Æfing 3

Merki og Kerfi

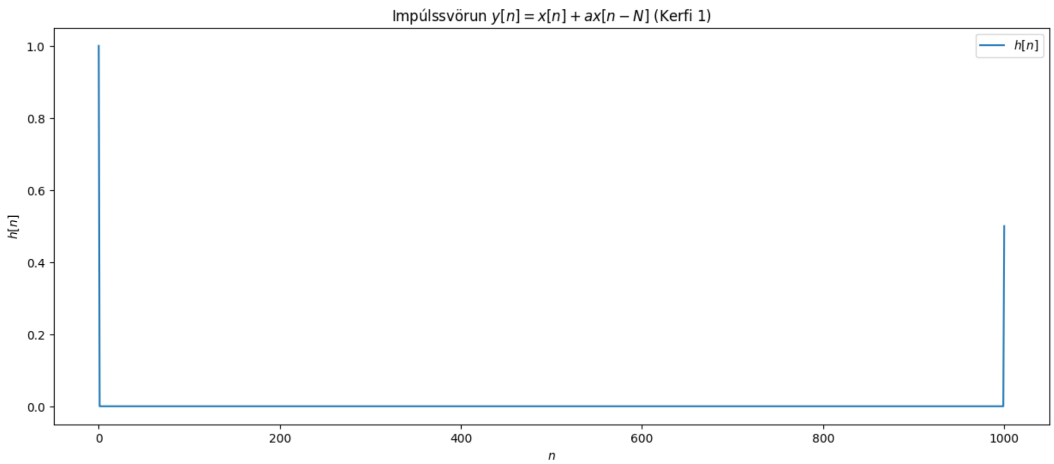
Georg Orlov og Rósa Elísabet

Október 2023

1 Bergmálseyðing

1.1 a

Hér eigum við að útfæra impúlssvörun $y[n] = x[n] + \alpha x[n - N]$ á graf.



Mynd 1: Kerfi 1

Hér sjáum við tvo impúlsa á Mynd 1. Sá fyrri er upprunalega merkið en seinni er "bergmálið" sem myndast í kerfinu. Stærðin á seinni impúlsinum margfeldi af stærð fyrri impúlsins og stærð α. Impúlssvöruninn er geymd í vigri *he*

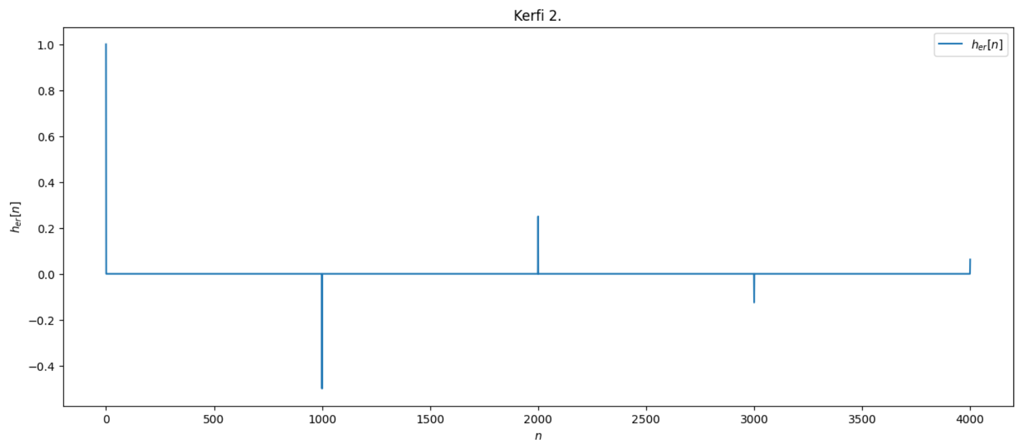
1.2 b

Hér eigum við að sýna að kerfi 2 er andhverfa kerfi 1.
Skoðum bæði merkin, $y[n] = x[n]+\alpha x[n-N]$ (kerfi 1) og $z[n]+\alpha z[n-N] = y[n]$ (kerfi 2).
Sjáum að $y[n] = x[n] + \alpha x[n - N] = z[n] + \alpha z[n - N]$
Þá er $x[n] + \alpha x[n - N] = z[n] + \alpha z[n - N]$ og $z[n] = x[n]$.

Hér er $x[n]$ er upprunalega innmerkið og $z[n]$ er útmerkið þedar það er búið að fara í gegnum tvö kerfi, eitt sem gefur okkur $y[n]$ og hitt sem finnur andhverfuna og gefur okkur $x[n]$ og því er kerfið andhverfanlegt.

1.3 c

Hér reiknum við impúlssvörun á kerfi 2. Lengd vigursins sem geymir impúlssvöruninna er 4001 og við notum $scipy.signal.lfilter$ sem impúls og fáum eftirfarandi merki.

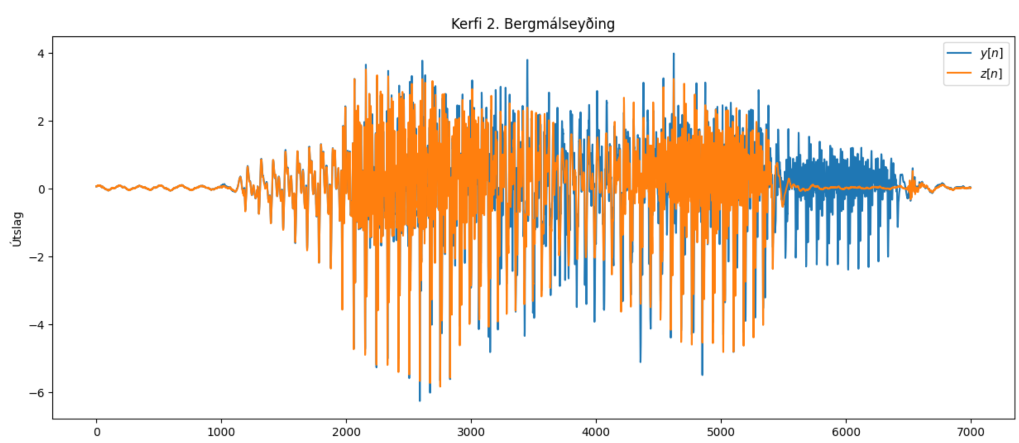


Mynd 2: Impúlssvörun, Kerfi 2

Eins og sést þá er stærð impúlsana háð fyrri impúlsa og α. Við geymum svo impúlssvöruninna í fylkinu *her*.

1.4 d

Hér notum við fylki sem er gefiðið er í *lineup.mat* pakkanum. Svo notum við *z = scipy.lfilter(np.array([1]),he,y)* til þess að deyfa út bergmálið og fáum eftirfarandi merki.

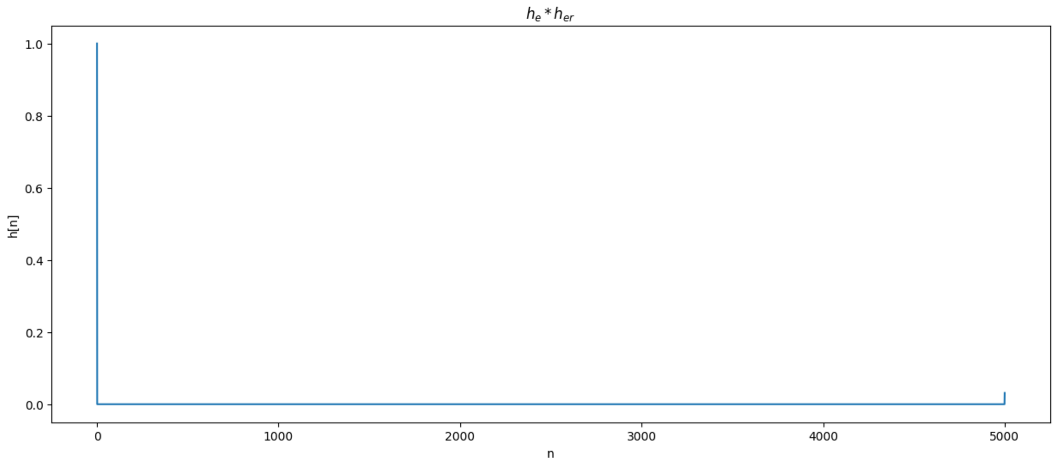


Mynd 3: Hljóðbúti fyrir og eftir bergmálsdeyfingu

Eins og sést þá tókst að deyfa út bergmálið í $y[n]$. Það er líka hægt að hlusta á bæði $y[n]$ og $z[n]$ með því að copy pastea kóðann úr kafla 4.1 í þessu skjali.

1.5 e

Hér í lokin földum við vigrana *he* og *her* (he*her). Gerum það með því að nota np.convolve í python. Plot'um á graf og fáum eftirfarandi.



Mynd 4: Földun *he* og *her*

Í dæminu er sagt að þessi földun ætti að vera samsendarkerfið, skoðum það aðeins nánar.
Sjáum strax að hér er lítill impúls í n=5000, en afhverju gerist það? *he* er skilgreint á bilinu 0 til 1000 og *her* er skilgreint á bilinu 0 til 4000, þá verður *he***her* silgreint frá 0 til 5000 og þá fáum við lítinn impúls á 5000.
Þetta gerist af því að í földuninni þá margfaldast n=0 í *he* við impúlsana í *her*. Svo dregst frá margfölduninn n=1000 *he* við *her* og þá fáum við enginn gildi fyrr en í n=5000.
Ef að földuninn væri skilgreind á óendanlegu bili þá væri enginn impúls í n=5000 og því er þessi földun samsendarkerfið.

2 Tíma-samfellda Fourier vörpunin

2.1 a

Leiðum út Fourier vörpunina fyrir $e^{-2|t|}$.
$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}e^{-jwt}$.

$$\text{Sjáum svo að:} \qquad x(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0 \\ e^{2t}, & t < 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Fáum þá: } X(jw) = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t} + \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-j\omega t}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} + \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}$$

$$|\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-2-j\omega}|_{0}^{\infty} + |\frac{e^{(2-jw)t}}{2-j\omega}|_{-\infty}^{0}$$

$$\frac{(\lim_{t\to\infty} e^{-(2+j\omega)t}) - e^{0}}{-2-j\omega} + \frac{e^{0} - (\lim_{t\to-\infty} e^{(2-j\omega)t})}{2-j\omega}$$

$$\frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{2-j\omega} = \frac{(2+j\omega)+(2-j\omega)}{(2+j\omega)(2-j\omega)} = \frac{4}{4-j^2\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

Þannig að $X(jw) = \frac{4}{4+\omega^2}$

2.2 b

Hér er eftirfarandi kóði sem að býr til merkið $y(t) = x(t - t_0)$ og setur það í vigur: $\tau = 0.01$ og $T = 10$

```
#b-lidur
tau = 0.01
T = 10
t = np.arange(0, T, tau)
y = np.exp(-2 * np.abs(t - 5))
```

2.3 c

Hér eigum við að búa til kóða sem að reiknar út fræðilega gildið á $Y(j\omega_k)$.
Við vitum að $x(t - t_0) \leftarrow \mathcal{F} \rightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.
Okkur er gefið að merkið er $y(t) = x(t - t_0)$ og að $t_0 = 5$, því fáum við að $Y(j\omega) = e^{-j5\omega}X(j\omega) = \frac{4e^{-j5\omega}}{\omega^2+4}$
Eftirfarandi Kóði reiknar $Y(j\omega)$

```
N=len(y)
Y=fftshift(tau*fft(y))
w=-np.pi/tau+np.arange(0,N)*(2*np.pi/(N*tau))
```

2.4 d

Hér eigum við að finna $X(j\omega)$ sem fall af $Y(j\omega)$.

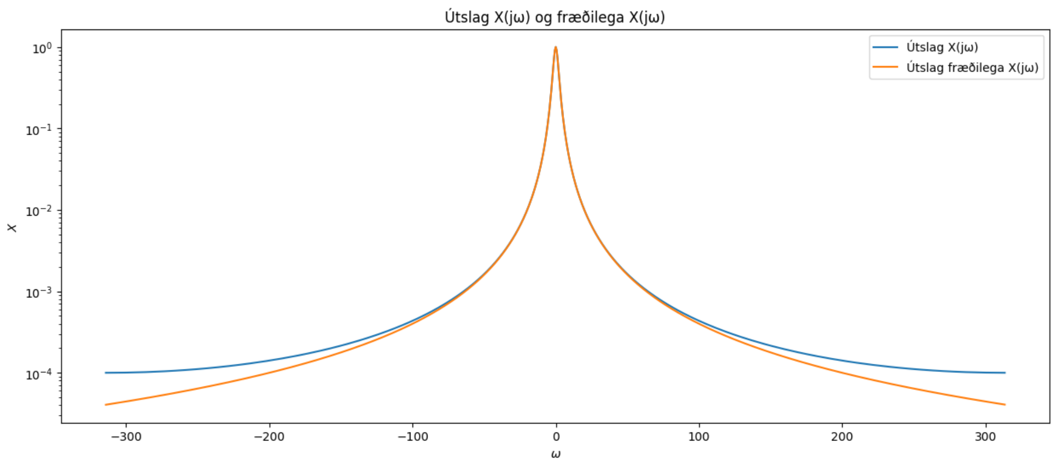
$$Y(j\omega) = e^{-j\omega 5}X(j\omega) \qquad X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{e^{-j\omega 5}}$$

Þá getum við reiknað út $X(j\omega)$ með eftirfarandi kóða.

```
X = Y/np.exp(-1j*w*5)
```

2.5 e

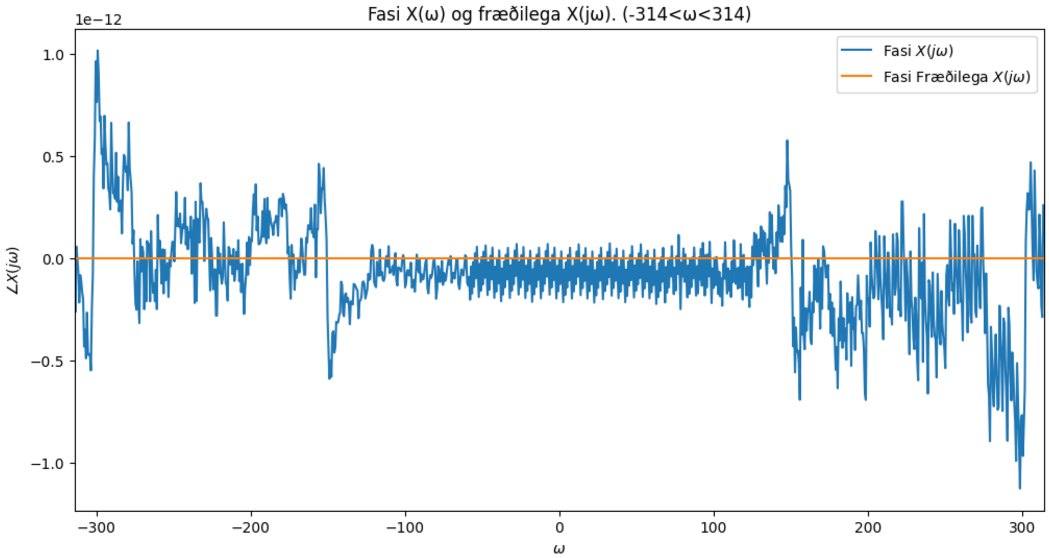
Hér setjum við graf sem sýnir útslag $X(j\omega)$ og fræðilega $X(j\omega)$



Mynd 5: Útslag $X(j\omega)$

Eins og sést þá er $X(j\omega)$ góð nálgun fyrir útslag á lágum tíðnum en versnar við hærri tíðnir.

Skoðum svo graf sem sýnir fasa $X(j\omega)$ og fræðilega $X(j\omega)$

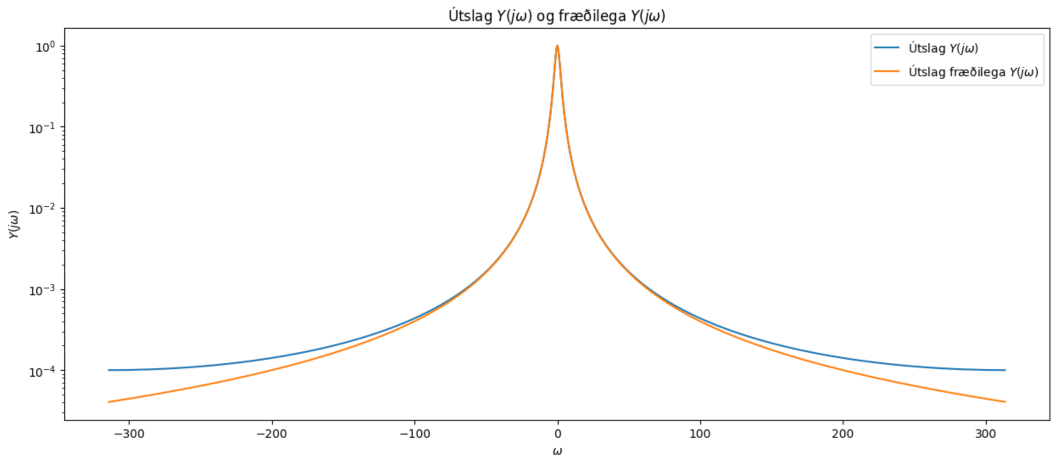


Mynd 6: Fasi $X(j\omega$

Eins og sést þá er fasi fræðilega $H(j\omega)$ alltaf 0°, þetta er vegna þess að $X(jw) = \frac{4}{4+\omega^2}$ er rauntala og því er enginn þverhluti sem gæti myndað fasa. Hér er nálguninn ekki góð og versnar við hærri tíðnir.

2.6 f

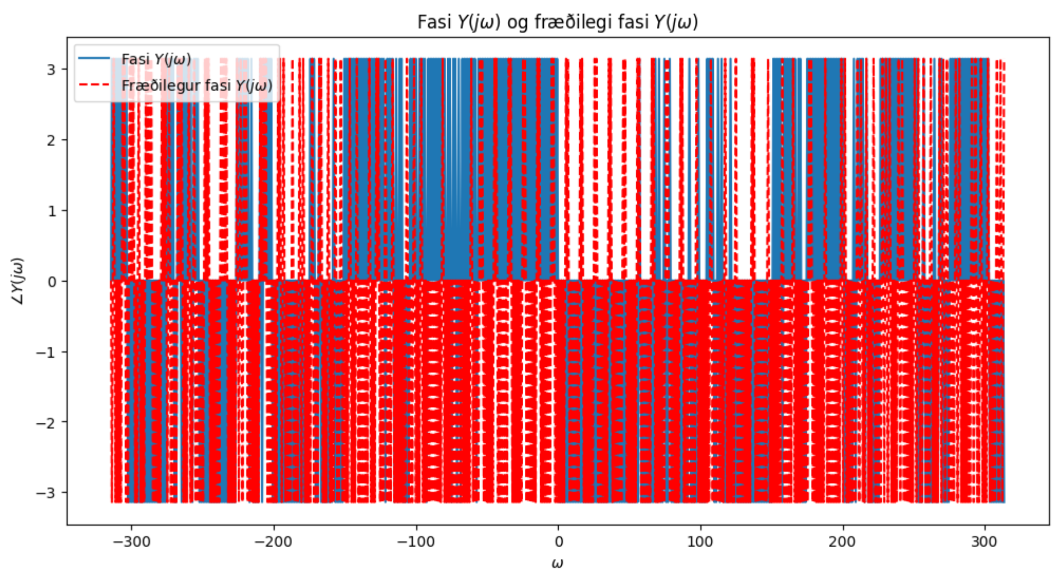
Hér setjum við graf sem sýnir útslag $Y(j\omega)$ og fræðilega $Y(j\omega)$



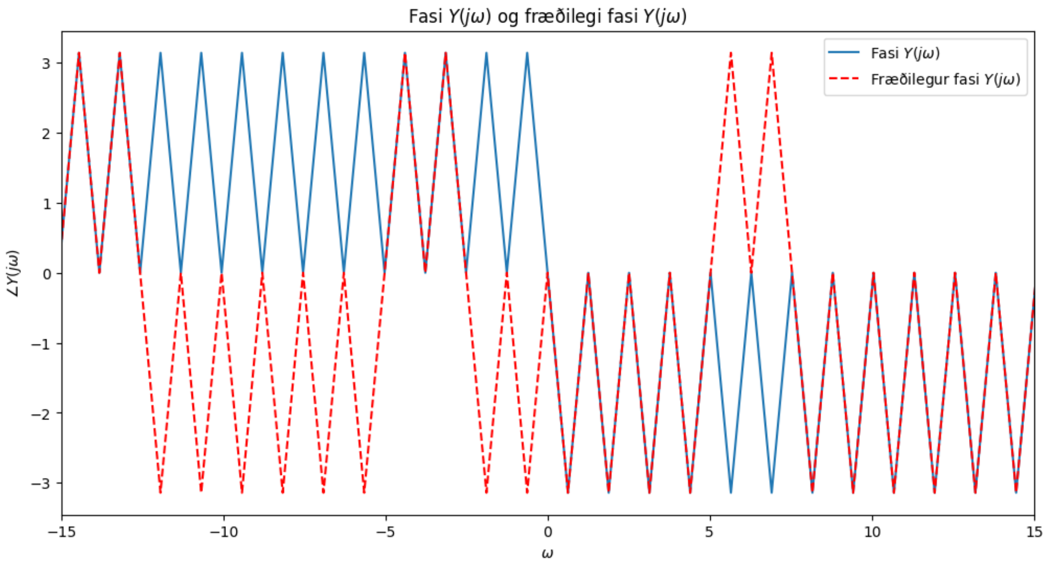
Mynd 7: Útslög $Y(j\omega)$

Eins og með e-lið að þá er nálguninn fyrir $Y(j\omega)$ góð við lágar tíðnir en versnar þegar við skoðum háar tíðnir.

Skoðum svo fasana fyrir $Y(j\omega)$ og fræðilega $Y(j\omega)$. Hér er best að þysja inn á myndina vegna þess að fasinn breytist við litlar breytingar á tíðni. Skoðum myndirnar hér fyrir neðan.



Mynd 8: Fasar $Y(j\omega)$ $(-300 \leq \omega \leq 300)$



Mynd 9: Fasar $Y(j\omega)$ $(-15 \leq \omega \leq 15)$

Á mynd 9 sést greinilega að stundum tekur fræðilegi fasinn á $Y(j\omega)$ sama gildi og $Y(j\omega)$ en stundum er 2π munur á milli þeirra og því er nálguninn alls ekki góð.

3 RC rás

a) Tökum eftir því að innmerkið $V_s(t)$ er lotubundin kassabylgja, nema henni hefur verið hliðrað. Við þekkjum Fourier stuðla lotubundinnar kassabylgju en þeir eru:

$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{sin(k\omega_0 T1)}{k\pi}, k \neq 0$$

Ef við köllum þessa kassabylgju $x(t)$ má lýsa $V_s(t)$ með eftirfarandi hætti:

$$V_s(t) = x(t - 0,0001)$$

Notum nú tímahliðrunareiginleika Fourier stuðla. Ef við köllum Fourier stuðla $V_s(t)$ b_k fæst:

$$b_0 = \frac{2T_1}{T_0}$$

$$b_k = \frac{sin(k\omega_0 T1)}{k\pi} * e^{-jk\frac{\pi}{5}}, k \neq 0$$

Hér er $T_0 = 0,001sek, T_1 = 0,1 * T_0 = 0,0001, \omega_0 = 2000\pi,$, þ.e.

$$b_0 = 0,2$$

$$b_k = \frac{sin(k * \frac{\pi}{5})}{k\pi} * e^{-jk\frac{\pi}{5}}$$

Köllum nú Fourier stuðla $V_c(t)$ c_k og notum diffrunar- og skölunareiginleika Fourierstuðla til þess að stinga inn í diffurjöfnuna

$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c(t) = V_s(t)$$

og fáum:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} c_k(RC * jk\omega_0 + 1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k * e^{jk\omega_0 t}$$

Samanburður gefur þá

$$c_k = \frac{b_k}{RCjk\omega_0 + 1}$$

þ.e.

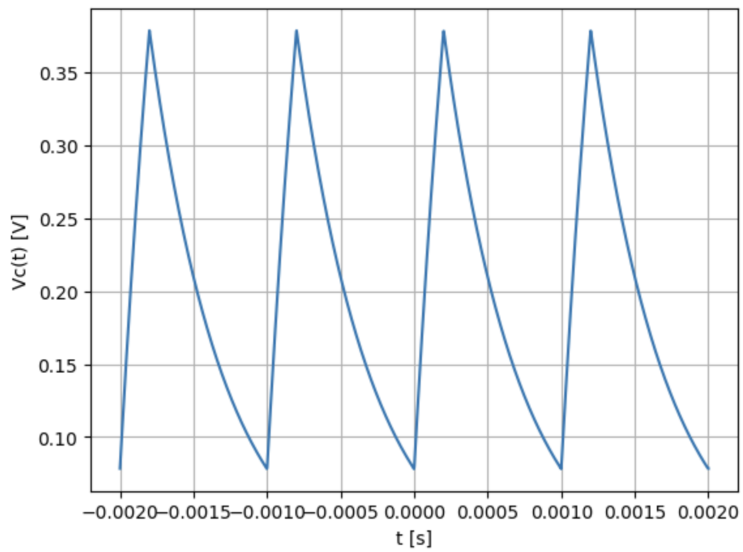
$$c_0 = 0,2$$

$$c_k = \frac{sin(k\frac{\pi}{5})}{k\pi * (RCjk2000\pi + 1)} * e^{-jk\frac{\pi}{5}}$$

Fourier röðin fyrir $V_c(t)$ er þá:

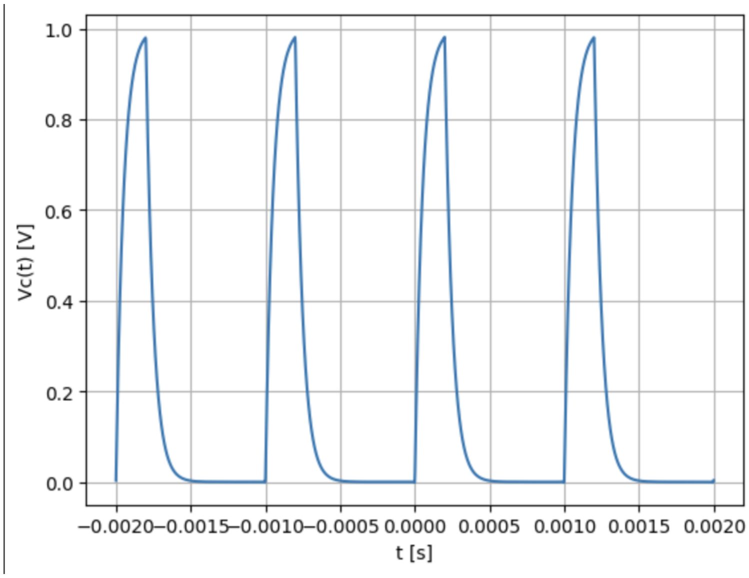
$$V_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{jk2000\pi t}$$

Hér að neðan má sjá graf útspennunar fyrir $\frac{1}{2\pi RC} = 100Hz$



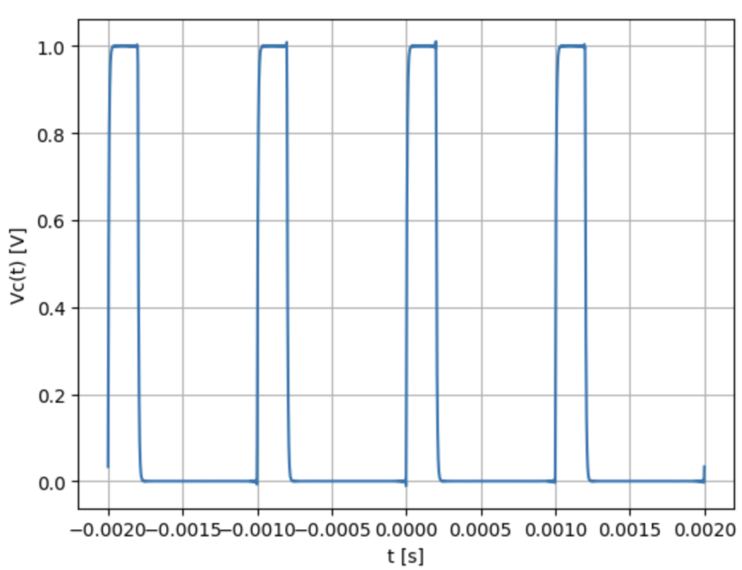
Mynd 10: Graf $V_c(t)$ sem fall af tíma

Og hér að neðan má svo sjá graf útspennunar fyrir $\frac{1}{2\pi RC} = 1kHz$ Og að lokum



Mynd 11: Graf $V_c(t)$ sem fall af tíma

má hér að neðan sjá graf útspennunar fyrir $\frac{1}{2\pi RC} = 10kHz$



Mynd 12: Graf $V_c(t)$ sem fall af tíma

4 Kóði

4.1 Bergmálseyðing

```
from matplotlib.colors import importlib
from scipy import io
from scipy import signal
from IPython.display import display, Audio, Pretty, Markdown
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt



#a-li ur

N = 1000
a = 0.5
he = np.zeros(1001);
he[0]=1
he[N]=a
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(he,label='$h[n]$')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$h[n]$')
plt.legend()
plt.title('Imp lssv run $y[n] = x[n]+ ax[n - N]$ (Kerfi 1)')

#c-li ur
import scipy.signal as scipy
d = np.zeros(4001); d[0] = 1
her = scipy.lfilter(np.array([1]),he,d)
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(her, label='$h_{er}[n]$')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$h_{er}[n]$')
plt.legend()
plt.title('Imp lssv run kerfi 2.')

#d-li ur
!wget -O lineup.mat https://github.com/sharrajesh/signals-and-systems/raw/master/buck/lineup.mat

lineup = io.loadmat('lineup.mat', squeeze_me = True )
y = lineup ['y']
fs = 8192

z = scipy.lfilter(np.array([1]),he,y)
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(y,label='$y[n]$')
plt.plot(z,label='$z[n]$')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel(' tslag ')
plt.title('Kerfi 2. Bergm lsey ing')
plt.legend()
plt.show()

display ( Markdown ( r"Hlustum    $y$: "), Audio(y, rate = fs ))
display ( Markdown ( r"Hlustum    $z$: "), Audio(z, rate = fs ))
```

```
#e-li ur
h = np.convolve(he,her)
n = np.arange(0,5001)
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.plot(n,h, label='$h[n]$')
plt.title('$h_e*h_{er}$')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('h[n]')
```

4.2 Tíma-samfellda Fourier vörpuninn

```
    import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import io
from IPython . display import display , Audio , Pretty , Markdown

from scipy.fft import fftshift, fft, fftfreq
from numpy.lib.function_base import angle

#b-li ur
tau = 0.01
T = 10
t = np.arange(0, T, tau)
y = np.exp(-2 * np.abs(t - 5))

#c-li ur
N=len(y)
Y=fftshift(tau*fft(y))
w=-np.pi/tau+np.arange(0,N)*(2*np.pi/(N*tau))


#d-li ur
X = Y/np.exp(-1j*w*5)

#e-li ur
Xf = 4/(4+w**2)

plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.semilogy(w,abs(X), label=' tslag  X( j  )')
plt.semilogy(w,abs(Xf), label=' tslag  fr  ilega X(j  )')
plt.xlabel('$\omega$')
plt.ylabel('$X$')
plt.title(' tslag  X( j  ) og fr  ilega X(j  )')
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(w,angle(X),label="Fasi $X(j\omega)$")
plt.plot(w,angle(Xf),label="Fasi Fr  ilega $X(j\omega)$")
plt.xlabel('$\omega$')
plt.ylabel(r"$\angle X(j\omega)$")
plt.xlim(-314,314)
plt.title('Fasi X(  ) og fr  ilega X(j  ). (-314<  <314)')
plt.legend()
plt.show()
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(w,angle(X),label="Fasi $X(j\omega)$")
plt.plot(w,angle(Xf),label="Fasi fr  ilega $X(j\omega)$")
plt.xlabel('$\omega$')
plt.xlim(-25,25)
plt.ylabel(r"$\angle X(j\omega)$")
plt.legend()
plt.show()


#f-li ur

Yf = Xf * np.exp(-1j*w*5)

plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.semilogy(w,abs(Y),label=" tslag  $Y(j\omega)$")
plt.semilogy(w,abs(Yf),label=" tslag  fr  ilega $Y(j\omega)$")
plt.xlabel('$\omega$')
plt.ylabel(r"$Y(j\omega)$")
plt.title(' tslag  $Y(j\omega)$ og fr  ilega $Y(j\omega)$')
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(w,angle(Y),label="Fasi $Y(j\omega)$")
plt.plot(w,angle(Yf),'r--',label="Fr  ilegur fasi $Y(j\omega)$")
plt.title('Fasi $Y(j\omega)$ og fr  ilegi fasi $Y(j\omega)$')
plt.xlabel('$\omega$')
plt.ylabel(r"$\angle Y(j\omega)$")
plt.xlim(-15,15)
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(w,angle(Y),label="Fasi $Y(j\omega)$")
plt.plot(w,angle(Yf),'r--',label="Fr  ilegur fasi $Y(j\omega)$")
plt.title('Fasi $Y(j\omega)$ og fr  ilegi fasi $Y(j\omega)$')
plt.xlabel('$\omega$')
plt.ylabel(r"$\angle Y(j\omega)$")
plt.legend()
plt.show()
```

4.3 RC-rás

```
    import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

RC1 = 1/(100*2*np.pi)
RC2=1/(1000*2*np.pi)
RC3=1/(10000*2*np.pi)
c_0 = 1 / 5
t_val = np.linspace(-0.002, 0.002, 2000)
def c_k(k,RC):
    c_k = np.sin(k * np.pi / 5) * np.exp(-1j * k * np.pi / 5) / (RC * 1j * k ** 2 * 2000 * np.pi + k
    return c_k

```

```python
def y(t,RC):
    yval = 0
    for k in range(-300, 301):
        if k == 0:
            yval += c_0
        else:
            yval += c_k(k,RC) * np.exp(1j * k * 2000 * np.pi * t)
    return yval



plt.plot(t_val, y(t_val,RC1))
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Vc(t) [V]')


plt.grid(True)
plt.show()

plt.plot(t_val, y(t_val,RC2))
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Vc(t) [V]')


plt.grid(True)
plt.show()

plt.plot(t_val, y(t_val,RC3))
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('Vc(t) [V]')


plt.grid(True)
plt.show()
print(RC1,RC2,RC3)
```