Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы и модели биологии»

Студент 315 группы
А. В. Бабаев

Научный руководитель
Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Задана динамическая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax^2}{1+x} - \frac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}, \end{cases} \tag{1}$$

где $a, b, c, d, A > 0$. Система рассматривается в $\mathbb{R}^2_+$. Необходимо:

1) Дать биологическую интерпретацию характеристик системы(хищник-жертва, характеристика трофической функции, очистка воды).

2) Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.

3) Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.

4) Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.

5) Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла(устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).

6) Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпретация

Система (1) является системой типа «хищник-жертва», в которой x — это численность жертв, а y — численность хищников. Основные предположения, положенные в основу данной системы характеризуются следующими гипотезами: в отсутствии хищников жертвы размножаются со скоростью a ($\dot{x} = \frac{ax^2}{1+x}$); хищники в отсутствие жертв вымирают ($\dot{y} = -cy$); слагаемые, пропорциональные члену xy, рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв заключается в уменьшении относительной скорости прироста численности жертв на величину, пропорциональную численности хищников); $\frac{d}{b}$ — коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в собственную биомассу.

3 Введение безразмерных переменных

Обозначим

$$x = Bu(\tau), y = Cv(\tau), t = T\tau, \quad B, C, T - \text{константы} \tag{2}$$

замечая, что $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d}{d\tau}$. Тогда

$$\begin{cases} B\frac{1}{T}\frac{du}{d\tau} = \frac{aB^2u^2}{1+Au} - \frac{bBuCv}{1+ABu} \\ C\frac{1}{T}\frac{dv}{d\tau} = -cCv + \frac{dBuCv}{1+ABu} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{aBu^2T}{1+Au} - \frac{buCvT}{1+ABu} \\ \frac{dv}{d\tau} = -cvT + \frac{dBuvT}{1+ABu} \end{cases}$$

Положим, что $B = 1, C = \frac{1}{bT}, T = \frac{1}{a}$:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{u^2}{1+Au} - \frac{uv}{1+Au} \\ \frac{dv}{d\tau} = -\frac{c}{a}v + \frac{duv}{a(1+Au)} \end{cases}$$

Сделаем замену: $-\frac{c}{a} = k, \frac{d}{a} = h$. Получим:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{u^2}{1+Au} - \frac{uv}{1+Au} \\ \frac{dv}{d\tau} = kv + \frac{huv}{1+Au} \end{cases} \tag{4}$$

4 Неподвижные точки системы

4.1 Нахождение неподвижных точек

Определение 1. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой динамической системы $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, где $(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, i = \overline{1, n}, f = (f_1, \ldots, f_n)$, если $f(a) = 0$.
Воспользуемся определением, чтобы найти неподвижные точки:

$$\begin{cases} \frac{u^2}{1+Au} - \frac{uv}{1+Au} = 0, \\ kv + \frac{huv}{1+Au} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно, что $u = 0, v = 0$ — неподвижная точка. Далее положим, что $u^2 + v^2 > 0$:

$$\frac{u - v}{1 + Au} = 0,$$

$$u = v,$$

Подставим во второе уравнение:

$$kv + \frac{hv^2}{1 + Av} = 0,$$

$$(Ak + h)v^2 + kv = 0,$$

$$v = -\frac{k}{Ak + h}.$$

Таким образом, в системе присутствуют одна или две неподвижные точки:

1) O с координатами $u = 0, v = 0$,

2) M с координатами $u = -\frac{k}{Ak+h}, v = -\frac{k}{Ak+h}$ (возникает только при $Ak + h > 0$. В противном случае система содержит только одну неподвижную точку).

4.2 Характер неподвижных точек

Пусть задана динамическая система с непрерывным временем:

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Предположим, что u^* — положение равновесия этой системы. Обозначим $J(u^*)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(u)$ в точке u^*. Пусть n_+, n_0, n_- — число собственных значений $J(u^*)$ (с учетом кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

Определение 2. Положение равновесия динамической системы (5) называется *гиперболическим*, если $n_0 = 0$, т.е. не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется *гиперболическим седлом*, если $n_+ n_- \neq 0$.

Теорема 1 *(А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре). Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия (6). Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво; если $n_+ > 0$, то неустойчиво.*

Выпишем матрицу Якоби для данной системы (4):

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{(-v+2u)(Au+1)-(u^2-uv)A}{(Au+1)^2} & -\frac{u}{1+Au} \\ \frac{hv}{(1+Au)^2} & k + \frac{hu}{1+Au} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Рассмотрим ее сначала в точке O, потом — в точке M:

$$J(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$det(J(O) - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & k - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda k = 0. \tag{9}$$

Получаем, что $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = k$. Заметим, что одно из собственных значений нулевое, то есть лежит на мнимой оси, поэтому данное положение равновесия не является гиперболическим, и теорема 1 неприменима.

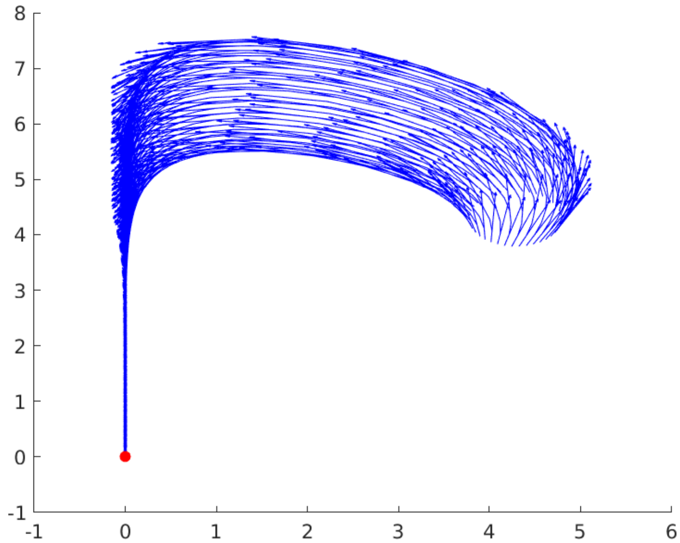

Рис. 1. Зависимость $u(v)$. Поведение траекторий вблизи положения равновесия (0,0) при значения параметров $A = 0.1, k = -0.2, h = 0.6$.

Рассмотрим в точке $M = (-\frac{k}{Ak+h}, -\frac{k}{Ak+h})$:

$$J(M) = \begin{pmatrix} -\frac{k}{h} & \frac{k}{h} \\ -\frac{k}{h}(Ak+h) & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$det(J(M) - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\frac{k}{h} - \lambda & \frac{k}{h} \\ -\frac{k}{h}(Ak+h) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{h}\lambda + \frac{k^2}{h^2}(Ak+h) = 0. \tag{11}$$

$$D = \frac{k^2}{h^2} - 4\frac{k^2}{h^2}(Ak+h). \tag{12}$$

Тогда корнями будут:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{k}{h} \pm \frac{|k|}{h}\sqrt{1 - 4(Ak+h)}}{2} \tag{13}$$

Заметим что параметр $k < 0$ а параметр $h > 0$. Из этого следует что $\frac{k}{h}$ принимает отрицательное значение. Так же получаем, что положения равновесия системы являются гиперболическими. Рассмотрим случаи:

$$D \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(Ak+h) \geq 0 \tag{14}$$

Имеем, что $\lambda_{1,2}$ вещественные числа. Положение равновесия — узел, при $\frac{1}{4} > Ak+h > 0$. По теореме 1 получается неустойчивый узел.

$$D < 0 \Leftrightarrow 1 - 4(Ak+h) < 0 \tag{15}$$

Тогда $\lambda_{1,2}$ — комплексные с положительной вещественной частью(которые совпадают), значит положение равновесия есть фокус. Но, согласно ограничению на константы $Ak + h < 0$ следовательно такой ситуации в нашей системе возникнуть не может.
Рассмотрим неустойчивую узловую точку при значении параметров $A = 0.1, k = -0.6, h = 0.2$. Получим неустойчивый узел в точке $M = (4.2857, 4.2857)$.

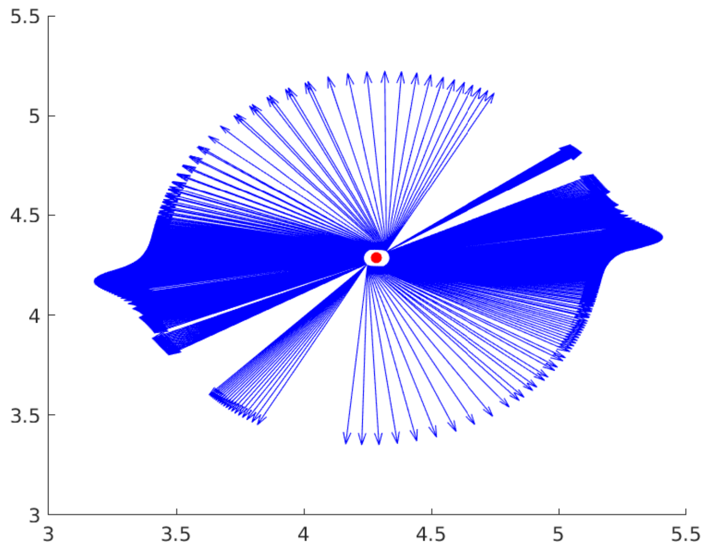

Рис. 2. Зависимость $u(v)$. Поведение траекторий вблизи положения равновесия (4.2857,4.2857) при значения параметров $A = 0.1, k = -0.6, h = 0.5$.

5 Предельные циклы

Рассмотрим динамическую систему:

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \to \mathbb{R}^n \tag{16}$$

Определение 3. Решение $u(t)$ задачи (16) называется *периодическим* с периодом $T > 0$, если $u(t+T) = u(t)$ для любого t, период T — наименьшее из таких чисел, для которых выполняется последнее равенство.

Определение 4. Замкнутую траекторию $\gamma(u_0)$ системы (16) будем называть *предельным циклом*, если в окрестности этой траектории не других замкнутых орбит.

Определение 5. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, называется бифуркацией *Пуанкаре-Андронова-Хопфа* или *бифуркацией рождения цикла.*

В предыдущем пункте при нахождении собственных значений мы убедились, что ни для каких допустимых значений параметров не возникают собственные значения с действительной частью, равной нулю, то есть целиком лежащие на мнимой оси. Из этого следует, что бифуркация рождения цикла в данной системе невозможна, и предельных циклов нет.

6 Биологическая интерпретация

Если рассмотреть полученные графики, можно провести биологическую интерпретацию полученных результатов. В частности, мы видим, на рисунке 1, что сначала происходит гибель жертв и одновременный рост хищников, однако спустя некоторое время, хищники так же вымирают. Наличие неустойчивого узла при определенных параметрах гласит о том, что "раскручивается спираль"хищников и жертв, которая, в конечном счете, привет их к гибели.

7 Список литературы

[1]Алимов Д.А., лекции и семинары "Динамические системы и биоматематика". ВМК МГУ, Москва, 2021.
[2] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. "Динамические системы и модели биологии".