Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму:

«Численные методы.»

Студент 315 группы
А. В. Бабаев

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

1) Постановка задачи и определение параметров.

Пусть $f(t)$ - некоторая непрерывная функция. Обозначим Фурье-образ данной функции, как функцию $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Где t - действительная переменная, а λ - комплексная. Исходные функции:

$$f_1(t) = t^2 e^{-3|t|}, f_2(t) = \frac{t^3 + 2t}{t^4 + 4t^2 + 4}, f_3(t) = e^{-3t^4}\cos(t), f_4(t) = \begin{cases} e^{-t^2}, & |t| \le 1 \\ 0\ , & |t| > 1 \end{cases}$$

2) Теоретические сведения. Сущность вычислений.

Входные данные:
На вход подается некоторая функция $f(t)$, её аналитически рассчитанный Фурье-образ этой функции(если требуется), вектор inpLimVec содержащий параметры для оконной функции, шаг дискретизации для $f(t)$ - step, вектор outLimVec содержащий параметры окна вывода.

Процесс вычисления:
В начале вычислений, пересчитываю шаг дискретизации для равномерной сетки(обозначим a = inpLimVec(1), b = inpLimVec(2)):

$$T = b - a.$$
$$N = round(T/step).$$
$$step_{new} = T/N.$$

Далее, продлим по периоду T функцию $g(t) = f(t) * h_{a,b}(t)$, где $h_{a,b}(t)-$оконная функция. Выберем набор из N вещественных чисел:

$$x_n = g(step_{new} \cdot n), (n = 0, 1, 2, ..., N - 1).$$

Применив БПФ к исходному набору чисел, и умножив полученный набор на $step_{new}$, получим N комплексных чисел:

$$X_n = step_{new} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} g(step_{new} \cdot n) \cdot e^{-\frac{2\pi ikn}{N}}, (n = 0, 1, 2, ..., N - 1).$$

Данный набор чисел является набором отсчетов частотной области преобразования Фурье. Частотой дискретизации в полученной области будет величина:

$$\Delta f = \frac{2\pi}{T}.$$

3) Аналитические преобразования функций.

Функция №1:

$$f(t) = t^2 e^{-3|t|}.$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-3|t|} e^{i\lambda t}\, dt.$$

Так как функция $f(t)$ - четная, то раскладывая экспоненту с мнимой единицей по формуле Эйлера, получим, что интеграл содержащий синус - будет равен нулю. Теперь, оставшийся интеграл, будем рассматривать только на положительной части числовой прямой. Получим вид:

$$F(\lambda) = 2 \cdot \int_{0}^{\infty} t^2 e^{-3t} \cos(\lambda t)\, dt.$$

Далее воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int fg' = fg - \int f'g$ с подстановкой $f = t^2, g' = e^{-3t}\cos(\lambda t), g = \frac{\lambda e^{-3t}\sin(\lambda t) - 3e^{-3t}\cos(\lambda t)}{\lambda^2+9}$ получим:

$$F(\lambda) = 2t^2 \cdot \frac{\lambda e^{-3t} sin(\lambda t) - 3e^{-3t}\cos(\lambda t)}{\lambda^2+9}\Bigg|_0^{\infty} - 4 \cdot \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\lambda e^{-3t}\sin(\lambda t) - 3e^{-3t}\cos(\lambda t)}{\lambda^2+9}\, dt.$$

Подставив пределы интегрирования, получим, что первый член в данном равенстве равен нулю. Упростим и разобьем на два интеграла:

$$F(\lambda) = \frac{-4}{\lambda^2+9}\left(\int_0^{\infty} \lambda t e^{-3t}\sin(\lambda t)\, dt - \int_0^{\infty} 3te^{-3t}\cos(\lambda t)\, dt\right).$$

Сначала вычислим интеграл содержащий синус. Проинтегрируем его по частям где:
$f = t, g' = e^{-3t}\sin(\lambda t), g = \frac{-3e^{-3t}\sin(\lambda t) - \lambda e^{-3t} cos(\lambda t)}{\lambda^2+9}$. При подстановке пределов, первый член будет равным нулю, и останется интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{-3e^{-3t}\sin(\lambda t) - \lambda e^{-3t}\cos(\lambda t)}{\lambda^2+9}\, dt.$$

Преобразуем:

$$\frac{-3}{\lambda^2+9}\int_0^{\infty} e^{-3t}\sin(\lambda t)\, dt - \frac{\lambda}{\lambda^2+9}\int_0^{\infty} e^{-3t}\cos(\lambda t)\, dt.$$

Теперь вычислим:

$$\int_0^{\infty} e^{-3t}\sin(\lambda t)\, dt$$

Дважды проинтегрируем(с подстановкой пределов) по частям в первый раз с $f = \sin(\lambda t), g' = e^{-3t}$ и второй раз с $f = \lambda\cos(\lambda t), g' = -\frac{e^{-3t}}{3}$:

$$\frac{\lambda}{9} - \frac{\lambda^2}{9}\int_0^{\infty} e^{-3t}\sin(\lambda t)\, dt.$$

Исходный интеграл повторяется в правой части выражения, таким образом можно решить уравнение выразив его:

$$\int_0^\infty e^{-3t}\sin(\lambda t)\,dt = -\frac{\lambda}{\lambda^2+9}.$$

Теперь вычислим:

$$\int_0^\infty e^{-3t}\cos(\lambda t)\,dt.$$

Как и в случае с синусом, дважды проинтегрировав по частям с $f = \cos(\lambda t), g' = e^{-3t}$ и второй раз с $f = -\lambda\sin(\lambda t), g' = -\frac{e^{-3t}}{3}$ и подставив пределы интегрирования, получим:

$$-\frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{9}\int_0^\infty e^{-3t}\cos(\lambda t)\,dt.$$

$$\int_0^\infty e^{-3t}\cos(\lambda t)\,dt = \frac{3}{\lambda^2+9}.$$

Следовательно получим, что:

$$\int_0^\infty te^{-3t}\sin(\lambda t)\,dt = -\frac{6\lambda}{(\lambda^2+9)^2}.$$

Проделав те же операции, только над интегралом содержащим косинус, получим:

$$\int_0^\infty te^{-3t}\cos(\lambda t)\,dt = \frac{\lambda^2-9}{(\lambda^2+9)^2}.$$

Подставим найденные интегралы в начальное выражение и упростим его. Искомый интеграл будет иметь вид:

$$F(\lambda) = -\frac{36(\lambda^2-3)}{(\lambda^2+9)^3}.$$

Функция №2:

$$f(t) = \frac{t}{t^2+2}.$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \frac{t}{t^2+2}e^{i\lambda t}\,dt.$$

Так как функция $f(t)$ - нечетная, то часть интеграл содержащий косинус будет равным нулю. Останется.

$$F(\lambda) = i\cdot\int_{-\infty}^\infty \frac{t\sin(\lambda t)}{t^2+2}\,dt.$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{t\sin(\lambda t)}{t^2+2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{t\sin(\lambda t)}{(t-\sqrt{2}i)(t+\sqrt{2}i)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{t+\sqrt{2}i}\,dt + \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{t-\sqrt{2}i}\,dt. \quad (*)$$

Вычислим первый из интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t+\sqrt{2}i}\,dt = \{u = t+\sqrt{2}i, \frac{du}{dt} = 1\} = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda u - \sqrt{2}i\lambda)}{u}\,du.$$

Разложим синус по формуле разности аргументов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(\sqrt{2}i\lambda)sin(\lambda u) - sin(\sqrt{2}i\lambda)cos(\lambda u)}{u}\,du = cos(\sqrt{2}i\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(\lambda u)}{u}\,du - sin(\sqrt{2}i\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(\lambda u)}{u}\,du.$$

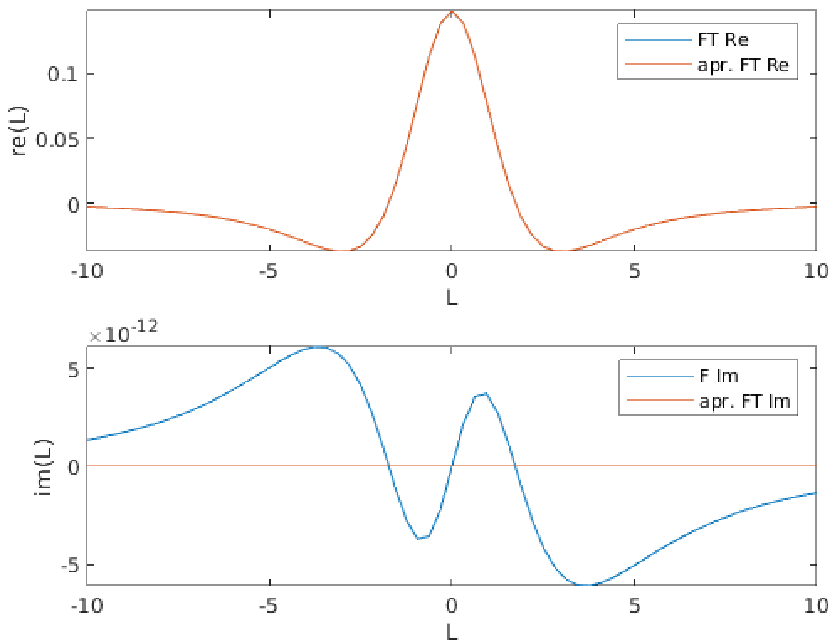
Интегральный косинус, при таких пределах обращается в нуль, а интегральный синус в $\pi \cdot sgn(\lambda)$.Проделав ту же работу, только уже со вторым членом в (*) и подставив получим ответ:

$$F(\lambda) = i \cdot sgn(\lambda)\pi e^{-\sqrt{2}|\lambda|}.$$

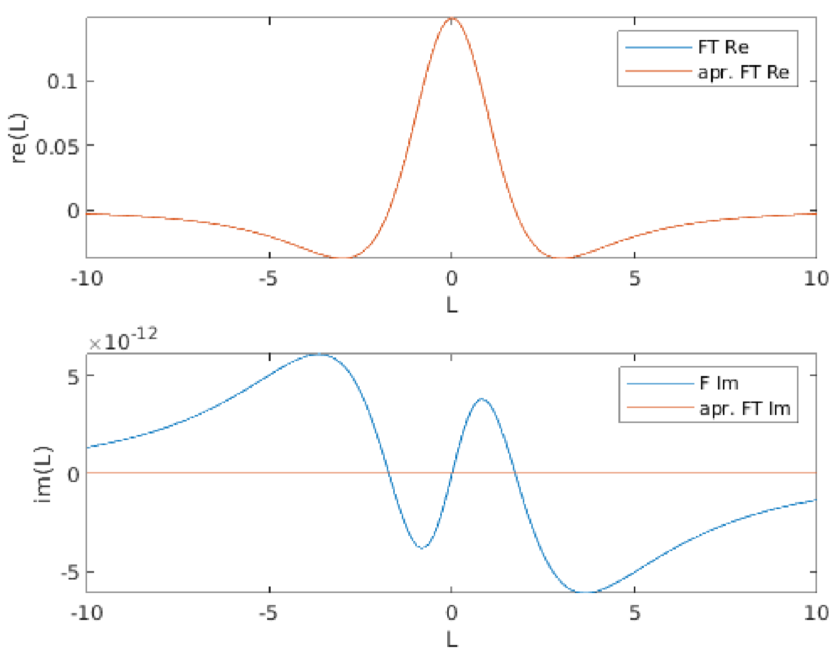
4) Графики преобразований и подзадачи.

Функция $f_1(t)$:

a = -10, b = 10, $\Delta t = 0.01$.

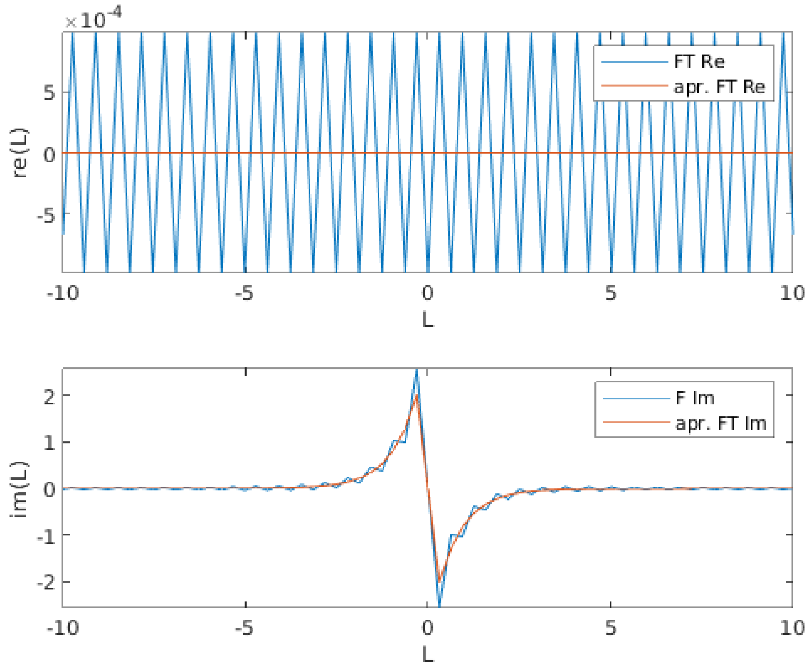


a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.001$.

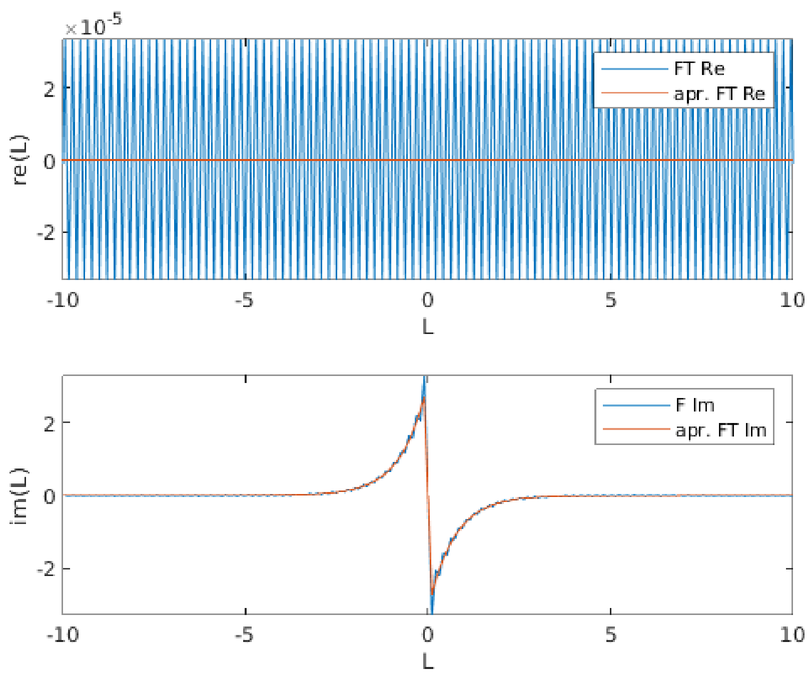


Функция $f_2(t)$:

a = -10, b = 10, $\Delta t = 0.01$.

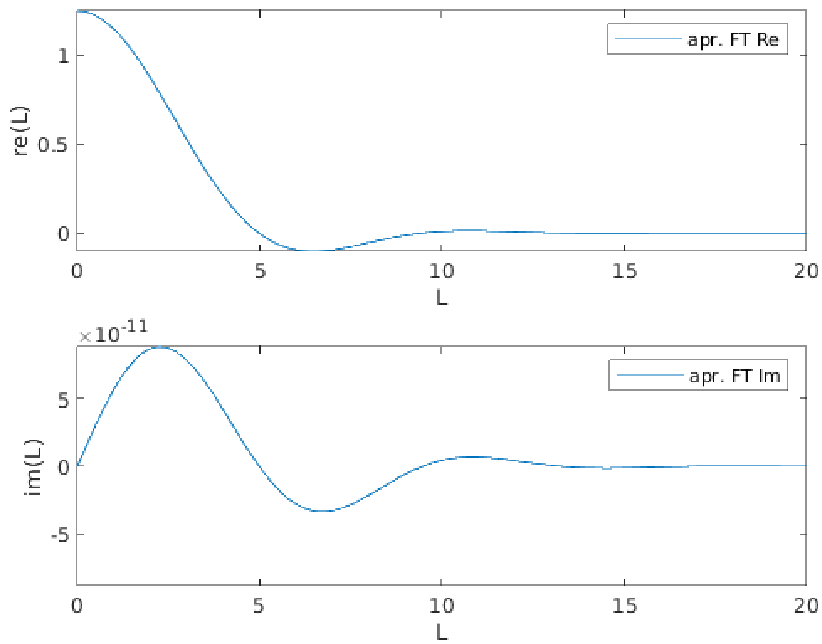


a = -30, b = 30, $\Delta t = 0.001$.



Функция $f_3(t)$:

a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.01$.



Функция $f_4(t)$:

a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.01$.

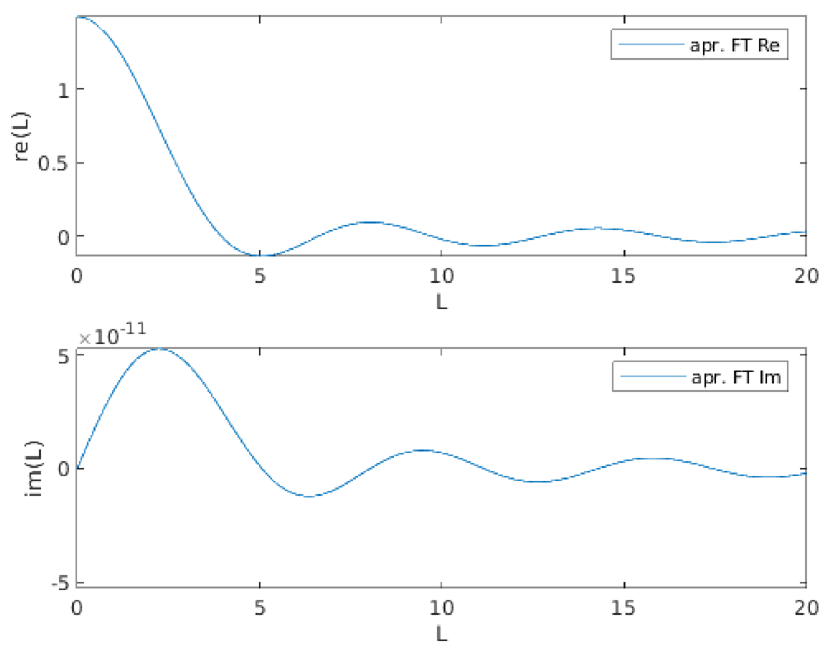
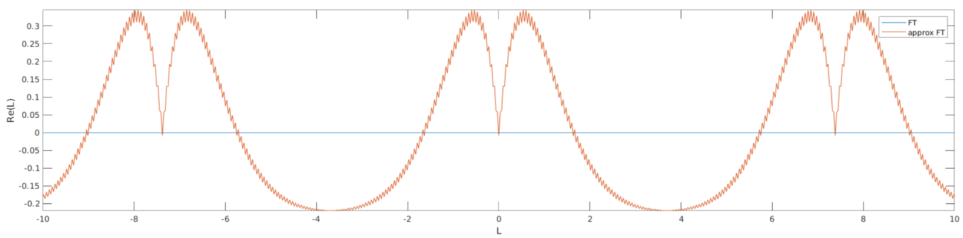
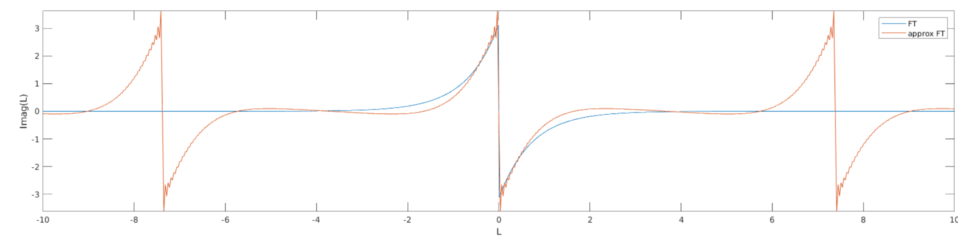


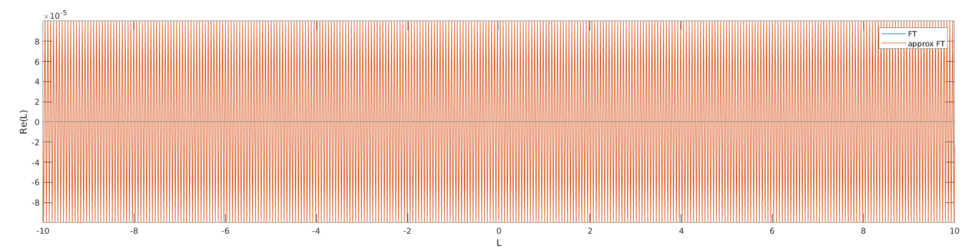
Иллюстрация эффекта наложения спектров и его устранения:

Функция f_2, a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.85$:





Для устранения наложения, в данном случае, можно уменьшить шаг. a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.01$:



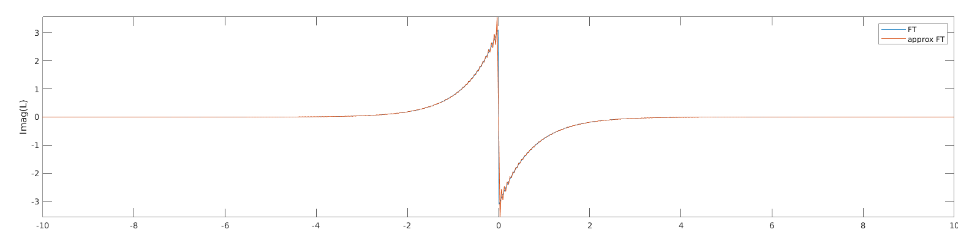
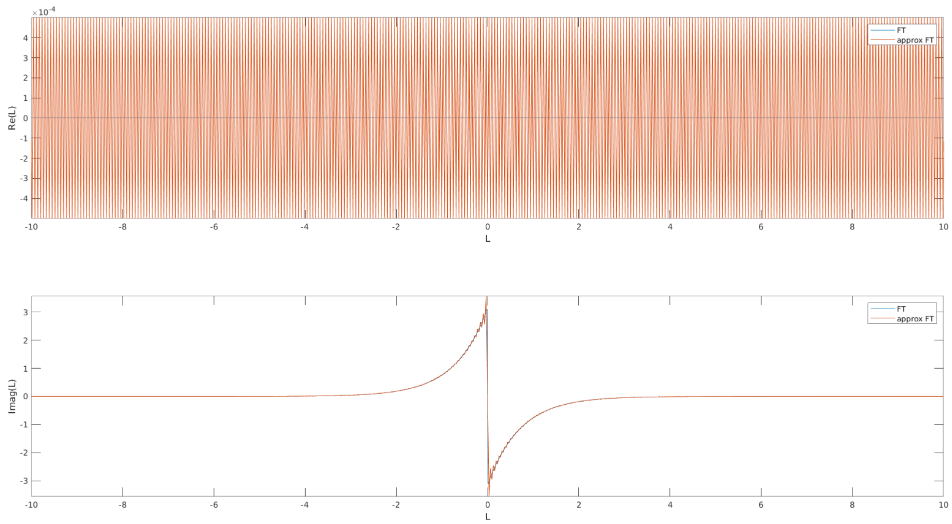
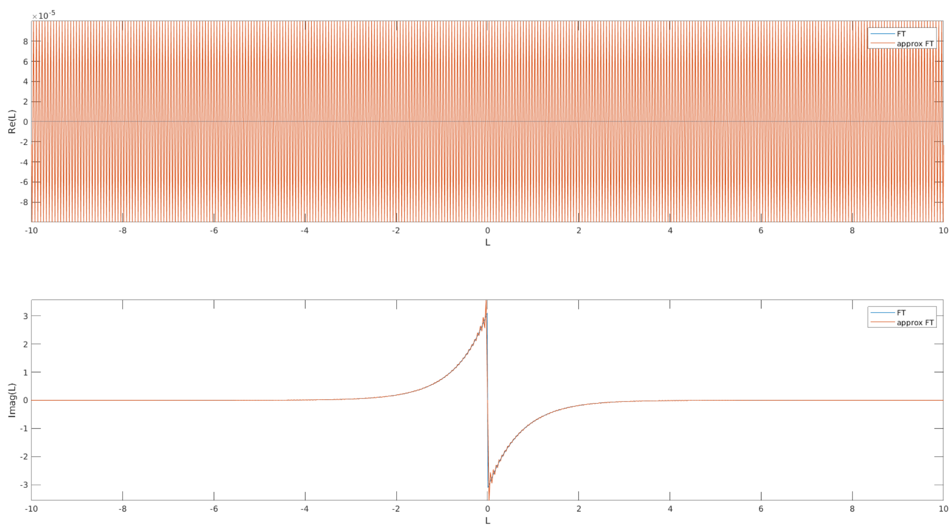


Иллюстрация ряби и её возможности устранения:

Функция f_2, a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.05$:



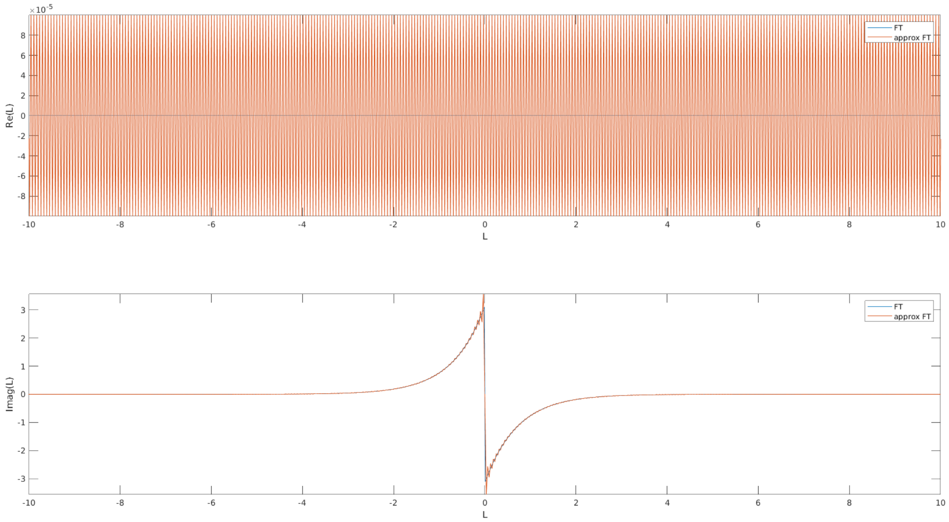
Функция f_2, a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.0001$:



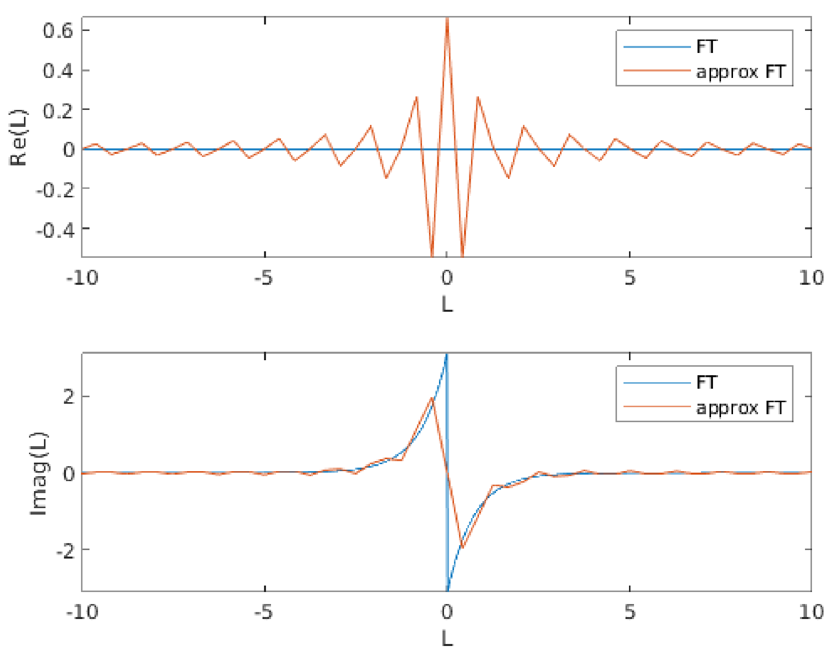
Нижний график демонстрирует невозможность устранения ряби в точке разрыва при "улучшении"параметров.

Устранение ряби, при улучшении параметров:

Функция f_2, a = -100, b = 100, $\Delta t = 0.01$:



Функция f_2, a = -10, b = 10, $\Delta t = 0.01$:



Верхний график демонстрирует возможность частичного устранения ряби, при "улучшении"параметров.