Vorlesung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Gunar Matthies
Mitschrift: Willi Sontopski & Robert Walter

9. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Die Finite-Elemente-Methode . . . 2
1.0 Einleitung . . . 2
1.0.1 Durchbiegung einer Membran . . . 2
1.1 Sobolev-Räume . . . 3

1 Die Finite-Elemente-Methode

1.0 Einleitung

In diesem Dokument werden folgende Notationen verwendet:

- $u_x := \frac{\partial u(x)}{\partial x}$ für eine diffbare Funktion $u, x \mapsto u(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n$ wobei n die Normale an u ist

1.0.1 Durchbiegung einer Membran

- Gegeben ist eine Membran als Graph der Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Aus der Physik ist bekannt, dass die Deformationsarbeit proportional durch Flächenänderung ist. Die Flächenänderung ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

- Die Energie des Systems ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int\limits_{\Omega} f \cdot u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

  wobei f eine von außen einwirkende Kraft ist

- Es wirkt das **physikalische Minimierungsprinzip**, d. h. das System strebt stets einen Zustand minimaler Gesamtenergie an. Gesucht ist also eine Funktion u derart, dass

$$\begin{aligned} E(u) &\leq E(v) \; \forall v \in \tilde{V} \\ \Leftrightarrow E(u) &\leq E(u + t \cdot v) \; \forall t \in \mathbb{R}, \; \forall v \in V \end{aligned}$$

  Dabei ist V ein Funktionenraum, dessen Funktionen auf dem Rand verschwinden.

- Setze $\varphi(v, t) := E(u + t \cdot v)$, wobei v als Parameter und t als Variable aufgefasst wird. Somit lautet die notwendige Bedingung an das Energieminimum

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v, 0) = 0$$

Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u+t\cdot v)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\cdot\left((u+t\cdot v)_x^2+(u+t\cdot v_y^2\right)-f(u+t\cdot v)\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\
&= \int\limits_{\Omega}\left((u+t\cdot v)_x\cdot v_x+(u+t\cdot v)_y\cdot v_y-f\cdot v\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Setze nun $t := 0$. Dann folgt aus der notwendigen Bedingung

$$0 = \int\limits_{\Omega}\left(u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y-f\cdot v\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Es entsteht die Variationsaufgabe: Finde $u(t)$ so, dass

$$\int\limits_{\Omega} u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_{\Omega} f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad \forall v\in V.$$

Durch partielle Integration erhält man aus dem linken Integral

$$\int\limits_{\Omega} u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \overset{?}{=} -\int\limits_{\Omega}(u_{xx}+u_{yy})\cdot v+\int\limits_{\partial\Omega}\underbrace{u_x\cdot v\cdot n_x+u_y\cdot v\cdot n_y}_{=(\nabla u\cdot n)\cdot v=0,\text{ da } v=0 \text{ auf } \partial\Omega}\ \mathrm{d}\gamma$$

Somit folgt:

$$-\int\limits_{\Omega}\big(\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{=\Delta u}\big)\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_{\Omega} f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \forall v\in V$$

$$\implies -\Delta u \equiv v \text{ auf } \Omega \implies \textbf{“Poisson-Gleichung”}$$

1.1 Sobolev-Räume

Bezeichnungen für dieses Kapitel:

- $d \geq 1$ sei die Raumdimension
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt
- $p \in [1,\infty)$ reelle Zahl
- $q \in (1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ **konjungierter / dualer Exponent**

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$$
$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

- $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ messbar und } \int\limits_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}(x) < \infty \right\}$ Lebesgue-Räume

Bemerkungen.

1. Da Ω beschränkt ist, gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ und die kanonische Injektion ist stetig.
2. Es gilt die Gauß-Formel:
$$\int\limits_\Omega \varphi \cdot D^\alpha \psi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int\limits_\Omega \psi \cdot D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

Definition 1.1.1 (schwache Ableitung) Seien $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^\alpha$ ein Multiindex. Dann heißt ψ die **schwache Ableitung** von φ :$\Leftrightarrow$

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int\limits_\Omega \varphi \cdot D^\alpha v \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int\limits_\Omega \psi \cdot v \, \mathrm{d}x$$

Kurzschreibweise: $\psi = D^\alpha \varphi$

Bemerkungen.

1. Die α-te schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt im Sinne des L^1 (also bis auf Lebesgue-Nullmengen).
2. Ist $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann existiert die schwache α-te Ableitung, die mit der klassischen Ableistung übereinstimmt.

Beispiel. $d = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi(x) := |x|$
Behauptung: $\varphi'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$
Die schwache Ableitung existiert also und der Wert an der Stelle 0 ist egal.

Beweis. Robert-ToDo $\square$

Definition 1.1.2 (Sobolev-Räume) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$ definieren wir den **Sobolev-**

Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{\varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha\varphi \text{ (schwache Ableitung) existiert und erfüllt } D^\alpha\varphi \in L^p(\Omega)\ \forall|\alpha| \le k\Big\} \tag{1.2}$$

Als Norm vereinbaren wir

$$\|\varphi\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha\varphi\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha\varphi(x)|^p \ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Durch

$$|\varphi|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha\varphi\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Halbnorm definiert.
Für $p = 2$ schreiben wir $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Satz 1.1.3 (Eigenschaften der Sobolev-Räume) Es gilt:

1. $\big(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p,\Omega}\big)$ ist ein Banachraum.
2. $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.
3. $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle\varphi,\psi\rangle_k := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha\varphi \cdot D^\alpha\psi \ \mathrm{d}x.$$

Satz 1.1.4 (Glätte von stückweise glatten Funktionen) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ zwei nichtleere, offene, beschränkte und disjunkte Teilmengen von Ω mit stückweise glattem Rand. Gelte $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$. Weiterhin sei $\varphi \in L^p(\Omega)$ so, dass

$$\exists k \ge 1 : \forall i \in \{1,2\} : \varphi|_{\Omega_i} \in C^k(\Omega_i).$$

Dann gilt:

$$\varphi \in W^{k,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \varphi \in C^{k-1}(\Omega)$$

Definition 1.1.5 Die Vervollständigung des $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ wird mit $W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Außerdem setze $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Definition 1.1.6 (Lipschitz-Rand) Ω hat einen **Lipschitz-Rand** $:\Leftrightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}, \exists U_1, \ldots, U_N \subseteq \mathbb{R}^d$:

1. $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i$
2. $\forall i \in \{1, \ldots, N\} : \partial\Omega \cap U_i$ ist darstellbar als Graoh einer Lipschitz-stetigen Funktion

Das Gebiet Ω wird dann **Lipschitz-Gebiet** genannt.

Bemerkung. Für Lipschitz-Gebiete existiert fast überall auf $\partial\Omega$ der äußere Normalenvektor.

Satz 1.1.7 (Spursatz) Seien Ω eine Lipschitz-Gebiet, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \ldots, k-1\}$.
Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$\gamma_l : Wk, p(\Omega) - L^p(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$\gamma_l(\varphi) = \frac{\partial^l}{\partial u^l} \varphi|_{\partial\Omega} \qquad \forall \varphi \in C^k(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung.

- γ_0 bildet die Funktion φ, die auf Ω lebt, auf ihre Randdaten ab.
- γ_1 gibt die Normalenableitung zurück.
- Dass Bild von $W^{k,p}(\Omega)$ unter γ_l ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\partial\Omega)$, genauer:

$$\gamma_l \left(W^{k,p}(\Omega) \right) = W^{k-l-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

Satz 1.1.8 Sei Ω ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in W^{k,p}(\Omega) : \forall l \in \{0, \ldots, k-1\} : \gamma_l(\varphi) = 0 \right\}$$

Definition 1.1.9 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume.

1. Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel in X im Raum Y abgeschlossen ist.
2. X heißt **stetig eingebettet** in Y, in Zeichen $X \hookrightarrow Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \to Y,\ \varphi \mapsto \varphi$ stetig ist.

3. X heißt **kompakt eingebettet** in Y, in Zeichen $X \overset{C}{\hookrightarrow} Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y$ und die kanonische Injektion $I : X \to Y,\ \varphi \mapsto \varphi$ kompakt ist.

Bemerkung.

1. $X \hookrightarrow Y \Longrightarrow \exists c > 0 : \forall \varphi \in X : \|\varphi\|_Y \leq c \cdot \|\varphi\|_X$
2. $X \overset{C}{\hookrightarrow} Y \Longrightarrow X \hookrightarrow Y$
3. Ist $\overset{C}{\hookrightarrow} Y$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge in X, so besitzt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.1.10 (Einbettung)

1. Sei $p < d$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in \left[1, \frac{p \cdot d}{d-p}\right]$$
$$W^{k,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in \left[1, \frac{p \cdot d}{d-p}\right)$$

2. Sei $p = d$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega) \qquad \forall q \in [1, \infty)$$

3. Sei $k > \frac{d}{p}$. Dann gilt:

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} C^l(\overline{\Omega}) \qquad \forall 0 \leq l \leq k - \frac{d}{p}$$

Bemerkung.

- Es gilt stets

$$W^{k,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} W^{k-1,p}(\Omega)$$

- Falls $p = 2,\ d \in \{2, 3\}$:

$$H^2(\Omega \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

  Für $H^(\Omega)$-Funktionen sind Punkte weiter nicht sinnvoll.

- Falls $p = 2,\ \ d = 2$:

$$H^1(\Omega \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1, \infty)$$

- Falls $p = 2,\ d = 3$:

$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1,6)$$
$$H^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^6(\Omega)$$

Beispiel 1.1.11 Für $d = 2$ gibt es $H^1(\Omega)$-Funktionen, die nicht stetig sind:

Sei $\Omega =$ Einheitskreis, $u(x,y) := \ln\left(\ln\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$
u hat einen Pol im Ursprung, d.h. $u \notin C(\overline{\Omega})$, aber:
<u>Behauptung:</u>

$$\|u\|^2_{1,2,\Omega} \leq 8\pi + \frac{2\pi}{\ln(4)} < \infty$$
$$\implies u \in H^1(\Omega)$$

Beweis.

$$\|u\|^2_{1,2,\Omega} = \underbrace{\int_\Omega |u|^2 \text{ d}x \text{ d}y}_{:=\mathrm{I}} + \underbrace{\int_\Omega |u_x|^2 + |u_y|^2 \text{ d}x \text{ d}y}_{:=\mathrm{II}}$$

Es gilt für alle $z \geq 4$:

$$\ln(\ln(z)) \leq \sqrt{z}$$

Mit der Koflächenformel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_\Omega |u|^2 \text{ d}x \text{ d}y \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \text{ d}x \text{ d}y \\
&\overset{\text{Koflä.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{4}{r}\right)^2 r \text{ d}r \text{ d}\varphi \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir II. Dafür schauen wir uns zunächst die partiellen Ableitungen von u an:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{r}\right)} \frac{r}{4} \left(-\frac{4}{r^2}\right) \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)} \\
u_y &= -\frac{y}{r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)} \\
\implies u_x^2 + u_y^2 &= \frac{x^2 + y^2}{\left(r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \\
&= \frac{r^2}{\left(r^2 \ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

Also schlussendlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\overset{\text{vgl. I}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^2 \left(\ln\left(\frac{4}{r}\right)\right)^2} \, \mathrm{d}r \\
&= \left[2\pi \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{r}\right)} \right) \right]_{r=0}^1 \\
&= \frac{2\pi}{\ln(4)}
\end{aligned}$$

$\square$