Vorlesung
Methoden der Funktionalanalysis

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Ralph Chill
Mitschrift: Willi Sontopski & Johannes Stojanow

9. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Eine **Halbgruppe** ist

$$
\begin{aligned}
t &\mapsto S(t) \\
S(t) : C &\to C \\
S(0) &= \mathrm{id} \\
S(t+s) &= S(t) \circ S(s)
\end{aligned}
$$

Eine Beobachtung: Wir betrachten das folgende **Cauchy-Problem** (gewöhnliche GDG)

$$
(\mathrm{CP}) \begin{cases} \dot{u}(t) + A(u(t)) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{0.1}
$$

Theorem 0.0.1 (Picard-Lindelöf) Sei $A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann besitzt das Cauchy-Problem für alle $u_0 \in \mathbb{R}^N$ genau eine (globale) Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Die Existenz einer lokalen Lösung folgt bereits aus dem Theorem von Peano. Darauf kommen wir später zurück. Zur Erbringung des Eindeutigkeitsbeweises seien $u, v \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ zwei Lösungen des Cauchy-Problems zum selben Anfangswert. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)-v(t)\|_2^2 &= \langle u(t)-v(t), \dot{u}(t)-\dot{v}(t)\rangle_2 \\
&\overset{\text{CP}}{=} -\langle u(t)-v(t), Au(t)-Av(t)\rangle_2 \\
&\overset{\text{C.S.}}{\leq} \|u(t)-v(t)\|_2 \cdot \|Au(t)-Av(t)\|_2 \\
&\overset{Lip}{\leq} L \cdot \|u(t)-v(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Lipschitz-Stetigkeit von A. Wir integrieren über $[0,t]$ und erhalten

$$
\|u(t)-v(t)\|_2^2 \leq \|u(0)-v(0)\|_2^2 + 2L\int_0^t \|u(s)-v(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s,
$$

wobei $\|u(0)-v(0)\|_2^2 = 0$ durch Identität der Anfangswerte für u und v. Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \exp(2 \cdot L \cdot t)\|u(0) - v(0)\|_2^2 = 0 \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Daraus folgt $u \equiv v$. Der Existenzbeweis erfolgt über den Beweis, dass kein „blow-up“ in endlicher Zeit möglich ist. $\square$

Bemerkung. Nur Stetigkeit von A reicht nicht für die eindeutige Lösbarkeit. Zum Beispiel sei $N = 1$ und $Au = -\operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$.

Eine Alternative zur Lipschitz-Stetigkeit:

Definition 0.0.2 (Monotonie) Die Funktion $A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt **monoton (wachsend)**

$$:\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^N\colon \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$$

Lemma 0.0.3 Ist A monoton und stetig, dann gibt es zu jedem $u_0 \in \mathbb{R}^N$ immer noch genau eine (globale) Lösung des Cauchy-Problems (0.1).

Beweis.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_2^2 = -\langle u(t) - v(t), Au(t) - Av(t)\rangle \leq 0.$$

$$\Longrightarrow t \mapsto \frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2 \text{ ist monoton fallend}$$

Die Abbildung $t \mapsto 2^{-1}\|u(t) - v(t)\|_2^2$ ist also monoton fallend, woraus die eindeutige Lösbarkeit folgt. $\square$

Beispiel 0.0.4 $N = 1$ und $Au = \operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$

Korollar 0.0.5 (Picard-Lindelöf allgemein) $A = A_0 + A_1$, wobei $A_0\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ monoton sowie stetig und $A_1\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig sind. Daraus folgt eindeutige (globale) Lösbarkeit und Existenz der Lösung.

Beweis. Folgt auf beiden vorherigen Resultaten. $\square$

In dieser Vorlesung behandeln wir die allgemeine Theorie in Banachräumen.

1 Akkretive Operatoren

Im Folgenden sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition 1.0.1 Ein **(nichtlinearer) Operator** auf X ist eine Relation $A \subseteq X \times X$. Wir schreiben

- $Au := \{f \in X : (u,f) \in A\}\ \forall u \in X$
- $\mathrm{dom}(A) := \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ **Definitionsbereich** von A
- $\mathrm{rg}(A) := \{f \in X : \exists u \in X : (u,f) \in A\}$ **Bild** von A
- $A^{-1} := \{(f,u) \in X \times X : (u,f) \in A\}$ **inverser Operator**
- $I := \{(u,u) \in X \times X : u \in X\}$ **identischer Operator**
- Offenbar gilt $\mathrm{dom}(A^{-1}) = \mathrm{rg}(A)$
- Sind $A, B \subseteq X \times X$ zwei Operatoren, $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B &:= \{(u, f_1 + f_2) : f_1 \in A, f_2 \in B\} \\ &:= \{(u,f) \in X \times X : \exists f_1, f_2 \in X : (u,f_1) \in A \wedge (u,f_2) \in B \wedge f = f_1 + f_2\} \\ \lambda \cdot A &:= \{(u, \lambda \cdot f : (u,f) \in\} := \{(u,f) \in X \times X : \exists f_1 \in X : (u,f_1) \in X \wedge f = \lambda \cdot f_1\} \end{aligned}$$

1.1 Das “Bracket”

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für alle $u, v \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} [u,v]_\lambda &:= \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \text{ und} \\ [u,v] &:= \inf_{\lambda > 0} [u,v]_\lambda. \end{aligned}$$

Die Abbildung $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt **Bracket**. Das Bracket $[u,v]$ ist eine Richtungsableitung der Norm $\|\cdot\|$ im Punkt u in Richtung v.

Lemma 1.1.1 (Eigenschaften des Brackets) Seien $u, v \in X,\ \mu > 0$. Dann gilt:

1. $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist **oberhalbstetig**, d.h.

$$(u_n, v_u)_{n\in\mathbb{N}} \to (u,v) \text{ in } X \times X \Longrightarrow [u,v] \geq \limsup_{n\to\infty} [u_n, v_n]$$

2. Die Funktion $]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto [u,v]_\lambda$ ist monoton wachsend und beschränkt durch $\|v\|$.

3. $[u,v] = \lim_{\lambda > 0} [u,v]_\lambda$.

4. Die Funktion $X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $v \mapsto [u,v]$ ist sublinear.

5. $[\mu \cdot u, v] = [u,v]$.

6. $[u,0] = 0$.

7. $[0,v] = \|v\|$.

8. $[u,u] = \|u\|$.

Definition 1.1.2 Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem metrischen Raum M heißt **unterhalbstetig** $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M : u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ in } M \text{ und } \forall u \in M \\ \Longrightarrow f(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \end{aligned}$$

f heißt **oberhalbstetig**, falls $-f$ unterhalbstetig ist.

Lemma 1.1.3 Sei M ein metrischer Raum, $f\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

1. f ist unterhalbstetig.

2. $\forall c \in \mathbb{R}\colon \{f \leq c\} := \{u \in M \mid f(u) \leq c\}$ ist abgeschlossen.

3. $\{(u,f) \in M \times \mathbb{R} \mid f(u) \leq \lambda\} =: \mathrm{epi}(f)$ ist abgeschlossen.