Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму:

«Задача быстродействия»

Студент 315 группы
А. В. Бабаев

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи и определение параметров

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f,\ t \in [t_0, +\infty).$$

Здесь $x, f \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}, u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0-$ начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1-$ целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y) : \begin{array}{ll} \gamma(x-p_1)^2 + \alpha(y-p_2)^2 \leq 1 & \text{, при } y \geq p_2 \\ \gamma(x-p_1)^2 + \beta(y-p_2)^2 \leq 1 & \text{, при } y \leq p_2 \end{array}\right\}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,$$

$$\mathcal{X}_0 = conv\{q_1, q_2, q_3\} + S_r(0);$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x_1\}.$$

1)Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, p_1, p_2, \alpha, \beta, \gamma, q_1, q_2, q_3, x_1, r$ определяет разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной "оптимальной" траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

2)В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Теоретические выкладки

Оптимальную пару $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ будем искать с помощью следующей теоремы:

Теорема 1 *(Принцип максимума Понтрягина)*
Пусть $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$– оптимальная пара на $[t_0, T]$, являющаяся решением задачи быстродействия. Тогда существует ненулевая и непрерывная функция $\psi(t)$, определенная при $t \geq t_0$, являющаяся решением системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi(t), \\ \psi(t_0) = \psi_0 \neq 0, \end{cases}$$

и такая что выполнены условия:

1. *Принцип максимума: $\langle Bu^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P})$, для всех $t \leq t_0$, кроме точек разрыва $u(t)$.*
2. *Условие трансверсальности на левом конце: $\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0)$.*
3. *Условие трансверсальности на правом конце: $\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1)$.*

Как видно из условия, необходимо посчитать опорные функции множеств $\mathcal{P}, \mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$.

2.1 Вычисление опорных функций

Определение. Опорной функцией множества X называется функция:

$$\rho(l|X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle.$$

где вектор l — ненулевой вектор направления($l \not\equiv 0$), по которому ищется опорная функция.
Свойства:

1) Опорная функция положительно однородна по первой переменной

$$\rho(\lambda l | \mathcal{X}) = \lambda \rho(l | \mathcal{X}), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Для любого множества X и произвольного x_0 справедливо:

$$\rho(l, X + x_0) = \rho(l, X) + \rho(l, x_0).$$

3) Опорная функция суммы двух множеств равна сумме их опорных функций:

$$\rho(l, X + Y) = \rho(l, X) + \rho(l, Y).$$

4) Если $\mathcal{X} = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$, то $\rho(l, \mathcal{X}) = \max \langle l, x_i \rangle, \ i = \overline{1, n}$.

5) Для любых двух множеств A и B выполняется:

$$\rho(\cdot, A \cup B) = \max(\rho(\cdot, A), \rho(\cdot, B)).$$

2.1.1 Опорная функция множества $\mathcal{X}_0$

Исходное множество является суммой по Минковскому выпуклой оболочки 3-х точек, и шара радиуса r. Поэтому, использовав свойство 3, получим, что необходимо найти опорные функции выпуклой оболочки и шара в отдельности. По свойству 4 об опорной функции множества $conv\{x_1, \ldots, x_n\}$, получаем что $\rho(l|conv\{q_1, q_2, q_3\}) = \max\langle l, q_i\rangle,\ i = \overline{1,3}$(с опорной точкой в q_i). А опорная функция шара имеет вид $\rho(l|S_r(0)) = \langle l, rl\rangle = |r|$(с опорной точкой в rl).

Получим, что значение опорной функции имеет вид:

$$\rho(l|\mathcal{X}_0) = \max_{i=1,2,3.} \langle l, q_i\rangle + |r|.$$

2.1.2 Опорная функция множества $\mathcal{X}_1$

$$\rho(l|\mathcal{X}_1) = \langle l, x_1\rangle.$$

Опорная точка x_1.

2.1.3 Опорная функция множества $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y): \begin{array}{ll} \gamma(x-p_1)^2 + \alpha(y-p_2)^2 \le 1 & \text{, при } y \ge p_2 \\ \gamma(x-p_1)^2 + \beta(y-p_2)^2 \le 1 & \text{, при } y \le p_2 \end{array}\right\}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,$$

Данное множество представляет из себя объединение частей эллипсов. Поэтому, для вычисления опорной функции исходного множества, вычислим, с помощью метода Лагранжа, опорные функции подмножеств и применим свойство 5 об опорной функции объединения множеств, для конечного результата. Рассмотрим первую часть эллипса, и составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \lambda[\gamma(x_1 - p_1)^2 + \alpha(x_2 - p_2)^2 - 1].$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = l_1 + 2\lambda\gamma(x_1 - p_1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = l_2 + 2\lambda\alpha(x_2 - p_2) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \gamma(x_1 - p_1)^2 + \alpha(x_2 - p_2)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 - p_1 = -\frac{l_1}{2\lambda\gamma}.$$

$$x_2 - p_2 = -\frac{l_2}{2\lambda\alpha}.$$

$$\lambda = -\frac{l_2}{2\alpha(x_2 - p_2)}.$$

$$x_1 - p_1 = \frac{\alpha l_1 (x_2 - p_2)}{\gamma l_2}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{(l_1(x_2 - p_2))^2}{\gamma l_2^2} + \alpha(x_2 - p_2)^2 - 1 = 0.$$

$$(x_2 - p_2)^2 = \frac{\gamma l_2^2}{l_1^2 + \alpha\gamma l_2^2}.$$

$$\begin{cases} x_2 = p_2 \pm \sqrt{\frac{\gamma l_2^2}{l_1^2+\alpha\gamma l_2^2}}, \\ x_1 = p_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha l_1^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}}. \end{cases}$$

Аналогично получаем для второй части исходного множества:

$$\begin{cases} x_2 = p_2 \pm \sqrt{\frac{\gamma l_2^2}{l_1^2+\beta\gamma l_2^2}}, \\ x_1 = p_1 \pm \sqrt{\frac{\beta l_1^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}}. \end{cases}$$

Рассмотрев все возможные случаи, получаем опорную функцию исходного множества с опорной точкой, написанной выше:

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \begin{cases} l_1 \left(p_1 + \sqrt{\frac{\alpha l_1^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}} \right) + l_2 \left(p_2 + \sqrt{\frac{\alpha l_2^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}} \right), l_1 \geq 0, \\ l_1 \left(p_1 + \sqrt{\frac{\beta l_1^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}} \right) + l_2 \left(p_2 + \sqrt{\frac{\beta l_2^2}{\gamma(l_1^2+\gamma l_2^2)}} \right), l_1 < 0. \end{cases}$$

2.2 Алгоритм решения

2.2.1 Замена переменных

Так, как целевое множество состоит из одной точки, то введем обратное время. Это возможно в силу независимости параметров системы дифференциальных уравнений A, B, f от времени. В таком случае, за начальное условие для задачи Коши возьмем точку x_1. Совершим замену:

$$y(s) = x(-t),\ v(s) = u(-t)$$

$$s_0 = -T,\ s_1 = -t_0$$

$$C = -A,\ D = -B,\ g = -f$$

Исходная задача примет вид:

$$\dot{y}(s) = Cy(s) + Dv(s) + g, \quad s \in [s_0, s_1]$$

$$y(s_0) = x_1,\ y(s_1) \in \mathcal{X}_0\ v(s) \in \mathcal{P}$$

$$s_1 - s_0 \to \inf.$$

После того как данная задача будет решена, оптимальная пара исходной задачи находится с помощью разворота массива значений.

2.2.2 Вычисление оптимальной пары

Из ПМП следует, что сопряженная переменная $\psi(s)$ определяется из следующего уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(s) = -C^T \psi(s), \\ \psi(s_0) = \psi_0 \neq 0 \end{cases}$$

В силу положительной однородности $\psi(s)$ определяется с точностью до положительной константы, поэтому можно ввести условие нормировки $||\psi_0|| = 1$ и перебирать $\psi(s)$ с начальным условием из единичной сферы.

Нахождение оптимального управления зависит от ранга матрицы D:

1. $\mathrm{rg}(D) = 0$. Управление не влияет на систему, можно взять любое, к примеру $v^* = 0$.
2. $\mathrm{rg}(D) = 2$. Управление находится единичным образом из условия максимума.
3. $\mathrm{rg}(D) = 1$. Тогда матрицу D можно считать вырожденной заменой v, которая переводит множество $\mathcal{P}$ в некоторый отрезок $[p_1, p_2]$, по которому можно организовать перебор.

Траектория $y^*(s)$ для полученного набора управлений $v^*(s)$ получаем как решения задач Коши:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = Cy(s) + Dv^*(s) + g, \\ y(s_0) = x_1. \end{cases}$$

Из полученных траекторий выбираем те, которые пересекают $\mathcal{X}_0$. Если такие существуют, то оптимальной является та, которая соответствует минимальному времени перехода.

2.2.3 Средства MATLAB для решения задачи

Основной функцией, используемой для решения исходной задачи, является функция *ode*45. Для улучшения численного результата можно воспользоваться изменением следующих параметров: 'RelTol','AbsTol','Refine','MaxStep'.

3 Примеры

Пример 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, r = 1.$$

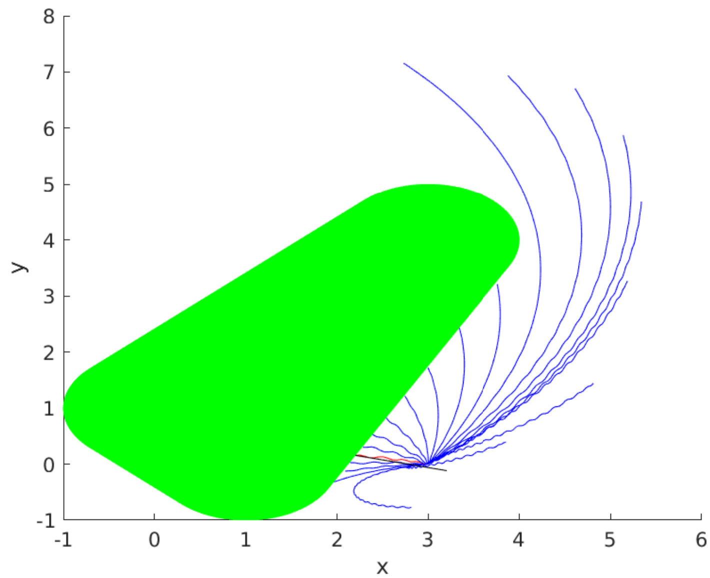

Рис. 1. Оптимальная траектория, $T = 0.1627$, $e_{right} = 0.0662$(погрешность ψ)

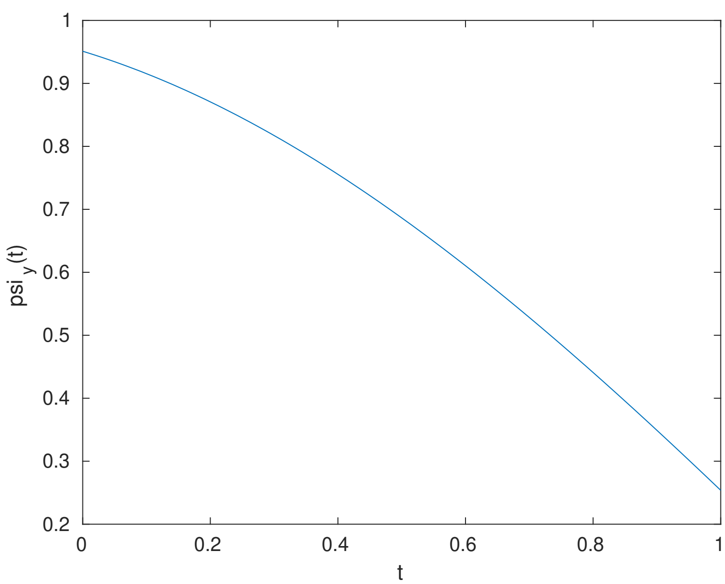

Рис. 2. Компонента $\psi_y(t)$ сопряженной системы

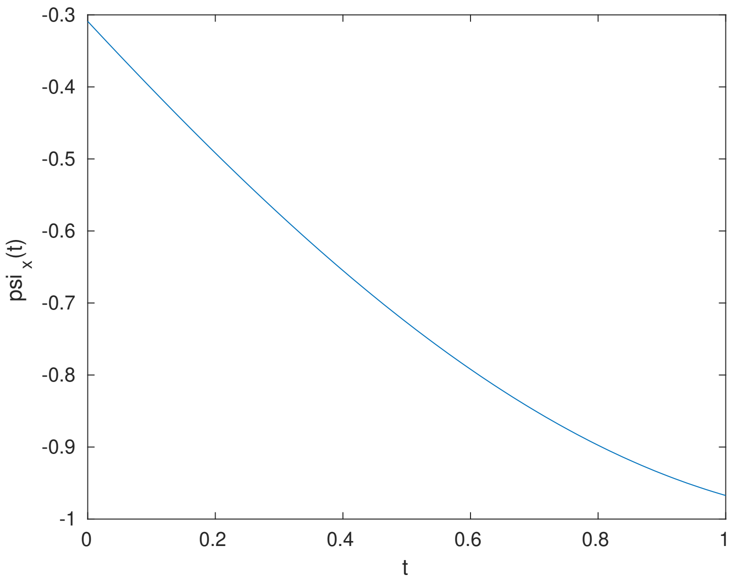

Рис. 3. Компонента $\psi_x(t)$ сопряженной системы

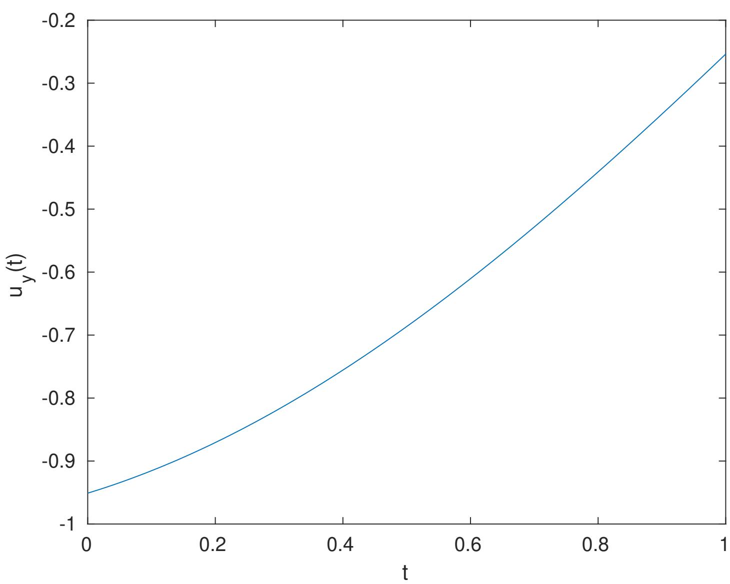

Рис. 4. Компонента $u_y(t)$ оптимального управления

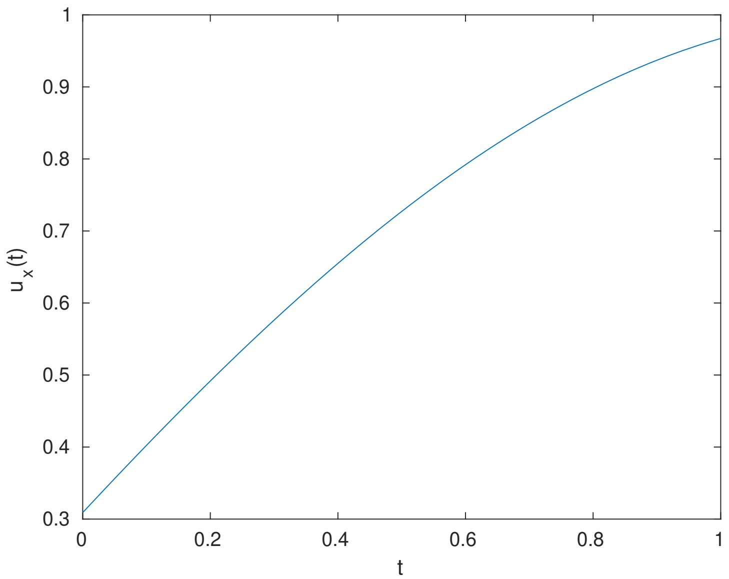

Рис. 5. Компонента $u_x(t)$ оптимального управления

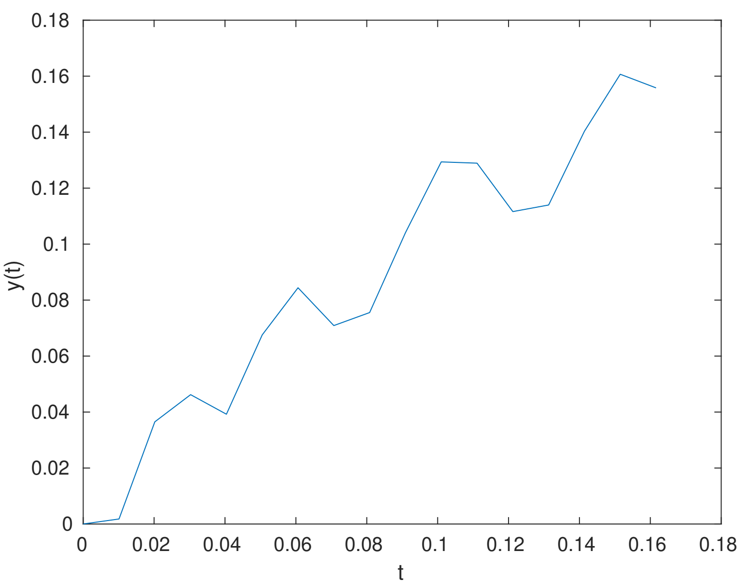

Рис. 6. Компонента $y(t)$ оптимальной траектории

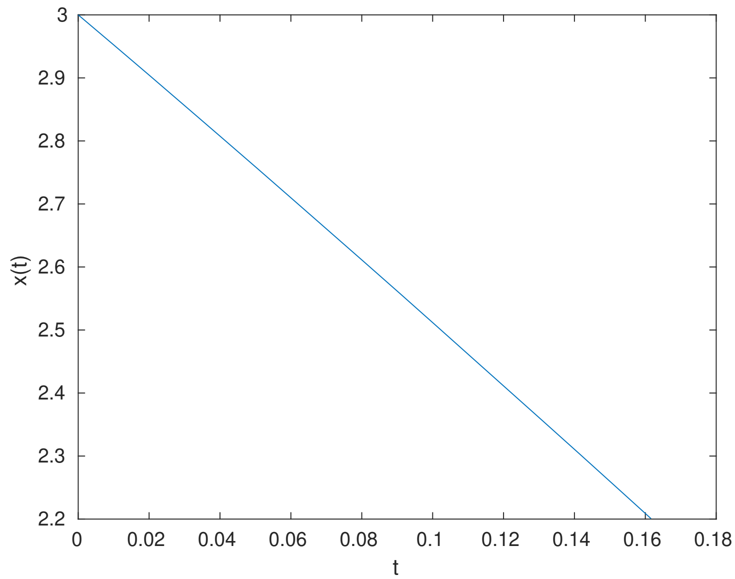

Рис. 7. Компонента $x(t)$ оптимальной траектории

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, r = 0.$$

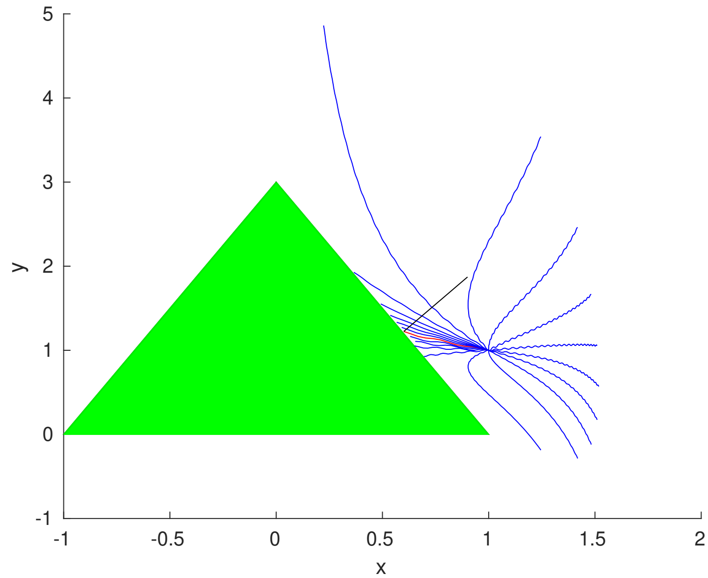

Рис. 8. Оптимальная траектория, $T = 0.0547, e_{right} = 0.5432$

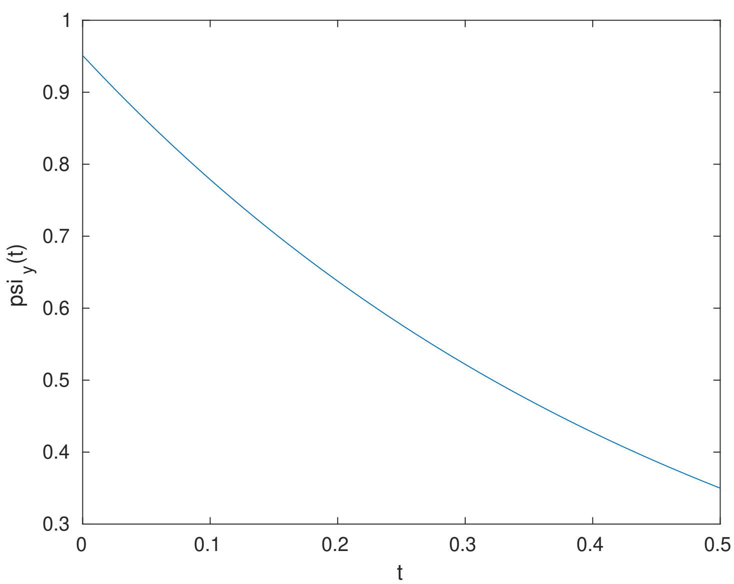

Рис. 9. Компонента $\psi_y(t)$ сопряженной системы

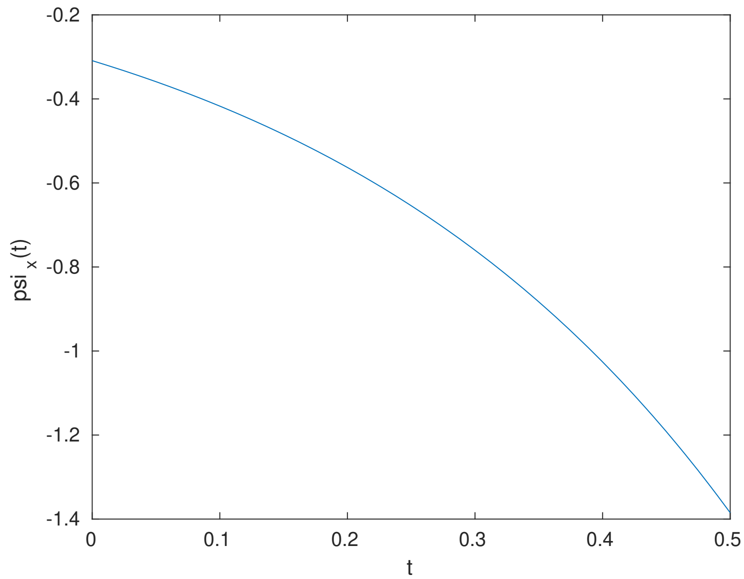

Рис. 10. Компонента $\psi_x(t)$ сопряженной системы

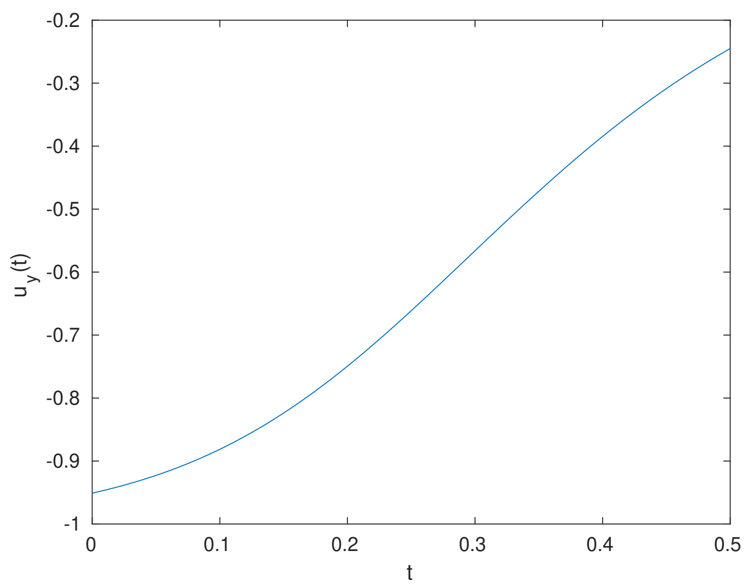

Рис. 11. Компонента $u_y(t)$ оптимального управления

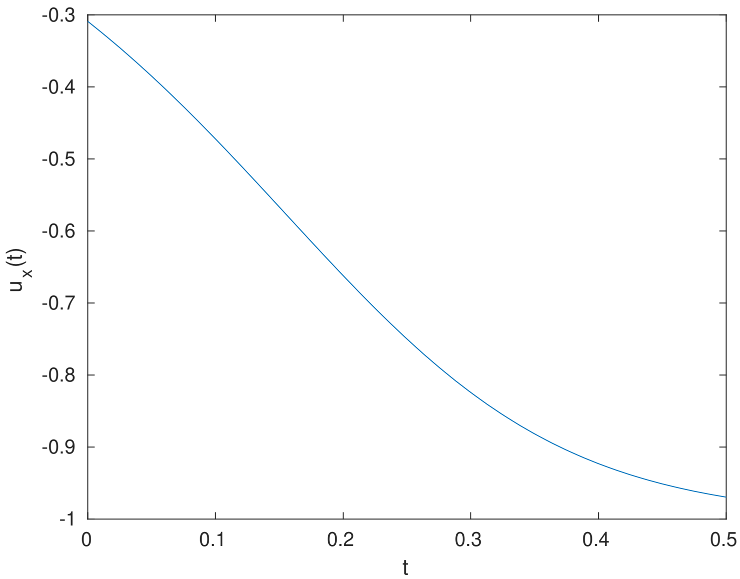

Рис. 12. Компонента $u_x(t)$ оптимального управления

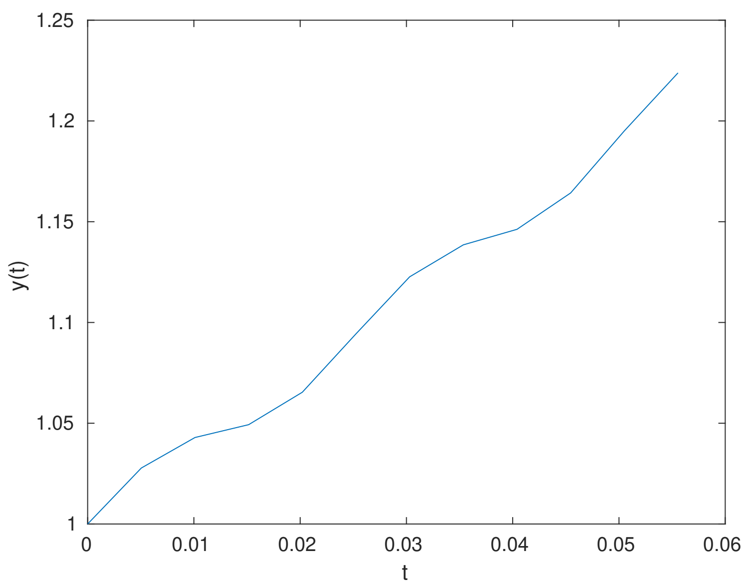

Рис. 13. Компонента $y(t)$ оптимальной траектории

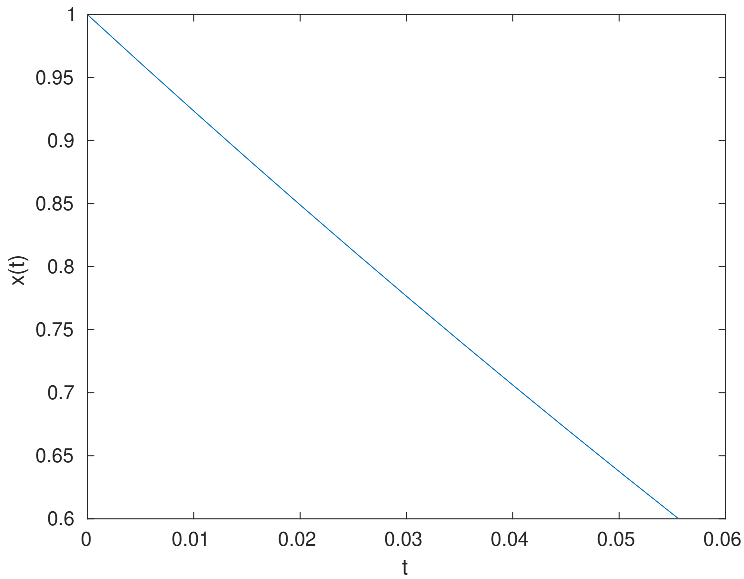

Рис. 14. Компонента $x(t)$ оптимальной траектории

Пример глобального улучшение результата задачи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} -5.6 \\ -2.6 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, r = 0.2, n = 15.$$

Где n — это количество начальных условий для сопряженной системы(иными словами количество траекторий).

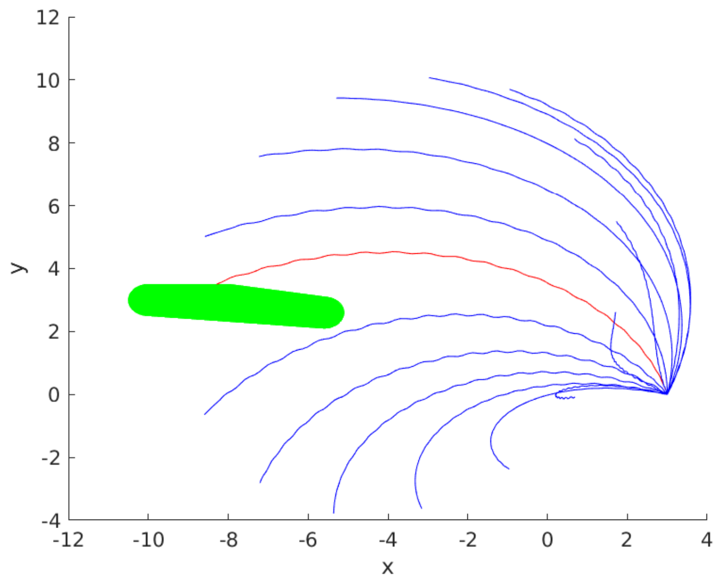

Рис. 15. Траектории при $n = 15$, $T = 1.37912, e_{right} = 0.0900$

Увеличим количество начальных условий для сопряженной системы ($n = 100$) и посмотрим на результат:

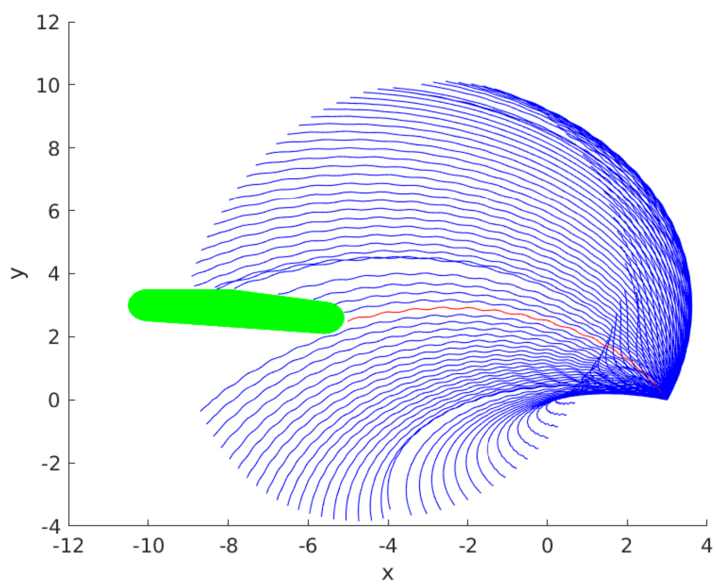

Рис. 16. Траектории при $n = 100$, $T = 1.0582, e_{right} = 0.4563$

Как видно, в данном примере, в отличие от предыдущего, время сократилось.

4 Исследование величины T на непрерывность по начальному множеству фазовых переменных

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 9 \end{pmatrix}, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, r = 0, t_{max} = 6.$$

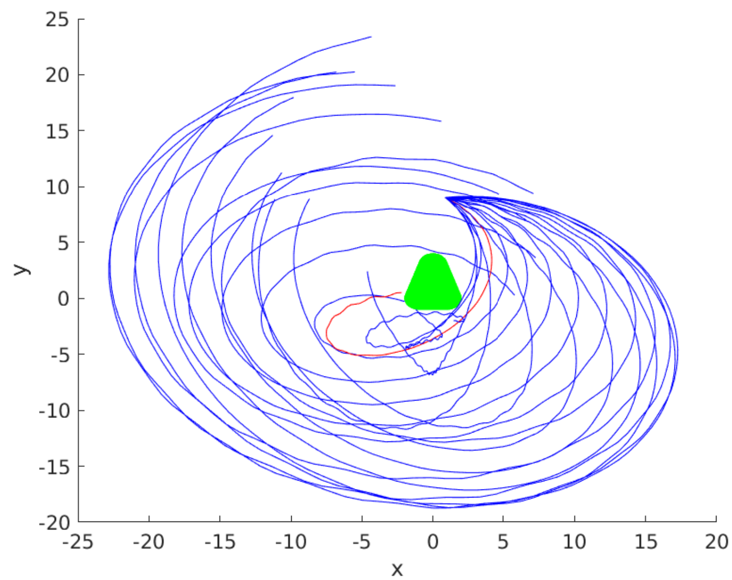

Рис. 17. Исходное множество. $T_1 = 4.5922$

Слегка сместим исходное множеств $\mathcal{X}_1$:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.84 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

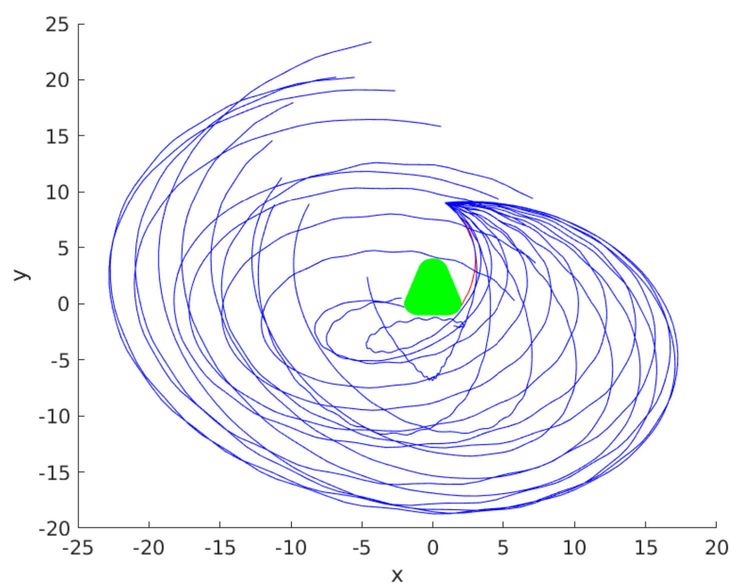

Рис. 18. Смещенное множество. $T_1 = 1.3545$

Эти примеры подтверждают отсутствие непрерывности T.

5 Список литературы

[1] Комаров Юрий, лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, Москва, 2020.

[2] Арутюнов Арам Владимирович, ”Лекции по выпуклому и многозначному анализу”, ВМК МГУ, Москва, 2020.