Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie mit Martingalen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Martin Keller-Ressel
Mitschrift: Willi Sontopski

9. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

- Voraussetzung für viele weitere VL im Schwerpunkt Stochastik
- zunehmend stochastische Systeme / stochastische Prozesse $\to$ Modellierung von zeitabhängigen und zufälligen Vorgängen
- wichtig im naturwissenschaftlicher, wirtschaftwissenschaftlicher und sozialwissenschaftlicher Modellierung
  - Schwimmbewegung eines Einzellers
  - Bildung und Rückbildung von sozialen Netzwerken
  - zeitlicher Verlauf eines Wechselkurses (EUR / GBP)

Zentrale Frage: Abhängigkeitsstruktur (ist "morgen" von "heute" unabhängig?)

- unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen
- Markov-Prozesse
- Martingale

Was ist ein Martingal?

- "faires SPiel" zwischen Personen A und B bei dem keine Strategie einen systematischen Vorteil bringt
- Ein Vorgang, bei dem die beste Voraussage (Punktschätzung) der heutige Wert ist.
- "neutraler stochastischer Prozess" ohne systematischen Trend zum Auf- oder Abstieg

Weitere Themen:

- charakteristische Funktionen: Fourier-Transformation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
  Wichtiges analytisches Werkzeug in der W-Theorie
- Zentrale Grenzwertsätze: Aussagen über Konvergenz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen zur Normalverteilung
- Brown'sche Bewegung und evtl. Lévy-Prozesse

1 Bedingter Erwartungswert

1.1 Bedingtet Erwartungswert als L_2-Projektion

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Für Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty)$ definiere die L_p-Norm

$$\|X\|_p := \mathbb{E}\left[|X|^p\right] = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

und die Räume

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \left\{X : \Omega \to \mathbb{R} \middle| X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|X\|_p < \infty\right\}$$

. Aufgrund der Minkowski-Ungleichung

$$\|X + Y\|_p \leq \|_p + \|Y\|_p$$

und der Homogenität

$$\|c \cdot X\|_p = c \cdot \|X\|_p \qquad \forall c \geq 0$$

ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Vektorraum mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$. Es fehlt die Definitheit.
Wir identifizieren Zufallsvariablen $X, \tilde{X}$, welche $\mathbb{P}$-fast sicher übereinstimmen, d. h. $\mathbb{P}[X \neq \tilde{X}] = 0$. Formal betrachten wir den Unterraum

$$\mathcal{N} := \{N : \Omega \to \mathbb{R} : N = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

und bilden den Quotientenraum

$$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := \mathcal{L}_P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})/\mathcal{N} = \{[X + \mathcal{N}] : X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\}.$$

Wir schreiben auch kurz $L_p(\mathcal{A})$ oder $L_p(\mathbb{P})$, wenn wir Abhängigkeit von $\mathcal{A}$ oder $\mathbb{P}$ betonen wollen.
Aus der Maßtheorie ist bekannt:

Theorem 1.1.1 Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}[X \cdot Y] = \int\limits_{\Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Bemerkung. Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L_2$ heißen **orthogonal** $:\Leftrightarrow \langle X, Y \rangle = 0$.

Proposition 1.1.2 Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ enie Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $p \in [1, \infty)$.
Dann ist $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Beweis. RobertToDo □

Definition. (Bedingte Erwartung in L_2)
Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.
Jedes $X \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hat eine eindeutige Orthogonalprojektion Y auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diese heißt **bedingte Erwartung** von X bzgl. $\mathcal{F}$ und wir schreiben $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] := Y$.
Die bedingte Erwartung ist also eine Zufallsgröße und nur bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Als Orthogonalprojektion gilt

$$\|X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\|_2 = \inf \left\{ \|X - Y\|_2 : Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \right\}.$$

Interpretation: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ ist die beste Näherung für X durch Zufallsvariablen $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 1.1.3 Y ist die Orthogonalprojektion von X auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \in L_2(\mathcal{F}) : \langle X - Y, F \rangle = 0$

Beweis. RobertToDo □

Proposition 1.1.4 (Eigenschaften der bedingten Erwartung) Seien $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Dann gilt:

1. $X \in L_2(\mathcal{F}) \Longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$
2. $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y \mid \mathcal{F}] = a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \; \forall a, b \in \mathbb{R}$ “Linearität”
3. $\langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], Y \rangle = \langle X, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle = \langle \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}] \rangle$ “Symmetrie”

4. Für jede Unter-σ-Algebra $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ gilt die **Turmregel** / **tower law**:

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \;\big|\; \mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] \tag{1.1}$$

5. $\mathbb{E}[Z \cdot X \mid \mathcal{F}] = Z \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \qquad \forall Z$ beschränkt und $\mathcal{F}$-messbar "Pull-out-property"
6. $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ "Monotonie"
7. $\big|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\big| \leq \mathbb{E}\big[|X| \;\big|\; \mathcal{F}\big]$ "Dreiecksungleichung"

Beweis. Nächste Vorlesung $\square$