Vorlesung
Methoden der Funktionalanalysis

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Ralph Chill
Mitschrift: Willi Sontopski & Johannes Stojanow

12. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Eine **Halbgruppe** ist

$$
\begin{aligned}
t &\mapsto S(t) \\
S(t) : C &\to C \\
S(0) &= \mathrm{id} \\
S(t+s) &= S(t) \circ S(s)
\end{aligned}
$$

Eine Beobachtung: Wir betrachten das folgende **Cauchy-Problem** (gewöhnliche GDG)

$$
\text{(CP)} \begin{cases} \dot{u}(t) + A(u(t)) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{0.1}
$$

Theorem 0.0.1 (Picard-Lindelöf) Sei $A \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann besitzt das Cauchy-Problem für alle $u_0 \in \mathbb{R}^N$ genau eine (globale) Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Die Existenz einer lokalen Lösung folgt bereits aus dem Theorem von Peano. Darauf kommen wir später zurück. Zur Erbringung des Eindeutigkeitsbeweises seien $u, v \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ zwei Lösungen des Cauchy-Problems zum selben Anfangswert. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t) - v(t)\|_2^2 &= \langle u(t) - v(t), \dot{u}(t) - \dot{v}(t)\rangle_2 \\
&\overset{\text{CP}}{=} -\langle u(t) - v(t), Au(t) - Av(t)\rangle_2 \\
&\overset{\text{C.S.}}{\leq} \|u(t) - v(t)\|_2 \cdot \|Au(t) - Av(t)\|_2 \\
&\overset{\text{Lip}}{\leq} L \cdot \|u(t) - v(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Lipschitz-Stetigkeit von A. Wir integrieren über $[0, t]$ und erhalten

$$
\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \|u(0) - v(0)\|_2^2 + 2L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_2^2 \, \mathrm{d}s,
$$

wobei $\|u(0) - v(0)\|_2^2 = 0$ durch Identität der Anfangswerte für u und v. Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \exp(2 \cdot L \cdot t)\|u(0) - v(0)\|_2^2 = 0 \qquad \forall t \in [0, T] \,.$$

Daraus folgt $u \equiv v$. Der Existenzbeweis erfolgt über den Beweis, dass kein „blow-up“ in endlicher Zeit möglich ist. $\square$

Bemerkung. Nur Stetigkeit von A reicht nicht für die eindeutige Lösbarkeit. Zum Beispiel sei $N = 1$ und $Au = -\operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$.

Eine Alternative zur Lipschitz-Stetigkeit:

Definition 0.0.2 (Monotonie) Die Funktion $A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt **monoton (wachsend)**

$$:\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R}^N \colon \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$$

Lemma 0.0.3 Ist A monoton und stetig, dann gibt es zu jedem $u_0 \in \mathbb{R}^N$ immer noch genau eine (globale) Lösung des Cauchy-Problems (0.1).

Beweis.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_2^2 = -\langle u(t) - v(t), Au(t) - Av(t)\rangle \leq 0.$$
$$\Longrightarrow t \mapsto \frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2 \text{ ist monoton fallend}$$

Die Abbildung $t \mapsto 2^{-1}\|u(t) - v(t)\|_2^2$ ist also monoton fallend, woraus die eindeutige Lösbarkeit folgt. $\square$

Beispiel 0.0.4 $N = 1$ und $Au = \operatorname{sgn}(u) \cdot \sqrt{|u|}$

Korollar 0.0.5 (Picard-Lindelöf allgemein) $A = A_0 + A_1$, wobei $A_0\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ monoton sowie stetig und $A_1\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig sind. Daraus folgt eindeutige (globale) Lösbarkeit und Existenz der Lösung.

Beweis. Folgt auf beiden vorherigen Resultaten. $\square$

In dieser Vorlesung behandeln wir die allgemeine Theorie in Banachräumen.

1 Akkretive Operatoren

Im Folgenden sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition 1.0.1 Ein **(nichtlinearer) Operator** auf X ist eine Relation $A \subseteq X \times X$. Wir schreiben

- $Au := \{f \in X : (u, f) \in A\}\ \forall u \in X$
- $\mathrm{dom}(A) := \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ **Definitionsbereich** von A
- $\mathrm{rg}(A) := \{f \in X : \exists u \in X : (u, f) \in A\}$ **Bild** von A
- $A^{-1} := \{(f, u) \in X \times X : (u, f) \in A\}$ **inverser Operator**
- $I := \{(u, u) \in X \times X : u \in X\}$ **identischer Operator**
- Offenbar gilt $\mathrm{dom}(A^{-1}) = \mathrm{rg}(A)$
- Sind $A, B \subseteq X \times X$ zwei Operatoren, $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann ist

$$\begin{aligned} A + B &:= \{(u, f_1 + f_2) : f_1 \in A, f_2 \in B\} \\ &:= \{(u, f) \in X \times X : \exists f_1, f_2 \in X : (u, f_1) \in A \wedge (u, f_2) \in B \wedge f = f_1 + f_2\} \\ \lambda \cdot A &:= \{(u, \lambda \cdot f : (u, f) \in\} := \{(u, f) \in X \times X : \exists f_1 \in X : (u, f_1) \in X \wedge f = \lambda \cdot f_1\} \end{aligned}$$

1.1 Das “Bracket”

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für alle $u, v \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} [u, v]_\lambda &:= \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \text{ und} \\ [u, v] &:= \inf_{\lambda > 0} [u, v]_\lambda. \end{aligned}$$

Die Abbildung $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt **Bracket**. Das Bracket $[u, v]$ ist eine Richtungsableitung der Norm $\|\cdot\|_X$ im Punkt u in Richtung v.

Lemma 1.1.1 (Eigenschaften des Brackets) Seien $u, v \in X,\ \mu > 0$. Dann gilt:

(i) $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist **oberhalbstetig**, d.h.

$$(u_n, v_u)_{n\in\mathbb{N}} \to (u, v) \text{ in } X \times X \Longrightarrow [u, v] \geq \limsup_{n\to\infty} [u_n, v_n]$$

(ii) Die Funktion $]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto [u,v]_\lambda$ ist monoton wachsend und beschränkt durch $\|v\|$.

(iii) $[u,v] = \lim_{\lambda > 0} [u,v]_\lambda$.

(iv) Die Funktion $X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $v \mapsto [u,v]$ ist sublinear.

(v) $[\mu \cdot u, v] = [u,v]$.

(vi) $[u,0] = 0$.

(vii) $[0,v] = \|v\|$.

(viii) $[u,u] = \|u\|$.

Definition 1.1.2 Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem metrischen Raum M heißt **unterhalbstetig** $:\Leftrightarrow$

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M, \forall u \in M : u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ in } M \Longrightarrow f(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n)$$

f heißt **oberhalbstetig**, falls $-f$ unterhalbstetig ist.

Lemma 1.1.3 Sei M ein metrischer Raum, $f\colon M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist unterhalbstetig.

(ii) $\forall c \in \mathbb{R}\colon \{f \leq c\} := \{u \in M \mid f(u) \leq c\}$ ist abgeschlossen.

(iii) $\{(u,\lambda) \in M \times \mathbb{R} \mid f(u) \leq \lambda\} =: \mathrm{epi}(f)$ ist abgeschlossen.

Beweis. Zeige (i) $\Rightarrow$ (iii):
Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x \in M : f(x) \leq c\}$ konvergente Folge mit $u := \lim u_n$ in M. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(u_n, c)}_{=\mathrm{epi}(f)} \text{ mit } M \times \mathbb{R}.$$

Da $\mathrm{epi}(f)$ abgeschlossen ist, ist $(u,c) \in \mathrm{epi}(f)$, d.h. $f(u) \leq c$ d.h. $u \in \{f \leq c\}$

Zeige (ii) $\Rightarrow$ (i):
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x \in M : f(x) \leq c\}$ konvergente Folge mit $u := \lim u_n$ in M. Setze

$$c := \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Falls $c > -\infty$, dann enthält $\{f \leq c + \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ unendlich viele u_n. Weil $\{f \leq c + \varepsilon\}$ abgeschlossen ist, ist

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \in \{f \leq c + \varepsilon\} \text{ d.h. } f(u) \leq c + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist $f(u) \leq c = \liminf_{n\to\infty} f(u_n)$.
Falls $c = -\infty$, dann enthält $\{f \leq K\}$ mit $K \in \mathbb{R}$ beliebig unendlich viele u_n. Und weil $\{f \leq K\}$ abgeschlossen ist, ist $u = \lim_{n\to\infty} u_n \in \{f \leq K\}$, d.h. $f(u) \leq K$.
Da $K \in \mathbb{R}$ beliebig ist, ist $f(u) \leq = -\infty$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 1.1.4 Sei M ein metrischer Raum und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von unterhalbstetigen Funktionen $f_i : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ i \in I$.
Dann ist das Supremum $f := \sup_{i\in I} f_i$ unterhalbstetig.

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{epi}(f) = \operatorname{epi}\left(\sup_{i\in I} f_i\right) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi}(f_i)$$

und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. □

Definition 1.1.5 Sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **konvex**

$$:\iff \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1] : f\big(\lambda \cdot x + (1-\lambda)\cdot y\big) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

Eine Teilmenge $C \subseteq X$ heißt **konvex**

$$:\iff \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \cdot x + (1-\lambda)\cdot y \in C$$

Lemma 1.1.6 f ist konvex $\iff$ $\operatorname{epi}(f)$ ist konvex.

Lemma 1.1.7 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Dann gilt

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < \infty$ und für alle $y \in \mathbb{R}$ ist

$$(0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \qquad \lambda \mapsto \frac{f(x + \lambda \cdot y) - f(x)}{\lambda}$$

monoton wachsend.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < \infty$ existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda \cdot y) - f(x)}{\lambda} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ und } \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x - \lambda \cdot y) - f(x)}{-\lambda} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

(c) $\operatorname{dom}(f) := \{r \in \mathbb{R} : f(r) < \infty\}$ ist ein Intervall und f ist stetig auf $\operatorname{dom}(f)$.

Beweis. Zeige (a): O.B.d.A. sei $x = 0,\ f(x) = 0$ und $y = 1$.
Zu zeigen ist, dass $\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{\lambda}$ monoton wachsend auf $(0, \infty)$ ist.
Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Dann ist

$$\lambda_1 = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \lambda_2 \text{ für } \lambda := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in [0, 1]$$

und somit

$$f(x_1) = f\Big((1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \lambda_2\Big) \overset{f \text{ konv}}{\leq} \underbrace{(1 - \lambda) \cdot f(0)}_{=0} + \lambda \cdot f(\lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(\lambda_2).$$

Behauptung (c) folgt dann aus (b), welche aus (a) folgt. □

Beweis des Lemmas über die Eigenschaften des Brackets.
Zeige (a): Das Bracket ist oberhalbstetig, denn

$$[\cdot, \cdot]_\lambda : X \times X \to \mathbb{R},\ (u, v) \mapsto [u, v]_\lambda := \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda}$$

ist stetig (da jede Norm stetig ist) und damit auch oberhalbstetig für alle $\lambda > 0$. Das Infimum von oberhalbstetiger Funktion ist wieder oberhalbstetig.

Zeige (b):
Die Funktion $\lambda \mapsto [u, v]_\lambda$ ist monoton wachsend auf $(0, \infty)$, weil $\lambda \mapsto \|u + \lambda \cdot v\|$ konvex ist, denn jede Norm ist konvex (dies folgt aus der Dreiecksungleichung).

Zeige (c):
$[u, v] = \lim_{\lambda \to 0^+} [u, v]_\lambda$ folgt aus (b) und aus

$$[u, v]_\lambda := \frac{\|u + \lambda \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \overset{\Delta\text{Ungl}}{\leq} \frac{\|u\| + \lambda \cdot \|v\| - \|u\|}{\lambda} = \|v\|.$$

Zeige (d):

$v \mapsto [u,v]$ ist sublinear, denn

$$\begin{aligned}
[u, \mu \cdot v] &= \inf_{\lambda>0} [u, \mu \cdot v]_\lambda \\
&= \inf_{\lambda>0} \frac{\|u + \lambda \cdot \mu \cdot v\| - \|u\|}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu} \\
&= \inf_{\lambda>0} \mu \cdot [u,v]_{\lambda \cdot \mu} \\
&= \mu \cdot [u,v]
\end{aligned}$$

und für alle $\mu \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
[u, v_1 + v_2] &= \inf_{\lambda>0} \frac{\|u + \lambda \cdot (v_1 + v_2)\| - \|u\|}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu} \\
&\overset{\mu \in (0,1)}{\leq} \underbrace{\inf_{\lambda>0}}_{= \lim\limits_{\lambda \to 0}} \|\mu \cdot u + \lambda \cdot v_1\| + \|(1-\mu) \cdot u + \lambda \cdot v_2\| - \mu \cdot \|u\| - (1-\mu) \cdot \|u\| \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{\mu} \cdot v_1\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{1-\mu} \cdot v_2\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{1-\mu}} \\
&= [u, v_1] + [u, v_2]
\end{aligned}$$

<u>Zeige (e):</u>
Es gilt $[\mu \cdot u, v] = [u, v]$, denn

$$\begin{aligned}
[\mu \cdot u, v] &= \inf_{\lambda>0} \frac{\|\mu \cdot u + \lambda \cdot v\| - \|\mu \cdot u\|}{\lambda} \\
&= \inf_{\lambda>0} \frac{\left\|u + \frac{\lambda}{\mu} \cdot v\right\| - \|u\|}{\frac{\lambda}{\mu}} \\
&= [u, v]
\end{aligned}$$

<u>Zeige (f):</u>

$$[u, 0] = \inf_{\lambda>0} \frac{\|u + \lambda \cdot 0\| - \|u\|}{\lambda} = 0$$

<u>Zeige (g):</u>

$$[0, v] = \inf_{\lambda>0} \frac{\|0 + \lambda \cdot v\| - \|0\|}{\lambda} = \|v\|$$

Zeige (h):

$$[u,u] = \inf_{\lambda>0} \frac{\|u+\lambda\cdot u\| - \|u\|}{\lambda} = \inf_{\lambda>0} \frac{(1+\lambda)\cdot\|u\| - \|u\|}{\lambda} = \|u\|$$

$\square$

Bemerkung. Falls $X = H$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, dann ist

$$\begin{aligned}
[u,v] &= \lim_{\lambda\to 0^+} \sqrt{\langle u+\lambda\cdot v, u+\lambda\cdot v\rangle} - \sqrt{\langle u,u\rangle} \\
&= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\sqrt{\langle u,u\rangle + 2\cdot\lambda\cdot\langle u,v\rangle + \lambda^2\cdot\langle v,v\rangle} - \sqrt{\langle u,u\rangle}}{\lambda} \\
&\overset{u\neq 0}{=} \frac{1}{2\cdot\|u\|}\cdot 2\cdot\langle u,v\rangle \\
&= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v\right\rangle
\end{aligned}$$

Lemma 1.1.8 Sei X ein Banachraum, $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und sei $u: I\to X$ eine Funktion. Dann gilt:

(a) Wenn die **rechtsseitige Ableitung** von u,

$$D_t^R u(t) := \dot{u}(t+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{u(t+h)-u(t)}{h},$$

existiert, dann existiert

$$D_t^R\|u(t)\| := \dot{u}(t+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{\|u(t+h)\| - \|u(t)\|}{h}$$

und es gilt

$$D_t^R\|u(t)\| = \big[u(t), D_t^R u(t)\big\|\,.$$

(b)