Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
А. В. Бабаев

Руководитель практикума
Д. А. Алимов

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Исследовать системы:

$$u_{t+1} = ru_t(8 - u_t^3), \quad 0 < u_t < 2 \tag{1}$$

$$u_{t+1} = ru_t(8 - u_{t-1}^3), \quad 0 < u_t < 2 \tag{2}$$

1) Найти неподвижные точки и исследовать их на устойчивость.

2) Доказать, что имеется цикл длины 2.

3) Найти циклы длины 3 и построить бифуркационную диаграмму в зависимости от значения параметра ($r > 0$).

4) Построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра($r > 0$).

5) Для систем с запаздыванием построить бифуркационную диаграмму, построить инвариантную кривую в случае существования бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Исследование системы (1)

2.1 Нахождение неподвижных точек

Определение 2.1. Точка $U_* \in \mathbb{R}$ называется неподвижной точкой системы $u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $u_* = f(u_*)$. Воспользовавшись определением, можно определить все неподвижные точки. Уравнение будет иметь вид:

$$u = ru(8 - u^3)$$

Решив его, мы получим 2 неподвижные точки, а именно: $u_1^* = 0, u_2^* = (\frac{8r-1}{r})^{1/3}$

2.2 Исследование характера неподвижных точек

Определение 2.2.(Определение устойчивости по Ляпунову). Неподвижная точка u_* отображения $u \to f(u;r), u \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^m$ называется устойчивой по Ляпунову, если для любого положительного ε найдется отвечающее ему число $\delta > 0$ такое, что для любой точки u_0 из δ-окрестности точки u_* вся траектория системы $u_t, t = 0, 1, 2, ..$ содержится в ε-окрестности точки u_*. В противном случае неподвижная точка называется неустойчивой.

Определение 2.3. Если u_*-устойчива по Ляпунову неподвижная точка отображения $U \to f(u;r), u \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^m$ и, кроме того, $\lim_{t\to\infty} f(u_t) = u_*$, то u_* называется асимптотически устойчивой по Ляпунову.

Для исследования точек на устойчивость нам понадобится следующее утверждение:

Теорема 1 *Пусть u_* - неподвижная точка системы $u_{t+1} = f(u_t)$, и f обратима в некоторой окрестности точки u_*. Тогда если $|f_u(u_*)| < 1$ то точка u_* асимптотически устойчива, если $|f_u(u_*)| > 1$, то она неустойчива. В случае $|f_u(u_*) = 1|$ требуется дальнейшее исследование.*

Доказательство. Пусть $|f_u(u^*)| < 1$— и пусть u принадлежит малой окрестности $u*$. Так как:

$$lim_{u\to u^*} \frac{|f(u) - f(u^*)|}{|u - u^*|} = |f_u(u^*)|$$

поэтому существует такая окрестность u^*, что

$$\frac{|f(u) - f(u^*)|}{|u - u^*|} \leq a$$

для всех u из этой окрестности; здесь а — некоторое число, такое что $|f_u(u^*)| \leq a < 1$. Таким образом, $f(u)$ остается в той же окрестности, что и u, и, кроме того, ближе к неподвижной точке u^*, и по крайней мере, на множитель а. Отсюда следует, что

$$|f(f(u)) - f(f(u^*))| \leq a|f(u) - f(u^*)| < a^2|u - u^*|,$$

или, по индукции,

$$|f^{(k)}(u) - u^*| = |f(f^{(k-1)}(u)) - f(f^{(k-1)}(u^*))| \leq a|f^{(k-1)}(u) - f^{(k-1)}(u^*)| \leq a^k|u - u^*|,$$

где f^k означает k-ую суперпозицию отображения f. Таким образом мы доказали, что последовательность $f^{(k)}(u)$ будет сходится к u^*, то есть является асимптотически устойчивой. Вторая часть утверждения доказывается сходным образом.

Теперь исследуем $f(u,r)'_u = 8r - 4u^3$ в окрестностях найденных ранее неподвижных точек $u_1^* = 0, u_2^* = (\frac{8r-1}{r})^{1/3}$.

1. При $u_1^* = 0$:
$$lim_{u\to 0}|f(u,r)_u^{'}| = lim_{u\to 0}|8r - 4u^3| = 8r.$$
Можно выделить следующие случаи:
1) $r \in (0, \frac{1}{8}) \Rightarrow |f(u_1^*, r)| < 1 \Rightarrow$ точка $u_1^* = 0$ – асимптотически устойчива.
2) $r = \frac{1}{8} \Rightarrow |f(u_1^*, r)| = 1 \Rightarrow$ необходимы дополнительные исследования.
3) $r \in (\frac{1}{8}, \infty) \Rightarrow |f(u_1^*, r)| > 1 \Rightarrow$ точка $u_1^* = 0$ – является неустойчивой.

2. При $u_2^* = (\frac{8r-1}{r})^{1/3}$:
$$lim_{u\to(\frac{8r-1}{r})^{1/3}}|f(u,r)_u^{'}| = lim_{u\to(\frac{8r-1}{r})^{1/3}}|8r - 4u^3| = |8r - 32 + \frac{4}{r}|.$$
1) $r \in (\frac{1}{8}, \frac{31}{16} - \frac{7\sqrt{17}}{16}) \cup (\frac{7\sqrt{17}}{16} + \frac{31}{16}, 4) \Rightarrow |f(u_1^*, r)| < 1 \Rightarrow$ точка $u_2^* = (\frac{8r-1}{r})^{1/3}$ – асимптотически устойчива.
2) $r = \frac{1}{8} \Rightarrow |f(u_1^*, r)| = 1 \Rightarrow$ необходимы дополнительные исследования.
3) $r \in (0, \frac{1}{8}) \cup (\frac{31}{16} - \frac{7\sqrt{17}}{16}, \frac{31}{16} + \frac{7\sqrt{17}}{16}) \cup (4, \infty) \Rightarrow |f(u_1^*, r)| > 1 \Rightarrow$ точка $u_1^* = 0$ – является неустойчивой.

2.3 Построение бифуркационной диаграммы

Введем необходимые определения:
Рассмотрим дискретную динамическую систему, определяемую отображением f:
$$u \to f(u) = f(u; r), \quad u \in U \subset X,\ r \in \mathbb{R},\ f : U \to U,$$
где множество $X \subset \mathbb{R}^n$
Определение 2.4. Множество всевозможных состояний u_t называется пространством состояний(или фазовым пространством) исходной системы.
Определение 2.5.Множество точек $u_t, t = 0, 1, ...$ называется траекторией(или орбитой) исходной системы, порожденной отображением f.
Определение 2.6. Динамическая система $u \to f(u)$ называется топологически эквивалентной в области $U \subset X$ динамической системе $v \to g(v)$ в области $V \subset X$, если существует гомеоморфизм $h : X \to X, h(U) = V$, отображающий орбиты первой системы в U на орбиты второй системы в V, сохраняя ориентацию во времени.
Определение 2.7. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении вектора параметров рассматриваемой динамической системы называется бифуркацией.
Определение 2.8. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров, индуцированное отношением топологической эквивалентности вместе с фазовым портретами для каждого элемента разбиения.
Построим бифуркационную диаграмму для системы (1). Введем оси координат, такие что на оси абсцисс отмечается значение параметра r, а на оси ординат предельное значение u_t при $\to +\infty$. Выберем стартовое значение параметра $r = 0.03$. Будем увеличивать его с шагом $\delta r = 0.003$. При каждом фиксированном r выберем произвольную начальную точку u_0, например, $u_0 = 0.1$, и проитерируем систему (1) $n = 300$ раз, и выведем последние 150 итераций(для стабилизации системы):

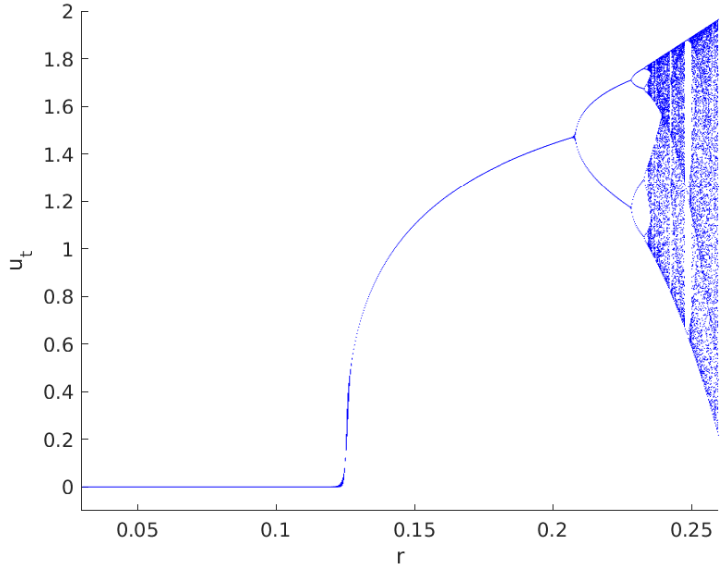

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для системы (1) при $r \in [0.03, 0.2566]$

Предельно допустимое значение r:

$$0 < ru(8 - u^3) < 2$$

Возьмем производную по u функции $f(u, r) = ru(8 - u^3)$ и найдем экстремальную точку. $f_u = 8r - 4ru^3 = 0 \to u = 2^{1/3}$. Решим уравнение $f(2^{1/3}, r) = 2$. Получим, что $r = \frac{1}{2^{1/3}3} = 0.2645$. Значит этом r достигается предельное значение для исходной функции.

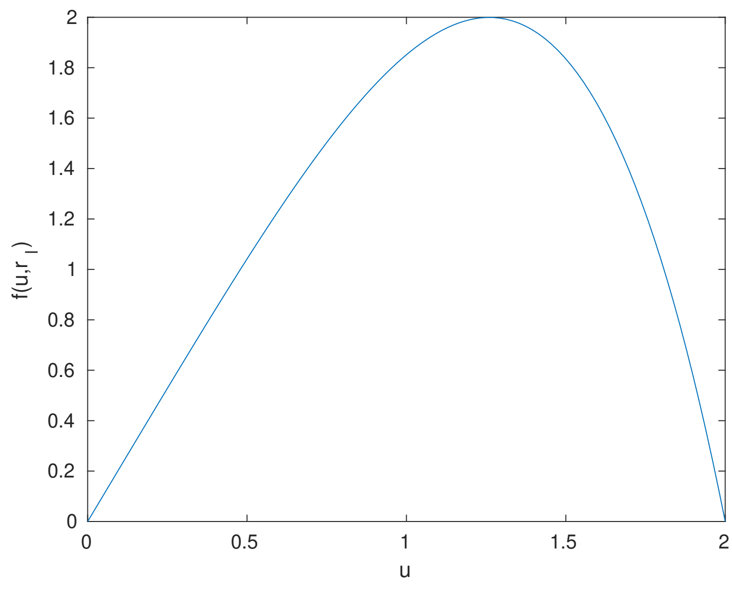

Рис. 2. Демонстрация значений функции при $r = 0.2566$

2.4 Исследование на наличие циклов длины 2 и 3

Определение 2.9. Циклом длины k называется набор попарно различных точек $u_1, u_2, \dots u_k$:

$$f(u_1) = u_2, f(u_2) = u_3, \dots, f(u_k - 1) = u_k, f(u_k) = u_1.$$

Замечание 2.1. Любая точка цикла является неподвижной точкой отображения $f^{(k)}(u)$.
Определение 2.10. Упорядочиванием множества натуральных чисел по Шарковскому назовем упорядочивание натуральных числел по следующему порядку:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ$$

$$\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ$$
$$\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ$$
$$\succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ$$
$$\succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Теорема 2 *(Шарковский). Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}-$ непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k. Тогда система имеет цикл длины m для всех таких m, что $k \succ m$ в смысле порядка по Шарковскому.*

Для нахождения циклов длины 2 найдем неподвижные точки уравнения $f(f(u)) = u$, отличные от неподвижных точек функции $f(u)$.
Из замечания 2.1 следует, что для нахождения цикла длины k нужно найти решение системы:

$$\begin{cases} f^{(k)}(u) = u \\ \frac{df^{(k)}(u)}{du} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, для нахождения циклов длин 2 и 3 необходимо решить соответствующую систему при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно.

$$\begin{cases} f^{(2)}(u) = u \\ \frac{df^{(2)}(u)}{du} = 1. \end{cases}$$

Решить исходную систему аналитически трудно, учитывая наличие степени куба. Поэтому, решение будет проделано численно при помощи возможностей платформы MatLab. Решив эту систему численно, при помощи функции *solve*, которая позволяет решать системы подобного вида. Получим, что цикл длины 2 будет зарождаться при $u \approx 1.4736, r \approx 0.2083$:

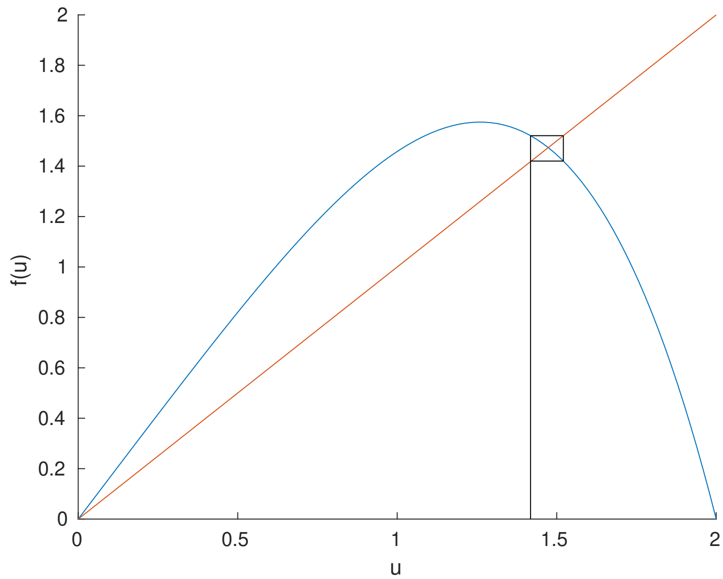

Рис. 3. Нахождение цикла длины 2. $u_1 = 1.418, u_2 = 1.521, r = 0.2083$

Теперь рассмотрим исходную систему при k = 3:

$$\begin{cases} f^{(3)}(u) = u \\ \frac{df^{(3)}(u)}{du} = 1. \end{cases}$$

Решив данную систему численно, опять же, с помощью функции MatLab solve, получим пару действительных решений данной системы, однако они будут отрицательными, что, в свою очередь, не удовлетворяет условиям задачи. Из этого делаем вывод, что цикла длины 3 у данной системы нет.

2.5 Расчет показателя Ляпунова

Определение 2.11. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$— гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется величина:

$$h(u_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{ln|f'(u_1)| + ln|f'(u_2)| + \ldots + ln|f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует. Построим график зависимости показателя Ляпунова от значений параметра r. Для этого возьмем начальное приближение $u_0 = 0.01$ и сетку по r с шагом $\delta r = 0.005$ и $n = 1000$ для каждой итерации по r. Результат приведен на рис.3.

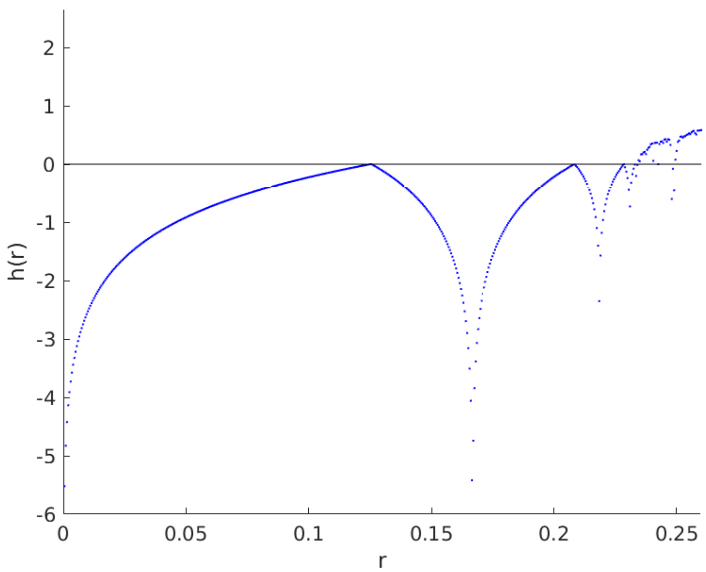

Рис. 4. График зависимости показателя Ляпунова от r.

Показатель Ляпунова является характеристикой поведения по начальным данным траектории. Если он больше нуля, то близкие траектории разбегаются в системе наблюдается хаотическое поведение. В противном случае расстояние между близкими траекториями уменьшается от итерации к итерации. По рис. 3 видно, что в нашей системе есть хаотическое поведение — показатель Ляпунова может быть положительным. Так же виден интервал, когда показатель Ляпунова меньше нуля. Он соответствует циклу с небольшим периодом.

3 Исследование системы (2)

Теперь перейдем к исследования системы (2):

$$u_{t+1} = ru_t(8 - u_{t-1}^3), \quad 0 < u_t < 2$$

Системы такого вида называются системами с запаздыванием. Перепишем эту систему в следующем виде, чтобы избавится от запаздывания:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = ru_t(8 - v_t^3), \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases}$$

Далее будем исследовать эту систему.

3.1 Неподвижные точки системы (2)

Определение 3.1. Точка $u^* \in \mathbb{R}$ называется неподвижной точкой системы (2) если $f(u^*, u^*) = u^*$.
В терминах измененной системы без запаздывания получается, что для нахождения неподвижных точек необходимо решить систему:

$$\begin{cases} f(u, v) = u, \\ g(u, v) = v. \end{cases}$$

Что эквивалентно системе:

$$\begin{cases} ru(8 - u^3) = u, \\ v = u. \end{cases}$$

Таким образом, видно, что у данной системы будут такие же неподвижные точки, как у системы (1) с точностью до добавления второй координаты. Итак, исходная система будет иметь три неподвижные точки, а именно: $a = (0, 0), b = ((\frac{8r-1}{r})^{1/3}, (\frac{8r-1}{r})^{1/3})$

3.2 Исследование характера неподвижных точек

Теорема 3 *Пусть дана динамическая система с дискретным временем: $u_{t+1} = f(u_t)$, где $u_t \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{N}, f$— гладкое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$, вычисленные в точке u^* таковы, что $|\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, n$. Если хотя бы одно собственное значение λ_i таково, что $|\lambda_i| > 1$ то неподвижная точка u^* неустойчива.*

Выпишем матрицу Якоби для данной системы функций:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(8 - v^3) & -3ruv^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Рассмотрим точку a = (0,0). Подставив ее в матрицу Якоби и найдя собственные значения, получим: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 8r$. При $r < 1/8$ точка a будет асимптотически устойчивой. При $r > 1/8$ — неустойчива.

2) Рассмотрим точку $b = ((\frac{8r-1}{r})^{1/3}, (\frac{8r-1}{r})^{1/3})$. Подставив ее в матрицу Якоби и найдя собственные значения, получим: $\lambda_1 = \frac{1-i\sqrt{96r-13}}{2}, \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{96r-13}}{2}$. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{24r-3}$. Решив неравенства $0 < \sqrt{24r-3} < 1$ получим, что точка b асимптотически устойчива при $r \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{6})$, при $r = \frac{1}{6}, |\lambda_{1,2}| = 1$ и поэтому нужны дополнительные исследования, и не устойчива в остальных случаях.

3.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

Определение 3.2. Бифуркация положения равновесия в системе:

$$u \to f(u, r), u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R},$$

соответствующая появлянию собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, называется бифуркацией Неймарка-Сакера или дискретной бифуркацией Хопфа.

Исходя из результатов предыдущего пункта, можно сделать вывод, что существует r при котором бифуркация Неймарка-Сакера существует. При этом, значение параметра r при котором она существует равна $r = 1/6$.

Рассмотрим точку $((\frac{8r-1}{r})^{1/3}, (\frac{8r-1}{r})^{1/3}) = (1.418, 1.418)$, и построим бифуркацию в окрестностях этой точки:

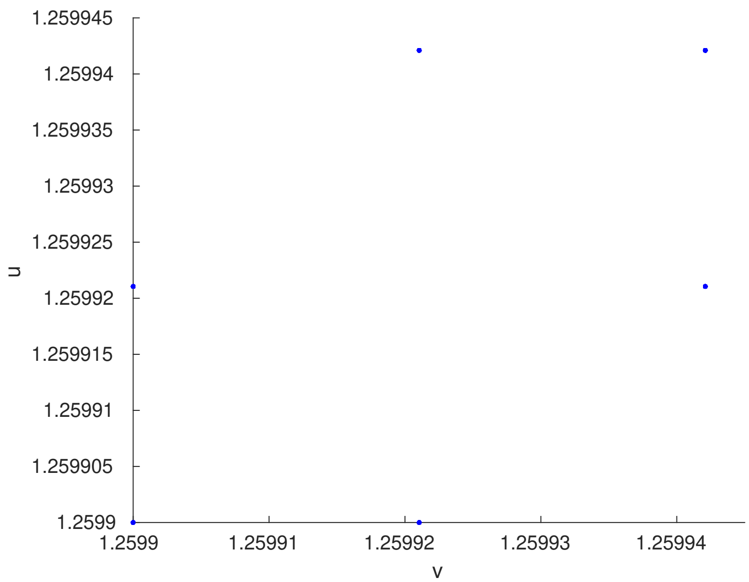

Рис. 5. Поведение траекторий в неподвижной точке (1.2599, 1.2599) при $r = 1/6, n = 1000$.

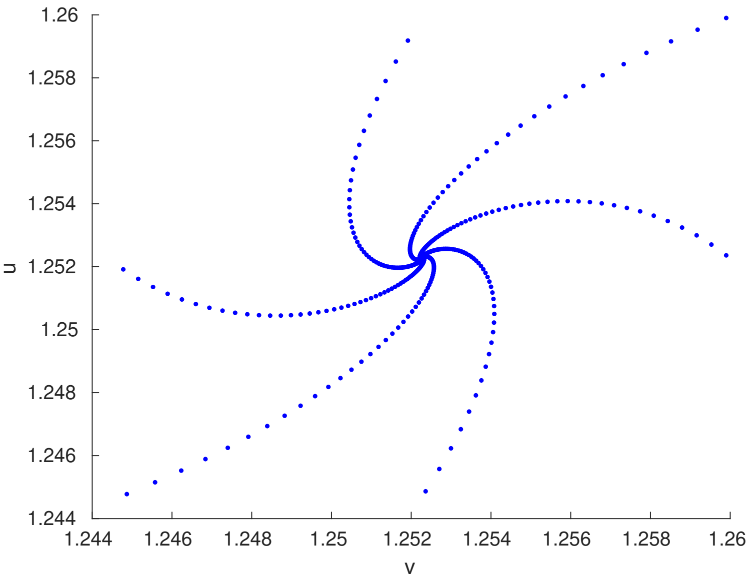

Рис. 6. Поведение траекторий в окрестности неподвижной точки (1.2599, 1.2599) при $r = 1/6 - 1/1000, n = 1000$.

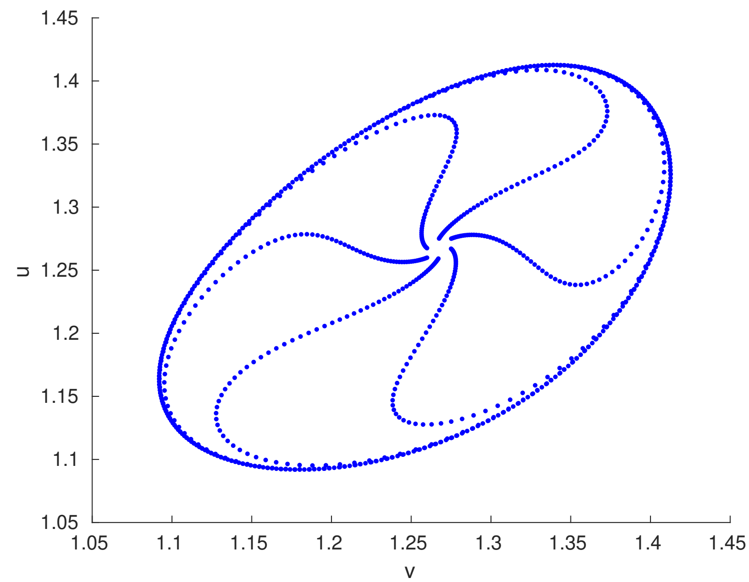

Рис. 7. Поведение траекторий в окрестности неподвижной точки (1.2599, 1.2599) при $r = 1/6 + 1/1000, n = 1000$.

4 Список литературы

[1] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии.