Æfing 1

Merki og Kerfi

Georg Orlov

September 2023

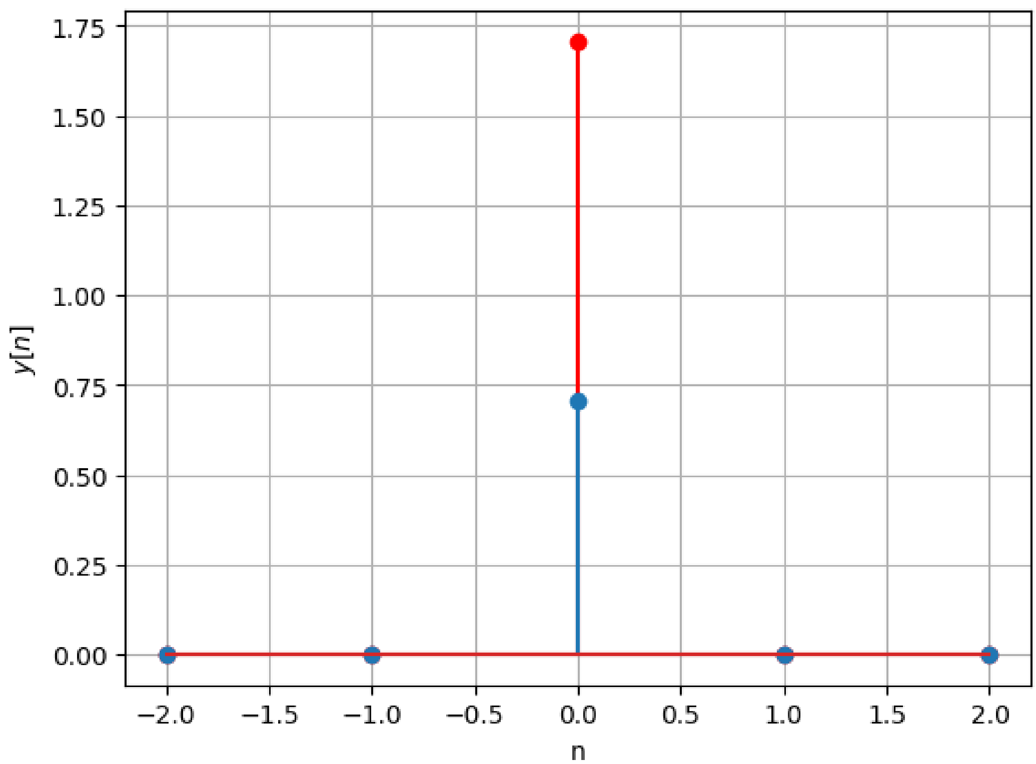
1 Dæmi 1

1.1 A-Liður

Hér fáum við merkið $y[n] = sin((\frac{\pi}{4})x[n])$ og okkur er gefið að við þurfum að nota merkin $x_1[n] = \delta[n]$ og $x_2[n] = 2\delta[n]$ til þess að sýna að $y[n]$ er ekki línulegt.

Segjum að $y_3[n] = x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ og $y_4[n] = y_1[n] + y_2[n]$. Ef að $y_3[n] = y_4[n]$ þá er kerfið línulegt.

Hér verður innmerkið $x_3[n] = 3\delta][n]$ og því verður útmerkið $y_3[n] = sin((\frac{\pi}{4})3\delta[n])$ og $y_4[n] = sin((\frac{\pi}{4})\delta[n]) + sin((\frac{\pi}{4})2\delta[n])$ (Sjá Mynd 1.1)

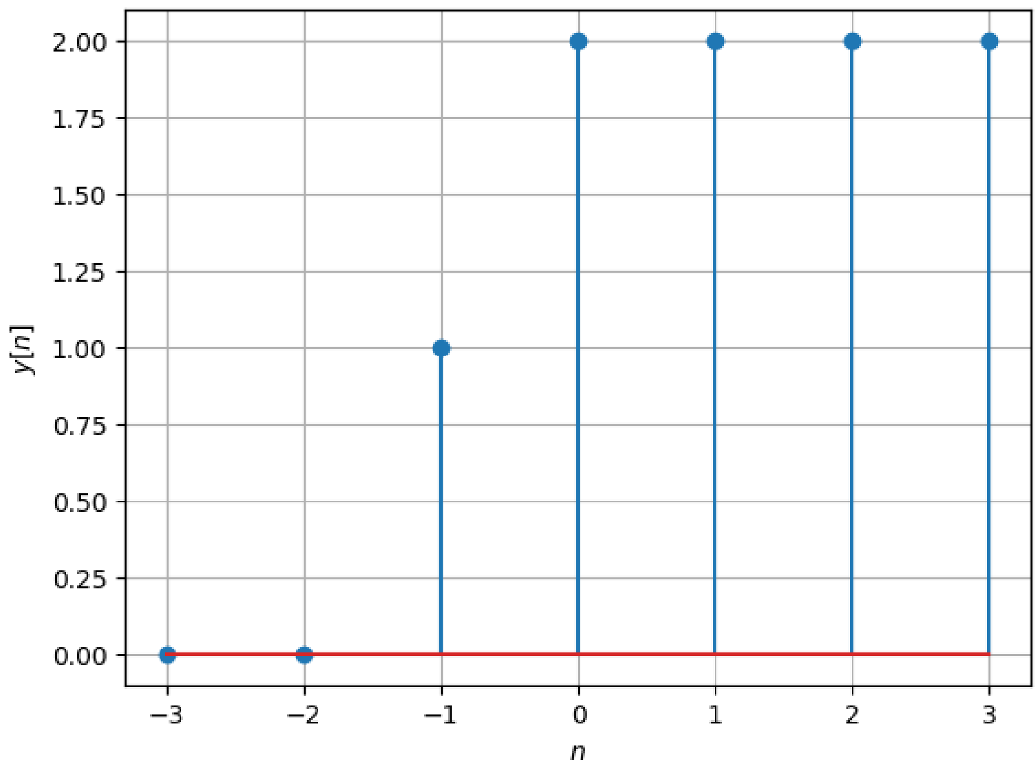


Mynd 1.1.
Bláí punkturinn er $y_3[n]$, rauði er $y_4[n]$

Eins og sést á gröfunum þá $y_3[n] \neq y_4[n]$ og því er kerfið ólínulegt.

1.2 B-Liður

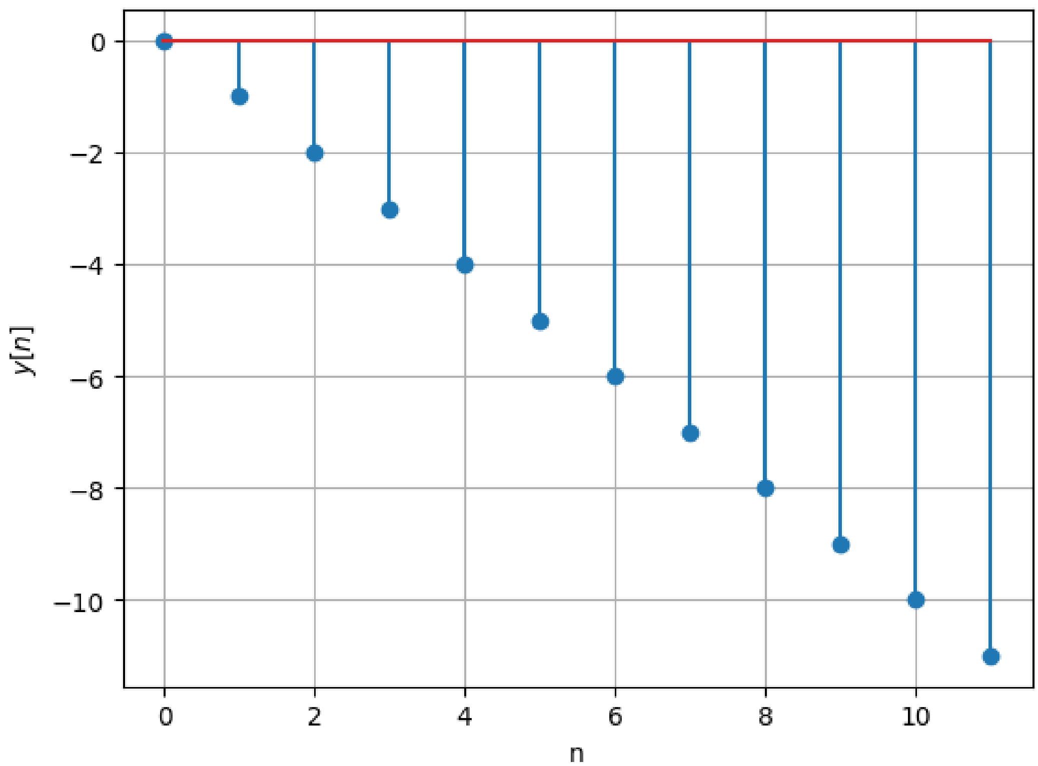
Hér fáum við merkið$y[n] = x[n] + x[n+1]$ og þurfum að sýna að það er ekki orsakanlegt með því að nota $x[n] = u[n]$.
Þegar við setjum $x[n] = u[n]$ fáum við útmerkið $y[n] = u[n] + u[n+1]$. Hér sést strax að kerfið er andorsakatengt vegna þess að $y[n]$ byrjar að taka gildi fyrir $n = 0$. (Sjá Mynd 1.2)



[Mynd 1.2]

1.3 C-Liður

Í þessum lið eigum við að sýna að kerfið $y[n] = log(x[n])$ er óstöðugt (BIBO óstöðugt). Hér þurfum við að sýna að útmerkið getur verið óstöðugt jafnvel ef að innmerkið er stöðugt.
Til að byrja með vitum við að $x[n] = e^{-n}$ er stöðugt vegna þess að það byrjar í $n = 0$ þar sem það tekur gildið 1 og stefnir svo á 0.
En ef við setjum það inní formúluna fáum við $y[n] = log(e^{-n})$ sem er óstabílt merki af því það heldur áfram að minnka þegar að $n \to \infty$.

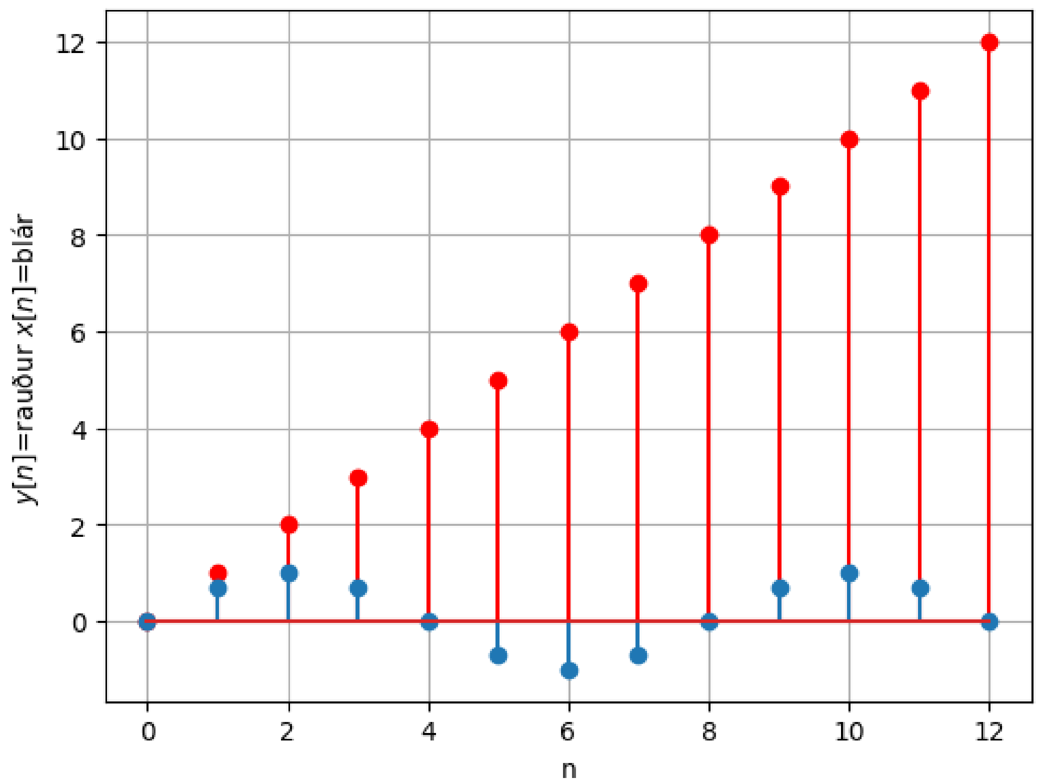


[Mynd 1.3]

Eins og sést á Mynd 1.3 þá stefnir útmerkið á $-\infty$ og þar af leiðandi er kerfið ekki BIBO stabílt.

1.4 D-Liður

Hér er okkur gefið sama merkið og í A-Lið, $y[n] = sin((\frac{\pi}{4})x[n])$. Til þess að merki sé andhverfanlegt þá má bara vera eitt útmerki fyrir hvert innmerki svo hægt sé að finna innmerkið og engin gögn séu týnd.
Hér getum við sett $x[n] = n$ sem dæmi til þess að sjá fyrir okkur hvort að hægt sé að finna innmerkið frá útmerkinu. Eins og við vitum þá getur sinus fengið gildin -1 til 1 útfrá mörgum innmerkjum. Á myndini hér fyrir neðan (Sjá Mynd 1.4)



[Mynd 1.4]

Eins og sést þá tekur sinus sama gildi aftur og aftur þó að $x[n]$ og því er $y[n]$ óandhverfanlegur.

Í næstum 3. dæmum þarf að skoða hvort að kerfin séu línuleg, tímaháð, orsakatengd, stöðug og andhverfanleg. Til þess að þurfa ekki að endurtaka mig þá ætla ég að skilgreina þessi hugtök einu sinni og svo sýna hvort þetta eigi við um hvert kerfi í dæmunum sjálfum

i) Línuleiki: Kerfi teljast línuleg ef að hægt er að margfalda og leggja saman innmerkið og fá útmerki sem er margfaldað og lagt saman á sama máta og innmerkið fyrir hvaða n sem er.
ii) Tíma-hæði: Kerfi teljast tímaóháð ef að hægt er að hliðra innmerki og fá sömu hliðrun í útmerkinu, þ.e.a.s. ef við skilgreinum merki $y[n] = x[n]$ þá þarf $y[n - n_0] = x[n - n_0]$ líka að vera satt.
iii) Orsakatengsl: Kerfi teljast orsakatengd ef að útmerkið er ekki háð neinu framtíðar innmerki.
iv) Stöðugleiki: Kerfi teljast stöðug (BIBO) ef að útmerkið er takmarkað fyrir hvaða takmarkaða innmerki sem er, þ.e.a.s. að útmerkið fer aldrei yfir eitthverja tölu.
v) Andhverfanleiki: Föll teljast andhverfanleg ef hægt er að uppfæra kerfi þannig að það sé hægt að finna innmerkið útfrá útmerkinu, þ.e.a.s. að fyrir hvert útmerki er bara eitt mögulegt innmerki sem hægt er að finna.

1.5 E-Liður

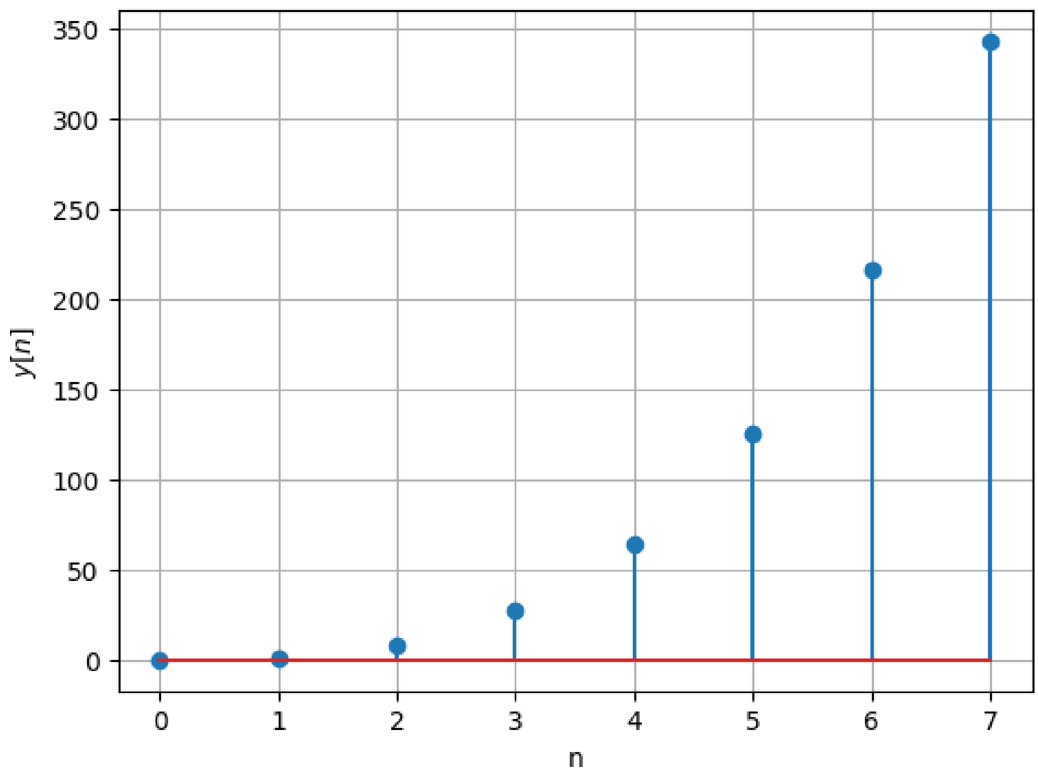
Hér eigum við að skoða hvort að $y[n] = x^3[n]$ sé línulegt, orsakatengt, tíma-óháð, stöðug og andhverfanleg.

i) Línuleiki.

Til þess að þetta kerfi sé lílulegt þá þarf bæði $ay[n] = ax^3[n]$ og $y_1[n] + y_2[n] = x_1[n] + x_2[n]$ að gilda.

Skoðum hvort að við fáum margfeldi af útmerkinu ef við margföldum innmerkið með því að skoða hvort að $ay[n] = ax[n]$ sé rétt. Setjum a=3 og reiknum.

$3y[n] = (3x[n])^3 \rightarrow 3y[n] \neq 9x^2[n]$ og því er kerfið ólínulegt (Sjá Mynd 1.5).



[Mynd 1.5]

ii) Tíma-hæði.

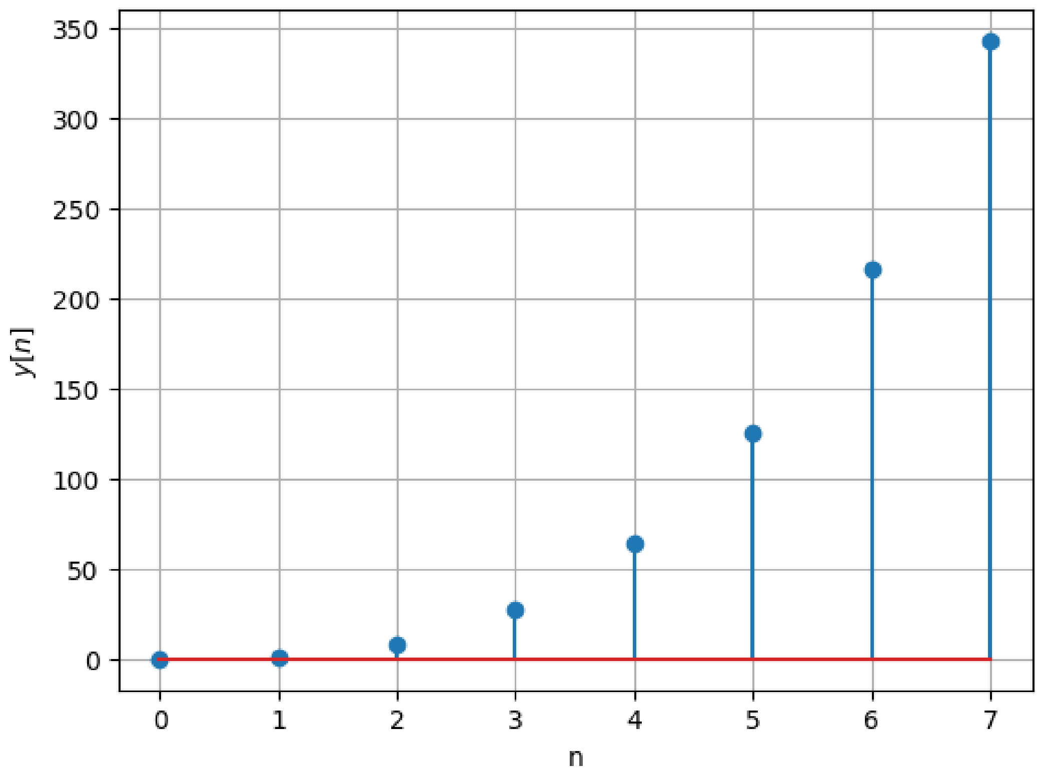
Ef við hliðrum $x[n]$ um $x^3[n - n_0] = x^3[n - 3]$ fáum við $y[n - 3]$ þar sem að x^3 fær gildið sem það var fyrir 3n og vex nákvæmlega eins og þegar það var óhliðrað sem þýðir að kerfið er tíma-óháð.

iii) Orsakatengsl.

Kerfi teljast orsakatengd ef að útmerkið er ekki háð neinu framtíðar innmerki. Þetta merki er orsakatengt af því að útmerkið er einungis háð innmerkinu á nákvæmlega sama tíma.

iv) Stöðugleiki.

Í fljótu bragði sést að þetta kerfi er óstöðugt. Ef við tökum einfalt dæmi þar sem $x[n] = n$ þá stefnir $x^3[n] \to \infty$ og útmerkið $y[n]$ heldur áfram að vaxa hraðar og hraðar. (Sjá Mynd 1.6).



[Mynd 1.6]

v) Andhverfanleiki.

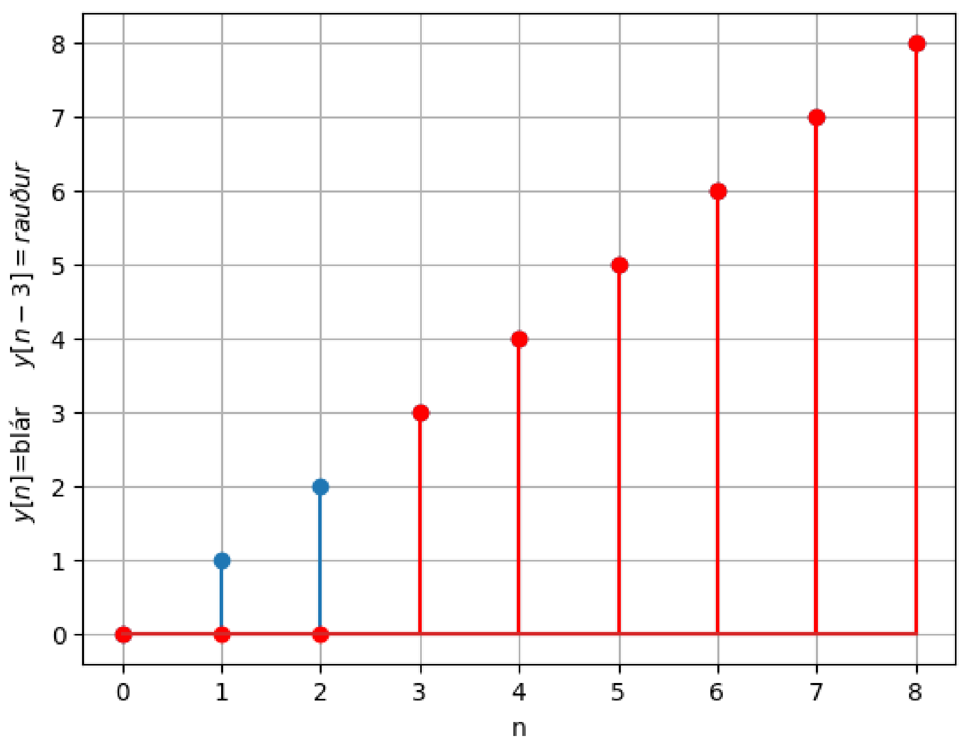
Þetta kerfi er augljóslega andhverfanlegt þar sem að útmerkið $y[n]$ aldrei sama gildið tvisvar fyrir mismunandi innmerki. Hér er líka auðvelt að finna innmerkið, eina sem við þurfum að gera er að margfalda útmerkið með $\frac{1}{x^2[n]}$ þ.a. $\frac{y[n]}{x^2[n]}$.

1.6 F-Liður

Hér eigum við að skoða hvort að $y[n] = nx[n]$ sé línulegt, orsakatengt, tíma-óháð, stöðug og andhverfanleg.

i) Línuleiki.
Til að byrja með sjáum við strax að ef við margföldum innmerkið með fasta a þá fáum við sama útmerkið margfaldað við sama fasta a, þ.e.a.s. $ay[n] = a(nx[n]) = anx[n]$. Skoðum næst hvort hægt sé að leggja saman innmerki og fá útmerki sem er lagt saman á sama máta þannig að $y_1[n] + y_2[n] = x_1[n] + x_2[n]$.
Skilgreinum að $y_1[n] = x_1[n] = nx[n]$ og $y_2[n] = x_2[n] = nx[n]$ Ef við leggjum saman $y_1[n]+y_2[n]$ þá fáum við $nx_1[n]+nx_2[n]$ og ef við leggjum saman $nx_1[n]+nx_2[n]$ þá fáum við líka $nx_1[n] + nx_2[n]$ sem þýðir að kerfið er línulegt.

ii) Tíma-hæði.
Ef við hliðrum merkið innmerkið þar sem $y[n] = nx[n]$ fáum við $nx[n - n_0]$ sem er ekki það sama og $y[n - n_0]$ og því er kerfið tímaháð.
Á myndinni hér fyrir neðan (sjá Mynd **??**) er sést hvað gerist við fallið ef að $x[n] = u[n]$. Bláu línurnar eru $x[n]$ og rauðu eru $x[n - n_0]$ þar sem $n_0 = 3$



[Mynd 1.7]

Eins og sést á myndinni (1.7) þá hliðrast útmerkið ekki venjulega heldur byrjar útmerkið síðar en tekur sömu gildi á sama tíma.

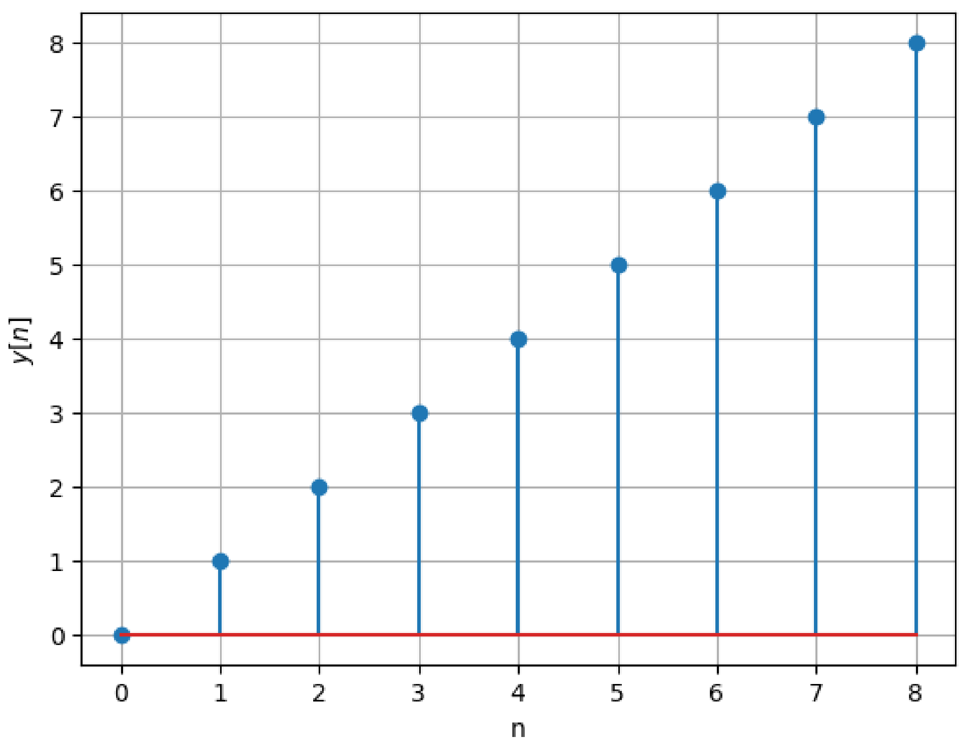
iii) Orsakatengsl.

Í fljótu bragði sést að kerfið okkar er orsakatengt þar sem að það er ekkert í kerfinu sem bendir til þess að framtíð merkis hafi áhrif á merkið sjálft, m.ö.o. þá er ekkert í kerfinu sem lætur framtíðina stjórna kerfið. (Sjá Mynd 1.8).

[Mynd 1.8]

iv) Stöðugleiki.

Ef við prufum að setja $x[n] = u[n]$ sem er auðvitað takmarkað innmerki þá fáum við að $y[n] = nu[n]$ sem er alls ekki stöðugt þar sem að það heldur áfram að vaxa um 1 fyrir hvert n. (Sjá Mynd 1.9)



[Mynd 1.9]

v) Andhverfanleiki.
Þetta kerfi er augljóslega andhverfanlegt þar sem að hvert mögulegt útmerki kemur fyrir bara einu sinni fyrir hvert innmerki. Eina sem þarf að gera til þess að finna innmerkið frá $y[n] = nx[n]$ er að margfalda útmerkið með $\frac{1}{n}$, þá er $\frac{1}{n}y[n] = x[n]$

1.7 G-Liður

Hér eigum við að skoða hvort að $y[n] = x[2n]$ sé línulegt, orsakatengt, tíma-óháð, stöðug og andhverfanleg.

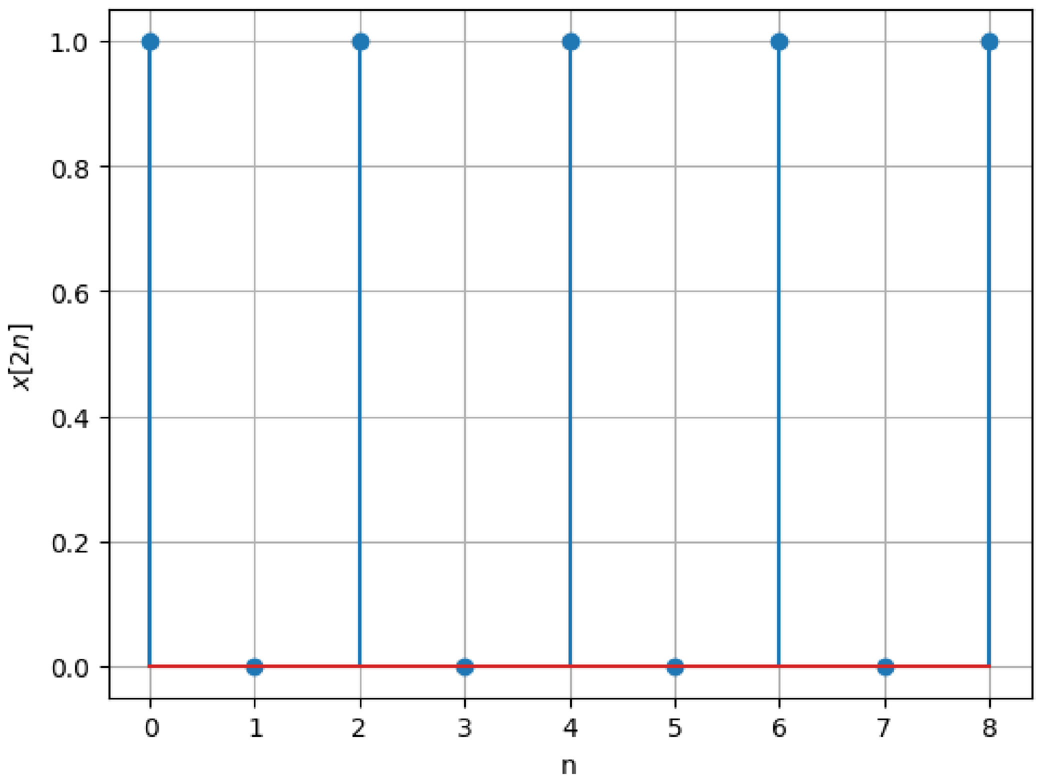
i) Línuleiki.
Eins og áður skoðum við hvort að hægt sé að margfalda og leggja saman bæði innmerkin og útmerkin og fá sama gildi. Byrjum á því að skoða hvort að $ay_1[n] = ax_1[n]$ þar sem $x_1[n] = x[2n]$ og a er fasti. Við sjáum að alveg sama hvaða fasta við margföldum með þá er $ay_1[n] = ax_1[n] = ax[2n]$ sem gefur til kynna að kerfið gæti verið línulegt.
Skoðum nú hvort að kerfið uppfylli samlagningarskylirðin. Segjum að $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$, $y_1[n] = x_1[n] = x[2n]$ og $y_2[n] = x_2[n] = x[2n]$, hér verður $y[n] = x[n] = x_1[n] + x_2[n] = y_1[n] + y_2[n] = 2x[2n]$ sem segir okkur að kerfið er línulegt.
ii) Tíma-hæði.
Kerfi eru tímaóháð ef að hægt er að hliðra innmerki og fá sömu hliðrun í útmerkinu, þ.e.a.s. ef við skilgreinum merki $y[n] = x[n]$ þá þarf $y[n - n_0] = x[n - n_0]$ líka að vera satt.
Ef við hliðrum innmerkið um n_0 fáum við $x[2(n - n_0)] = x[2n - 2n_0]$ sem er ekki það sama og ef við hliðrum útmerkið$\rightarrow$ $y[n - n_0] = x[2n - n_0]$ sem þýðir að kerfið er tímaháð.
iii) Orsakatengsl.
Hér sjáum við að kerfið er óorsakatengt þar sem að innmerkið er tvöfallt gildi á innmerkinu, þ.e.a.s. útmerkið er háð innmerkinu í framtíðinni. ef við tökum sem dæmi kerfið á tímanum $n = 3$ þá er $y[3] = x[6]$ sem þýðir að útmerkið á $n = 3$ er háð innmerkinu á $n = 6$.

iv) Stöðugleiki.

Ef við setjum $x[2n] = u[2n]$ sem er auðvitað stöðugt innmerki þá fáum við $y[n] = u[2n]$ sem er stöðugt, sem gerir það að verkum að kerfið er stöðuggt (BIBO). Eina leiðin hér til þess að fá óstöðugt útmerki er með því að setja inn óstöðugt innmerki sem er ekki það sem við erum að skoða núna.

v) Andhverfanleiki.

Hér sjáum við að útmerkið tekur einungis inn merki fyrir annaðhvort n og skilar hinum helming af merkinu ekki og því er kerfið óandhverfanlegt. Setjum $x[2n] = u[2n]$ og teiknum innmerkið sem útmerkið sér upp í python hér fyrir neðan.



2 Dæmi 2

Hér eigum við að nota kerfið $y[n] = ay[n-1] + x[n]$ sem er sjálfsaðhvarf.
Hægt er að líta á þetta kerfi sem bankakerfi sem að reiknir innistæðu í banka.

$\mathbf{n}$ er tíminn (td klukkustund, dagur, mánuður eða ár) $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ er inneign á tíma.
$\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ er innlögn eða úttekt
$\mathbf{a}$ er vaxtaprósenta

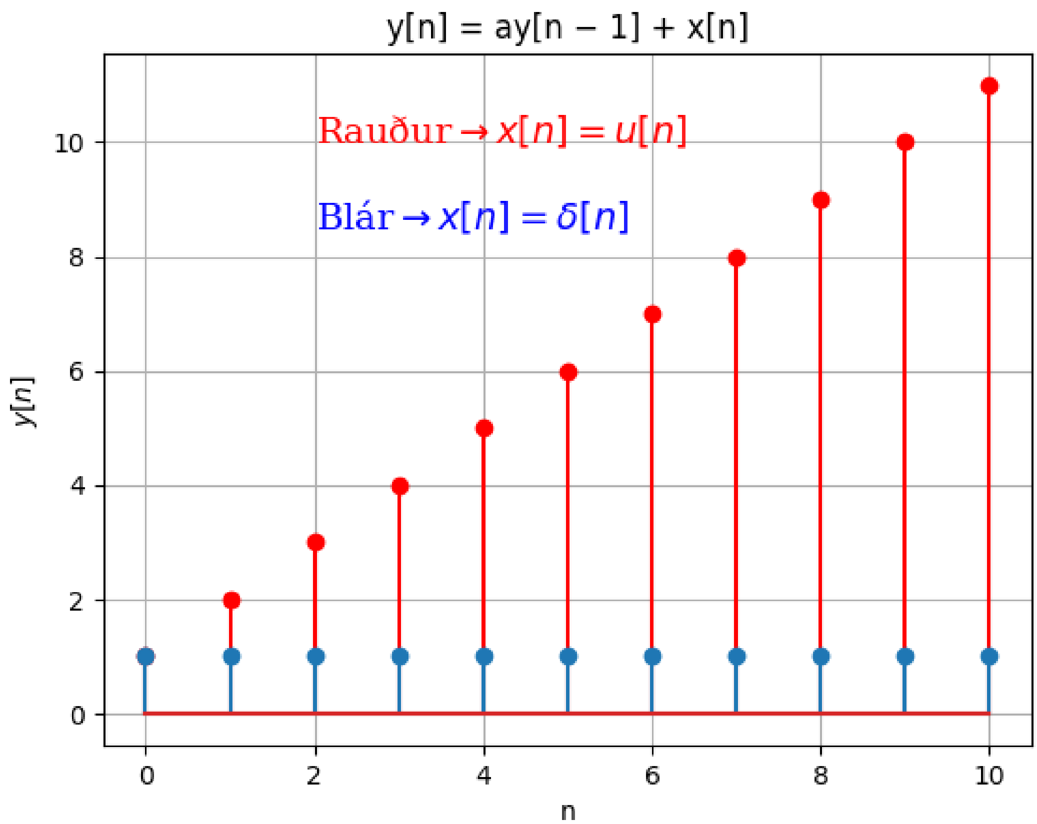
2.1 A-Liður

Hér eigum við að forrita fall sem að beitir formúlunni hér að ofan.

```
#Reiknifall
def diffeqn(a, x, yn1):
    N = len(x)
    y = [0] * N
    for n in range(N):
        if n == 0:
            y[n] = a * yn1 + x[n]
        else:
            y[n] = a * y[n - 1] + x[n]
    return y
```

2.2 B-Liður

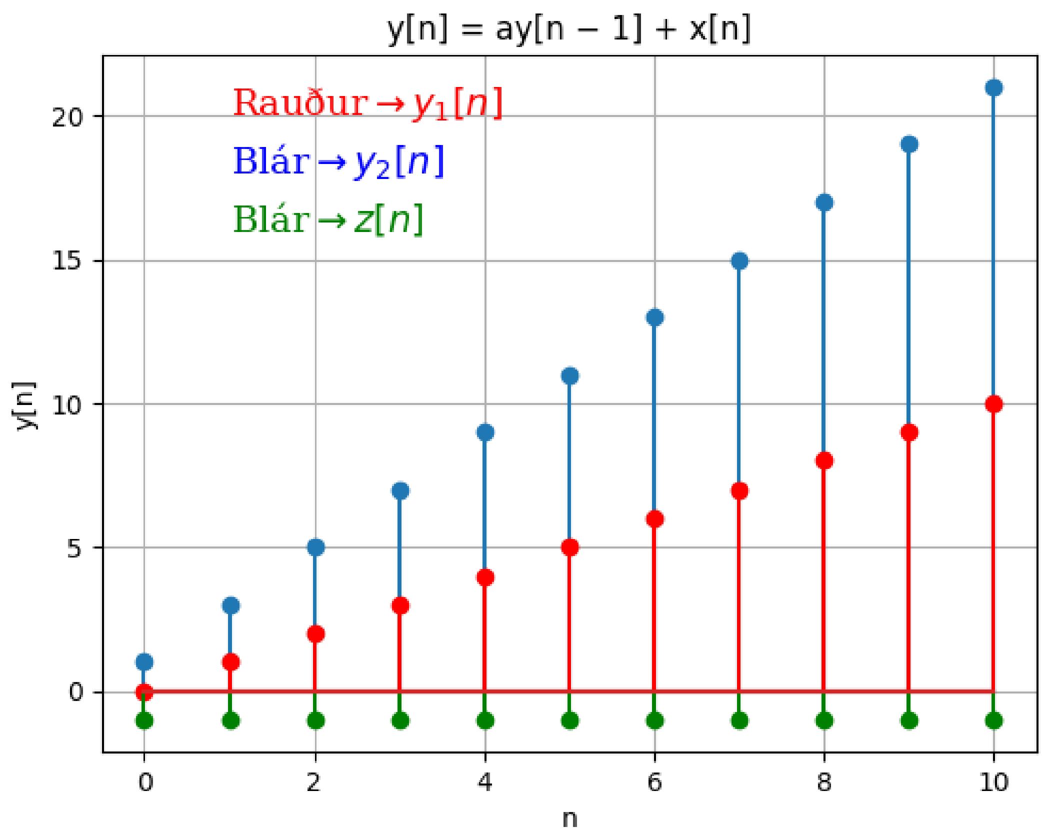
Hér eigum við að nota fallið að ofan til þess að meta hvernig $y[n]$ breytist yfir tíma. Hér er $a = 1$, $y[n-1] = 0$, $x_1[n] = \delta[n]$ og $x_2[n] = u[n]$.



[Mynd 2.1]

2.3 C-Liður

Hér gerum við ráð fyrir að $a = 1$, $y[n-1] = -1$, $x_1[n] = u[n]$ og $x_2[n] = 2u[n]$. Svo reiknum við út $z[n] = 2y_1[n] - y_2[n]$

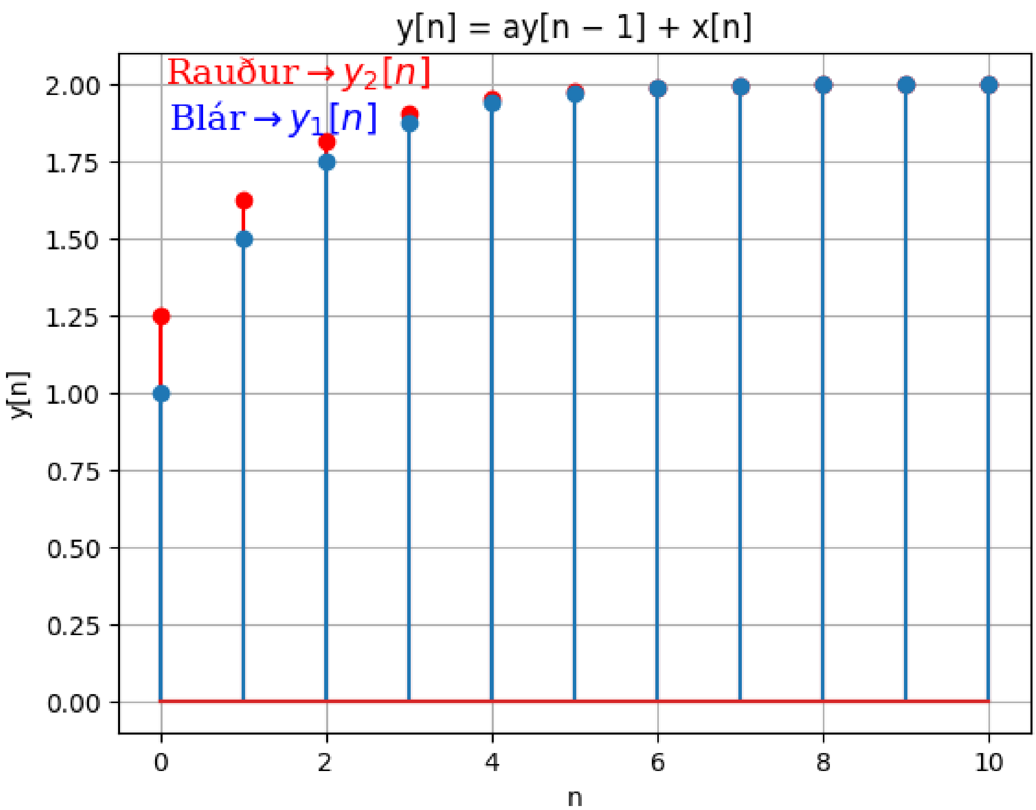


[Mynd 2.2]

Ástæðan afhverju $z[n] \neq 0$ er vegna þess að $y_2[n]$ stækkar tvöfallt hraðar og vegna þess að í $n = 0$ byrjar $y_2[n]$ með gildi 1 en $y_1[n]$ byrjar í núlli.

2.4 D-Liður

Hér gerum við ráð fyrir að $a = \frac{1}{2}$, $x[n] = u[n]$. Skoðum svo fallið fyrir tvö mismunandi gildi á $y[n-1]$.
Fyrst $y[n-1] = 0$ sem við setjum í kerfið $y_1[n]$ og og svo $y[n-1] = \frac{1}{2}$ sem við setjum þá í kerfið $y_2[n]$. Hér fyrir neðan á Mynd 2.4 sjáum við gildin sem að kerfin fá.



[Mynd 2.3]

Eins og sést þá er $y_2[n]$ tvöfallt stærri í byrjun heldur en $y_1[n]$ en með tíma verða merkin nær og nær því að vera eins.
Ef við skoðum formúluna fyrir kerfið ($y[n] = ay[n1] + x[n]$) sjáum við að þetta gerist af því að fyrir $y_2[n]$ í n=0 fáum við $y_1[n] = 0.5 \cdot 0.5 + 1 = 1.25$ en fyrir $y_1[n]$ í n=0 fáum við $y_1[n] = 0.5 \cdot 0 + 1 = 1$ sem heldur svo áfram að hækka og fyrir hvert n helmingast bilið á milli $y_1[n]$ og $y_2[n]$. Á töflunni (Tafla 2.1) í næstu síðu sjáum við nákvæm gildi sem hvert kerfi fær ef við höldum áfram að reikna.

Tafla 2.1: Samanburður á $y_1[n]$ og $y_2[n]$

n	$y_1[n]$	$y_2[n]$	Millibil	Hlutfall
0	1	1.5	0.5	≈0.666
1	1.5	1.75	0.25	≈0.857
2	1.75	1.875	0.125	≈0.933
3	1.875	1.925	0.0625	≈0.974
4	1.925	1.9625	0.03125	≈0.981
5	1.9625	1.98125	0.015625	≈0.991

Eins og sést á töflunni þá er $y_2[n]$ alltaf einu skrefi á undan með hvaða gildi það tekur en bæði kerfin eru stabíl og stefna á 2. Þetta gerist af því að þú ert að margfalda síðasta gildi með 0.5 og bæta einum við. Ef við ímyndum okkur fræðilega séð að útmerkið sé komið í $y[n] = 2$ hvað verður þá næsta útmerki? Reiknum það út.
Notum formúluna $y[n] = ay[n1] + x[n]$ og setjum inn gildin.
$y[n] = 0.5 \cdot 2 + 1 = 2$. Þessi niðurstaða staðfestir það að kerfið mun aldrei gefa frá sér merki sem er stærra en tveir nema það sé íbætt í $y[n-1]$, en þá mundi merkið samt alltaf detta niður í 2.