Отчёт по заданию №8.

1) Вычисление опорной функции ромба.

Опишем множество исходной задачи:

$$R_1 = \{\forall\ x_1,\, x_2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\ \}.$$

Для решения данной задачи необходимо максимизировать скалярное произведение $\langle l, x\rangle = l_1x_1 + l_2x_2$.

Очевидно, что максимум достигается на границе исходного множества, следовательно:

$$\rho(l|R_1) = max\{|l_1|, |l_2|\}.$$

Теперь рассмотрим общую постановку решения данной задачи, т.е. с множеством R_T с произвольным центром z = (x,y). Воспользовавшись свойством опорной функции:

$$\rho(l|A + z) = \langle l, z\rangle + \rho(l|A) \quad \forall\ \mathrm{z} \in \mathrm{X},\ \mathrm{A} \subset \mathrm{X}$$

Получим:

$$\underline{\rho(\mathrm{l}|R_T) = \langle l, z\rangle + T \cdot max\{|l_1|, |l_2|\}.}$$

2) Вычисление опорной функции квадрата.

Опишем множество исходной задачи:

$$S_1 = \{\forall\ x_1,\, x_2 : \max\{|x_1|,|x_2|\} \leq 1\ \}.$$

Для решения данной задачи необходимо максимизировать скалярное произведение $\langle l, x\rangle = l_1 x_1 + l_2 x_2$.

Очевидно максимум будет достигаться на вершинах
данного множества. Иными словами - на вершинах этого квадрата.

$$\rho(l|S_1) = max\{l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_2 - l_1, -(l_1 + l_2)\}.$$

Теперь рассмотрим общую постановку решения данной задачи, т.е.
с множеством S_T с произвольным центром z = (x,y).
Воспользовавшись свойством опорной функции:

$$\rho(l|A + z) = \langle l, z\rangle + \rho(l|A) \quad\ \forall \text{ z} \in \text{X, A} \subset \text{X}$$

Получим:

$$\underline{\rho(\mathrm{l}|S_T) = \langle l, z\rangle + T \cdot max\{l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_2 - l_1, -(l_1 + l_2)\}.}$$

3) Вычисление опорной функции эллипса.

Рассмотрим решение задачи на единичном круге:

$$E_0 = \{\forall\ x_1,\, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\ \}.$$

Положим, что x сонаправлен с l и его норма равна единице:

$$\|x\| = 1, \quad \mathrm{x} = \mathrm{c}l,\ \mathrm{c} \geq 0.$$

Тогда $\mathrm{x} = \frac{l}{\|l\|}$

Следовательно: $\rho(l|E_0) = \langle l, x\rangle = \|l\|$.

Рассмотрим теперь задачу $\forall a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, и ненулевым центром z:

$$E_z = \{\forall\ x_1,\, x_2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\ \}.$$

Введем матрицу $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ для удобства.

Воспользовавшись свойством опорной функции:

$$\rho(l|A + z) = \langle l, z\rangle + \rho(l|A) \qquad \forall\ \mathrm{z} \in \mathrm{X},\ \mathrm{A} \subset \mathrm{X}$$

Получим:

$$\rho(l|E_z) = \langle l, z\rangle + \rho(l|C \times E_0) = \langle l, z\rangle + \rho(C^T \times l|E_0) =$$
$$= \langle l, z\rangle + \sqrt{(l_1 a)^2 + (l_2 b)^2}$$