



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму:

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
А. В. Бабаев

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теоретические выкладки	4
3	Алгоритм решения	6
4	Иллюстрация работы программы	7
4.1	Изменение множества достижимости с течением времени	10
5	Список литературы	12

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x^2 - 2 \sin(3x^3) + x\dot{x} = u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программируемых управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$.

- 1) Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0, t \geq t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключений оптимального управления (с возможностью их визуализации).
- 2) Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2-t_1)^i}{N}, i = 0, 1, \dots, N$. Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0, N$ — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции (анимация изменения границы множества достижимости) должен быть сохранен в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени ($t_2 = t_1$).
- 3) В соответствующем задании отчета необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Теоретические выкладки

Проведем замену переменных $x_1 = x; x_2 = \dot{x}$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_1^2 + 2 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle. \quad (3)$$

Определение 1 Множеством достижимости называется множество точек, в которое мы можем попасть из момента времени t_0 при заданных ограничения на управление.

Сформулируем теорему:

Теорема 1 (*Принцип максимума Понтрягина*) Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4)$$

которая задана в \mathbb{R}^n , где $f(x, u), \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные функции, определенные на \mathbb{R}^{n+m} . Пусть U — множество допустимых управлений на интервале $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих ограничению $u(t) \in \mathcal{P} \in \mathbb{R}^m$. Пусть некоторому допустимому управлению $u^*(t) \in U$ соответствует решение $x^*(t)$ с концом $x^*(T)$, лежащим на границе множества достижимости. Тогда существует ненулевое сопряженное решение $\psi^*(t)$ системы

$$\dot{\psi} = -\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \rangle \quad (5)$$

такое, что почти всюду выполняется принцип максимума:

$$H(\psi, u^*, x^*) = \sup_{u \in \mathcal{P}} H(\psi, u, x). \quad (6)$$

Если управление $u^*(t)$ ограничено, то:

$$\sup_{u \in \mathcal{P}} H(\psi, u, x) = \text{const} \geq 0, \text{ для н.в. } t \in [0, T]. \quad (7)$$

Для полученной системы функция Гамильтона-Понтрягина принимает следующий вид:

$$H(\psi, u, x) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \psi_2 x_1^2 + \psi_2 2 \sin(3x_1^3) - \psi_2 x_1 x_2. \quad (8)$$

Тогда запишем сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1 - 18\psi_2 x_1^2 \cos(3x_1^3) + \psi_2 x_2; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1; \end{cases} \quad (9)$$

Поэтому, если точка принадлежит границе множества достижимости, то она удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Для построения границы множества достижимости построим все траектории, удовлетворяющие принципу максимума.

Из принципа максимума следует, что $u^*(t) = \alpha \operatorname{sign}(\psi_2(t))$, а переключения происходят в момент времени $\psi_2(t) = 0$.

Сформулируем две теоремы о нулях $\psi_2(t)$:

Теорема 2 (О конечном числе нулей) Пусть $u(t)$ — оптимальное управление для исходной системы, тогда $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Пусть на конечном интервале времени $\psi_2(t)$ имеет бесконечное число нулей, тогда (так как интервал времени конечен) существует такой момент времени t^* (точка "накопления"), в который $\psi_2(t^*) = 0$ и $\dot{\psi}_2(t^*) = 0$. Тогда $\dot{\psi}_1(t^*) = 0$ и $\psi_1(t^*) = 0$, что противоречит тому, что вектор $\psi(t)$ ненулевой.

Теорема 3 (О чередовании нулей) Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — оптимальная пара с временем быстродействия T , $\psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot))$ — решение сопряженной системы. Тогда $\forall \tau_1, \tau_2 : 0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ справедливы следующие утверждения:

1. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) = 0$, тогда $x_2(\tau_2) = 0$.
2. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) \neq 0$, но $\exists \tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : x_2(\tilde{\tau}) = 0$.
3. Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) = 0$, тогда $\psi_2(\tau_2) = 0$.
4. Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(\tau) \neq 0, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, тогда $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$.

Доказательство.

1. Применим (7) для моментов времени τ_1, τ_2 , получим $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2)$. $x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0$, $\psi_2(\tau_2)$ по условию равно 0, а так как вектор $\psi(\cdot)$ ненулевой, то $\psi_1(\tau_2) \neq 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$.
2. $\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2)$. Так как $x_2(\tau_1) \neq 0, \psi_1(\tau_1)\psi_1(\tau_2) < 0$, то $x_2(\tau_1)x_2(\tau_2) < 0$, что значит, что $x_2(\tau)$ имеет единственный корень на $[\tau_1, \tau_2]$ — $\tilde{\tau}$.
3. Из пункта 1 имеем, что $\psi_2(\tau) \neq 0, \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда:

$$\frac{d}{dt}(x_2\psi_1 + \dot{x}_2\dot{\psi}_2) = 0 = \dot{x}_2\psi_1 + x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\psi_2 + \ddot{x}_2\psi_2 + \dot{x}_2(-\psi_1 + \psi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}) \quad (10)$$

$$\dot{x}_2(\tau_1)\psi_2(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_2)\psi_2(\tau_2). \quad (11)$$

Так как $\psi_2(\tau_1) = 0$, а $x_2(\tau_2) \neq 0$ (иначе система имела бы только тривиальное решение). Поэтому $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Так как $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$. Если $\psi_2(\tau)$ не обращается в ноль на $[\tau_1, \tau_2]$, то $\dot{x}_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_2) > 0$, что противоречит тому, что τ_1, τ_2 — последовательные корни $x_2 \Rightarrow \exists \tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$

Из теоремы следует, что либо нули x_2 и ψ_2 совпадают, либо они чередуются. Разобьем систему (2) на две:

$$S_+ : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_1^2 + 2\sin(3x_1^2) - x_1x_2 \end{cases} \quad (12)$$

$$S_- : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_1^2 + 2 \sin(3x_1^2) - x_1 x_2 \end{cases} \quad (13)$$

Система S_+ отвечает управлению α , система S_- — $-\alpha$.

Пусть сначала управление равно α , тогда решаем систему S_+ и находим момент времени $t^* : x_2(t^*) = 0$. Построим траекторию, соответствующую системе S_+ до момента времени t^* . Из теорем (3) мы знаем, что нули ψ_2 чередуются с нулями x_2 . Организуем перебор по равномерной сетке на отрезке $[0; t^*]$ времени переключения \hat{t} . В момент переключения \hat{t} управление станет равно $-\alpha$. Тогда будем строить траекторию из точки $(x_1(\hat{t}), x_2(\hat{t}))$, соответствующую системе S_- до нового момента переключения, который находится из решения сопряженной системы с начальными условиями:

$$\begin{cases} \psi_1(\hat{t}) = 1, \\ \psi_2(\hat{t}) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Такой выбор начальных условий связан с нормировкой вектора ψ . Процесс продолжается ($u = \alpha$) меняется на ($u = -\alpha$) пока $t < T$. Для системы с начальным управлением $-\alpha$ процесс полностью аналогичен.

3 Алгоритм решения

1. Решить систему S_+ , получить момент времени $t^* : x_2(t^*) = 0$.
2. Сделать перебор по времени переключения на отрезке $[0; t^*]$.
3. Решить сопряженную систему с начальными условиями (14) и систему S_- , найти момент времени $t : \psi_2(t) = 0$.
4. Если $t < T$ сделать переключение и решать систему S_+ , а сопряженную систему с условиями $[-1; 0]$.
5. Повторять до $t \geq T$.
6. Аналогично поступить с системой S_- при начальном $u = -\alpha$.
7. Объединить полученную кривую в общее целое, которое и является границей множества достижимости.
8. При построении каждой траектории координаты точек переключения добавляются в специальный массив, а затем объединяются в кривую переключений.

4 Иллюстрация работы программы

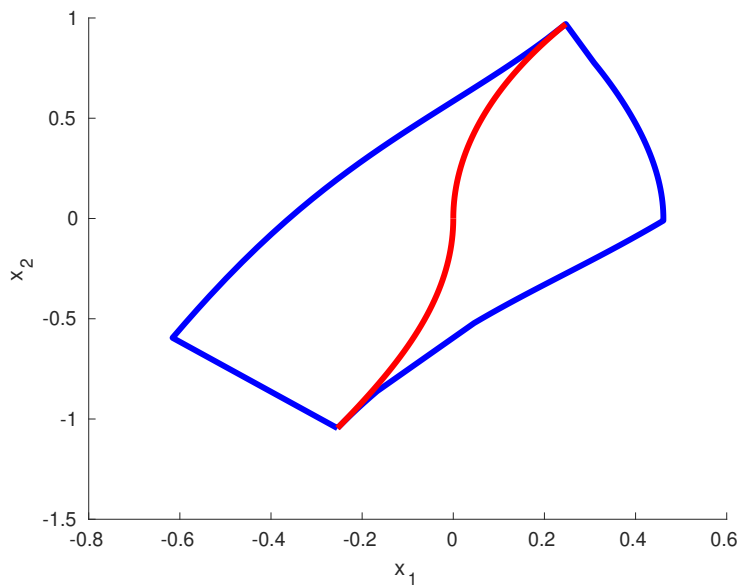


Рис. 1. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 2, t = 0.5$

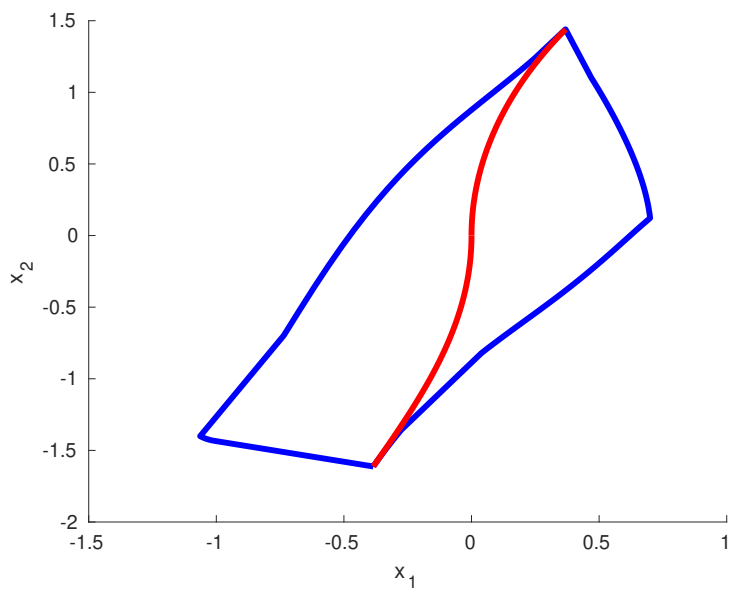


Рис. 2. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 3, t = 0.5$

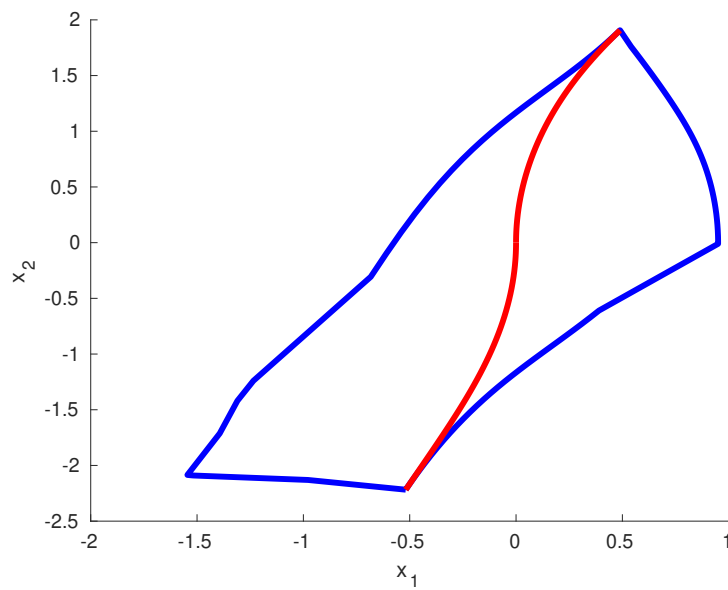


Рис. 3. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 4, t = 0.5$

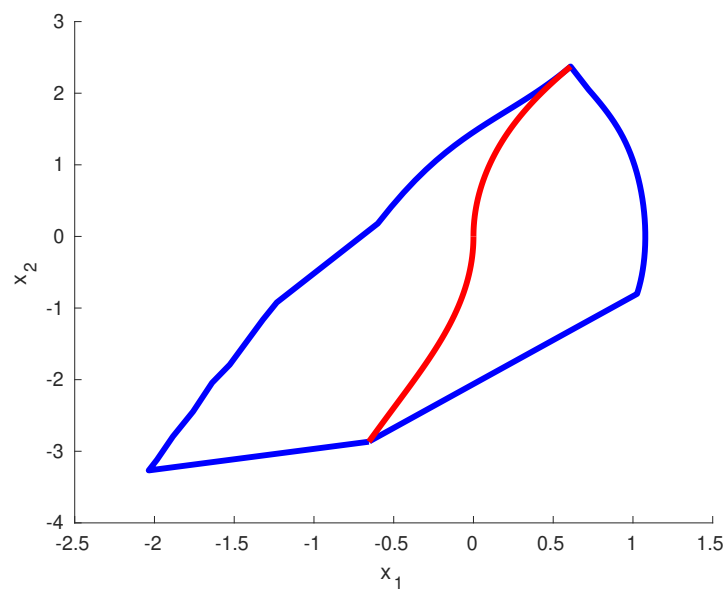


Рис. 4. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 5, t = 0.5$

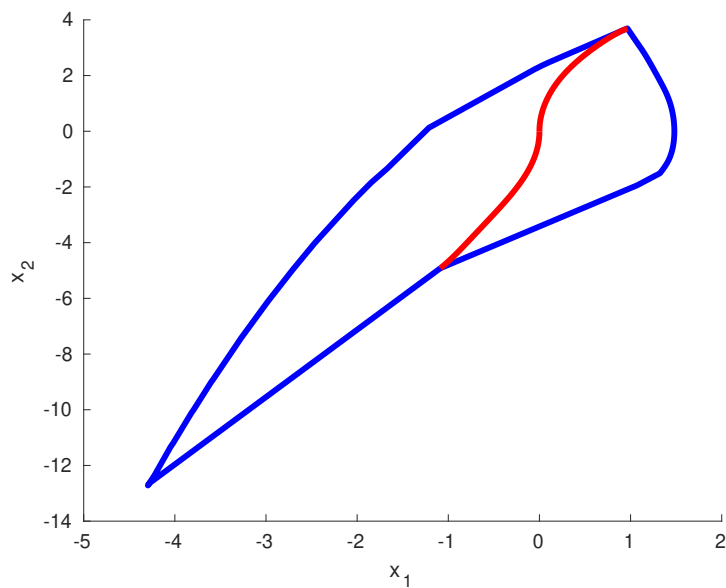


Рис. 5. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 8, t = 0.5$

Единственное наблюдение, которое я заметил, что при увеличении параметра alpha происходит увеличение множества достижимости.

4.1 Изменение множества достижимости с течением времени

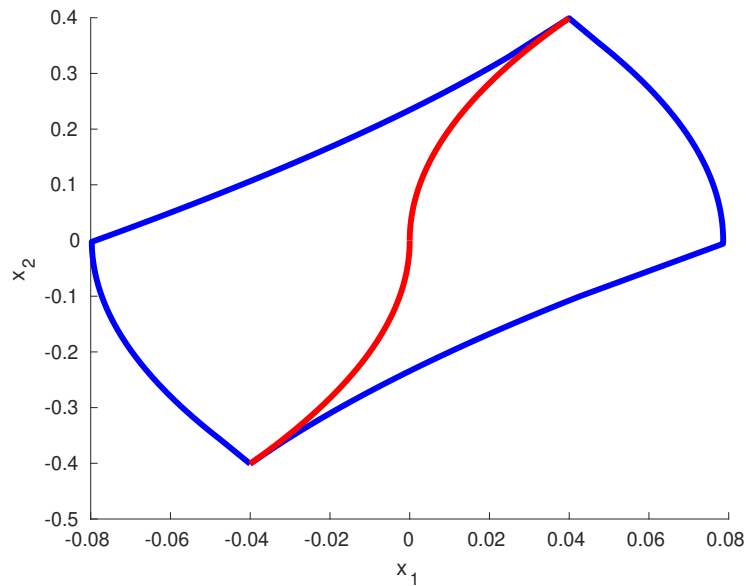


Рис. 6. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 2, t = 0.2$

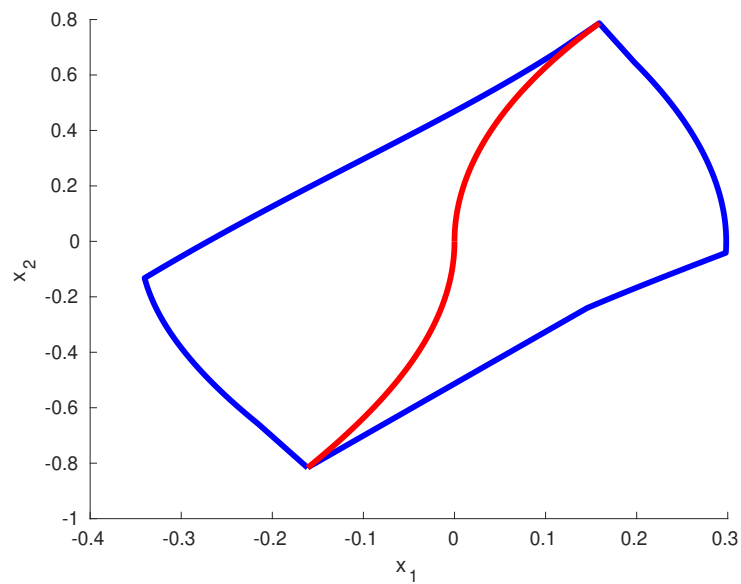


Рис. 7. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 2, t = 0.4$

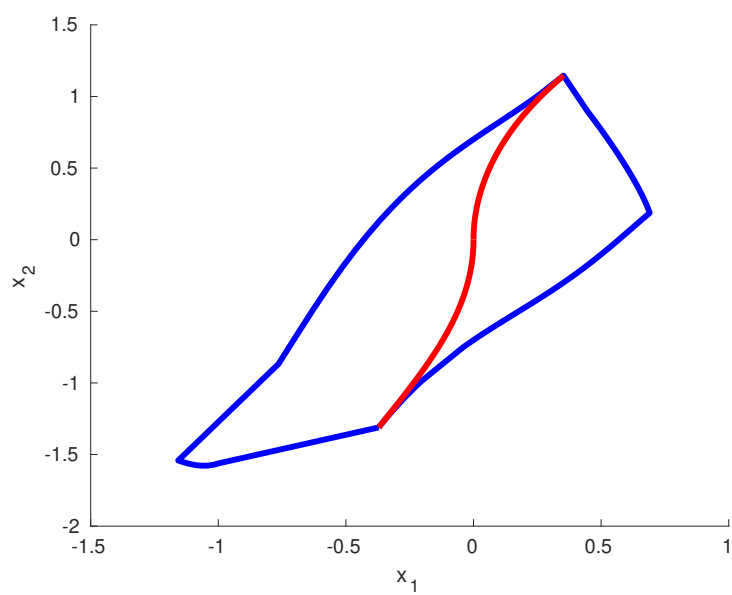


Рис. 8. Аппроксимация множества достижимости при $\alpha = 2, t = 0.6$

5 Список литературы

- [1] Комаров Юрий, лекции по оптимальному управлению. ВМК МГУ, Москва, 2021.