Reinforcement learning

Geonhee Lee
gunhee6392@gmail.com

Outline

- Introduction to Reinforcement learning
- Markov Decision Process(MDP)
- Dynamic Programming(DP)
- Monte Carlo Method(MC)
- Temporal Difference Method(TD)
    - SARSA
    - Q-Learning
- Planning and Learning with Tabular Methods
- On-policy Control with with Approximation
- On-policy Prediction with Approximation
- Policy Gradient Method
- Actor Critic Method

Introduction to Reinforcement learn

RL 특성

다른 ML paradigms과의 차이점

- No supervisor, 오직 reward signal.
- Feedback이 즉각적이지 않고 delay 된다.
- Time이 큰 문제가 된다(연속적인, Independent and Identically Distributed(i.i.d, 독립항등분포) data가 아니다).
- Agent의 행동이 agent가 수용하는 연속적인 data에 영향을 준다.

Reward

- **Reward**: scalar feedback signal.
- agent가 step t에서 얼마나 잘 수행하는 지 나타냄.
- agent의 목표는 전체 reward의 합을 최대화하는 것

Sequential Decision Making

- Goal: Total future reward를 최대화하는 action 선택.
- Action들은 long term 결과들을 가질 것.
- Reward는 지연될 것.
- long-term reward를 더 크게 얻기 위해 즉각적인 reward를 희생하는 것이 나을 수도 있음.

History and State

- history: observations, actions, rewards의 연속.
- State: 다음에 어떤 일이 일어날 것인지 결정하기 위해 사용된 정보(다음 수식을 위한 정의로 보임)
- 공식으로는, state는 history의 함수이다.

$$S_t = f(H_t)$$

Information State

- Information state(a.k.a. Markov state)는 history로부터 모든 유용한 정보를 포함한다.
- 정보이론 관점에서의 information state 혹은 Markov state라는 상태가 있다. 데어터 관점에서 history의 유용한 정보들을 포함하고 있는 state를 의미한다.

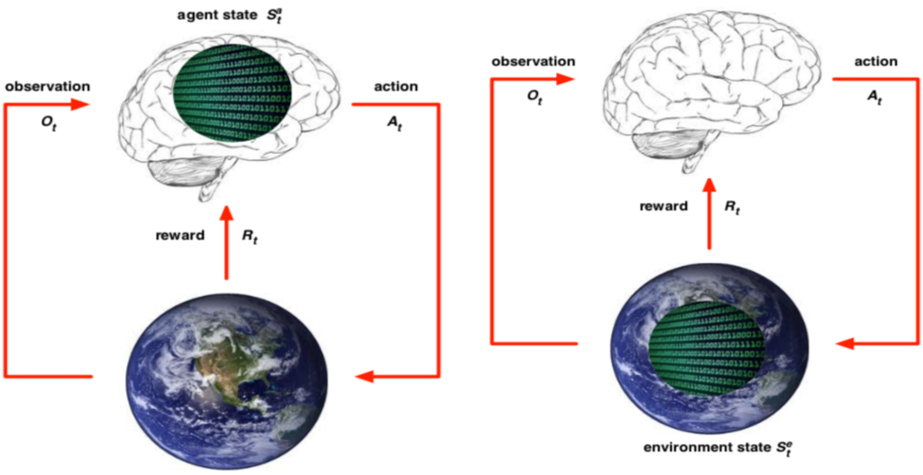
> Definition
>
> > state S_t는 Markov 이다 if and only if $P[S_{t+1}|S_t] = P[S_{t+1}|S_1, \ldots, S_t]$

- 미래는 현재의 과거와 독립적이다.
- State가 주어지면, history는 버려질 수 있다.

Fully Observable Environments

- **Full observability**: agent는 직접적으로 enviroment state를 관찰한다.

$$O_t = S_t^a = S_t^e$$



- Agent state = environment state = information state.
- 형식적으로, 이것은 Markov decision precess(MDP).

Partially Observable Environments

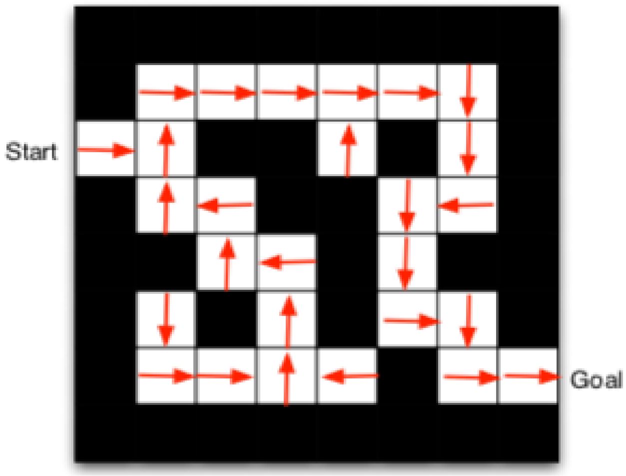
- Partial observability: agent는 간접적으로 environment를 관찰.
  - (ex)robot이 카메라를 가지고 절대적인 위치를 알지못하는 것.
  - (ex)포커를 하는 agent는 오직 오픈한 card들만 볼 수 있는 것.
- 여기서는, agent state $\neq$ environment state.
- 형식적으로, 이것을 partially observable Markob decision process(POMDP).
- Agent는 자체 state representation S_t^a을 구성해야만 한다.
  - 다음과 같은 방법으로 만들 수 있다(1. 전체 history 사용, 2. 확률을 사용, 3. RNN 방식 사용).
    - Complete history: $S_t^a = H_t$.
    - **Beliefs** of environment state: $S_t^a = \left(\mathbb{P}\left[S_t^e = s^1\right], \ldots, \mathbb{P}\left[S_t^e = s^n\right]\right)$.
    - Recurrent neural network: $S_t^a = \sigma(S_{t-1}^a W_s + O_t W_o)$.

RL Agent의 주요 성분

- **Policy**: agent의 행동 함수.
- **Value function**: 각 state 및/혹은 action이 얼마나 좋은지.
- **Model**: agent's representation of the environment.

Policy

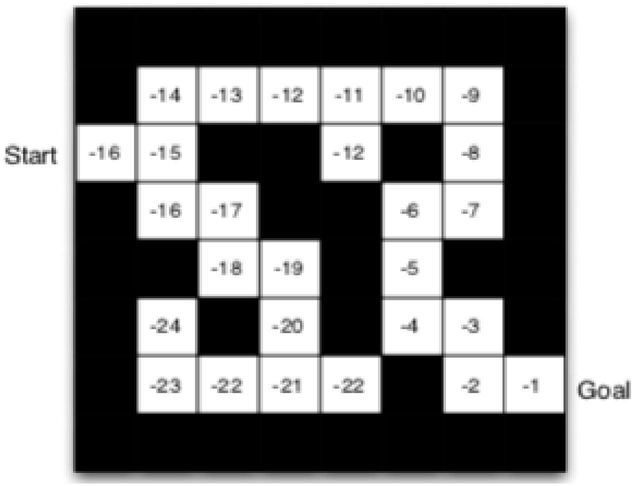
- **Policy**: Agent의 행동.
- State에서 action으로 매핑.
  - Deterministic policy: a = $\pi(s)$.
  - Stochastic policy: $\pi(a|s)$ = $\mathbb{P}[A_t = a | S_t = s]$.



Value function

- **Value functionn**: Future reward 예측 값.
- State의 좋은것/나쁜것인지 판단하기 위해 사용.
- Value function을 이용하여 action 선택

$$V_\pi = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + ... | S_t = s]$$

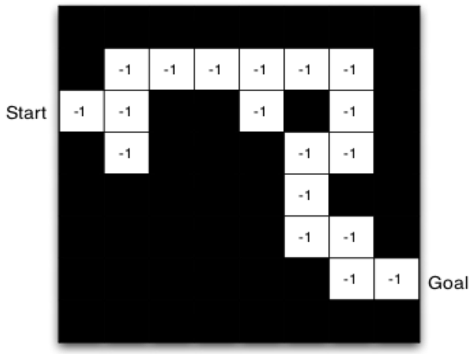


Model

- **Model**: environment에서 다음에 행해질게 무엇인지 예측.
- P: 다음 state를 예측.
- R: 다음(즉각적인) reward를 예측.

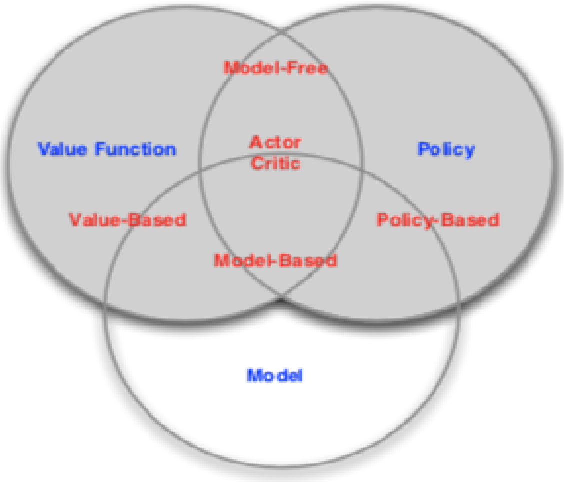
$$P_{ss'}^a = \mathbb{P}\left[S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a\right]$$

$$R_s^a = \mathbb{E}\left[R_{t+1} | S_t = s, A_t = a\right]$$



- Agent는 env의 내부 모델을 가지고 있다고 가정.
    - Dynamics: action들이 state를 변화시키는 방법.
    - Rewards: 각 state으로부터 얼마의 reward를 받는 지.
    - Model은 불완전할 것.
- Grid layout은 transition model ($P_{ss'}^a$)를 나타낸다.
- 숫자들은 (모든 행동에 동일한) 각 state s로부터 즉각적인 reward (R_s^a)를 나타낸다.

RL Agent 분류



Learnign and Planning

Sequential decision making에서 두 가지 근본적인 문제

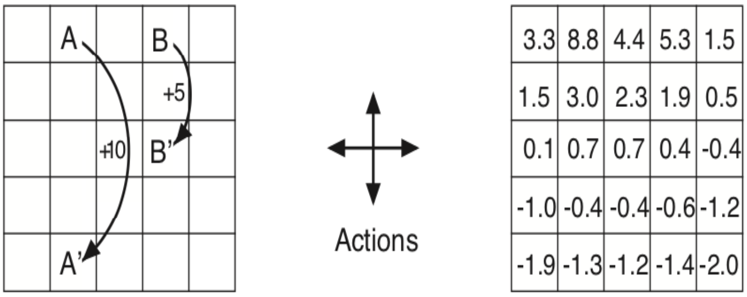
- Reinforcement Learning:
  - Env는 초기에 알려져있지 않음.
  - Agent는 Env와 상호작용.
  - Agent는 policy를 향상시킴.
- Planning:
  - Env 모델은 알려져 있음.
  - Agent는 (어떠한 외부 상호작용 없이) 모델과 계산을 수행.
  - Agent는 policy를 향상시킴.
  - a.k.a. deliberation, reasoning, introspection, pondering, thought, search.

Exploration and Exploitation

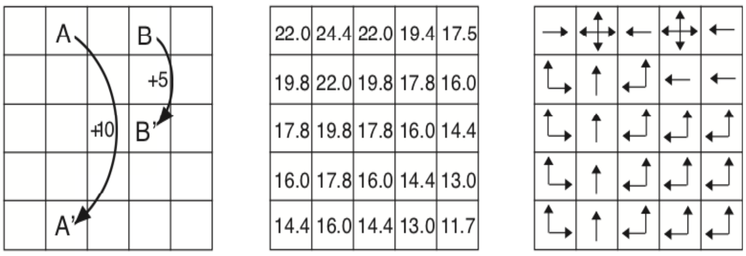
- RL은 trial-and-error learning과 유사.
- Agent는 good policy를 발견해야만 한다.
  - Env의 경험으로부터
  - 도중에 많은 reward를 잃지 않도록
- **Exploration**은 Env에 대한 더 많은 정보를 찾는다.
- **Exploitation**은 reward를 최대화하기 위해 알려진 정보를 exploit.
- Exploit만큼 explore도 일반적으로 중요하다.

Prediction and Control

- **Prediction**: future를 평가.
    - 주어진 policy를 이용하여 계산 및 평가.
        - (아래그림)Uniform random policy의 value function은 무엇인가?



- **Control**: future를 최적화.
    - best policy를 찾는 것.
        - (아래그림)모든 가능한 정책들에서 optimal value function은 무엇인가?
        - (아래그림)Optimal policy는 무엇인가?



a) gridworld b) v_* c) π_*

Markov Decision Process(MDP)

Outline

- Markov Processes
- Markob Reward Processes
- Markov Decision Processes
- Extensions to MDPs

Introduction to MDPs

- Markov decision processes(MDP)는 RL에서 Env를 형식적으로 기술.
    - 여기서 Env는 fully observable.
    - i.e., 현재 state는 완전하게 process의 특성을 나타냄.
- 대부분 모든 RL 문제들은 MDPs 로 공식화될 수 있다.
    - Optimal control은 주로 continous MDPs를 다룬다.
    - Partially Observable problem은 MDPs로 변환을 할 수 있다.
    - Bandits은 하나의 state를 가진 MDPs이다.

Markov Property

"미래는 현재에서의 과거와 독립적이다."

> Definition
>
> > state S_t는 *Markov* if and only if
> >
> > $$\mathbb{P}[S_{t+1}|S_t] = \mathbb{P}[S_{t+1}|S_1, \dots, S_t]$$

- State는 history로부터 모든 관련정보를 수집한다.
- State가 알려졌다면, history는 버릴 수 있다.
    - i.e. State는 미래의 sufficient statistic.

State Transition Matrix

Markov state s 및 successor state s'에 대하여, **state transition probability** 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' | S_t = s]$$

State transition matrix P는 모든 state s에서 모든 successor s'로의 transition probabilities를 다음과 같이 정의한다.

to

$$P = \text{from} \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서 각 행렬의 행의 합은 1이다.

Markov Process

Markov process 는 memoryless random process, i.e. Markov property를 가진 random states $S_1, S_2, ...$ 의 sequence.

Definition

A *Markov Process* (or *Markov Chain*) is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{P} \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a (finite) set of states
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s]$

Markov Reward Process

Markov reward process 는 value를 가진 Markov chain(Markov Process)

Definition

A *Markov Reward Process* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s]$
- γ is a discount factor, $\gamma \in [0, 1]$

Return

Definition

The *return* G_t is the total discounted reward from time-step t.

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

- Discount $\gamma \in [0, 1]$은 미래 보상들의 현재 값.
- k+1 time-step 이후에 받게되는 reward의 값은 $\gamma^k R$.
- 지연되는 reward는 즉각적인 reward를 중요시한다.
  - γ가 0에 가까우면, "myopic(근시안적)" 평가를 도출.
  - γ가 1에 가까우면, "far-sighted(미래를 내다보는)" 평가를 도출.

Discount

대부분 **Markov reward** 및 **decision process** 는 discount된다. 왜?

- 수학적으로 discount reward에 대해 편리하다.
- Cyclic Markov process에서 infinite return을 피한다.
- 미래에 대한 uncertainty는 fully representation 하지 않아도 된다.
- 동물/인간의 행동은 즉각적인 보상에 대해 선호하는 것을 볼 수 있다.

Value Function

Value function $v(s)$는 state s의 long-term 값을 제공한다.

Definition

The *state value function* $v(s)$ of an MRP is the expected return starting from state s

$$v(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s]$$

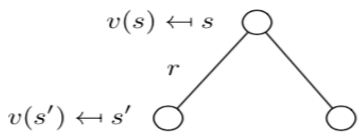
Bellman Equation for MRPs

Value function은 두 개의 part로 분리할 수 있다.

- 즉각적인 reward R_{t+1}
- Successor state $\gamma v_{(S_{t+1})}$의 discounted value.

$$\begin{aligned} v(s) &= \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + ... \mid S_t = s\right] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma (R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + ...) \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s] \end{aligned}$$

$$v(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s]$$



$$v(s) = \mathcal{R}_s + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'} v(s')$$

Solving the Bellman Equation

- Bellma Equation은 linear equation.
- 이 식은 다음과 같이 직접 풀 수 있다:

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P} v \\ (I - \gamma \mathcal{P})\, v &= \mathcal{R} \\ v &= (I - \gamma \mathcal{P})^{-1} \mathcal{R} \end{aligned}$$

- Computational complexity는 n state에 대해 O(n^3).
- **Small MRPs** 에 대해서만 직접 풀 수 있다.
- **Large MRPs** 에 대해 여러 iterative method가 있다.
  - Dynamic programming(DP)

- Monte-Carlo evaluation(MC)
- Temporal-Difference learning(TD)

Markov Decision Process

Markov decision process(MDP) 는 **decision** 을 가진 Markob reward process이다. 모든 state들이 Markov인 Environment이다.

Definition

A *Markov Decision Process* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{A}$ is a finite set of actions
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}^a_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}^a_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a]$
- γ is a discount factor $\gamma \in [0, 1]$.

Policies

Definition

A *policy* π is a distribution over actions given states,

$$\pi(a|s) = \mathbb{P}[A_t = a \mid S_t = s]$$

- Policy는 agent의 behavior를 완벽히 정의.
- MDP policy는 현재 state에 의존(not the history).
- i.e. Policy는 stationary(time-independent). $A_t \sim \pi(\cdot|S_t), \forall t > 0$
- MDP $M =< S, A, P, R, \gamma >$ 및 policy π 주어지고
  - State sequence $(S_1, S_2, \ldots)$는 Markov process $< S, P^\pi >$
  - State 및 reward sequence $(S_1, R_2, S_2, \ldots)$는 Markov reward process $< S, P^\pi R^\pi, \gamma >$
  - 여기서,

$$P^\pi_{s,s'} = \sum_{a \in A} \pi(a|s) P^a_{ss'}$$

$$R^\pi_s = \sum_{a \in A} \pi(a|s) R^a_s$$

Value Function

Definition

The *state-value function* $v_\pi(s)$ of an MDP is the expected return starting from state s, and then following policy π

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi \left[G_t \mid S_t = s \right]$$

Definition

The *action-value function* $q_\pi(s, a)$ is the expected return starting from state s, taking action a, and then following policy π

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi \left[G_t \mid S_t = s, A_t = a \right]$$

Bellman Expectation Equation

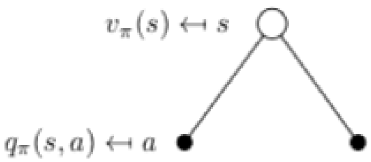
State-value(V) function은 즉각적인 reward와 successor state의 discounted value의 합으로 다시 분해할 수 있다.

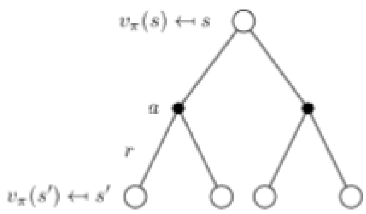
$v_{\pi} (s) = \mathbb{E}*{\pi} [R*{t+1} + \gamma v_{\pi} (S_{t+1})| S_t = s]$

Action-value(Q) function 은 유사하게 분해할 수 있다.

$q_{\pi} (s, a) = \mathbb{E}*{\pi} [R*{t+1} + \gamma q_{\pi} (S_{t+1} , A_{t+1})| S_t = s, A_t = a]$

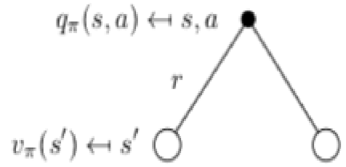
Bellman Expectation Equation for V^π

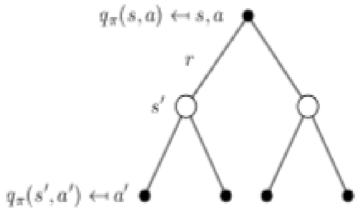




$$v_\pi(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) q_\pi(s, a) \qquad v_\pi(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s') \right)$$

Bellman Expectation Equation for Q^π





$$q_\pi(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_\pi(s') \qquad q_\pi(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') q_\pi(s',a')$$

Optimal Value Function

> **Definition**
>
> The *optimal state-value function* $v_*(s)$ is the maximum value function over all policies
>
> $$v_*(s) = \max_\pi v_\pi(s)$$
>
> The *optimal action-value function* $q_*(s, a)$ is the maximum action-value function over all policies
>
> $$q_*(s, a) = \max_\pi q_\pi(s, a)$$

- Optimal value function은 MDP에서 best possible performance를 명시한다.
- MDP는 optimal value fucntion을 안다면 풀 수 있다.

Optimal Policy

Policy의 부분 순서를 정의

$$\pi \geq \pi' \text{ if } v_\pi(s) \geq v_{\pi'}(s), \forall s$$

> **Theorem**
>
> *For any Markov Decision Process*
>
> - *There exists an optimal policy* π_* *that is better than or equal to all other policies,* $\pi_* \geq \pi, \forall \pi$
> - *All optimal policies achieve the optimal value function,* $v_{\pi_*}(s) = v_*(s)$
> - *All optimal policies achieve the optimal action-value function,* $q_{\pi_*}(s, a) = q_*(s, a)$

Finding an Optimal policy

Optimal policy는 $q_*(s,a)$를 최대화하여 찾을 수 있다.

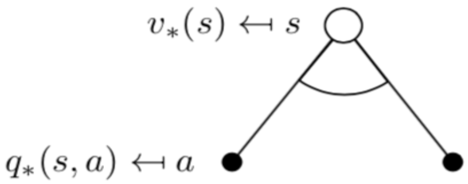
$$\pi_*(a|s) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = \underset{a \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmax}}\ q_*(s, a) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

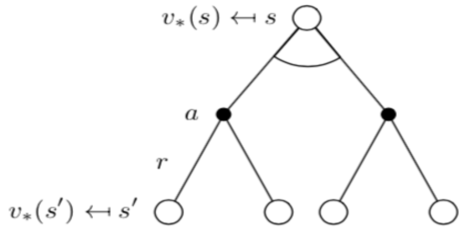
- 어떤 MDP에 대해서도 항상 deterministic optimal policy.
- 만약 $q_*(s,a)$를 알고 있다면, 즉시 optimal policy를 가질 수 있다.

Bellman Optimality Equation

Bellman Optimality Equation for V^*

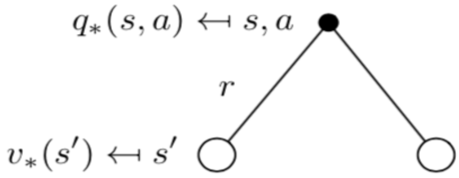
Optimal value function은 재귀적으로 bellman optimality equation과 관련 있다.

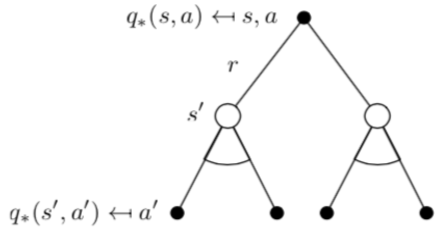




$$v_*(s) = \max_a q_*(s,a) \qquad v_*(s) = \max_a \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s')$$

Bellman Optimality Equation for Q^*





$$q_*(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s') \qquad q_*(s,a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \max_{a'} q_*(s',a')$$

Solving the Bellman Optimality Equation

- Bellman Optimality Equation은 non-linear.
- (일반적으로) closed form solution은 없다.
- 많은 iterative solution 방법:
  - Value Iteration.
  - Policy Iteration.
  - Q-learning.
  - Sarse.

Extensions to MDPs

- Infinite and continous MSPs
- Parially observable MDPs
- Undiscounted, average reward MDPs

Infinite MDPs

다음 extension은 모두 이용가능하다:

- Countably infinite state and/or action spaces
  - Straightforward(명확, 간단한)

- Continuous state and/or action spaces
  - Closed form for linear quadratic model(LQR)
- Continous time
  - Requires partial differential equations
  - Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation
  - Limiting case of Bellman equation as time-step $\rightarrow 0$

Partially Observable Markov Decision Process(POMDPs)

POMDPs: Hidden state들을 가진 MDP. action을 가진 hidden Markov model.

Definition

A *POMDP* is a tuple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{Z}, \gamma \rangle$

- $\mathcal{S}$ is a finite set of states
- $\mathcal{A}$ is a finite set of actions
- $\mathcal{O}$ is a finite set of observations
- $\mathcal{P}$ is a state transition probability matrix, $\mathcal{P}^a_{ss'} = \mathbb{P}[S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{R}$ is a reward function, $\mathcal{R}^a_s = \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a]$
- $\mathcal{Z}$ is an observation function, $\mathcal{Z}^a_{s'o} = \mathbb{P}[O_{t+1} = o \mid S_{t+1} = s', A_t = a]$
- γ is a discount factor $\gamma \in [0, 1]$.

Belief States

Definition

A *history* H_t is a sequence of actions, observations and rewards,

$$H_t = A_0, O_1, R_1, ..., A_{t-1}, O_t, R_t$$

Definition

A *belief state* $b(h)$ is a probability distribution over states, conditioned on the history h

$$b(h) = (\mathbb{P}\left[S_t = s^1 \mid H_t = h\right], ..., \mathbb{P}[S_t = s^n \mid H_t = h])$$

Dynamic Programming(DP)

Monte Carlo Method(MC)

Temporal Difference Method(TD)

Planning and Learning with Tabular Methods

On-policy Control with with Approximation

Policy Gradient Method

Actor Critic Method

Reference

[1] UCL Course on RL

[2] Reinforcement Learning: Tutorial(Seoul National University of Sceience and Technology)

[3] Reinforcement Learning : An Introduction, Sutton

[4] jay.tech.blog

[5] 대손의 스마트 웹