Vorlesung
Methoden der Funktionalanalysis

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Ralph Chill
Mitschrift: Willi Sontopski

8. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Eine **Halbgruppe** ist

$$
\begin{aligned}
t &\mapsto S(t) \\
S(t) &: C \to C \\
S(0) &= \mathrm{id} \\
S(t+s) &= S(t) \circ S(s)
\end{aligned}
$$

1 Akkretive Operatoren

Im Folgenden sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition 1.0.1 Ein **(nichtlinearer) Operator** auf X ist eine Relation $A \subseteq X \times X$. Wir schreiben

- $Au := \{f \in X : (u,f) \in A\}\ \forall u \in X$
- $\mathrm{dom}(A) := \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ **Definitionsbereich** von A
- $\mathrm{rg}(A) := \{f \in X : \exists u \in X : (u,f) \in A\}$ **Bild** von A
- $A^{-1} := \{(f,u) \in X \times X : (u,f) \in A\}$ **inverser Operator**
- $I := \{(u,u) \in X \times X : u \in X\}$ **identischer Operator**
- Offenbar gilt $\mathrm{dom}(A^{-1}) = \mathrm{rg}(A)$
- Sind $A, B \subseteq X \times X$ zwei Operatoren, $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B &:= \{(u, f_1 + f_2) : f_1 \in A, f_2 \in B\} \\ &:= \{(u,f) \in X \times X : \exists f_1, f_2 \in X : (u,f_1) \in A \wedge (u,f_2) \in B \wedge f = f_1 + f_2\} \\ \lambda \cdot A &:= \{(u, \lambda \cdot f : (u,f) \in\} := \{(u,f) \in X \times X : \exists f_1 \in X : (u,f_1) \in X \wedge f = \lambda \cdot f_1\} \end{aligned}$$

1.1 Das "Bracket"

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für alle $u, v \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} [u,v]_\lambda &:= \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \text{ und} \\ [u,v] &:= \inf_{\lambda > 0} [u,v]_\lambda. \end{aligned}$$

Die A