

Zusammenfassung Mechanik II

Nina Schmidt - nischmidt@ethz.ch

Version: February 21, 2022

Template by Micha Bosshart

1 Repetition

1.1 Einheitskreis

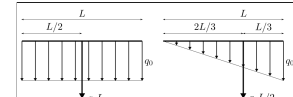
α	0° [0]	30° [$\pi/6$]	45° [$\pi/4$]	60° [$\pi/3$]	90° [$\pi/2$]	180° [π]
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \hat{=} -\sin(\alpha) \quad | \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \hat{=} \sin(\alpha)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \hat{=} \sin(\alpha) \quad | \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \hat{=} -\cos(\alpha)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \hat{=} \cos(\alpha) \quad | \quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

1.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$
$$a \times b = -b \times a$$
$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\angle[a, b]) \hat{=} \text{Fläche d. Parallelogramms}$$

1.3 Reduktion Linienverteilte Kraft

$$R = \int_0^L q(x) dx$$
$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot q(x) dx}{\int_0^L q(x) dx} = \frac{\int_0^L x \cdot q(x) dx}{R}$$


2 Koordinatentransformation

	Kartesisch	Zylindrisch	Sphärisch
x	x	$\rho \cos \varphi$	$r \sin \theta \cos \psi$
y	y	$\rho \sin \varphi$	$r \sin \theta \sin \psi$
z	z	z	$r \cos \theta$
ρ	$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin \theta$
φ	$\arctan \frac{y}{x}$	φ	ψ
z	z	z	$r \cos \theta$
r	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
θ	$\arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$\arctan \frac{\rho}{z}$	θ
ψ	$\arctan \frac{y}{x}$	φ	ψ

2.1 Allgemein

Ortsvektor: $\underline{r}(t)$ | Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{s} \cdot \underline{\tau}$

Beschleunigung: $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$ | Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = |\dot{\underline{r}}|$

Tangentialer Einheitsvektor: $\underline{\tau} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

2.2 Kartesisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

2.3 Zylindrisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = \rho(t)\underline{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\underline{e}_z$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}(t)\underline{e}_\varphi + \dot{z}(t)\underline{e}_z$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$

Einheitsvektor in Abhängigkeit: $\underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y$

$\underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y \quad | \quad \underline{e}_z \rightarrow \text{konstant}$

2.4 Sphärisch

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = r(t)\underline{e}_r(\theta(t), \psi(t))$

Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r \cdot \sin(\theta)\dot{\psi}\underline{e}_\psi$

Schnelligkeit: $\dot{s} = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r \cdot \sin(\theta)\dot{\psi})^2}$

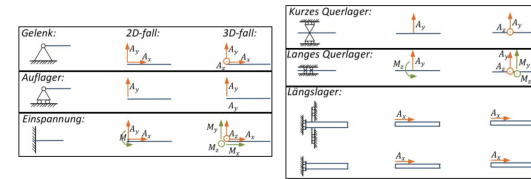
Einheitsvektor in Abhängigkeit:

$\underline{e}_r = \sin(\theta)\cos(\psi)\underline{e}_x + \sin(\theta)\sin(\psi)\underline{e}_y + \cos(\theta)\underline{e}_z$

$\underline{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\psi)\underline{e}_x + \cos(\theta)\sin(\psi)\underline{e}_y - \sin(\theta)\underline{e}_z$

$\underline{e}_\psi = -\sin(\psi)\underline{e}_x + \cos(\psi)\underline{e}_y$

3 Lagerbindungen und Lagerkräfte



4 Beanspruchung in geraden Balken

Symbol	Name	Beanspruchung auf:
N	Normalkraft	Zug ($N > 0$) Druck ($N < 0$)
Q_2, Q_3	Querkraften	Schub
T	Torsionsmoment	Torsion
M_2, M_3	Biegemomente	Biegung

4.1 Bestimmung der Beanspruchung

- Lagerkräfte am Gesamtsystem bestimmen
- Körper schneide, Laufvariable und Schnittgrößen einführen
- Gleichgewichtsbedingungen für das abgegrenzte System aufstellen \rightarrow Schnittgrößen berechnen \rightarrow Momentenbedingung bzgl. Schnittpunkt!
- Je nach Aufgabenstellung \rightarrow Beanspruchungsdiagramm zeichnen

4.2 Differentialbeziehungen

Gelten für gerade Stabträger. q steht für Kraftverteilung:

$$\begin{cases} Q'_y = \frac{d}{dx} Q_y = -q_y \\ M'_z = \frac{d}{dx} M_z = -Q_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q'_z = \frac{d}{dx} Q_z = -q_z \\ M'_y = \frac{d}{dx} M_y = Q_z \end{cases}$$
$$\begin{cases} M''_z = \frac{d^2}{dx^2} M_z = q_y \\ M''_y = \frac{d^2}{dx^2} M_y = -q_z \end{cases}$$

Wichtig: Niemals über unstetige Belastungen (Einzelkräfte und Einzelmomente) integrieren! Bestimmung der Integrationskonstanten aus folgenden Randbedingungen:

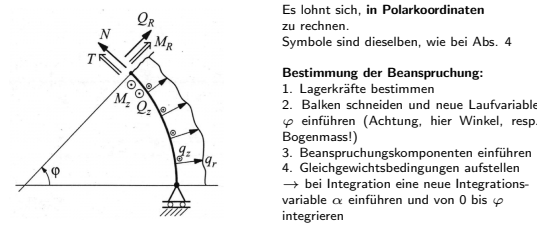
Lagerart	Symbol	Q	M	N
-Auflager		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Festlager		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
-Einspannung		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
-Freies Ende		$Q = 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Gelenk		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N \neq 0$

Beachte:

Q = positive Lagerkraft, wenn Laufvariable weg vom Lager

Q = negative Lagerkraft, wenn Laufvariable zum Lager

5 Beanspruchung im gekrümmten Balken



Es lohnt sich, in **Polarkoordinaten** zu rechnen.
Symbole sind dieselben, wie bei Abs. 4

Bestimmung der Beanspruchung:

- Lagerkräfte bestimmen
- Balken schneiden und neue Laufvariable φ einführen (Achtung, hier Winkel, resp. Bogenmass!)
- Beanspruchungskomponenten einführen
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen \rightarrow bei Integration eine neue Integrationsvariable α einführen und von 0 bis φ integrieren

5.1 Differentialbeziehungen

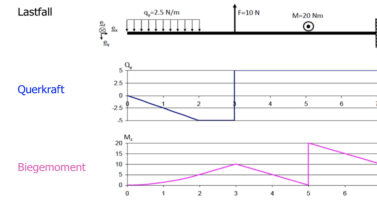
Die Vorzeichen stehen in direkter Beziehung zur Richtung der geführten Schnittgrößen.

Diese gelten für **gekrümmte** Balken:

$$\begin{cases} Q'_r - N + R \cdot q_r = 0 \\ Q'_z + R \cdot q_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M'_r - T + R \cdot Q_z = 0 \\ M'_z - R \cdot Q_r = 0 \end{cases}$$

6 Beanspruchungsdiagramme

Lastfall:	Einfluss der Querkraft	Einfluss auf Biegemoment
Einzelmoment	-	Sprung
Einzelkraft	Sprung	Linear / Knick
Gleichförm. Kraftverteilung	Linear	Quadratisch
Dreiecksverteilung	Quadratisch	Kubisch



6.1 Lösungsmethoden

• Knotengleichgewicht

- Lagerkräfte bestimmen
- Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten aufstellen \rightarrow Stabkräfte als Zugkräfte einführen (Pendelstütze)
- Gleichgewichtssysteme auflösen \rightarrow Stabkräfte S_i
- $S > 0 \rightarrow$ Belastung auf Zug
 $S < 0 \rightarrow$ Belastung auf Druck

• Dreikräteschnitt

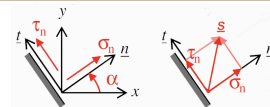
- Lagerkräfte bestimmen
- An geeigneter Stelle max. 3 Stäbe durchschneiden und Stabkräfte S_i einführen
- Momentengleichgewicht am Schnittpunkt zweier unbekannten Stabkräfte \rightarrow Berechnung der dritten Stabkraft
- Komponentenbedingung \rightarrow Bestimmung der beiden anderen unbekannten Stabkräfte

• Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

- Stab entfernen und Stabkraft S_i als Zugkraft (+) einführen
 - Zulässige virtuelle Bewegung einführen, d.h. eine Bewegung einführen, die mit den kinematischen Bedingungen (Lager) des Fachwerks verträglich ist
 - Bestimmung der Geschwindigkeit in die Knoten, in denen Kräfte wirken
 - Aus dem Prinzip der virtuellen Leistung folgt: $P = 0 \rightarrow$ Berechnung der unbekannten Stabkraft S_i
- Wichtig! Immer nur einen Stab entfernen!**

7 Spannungen

7.1 Spannungsvektor \underline{s}



$$\underline{s} = \underline{s}(\underline{x}, \underline{n})$$

\underline{x} Ortsvektor, \underline{n} Orientierung

$$= \sigma_n + \underline{n}_o + \tau \cdot \underline{t}_o$$

\underline{n}_o und \underline{t}_o sind **normiert!**

$$= \underline{T} \cdot \underline{n}_o$$

$$\sigma_n = (\underline{T} \cdot \underline{n}_o) \cdot \underline{n}_o$$

\underline{n}_o ist normiert und σ ist nur der Betrag

$$= \underline{s} \cdot \underline{n}_o$$
$$\tau_n = (\underline{T} \cdot \underline{n}_o) \cdot \underline{t}_o$$

\underline{n}_o und \underline{t}_o sind normiert und σ nur Betrag

$$= \underline{s} \cdot \underline{t}_o$$
$$= |\underline{s} - \sigma_n \cdot \underline{n}_o|$$

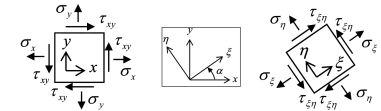
Definition Spannung: $\sigma := \text{Kraft pro Fläche} = Pa = \frac{N}{m^2}$

7.2 Spannungstensor 2D \underline{T}

- Ein Spannungstensor ist definiert durch einen Spannungsvektor \underline{s} von drei senkrecht aufeinanderstehenden Flächenelement in einem Punkt

$$\text{zur Erinnerung: } \underline{s}(\underline{n}) = \underline{T} \cdot \underline{n}$$

- Koordinatentransformation eines 2D-Tensors:

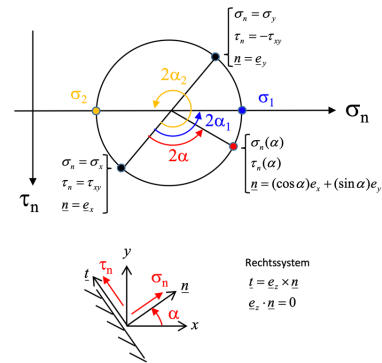

$$[\underline{T}]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$
$$[\underline{T}]_{\zeta\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta & \tau_{\zeta\eta} \\ \tau_{\zeta\eta} & \sigma_\eta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\xi = \cos^2(\alpha) \cdot \sigma_x + \sin^2(\alpha) \cdot \sigma_y + 2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot \tau_{xy}$$
$$\sigma_\eta = \sin^2(\alpha) \cdot \sigma_x + \cos^2(\alpha) \cdot \sigma_y - 2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot \tau_{xy}$$
$$\tau_{\xi\eta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \tau_{xy} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

7.3 Normal- und Schubspannungen 2D

$$\sigma_n(\alpha) = \cos^2(\alpha) \cdot \sigma_x + \sin^2(\alpha) \cdot \sigma_y + 2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot \tau_{xy}$$
$$\tau_n(\alpha) = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \tau_{xy} [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)]$$

7.4 Mohrscher Spannungskreis (hier 2D)



- Positive Normalspannungen:** (Zug $\Rightarrow \sigma > 0$) wirken in Richtung der Flächennormalen \underline{n}
- Positive Schubspannungen:** (Druck $\Rightarrow \tau > 0$) wirken in Richtung von \underline{t}

7.5 Hauptwerte und Hauptrichtungen 2D

- Hauptwerte ζ 2D:

$$\zeta_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

= Mittelpunkt \pm Radius

• Hauptrichtungen 2D:

Winkel der 1. HR: $\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$

1. HR im Bereich: $0 \leq \alpha_1 \leq 90^\circ$
→ wenn nicht im Bereich, mit 90° addieren od. subtrahieren
2. HR: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$
→ α_1 in $\sigma_\xi(\alpha)$ und $\sigma_\eta(\alpha)$ einsetzen für Hauptwerte $\zeta_1, 2$

- Maximale Schubspannung 2D:
⇒ gilt bei ebenem Spannungszustand oder wenn \underline{z} = Hauptrichtung:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad | \quad \alpha_{\tau, \max} = \alpha_1 \pm 90$$

7.6 Hauptwerte und Hauptrichtungen 3D

- Hauptwerte λ_i 3D:
 λ_i = Eigenwerte, n_i = Eigenvektoren ⇒ Löse $\det(\underline{T} - \lambda \cdot \mathbb{I}) = 0$

$$\det(\underline{T} - \lambda \cdot \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - A_1 \lambda^2 - A_2 \lambda - A_3 = 0$$
$$A_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$A_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + (\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2$$
$$A_3 = \det(\underline{T})$$

- Hauptrichtungen n_i 3D:

Löse: $(\underline{T} - \lambda_i \cdot \mathbb{I}) \cdot n_i = 0$

- Maximale Schubspannung 3D:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} [\max(\lambda_i) - \min(\lambda_i)]$$

- weitere Beziehungen:

HR	τ	$-\tau$	\underline{n}_i	\underline{t}
x	σ_y	σ_z	$\cos(\alpha_i) \underline{e}_y + \sin(\alpha_i) \underline{e}_z$	$-\sin(\alpha) \underline{e}_y + \cos(\alpha) \underline{e}_z$
y	σ_x	σ_z	$\cos(\alpha_i) \underline{e}_x + \sin(\alpha_i) \underline{e}_z$	$-\sin(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\alpha) \underline{e}_z$
z	σ_x	σ_y	$\cos(\alpha_i) \underline{e}_x + \sin(\alpha_i) \underline{e}_y$	$-\sin(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\alpha) \underline{e}_y$

Kesselformel: $\sigma_\varphi \approx -\frac{R}{t} \cdot P_i$

mit P_i = Innendruck; R = Radius; t = Wandstärke

Determinante(3x3) berechnen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

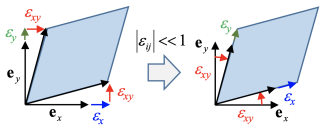
7.7 Gleichgewichtsbedingungen

Wenn Komponenten vom Spannungstensor \underline{T} als Funktion von x, y, z gegeben sind, gelten die untenstehenden Bedingungen.

Ziel: Normalspannungsverteilung zu finden. f steht für die Raumkraftdichte, z.B. Gewichtskraft.

$$\partial_x(\sigma_x) + \partial_y(\tau_{xy}) + \partial_z(\tau_{xz}) + f_x = 0$$
$$\partial_x(\tau_{xy}) + \partial_y(\sigma_y) + \partial_z(\tau_{yz}) + f_y = 0$$
$$\partial_x(\tau_{xz}) + \partial_y(\tau_{yz}) + \partial_z(\sigma_z) + f_z = 0$$

8 Verzerrungen



8.1 Verzerrungstensor

$$[\underline{E}]_{xy} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ * & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ * & * & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x,x} & \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) & \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) \\ * & u_{y,y} & * \\ * & * & u_{z,z} \end{pmatrix}$$

8.2 Schubwinkel γ

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy} \quad \underline{v}(\underline{n}) = \underline{E} \cdot \underline{n}$$
$$\gamma_{xz} = 2 \cdot \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_n = \underline{v} \cdot \underline{n}$$
$$\gamma_{yz} = 2 \cdot \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{nt} = |\underline{v} - \varepsilon_n \cdot \underline{n}|$$

$$\varepsilon_{xy} = \begin{cases} > 0, & \gamma \downarrow \\ < 0, & \gamma \uparrow \end{cases} \quad | \quad \gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\max} \cdot 2$$

9 Stoffgesetze

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad | \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad | \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{N(x)}{A(x)} dx = \frac{F}{A \cdot E} \cdot l$$

E = Elastizitätsmodul $[\frac{N}{m^2}] \rightarrow$ Beziehung zwischen σ_x und ε_x ;
 ν = Querdehnungszahl $[\emptyset] \rightarrow$ Poissonzahl, Materialkonstante, $0 \leq \nu \leq 0.5$;
 G = Schubmodul $[\frac{N}{m^2}] \rightarrow$ Beziehung zwischen τ_{xy} und ε_{xy}
 K = Kompressionsmodul $[\frac{N}{m^2}] \rightarrow$ Beziehung zwischen Volumendehnung und Druck

9.1 Temperaturabhängigkeit

- 3D-Fall:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad | \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$$
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \quad | \quad \varepsilon_v = \text{spur}(\underline{E}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \alpha \Delta T$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \alpha \Delta T$$
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \alpha \Delta T$$

- 2D-Fall:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \quad | \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy} \quad | \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_x - \varepsilon_y)$$
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad | \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$
$$\tau_{xy} = \frac{E \cdot \varepsilon_{xy}}{1+\nu}$$

10 Balkenbiegung

10.1 Schwerpunkt

- Körper mit einfachen (zusammengesetzten) Geometrien:

- Körper in einfache Geometrien (Teilflächen od. Volumen) aufteilen
- Koordinatensystem und Ursprung definieren
- Teilflächen A_i berechnen
- Schwerpunkt einer jeden Teilfläche / Teilvolumen bestimmen
- Folgende Formeln anwenden:

$$x_s = \frac{\sum(x_i \cdot A_i)}{\sum A_i} \quad | \quad y_s = \frac{\sum(y_i \cdot A_i)}{\sum A_i} \quad | \quad z_s = \frac{\sum(z_i \cdot A_i)}{\sum A_i}$$

- Allgemeine Formel:
beliebiges Koordinatensystem (e_η, e_ξ) :

$$\eta_s = \frac{1}{A} \iint_A \eta dA \quad | \quad \xi_s = \frac{1}{A} \iint_A \xi dA$$

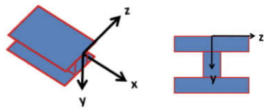
Zusammengesetzter Schwerpunkt:

$$\eta_{ges} = \frac{1}{A_{ges}} \cdot (A_1 \cdot \Delta \eta_1 + \dots + A_i \cdot \Delta \eta_i)$$

$\Delta \eta_i$ = Abstand von $\eta = 0$ zum Schwerpunkt η_i des Körpers
(Abstand zur ξ -Achse)

10.2 Flächenträgheitsmomente

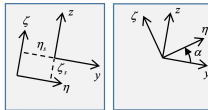
$$I_z = \iint_A y^2 dA$$
$$I_y = \iint_A z^2 dA$$
$$C_{yz} = - \iint_A yz dA$$
$$I_\xi = \iint_A \eta^2 dA$$
$$I_\eta = \iint_A \xi^2 dA$$



10.2.1 Verschiebungssatz

y und z im Schwerpunkt

$$I_\eta = I_y + (\Delta \xi)^2 \cdot A$$
$$I_\xi = I_z + (\Delta \eta)^2 \cdot A$$
$$C_{\eta\xi} = C_{yz} - \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot A$$



10.2.2 Trägheitsmoment im Schwerpunkt

$$I_{ys} = [I_{1y} + (\Delta z)^2 A_1] + \dots + [I_{ny} + (\Delta z_n)^2 A_n]$$
$$I_{zs} = [I_{1z} + (\Delta y)^2 A_1] + \dots + [I_{nz} + (\Delta y_n)^2 A_n]$$
$$C_{yzs} = [C_1 - \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot A_1] + \dots + [C_n - \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot A_n]$$

10.2.3 Weitere Beziehungen

$$I_\eta = \sin^2(\alpha) I_z + \cos^2(\alpha) I_y + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) C_{yz}$$
$$I_\xi = \cos^2(\alpha) I_z + \sin^2(\alpha) I_y - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) C_{yz}$$
$$C_{\eta\xi} = \cos(\alpha) \sin(\alpha) (I_z - I_y) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \cdot C_{yz}$$

10.3 Allgemeine Biegung (Y und Z sind Hauptachsen)

- Normalspannung in x-Richtung:

$$\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

- DGL für Mittellinie:

$$u'_{x0}(x) = \frac{N(x)}{EA} \quad | \quad v'_{y0}(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$
$$w'_{z0}(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

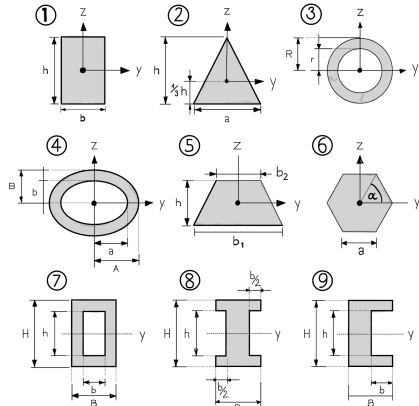
- Dehnung in x-Richtung:

$$\varepsilon(x, y, z) = u'_0(x) - y \cdot v''_0(x) - z \cdot w''_0(x)$$

- DGL für Querkraft und Biegemoment:

$$M'_z(x) = -Q_y(x) \quad | \quad M'_y(x) = Q_z(x)$$

10.4 Spezielle Flächenträgheitsmomente



	I_y	I_z
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$
2	$\frac{a \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot a^3}{36}$
3	$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$	$= I_y$
4	$\frac{\pi}{4} \cdot (AB^3 - ab^3)$	$\frac{\pi}{4} (BA^3 - ba^3)$
5	$h^3 \frac{(b_1+b_2)^2 + 2b_1b_2}{36(b_1+b_2)}$	$\frac{h}{48} (b_1+b_2)(b_1^2+b_2^2)$
6	$\frac{\pi a^4}{96} \cdot \frac{2+\cos(\alpha)}{(1-\cos(\alpha))^2} \cdot \sin(\alpha)$	$= I_y$
7	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} \cdot (HB^3 - hb^3)$
8	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{(H-h)B^3 + h(B-h)^3}{12}$
9	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	-

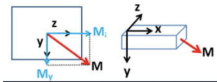
10.5 Biegelinie für spezielle Biegung

$$v''(x) = \frac{M_b(x)}{EI_z} \quad \text{oder} \quad v(x) = \frac{1}{EI_z} \iint M_b(x) dx$$

- Lösungsvorgehen für statisch unbestimmte Systeme:

- Flächenträgheitsmomente (I_y, I_z) berechnen
- Lagerkräfte bestimmen
- Beanspruchung bestimmen
- $v''(x)$ integrieren
- Randbedingungen bestimmen
- $v(x)$ bestimmen

10.6 Schiefe Biegung



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

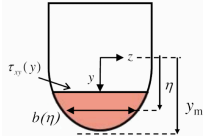
10.7 Y, Z => keine Hauptachsen

M_2, M_3, I_3, I_2 durch Projektion finden
 u_{x0}, u_{y2}, u_{z3} in Richtung der Hauptachsen
 $u'_{x0}(x) = \frac{N(x)}{EA} \quad | \quad u''_{y2}(x) = \frac{M_3(x)}{EI_3}$
 $u''_{z3}(x) = -\frac{M_2(x)}{EI_2}$
 $\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_3(x)}{I_3} \cdot y + \frac{M_2(x)}{I_2} \cdot z$
Rückprojektion von u_0, u_2, u_3 um Verschiebung in x,y,z-Richtung zu finden

11 Schubspannung infolge Biegung

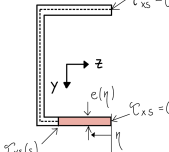
11.1 Vollquerschnitt

$\tau_{xy}(x, y) = \frac{Q_y(x)}{I_z} \cdot \frac{H_z(y)}{b(y)}$
 $H_z(y) = \int_y^{y_{max}} \eta \cdot b(\eta) d\eta$
y im Schwerpunkt d. Körpers



11.2 Offen, dünnwandig

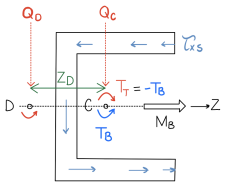
$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{Q_y(x)}{I_z} \cdot \frac{H_z(s)}{e(s)}$
 $H_z(s) = \int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) d\eta$
Polarkoordinaten -> $d\eta = r \cdot d\varphi$



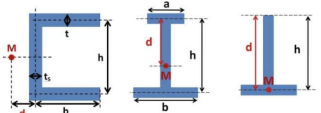
11.3 Schubmittelpunkt

$|z_D| = \frac{T_B}{Q} \quad | \quad T_T = -T_B \quad | \quad H_z(s) = y_s \cdot A = y_s \cdot t \cdot s$
 $F = \int \tau_{xs} \cdot e(\eta) d\eta$ Richtung z_D aus Orientierung von T_T
(GGW: Q_D gleicht T_T im Schwerpunkt durch Hebelarm z_D aus)

Vorgehen Schubmittelpunkt:
1. Schubspannungen τ_{xs} berechnen
2. Torsionsmoment T_T berechnen
-> $T_T = \int \Delta A \tau_{xs} dA \cdot \Delta x$
 Δx = Abstand τ_{xs} zum Schwerpunkt
3. $|z_D| = \frac{T_T}{Q}$



11.4 Spezielle Schubmittelpunkte



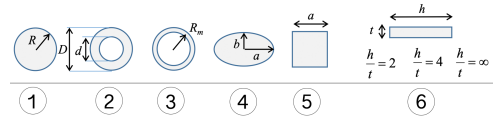
v.l.n.r.: $d = \frac{3t \cdot b^2}{ht_s + 6bt} \quad | \quad d = \frac{hb^3}{a^3 + b^3} \quad | \quad d = h$

12 Torsion

Falls Querschnitt sich über Länge ändert:
 $(\Delta)\vartheta = \int_a^b \frac{T(x)}{GI_T} dx \quad | \quad \vartheta' = \frac{T(x)}{GI_T} \quad | \quad \tau_{max} = \frac{T}{W_T}$

Falls konstanter Kreisquerschnitt: $\vartheta = \frac{T \cdot L}{GI_p}$
Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Für $t \ll h$ gilt: $\tau_{xs} = 2G\vartheta' z$
 GI_T = Torsionssteifigkeit; W_T = Torsionswiderstandsmoment; für $T(x)$ Torsionsbeanspruchung berechnen

12.1 Kreis und Vollquerschnitt

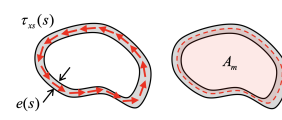


Kreis- und Vollquerschnitte	I_T	W_T	Verwölbung?
1	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{\pi R^3}{2}$	nein
2	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$	nein
3	$2\pi R_m^3 t$	$2\pi R_m^2 t$	nein
4	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi a b^2}{2}$	ja
5	$0.141 \cdot a^4$	$0.208 \cdot a^3$	ja
6.1 -> $\frac{h}{t} = 2$	$0.23 \cdot h t^3$	$0.25 h t^2$	ja
6.2 -> $\frac{h}{t} = 4$	$0.28 \cdot h t^3$	$0.28 \cdot h t^2$	ja
6.3 -> $\frac{h}{t} = \infty$	$\frac{h t^3}{3}$	$\frac{h t^2}{3}$	ja

Für Kreisquerschnitte: $\tau_{x\varphi}(r) = \frac{T}{I_T} r$ und $\tau_{max} = \frac{T}{W_T}$
 $I_T = I_p = I_z + I_y$
Verwölbung elliptischer Querschnitt: $n(y, z) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \cdot \vartheta' y z$

12.2 Dünnwandig geschlossene Querschnitte

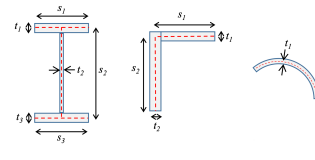
$I_T = \frac{(2A_m)^2}{U}$
 $U = \oint \frac{1}{e(s)} ds$
 $W_T = 2A_m \cdot \min(e)$
 $\tau_{xs}(r) = \frac{T}{2A_m \cdot e(s)}$



U = Umlaufintegral entlang Profilmittellinie; A_m = von Profilmittellinie eingeschlossene Fläche; $e = e(s)$ = Wandstärke

12.3 Dünnwandig offene Querschnitte

$I_T \sim \frac{1}{3} \sum_i (s_i \cdot t_i^3)$
 $W_T \sim \frac{I_T}{\max(t_i)}$
 $\tau_{max} \sim \frac{T}{I_T} \max(t_i)$



Dünnwandig offene Kreisquerschnitte: $I_T = \frac{2}{3} \pi R t^3$

13 Energiemethoden

13.1 Integraltabelle

Integrale:

$p(x)$	$\int_0^s p dx$	$\int_0^s p^2 dx$	$\int_0^s p^3 dx$	$\int_0^s p^4 dx$	$\int_0^s p^5 dx$	$\int_0^s p^6 dx$	$\int_0^s p^7 dx$	$\int_0^s p^8 dx$
$k(x)$	$\int_0^s k dx$	$\int_0^s k^2 dx$	$\int_0^s k^3 dx$	$\int_0^s k^4 dx$	$\int_0^s k^5 dx$	$\int_0^s k^6 dx$	$\int_0^s k^7 dx$	$\int_0^s k^8 dx$

13.2 Idee Arbeitssatz

Die Arbeit der äusseren Lasten (W_{ext}) entspricht der Deformationsenergie (U_{int})

$W_{ext} = U_{int}$

13.3 Statisch bestimmte Systeme

1. Freischnitt 0 System
2. Freischnitt 1 System

13.3.1 Fall 1: Real

1. Arbeitssatz für realen Fall:
 $v = \frac{1}{F} \cdot \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx$ (ähnlich für weitere Terme)
 $\theta = v' = \frac{1}{M} \cdot \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx$ (ähnlich für weitere Terme)

Ziel: v bestimmen
Voraussetzung: Angreifende Kraft und entsprechende Verschiebung haben dieselbe Richtung, denselben Angriffspunkt und System ist statisch bestimmt
Vorgehen:
1. Freischnitt
(Achtung, Lagerkräfte nur ausrechnen, wenn für Schritt 2 von Vorteil)
2. Beanspruchungsdiagramme erstellen
3. In 1. Arbeitssatz einsetzen, resp. in Integraltabelle von Abs. 14.1

13.3.2 Fall 2: Virtuell

1. Arbeitssatz für virtuellen Fall:
 $v = \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EI_z} dx + \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA} dx + \int_0^l \frac{T_0 T_1}{GI_T} dx + \int_0^l \frac{Q_0 Q_1}{GA_s} dx$
Gleiche Formel für θ

Ziel: v bestimmen
Voraussetzungen: Statisch bestimmt, mehrere Kräfte sind möglich
Vorgehen:
1. Freischnitt 0-System
2. Freischnitt 1-System
3. Beanspruchungsdiagramme erstellen
4. In Arbeitssatz einsetzen, resp. in Integraltabelle von Abs. 14.1

14 Statisch unbestimmte Systeme

1. Freischnitt 0 System
2. Freischnitt 1 System
3. Freischnitt 2 System

3. Beanspruchung

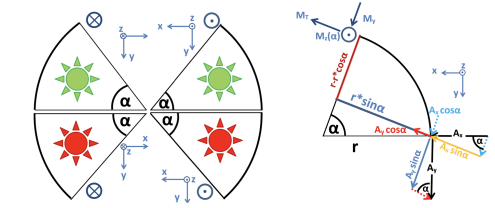
14.0.1 Fall 3: Statisch unbestimmtes System

Superpositionsprinzip:
 $v_{01} + v_2(F_A) = 0 \Rightarrow$ auflösen nach F_A

Idee: Zuerst Verschiebung v_{01} berechnen, die auftreten würde, wenn das Lager entfernt wird. Danach Verschiebung v_{02} berechnen, die auftreten würde, wenn nur die (variable) Lagerkraft auf das System wirkt. Superposition der beiden Verschiebungen muss aufgrund des Lagers = 0 ergeben.
Voraussetzung: statisch unbestimmtes System

Vorgehen:
1. Freischnitt 0-System
2. Freischnitt 1-System
3. Freischnitt 2-System
4. Aus 0-System und 1-System v_{01} berechnen
5. Aus 2-System v_2 berechnen
6. Einsetzen $v_{01} + v_2 = 0$

15 Beanspruchung Kreisbogen



$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \odot A_x & \odot A_y \\ 0 & \odot A_z \\ -A_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r + \sin(\alpha) \\ r + [1 - \cos(\alpha)] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_x & \odot A_y & 0 \\ -A_y & \odot A_x & 0 \\ 0 & 0 & -A_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$

16 Ergänzungen

16.1 Umrechnungen Einheiten

1. Pascal:
 $1 Pa = 1 \frac{kg}{m \cdot s^2} = 1 \frac{N}{m^2} \rightarrow 1 MPa = 1 \frac{N}{mm^2}$
 $\rightarrow 1 GPa = 1 \text{Milliarde } Pa$

- **Quellen:**
 - [Formelsammlung von Frederik Pflug co. David Bamert \(2021\)](#)
 - [Formelsammlung von Nick Büherer, ergänzt durch Micha Bosshart \(2019\)](#)
 - [Theorie-Slides von Basile Morel aus MINT++ \(2021\)](#)
 - [Mechanik I Zusammenfassung von Fabian Zürrer \(2019\)](#)
 - [Übungsheft zu Mechanik II von Udo Lang, Bernard Messerey, u.a. \(2006\)](#)
 - Vorlesungsmaterial von Prof. Dr. Dirk Mohr (FS2021)
 - Quellcode von Tabelle in Abs. 2 Koordinatentransformation von Leon Auspurg