Vorlesung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Gunar Matthies
Mitschrift: Willi Sontopski & Robert Walter

9. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Die Finite-Elemente-Methode . . . 2
1.0. Einleitung . . . 2
1.0.1. Durchbiegung einer Membran . . . 2
1.1. Sobolev-Räume . . . 3

A. Anhang . . . 10
A.1. partielle Integration mit Satz von Gauß . . . 10

1. Die Finite-Elemente-Methode

1.0. Einleitung

In diesem Dokument werden folgende Notationen verwendet:

- $u_x := \frac{\partial u(x)}{\partial x}$ für eine diffbare Funktion $u, x \mapsto u(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n$ wobei n die Normale an u ist

1.0.1. Durchbiegung einer Membran

- Gegeben ist eine Membran als Graph der Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Aus der Physik ist bekannt, dass die Deformationsarbeit proportional zur Flächenänderung ist. Die Flächenänderung ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

- Die Energie des Systems ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_\Omega f \cdot u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

  wobei f eine von außen einwirkende Kraft ist

- Es wirkt das **physikalische Minimierungsprinzip**, d. h. das System strebt stets einen Zustand minimaler Gesamtenergie an. Gesucht ist also eine Funktion u derart, dass

$$\begin{aligned} & E(u) \leq E(v) && \forall v \in \tilde{V} \\ \Leftrightarrow\ & E(u) \leq E(u + t \cdot v) \forall t \in \mathbb{R}, && \forall v \in V \end{aligned}$$

  Dabei ist V ein Funktionenraum, dessen Funktionen auf dem Rand verschwinden.

- Setze $\varphi(v, t) := E(u + t \cdot v)$, wobei v als Parameter und t als Variable aufgefasst wird. Somit lautet die notwendige Bedingung an das Energieminimum

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v, 0) = 0$$

Nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u + t\cdot v)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \cdot \left((u+t\cdot v)_x^2 + (u + t\cdot v_y^2 \right) - f(u+t\cdot v) \right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&= \int\limits_\Omega \left((u+t\cdot v)_x \cdot v_x + (u+t\cdot v)_y \cdot v_y - f\cdot v \right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Setze nun $t := 0$. Dann folgt aus der notwendigen Bedingung

$$
0 = \int\limits_\Omega \left(u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y - f \cdot v \right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
$$

Es entsteht die Variationsaufgabe: Finde $u(t)$ so, dass

$$
\int\limits_\Omega u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_\Omega f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad \forall v \in V.
$$

Durch partielle Integration (siehe Anhang für nähere Erklärung) erhält man aus dem linken Integral

$$
\int\limits_\Omega u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = -\int\limits_\Omega (u_{xx} + u_{yy}) \cdot v + \int\limits_{\partial\Omega} \underbrace{u_x \cdot v \cdot n_x + u_y \cdot v \cdot n_y}_{=(\nabla u \cdot n)\cdot v = 0,\ \text{da } v=0 \text{ auf } \partial\Omega}\ \mathrm{d}\gamma
$$

Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_\Omega (\underbrace{u_{xx} + u_{yy}}_{=\Delta u}) \cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int\limits_\Omega f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \forall v \in V\\
\Longrightarrow -\Delta u &\equiv v \text{ auf } \Omega \Longrightarrow \textbf{“Poisson-Gleichung”}
\end{aligned}
$$

1.1. Sobolev-Räume

Bezeichnungen für dieses Kapitel:

- $d \geq 1$ sei die Raumdimension
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt
- $p \in [1, \infty)$ reelle Zahl
- $q \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ **konjungierter / dualer Exponent**

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$$
$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

- $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ messbar und } \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}(x) < \infty \right\}$ Lebesgue-Räume

Bemerkungen.

1. Da Ω beschränkt ist, gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ und die kanonische Injektion ist stetig.
2. Es gilt die Gauß-Formel:

$$\int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha \psi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

Definition 1.1.1 (schwache Ableitung) Seien $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^\alpha$ ein Multiindex. Dann heißt ψ die **schwache Ableitung** von φ :$\Leftrightarrow$

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha v \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot v \, \mathrm{d}x$$

Kurzschreibweise: $\psi = D^\alpha \varphi$

Bemerkungen.

1. Die α-te schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt im Sinne des L^1 (also bis auf Lebesgue-Nullmengen).
2. Ist $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann existiert die schwache α-te Ableitung, die mit der klassischen Ableistung übereinstimmt.

Beispiel. $d = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi(x) := |x|$
Behauptung: $\varphi'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$
Die schwache Ableitung existiert also und der Wert an der Stelle 0 ist egal.

Beweis. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \varphi v' \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \varphi v' \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \varphi v' \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[\varphi v\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1) v \, \mathrm{d}x + \left[\varphi v\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} (1) v \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{v = 0 auf Rand}}{=} - \int_{-1}^{0} (-1) v \, \mathrm{d}x - \int_{0}^{1} (1) v \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} - \int_{-1}^{1} \varphi'(x) v \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.2 (Sobolev-Räume) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$ definieren wir den **Sobolev-Raum**

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ \varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha \varphi \text{ (schwache Ableitung) existiert und erfüllt } D^\alpha \varphi \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \le k \right\} \tag{1.2}$$

Als Norm vereinbaren wir

$$\|\varphi\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha \varphi(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Durch

$$|\varphi|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Halbnorm definiert.
Für $p = 2$ schreiben wir $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Satz 1.1.3 (Eigenschaften der Sobolev-Räume) Es gilt:

1. $\left(W^{k,p}(\Omega), \| \cdot \|_{k,p,\Omega}\right)$ ist ein Banachraum.
2. $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.
3. $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_k := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha \varphi \cdot D^\alpha \psi \, \mathrm{d}x.$$

Satz 1.1.4 (Glätte von stückweise glatten Funktionen) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ zwei nichtleere, offene, beschränkte und disjunkte Teilmengen von Ω mit stückweise glattem Rand. Gelte $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$. Weiterhin sei $\varphi \in L^p(\Omega)$ so, dass

$$\exists k \geq 1 : \forall i \in \{1, 2\} : \varphi|_{\Omega_i} \in C^k(\Omega_i).$$

Dann gilt:

$$\varphi \in W^{k,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \varphi \in C^{k-1}(\Omega)$$

Definition 1.1.5 Die Vervollständigung des $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ wird mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Außerdem setze $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Definition 1.1.6 (Lipschitz-Rand) Ω hat einen **Lipschitz-Rand** :$\Leftrightarrow$
$\exists N \in \mathbb{N}, \exists U_1, \ldots, U_N \subseteq \mathbb{R}^d$:

1. $\partial\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$
2. $\forall i \in \{1, \ldots, N\} : \partial\Omega \cap U_i$ ist darstellbar als Graoh einer Lipschitz-stetigen Funktion

Das Gebiet Ω wird dann **Lipschitz-Gebiet** genannt.

Bemerkung. Für Lipschitz-Gebiete existiert fast überall auf $\partial\Omega$ der äußere Normalenvektor.

Satz 1.1.7 (Spursatz) Seien Ω eine Lipschitz-Gebiet, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \ldots, k-1\}$.
Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$\gamma_l : Wk, p(\Omega) - L^p(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$\gamma_l(\varphi) = \frac{\partial^l}{\partial u^l}\varphi|_{\partial\Omega} \qquad \forall \varphi \in C^k(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung.

- γ_0 bildet die Funktion φ, die auf Ω lebt, auf ihre Randdaten ab.
- γ_1 gibt die Normalenableitung zurück.

- Dass Bild von $W^{k,p}(\Omega)$ unter γ_l ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\partial\Omega)$, genauer:

$$\gamma_l\left(W^{k,p}(\Omega)\right) = W^{k-l-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

Satz 1.1.8 Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{\varphi \in W^{k,p}(\Omega) : \forall l \in \{0,\dots,k-1\} : \gamma_l(\varphi) = 0\right\}$$

Definition 1.1.9 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume.

1. Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel in X im Raum Y abgeschlossen ist.
2. X heißt **stetig eingebettet** in Y, in Zeichen $X \hookrightarrow Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \to Y,\ \varphi \mapsto \varphi$ stetig ist.
3. X heißt **kompakt eingebettet** in Y, in Zeichen $X \overset{C}{\hookrightarrow} Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \to Y,\ \varphi \mapsto \varphi$ kompakt ist.

Bemerkung.

1. $X \hookrightarrow Y \Longrightarrow \exists c > 0 : \forall \varphi \in X : \|\varphi\|_Y \leq c \cdot \|\varphi\|_X$
2. $X \overset{C}{\hookrightarrow} Y \Longrightarrow X \hookrightarrow Y$
3. Ist $\overset{C}{\hookrightarrow} Y$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge in X, so besitzt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.1.10 (Einbettung)

1. Sei $p < d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in \left[1, \frac{p\cdot d}{d-p}\right] \\ W^{k,p}(\Omega) &\overset{C}{\hookrightarrow} W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in \left[1, \frac{p\cdot d}{d-p}\right) \end{aligned}$$

2. Sei $p = d$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in [1, \infty)$$

3. Sei $k > \frac{d}{p}$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} C^l(\overline{\Omega}) \qquad \forall 0 \leq l \leq k - \frac{d}{p}$$

Bemerkung.

- Es gilt stets

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} W^{k-1,p}(\Omega)$$

- Falls $p = 2$, $d \in \{2, 3\}$:

$$H^2(\Omega \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

  Für $H^(\Omega)$-Funktionen sind Punkte weiter nicht sinnvoll.

- Falls $p = 2,\ d = 2$:

$$H^1(\Omega \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, \infty)$$

- Falls $p = 2,\ d = 3$:

$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, 6)$$
$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^6(\Omega)$$

Beispiel 1.1.11 Für $d = 2$ gibt es $H^1(\Omega)$-Funktionen, die nicht stetig sind:

Sei $\Omega =$ Einheitskreis, $u(x, y) := \ln\left(\ln\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$
u hat einen Pol im Ursprung, d.h. $u \notin C(\overline{\Omega})$, aber:
Behauptung:

$$\|u\|_{1,2,\Omega}^2 \leq 8\pi + \frac{2\pi}{\ln(4)} < \infty$$
$$\implies u \in H^1(\Omega)$$

Beweis.

$$\|u\|_{1,2,\Omega}^2 = \underbrace{\int_\Omega |u|^2 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y}_{:=\mathrm{I}} + \underbrace{\int_\Omega |u_x|^2 + |u_y|^2 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y}_{:=\mathrm{II}}$$

Es gilt für alle $z \geq 4$:

$$\ln(\ln(z)) \leq \sqrt{z}$$

Mit der Koflächenformel erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_\Omega |u|^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Koflä.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{4}{r} \right)^2 r \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

Als nächstes betrachten wir II. Dafür schauen wir uns zunächst die partiellen Ableitungen von u an:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{r}\right)} \frac{r}{4} \left(-\frac{4}{r^2} \right) \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)} \\
u_y &= -\frac{y}{r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)} \\
\implies u_x^2 + u_y^2 &= \frac{x^2+y^2}{\left(r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \\
&= \frac{r^2}{\left(r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Also schlussendlich:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\overset{\text{vgl. I}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \; \mathrm{d}r \\
&= \left[2\pi \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{r}\right)} \right) \right]_{r=0}^1 \\
&= \frac{2\pi}{\ln(4)}
\end{aligned}
$$

$\square$

A. Anhang

A.1. partielle Integration mit Satz von Gauß

Im Beispiel aus der Vorlesung erhalten wir folgende Gleichheit:

$$\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = -\int_\Omega (u_{xx} + u_{yy}) v \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u_x v n_x + u_y v n_y \; \mathrm{d}\gamma \tag{A.2}$$

Dies wird hier noch einmal im Detail erklärt.
Zunächst gehen wir zu einer kürzeren und allgemeineren Notation über. Wir schreiben die Summen der partiellen Ableitungen als Skalarprodukt von Gradienten auf, z.B. :

$$u_x v_x + u_y v_y = \nabla u \cdot \nabla v$$

Außerdem bedienen wir uns einer Indentität, die man durch Nachrechnen für passende Funktionen nachweisen kann:

$$\mathrm{div}(fg) = f \cdot \nabla g + g \; \mathrm{div}(f) \tag{A.3}$$

Wir nutzen diese Gleichung spezifisch mit $f = \nabla u$ und $g = v$. Nun können wir (A.2) beweisen:

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_x v_x + u_y v_y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y &\overset{\text{Notation}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{A.3}}{=} \int_\Omega \mathrm{div}(v\nabla u) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y - \int_\Omega v \; \mathrm{div}(\nabla u) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot n \; \mathrm{d}\gamma - \int_\Omega v \; \mathrm{div}(\nabla u) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\overset{\mathrm{div}(\nabla) = \triangle}{=} \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot n \; \mathrm{d}\gamma - \int_\Omega v \triangle u \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial\Omega} u_x v n_x + u_y v n_y \; \mathrm{d}\gamma - \int_\Omega (u_{xx} + u_{yy}) v \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

□