Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Бабаев Александр Вадимович

Управление по результатам наблюдений, поступающим с запаздыванием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1 Введение

1.1 Общие сведения

Определение 1. *Уравнение вида:*

$$a_0u'(t) + a_1u'(t-\omega) + b_0u(t) + b_1(t-\omega) = f(t), \text{ где } \omega > 0,$$

называется уравнением запаздывающего типа, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 = 0$. Оно называется уравнением нейтрального типа, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$. Оно называется уравнением опережающего типа, если $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0.$, $b_0 \neq 0$.

В приложениях, когда переменная t обычно представляет время, уравнение запаздывающего типа может описывать поведение системы, в которой скорость изменения исследуемой величины зависит от ее прошлых и настоящих значений.

Сформулируем теорему существования и единственности решений для уравнения запаздывающего типа:

$$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-\omega) = f(t), \tag{1}$$

удовлетворяющих начальному условию вида $u(t) = g(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0+\omega$. Заметим, что перенос $t - t_0 = t'$ превращает уравнение (1) в уравнение того же вида, но с начальным условием на отрезке $0 \leq t' \leq \omega$. Мы можем, следовательно, без ограничения общности предположить, что $t_0 = 0$ и задать начальное условие:

$$u(t) = g(t), \ 0 \leq t \leq \omega. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть f принадлежит классу C^1 на $[0,\infty)$, а g принадлежит классу C^0 на $[0,\omega]$. Тогда существует одна и только одна функция, определенная при $t \geq 0$, непрерывная при $t \geq 0$, удовлетворяющая начальному условию (2) и уравнению (1) при $t > \omega$. Далее, эта функция $u(t)$ принадлежит классу C^1 на (ω,∞) и классу C^2 на $(2\omega,\infty)$. Если g принадлежит классу C^1 на $[0,\omega]$, то u' непрерывна в точке ω тогда и только тогда, когда:*

$$a_0g'(\omega-0) + b_0g(\omega) + b_1g(0) = f(\omega). \tag{3}$$

Если g принадлежит классу C^2 на $[0,\omega]$, то и u'' непрерывна в точке 2ω тогда и только тогда, когда выполнено условие (3) или когда $b_1 = 0$.

Функция u, определенная в этой теореме, называется непрерывным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (2).

Доказательство. См. [1]. □

1.2 Формула Коши для Линейного дифференциального уравнения с запаздыванием

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h), \tag{4}$$

где $t \in [t_0, t_1]$; $h > 0$; $A(t), B(t) \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^{n\times n})$.
Формула Коши:

$$x(\cdot) = x^*(\cdot) + S(\cdot, t)x(0) + \int_{t-h}^{t} S(\cdot, \tau + h)B(\tau + h)x(\tau - t)d\tau, \tag{5}$$

где $x^* \in L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, при $h > 0$.

$$x^*(\tau) = \begin{cases} x(\tau + t_1 - t), & \tau \in [-h, t - t_1], \\ 0, & \tau \in [t - t_1, 0]. \end{cases}$$

$S(\cdot, \cdot)$ — решение сопряженной системы с опережением:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t,\tau)}{\partial \tau} = -S(t, \tau)A(\tau) - S(t, \tau + h)B(\tau + h), \\ S(\tau, \tau) = I, \\ S(t, \tau) = 0 \text{ при } t < \tau. \end{cases} \tag{6}$$

2 Постановка задачи

Основной задачей, этой работы, является нахождение и демонстрация зависимости управления $u(t, x(t - h))$ от запаздывания по наблюдениям в некоторых классах задач. Будут рассмотрены задачи:

- Линейно-квадратичная задача
- Линейно-выпуклая задача

Начнем с постановки и определения параметров для каждой из задач.

2.1 Задачи с линейными квадратичными функционалами для линейных управляемых систем

Рассмотрим линейную динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ t_0 \le t \le t_1, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

с интегральным квадратичным функционалом:

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle x, M(t)x\rangle + \langle u, N(t)u\rangle)dt + \langle x(t_1), Tx(t_1)\rangle, \tag{8}$$

где $M(t) = M^T(t) \ge 0, N(t) = N^T(t) > 0, T > 0$, для любого $t \in [t_0, t_1]$, и функцию цены:

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)}\{J(x, t, u(\cdot))\}. \tag{9}$$

2.2 Понятие о линейно-выпуклых задачах

Рассмотрим линейную управляемую систему с выпуклыми ограничениями на управление

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \ t \in [t_0, t_1], \tag{10}$$

где:

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, u(t) \in \mathbb{R}^m B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$
$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \mathcal{P}(t) \in conv\mathbb{R}^m.$$

3 Подход к решению

3.1 Линейно-выпуклая задача

При исследовании данной системы будем использовать понятие **матрицы Коши.**

Определение 2. ***Матрицей Коши*** *системы (10) назовём матрицу $X(t, \tau)$, удовлетворяющую системе:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t,\tau) = A(t)X(t,\tau), \ t, \tau \in [t_0, t_1], \\ X(\tau,\tau) = E. \end{cases} \tag{11}$$

Определение 3. ***Матрицей Коши*** *системы сопряженной к (10) назовём матрицу $X(t, \tau)$, удовлетворяющую системе:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} S(t,\tau) = -S(t,\tau)A(t) \ t, \tau \in [t_0, t_1], \\ S(t,t) = E. \end{cases}$$

Для исследуемой системы удобно сделать замену:

$$z = X(t_1, t)x. \tag{12}$$

Тогда получим:

$$\dot{z} = -X(t_1,t)A(t)x(t) + X(t_1,t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)] = X(t_1,t)B(t)u(t).$$

Таким образом, исследуемая система примет вид:

$$\dot{z} = X(t_1,t)B(t)u(t)x(t) = X(t, t_1)z(t) \tag{13}$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать $A \equiv 0$. Далее займемся решением этой задачи.

Определение 4. ***Множеством достижимости*** *системы (10) из множества X^0 назовём множество:*

$$\mathcal{X}(t, t_0, X^0) = \{x | \exists u(s) \in \mathcal{P}(s), s \in [t_0, t], x^0 \in X^0 : x(t, t_0, x^0) = x\}. \tag{14}$$

Определение 5. ***Множеством разрешимости*** *системы (10) во множество M назовём множество:*

$$\mathcal{W}(t, t_1, M) = \{x | \exists u(s) \in \mathcal{P}(s), s \in [t, t_1], x^1 \in M : x(t_1, t, x^0) = x^1\}. \tag{15}$$

Множества X^0 и M будем считать непустыми выпуклыми компактами. Задача состоит в том, чтобы по этим множествам определить, соответственно множества достижимости и разрешимости исходной системы.

Как упоминалось ранее, будем считать, что $A(t) \equiv 0$, поскольку при $A(t) \neq 0$ система (10) приводится к виду (13) заменой переменных.

Определение 6. *Расстоянием от точки x до множества M назовём:*

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y)$$

где $d(x, y)$ — метрика.

Теорема 2. *(о минимаксе) Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $M \subset X, M$ — замкнутое выпуклое, $N \subset Y, N$ — выпуклое, $f(x, y)$ — выпукла по x вогнута по y,*

$$dom f(\cdot, y) \cap M \neq \emptyset, \forall y \in N,$$

и

$$g(x^*) = \inf_{y \in N} \sup_{x \in M} (\langle x, x^* \rangle - f(x, y))$$

конечна и полунепрерывна при $x^* = 0$, то:

$$\inf_{y \in N} \sup_{x \in M} f(x, y) = \sup_{x \in M} \inf_{y \in N} f(x, y).$$

Доказательство. См. [2]. □

Для нахождения множеств достижимости и разрешимости будем использовать следующие **функции цены:**

$$V^1(t, x) = \min_{u(\cdot)} \{d^2(x^0, X^0) | x(t, t_0, x^0) = x\}, \tag{16}$$

$$V^2(t, x) = \min_{u(\cdot)} \{d^2(x^1, M) | x(t_1, t, x) = x^1\}. \tag{17}$$

Построим вспомогательное соотношение:

$$\varphi(x) = d^2(x, D) = \min_{y \in D} ||x - y||^2.$$

Тогда

$$\varphi^*(x^*) = \sup_x (\langle x, x^* \rangle) - \min_{y \in D} ||x - y||^2 = \sup_x \sup_{y \in D} (\langle x, x^* \rangle - ||x - y||^2) =$$

$$\sup_{y \in D} \sup_x (\langle x, x^* \rangle - ||x - y||^2) = \sup_{y \in D} (\langle x^*, y \rangle + \frac{1}{4} \langle x^*, x^* \rangle) = \rho(x^* | D) + \frac{(x^*)^2}{4}.$$

Используя полученный результат, можно записать:

$$
\begin{aligned}
V^1(t,x) &= \inf_{u(\cdot)} \sup_{l} \{\langle l, x^0\rangle - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \inf_{u(\cdot)} \sup_{l} \{\langle l, x\rangle - \langle l, \int_{t_0}^{t} B(\tau)u(\tau)d\tau\rangle - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \inf_{u(\cdot)} \sup_{l} \{\langle l, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \langle l, B(\tau)u(\tau)\rangle d\tau - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \{\text{Применяя теорему о минимаксе, условия которой выполнены}\} = \\
&= \sup_{l} \inf_{u(\cdot)} \{\langle l, x\rangle - \langle l, \int_{t_0}^{t} B(\tau)u(\tau)d\tau\rangle - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \sup_{l} \{\langle l, x\rangle - \sup_{u(\cdot)} \langle l, \int_{t_0}^{t} B(\tau)u(\tau)d\tau\rangle - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \sup_{l} \{\langle l, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \sup_{u(\tau)\in\mathcal{P}(\tau)} \langle l, B(\tau)u(\tau)d\tau\rangle - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\} = \\
&= \sup_{l} \{\langle l, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \rho(B'(\tau)l|\mathcal{P}(\tau))d\tau - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4}\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем конечномерную задачу оптимизации вместо оптимизации по пространству функций.

Теперь найдем оптимальное управление из условия супремума внутри интеграла.

$$\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{P}} \langle l, B(\tau)u(\tau)\rangle = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{P}} \langle B'l, u(\tau)\rangle = \rho(B'l|\mathcal{P})$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P), P = P^T > 0$$

Опорная функция эллипсоида:

$$\rho(B'l|\mathcal{E}(p,P)) = \langle B'l, p\rangle + \langle B'l, PB'l\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Следовательно, из условия супремума получим:

$$u(t,x) = p + \frac{PB'l}{\langle B'l, PB'l\rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

$$u^*(t,x) = \begin{cases} p + \frac{PB'l}{\langle B'l, PB'l\rangle^{\frac{1}{2}}}, & B'l \neq 0 \\ \mathcal{P}(t), & B'l = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Осталось определить оптимальный l который будет максимизировать исходную функцию цены. Для нахождения такого l аналитически, найдем градиент по l.

$$
\begin{aligned}
F &= \langle l, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \sup_{u(\tau)\in\mathcal{P}} \langle l, Bu\rangle d\tau - \rho(l|X^0) - \frac{l^2}{4} = \\
&= \langle l, x\rangle - \int_{t_0}^{t} \langle l, BPB'l\rangle^{\frac{1}{2}} d\tau - \sup_{x^0\in X^0} \langle l, x^0\rangle - \frac{1}{4}\langle l, l\rangle.
\end{aligned}
$$

.

$$dF = \langle x, dl\rangle - \int_{t_0}^{t} \langle 2BPB'l, dl\rangle^{\frac{1}{2}} d\tau - \sup_{x^0\in X^0}\langle x^0, dl\rangle - \frac{1}{2}\langle l, dl\rangle =$$
$$= \langle x - (\int_{t_0}^{t} 2BPB' d\tau - \frac{1}{2})l - \widetilde{x}, dl\rangle$$

Где $\widetilde{x} = \sup\limits_{x^0\in X^0}\langle l, x^0\rangle$. Получим:

$$l = (\int_{t_0}^{t} 2BPB' d\tau - \frac{1}{2})^{-1}(\widetilde{x} - x) \tag{19}$$

Положим, что начальное множество — точка. Тогда $\widetilde{x} = x_0$. Подставим полученный l в управление:

$$u(t,x) = p + \frac{PB'(\int_{t_0}^{t} 2BPB' d\tau - \frac{1}{2})^{-1}(x_0 - x)}{\langle B'(\int_{t_0}^{t} 2BPB' d\tau - \frac{1}{2})^{-1}(x_0 - x), PB'(\int_{t_0}^{t} 2BPB' d\tau - \frac{1}{2})^{-1}(x_0 - x)\rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Далее необходимо найти траекторию, согласно найденному управлению. Останется только добавить эти наблюдения в формулу управления, только с запаздыванием, и получить искомую зависимость.

3.2 Линейно квадратичная задача

Для решения данной задачи составим уравнение Беллмана для функции цены и определим вид оптимального управления для дальнейшего исследования.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \min\limits_{u}\{\langle\frac{\partial V}{\partial x}, A(t)x + B(t)u\rangle + \langle x, M(t)x\rangle + \langle u, N(t)u\rangle\} = 0, \\ V(t_1, x) = \langle x, Tx\rangle. \end{cases} \tag{20}$$

Из условия минимума, получаем:

$$u(t,x) = -\frac{1}{2}N^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{21}$$

Подставим полученное через минимизацию управление в уравнение Беллмана (20):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \langle\frac{\partial V}{\partial x}, Ax\rangle - \frac{1}{4}\langle\frac{\partial V}{\partial x}, BN^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x}\rangle + \langle x, Mx\rangle = 0 \\ V(t_1, x) = \langle x, Tx\rangle. \end{cases} \tag{22}$$

Будем искать функцию V в виде квадратичной формы: $V(t,x) = \langle x, P(t)x\rangle$, где $P(t) = P^T(t) > 0$. Следовательно получим:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \langle x, \dot{P}(t)x\rangle, \tag{23}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2P(t)x. \tag{24}$$

Подставим эти выражения в (22):

$$\langle x, \dot{P}(t)x\rangle + 2\langle P(t)x, A(t)x\rangle - \langle P(t)x, BN^{-1}B^T P(t)x\rangle + \langle x, Mx\rangle = 0. \tag{25}$$

Используем тождество $2\langle P(t)x, A(t)x\rangle = \langle x, P(t)A(t)x\rangle + \langle A^T(t)P(t)x, x\rangle$. Получим матричное дифференциальное уравнение, которое называется уравнением **Рикатти**, и матричное начальное условие:

$$\begin{cases} \dot{P} + PA + A^T P - P^T BN^{-1}B^T P + M = 0, \\ P(t_1) = T. \end{cases} \tag{26}$$

В результате получим вид для управления:

$$u(t, x) = -N^{-1}B^T Px. \tag{27}$$

Теперь мы знаем вид оптимального управления для исходной задачи. Подставим (27) в (7):

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - N^{-1}B^T P)x, \ t_0 \le t \le t_1, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{28}$$

Полученная система называется **задачей Коши**, решение которой представимо в виде:

$$x(t) = X(t, \tau)x(t_0),$$

где $X(t, \tau)$ — это **матрица Коши** которая численно вычисляется через систему (11).
Теперь, предположим, что управление будет зависеть от наблюдения, которое поступило с запаздыванием. Получим формулу управления, которую будем исследовать в зависимости от значения параметра запаздывания $h \in \mathbb{R}$:

$$u(t, x(t-h)) = -N^{-1}B^T P \cdot \begin{cases} X(t-h, t)x(t-h), & t > t_0 + h, \\ X(t, t_0)x(t_0), & t < t_0 + h. \end{cases} \tag{29}$$

4 Результаты работы программы

4.1 ЛКЗ с различными параметрами запаздывания

Пример системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ t_0 \le t \le t_1, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

$$J(t_0, x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle x, M(t)x\rangle + \langle u, N(t)u\rangle)dt + \langle x(t_1), Tx(t_1)\rangle,$$

где $t_0 = 0, t_1 = 6, x_0 = (0.02, -0.01)^T, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M(t) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix},$ $N(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T(t) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}.$

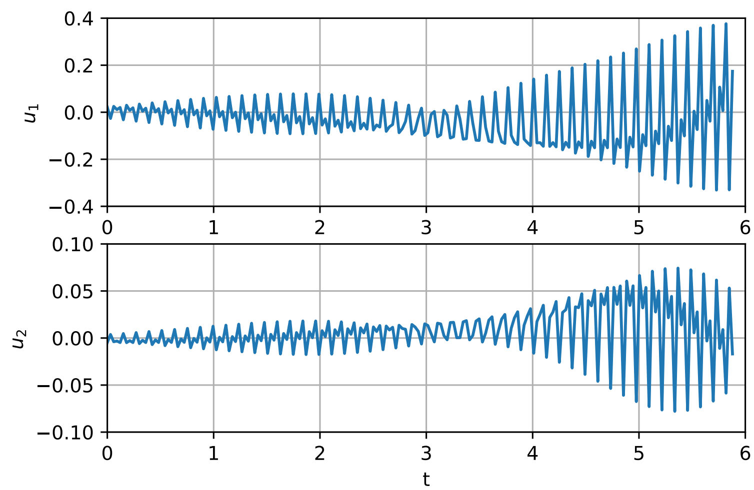

Рис. 1: $u(t, x(t-h))$, при $h = 0$.

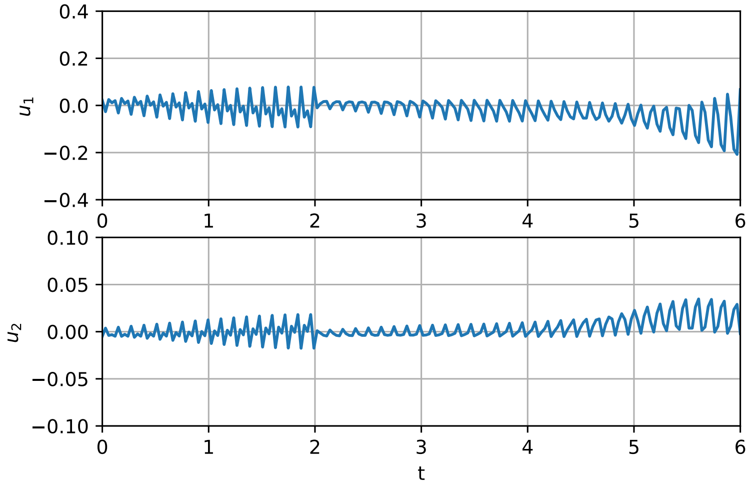

Рис. 2: $u(t, x(t-h))$, при $h = 2$.

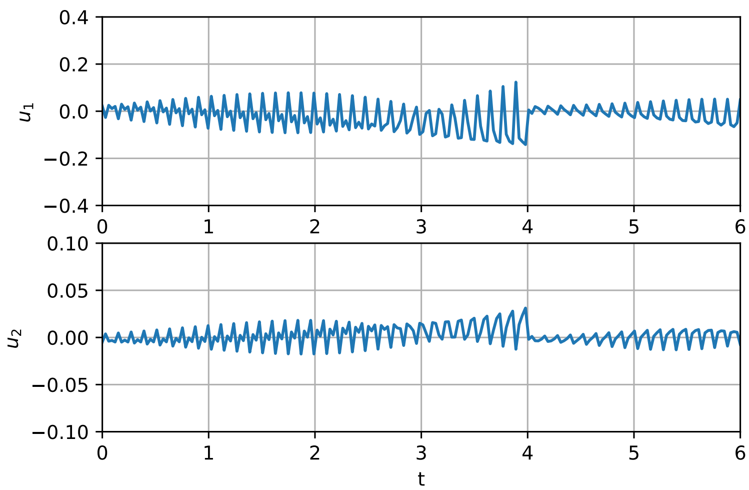

Рис. 3: $u(t, x(t-h))$, при $h = 4$.

5 Заключение

В данной работе показаны общие сведения об дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом, формула Коши для линейного дифференциального уравнения с запаздыванием. Так же была установлена зависимость управления от наблюдений, для его дальнейшего исследования при наблюдениях поступающих с запаздыванием. В частности были разобраны задачи: линейно-квадратичная задача, линейно-выпуклая задача.

Список литературы

[1] Беллман Р, Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[2] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

[3] Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[4] Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.

[5] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.