



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование.»

Студент 415 группы
М. М. Савинов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2022

Содержание

1	Задание 1	3
1.1	Формулировка задания	3
1.2	Генератор схемы бернулли	3
1.3	Геометрическое распределение	4
1.4	Свойство отсутствия памяти	4
1.5	Игра в орлянку	4
1.6	Примеры работы программ	5
2	Задание 2	5
2.1	Формулировка задания	5
2.2	Построение датчика сингулярного распределения	5
2.3	Критерий Колмогорова	6
2.4	Свойства симметричности и самоподобия	7
2.5	Математическое ожидание и дисперсия	8
2.6	Примеры работы программ	8
3	Задание 3	8
3.1	Формулировка задания	8
3.2	Построение датчика экспоненциального распределения	9
3.3	Свойство отсутствия памяти	9
3.4	Случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$	10
3.5	Датчик пуассоновского распределения	10
3.6	Датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. Проверка с помощью критерия хи-квадрат Пирсона	10
3.7	Датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты	12
3.8	t-критерий Стьюдента и критерий Фишера	13
3.9	Примеры работы программы	14
4	Задание 4	14
4.1	Формулировка задания	14
4.2	Датчик распределения Коши	14
4.3	Метод фон Неймана	15
4.4	Сравнение скоростей работы	16
4.5	Примеры выполнения программ	16
5	Задание 5	16
5.1	ЗБЧ и ЦПТ для нормального распределения	17
5.2	Доверительные интервалы для среднего и дисперсии	17
5.3	ЗБЧ для распределения Коши	18
5.4	Примеры работы программы	18
6	Задание 6	18
6.1	Формулировка задания	18
6.2	Метод Монте-Карло	19
6.3	Метод квадратур	20

7	Задание 7	21
7.1	Формулировка задания	21
7.2	Метод случайного поиска	21
7.3	Метод имитации отжига	22
7.4	Оценка точности вычислений	23
7.5	Примеры работы программы	23
8	Задание 8	24
8.1	Формулировка задания	24
8.2	Алгоритм решения	24
8.3	Примеры работы программы	26
9	Задание 9	26
9.1	Формулировка задания	26
9.2	Винеровский процесс	26
9.2.1	Алгоритм построения	28
9.3	Доверительные интервалы	28
9.4	Процес Орнштейна-Уленбека	28
9.5	Доверительные интервалы	30
9.6	Примеры работы программы	30
10	Задание 10	30
10.1	Формулировка задания	30
10.2	Добавление случайной ошибки	31
10.3	Фильтр Калмана	31
10.3.1	Доверительные интервалы	33
10.4	Примеры работы программы	33
11	Задание 11	33
11.1	Формулировка задания	33
11.2	Решение	33
11.2.1	Первая интерпретация: система массового обслуживания	33
11.2.2	Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью и единичными скачками	34
11.2.3	Третья интерпретация: работа страховой компании	35
11.3	Примеры работы программы	36
12	Библиография	36

1 Задание 1

1.1 Формулировка задания

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку - бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы $Y(i) = S_i/\sqrt{i}$, как функцию от номера испытания $i = 1, \dots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.2 Генератор схемы бернулли

Определение 1 *Схемой Бернулли называется эксперимент, в котором проводится, вообще говоря, неограниченное количество испытаний, при этом каждому испытанию присваивается бинарный признак (0 — успех, 1 — неудача), и выполняются следующие требования:*

- отсутствие взаимного влияния,
- воспроизводимость,
- испытания проводятся в сходных (но не идентичных) условиях.

Определение 2 *Случайная величина X , принимающая значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1-p$, называется случайной величиной с распределением Бернулли (бернуллиевской случайной величиной).*

Для получения генератора схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p возьмем генератор равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Сгенерируем равномерно распределенную случайную величину $X \sim U[0, 1]$, тогда $Y \sim \text{Bern}(p) = \mathbb{I}(X < p)$, где \mathbb{I} — индикаторная функция:

$$Y = \mathbb{I}(X < p) = \begin{cases} 1, & X < p, \\ 0, & x \geq p. \end{cases} \quad (1.1)$$

Определение 3 *Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p , $X \sim \text{Bi}(n, p)$, если*

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.2)$$

Случайную величину X обычно интерпретируют как число успехов в серии из n одинаковых независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом из них. Поэтому:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

где $X \sim \text{Bi}(n, p)$, $Y \sim \text{Bern}(p)$.

1.3 Геометрическое распределение

Определение 4 Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p , $X \sim \text{Geom}(p)$, если

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p = q^k p, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Так же, как и в случае биномиального распределения, проводится некоторое количество испытаний Бернулли с одинаковой вероятностью успеха, до первого успеха. В качестве случайной величины с геометрическим распределением берем количество неудач до первого успеха.

1.4 Свойство отсутствия памяти

Приведем утверждение, интерпретирующее свойство отсутствия памяти.

Утверждение 1 Пусть $Y \sim \text{Geom}$, тогда $\forall m, n \in \mathbb{N} \cup 0$ справедливо:

$$\mathbb{P}(Y \leq m + n | Y \leq m) = \mathbb{P}(Y \leq n),$$

то есть количество прошлых неудач не влияет на количество будущих неудач.

Доказательство 1 Распишем левую часть равенства:

$$\mathbb{P}(Y \leq m + n | Y \leq m) = \frac{\mathbb{P}(Y \leq m + n, Y \leq m)}{\mathbb{P}(Y \leq m)} = \quad (1.3)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y \leq m + n)}{\mathbb{P}(Y \leq m)} = \frac{\sum_{i=m+n}^{\infty} q^i p}{\sum_{i=m}^{\infty} q^i p} = q^n \frac{\sum_{i=m}^{\infty} q^i p}{\sum_{i=m}^{\infty} q^i p} = q^n. \quad (1.4)$$

Распишем правую часть равенства:

$$\mathbb{P}(Y \leq n) = \sum_{i=n}^{\infty} q^i p = p \frac{q^n}{1 - q} = q^n.$$

1.5 Игра в орлянку

Рассмотрим процесс игры в орлянку. Для этого смоделируем последовательность случайных величин X_1, X_2, \dots , где

$$X_n = \begin{cases} 1, & \xi \in [0, 0.5), \\ -1, & \xi \in [0.5, 1] \end{cases} \quad (1.5)$$

$\xi \sim U(0, 1)$. Произведем $N = 100000$ и построим траекторию процесса $Y(t), t \in [0, 1]$, которая в точках t_n , где $n = 0, \dots, N$

$$Y(t_n) = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{N}}$$

а в остальных случаях определяется с помощью кусочно-линейной интерполяции.

1.6 Примеры работы программ

2 Задание 2

2.1 Формулировка задания

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лесницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1-X$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.2 Построение датчика сингулярного распределения

Определение 5 Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывна и ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Рассмотрим алгоритм построения канторова множества.

Определение 6 Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; поступим также: теперь удалим из каждого отрезка его среднюю треть, и обозначим получившиеся множество через C_2 . На каждой итерации будем повторять эту процедуру, получим последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \dots$. Пересечение

$$C = \bigcap_{i=0}^{+\infty} C_i$$

называется канторовым множеством.

Канторово множество C можно определить как множество чисел от нуля до единицы, представимое в троичной системе счисления с помощью нулей и двоек. Посчитаем меру Лебега канторова множества. Вычтем длины отрезков, которые мы выкинули, из меры целого отрезка $[0, 1]$:

$$\mu(C) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - 1 = 0.$$

Таким образом, любая функция распределения, точки роста которой совпадают с точками канторова множества, является сингулярной. Как упоминалось ранее, точки канторова множества в троичной системе задаются только нулями и двойками, следовательно, все числа можно получить при помощи генератора случайной величины Бернулли следующим образом:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i}, x \in C, \alpha_i \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Суммирование в формуле ведется до бесконечности, т.к. ряд быстро сходится, то будем обрубать подсчет при некотором $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Критерий Колмогорова

Для проверки корректности работы датчика предлагается воспользоваться критерием Колмогорова. Будем считать максимальное по модулю отклонение эмпирической функции распределения от теоретической в точках выборки. Обозначим это число через D_n . Для проверки простой гипотезы H_0 о соответствии выборки известному закону распределения с заданным уровнем значимости α рассчитаем p -value по статистике $\sqrt{n}D_n$, то есть найдем значение функции распределения Колмогорова в заданной точке. Для этого используем следующее представление для функции распределения Колмогорова:

$$F_K(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}.$$

Гипотеза принимается, если $p = 1 - F_K(\sqrt{n}D_n)$ превышает заданный уровень значимости α .

Теорема 1 (Теорема Колмогорова) Пусть X_1, \dots, X_n, \dots – бесконечная выборка из распределения задаваемого непрерывной функцией распределения $F(x)$. Пусть $F_n(x)$ – выборочная функция распределения, построенная на первых n элементах выборки. Тогда

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow K$$

по распределению при $n \rightarrow +\infty$, где K – случайная величина, имеющая распределение Колмогорова.

Доказательство можно найти в [1]. Результаты проверки корректности датчика при уровне значимости $\alpha = 0.05$ представлены в следующей таблице:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	93.81%
10^3	10^4	95.32%
10^4	10^3	94.72%
10^4	10^4	95.4%

2.4 Свойства симметричности и самоподобия

Покажем свойство симметричности. Пусть имеется канторова случайная величина $X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i}$, где $\alpha_i \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$. Рассмотрим случайную величину $1 - X$:

$$1 - X = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(1 - \alpha_i)}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\beta_i}{3^i}.$$

Очевидно, что $\beta_i \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$, поэтому случайные величины $1 - X$ и X имеют одинаковое распределение.

Покажем свойство самоподобия относительно деления на 3. Рассмотрим условное распределение случайной величины Y на отрезке $[0, \frac{1}{3}]$. Это будет соответствовать тому, что $\alpha_1 = 0$. В таком случае:

$$Y = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_{i+1}}{3^{i+1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^i} = \frac{1}{3}Y.$$

Что и означает самоподобие относительно деления на 3.

Проверим последние упомянутые свойства с помощью критерия Смирнова. Найдем максимум поточечной разности двух эмпирических функций распределения. Обозначив полученное значение через D_{nm} , где n, m – длины выборок, и посчитав p – value по статистике $\sqrt{\frac{nm}{n+m}}D_{nm}$, для заданного уровня значимости α проверим простую гипотезу H_0 о том, что если обе выборки соответствуют одинаковому закону распределения.

Теорема 2 (теорема смирнова) Пусть $F_n^1(x), F_m^2(x)$ – эмпирические функции распределения с объемами выборок n и m соответственно случайной величины ξ . Тогда если $F(x) \in C^1(\mathbb{R})$, то

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}D_{nm} \leq t) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2}, \quad \forall t > 0$$

где $D_{nm} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^1 - F_m^2|$.

Доказательство можно найти в [1].

Результаты проверки свойства симметричности при уровне значимости $\alpha = 0.05$ представлены в следующей таблице:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	94.5%
10^3	10^4	94.1%
10^4	10^3	96.02%
10^4	10^4	93.61%

Результаты проверки свойства самоподобия при уровне значимости $\alpha = 0.05$ представлены в следующей таблице:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	95.6%
10^3	10^4	95.7%
10^4	10^3	96.06%
10^4	10^4	94.86%

2.5 Математическое ожидание и дисперсия

Вычислим математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины. Как упоминалось ранее, F обладает свойством самоподобия, то есть при $0 < x < \frac{1}{3}$ выполнено соотношение $F(x) = F(3x)/2$, а при $\frac{2}{3} < x < 1$ имеет равенство $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{F(3x-2)}{2}$. Поэтому

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_0^{1/3} x dF(x) + \int_{2/3}^1 x dF(x) = \frac{1}{2} \int_0^{1/3} x dF(3x) + \frac{1}{2} \int_{2/3}^1 x d\left(\frac{1}{2} + F(3x-2)\right).$$

Произведем замену $y = 3x$ в первом интеграле, и $y = 3x - 2$ во втором интеграле:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{3} dF(y) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y+2}{3} dF(y) = \frac{1}{6} \int_0^1 y dF(y) + \frac{1}{6} \int_0^1 y dF(y) + \frac{1}{3} \int_0^1 dF(y) = \frac{1}{3} \mathbb{E}\xi + \frac{1}{3}.$$

Таким образом, получаем $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$.

Похожим образом вычислим дисперсию. Для дисперсии верно тождество:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

Вычислим $\mathbb{E}\xi^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi^2 &= \int_0^{1/3} x^2 dF(x) + \int_{2/3}^1 x^2 dF(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y}{3}\right)^2 dF(y) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dF(y) = \\ &= \frac{1}{9} \mathbb{E}\xi^2 + \frac{2}{9} \mathbb{E}\xi + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \mathbb{E}\xi^2 + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

То есть имеем $\mathbb{E}\xi^2 = \frac{3}{8}$. По формуле для дисперсии получаем,

$$\mathbb{D}\xi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}.$$

2.6 Примеры работы программ

3 Задание 3

3.1 Формулировка задания

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимо экспоненциально распределенные с. в. с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

3.2 Построение датчика экспоненциального распределения

Определение 7 *Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Теорема 3 *Пусть на \mathbb{R} определена функция $F(x)$ такая, что:*

1. $F(x)$ непрерывна,
2. $F(x)$ монотонно возрастает,
3. $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$,
4. $F(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть так же задана случайная величина $Y \sim U[0, 1]$. Тогда функция $F(x)$ является функцией распределения случайной величины $X = F^{-1}(Y)$.

Доказательство можно найти в [2].

Понятно, что функция распределения $F_X(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Применим ее для моделирования датчика экспоненциального распределения на основе датчика равномерного распределения:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$
$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y).$$

и если $Y \sim U[0, 1]$, то получаем случайную величину, имеющую экспоненциальное распределение с параметром λ ,

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y) \sim \text{Exp}(\lambda).$$

3.3 Свойство отсутствия памяти

Определение 8 *Случайная величина $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ обладает свойством отсутствия памяти, то есть $\forall t \neq 0$ и $\forall s$ следует, что*

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s).$$

Доказательство 2 *По определению условной вероятности:*

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \mathbb{P}(X \geq s).$$

Таким образом, получается

$$\mathbb{P}(X \geq s + t) = \mathbb{P}(X \geq t) \mathbb{P}(X \geq s).$$

Для экспоненциально распределенной случайной величины верно, что:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t},$$

$$\mathbb{P}(X \geq s + t) = e^{-\lambda(s+t)}.$$

Значит, выполняется

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия памяти.

3.4 Случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Утверждение 2 Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – независимые экспоненциально распределённые случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Тогда случайная величина $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

Доказательство 3

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y > x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = \{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ независимы}\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_2 > x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n > x) = \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \dots (1 - F_{X_n}(x)) = 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \dots e^{-\lambda_n x} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)x}. \end{aligned}$$

3.5 Датчик пуассоновского распределения

Определение 9 Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теорема 4 Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда случайная величина, определённая следующим образом:

$$Y = \max_{n \in \mathbb{N}} (S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n) < 1$$

имеет распределение Пуассона с параметром λ (при этом $Y = 0$, если $X_1 \geq 1$).

Доказательство представлено в [2]. Таким образом, пуассоновскую случайную величину $Y = n - 1, Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ можно получить, генерируя экспоненциально распределённые случайные величины $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ до тех пор, пока их сумма не станет превышать 1.

3.6 Датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. Проверка с помощью критерия хи-квадрат Пирсона

Определение 10 Сходимостью по вероятности последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ к величине ξ называется сходимость к нулю вероятности того, что ξ_n не лежит в малой окрестности ξ , при произвольной малости этой окрестности:

$$\forall \epsilon > 0 : \mathbb{P}(\{|\xi_n - \xi|\} \geq \epsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$

Другой способ моделирования пуассоновской случайной величины основывается на предельном свойстве биномиального распределения:

$$\text{Bi}(n, p) \xrightarrow{\mathbb{P}} \text{Pois}(\lambda), p = \frac{\lambda}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Для того, чтобы проверить, что генерируется распределение Пуассона, будем использовать критерий хи-квадрат Пирсона.

Определение 11 Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимы, и каждая из них имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Говорят, что случайная величина определенная как

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2,$$

имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы.

Критерий Пирсона заключается в следующем. Пусть X — дискретная неотрицательная случайная величина со следующим распределением:

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Обозначим за k_0 максимальное значение в выборке из n испытаний, за n_k — количество элементов, принявших значение k . Тогда статистика критерия χ^2 Пирсона выглядит следующим образом:

$$X_n^2 = n \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(\frac{n_k}{n} - p_k)^2}{p_k},$$

а сам критерий заключается в сравнении X_n^2 с общепринятыми критическими значениями для данной гипотезы.

Сгенерируем при помощи датчика пуассоновского распределения n случайных величин, которые могут принимать значения k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и обозначим за n_k то, сколько раз в выборке встречается значение k (эмпирические частоты). Максимальное значение в выборке обозначим за k_0 . Значит, каждый эксперимент (генерирование случайной величины построенным датчиком) имеет $k_0 + 1$ исходов. Выборочное среднее равно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k_0} k n_k.$$

Примем в качестве оценки $\lambda = \bar{x}$. Проверим основную гипотезу H_0 о том, что значения k распределены по закону Пуассона (положим уровень доверия равным α), то есть для случайной величины X , полученной при помощи датчика справедливо:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, k_0.$$

Теоритические частоты равны

$$n'_k = n p_k.$$

Составим статистику хи-квадрат с k_0 степенями свободы:

$$\chi_{k_0}^2 = n \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(\frac{n_k}{n} - p_k)^2}{p_k} = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k}.$$

Если значение $\chi_{k_0}^2$ будет меньше табличного значения критической точки $\chi(\alpha, k_0)$, то гипотеза H_0 о распределении Пуассона подтверждается.

Таблица соответствия средних эмпирических значений и критических точек для критерия Пирсона при уровне доверия $\alpha = 0.95$:

Число степеней свободы	Эмпирическое значение	Критическая точка
50	11.62	66.33
100	10.57	123.22
500	12.52	552.07

Таблица соответствия средних эмпирических значений и критических точек для критерия Пирсона при уровне доверия $\alpha = 0.95$:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	95.8%
10^3	10^4	95.5%
10^4	10^3	94.11%
10^4	10^4	95.02%

3.7 Датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты

Определение 12 Случайная величина ξ имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами μ и σ^2 , $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, если ее плотность распределения задается формулой:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < +\infty.$$

Определение 13 Нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ стандартным нормальным распределением, и ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x)^2}{2}\right), -\infty < x < +\infty.$$

Для моделирования стандартного нормального распределения рассмотрим случайную величину $X = X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\xi = \rho \cos \phi, \quad \eta = \rho \sin \phi.$$

Вычислим якобиан замены:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \psi & -\rho \sin \psi \\ \sin \psi & \rho \cos \psi \end{vmatrix} = \rho \neq 0. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{\rho \cos \psi < x_1, \rho \sin \psi < x_2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta = \quad (3.3)$$

$$\{\omega = \rho^2\} = \int_{\sqrt{\omega} \cos \psi < x_1, \sqrt{\omega} \sin \psi < x_2} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\omega}{2}} d\omega d\phi. \quad (3.4)$$

Подынтегральное выражение является произведением плотностей случайных величин $Y_1 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$ и $Y_2 \sim U[0, 2\pi]$. Таким образом, совместное распределение случайных величин X_1 и X_2 совпадает с совместным распределением

$$\{\sqrt{Y_1} \cos Y_2, \sqrt{Y_1} \sin Y_2\}, \quad Y_1 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2}), \quad Y_2 \sim U[0, 2\pi].$$

Случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, поскольку их совместное распределение равно произведению их маргинальных распределений:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \\ \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

3.8 t-критерий Стьюдента и критерий Фишера

Проверим равенство математических ожиданий построенных случайных величин ξ и η , используя t-критерий Стьюдента. Обозначим через M_1 и M_2 математические ожидания первой и второй выборки соответственно. Рассмотрим разность выборочных средних $\Delta = \bar{\xi} - \bar{\eta}$. Если нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий выполнена, то математическое ожидание $(\Delta) = M_1 - M_2 = 0$. Зная, что $\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{D}(\eta) = 1$, то

$$\mathbb{D}(\bar{\xi}) = \frac{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^n x_i)}{n^2} = \{X_1, \dots, X_n \text{ независимы}\} = \frac{1}{n} = \mathbb{D}(\bar{\eta}),$$

то тогда

$$\mathbb{D}(\Delta) = \frac{2}{n}.$$

Используя несмещённую оценку дисперсии: $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}$ и $s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2}{n-1}$, получаем несмещённую оценку дисперсии разности выборочных средних: $s_{\Delta}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{n}$. Значит для проверки нулевой гипотезы t-статистика равна $t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{s_{\Delta}^2}} \sqrt{n}$. Если полученное значение статистики t превосходит критическое значение $t_{\alpha, r}$ для заданного уровня значимости α , то нулевая гипотеза отвергается.

Результаты проверки равенства математических ожиданий с помощью критерия Стьюдента с $\alpha = 0.05$ представлены в следующей таблице:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	93.7%
10^3	10^4	95.9%
10^4	10^3	95.31%
10^4	10^4	94.0%

Теперь опишем критерий Фишера равенства дисперсий. Для ранее определённых величин s_1^2 и s_2^2 зададим статистику

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Проверим равенство дисперсий с помощью критерия Фишера. Если $F < F_{\alpha/2}(n1, n1)$ или $F > F_{1-\alpha/2}(n1, n1)$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, где $F_{\alpha}(n1, m1)$ есть α -квантиль распределения Фишера. Результаты проверки равенства дисперсий с помощью критерия Фишера с $\alpha = 0.95$ представлены в следующей таблице:

Кол-во запусков	Объем выборки	Принятие гипотезы
10^3	10^3	94.7%
10^3	10^4	95.8%
10^4	10^3	95.62%
10^4	10^4	96.91%

3.9 Примеры работы программы

4 Задание 4

4.1 Формулировка задания

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции `ppmatal` `probability plot` убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

4.2 Датчик распределения Коши

Определение 14 Случайная величина X имеет распределение Коши с параметрами a и b , если ее функция распределения имеет вид:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{1}{2}.$$

Плотность распределения Коши имеет следующий вид:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Функция распределения $F_X(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Обратная функция для $F_X(x)$ равна $F_X^{-1}(y) = a + b \tan(\pi(y - \frac{1}{2}))$. Следовательно, в качестве датчика распределения Коши можно построить датчик случайной величины $X = F_X^{-1}(Y)$, где $Y \sim U[0, 1]$.

4.3 Метод фон Неймана

Метод фон Неймана заключается в моделировании нормального распределения путём мажорирования плотностью распределения Коши с параметрами a и b . Для достижения наилучшей оценки, начнем подбирать параметры a и b . Плотность стандартного нормального распределения $p_1(x)$ и плотность распределения Коши $p_2(x)$ выглядит следующим образом:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

При моделировании будем следовать такому алгоритму:

1. возьмем некоторое число $k > 0$, такое что $p_1(x) \leq kp_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
2. рассмотрим значение случайной величины $x = X, X \sim \text{Cauchy}(a, b)$,
3. Сгенерируем случайную величину $y = Y(x) \sim \text{Bern}(\frac{p_1(x)}{kp_2(x)})$,
4. Если $y = 1$, то x – значение из распределения с плотностью $p_1(x)$, иначе продолжаем моделирование, начиная с пункта 2.

Данный алгоритм работает тем быстрее, чем ближе отношение $\frac{p_1(x)}{kp_2(x)}$ к единице, поэтому в качестве k возьмем $k^* = \min_{a,b} \max_x \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$. Рассмотрим отношение

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} e^{-\frac{x^2}{2}} ((x-a)^2 + b^2).$$

Пусть $a = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 + b^2).$$

Найдем максимум этой функции:

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} x(2 - b^2 - x^2) = 0,$$

значит точки экстремума: $\begin{cases} x = 0, |b| > \sqrt{2} \\ x = \pm \sqrt{2 - b^2}, 0 < |b| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$ Таким образом

$$k^* = \min\{\min_{|b| > \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} b, \min_{0 \leq |b| \leq \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{b} e^{\frac{b^2}{2} - 1}\}.$$

Поскольку $k > 0$, то и $b > 0$. Найдем максимум вспомогательной функции

$$h(b) = \frac{e^{\frac{b^2}{2} - 1}}{b} :$$

$$\frac{1 - b^2}{b^2} e^{\frac{b^2}{2} - 1},$$

следовательно, поскольку $b > 0$, точкой экстремума является $b = 1$. Получается оптимум при $a^* = 0, b^* = 1$:

$$k^* = \min\{\sqrt{pi}, \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.\}$$

Докажем, что $a = 0$ – оптимальное значение параметра.

$$k^* = \min_{a,b} \max_x \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{x^2}{2}} ((x-a)^2 + b^2) \right) = \quad (4.1)$$

$$= \min_a \left\{ \min_{b>\sqrt{2}} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \Big|_{x=0}, \min_{0<b\leq\sqrt{2}} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \Big|_{x=\pm\sqrt{2-b^2}} \right\} > \quad (4.2)$$

$$> \min_a \left\{ \min_{b>\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2b}} (a^2 + b^2), \min_{0<b\leq\sqrt{2}} (\sqrt{2-b^2} + |a|) \right\} \quad (4.3)$$

Минимум выражения достигается при $a = 0$. Иллюстрация работы построенного датчика, использующая функцию **normal probability plot**, представлена в пункте "Примеры работы программы". График функции распределения стандартной нормальной случайной величины представляет прямую. На оси абсцисс откладываются точки выборки, на оси ординат — квантили стандартного нормального распределения.

Возьмем случайную величину $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. Тогда функция распределения

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Введем замену переменной $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$, тогда

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

где $F(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Таким образом, квантили различных распределений связаны между собой линейно, что означает, что любую нормальную случайную величину $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ можно представить в виде $\xi = \sigma\eta + \mu$, где $\eta \sim N(0, 1)$, а Функция **normal probability plot** будет прямой со сдвигом μ , и с коэффициентом наклона σ .

4.4 Сравнение скоростей работы

4.5 Примеры выполнения программ

5 Задание 5

1. Пусть $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т.е. исследовать поведение суммы S_n и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right).$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестным, для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.
3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b . Проверить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n . Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

5.1 ЗБЧ и ЦПТ для нормального распределения

Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Исследуем поведение суммы $\frac{S_n}{n}$ и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right).$$

Теорема 5 (Закон больших чисел) Пусть X_1, X_2, \dots – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E}X_i = \mu$, $\forall i \in \mathbb{N}, |\mu| < \infty, S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu$, т.е.

$$\forall \epsilon > 0 \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема 6 (Центральная предельная теорема) Пусть X_1, X_2, \dots – независимые одинаково распределенные случайные величины, $0 < \mathbb{E}X_i^2 < \infty, \forall i \in \mathbb{N}, S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}}\right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Доказательство этих теорем можно найти в [2].

5.2 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии

Рассмотрим случайную величину $X \sim \mu, \sigma^2$. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – ее реализации. Введем обозначения:

-

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

- Выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Для параметров строятся следующие доверительные интервалы:

1. Для неизвестного среднего μ при неизвестной дисперсии σ^2 :

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma,$$

где t_γ – критическая точка распределения Стьюдента (распределения Коши с параметрами $a = 0, b = 1$) с $n - 1$ степенями свободы и уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$;

2. Для неизвестной дисперсии:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}^2},$$

где χ_{n-1}^2 – критические точки χ^2 -распределения с $n - 1$ степенями свободы и соответствующими уровнями значимости $\alpha = 1 - \gamma$.

5.3 ЗБЧ для распределения Коши

Пусть $X_i \sim \text{Cauchy}(a, b), \forall i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим график, на нем видно, что $\frac{S_n}{n}$ не имеет предела, то есть закон больших чисел для распределения Коши не выполняется. Заметим, что это можно объяснить тем, что мы не можем найти математического ожидания от нашей случайной величины, то есть, мы нарушает одно из условий теоремы о ЗБЧ. Докажем, что математическое ожидание случайной величины $X \sim \text{Cauchy}(a, b)$ не является конечным:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bx}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{b}{2\pi} \ln((x-a)^2 + b^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty.$$

Следовательно, эмпирический результат соответствует теории.

Теорема 7 Если $\xi_1 \sim$

$\text{cauchy}(a_1, b_1), \xi_2 \sim \text{Cauchy}(a_2, b_2)$, то $\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Cauchy}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Или, что то же самое,

$$\text{Cauchy}(a_1, b_1) * \text{Cauchy}(a_2, b_2) = \text{Cauchy}(a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

где $*$ – операция свёртки.

Доказательство можно найти в [5].

Из этой теоремы следует следующие свойство распределения Коши:

Свойство 1 Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и имеют все одно и то же распределение Коши, то среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ имеет то же распределение, что и каждое ξ_j .

5.4 Примеры работы программы

ф

6 Задание 6

6.1 Формулировка задания

1. Посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2) + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 x_1^2 \dots x_{10}^2}}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- методом Монте-Карло,
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.

6.2 Метод Монте-Карло

Перепишем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2) + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{10}) g(x_1, \dots, x_{10}) dx_1 dx_2 \dots dx_{10},$$

где

$$f(x) = \sqrt{\pi^{10}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2^7} \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{10}}} \cdot e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2)}.$$

Заметим, что $g(x)$ является совместной плотностью распределения набора независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с параметрами 0 и $\frac{1}{2}$:

$$x = (x_1, \dots, x_{10}, x_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})).$$

Тогда интеграл можно переписать в виде $I = \mathbb{E}f(x_1, \dots, x_{10})$, $x_i \sim (0, \frac{1}{2})$.

Рассмотрим выборку

$$x^i = (x_1^i, \dots, x_{10}^i), \quad x_k^i \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}), \quad k = \overline{1, 10}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Согласно ЗБЧ выборочное среднее будет стремиться к математическому ожиданию, то есть:

$$\bar{f} = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x^i) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} I.$$

Оценим погрешность метода Монте-Карло с помощью центральной предельной теоремы:

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - I| < \epsilon) = \mathbb{P}(|\frac{S_n - nI}{n}| < \epsilon) = \mathbb{P}(|\frac{S_n - nI}{\sigma\sqrt{n}}| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon) = \quad (6.1)$$

$$= \mathbb{P}(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon < \frac{S_n - nI}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon) = \Psi_0(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon) - \Psi_0(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon) = \quad (6.2)$$

$$= \Psi_0(\frac{\sqrt{n}\sigma\epsilon}{}) - (1 - \Psi_0(\frac{\sqrt{n}\sigma\epsilon}{})) = 1 - 2\Psi_0(\frac{\sqrt{n}\sigma\epsilon}{}) = 1 - \Psi_0(x_p) = \alpha, \quad (6.3)$$

где

- $\Psi_0(x)$ - функция Лапласа или функция ошибок:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

- $x_p = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\epsilon$ - квантиль уровня p , есть решение уравнения

$$\Psi_0(x_p) = p,$$

- α - уровень доверия.

Погрешность ϵ для соответствующего уровня доверия $\alpha = 1 - 2\Psi_0(x_p)$ связана с x_p соотношением:

$$\epsilon = \frac{\sigma x_p}{\sqrt{n}}.$$

Значение $\sigma > 0$ используем как значение выборочной дисперсии:

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right)^2.$$

В качестве значения уровня доверия возьмем $\alpha = 0.99$.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \epsilon\right) = \alpha = 0.99.$$

Ниже приведена таблица зависимости вычисленных значений интеграла и полученной погрешности при разном количестве испытаний:

Число испытаний	Результат	Погрешность	Время работы
10^2	356.26	79.4061	0.0074
10^3	157.706	31.0156	0.0098
10^4	139.156	19.266	0.1216
10^5	119.4103	6.9206	0.4675
10^6	124.4291	2.3284	3.0683
10^7	124.5648	0.7101	16.911

6.3 Метод квадратур

Сведем задачу к вычислению собственного интеграла Римана. Для этого сделаем следующую замену переменных:

$$x_i = tg\left(\frac{\pi}{2}t_i\right), t_i \in [0, 1].$$

Таким образом, по методу прямоугольников исходный интеграл приблизится значением:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \frac{\exp\left\{-\left(\sum_{k=1}^{10} tg\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2 + \frac{1}{2^7 \prod_{k=1}^{10} tg\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2}\right)\right\}}{\prod_{k=1}^{10} tg\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2} \cdot \prod_{k=1}^{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2 dt_1 \dots dt_{10}$$

Проведем равномерное разбиение отрезка $[-1, 1]$ на N частей:

$$-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1, \quad t_i = -1 + i \frac{1 - (-1)}{N} = i \frac{2}{N} - 1.$$

Обозначим через $f(t_1, \dots, t_{10})$ подынтегральную функцию интеграла I . Будем использовать метод средних прямоугольников. Для этого нам необходимо выбрать середины нашего разбиения:

$$y_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда наш интеграл приближённо можно посчитать следующим образом:

$$I_N = \left(\frac{\pi}{N}\right)^{10} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_{10}=1}^N f(y_{i_1}, \dots, y_{i_{10}}).$$

Оценка погрешности метода прямоугольников на равномерной сетке имеет следующий вид:

$$\epsilon = \frac{h^2}{24}(b-a) \sum_{i,j=1}^{10} \max |f''(x_i, x_j)| = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{10} \max |f''_{x_i, x_j}|.$$

Приведем таблицу зависимости результата от количества точек разбиения отрезка:

N	Результат	Время работы
3	0.008	0.5518
4	5012.2123	4.9402
5	183.4886	45.398591

Вывод: метод Монте–Карло работает намного эффективнее по скорости, чем метод квадратур.

7 Задание 7

7.1 Формулировка задания

1. Методом случайного найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, т.е. $y = \min f(x)$, где

$$f(x) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right),$$

при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, функция допределяется по непрерывности при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве R^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

3. Оценить точность. Сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

7.2 Метод случайного поиска

Возьмем единичный круг и сгенерируем на нём набор равномерно распределенных по нему точек. Найдём минимальное значение. Совместная плотность равномерного распределения случайных величин x_1, x_2 на единичном круге равна

$$f_{x_1, x_2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В полярных координатах:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi, & r \leq 1, \\ x_2 = r \sin \phi, & 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Таким образом, получим:

$$\mathbb{P}((x_1, x_2) \in A) = \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^1 dr^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\phi.$$

Сделаем замену

$$q = r^2, r = \sqrt{q}, q \in [0, 1].$$

Тогда выражение примет вид:

$$\mathbb{P}((x_1, x_2) \in A) = \int_0^1 dq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\psi.$$

Следовательно, x_1 и x_2 выражаются в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{q} \cos \phi, & q \sim U[0, 1], \\ x_2 = \sqrt{q} \sin \phi, & \phi \sim [0, 2\pi]. \end{cases}$$

7.3 Метод имитации отжига

Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. Предполагается, что атомы уже выстроились в кристаллическую решётку, но ещё допустимы переходы отдельных атомов из одной ячейки в другую. Предполагается, что процесс протекает при постепенно понижающейся температуре. Переход атома из одной ячейки в другую происходит с некоторой вероятностью, причём вероятность понижается с понижением температуры. Устойчивая кристаллическая решётка соответствует минимуму энергии атомов, поэтому атом либо переходит в состояние с меньшим уровнем энергии, либо остаётся на месте.

При помощи моделирования такого процесса ищется такая точка или множество точек, на котором достигается минимум некоторой числовой функции $F(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X$. Решение ищется последовательным вычислением точек $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots$, пространства X ; каждая точка, начиная с \bar{x}_1 , «претендует» на то, чтобы лучше предыдущих приближать решение. Алгоритм принимает точку \bar{x}_0 как исходные данные. На каждом шаге алгоритм (который описан ниже) вычисляет новую точку и понижает значение величины (изначально положительной), понимаемой как «температура». Алгоритм останавливается по достижении точки, которая оказывается при температуре ноль.

Точка \bar{x}_{i+1} по алгоритму получается на основе текущей точки \bar{x}_i следующим образом. К точке \bar{x}_i применяется оператор A , которым случайным образом модифицирует соответствующую точку, в результате чего получаются новая точка \bar{x}^* . Точка \bar{x}^* становится точкой \bar{x}_{i+1} с вероятностью $P(\bar{x}^*, \bar{x}_{i+1})$, которая вычисляется в соответствии с распределение Гиббса:

$$P(\bar{x}^* \rightarrow \bar{x}_{i+1} | \bar{x}_i) = \begin{cases} 1, & F(\bar{x}^*) - \bar{x}_i < 0, \\ \exp(-\frac{F(\bar{x}^*) - \bar{x}_i}{T_i}), & F(\bar{x}^*) - \bar{x}_i \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $T_i > 0$ элементы произвольной убывающей, сходящейся к нулю положительной последовательности, которая задаёт аналог падающей температуры в кристалле. Скорость убывания и закон убывания могут быть заданы по желанию создателя алгоритма.

Алгоритм имитации отжига похож на градиентный спуск, но за счёт случайности выбора промежуточной точки должен попадать в локальные минимумы реже, чем градиентный спуск. Алгоритм имитации отжига не гарантирует нахождения минимума функции, однако при правильной политике генерации случайной точки в пространстве X , как правило, происходит улучшение начального приближения. Результаты работы программы по поиску минимума значения функции Розенброка методом отжига приведены в

следующей таблице ($x_0 = (0, 0)$, $n = 100$):

Кол-во запусков программы	Медиана	Минимальное значение
100	0.93381	0.2682
500	0.65021	0.04298
1000	0.59129	0.0573
5000	0.62327	0.0153

7.4 Оценка точности вычислений

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — фактическая точка минимума, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — точка минимума, полученная методом случайного поиска. Оценим $|x - \hat{x}|$. Рассмотрим график исследуемой функции.

Исследуемая функция четная по x_1, x_2 , имеет несколько точек минимума, которые не являются граничными. Тогда

$$|x - \hat{x}| \leq \epsilon = \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Оценим $|f(x) - f(\hat{x})|$ через $|x - \hat{x}|$. Поскольку f — непрерывна, то f — липшицева, следовательно:

$$|f(a) - f(b)| \leq \|\nabla f\|_\infty |a - b| = \text{esssup}_{a,b \in A} \|\nabla f\| |a - b| = \max_{a,b \in A} \|\nabla f\| |a - b|, \forall a, b \in A.$$

Оценим $\max_{x_1, x_2 \in A} \|\nabla f\|$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = \left| 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq 3x_1^2 + |x_1| + 10x_2^4 \leq \sqrt{10} + 10,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| = \left| 10x_1x_2^2 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) - 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq 10|x_1|x_2^2 + 10|x_1|x_2^4 \leq 10\sqrt{17}.$$

Следовательно, $\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{10} + 10)^2 + (10\sqrt{17})^2} \leq 35$. Окончательная оценка точности вычислений:

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq 35\sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Занесём полученные результаты в таблицу:

f_{min}	N
-0.8102	10^2
-1.3333	10^3
-1.3940	10^4
-1.4067	10^5

7.5 Примеры работы программы

Ы

8 Задание 8

8.1 Формулировка задания

Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа В единичном круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = f(x, y), \\ u \in C^2(D), f \in C(\partial D), \\ D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{cases}$$

Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решения и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

8.2 Алгоритм решения

Для приближенного решения задачи выберем на плоскости достаточно мелкую квадратную сетку с шагом h . В таком случае, координатами узлов сетки можно считать $x_j = jh, y_l = lh$.

Определение 15 Будем называть узел сетки (j, l) внутренним, если он и все четыре соседних с ним узла $(j-1, l), (j+1, l), (j, l-1), (j, l+1)$ принадлежит $D + \partial D$, в противном случае узел (j, l) , принадлежащий $D + \partial D$, будем называть граничным.

Во внутреннем узле (x_i, y_i) уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ заменим разностным уравнением:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}).$$

В граничных узлах положим

$$u_{i,j} = f_{i,j}.$$

Представим себе частицу M , которая совершает равномерное случайное блуждание по узлам сетки. А именно, находясь во внутреннем узле (x_i, y_j) сетки, эта частица за один переход с одинаковой вероятностью $1/4$ может переместиться в один из четырех соседних узлов, причем каждый такой единичный переход случаен и не зависит от положения частицы и истории ее передвижений. Будем считать, что блуждание заканчивается, как только частица попадет в граничный узел. Пусть $P(i, j, p, q)$ – вероятность того, что траектория частицы вышедшей из узла (x_i, y_j) , закончиться в граничном узле (x_p, y_q) . Так как блуждание точки неизбежно закончиться на границе в первой же точке выхода ее на границу, тогда

$$\sum_{(x_p, y_q) \in \partial D_k} P(i, j, p, q) = 1,$$

причем если $(p', q'), (p, q) \in \partial D_h$, то

$$P(p', q', p, q) = \begin{cases} 1, & (p' - p)^2 + (q' - q)^2 = 0, \\ 0, & (p' - p)^2 + (q' - q)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Составим сумму

$$v_{i,j} = \sum_{(x_p, y_q) \in \partial D_k} P(i, j, p, q) f_{pq}.$$

Если рассматривать функцию $f(x, y)$ как случайную величину, принимающую значения f_{pq} на границе ∂D_h , то написанная выше сумма представляет собой математическое ожидание функции $f(x, y)$ на границе ∂D_h для траекторий, начинающихся в узле (x_i, y_j) . Тогда в силу закона больших чисел можно аппроксимировать математическое ожидание выборочным средним:

$$v_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_p^{(k)}, y_q^{(k)}).$$

Частица, начавшая свое случайное блуждание из внутреннего узла (x_i, y_j) , после первого шага с вероятностью $1/4$, попадет в один четырех соседних узлов. Откуда по формуле полной вероятности:

$$v_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{(x_p, y_q) \in \partial D_h} (P(i-1, j, p, q) + P(i+1, j, p, q) + P(i, j-1, p, q) + P(i, j+1, p, q)) f_{pq} = (8.1)$$

$$= \frac{1}{4} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}) \quad (8.2)$$

То есть во внутреннем узле (x_i, y_j)

$$v_{i,j} = \frac{1}{4} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}),$$

в граничном узле

$$v_{i,j} = f_{i,j}.$$

По теореме о существовании решения внутренней задачи Дирихле решение существует.

Найдем решение для конкретной функции $f(x, y) = x^2 - y^2$. Будем искать его в виде $u_{x,y} = Ax^2 + By^2 + C$. Подставив его в формулировку задачи, получим следующие условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 2, \\ B + C = -1; \end{cases}$$

Решая систему получаем, что $A = 1, B = -1, C = 0$. То есть функция $u(x, y) = x^2 - y^2$ является решением задачи, причем это решение единственно. Согласно приведённым выше выкладкам, численное решение может быть найдено по следующему алгоритму:

1. Построим квадратную сетку на $[-1, 1] \times [-1, 1]$ с шагом Δ .
2. Функцию во всех узлах, не принадлежащих кругу, положим равной NaN .
3. Все токи круга разделим на граничные и внутренние:

- (а) В граничных точках положим $u(x, y) = f(x, y)$.
- (б) Значение в каждой внутренней точке получим следующим образом. Попад в внутреннюю точку (x_i, y_j) , проведем серию из n случайных блужданий. Тогда

$$u(x_i, y_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_i^{(k)}, y_i^{(k)}),$$

где $(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$ – граничная точка, в который завершилось k -е блуждание.

8.3 Примеры работы программы

9 Задание 9

9.1 Формулировка задания

Рассмотреть два вида процессов:

- Винеровский процесс $W(t), t \in [0, 1], W(0) = 0$.
- Процесс Орешкина-Уленбека $X(t), t \in [0, 1], X(0) = X_0$, то есть стационарный марковский гауссовский процесс. Начальные значения X_0 генерируются случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных гауссовских процессов

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Моделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломанной, с целью получения визуального непрерывной линии.

9.2 Винеровский процесс

Определение 16 Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Параметризованное семейство $\{W_t\}_{t \in T}$ случайных величин

$$W_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in T,$$

где $T \subset [0, +\infty)$ интерпретируется как временной интервал, называется случайным процессом.

Определение 17 Пусть дан случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$. Тогда он называется гауссовским, если для любых $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ случайный вектор $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ имеет многомерное нормальное распределение.

Определим винеровский процесс как гауссовский процесс в отрезке $[0, 1]$ со средним 0 и ковариационной функцией $cov(W(t_i), W(t_j)) = \min(t_i, t_j)$. Запишем основные свойства винеровского процесса:

- $W_0 = 0$ почти наверное;
- W_t является непрерывной функцией от t ;
- Приращения функции $W(t)$ независимы и имеют нормальное распределение со средним равным 0: $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $s < t$.

Определим плотность n -мерного нормального распределения с невырожденной ковариационной матрицей.

Определение 18 Пусть x – n -мерный вектор и $x \sim \mathcal{N}(m_x, R_x)$. Тогда его плотность имеет вид $p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|R_x|}} e^{-\frac{1}{2}(x-m_x)^T R_x^{-1}(x-m_x)}$, где R_x – ковариационная матрица.

Смоделируем винеровский процесс методом деления отрезка $[0, 1]$, в отношении α , исходя из следующих соображений:

1. В начальный момент времени $W_{t_0} = 0$ по определению;
2. Генерируем $W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0} \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
3. Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ его внутреннюю точку $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$ и условную плотность

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x, 1, x, x_2)}{p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(x_1, x_2)}.$$

Обозначим векторы $\bar{x} = (x_1, x, x_2)^T$ и $\hat{x} = (x_1, x_2)^T$ и рассмотрим плотности вероятностей этих векторов:

$$p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_1|}} e^{-\frac{1}{2}\bar{x}^T R_1^{-1} \bar{x}},$$

$$p_{W_{t_1}, W_{t_2}} = \frac{1}{(2\pi) \sqrt{|R_2|}} e^{-\frac{1}{2}\hat{x}^T R_2^{-1} \hat{x}},$$

где R_1, R_2 – соответствующие матрицы ковариаций. Так как ковариационная функция имеет вид $k(s, t) = \min(s, t)$, то находим выражения для R_1 и R_2 :

$$R_1 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t & t \\ t_1 & t & t_2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители и обратные матрицы для R_1 и R_2 :

$$|R_1| = t_1(t - t_1)(t_2 - t),$$

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t_1(t-t_1)} & -\frac{1}{t-t_1} & 0 \\ -\frac{1}{t-t_1} & \frac{t_2-t_1}{(t_2-t)(t-t_1)} & -\frac{1}{t_2-t} \\ 0 & \frac{1}{t_2-t} & \frac{1}{t_2-t} \end{pmatrix}$$

$$|R_2| = t_1(t_2 - t_1),$$

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{t_2}{t_1(t_2-t_1)} & -\frac{1}{t_2-t_1} \\ -\frac{1}{t_2-t_1} & \frac{1}{t_2-t_1} \end{pmatrix}.$$

В итоге можем подставить полученные выражения и получить выражение для $p_{W_i}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2)$.

9.2.1 Алгоритм построения

1. $t_0, t_1 = 1, W_{t_0}$, разыгрываем $W_{t_1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
2. Рекурсивно делим отрезки $[t_0, t_1], [t_0, t], [t, t_1]$ и т.д. в отношении α к $1 - \alpha$ и разыгрываем случайные величины W_t с условной плотностью найденной в предыдущем пункте (то есть имеющие нормально распределение с математическим ожиданием $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ и дисперсией $\alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)$) до тех пор, пока не достигнем заданной точности $t_{k+1} - t_k < \epsilon$.

9.3 Доверительные интервалы

Чтобы убедиться в правильности работы программы, будем отрисовывать на графике доверительные интервалы для траекторий винеровского процесса. Доверительным интервалом в данном случае будет $k_{1-\frac{\beta}{2}} \times [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$, где k_{β} — квантиль стандартного нормального распределения.

9.4 Процесс Орнштейна-Уленбека

Определение 19 Случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$ называется стационарным, если конечные распределения инвариантны относительно сдвига времени.

Определение 20 Гауссовский процесс $\{W_t\}_{t \in T}$ называется процессом Орнштейна-Уленбека, если он является стационарным и марковским.

Из стационарности процесса Орнштейна-Уленбека следует, что

$$\mathbb{E}W_t = a, \quad R(t, s) = R(|s - t|).$$

Без ограничения общности положим $a = 0$.

Обозначим $\mathbb{D}W_t = \sigma^2$, тогда $R(t, s)$ представима в виде $R(t, s) = \sigma^2 \rho(s, t)$, где $\rho(s, t)$ — коэффициент корреляции.

Теорема 8 Для того, чтобы последовательность W_1, \dots, W_n нормально распределенных случайных величин была марковской, необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho_{j,k} = \rho_{j,i} \rho_{i,k}, \quad \forall i, j, k : j \leq i < k \leq n,$$

где $\rho_{i,j}$ — коэффициент корреляции случайных величин W_i и W_j .

Доказательство можно найти в [1].

В силу того, что процесс W_t является марковским, получаем, что

$$\rho(s, t) = \rho(s, \tau)\rho(\tau, t).$$

Поскольку $R(s, t) = R(|s - t|)$, то $\rho(s, t) = \rho(s - t)$. Тогда, введя замену

$$x = s - \tau,$$

$$y = \tau - t,$$

преобразуем выражение для $\rho(s, t)$ к виду

$$\rho(x + y) = \rho(x)\rho(y).$$

Теорема 9 Пусть функция $u(t)$ определена при $t > 0$ и ограничена на каждом конечном интервале. Если $u(t)$ удовлетворяет соотношению $u(t + s) = u(t)u(s)$, то или $u(t) \equiv 0$, или $u(t) = e^{-\lambda t}$, где λ – некоторая положительная константа.

Доказательство представлено в [4].

Если $\rho(t) \equiv 0$, то $\text{cov}(W_t, W_s) = 0$, что равносильно тому, что W_t независимы в совокупности (так как процесс является гауссовским), поэтому моделирование процесса Орнштейна-Уленбека заключается в моделировании случайных величин имеющих распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Теперь рассмотрим случай $\rho(s, t) = e^{\lambda|s-t|}$, $\lambda > 0$. Ковариационная функция процесса Орнштейна-Уленбека имеет вид

$$R(s, t) = \sigma^2 e^{-\lambda|s-t|}.$$

Найдем переходную плотность

$$p_{W_t}(x_1 | W_s = x_2) = \frac{p_{W_t, W_s}(x_1, x_2)}{p_{W_s}(x_2)}.$$

Поскольку W_t – гауссовский процесс, то

$$p_{W_t, W_s}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, C^{-1}x)\right\},$$

$$p_{W_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $x = (x_1, x_2)$. Ковариационная матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \sigma^2 & R(t, s) \\ R(t, s) & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|C| = \sigma^4 - R^2(t, s), \quad C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} \sigma^2 & -R(t, s) \\ -R(t, s) & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$p_{W_t}(x_1|W_s = x_2) = \frac{1}{(2\pi(\sigma^2 - \frac{R^2(t,s)}{\sigma^2}))^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \frac{R(t,s)}{\sigma^2}x_2)^2}{2(\sigma^2 - \frac{R^2(t,s)}{\sigma^2})}\right\},$$

то есть

$$p(W_t|W_s = x_2) \sim \mathcal{N}(x_2 e^{-\lambda|t-s|}, \sigma^2(1 - e^{-2\lambda|t-s|})).$$

Так как рассматриваемый процесс является марковским, то зная случайные величины W_{t_1}, W_{t_2} мы можем сгенерировать случайную величину W_t , где $t_1 < t < t_2$. Будем моделировать W_t аналогично моделированию винеровского процесса. Для упрощения положим $\alpha = \frac{1}{2}$. Найдем условную плотность

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x) = \frac{p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{W_{t_1}, W_{t_2}}((x_1, x_2))},$$

где $t = \frac{t_1+t_2}{2}$. Поскольку W_t является гауссовским, то

$$p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x_1, x, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}|R_1|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1, x, x_2)^T R_1^{-1}(x_1, x, x_2)\right\},$$

$$p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|R_2|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1, x_2)^T R_2^{-1}(x_1, x_2)\right\}$$

где

$$R_1 = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda(t-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t-t_1)} & 1 & e^{-\lambda(t_2-t)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t)} & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & e^{-\lambda(t-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

После ряда преобразований получим

$$W_t \sim \mathcal{N}\left((x_1 + x_2) \frac{e^{-\frac{\lambda(t_2-t_1)}{2}}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}}, \sigma^2 \frac{1 - e^{\lambda(t_2-t_1)}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}}\right).$$

В качестве W_0 и W_1 возьмем

$$W_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad W_1 \sim (x_0 e^{-\lambda T}, \sigma^2(1 - e^{-2\lambda T})).$$

9.5 Доверительные интервалы

Чтобы убедиться в правильности работы программы, будем отрисовывать на графике доверительные интервалы для траекторий процесса Орнштейна-Уленбека. Доверительным интервалом в данном случае будет $k_{1-\frac{\beta}{2}} \times \frac{\sigma^2}{\lambda} \times [-1, 1]$, где k_β – квантиль стандартного нормального распределения.

9.6 Примеры работы программы

10 Задание 10

10.1 Формулировка задания

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить случайную ошибку с известной дисперсией к реализации процесса Орнштейна–Уленбека.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу. Параметры процесса и белого шума считать известными.
3. Рассмотреть случай, когда шум
 - (а) Является гауссовским,
 - (б) Имеет распределение Коши.

10.2 Добавление случайной ошибки

Определение 21 *Дискретным белым шумом называется последовательность $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин.*

Рассмотрим соотношение

$$x_{k+1} = f(x_k) + \omega(k),$$

где $\omega(k)$ – случайная помеха, $x_k, \omega(k)$ независимы, $f(x_k) = \mathbb{E}(x_{k+1}|x_k)$. Пусть рассматривается марковский процесс, тогда совместная плотность по всем моментам времени

$$\begin{aligned} p(x_0, \dots, x_k) &= p(x_k|x_{k-1}, \dots, x_0) \cdot p(x_{k-1}|x_{k-2}, \dots, x_0) \cdot \dots \cdot p(x_1|x_0) \cdot p(x_0) = \\ &= \{\text{марковский процесс}\} = p(x_k|x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1}|x_{k-2}) \cdot p(x_1|x_0) \cdot p(x_0). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в случае, когда шум имеет распределение Коши, фильтрацию провести не получится. Это связано с тем, что распределение Коши не имеет математического ожидания. Далее будем рассматривать случай, когда шум является гауссовским ($\omega(k)$ и x_k имеют гауссовское распределение).

10.3 Фильтр Калмана

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$x_{k+1} = A_k x_k + \omega_k.$$

Поскольку случайные величины гауссовские, то для их полного описания достаточно знать их первые и вторые моменты. Пусть имеется следующая система:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + w_k, \\ y_{k+1} = C_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \end{cases}$$

причем $x_0, w_0, \dots, w_{N-1}, v_0, \dots, v_{n-1}$ независимы в совокупности. $Y_{N-1} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$ – все наблюдения, а $X_{N-1} = (x_0, \dots, x_{N-1})$ – исходный процесс, который необходимо найти. Для этого воспользуемся фильтром Калмана.

Обозначим $\mathbb{E}x_0 = \overline{x_0}, \mathbb{D}x_0 = S, \mathbb{E}w_k = \mathbb{E}v_k = 0, \mathbb{D}w_k = M_k, \mathbb{D}v_k = N_k > 0$. Фильтр Калмана имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}, \\ \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + R_{k+1|k} C_{k+1}^T (C_{k+1} R_{k+1|k} C_{k+1}^T + N_{k+1})^{-1} (y_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}), \\ R_{k+1|k} = A_k R_{k|k} A_k^T + M_k \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k} - R_{k+1|k} C_{k+1}^T (C_{k+1} R_{k+1|k} C_{k+1}^T + N_{k+1})^{-1} C_{k+1} R_{k+1|k}, \\ \hat{x}_{0|0} = \overline{x_0}, R_{0|0} = S. \end{cases}$$

В нашей задаче x_k – процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами σ_W и $\lambda, y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}$, где v – белый шум. Пусть σ_n^2 – его дисперсия. Тогда получаем, что $N_k = \sigma_n^2$, а $C_k = 1$. Осталось найти A_k и M_k . Будем считать, что $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ независимо от i . Так как мы рассматриваем одномерный процесс Орнштейна–Уленбека, то A_k, C_k являются скалярами, то от их транспонирования ничего не меняется. Обозначим $\mathbb{D}x_k = V_k$. С одной стороны имеем:

$$\mathbb{D}x_{k+1} = A_k^2 \mathbb{D}x_k + \mathbb{D}w_k = A_k^2 V_k + M_k,$$

$$\text{cov}(x_{k+1}, x_k) = \mathbb{E}(x_{k+1}x_k) - \mathbb{E}x_{k+1}\mathbb{E}x_k = \mathbb{E}(A_k x_k^2 + w_{k+1}x_k) - A_k(\mathbb{E}x_k)^2 = \quad (10.1)$$

$$(10.2)$$

$$= \{\mathbb{E}w_{k+1} = 0, w_{k+1} \text{ и } x_k \text{ независимы}\} = A_k(\mathbb{E}x_k^2 - (\mathbb{E}x_k)^2) = A_k \mathbb{D}x_k = A_k V_k. \quad (10.3)$$

С другой стороны, так как ковариационная функция процесса Орнштейна–Уленбека имеет вид $R(t, x) = \sigma_W^2 e^{\lambda|t-s|}$, то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_k^2 V_k + M_k = \sigma_W^2, \\ A_k V_k = \sigma_W^2 e^{-\lambda \Delta t}, \\ V_k = \sigma_W^2. \end{cases}$$

Получаем, что $V_k = \sigma_W^2, A_k = e^{-\lambda \Delta t}, M_k = \sigma_W^2(1 - e^{-2\lambda \Delta t})$. Обратим внимание, что когда мы в предыдущем задании вводили процесс Орнштейна–Уленбека, то считали, что $\mathbb{D}x_k = \sigma_W^2$, что согласуется с тем, что мы получили.

Тогда фильтр Калмана для нашей задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = e^{-\lambda \Delta t} \hat{x}_{k|k}, \\ \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + R_{k+1|k} (R_{k+1|k}^T + N_{k+1})^{-1} (y_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}), \\ R_{k+1|k} = e^{-2\lambda \Delta t} R_{k|k} + \sigma_W^2 (1 - e^{-2\lambda \Delta t}) \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k} - R_{k+1|k} (R_{k+1|k} + N_{k+1})^{-1} R_{k+1|k}, \\ \hat{x}_{0|0} = 0, \\ R_{0|0} = \sigma_W^2. \end{cases}$$

Обозначив $h = R_{k+1|k}(R_{k+1|k} + \sigma_n^2)^{-1}$, получим итоговую систему:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = e^{-\lambda\Delta t} \hat{x}_{k|k}, \\ \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + R_{k+1|k}(R_{k+1|k}^T + N_{k+1})^{-1}(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}) \\ R_{k+1|k} = e^{-2\lambda\Delta t} R_{k|k} + \sigma_W^2(1 - e^{-2\lambda\Delta t}) \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k}(1 - h), \\ \hat{x}_{0|0} = 0, \\ h = R_{k+1|k}(R_{k+1|k} + \sigma_n^2)^{-1} \\ R_{0|0} = \sigma_W^2. \end{cases}$$

10.3.1 Доверительные интервалы

Чтобы убедиться в правильности работы программы, будем отрисовывать на графике доверительные интервалы для траекторий процесса Орнштейна–Уленбека. Доверительным интервалом в данном случае будет $\hat{x} + k_{1-\frac{\beta}{2}} \times [-\sqrt{R_{k|k}}, \sqrt{R_{k|k}}]$, где k_β — квантиль стандартного нормального распределения.

10.4 Примеры работы программы

11 Задание 11

11.1 Формулировка задания

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Первая интерпретация: система массового обслуживания. При этом, первая координата поля — время поступления заявки в СМО (равномерное распределение), вторая — время ее обслуживания (распределение χ^2 с 10 степенями свободы).
2. Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(1 + \cos(t))$ и единичными скачками. Свести данную задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса при помощи метода Льюиса и Шеддера к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата имеет равномерное распределение, а вторая — распределение Бернулли.
3. Третья интерпретация: работа страховой компании. Первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая координата — величина ущерба (распределение Парето). Поступление капитала по времени линейно со скоростью $c > 0$, начальный капитал $W > 0$.
4. Для каждой системы рассмотреть всевозможные случаи поведения системы в зависимости от значения параметров.

11.2 Решение

11.2.1 Первая интерпретация: система массового обслуживания

Пусть λ — интенсивность пуассоновского поля. Времена поступления заявок генерируются так, что $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Определение 22 *Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение суммы квадратов k независимых стандартных нормальных случайных величин.*

Время обслуживания каждой заявки s_i независимы и генерируются как случайные величины с распределением $\chi^2(10)$.

Поскольку все заявки обрабатываются последовательно, время окончания обработки заявки, поступившей в момент времени t_i можно найти следующим образом:

- если к моменту поступления заявки предыдущая заявка уже обработана, то нужно к времени поступления текущей заявки прибавить время ее обработки:

$$Q_i = t_i + s_i.$$

- если предыдущая заявка еще не обработана, то нужно прибавить к времени конца обработки предыдущей заявки время обработки текущей:

$$Q_i = Q_{i-1} + s_i.$$

Обобщая вышесказанное, имеем:

$$Q_i = t_i + \max(0, Q_{i-1} - t_i) + s_i.$$

Для каждой заявки будем считать количество людей в очереди.

- если во время поступления i -й заявки очереди не было то положим $n_i = 0$.
- если предыдущая заявка еще не обработана, то:

$$n_i \neq Q_k : k < i \text{ и } Q_k > t_i,$$

т.е. количество еще не выполненных к моменту времени t_i заявок.

Поскольку время обработки еще одной заявки в среднем равно 10, а средний интервал между поступлениями заявок равен $\mathbb{E}\Delta_i = \frac{1}{\lambda}$, то при $\lambda < 0.1$ очереди практически не будут, а при $\lambda > 0.1$ очередь будет неограниченно расти.

11.2.2 Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью и единичными скачками

Пусть $T_1, \dots, T_n \dots$ — времена наступления некоторых событий, а $N(t_1, t_2)$ — количество событий, произошедших в промежуток $[t_1, t_2]$. Заметим, что $T_{n+1} - T_n$ имеет функцию распределения $F(x) = 1 - \exp\{-\Lambda(t+x) - \Lambda(t)\}$, $x > 0$, где

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du = \lambda(t + \sin t)$$

неограниченно возрастает с ростом t .

T_{n+1} распределено как $T_n + F^{-1}(U)$, где U равномерно распределена на $[0, 1]$. Заметим, что если записать U как $1 - \exp\{-E\}$, где E — экспоненциальная случайная величина с параметром $\lambda_E = 1$, то T_{n+1} распределена как $\Lambda^{-1}(E + \Lambda(T_n))$.

Будем искать обратную функцию $\Lambda^{-1}(y)$ численно, так как аналитически это не представляется возможным ($\Lambda'(t) = \lambda_0(1 + \cos(t))$ почти всюду положительна, то есть функция возрастает). Такой метод моделирования неоднородного процесса Пуассона называется методом Льюиса-Шеддера.

Чтобы не искать обратную функцию, можно воспользоваться следующей модификацией метода Льюиса-Шеддера. Пусть имеется переменная t , в которой хранится текущее время (но не обязательно событие произошло строго в это время).

- На каждом шаге генерируем случайную величину $\xi \sim \text{Exp}(2\lambda_0)$.
- Прибавляем к переменной t величину ξ и генерируем случайную величину $\eta = \text{Bern}(\frac{1+\cos t}{2})$.
 - если она приняла значение 1, то полагаем $T_{i+1} = t$ и $i = i + 1$
 - иначе ничего не делаем и повторяем процесс заново

11.2.3 Третья интерпретация: работа страховой компании

Определение 23 *Случайная величина X имеет распределение Парето с параметрами x_m и k , если ее функция распределения имеет вид:*

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^k.$$

Для моделирования случайной величины, имеющей распределение Парето, снова воспользуемся методом обратной функции.

Обратная функция для данной функции распределения имеет вид:

$$F_X^{-1}(x) = \frac{x_m}{(1-x)^{\frac{1}{k}}}.$$

Сгенерируем времена наступления страховых случаев на временном интервал $[0, T]$:

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < T,$$

причем $t_i - t_{i-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$ — интенсивность потока страховых случаев.

Величину ущерба s_i страхового случая в момент времени t будем генерировать с помощью распределения Парето с параметрами x_m и k . Случайную величину, распределенную по Парето, будем генерировать, воспользовавшись методом обратных функций:

$$F_\xi^{-1}(y) = \frac{x_m}{(1-y)^{\frac{1}{k}}}.$$

Учтем, что если $Y \sim U[0, 1]$, то и $(1 - Y) \sim U[0, 1]$. Тогда случайная величина

$$X = x_m Y^{-\frac{1}{k}}, \quad Y \sim U[0, 1]$$

имеет распределение Парето с параметрами x_m и k .

Величина капитала компании в момент времени t выражается как

$$W_t = W_0 + ct - s(t),$$

где $s(t)$ — сумма величин ущерба страховых случаев, произошедших в моменты времени t_i такие, что $t_i \leq t$. Время разорения — случайная величина, задаваемая следующим условием:

$$T = \min\{t > 0 | W_t < 0\}.$$

Выведем зависимость функции $W(t)$ от параметров λ, x_m, k, W_0, c . Будем считать, что $k > 1$. Тогда

$$\mathbb{E}W'(t) = c - \mathbb{E}'s(t) = c - \left(\left[\sum_{\approx \triangleright < \approx} \sim \triangleright \right] \right)' = c - \left(\frac{t}{\frac{1}{\lambda}} \mathbb{E}[s_i] \right)' = c - \frac{\lambda k x_m}{k-1}.$$

Таким образом:

- $c(k-1) > \lambda k x_m$ капитал растёт.
- $c(k-1) = \lambda k x_m$ система находится в положении равновесия.
- $c(k-1) < \lambda k x_m$ капитал уменьшается.

11.3 Примеры работы программы

12 Библиография

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н., Избранные труды, в 6 томах. Том 2. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
- [2] Кропачёва Н.Ю., Тихомиров А.С. Моделирование случайных величин: Метод. указания, НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2004.
- [3] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, в 2х томах. Т.1, М., Мир, 1984.
- [4] Востриков И. В. Лекции по курсу «Теория идентификации», 2008.