

Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingalen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Martin Keller-Ressel
Mitschrift: Willi Sontopski

10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
1	Bedingter Erwartungswert	3
1.1	Bedingter Erwartungswert als L_2 -Projektion	3

0 Einführung

- Voraussetzung für viele weitere VL im Schwerpunkt Stochastik
- zunehmend stochastische Systeme / stochastische Prozesse → Modellierung von zeitabhängigen und zufälligen Vorgängen
- wichtig im naturwissenschaftlicher, wirtschaftswissenschaftlicher und sozialwissenschaftlicher Modellierung
 - Schwebbewegung eines Einzellers
 - Bildung und Rückbildung von sozialen Netzwerken
 - zeitlicher Verlauf eines Wechselkurses (EUR / GBP)

Zentrale Frage: Abhängigkeitsstruktur (ist “morgen” von “heute” unabhängig?)

- unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen
- Markov-Prozesse
- Martingale

Was ist ein Martingal?

- “fares Spiel” zwischen Personen A und B bei dem keine Strategie einen systematischen Vorteil bringt
- Ein Vorgang, bei dem die beste Voraussage (Punktschätzung) der heutige Wert ist.
- “neutraler stochastischer Prozess” ohne systematischen Trend zum Auf- oder Abstieg

Weitere Themen:

- charakteristische Funktionen: Fourier-Transformation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
Wichtiges analytisches Werkzeug in der W-Theorie
- Zentrale Grenzwertsätze: Aussagen über Konvergenz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen zur Normalverteilung
- Brown’sche Bewegung und evtl. Lévy-Prozesse

1 Bedingter Erwartungswert

1.1 Bedingter Erwartungswert als L_2 -Projektion

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Für Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$ definiere die L_p -Norm

$$\|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p] = \left(\int_{\Omega} |X(\omega)|^p \, d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

und die Räume

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \left\{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|X\|_p < \infty \right\}$$

. Aufgrund der Minkowski-Ungleichung

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

und der Homogenität

$$\|c \cdot X\|_p = c \cdot \|X\|_p \quad \forall c \geq 0$$

ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$. Es fehlt die Definitheit.

Wir identifizieren Zufallsvariablen X, \tilde{X} , welche \mathbb{P} -fast sicher übereinstimmen, d. h. $\mathbb{P}[X \neq \tilde{X}] = 0$. Formal betrachten wir den Unterraum

$$\mathcal{N} := \{N : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : N = 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

und bilden den Quotientenraum

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) / \mathcal{N} = \{[X + \mathcal{N}] : X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\}.$$

Wir schreiben auch kurz $L_p(\mathcal{A})$ oder $L_p(\mathbb{P})$, wenn wir Abhängigkeit von \mathcal{A} oder \mathbb{P} betonen wollen.

Aus der Maßtheorie ist bekannt:

Theorem 1.1.1 Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}[X \cdot Y] = \int_{\Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

Bemerkung. Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L_2$ heißen **orthogonal** $:\Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$.

Proposition 1.1.2 Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} und $p \in [1, \infty)$. Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Beweis. RobertToDo

□

Definition. (Bedingte Erwartung in L_2)

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} .

Jedes $X \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hat eine eindeutige Orthogonalprojektion Y auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diese heißt **bedingte Erwartung** von X bzgl. \mathcal{F} und wir schreiben $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] := Y$.

Die bedingte Erwartung ist also eine Zufallsgröße und nur bis auf \mathbb{P} -Nullmengen eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Als Orthogonalprojektion gilt

$$\|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\|_2 = \inf \{ \|X - Y\|_2 : Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \}.$$

Interpretation: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ ist die beste Näherung für X durch Zufallsvariablen $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 1.1.3 Y ist die Orthogonalprojektion von X auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
 $\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \cap L_2(\mathcal{F}) : \langle X - Y, F \rangle = 0$

Beweis. RobertToDo

□

Proposition 1.1.4 (Eigenschaften der bedingten Erwartung)

Seien $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Dann gilt:

- (a) $X \in L_2(\mathcal{F}) \implies \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$
- (b) $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y \mid \mathcal{F}] = a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \, \forall a, b \in \mathbb{R}$ "Linearität"
- (c) $\langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y \rangle = \langle X, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle = \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle$ "Symmetrie"

(d) Für jede Unter- σ -Algebra $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ von \mathcal{F} gilt die **Turmregel** / **tower law**:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] \quad (1.1)$$

(e) $\mathbb{E}[Z \cdot X \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \quad \forall Z \text{ beschränkt und } \mathcal{F}\text{-messbar}$ “Pull-out-property”

(f) $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ “Monotonie”

(g) $|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]$ “Dreiecksungleichung”

Beweis. Zu (a): Folgt direkt aus der Definition.

Zu (b): Folgt aus Proposition 1.1.3:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{Prop 1.1.3}} \left\{ \begin{array}{l} \langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], F \rangle = 0 \\ \langle Y - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}], F \rangle = 0 \end{array} \right\} \forall F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ & \implies a \cdot \langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], F \rangle + b \cdot \langle Y - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}], F \rangle = 0 \quad \forall F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ & \xrightarrow{\text{Bilin}} \left\langle a \cdot X + b \cdot Y - (a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]), F \right\rangle = 0 \quad \forall F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ & \xrightarrow{\text{Prop 1.1.3}} \mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y \mid \mathcal{F}] = a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \end{aligned}$$

Zu (c): Aus Proposition 1.1.3 folgt wieder

$$\langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle = 0 \quad (1.2)$$

$$\langle Y - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \rangle = 0 \quad (1.3)$$

und damit

$$\begin{aligned} \langle X, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle &= \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + (X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]), \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle \\ &\stackrel{1.2}{=} \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle \\ &= \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y + (\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] - Y) \rangle \\ &\stackrel{1.3}{=} \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y \rangle. \end{aligned}$$

Zu (d): Aus Proposition 1.3 folgt wieder:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{Prop 1.1.3}} \langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], F \rangle \quad \forall F \in L_2(\mathcal{F}) \supseteq L_2(\mathcal{H}) \\ & \implies \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y + (\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] - Y) \rangle = 0 \quad \forall H \in L_2(\mathcal{H}) \\ & \implies \left\langle X - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{H}], H \right\rangle = 0 \quad \forall H \in L_2(\mathcal{H}) \\ & \xrightarrow{\text{Prop 1.1.3}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{H}] \end{aligned}$$

Zu (e):

$$\begin{aligned}\langle X \cdot Z - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot Z, F \rangle &= \mathbb{E} \left[(X \cdot Z - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot Z) \mid \mathcal{F} \right] \\ &= \langle X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Z \cdot F \rangle = 0 \quad \forall F \in L_2(\mathcal{F}) \text{ da auch } Z \cdot F \in L_2(\mathcal{F}) \\ &\implies \mathbb{E}[X \cdot Z \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\end{aligned}$$

Zu (f): Sei $X \geq 0$. Setze

$$A := \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}](\omega) < 0\} \in \mathcal{F}.$$

Außerdem ist gilt für die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A \in L_2(\mathcal{F})$. Einerseits gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}] \geq 0 \text{ weil } X \geq 0$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_A] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0\}}] \\ &= \int_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0\}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \, d\mathbb{P} \leq 0 \\ &\implies \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A] = 0 \\ &\implies \int_{\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0\}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \, d\mathbb{P} = 0 \\ &\implies \mathbb{P}(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] < 0) = 0 \\ &\implies \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geq 0 \text{ fast sicher}\end{aligned}$$

Allgemeine Aussage folgt mit $\tilde{X} := Y - X$ und aus der Linearität.

Zu (g):

$$\begin{aligned}\pm X \leq |X| &\stackrel{6.}{\implies} \pm \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}] \\ &\implies \left| \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \right| \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{F}]\end{aligned}$$

□

Bedingte Erwartung in L_1

Prinzip: stetige Fortsetzung.

Proposition 1.1.6 Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Die bedingte Erwartung hat eine eindeutige stetige Fortsetzung von $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}]$.

Beweis. Existenz:

Sei $X \in L_1$. Dann existiert eine Approximationsfolge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L_2$ mit

$\mathbb{E}[|X_n - X|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, in Zeichen $X_n \xrightarrow{L_1} X$.

Wähle z. B.

$$X_n := \begin{cases} X, & \text{falls } |X| \leq n \\ n, & \text{falls } X > n \\ -n, & \text{falls } X < -n \end{cases}$$

Mit dominanter Konvergenz gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n - X] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \right] = 0.$$

Mit Kontraktionseigenschaft gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}] - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] \right| \right] &\leq \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[|X - M - X_n| | \mathcal{F}] \right] \stackrel{Turm}{=} \mathbb{E}[|X_n - X_n|] \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies (\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}])_{n \in \mathbb{N}} &\text{ ist Cauchy-Folge in } L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ \implies \exists Z \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) &\text{ mit } \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] \xrightarrow{L_1} Z =: \mathbb{E}[X | \mathcal{F}] \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Sei $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Approximationsfolge für X , d. h. es gilt auch

$$\mathbb{E}[|\tilde{X}_n - X|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Z - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \mathcal{F}]\|_1 &= \left\| Z - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \mathcal{F}] \right\|_1 \\ &\stackrel{\Delta_{\text{Ungl}}}{\leq} \|Z - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}]\|_1 + \underbrace{\|\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \mathcal{F}]\|_1}_{= \mathbb{E}[\|\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}] - \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \mathcal{F}]\|]} \\ &\stackrel{\text{Kontr}}{\leq} \|Z - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}]\|_1 + \|X_n - \tilde{X}_n\|_1 \\ &\leq \|Z - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}]\|_1 + \|X - X_n\|_1 + \|X - \tilde{X}_n\|_1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \mathbb{E}[\tilde{X}_n | \mathcal{F}] &\xrightarrow{L_1} Z \end{aligned}$$

Also ist der Limes unabhängig von der Approximationsfolge. □

Korollar 1.1.7 Alle Eigenschaften aus Proposition 1.1.4 (außer Symmetrie) gelten weiterhin für alle $X, Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Beweis. Beweis durch Approximation. □

Theorem 1.1.8 Sei \mathcal{F} Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} und seien

$$X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \quad Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Dann sind äquivalent:

- (a) $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ fast sicher
- (b) $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_F] \quad \forall F \in \mathcal{F}$
(Beachte $X, Y \in L_2 \implies \langle X - Y, \mathbb{1}_F \rangle = 0$)

Beweis. Zeige (a) \implies (b):

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L_2(\mathcal{A})$ eine Approximationsfolge für X , d.h. $X_n \xrightarrow{L_1} X$. Mit Proposition 1.1.6 folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] &\xrightarrow{L_1} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = Y \\ \mathbb{E}[(X - Y) \cdot \mathbb{1}_F] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]), \mathbb{1}_F] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}], \mathbb{1}_F \rangle \\ &\stackrel{\text{Prop 1.1.3}}{=} 0 \quad \forall F \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Zeige (b) \implies (a):

Setze

$$\begin{aligned} F^+ &:= \{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y > 0\} \in \mathcal{F} \\ F^- &:= \{-(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y) > 0\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E} \left[\underbrace{(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] - Y) \cdot \mathbb{1}_{F^+}}_{\geq 0} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \cdot \mathbb{1}_{F^+} \right] - \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{F^+}] \\ &\stackrel{\text{Pull-out}}{\stackrel{\text{Turm}}{=}} \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{F^+}] - \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{F^+}] \\ &\stackrel{(b)}{=} 0 \\ &\implies \mathbb{P}(F^+) = 0 \end{aligned}$$

Analog erhält man $\mathbb{P}(F^-) = 0$. Also folgt insgesamt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = Y$ fast sicher. □

Bemerkung. Die “unbedingte Erwartung” $\mathbb{E}[X]$ können wir als Spezialfall der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ für die triviale σ -Algebra $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{A}$ auffassen.

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_\Omega] &= \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_\Omega] \\ \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_\Omega] &= 0 = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_\emptyset] \\ &\stackrel{\text{Thm 1.8}}{\implies} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \text{ da } \mathcal{F} \text{ trivial.}\end{aligned}$$

Bedingter Erwartungswert + Unabhängigkeit

Definition. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Dann heißt X **unabhängig** von \mathcal{F} , in Zeichen $X \perp \mathcal{F}$

$$:\iff \mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F} \text{ und } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt, Borel-messbar} \quad (1.4)$$

X heißt **unabhängig** von einer Zufallsvariablen Y , in Zeichen $X \perp Y$ wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- (a) $X \perp \sigma(Y)$
- (b) $\mathbb{E}[f(X) \cdot g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)] \quad \forall f, g \in B_b(\mathbb{R})$

Theorem 1.1.9 Sei $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unabhängig von \mathcal{F} . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$$

Beweis. Wegen $X \perp \mathcal{F}$ gilt:

$$\begin{aligned}\forall F \in \mathcal{F} : \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_F] &\stackrel{1.4}{=} \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_F] \\ &\stackrel{\text{Thm 1.8}}{\implies} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Merke die beiden Extremfälle:

- Wenn X \mathcal{F} -messbar ist, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$.
Die bedingte Erwartung verändert also X nicht.
- Wenn X von \mathcal{F} unabhängig ist, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$.
Die bedingte Erwartung reduziert X auf den unbedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.