

Vorlesung

Methoden der Funktionalanalysis

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Ralph Chill
Mitschrift: Willi Sontopski & Johannes Stojanow

10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
1	Akkretive Operatoren	4
1.1	Das “Bracket”	4

0 Einführung

Eine **Halbgruppe** ist

$$\begin{aligned}t &\mapsto S(t) \\ S(t) &: C \rightarrow C \\ S(0) &= \text{id} \\ S(t+s) &= S(t) \circ S(s)\end{aligned}$$

Eine Beobachtung: Wir betrachten das folgende **Cauchy-Problem** (gewöhnliche GDG)

$$(\text{CP}) \begin{cases} \dot{u}(t) + A(u(t)) = 0, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (0.1)$$

Theorem 0.0.1 (Picard-Lindelöf) Sei $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann besitzt das Cauchy-Problem für alle $u_0 \in \mathbb{R}^N$ genau eine (globale) Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Die Existenz einer lokalen Lösung folgt bereits aus dem Theorem von Peano. Darauf kommen wir später zurück. Zur Erbringung des Eindeutigkeitsbeweises seien $u, v \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ zwei Lösungen des Cauchy-Problems zum selben Anfangswert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_2^2 &= \langle u(t) - v(t), \dot{u}(t) - \dot{v}(t) \rangle_2 \\ &\stackrel{\text{CP}}{=} - \langle u(t) - v(t), Au(t) - Av(t) \rangle_2 \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|u(t) - v(t)\|_2 \cdot \|Au(t) - Av(t)\|_2 \\ &\stackrel{\text{Lip}}{\leq} L \cdot \|u(t) - v(t)\|_2^2\end{aligned}$$

mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Lipschitz-Stetigkeit von A . Wir integrieren über $[0, t]$ und erhalten

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \|u(0) - v(0)\|_2^2 + 2L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_2^2 \, ds,$$

wobei $\|u(0) - v(0)\|_2^2 = 0$ durch Identität der Anfangswerte für u und v . Mit dem Lemma

von Gronwall folgt

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \exp(2 \cdot L \cdot t) \|u(0) - v(0)\|_2^2 = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Daraus folgt $u \equiv v$. Der Existenzbeweis erfolgt über den Beweis, dass kein „blow-up“ in endlicher Zeit möglich ist. \square

Bemerkung. Nur Stetigkeit von A reicht nicht für die eindeutige Lösbarkeit. Zum Beispiel sei $N = 1$ und $Au = -\operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$.

Eine Alternative zur Lipschitz-Stetigkeit:

Definition 0.0.2 (Monotonie) Die Funktion $A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt **monoton (wachsend)**

$$:\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^N : \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$$

Lemma 0.0.3 Ist A monoton und stetig, dann gibt es zu jedem $u_0 \in \mathbb{R}^N$ immer noch genau eine (globale) Lösung des Cauchy-Problems (0.1).

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_2^2 &= -\langle u(t) - v(t), Au(t) - Av(t) \rangle \leq 0. \\ \implies t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_2^2 &\text{ ist monoton fallend} \end{aligned}$$

Die Abbildung $t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t) - v(t)\|_2^2$ ist also monoton fallend, woraus die eindeutige Lösbarkeit folgt. \square

Beispiel 0.0.4 $N = 1$ und $Au = \operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$

Korollar 0.0.5 (Picard-Lindelöf allgemein) $A = A_0 + A_1$, wobei $A_0: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ monoton sowie stetig und $A_1: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig sind. Daraus folgt eindeutige (globale) Lösbarkeit und Existenz der Lösung.

Beweis. Folgt auf beiden vorherigen Resultaten. \square

In dieser Vorlesung behandeln wir die allgemeine Theorie in Banachräumen.

1 Akkretive Operatoren

Im Folgenden sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 1.0.1 Ein **(nichtlinearer) Operator** auf X ist eine Relation $A \subseteq X \times X$. Wir schreiben

- $Au := \{f \in X : (u, f) \in A\} \forall u \in X$
- $\text{dom}(A) := \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ **Definitionsbereich** von A
- $\text{rg}(A) := \{f \in X : \exists u \in X : (u, f) \in A\}$ **Bild** von A
- $A^{-1} := \{(f, u) \in X \times X : (u, f) \in A\}$ **inverser Operator**
- $I := \{(u, u) \in X \times X : u \in X\}$ **identischer Operator**
- Offenbar gilt $\text{dom}(A^{-1}) = \text{rg}(A)$
- Sind $A, B \subseteq X \times X$ zwei Operatoren, $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B &:= \{(u, f_1 + f_2) : f_1 \in A, f_2 \in B\} \\ &:= \{(u, f) \in X \times X : \exists f_1, f_2 \in X : (u, f_1) \in A \wedge (u, f_2) \in B \wedge f = f_1 + f_2\} \\ \lambda \cdot A &:= \{(u, \lambda \cdot f : (u, f) \in A\} := \{(u, f) \in X \times X : \exists f_1 \in X : (u, f_1) \in A \wedge f = \lambda \cdot f_1\} \end{aligned}$$

1.1 Das “Bracket”

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für alle $u, v \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} [u, v]_\lambda &:= \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \text{ und} \\ [u, v] &:= \inf_{\lambda > 0} [u, v]_\lambda. \end{aligned}$$

Die Abbildung $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt **Bracket**. Das Bracket $[u, v]$ ist eine Richtungsableitung der Norm $\|\cdot\|_X$ im Punkt u in Richtung v .

Lemma 1.1.1 (Eigenschaften des Brackets) Seien $u, v \in X$, $\mu > 0$. Dann gilt:

- (i) $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist **oberhalbstetig**, d.h.

$$(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (u, v) \text{ in } X \times X \implies [u, v] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} [u_n, v_n]$$

- (ii) Die Funktion $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto [u, v]_\lambda$ ist monoton wachsend und beschränkt durch $\|v\|$.
- (iii) $[u, v] = \lim_{\lambda > 0} [u, v]_\lambda$.
- (iv) Die Funktion $X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, v \mapsto [u, v]$ ist sublinear.
- (v) $[\mu \cdot u, v] = [u, v]$.
- (vi) $[u, 0] = 0$.
- (vii) $[0, v] = \|v\|$.
- (viii) $[u, u] = \|u\|$.

Definition 1.1.2 Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem metrischen Raum M heißt **unterhalbstetig** \Leftrightarrow

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M, \forall u \in M : u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ in } M \implies f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$$

f heißt **oberhalbstetig**, falls $-f$ unterhalbstetig ist.

Lemma 1.1.3 Sei M ein metrischer Raum, $f: M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist unterhalbstetig.
- (ii) $\forall c \in \mathbb{R} : \{f \leq c\} := \{u \in M \mid f(u) \leq c\}$ ist abgeschlossen.
- (iii) $\{(u, \lambda) \in M \times \mathbb{R} \mid f(u) \leq \lambda\} =: \text{epi}(f)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Zeige (i) \Rightarrow (iii):

Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{x \in M : f(x) \leq c\}$ konvergente Folge mit $u := \lim u_n$ in M . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(u_n, c)}_{= \text{epi}(f)} \text{ mit } M \times \mathbb{R}.$$

Da $\text{epi}(f)$ abgeschlossen ist, ist $(u, c) \in \text{epi}(f)$, d.h. $f(u) \leq c$ d.h. $u \in \{f \leq c\}$

Zeige (ii) \Rightarrow (i):

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{x \in M : f(x) \leq c\}$ konvergente Folge mit $u := \lim u_n$ in M . Setze

$$c := \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Falls $c > -\infty$, dann enthält $\{f \leq c + \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ unendlich viele u_n . Weil $\{f \leq c + \varepsilon\}$ abgeschlossen ist, ist

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \{f \leq c + \varepsilon\} \text{ d.h. } f(u) \leq c + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist $f(u) \leq c = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$.

Falls $c = -\infty$, dann enthält $\{f \leq K\}$ mit $K \in \mathbb{R}$ beliebig unendlich viele u_n . Und weil $\{f \leq K\}$ abgeschlossen ist, ist $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \{f \leq K\}$, d.h. $f(u) \leq K$.

Da $K \in \mathbb{R}$ beliebig ist, ist $f(u) \leq -\infty$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. \square

Lemma 1.1.4 Sei M ein metrischer Raum und sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von unterhalbstetigen Funktionen $f_i : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i \in I$. Dann ist das Supremum $f := \sup_{i \in I} f_i$ unterhalbstetig.

Beweis. Es gilt

$$\text{epi}(f) = \text{epi} \left(\sup_{i \in I} f_i \right) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$$

und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. \square

Definition 1.1.5 Sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **konvex**

$$:\iff \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y)$$

Eine Teilmenge $C \subseteq X$ heißt **konvex**

$$:\iff \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in C$$

Lemma 1.1.6 f ist konvex $\iff \text{epi}(f)$ ist konvex.

Lemma 1.1.7 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Dann gilt

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < \infty$ und für alle $y \in \mathbb{R}$ ist

$$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \lambda \mapsto \frac{f(x + \lambda \cdot y) - f(x)}{\lambda}$$

monoton wachsend.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < \infty$ existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda \cdot y) - f(x)}{\lambda} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ und } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x - \lambda \cdot y) - f(x)}{-\lambda} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

(c) $\text{dom}(f) := \{r \in \mathbb{R} : f(r) < \infty\}$ ist ein Intervall und f ist stetig auf $\text{dom}(f)$.

Beweis. Zeige (a): O.B.d.A. sei $x = 0$, $f(x) = 0$ und $y = 1$.

Zu zeigen ist, dass $\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{\lambda}$ monoton wachsend auf $(0, \infty)$ ist.

Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Dann ist

$$\lambda_1 = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \lambda_2 \text{ für } \lambda := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in [0, 1]$$

und somit

$$f(x_1) = f\left((1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \lambda_2\right) \stackrel{f \text{ konv}}{\leq} \underbrace{(1 - \lambda) \cdot f(0) + \lambda \cdot f(\lambda_2)}_{=0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(\lambda_2).$$

Behauptung (c) folgt dann aus (b), welche aus (a) folgt. □

Beweis des Lemmas über die Eigenschaften des Brackets.

Zeige (a): Das Bracket ist oberhalbstetig, denn

$$[\cdot, \cdot]_\lambda : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto [u, v]_\lambda := \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda}$$

ist stetig (da jede Norm stetig ist) und damit auch oberhalbstetig für alle $\lambda > 0$. Das Infimum von oberhalbstetiger Funktion ist wieder oberhalbstetig.

Zeige (b):

Die Funktion $\lambda \mapsto [u, v]_\lambda$ ist monoton wachsend auf $(0, \infty)$, weil $\lambda \mapsto \|u + \lambda \cdot v\|$ konvex ist, denn jede Norm ist konvex (dies folgt aus der Dreiecksungleichung).

Zeige (c):

$[u, v] = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [u, v]_\lambda$ folgt aus (b) und aus

$$[u, v]_\lambda := \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \stackrel{\Delta_{\text{Ungl}}}{\leq} \frac{\|u\| + \lambda \cdot \|v\| - \|u\|}{\lambda} = \|v\|.$$

Zeige (d):

$v \mapsto [u, v]$ ist sublinear, denn

$$\begin{aligned}
[u, \mu \cdot v] &= \inf_{\lambda > 0} [u, \mu \cdot v]_{\lambda} \\
&= \inf_{\lambda > 0} \frac{\|u + \lambda \cdot \mu \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu} \\
&= \inf_{\lambda > 0} \mu \cdot [u, v]_{\lambda \cdot \mu} \\
&= \mu \cdot [u, v]
\end{aligned}$$

und für alle $\mu \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
[u, v_1 + v_2] &= \inf_{\lambda > 0} \frac{\|u + \lambda \cdot (v_1 + v_2)\| - \|u\|}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu} \\
&\stackrel{\mu \in (0,1)}{\leq} \underbrace{\inf_{\lambda > 0} \|\mu \cdot u + \lambda \cdot v_1\| + \|(1 - \mu) \cdot u + \lambda \cdot v_2\| - \mu \cdot \|u\| - (1 - \mu) \cdot \|u\|}_{= \lim_{\lambda \rightarrow 0}} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{\mu} \cdot v_1\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot v_2\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{1-\mu}} \\
&= [u, v_1] + [u, v_2]
\end{aligned}$$

Zeige (e):

Es gilt $[\mu \cdot u, v] = [u, v]$, denn

$$\begin{aligned}
[\mu \cdot u, v] &= \inf_{\lambda > 0} \frac{\|\mu \cdot u + \lambda \cdot v\| - \|\mu \cdot u\|}{\lambda} \\
&= \inf_{\lambda > 0} \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{\mu} \cdot v\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{\mu}} \\
&= [u, v]
\end{aligned}$$

Zeige (f):

$$[u, 0] = \inf_{\lambda > 0} \frac{\|u + \lambda \cdot 0\| - \|u\|}{\lambda} = 0$$

Zeige (g):

$$[0, v] = \inf_{\lambda > 0} \frac{\|0 + \lambda \cdot v\| - \|0\|}{\lambda} = \|v\|$$

Zeige (h):

$$[u, u] = \inf_{\lambda > 0} \frac{\|u + \lambda \cdot u\| - \|u\|}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{(1 + \lambda) \cdot \|u\| - \|u\|}{\lambda} = \|u\|$$

□

Bemerkung. Falls $X = H$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist, dann ist

$$\begin{aligned} [u, v] &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sqrt{\langle u + \lambda \cdot v, u + \lambda \cdot v \rangle} - \sqrt{\langle u, u \rangle} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\langle u, u \rangle + 2 \cdot \lambda \cdot \langle u, v \rangle + \lambda^2 \cdot \langle v, v \rangle} - \sqrt{\langle u, u \rangle}}{\lambda} \\ &\stackrel{u \neq 0}{=} \frac{1}{2 \cdot \|u\|} \cdot 2 \cdot \langle u, v \rangle \\ &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle \end{aligned}$$

Lemma 1.1.8 Sei X ein Banachraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $u : I \rightarrow X$ eine Funktion. Dann gilt:

(a) Wenn die **rechtsseitige Ableitung** von u ,

$$D_t^R u(t) := \dot{u}(t+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

existiert, dann existiert

$$D_t^R \|u(t)\| := \dot{u}(t+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|u(t+h)\| - \|u(t)\|}{h}$$

und es gilt

$$D_t^R \|u(t)\| = [u(t), D_t^R u(t)].$$

(b)