Vorlesung
Mathematische Statistik

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Dietmar Ferger
Mitschrift: Willi Sontopski

10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Viele Schätzer in der Statistik sind definiert als Minimal- oder Maximalstelle von bestimmten *Kriteriumsfunktionen*, z. B. der *Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS)* oder *Minimum-Qudrat-Schätzer (MQS, KQS)* oder *Bayes-Schätzer*. Allgemein nennt man solche Schätzer **M-Schätzer**.
Ziel: Untersuchung des asymptotischen Verhaltens ($n \to \infty$) von M-Schätzern über einen *funktionalen Ansatz*. Als Beispiel:

1.1 Der Median

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion
$F_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$, also $X \sim F_X$. Definiere

$$\begin{aligned} Y(t) &:= \mathbb{E}\left(|X-t|\right) && (1.1)\\ &= \int\limits_{\Omega} |X(\omega) - t| \ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} |x-t| \cdot \mathbb{P}(X^{-1}(x)) \ \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} |x-t| \cdot F \ \mathrm{d}x \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$m := \arg\min_{t \in \mathbb{R}} Y(t) := \text{ (irgendeine) Minimalstelle der Funktion}$$

Notation. $F(m-) := F(m-0) := \lim\limits_{t \uparrow m} F(t)$

Charakterisierung der Menge aller Mediane in folgendem kleinen Lemma:

Lemma 1.1.1 Sei $X \sim F_X$ integrierbar und $m \in \mathbb{R}$. Dann äquivalent:

(a) $F(m-) \leq \frac{1}{2} \leq F(m)$

(b) $\mathbb{E}[|X-t|] \geq \mathbb{E}[|X-m|] \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

(c) m ist Median

Beweis. Zeige (a) $\Rightarrow$ (b):
Setze $h(t) := \mathbb{E}[|X-t|-|X-m|] \overset{\text{Lin}}{=} Y(t)-Y(m)$. Dann ist 2. äquivalent zu $h(t) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Dies ist noch zu zeigen.

Fall 1: $t < m$

$$h(t) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} |x-t| - |x-m| Q_F(\,\mathrm{d}x)$$

$$= \int_{(-\infty,t]} \underbrace{|x-t| - |x-m|}_{=t-x-(m-x)=-(m-t)} F(\,\mathrm{d}x) + \int_{(t,m)} \underbrace{|x-t| - |x-m|}_{\underbrace{\underbrace{x-t}_{\geq 0} - \underbrace{(m-x)}_{\leq m-t}}_{\geq -(m-t)}} F(\,\mathrm{d}x) + \int_{[m,\infty)} \underbrace{|x-t| - |x-m|}_{x-t-(x-m)=m-t} F(\,\mathrm{d}x)$$

$$\geq -(m-t) \cdot \underbrace{Q((-\infty,t])}_{F(t)} + \Big(-(m-t) \cdot F(m-) - F(t) \Big) + (m-t) \cdot \underbrace{Q([m,\infty))}_{1-\underbrace{Q((-m,m)}_{F(m-)}}$$

$$= -\underbrace{(m-t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1 - 2 \cdot F(m-))}_{\overset{1.}{\geq} 0}$$

$$\geq 0$$

Fall 2: $t > m$

$$h(t) = \int_{(-\infty,m]} \dots F(\,\mathrm{d}x) + \int_{(m,t]} \dots + \int_{(t,\infty)} \dots F(\,\mathrm{d}x)$$

$$\dots$$

$$\geq (t-m) \cdot (\underbrace{2 \cdot F(m) - 1}_{\overset{1.}{\geq} 0})$$

$$\geq 0$$

Fall 3: $t = m$ ist trivial. #
Zeige (b) $\Rightarrow$ (a):
Nach Annahme ist $h(t) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Fall 1: $t < m$ Die obige Rechnung im Fall 1 bei 1. $\Rightarrow$ 2. zeigt:

$$
\begin{aligned}
0 \leq h(t) &= -(m-t)\cdot F(t) + \int\limits_{(t,m)} \underbrace{\underbrace{x}_{<m} - t - (m-x)}_{=2x-t-m\leq m-t} F(\,\mathrm{d}x) + (m-t)\cdot(1-F(m-)) \\
&\leq -(m-t)\cdot\Big(F(t) - 1 \underbrace{+F(m-) - F(m-)}_{=0} + F(t)\Big) \\
&= \underbrace{(m-t)}_{>0}\cdot(1-2\cdot F(t)) \\
&\Longrightarrow \forall t < m : 0 \leq (m-t)\cdot(1-2\cdot F(t)) \\
&\Longrightarrow \forall t < m : 0 \leq 1 - 2\cdot F(t) \\
&\Longrightarrow \forall t < m : F(t) \leq \frac{1}{2} \\
&\overset{t\uparrow m}{\Longrightarrow} F(m-) \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Fall 2: $t > m$ Siehe 2. Fall, analog.

Zeige (a) $\Leftrightarrow$ (c): (b) ist offensichtlich äquivalent zur Definition des Medians. $\square$

Bemerkung 1.1.2

1. Lemma 1.1.1 (a) besagt, dass $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ erfüllt } 1.\}$ die Menge aller Mediane von F ist.

2. Im Allgemeinen gibt es mehrere Mediane. Üblicherweise wählt man $m := F^{-1}(\frac{1}{2})$, wobei

$$F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \quad \forall u \in (0,1)$$

die **Quantilfuntion / die verallgemeinerte Inverse** ist. Da

$$F\left(F^{-1}(u)-\right) \leq u \leq F\left(F^{-1}(u)\right) \qquad \forall u \in (0,1),$$

erfüllt $m = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ die Bedingung (a) in Lemma 1.1.1 und ist somit ein Median, nämlich der kleinste.

3. Die obige Funktion (1.1), also

$$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad Y(t) = \int |x-t| \; F(\,\mathrm{d}x) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

ist stetig (nutze Folgenkriterium + dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue), aber im Allgemeinen nicht differenzierbar, z. B. falls $F \sim X$ eine diskrete

Zufallsvariable ist. In diesem Fall ist somit die Minimierungüber Differentiation nicht möglich!