Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingalen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Martin Keller-Ressel
Mitschrift: Willi Sontopski

10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

- Voraussetzung für viele weitere VL im Schwerpunkt Stochastik
- zunehmend stochastische Systeme / stochastische Prozesse → Modellierung von zeitabhängigen und zufälligen Vorgängen
- wichtig im naturwissenschaftlicher, wirtschaftwissenschaftlicher und sozialwissenschaftlicher Modellierung
  - Schwimmbewegung eines Einzellers
  - Bildung und Rückbildung von sozialen Netzwerken
  - zeitlicher Verlauf eines Wechselkurses (EUR / GBP)

Zentrale Frage: Abhängigkeitsstruktur (ist “morgen” von “heute” unabhängig?)

- unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen
- Markov-Prozesse
- Martingale

Was ist ein Martingal?

- “faires SPiel” zwischen Personen A und B bei dem keine Strategie einen systematischen Vorteil bringt
- Ein Vorgang, bei dem die beste Voraussage (Punktschätzung) der heutige Wert ist.
- “neutraler stochastischer Prozess” ohne systematischen Trend zum Auf- oder Abstieg

Weitere Themen:

- charakteristische Funktionen: Fourier-Transformation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
  Wichtiges analytisches Werkzeug in der W-Theorie
- Zentrale Grenzwertsätze: Aussagen über Konvergenz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen zur Normalverteilung
- Brown’sche Bewegung und evtl. Lévy-Prozesse

1 Bedingter Erwartungswert

1.1 Bedingter Erwartungswert als L_2-Projektion

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Für Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$ definiere die L_p-Norm

$$\|X\|_p := \mathbb{E}\left[|X|^p\right] = \left(\int\limits_\Omega |X(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

und die Räume

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \left\{ X : \Omega \to \mathbb{R} \middle| X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|X\|_p < \infty \right\}$$

. Aufgrund der Minkowski-Ungleichung

$$\|X + Y\|_p \leq \|_p + \|Y\|_p$$

und der Homogenität

$$\|c \cdot X\|_p = c \cdot \|X\|_p \qquad \forall c \geq 0$$

ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Vektorraum mit Halbnorm $\| \cdot \|_p$. Es fehlt die Definitheit.
Wir identifizieren Zufallsvariablen $X, \tilde{X}$, welche $\mathbb{P}$-fast sicher übereinstimmen, d. h. $\mathbb{P}[X \neq \tilde{X}] = 0$. Formal betrachten wir den Unterraum

$$\mathcal{N} := \{N : \Omega \to \mathbb{R} : N = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

und bilden den Quotientenraum

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \mathcal{L}_P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})/\mathcal{N} = \{[X + \mathcal{N}] : X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\}\,.$$

Wir schreiben auch kurz $L_p(\mathcal{A})$ oder $L_p(\mathbb{P})$, wenn wir Abhängigkeit von $\mathcal{A}$ oder $\mathbb{P}$ betonen wollen.
Aus der Maßtheorie ist bekannt:

Theorem 1.1.1 Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Norm $\| \cdot \|_p$ ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}[X \cdot Y] = \int\limits_{\Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Bemerkung. Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L_2$ heißen **orthogonal** $:\Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$.

Proposition 1.1.2 Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ enie Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $p \in [1, \infty)$.
Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Beweis. RobertToDo □

Definition. (Bedingte Erwartung in L_2)
Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.
Jedes $X \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hat eine eindeutige Orthogonalprojektion Y auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diese heißt **bedingte Erwartung** von X bzgl. $\mathcal{F}$ und wir schreiben $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] := Y$.
Die bedingte Erwartung ist also eine Zufallsgröße und nur bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Als Orthogonalprojektion gilt

$$\|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\|_2 = \inf \left\{ \|X - Y\|_2 : Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \right\}.$$

Interpretation: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ ist die beste Näherung für X durch Zufallsvariablen $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 1.1.3 Y ist die Orthogonalprojektion von X auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \in L_2(\mathcal{F}) : \langle X - Y, F \rangle = 0$

Beweis. RobertToDo □

Proposition 1.1.4 (Eigenschaften der bedingten Erwartung) Seien $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Dann gilt:

1. $X \in L_2(\mathcal{F}) \Longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$
2. $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y \mid \mathcal{F}] = a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ “Linearität”
3. $\langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y \rangle = \langle X, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle = \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle$ “Symmetrie”

4. Für jede Unter-σ-Algebra $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ gilt die **Turmregel** / **tower law**:

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \bigm| \mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] \tag{1.1}$$

5. $\mathbb{E}[Z \cdot X \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \qquad \forall Z$ beschränkt und $\mathcal{F}$-messbar "Pull-out-property"
6. $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ "Monotonie"
7. $\big|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\big| \leq \mathbb{E}\big[|X| \bigm| \mathcal{F}\big]$ "Dreiecksungleichung"

Beweis. Zu 1.: Klar.

Zu 2.: Aus Proposition 1.1.3 folgt

$$\begin{gathered}\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], F\rangle \\ \langle Y - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}], F\rangle\end{gathered}$$

Zu 3.: Aus Proposition 1.3 folgt wieder

$$\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]\rangle \tag{1.2}$$
$$\langle Y - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\rangle \tag{1.3}$$

Und damit

$$\begin{aligned}\langle X, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]\rangle &= \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + (X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]), \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]\rangle \\ \overset{1.2}{=} \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]\rangle \\ &= \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y + (\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] - Y)\rangle \\ &\overset{1.3}{=} \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y\rangle\end{aligned}$$

Zu 4.: Aus Proposition 1.3 folgt wieder

$$\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], F\rangle \qquad \forall F \in L_2(\mathcal{F}) \supseteq L_2(\mathcal{H}) \tag{1.4}$$
$$\langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y + (\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F} - Y)]\rangle \qquad \forall H \in L_2(\mathcal{H}) \tag{1.5}$$
$$\Longrightarrow \langle X - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{H}], H\rangle = \qquad \forall H \in L_2(\mathcal{H}) \tag{1.6}$$
$$\overset{Prop 1.3}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{H}] \tag{1.7}$$

Zu 5.:

$$broken$$

Zu 6.: Sei $X \geq 0$. Setze

$$A := \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0\} \in \mathcal{F}.$$

Außerdem ist gilt für die Indikatorfunktion $\mathbf{i}_A \in L_2(\mathcal{F})$. Einerseits gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_A \mid \mathcal{F}] \geq 0 \text{ weil } X \geq 0$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbf{i}_A] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbf{i}_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]<0\}}\right] \\
&= \int\limits_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]<0\}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq 0 \\
&\Longrightarrow \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_A] = 0 \\
&\Longrightarrow \int\limits_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]<0\}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \\
&\Longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0) = 0 \\
&\Longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geq 0 \text{ fast sicher}
\end{aligned}$$

Allgemeine Aussage folgt mit $\tilde{X} := Y - X$ und aus der Linearität.
<u>Zu 7.:</u>

$$\begin{aligned}
\pm X \leq< |X| &\overset{6.}{\Longrightarrow} \pm\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}] \\
&\Longrightarrow \Big|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\Big| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]
\end{aligned}$$

□

1.2 Bedingte Erwartung in L_1

Prinzip: stetige Fortsetzung

Proposition 1.2.1 Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Die bedingte Erwartung hat eine eindeutige stetige Fortsetzung von $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ auf $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}]$.

Beweis. <u>Existenz:</u>
Sei $X \in L_1$. Dann existiert eine Approximationsfolge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_2$ mit $\mathbb{E}[|X_n - X|] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, in Zeichen $X_n \overset{L_1}{\longrightarrow} X$.

Wähle z. B.

$$X_n := \begin{cases} X, & \text{falls } |X| \le n \\ n, & \text{falls } X > n \\ -n, & \text{falls } X < -n \end{cases}$$

Mit dominanter Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n - X|] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} |X_n - X|\right] = 0.$$

Mit Kontraktionseigenschaft gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\big|\mathbb{E}[X_m \mid \mathcal{F}] - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]\big|\Big] &\le \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[|X - M - X_n| \mid \big| \mathcal{F}\Big] \\ stackeqTurm \mathbb{E}\big[|X_n - X_n|\big] &\overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \implies (\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}])_{n\in\mathbb{N}} &\text{ ist Cauchy-Folge in } L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ &\implies \exists Z \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \text{ mit } \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] \xrightarrow{L_1} Z =: \mathbb{E}\end{aligned}$$

<u>Eindeutigkeit:</u> Sei $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Approximationsfolge für X, d. h.

$$\mathbb{E}[|\tilde{X}_n - X|] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Z - \mathbb{E}[\tilde{X}_n \mid \mathcal{F}]\|_1 \le \|Z - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]\|_1 + \underbrace{\|\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F} - \mathbb{E}[\tilde{X}_n \mid \mathcal{F}]\|_1}_{=\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F} - \mathbb{E}[\tilde{X}_n \mid \mathcal{F}|]} \\ &\overset{Kontr}{\le} \|Z - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]\|_1 + \|X_n - \tilde{X}_n\|_1 \\ &\le \|Z - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]\|_1 + \|X - X_n\|_1 + \|X \\ &\longrightarrow 0 \\ &\implies \mathbb{E}[\tilde{X}_n \mid \mathcal{F}] \xrightarrow{L_1} Z\end{aligned}$$

Also ist der Limes unabhängig von der Approximationsfolge. □

Korollar 1.2.2 Alle Eigenschaften aus Proposition 1.4 (außer Symmetrie) gelten weiterhin für alle $X, Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Beweis. Beweis durch Approximation. □

Theorem 1.2.3 Sei $\mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und seien

$$X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \qquad Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Dann sind äquivalent:

1. $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ fast sicher
2. $\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_F] = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{i}_F] \qquad \forall F \in \mathcal{F}$
   (Beachte $X, Y \in L_2 \Longrightarrow \langle X - Y, \mathbf{i}_F\rangle = 0$)

Beweis. <u>Zeige $(a) \Longrightarrow (b)$:</u>
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_2(\mathcal{A})$ eine Approximationsfolge für X, d.h. $X_n \xrightarrow{L_1} X$. Mit Proposition 1.6 folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] &\xrightarrow{L_1} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = Y \\ \mathbb{E}\left[(X - Y) \cdot \mathbf{i}_F\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]), \mathbf{i}_F] \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle X_n - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}], \mathbf{i}_F\rangle \overset{\text{Prop 1.3}}{=} 0 \qquad \forall F \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

<u>Zeige $(b) \Longrightarrow (a)$:</u>
Setze

$$\begin{aligned}F^+ &:= \{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y > 0\} \in \mathcal{F} \\ F^- &:= \{-(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y) > 0\} \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}0 \le \mathbb{E}\Big[\underbrace{(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y) \cdot \mathbf{i}_{F^+}}_{\ge 0}\Big] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbf{i}_{F^+}] - \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{i}_{F^+} \\ &\overset{\text{Pull-out + Turm}}{=} \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_{F^+}] - \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{i}_{F^+}] \\ &\overset{\text{(b)}}{=} 0 \\ &\Longrightarrow \mathbb{P}(F^+) = 0\end{aligned}$$

Analog erhält man $\mathbb{P}(F^-) = 0$. Also folgt insgesamt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = Y$ fast sicher. $\square$

Bemerkung. Die “unbedingte Erwartung” $\mathbb{E}[X]$ können wir als Spezialfall der bedingten Erwratung $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ für die triviale σ-Algebra $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega\}$ auffassen.
Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_\Omega] = \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbf{i}_\Omega] \\ \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_\Omega] = 0 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbf{i}_\emptyset] \\ \overset{\text{Thm 1.8}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \text{ da } \mathcal{F} \text{ trivial}\end{aligned}$$

1.3 Bedingter Erwartungungswert + Unabhängigkeit

Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ heißt **unabhängig** von $\mathcal{F}$, in Zeichen $X \amalg Y$

$$:\Longleftrightarrow \mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbf{i}_A] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{P}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F} \text{ und } f \text{ beschränkt, Borel-messbar und } \mathbb{R}\text{-wertig} \tag{1.8}$$

X heißt **unabhängig** von einer Zufallsvariablen $Y :\Leftrightarrow X \amalg \sigma(Y)$. Äquivalent:

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X) \cdot g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)] \qquad \forall f, g \in B_b(\mathbb{R})$$

Theorem 1.3.1 Sei $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unabhängig von $\mathcal{F}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$$

Beweis. Wegen $X \amalg Y$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathcal{F} : \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{i}_X] \overset{1.8}{=} \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbf{i}_F] \\ \overset{\text{Thm 1.8}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Merke die beiden Extremfälle:

- Wenn X $\mathcal{F}$-messbar ist, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$.
  Die bedingte Erwartung verändert also X nicht.
- Wenn X von $\mathcal{F}$ unabhängig ist, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.
  Die bedingte Erwartung reduziert X auf den unbedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.