
      - MDP $< S, A, P, R, \gamma >$ 및 Policy π
      - or: $< S, P^{\pi}, R^{\pi}, \gamma >$
    - **Output**:
      - value function v_{π}.
  - Or for *control*:
    - **Input**:
      - MDP $< S, A, P, R, \gamma >$.

- **Output**:
  - Optimal value function v_π 및 optimal policy π_*.

Other Applications of Dynamic Programming

Dynamic Programming은 많은 다른 문제들로 풀기위해 사용되어 진다, 예:

- Scheduling algorithms
- String algorithms (e.g. sequence alignment)
- Graph algorithms (e.g. shortest path algorithms)
- Graphical models (e.g. Viterbi algorithm)
- Bioinformatics (e.g. lattice models)

Policy Evaluation

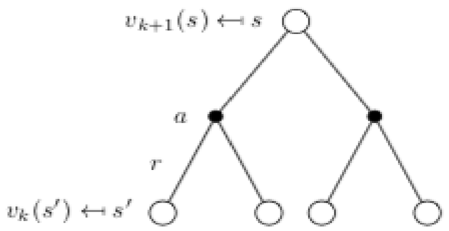
Iterative Policy Evaluation

- Problem: 주어진 policy π 를 evaluation

- Solution: iterative application of Bellman expectation backup
    - $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow ... \rightarrow v_\pi$
    - *synchronous* backup을 사용
        - At each iteration k + 1,
        - For all states s ∈ S ,
        - $v_k(s')$ 으로부터 $v_{k+1}(s)$ update.
            - 여기서 s' 는 s 의 successor state.

- 나중에는 *asynchronous* backup을 사용할 것.

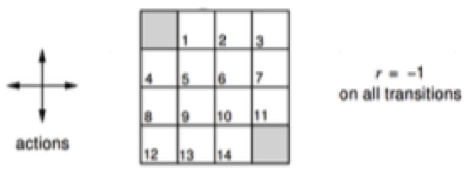
- v_π 로의 수렴은 현재 part 마지막에서 증명할 것.



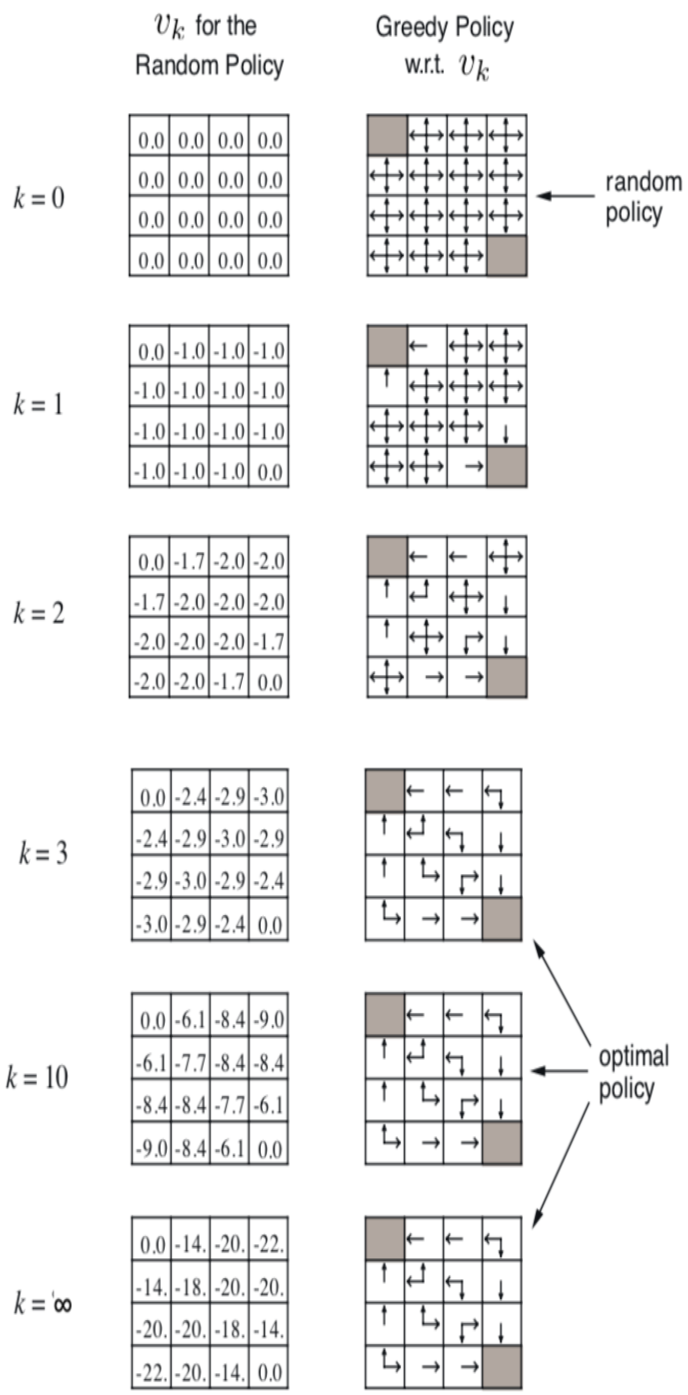
$$v_{k+1}(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s') \right)$$
$$\mathbf{v}^{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{\pi}} + \gamma \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{v}^k$$

Example: Small Grid world

Evaluating a Random Policy in the Small Gridworld



- Undiscounted episodic MDP (γ = 1).
- Terminal state(gray)로 도달할 때까지 reward는 -1.
- Agent는 uniform random policy를 따른다.
    - $\pi(n|\cdot)$ = $\pi(e|\cdot)$ = $\pi(s|\cdot)$ = $\pi(w|\cdot)$ = 0.25 (= 동서남북 방향으로 동일한 확률로 이동).



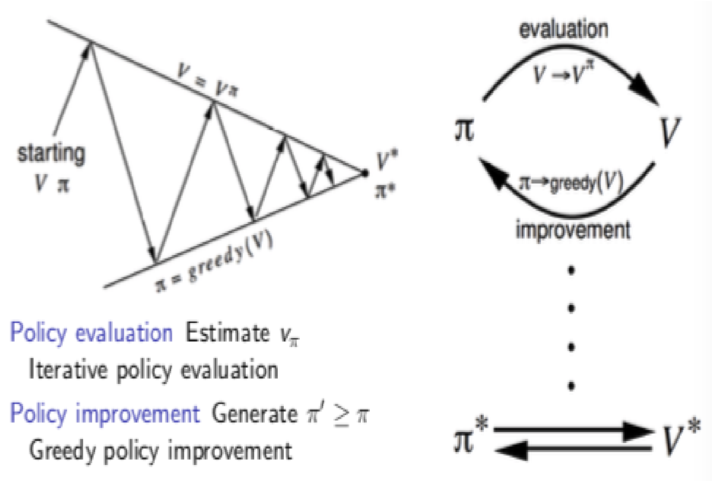
Policy Iteration

How to Improve a Policy

- Policy π가 주어지면,
  - **Evaluate** the policy π
    - $v_\pi(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + ... | S_t = s]$
  - v_π 에 대하여 탐욕적(greedily)으로 행동하여 policy를 **Improve**
    - π' = greedy (v_π)

- Small Gridworld에서 **improved policy**는 optimal, $\pi' = \pi^*$.

- 일반적으로, 더 많은 improvement / evaluation의 interation들이 필요.
- But, **policy iteration** 의 process는 항상 π^* 로 수렴.



Policy Improvement

- Deterministic policy a = $\pi(s)$를 고려하자.
- 탐욕적(greddily)으로 행동하여 policy를 *improve* 할 수 있다
    - $\pi'(s)$ = argmax $_{a \in A} q_{\pi}(s, a)$
- One step에 걸쳐 state 어떠한 s 로부터 value를 improve,
    - $q {\pi} (s, \pi ' (s))= max{a \in A} q _{\pi} (s, a) \geq q _{\pi} (s, \pi (s)) = v _{\pi} (s)$
- 위의 과정으로 value function을 improvement,
    - $v_{\pi}(s) \leq q_{\pi}(s, \pi'(s)) = \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma v_{\pi}(S_{t+1}) | S_t = s]$
    - $\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma q_{\pi}(S_{t+1}, \pi'(S_{t+1})) | S_t = s]$
    - $\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 q_{\pi}(S_{t+2}, \pi'(S_{t+2})) | S_t = s]$
    - $\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + ... | S_t = s]$ = $v_{\pi'}(s)$
- 만약 improvement가 중단되면,
    - $q_{\pi}(s, \pi'(s)) = max_{a \in A} q_{\pi}(s, a) = q_{\pi}(s, \pi(s)) = v_{\pi}(s)$
- 그다음 Bellman optimality equation은 다음을 만족한다:
    - $v_{\pi}(s) = max_{a \in A} q_{\pi}(s, a)$
- 그러므로 $v_{\pi}(s) = v_*(s)$ for all $s \in S$
- 그래서 π 는 **optimal policy**.

Value Iteration

Value Iteration in MDPs

Principle of Optimality

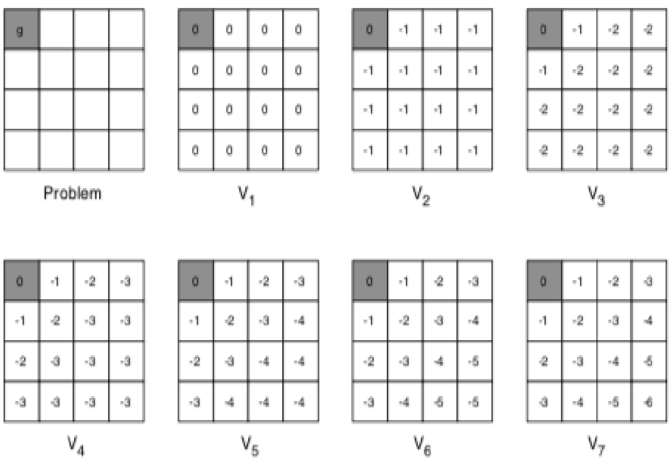
모든 optimal policy는 두 개의 성분으로 분할:

- Optimal first action A_*
- Followed by an optimal policy from successor state S'

> **Theorem (Principle of Optimality)**
>
> *A policy $\pi(a|s)$ achieves the optimal value from state s, $v_\pi(s) = v_*(s)$, if and only if*
>
> - *For any state s' reachable from s*
> - *π achieves the optimal value from state s', $v_\pi(s') = v_*(s')$*

Deterministic Value Iteration

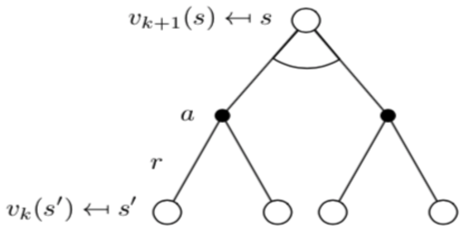
- 만약 subproblem $v_*(s')$ 에대한 solution을 안다면,
  - solution $v_*(s)$ 는 one-step lookahead에의해 찾을 수 있다
    - $v _* (s) \leftarrow max _{a \in A} R ^a *s + \gamma \sum*{s' \in S} P ^a _{ss'} v _* (s')$
  - Value iteration의 idea는 반복적으로 갱신하는 것을 적용.
  - Intuition: 마지막 reward를 가지고 시작하여 backward 방향으로 진행



Value Iteration

- Problem: optimal policy π 를 찾는 것.
- Solution: iterative application of Bellman optimality backup.
  - $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow ... v_*$
  - Syncgronous backup 사용
    - At each iteration k+1
    - For all state $s \in S$
    - $v_k(s')$ 으로부터 $v_{k+1}(s)$갱신

  - v_* 으로 수렴하는 것은 이후에 증명.
  - Policy iteration과 달리, explicit policy가 없음(최대값 찾는 정책).
  - Intermediate value function은 어떤 policy과도 일치하지 않을 수 있음.



$$v_{k+1}(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s') \right)$$
$$\mathbf{v}_{k+1} = \max_{a \in \mathcal{A}} \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathbf{a}} + \gamma \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}_k$$

Summarry of DP Algorithms

Synchronous Dynamic Programming Algorithms

Problem	Bellman Equation	Algorithm
Prediction	Bellman Expectation Equation	Iterative Policy Evaluation
Control	Bellman Expectation Equation + Greedy Policy Improvement	Policy Iteration
Control	Bellman Optimality Equation	Value Iteration

- Algorithms are based on state-value function $v_\pi(s)$ or $v_*(s)$
- Complexity $O(mn^2)$ per iteration, for m actions and n states
- Could also apply to action-value function $q_\pi(s, a)$ or $q_*(s, a)$
- Complexity $O(m^2n^2)$ per iteration

Extensions to Dynamic Programming

Asynchronous Dynamic Programming

- DP 방법은 지금까지 *synchronous backup* 을 사용하여 기술.
  - i.e. 모든 state들은 parallel(병렬적)하게 back up되었다.
- *Asynchronous DP* 는 각각 순서상관없이 state들을 back up

- 각각 선택된 state에 대해서, 적절한 back up을 적용하고,
- Computation을 상당히 줄일 수 있고,
- 모든 state가 계속 선택되면, 수렴성을 보장.

- Asynchronous dynamic programming에 대한 세 가지 간단한 ideas:
  - *In-place dynamic programming*
  - *Prioritised sweeping*
  - *Real-time dynamic programming*

In-place Dynamic Programming

- Synchronous value iteration은 모든 $s \in \mathcal{S}$에 대해서 value function의 두 개의 복사본들을 저장.

$$v_{new}(s) \leftarrow \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_{old}(s') \right)$$

$$v_{old} \leftarrow v_{new}$$

- In-place value iteration은 모든 $s \in \mathcal{S}$에 대해서 **오직 하나의 복사본**을 저장.

$$v(s) \leftarrow \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v(s') \right)$$

Prioritised sweeping

- State 선택하기 위해서 Bellman error의 크기를 사용, e.g.

$$\left| \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v(s') \right) - v(s) \right|$$

- 가장 큰 Bellman error가 있는 state를 back-up,
- 각 back-up 후에 영향을 받는 Bellman error 업데이트.
- Reverse dynamic (predecessor state)의 지식을 요구한다.
- Priority queue를 유지하여 효율적으로 구현될 수 있다.

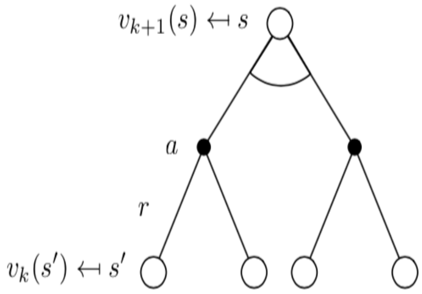
Real-time dynamic programming

- Idea: 오직 agent와 관련있는 state
- State의 선택하기 위해 agent의 경험을 사용.
- 각 time-step S_t, A_t, R_{t+1} 이후에,
- State S_t 를 back-up.

$$v(S_t) \leftarrow \max_{a\in\mathcal{A}} \left(\mathcal{R}^a_{S_t} + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}^a_{S_t s'} v(s')\right)$$

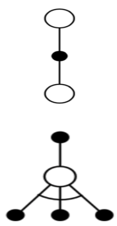
Full-Width Backups

- DP는 *full-width* backup을 사용.
- 각 backup(sync or async)에 대하여,
  - 모든 successor state 및 action아 고려.
  - MDP transition 및 reward function의 knowledge 사용.
- DP는 medium-sized 문제에 대해 효율적(100만 state)
- 큰 문제에 대해서, DP는 Bellman은 차원의 저주(*curse of dimensionality*)
  - state의 수 ($n = |S|$)는 state 변수의 수의 기하급수적으로 증가.
- 심지어 하나의 backup도 매우 expensive될 수 있음.



Sample Backups

- 다음 강의는 *sample backup* 들에 대해 고려할 것.
  - Reward function(R) 및 transition dynamics(P) 대신에,
  - Sample reward 및 sample trainsition $< S, A, R, S' >$ 사용
- 장점:
  - Model-free: MDP의 사전 지식을 요구하지 않음.
  - **Sampling** 을 통해 차원의 저주를 타개.
    - Backup 비용은 상수이고, $n = |S|$ 에 독립적.



Approximate Dynamic Programming

- Value function을 근사화
    - *function approximator ($\hat{v}(s,w)$)* 을 사용.
    - DP를 $\hat{v}(s,w)$ 에 적용.
- e.g. 각 iteration k 에 맞는 value Iteration을 반복,
    - Sample states $\tilde{S} \subseteq S$
    - 각 state $s \in \tilde{S}$ 에 대해서, Bellman optimality equation을 사용하여 target value를 추정,
    - Target { $< s, \tilde{v}_k(s) >$ } 을 사용하여, next value function $\hat{v}(\cdot, w_{k+1})$ 을 학습.

$$\tilde{v}_k(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \hat{v}(s', \mathbf{w_k}) \right)$$

> 아래는 수렴성 증명 내용.

Contraction Mapping

Some Technical Questions

- Value iteration이 v_*에 수렴하는 것을 어떻게 알 수 있을까?
- Or iterative policy evaluation이 v_π 에 수렴하는가?
- And therefore policy iteration이 v_* 에 수렴하는가?
- Solution이 유일(unique)한가?
- 얼마나 이러한 알고리즘들이 빠르게 수렴하는가?
- 이러한 질문들은 **contraction mapping theorem** 에 의해 해결됨.

Value Function Space

- Value function들에 걸쳐 vector space V 를 고려해보자
    - $|S|$ 차원
    - 이러한 공간에서 각 지점은 value function $v(s)$ 를 명시.
    - 이러한 공간에서 Bellman backup은 어떤 지점에 대해서 수행되는가?
    - Value function을 *closer* 로 가져다주는 것을 보여줄 것.
    - 따라서 backup은 unique solution에 수렴해야만 한다.

Value Function ∞ - Norm

- ∞ - norm에 의한 State-value fucntion(u, v) 간의 거리를 측정할 것.
- i.e. state value간의 가장 큰 차이

$$||u - v||_\infty = \max_{s \in \mathcal{S}} |u(s) - v(s)|$$

Bellman Expectation Backup is a Contraction

- *Bellman expectation backup operator* (T^{π}) 정의.

$$T^{\pi}(v) = \mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} v$$

- 이 operator는 γ - contraction, i.e. 이것은 value function을 적어도 γ 만큼 가까워지도록 만든다.

$$\begin{aligned} ||T^{\pi}(u) - T^{\pi}(v)||_{\infty} &= ||(\mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} u) - (\mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} v)||_{\infty} \\ &= ||\gamma \mathcal{P}^{\pi}(u - v)||_{\infty} \\ &\leq ||\gamma \mathcal{P}^{\pi}||u - v||_{\infty}||_{\infty} \\ &\leq \gamma ||u - v||_{\infty} \end{aligned}$$

Contraction Mapping Theorem

- Theorem(Contracting Mapping Theorem)
  - 어떤 metric space V 에 대해서 operator $T(v)$하에서 complete (i.e. closed) 이라면,
  - 여기서 T 가 γ -contraction
    - T 는 unique fixed point에 수렴.
    - γ 의 비율로 선형적으로 수렴.

Theorem (Contraction Mapping Theorem)

For any metric space $\mathcal{V}$ that is complete (i.e. closed) under an operator $T(v)$, where T is a γ-contraction,

- *T converges to a unique fixed point*
- *At a linear convergence rate of γ*

Convergence of Iter. Policy Evaluation and Policy Iteration

- The Bellman expectation operator T^{π} has a unique fixed point
- v_{π} is a fixed point of T^{π} (by Bellman expectation equation)
- By contraction mapping theorem
- Iterative policy evaluation converges on v_{π}
- Policy iteration converges on v_*

Bellman Optimality Backup is a Contraction

- Define the *Bellman optimality backup operator* T^*,

$$T^*(v) = \max_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{R}^a + \gamma \mathcal{P}^a v$$

- This operator is a γ-contraction, i.e. it makes value functions closer by at least γ (similar to previous proof)

$$||T^*(u) - T^*(v)||_\infty \leq \gamma ||u - v||_\infty$$

Convergence of Value Iteration

- The Bellman optimality operator T^* has a unique fixed point
- v_* is a fixed point of T^* (by Bellman optimality equation)
- By contraction mapping theorem
- Value iteration converges on v_*

Monte Carlo Method(MC)

Temporal Difference Method(TD)

Planning and Learning with Tabular Methods

On-policy Control with with Approximation

Policy Gradient Method

Actor Critic Method

Reference

[1] UCL Course on RL

[2] Reinforcement Learning: Tutorial(Seoul National University of Sceience and Technology)

[3] Reinforcement Learning : An Introduction, Sutton

[4] jay.tech.blog

[5] 대손의 스마트 웹