

Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Gunar Matthies
Mitschrift: Willi Sontopski & Robert Walter

9. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Die Finite-Elemente-Methode	2
1.0	Einleitung	2
1.0.1	Durchbiegung einer Membran	2
1.1	Sobolev-Räume	3

1 Die Finite-Elemente-Methode

1.0 Einleitung

In diesem Dokument werden folgende Notationen verwendet:

- $u_x := \frac{\partial u(x)}{\partial x}$ für eine diffbare Funktion $u, x \mapsto u(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n$ wobei n die Normale an u ist

1.0.1 Durchbiegung einer Membran

- Gegeben ist eine Membran als Graph der Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- Aus der Physik ist bekannt, dass die Deformationsarbeit proportional durch Flächenänderung ist. Die Flächenänderung ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy$$

- Die Energie des Systems ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx \, dy$$

wobei f eine von außen einwirkende Kraft ist

- Es wirkt das **physikalische Minimierungsprinzip**, d. h. das System strebt stets einen Zustand minimaler Gesamtenergie an. Gesucht ist also eine Funktion u derart, dass

$$\begin{aligned} E(u) &\leq E(v) \quad \forall v \in \tilde{V} \\ \Leftrightarrow E(u) &\leq E(u + t \cdot v) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Dabei ist V ein Funktionenraum, dessen Funktionen auf dem Rand verschwinden.

- Setze $\varphi(v, t) := E(u + t \cdot v)$, wobei v als Parameter und t als Variable aufgefasst wird. Somit lautet die notwendige Bedingung an das Energieminimum

$$\frac{d\varphi}{dt}(v, 0) = 0$$

Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}(v, t) &= \frac{d}{dt} E(u + t \cdot v) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \cdot ((u + t \cdot v)_x^2 + (u + t \cdot v)_y^2) - f(u + t \cdot v) \right) dx dy \\ &= \int_{\Omega} ((u + t \cdot v)_x \cdot v_x + (u + t \cdot v)_y \cdot v_y - f \cdot v) dx dy\end{aligned}$$

Setze nun $t := 0$. Dann folgt aus der notwendigen Bedingung

$$0 = \int_{\Omega} (u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y - f \cdot v) dx dy$$

Es entsteht die Variationsaufgabe: Finde $u(t)$ so, dass

$$\int_{\Omega} u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y dx dy = \int_{\Omega} f \cdot v dx dy \quad \forall v \in V.$$

Durch partielle Integration erhält man aus dem linken Integral

$$\int_{\Omega} u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y dx dy \stackrel{?}{=} - \int_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy}) \cdot v + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u_x \cdot v \cdot n_x + u_y \cdot v \cdot n_y}_{=(\nabla u \cdot n) \cdot v = 0, \text{ da } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega} d\gamma$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \underbrace{(u_{xx} + u_{yy})}_{=\Delta u} \cdot v dx dy &= \int_{\Omega} f \cdot v dx dy \quad \forall v \in V \\ \implies -\Delta u &\equiv v \text{ auf } \Omega \implies \textbf{“Poisson-Gleichung”}\end{aligned}$$

1.1 Sobolev-Räume

Bezeichnungen für dieses Kapitel:

- $d \geq 1$ sei die Raumdimension
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt
- $p \in [1, \infty)$ reelle Zahl
- $q \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ **konjugierter** / **dualer Exponent**

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

- $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ messbar und } \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mathcal{L}(x) < \infty \right\}$ Lebesgue-Räume

Bemerkungen.

1. Da Ω beschränkt ist, gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ und die kanonische Injektion ist stetig.
2. Es gilt die Gauß-Formel:

$$\int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.1)$$

Definition 1.1.1 (schwache Ableitung) Seien $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Dann heißt ψ die **schwache Ableitung** von φ : \Leftrightarrow

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot v \, dx$$

Kurzschreibweise: $\psi = D^\alpha \varphi$

Bemerkungen.

1. Die α -te schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt im Sinne des L^1 (also bis auf Lebesgue-Nullmengen).
2. Ist $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann existiert die schwache α -te Ableitung, die mit der klassischen Ableitung übereinstimmt.

Beispiel. $d = 1, \Omega = (-1, 1), \varphi(x) := |x|$

Behauptung: $\varphi'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Die schwache Ableitung existiert also und der Wert an der Stelle 0 ist egal.

Beweis. Robert-ToDo

□

Definition 1.1.2 (Sobolev-Räume) Für $k \in \mathbb{N}_0, p \in [1, \infty)$ definieren wir den **Sobolev-**

Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ \varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha \varphi \text{ (schwache Ableitung) existiert und erfüllt } D^\alpha \varphi \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k \right\} \quad (1.2)$$

Als Norm vereinbaren wir

$$\|\varphi\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha \varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Durch

$$|\varphi|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Halbnorm definiert.

Für $p = 2$ schreiben wir $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Satz 1.1.3 (Eigenschaften der Sobolev-Räume) Es gilt:

1. $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p,\Omega})$ ist ein Banachraum.
2. $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.
3. $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha \varphi \cdot D^\alpha \psi \, dx.$$

Satz 1.1.4 (Glätte von stückweise glatten Funktionen) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ zwei nichtleere, offene, beschränkte und disjunkte Teilmengen von Ω mit stückweise glattem Rand. Gelte $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$. Weiterhin sei $\varphi \in L^p(\Omega)$ so, dass

$$\exists k \geq 1 : \forall i \in \{1, 2\} : \varphi|_{\Omega_i} \in C^k(\Omega_i).$$

Dann gilt:

$$\varphi \in W^{k,p}(\Omega) \iff \varphi \in C^{k-1}(\Omega)$$

Definition 1.1.5 Die Vervollständigung des $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ wird mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Außerdem setze $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Definition 1.1.6 (Lipschitz-Rand) Ω hat einen **Lipschitz-Rand** \Leftrightarrow

$\exists N \in \mathbb{N}, \exists U_1, \dots, U_N \subseteq \mathbb{R}^d :$

1. $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N U_i$
2. $\forall i \in \{1, \dots, N\} : \partial\Omega \cap U_i$ ist darstellbar als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion

Das Gebiet Ω wird dann **Lipschitz-Gebiet** genannt.

Bemerkung. Für Lipschitz-Gebiete existiert fast überall auf $\partial\Omega$ der äußere Normalenvektor.

Satz 1.1.7 (Spursatz) Seien Ω eine Lipschitz-Gebiet, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \dots, k-1\}$. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$\gamma_l : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$\gamma_l(\varphi) = \frac{\partial^l}{\partial u^l} \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in C^k(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung.

- γ_0 bildet die Funktion φ , die auf Ω lebt, auf ihre Randdaten ab.
- γ_1 gibt die Normalenableitung zurück.
- Dass Bild von $W^{k,p}(\Omega)$ unter γ_l ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\partial\Omega)$, genauer:

$$\gamma_l \left(W^{k,p}(\Omega) \right) = W^{k-l-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

Satz 1.1.8 Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W^{k,p}(\Omega) : \forall l \in \{0, \dots, k-1\} : \gamma_l(\varphi) = 0 \right\}$$

Definition 1.1.9 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume.

1. Eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel in X im Raum Y abgeschlossen ist.
2. X heißt **stetig eingebettet** in Y , in Zeichen $X \hookrightarrow Y :Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \rightarrow Y, \varphi \mapsto \varphi$ stetig ist.

3. X heißt **kompakt eingebettet** in Y , in Zeichen $X \xhookrightarrow{C} Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \rightarrow Y$, $\varphi \mapsto \varphi$ kompakt ist.

Bemerkung.

1. $X \hookrightarrow Y \implies \exists c > 0 : \forall \varphi \in X : \|\varphi\|_Y \leq c \cdot \|\varphi\|_X$
2. $X \xhookrightarrow{C} Y \implies X \hookrightarrow Y$
3. Ist $\xhookrightarrow{C} Y$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge in X , so besitzt $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.1.10 (Einbettung)

1. Sei $p < d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) & \forall q \in \left[1, \frac{p \cdot d}{d-p}\right] \\ W^{k,p}(\Omega) &\xhookrightarrow{C} W^{k-1,p}(\Omega) & \forall q \in \left[1, \frac{p \cdot d}{d-p}\right) \end{aligned}$$

2. Sei $p = d$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty)$$

3. Sei $k > \frac{d}{p}$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \xhookrightarrow{C} C^l(\overline{\Omega}) \quad \forall 0 \leq l \leq k - \frac{d}{p}$$

Bemerkung.

- Es gilt stets

$$W^{k,p}(\Omega) \xhookrightarrow{C} W^{k-1,p}(\Omega)$$

- Falls $p = 2$, $d \in \{2, 3\}$:

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

Für $H^1(\Omega)$ -Funktionen sind Punkte weiter nicht sinnvoll.

- Falls $p = 2$, $d = 2$:

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{C} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty)$$

- Falls $p = 2$, $d = 3$:

$$H^1(\Omega) \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, 6)$$

$$H^1(\Omega) \stackrel{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} L^6(\Omega)$$

Beispiel 1.1.11 RobertToDo