Vorlesung Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Gunar Matthies
Mitschrift: Willi Sontopski & Robert Walter

8. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Die Finite-Elemente-Methode

1.0 Einleitung

In diesem Dokument werden folgende Notationen verwendet:

- $u_x := \frac{\partial u(x)}{\partial x}$ für eine diffbare Funktion $u, x \mapsto u(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n$ wobei n die Normale an u ist

1.0.1 Durchbiegung einer Membran

- Gegeben ist eine Membran als Graph der Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Aus der Physik ist bekannt, dass die Deformationsarbeit proportional durch Flächenänderung ist. Die Flächenänderung ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

- Die Energie des Systems ist

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int\limits_{\Omega} f \cdot u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

  wobei f eine von außen einwirkende Kraft ist

- Es wirkt das **physikalische Minimierungsprinzip**, d. h. das System strebt stets einen Zustand minimaler Gesamtenergie an. Gesucht ist also eine Funktion u derart, dass

$$\begin{aligned} E(u) &\leq E(v) \ \forall v \in \tilde{V} \\ \Leftrightarrow E(u) &\leq E(u + t \cdot v) \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V \end{aligned}$$

  Dabei ist V ein Funktionenraum, dessen Funktionen auf dem Rand verschwinden.

- Setze $\varphi(v, t) := E(u + t \cdot v)$, wobei v als Parameter und t als Variable aufgefasst wird. Somit lautet die notwendige Bedingung an das Energieminimum

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v, 0) = 0$$

Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(v,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u+t\cdot v)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\cdot\left((u+t\cdot v)_x^2+(u+t\cdot v_y^2)\right)-f(u+t\cdot v)\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &= \int\limits_\Omega \left((u+t\cdot v)_x\cdot v_x+(u+t\cdot v)_y\cdot v_y-f\cdot v\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Setze nun $t := 0$. Dann folgt aus der notwendigen Bedingung

$$0 = \int\limits_\Omega \left(u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y-f\cdot v\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Es entsteht die Variationsaufgabe: Finde $u(t)$ so, dass

$$\int\limits_\Omega u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_\Omega f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad \forall v\in V.$$

Durch partielle Integration erhält man aus dem linken Integral

$$\int\limits_\Omega u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \stackrel{?}{=} -\int\limits_\Omega (u_{xx}+u_{yy})\cdot v+\int\limits_{\partial\Omega} \underbrace{u_x\cdot v\cdot n_x+u_y\cdot v\cdot n_y}_{=(\nabla u\cdot n)\cdot v=0,\ \text{da}\ v=0\ \text{auf}\ \partial\Omega}\ \mathrm{d}\gamma$$

Somit folgt:

$$-\int\limits_\Omega \big(\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{=\Delta u}\big)\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int\limits_\Omega f\cdot v\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \forall v\in V$$
$$\Longrightarrow -\Delta u \equiv v \text{ auf } \Omega \Longrightarrow \textbf{“Poisson-Gleichung”}$$

1.1 Sobolev-Räume

Bezeichnungen für dieses Kapitel:

- $d \geq 1$ sei die Raumdimension
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt
- $p \in [1,\infty)$ reelle Zahl
- $q \in (1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ **konjungierter / dualer Exponent**

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$$
$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

- $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ messbar und } \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mathcal{L}(x) < \infty \right\}$ Lebesgue-Räume

Bemerkungen.

1. Da Ω beschränkt ist, gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ und die kanonische Injektion ist stetig.
2. Es gilt die Gauß-Formel:

$$\int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha \psi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.1}$$

Definition 1.1.1 (schwache Ableitung) Seien $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^\alpha$ ein Multiindex. Dann heißt ψ die **schwache Ableitung** von φ $:\Leftrightarrow$

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \varphi \cdot D^\alpha v \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega \psi \cdot v \, \mathrm{d}x$$

Kurzschreibweise: $\psi = D^\alpha \varphi$

Bemerkungen.

1. Die α-te schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt im Sinne des L^1 (also bis auf Lebesgue-Nullmengen).
2. Ist $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann existiert die schwache α-te Ableitung, die mit der klassischen Ableistung übereinstimmt.

Beispiel. $d = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi(x) := |x|$
Behauptung: $\varphi'(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$
Die schwache Ableitung existiert also und der Wert an der Stelle 0 ist egal.

Beweis. Robert-ToDo □

Definition 1.1.2 (Sobolev-Räume) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$ definieren wir den **Sobolev-**

Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{\varphi \in L^p(\Omega) : D^\alpha\varphi \text{ (schwache Ableitung) existiert und erfüllt } D^\alpha\varphi \in L^p(\Omega)\ \forall|\alpha| \leq k\Big\} \tag{1.2}$$

Als Norm vereinbaren wir

$$\|\varphi\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha\varphi\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha\varphi(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Durch

$$|\varphi|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha\varphi\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Halbnorm definiert.
Für $p = 2$ schreiben wir $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Satz 1.1.3 (Eigenschaften der Sobolev-Räume)

1. $\big(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p,\Omega}\big)$ ist ein Banachraum.
2. $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.
3. $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle\varphi, \psi\rangle_k := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha\varphi \cdot D^\alpha\psi \, \mathrm{d}x.$$