РЕАЛИЗАЦИЯ

Основной проблемой при реализации это мини-проекта может являться выбор закона распределения в соответствии с условием задачи. Чтобы избежать ошибок следует чётко уяснить различие между распределениями.

При решении задач нужно обратить внимание на использование специальных функций Excel, которых в этой работе предлагается довольно много. Возможно их протестировать на решенных примерах из раздаточного материала. Следует помнить, что, решение задачи двумя способами добавит уверенности при защите мини-проекта.

ОБСУЖДЕНИЕ (КОРРЕКТИРОВКА, ЗАВЕРШЕНИЕ, ОЦЕНКА)

Следует обратить внимание на практическую значимость полученных результатов и их полезность для повседневной жизнедеятельности. В обсуждении результатов мини-проекта могут участвовать и студенты других групп уже завершивших выполнение своего задания. Лабораторная работа зачтена, если верно решено 6 задач проектного задания.

ПОРТФОЛИО ПРОЕКТА (внеаудиторная работа)

Определите: возможно ли в вашем проекте применить известные теоретические законы распределения. Способствует ли это использование продвижению проекта? Продолжайте выполнять проектные работы в соответствии с планом и размещать полученные результаты в электронном портфолио.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

Задания для студентов

Ответы записываются десятичной дробью с четырьмя знаками после запятой.

1. Подсчитать математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной одним из следующих вариационных рядов (три ряда в каждом варианте):

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ вариационного ряда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	8	6	4	2
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	12	14	15	16	18
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	25	23	21	27	29

1.	10	13	17	20	25	**2.**	8	14	17	20	23	**3.**	20	24	29	34	37
	0,4	0,3	0,1	0,15	0,05		0,2	0,1	0,2	0,4	0,1		0,2	0,3	0,25	0,15	0,1
4.	14	15	17	25	26	**5.**	16	20	25	30	35	**6.**	0	1,5	1,9	2,5	2,9
	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05		0,2	0,15	0,15	0,3	0,2		0,1	0,25	0,35	0,25	0,05
7.	100	114	128	144	160	**8.**	45	53	67	80	95	**9.**	25	45	60	75	98
	0,2	0,35	0,2	0,15	0,1		0,25	0,3	0,25	0,19	0,01		0,15	0,25	0,3	0,2	0,1
10.	60	75	80	105	110				**11.**	1	2	3		7	9	10	12
	0,05	0,25	0,45	0,15	0,1					0,04	0,26	0,31		0,09	0,18	0,11	0,01
12.	6	8	14	17	19	20		23	**13.**	20	24	28		30	34	37	40
	0,1	0,11	0,14	0,17	0,18	0,22		0,08		0,1	0,23	0,25		0,18	0,13	0,08	0,03
14.	10	13	15	17	25	27		29	**15.**	8	16	18		20	25	30	35
	0,1	0,12	0,23	0,3	0,17	0,05		0,03		0,01	0,17	0,19		0,26	0,15	0,12	0,1
16.	0,5	1,5	1.9	2,3	2,5	2,9		3,2	**17.**	100	114	125		128	144	157	160
	0,1	0,25	0,27	0,13	0,15	0,07		0,03		0,1	0,25	0,23		0,17	0,15	0,08	0,02
18.	45	53	61	67	78	80		95	**19.**	25	37	45		60	68	75	98
	0,12	0,17	0,22	0,25	0,16	0,07		0,01		0,015	0,085	0,125		0,17	0,3	0,2	0,1
20.	60	75	77	80	105	108		110	**21.**	10	13	16		17	20	25	26
	0,005	0,13	0,225	0,375	0,125	0,09		0,05		0,1	0,3	0,3		0,1	0,13	0,05	0,02
22.	8	11	14	16	17	20		23	**23.**	20	24	29		33	34	36	37
	0,02	0,06	0,1	0,22	0,2	0,3		0,1		0,1	0,17	0,25		0,16	0,12	0,1	0,1
24.	14	15	17	21	25	26		31	**25.**	16	19	20		23	25	30	35
	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,04		0,01		0,08	0,12	0,15		0,3	0,15	0,11	0,09
26.	0	1,5	1,9	2,3	2,5	2,9		3,2	**27.**	100	107	114		128	144	160	
	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,03		0,02		0,1	0,12	0,37		0,22	0,05	0,14	
28.	45	53	67	78	80	95		**29.**	25	45	60	75		87	98		
	0,15	0,3	0,25	0,2	0,09	0,01			0,12	0,27	0,29	0,21		0,1	0,01		
30.	160	170	175	180	105	110											
	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1											

2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

3. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,3. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка:

а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

4. Показания электронных часов изменяются на единицу в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что на данный момент время на часах отличается от истинного не более чем на 20 секунд.

5. Паром для перевозки машин через реку подходит к причалу через каждые 40 мин. Найти вероятность, что подъехавшая случайным образом автомашина будет ожидать прибытия парома не более 10 мин. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее

квадратичное отклонение времени ожидания.

6. Для случайной величины X, равномерно распределённой на промежутке (–1;5), найти математическое ожидание и $P(0 < X < 3)$.

7. Кабинки фуникулёра подъезжают к подножию горы через каждые полчаса. Найти вероятность, что подошедшим лыжникам ждать придётся менее 5 мин. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени ожидания.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале (3; 9).

9. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале (35; 98).

10. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, равномерно распределённой в интервале (123; 245).

11. Станок-автомат выдает обработанную деталь через каждые 7 мин. Найти вероятность, что подошедший контролёр будет ожидать готовую деталь менее 30 секунд. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени ожидания.

12. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределённой случайной величины X равны числам a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале $(a + c;\ a + 2c)$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	32	20	12	42	25	52	13	28	65	78	22	26	35	62	15
b	64	5	4	16	3	7	2	4	5	11	64	5	4	16	3
c	2	5	3	1	2	3	2	4	5	3	2	7	4	3	5

13. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределённой случайной величины X равны a и b, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале $(a - 2c;\ a + c)$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	56	30	12	42	25	52	33	48	65	78	22	26	25	62	15

b	4	3	10	16	3	9	2	8	5	11	64	5	4	16	3
c	3	2	3	1	2	5	2	3	5	7	2	6	4	3	5

14. Менеджер торгово-посреднической фирмы получает жалобы от некоторых клиентов на то, что служащие фирмы затрачивают слишком много времени на выполнение их заказов. Собрав и проанализировав соответствующую информацию, он выяснил, что среднее время выполнения заказа составляет 6,6 дней, однако для выполнения 20% заказов потребовалось 15 дней и более. Учитывая, что время выполнения заказа случайная величина, распределённая по нормальному закону, найдите фактическое стандартное отклонение времени обслуживания клиентов.

15. Производится взвешивание целлюлозной массы без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 30$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

16. Производится измерение диаметра бревна без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой по абсолютной величине, не превосходящей 15 мм.

17. Случайные ошибки при измерении площадей помещений подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ см^2 и математическим ожиданием $\mu = 0$. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного из трёх независимых измерений по абсолютной величине не превзойдёт 4 см^2.

18. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от заданной величины по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Пусть случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma =$ 0,3 мм. Найти среднее количество годных шариков среди ста изготовленных.

19. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролёром, – если поток

машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = 5e^{-5t}$.

20. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,04 \cdot e^{-0,04x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (1, 2).

21. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3e^{-3x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (0,13; 0,7).

22. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0,6x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадёт в интервал (3, 5).

23. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение показательного закона, заданного плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 10e^{-10x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

24. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) пять вызовов; б) менее пяти вызовов; в) не менее пяти вызовов.

25. Среднее число клиентов банка в одну минуту равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты придут:

а) три клиента; б) менее трёх клиентов; в) не менее трёх клиентов. Поток клиентов предполагается простейшим.

26. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что в результате перевозки одна бутылка окажется раз-

битой, равна 0,004. Найти вероятности того, что в магазин привезут разбитых бутылок:

а) ровно две; б) меньше двух; в) более двух.

27. Мебельная фабрика отправила на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути до базы равна 0,001. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий:

а) ровно три; б) менее трёх; в) более трёх.

28. На автоматическую телефонную станцию поступают вызовы со средней плотностью 5 вызовов в час. Считая, что число вызовов на любом участке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что за две минуты на станцию поступит:

а) ровно три вызова; б) не менее трёх вызовов; в) хотя бы один вызов.

29. На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка. Найти вероятность того, что за смену (8 часов) число обрывов нити будет не менее 2 и не более 4.

30. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение суток равна 0,002. Найти вероятность того, что за сутки откажут ровно три элемента.

31. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

32. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов с вероятностью отказа для каждого в течение времени t равной 0,0005. Найти вероятность того, что в течение времени t откажут:

а) ровно 2 элемента; б) ни одного элемента; в) менее трёх элементов.

33. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель не попадет:

а) один снаряд; б) два снаряда; в) ни одного снаряда.

34. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Найти вероятность обнаружения 5 семян сорняков при случайном отборе 2500 семян.

35. Завод отправил на базу 3000 изделий. Вероятность повре-

ждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

36. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на четырёх веретенах.

37. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 отобранных деталей окажется:

а) 5 бракованных; б) хотя бы одна бракованная.

38. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

39. Пусть вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365. Найти вероятность того, что из 500 человек у двух человек день рождения придётся на Новый год.

40. По некоторой цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,04. Найти вероятность того, что в цель попадёт:

а) один снаряд; б) два снаряда; в) не попадает ни одного снаряда.

РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2

Случайная величина может принимать некоторое множество значений в зависимости от условий. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина имеет конечное или счётное множество значений. Если множество значений является интервалом числовой оси, то случайная величина называется *непрерывной*.

Для задания случайной величины необходимо знать *закон распределения*, который определяет вероятность появления случайной величины в любом интервале. В свою очередь этот закон может быть задан одним из трёх способов: рядом, функцией или плотностью распределения.

Ряд распределения применяется для задания дискретных случайных величин. Он представляет собой таблицу, в которой записаны возможные (или наблюдаемые) значения случайной величины и соответствующие им вероятности (частоты).

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$, где x – переменная величина, определяет вероятность того, что случайная величина X примет некоторое значение, меньшее, чем x ($X < x$).

Плотность распределения $f(x)$ – производная функции распределения. Вероятность попадания случайной величины X на интервал $[a, b)$ вычисляется как интеграл от плотности:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Различные числовые характеристики случайных величин указывают на тот или иной закон распределения этих величин. Основными характеристиками являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Среднее значение или *математическое ожидание* дискретной случайной величины X, вычисляется по формуле:

$M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i p^*(x_i)$, где x_i – возможные значения случайной величины X; p_i – вероятность (или частота $p^*(x_i)$) появления i-го возможного значения случайной величины X.

Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины X от своего математического ожидания:

$$D(X) = \sigma^2 = M[(X - M(X))^2].$$

Среднее квадратичное отклонение σ равно положительному значению корня квадратного из дисперсии.

Редактор Excel позволяет достаточно просто вычислять характеристики дискретных случайных величин по рядам их распределения.

З а д а ч а 5.1. Дискретная случайная величина X задана рядом

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,0769	0,1538	0,0256	0,1538	0,0769	0,0256	0,1026	0,1795	0,0769	0,1284

распределения.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X.

Р е ш е н и е. Ряд значений дискретной случайной величины X

следует перенести в Excel. На рисунке в столбце А записаны значения случайной величины X, а в столбце В – их вероятности.

Математическое ожидание $M(X)$ для дискретной случайной величины X проще всего вычислять по формуле:

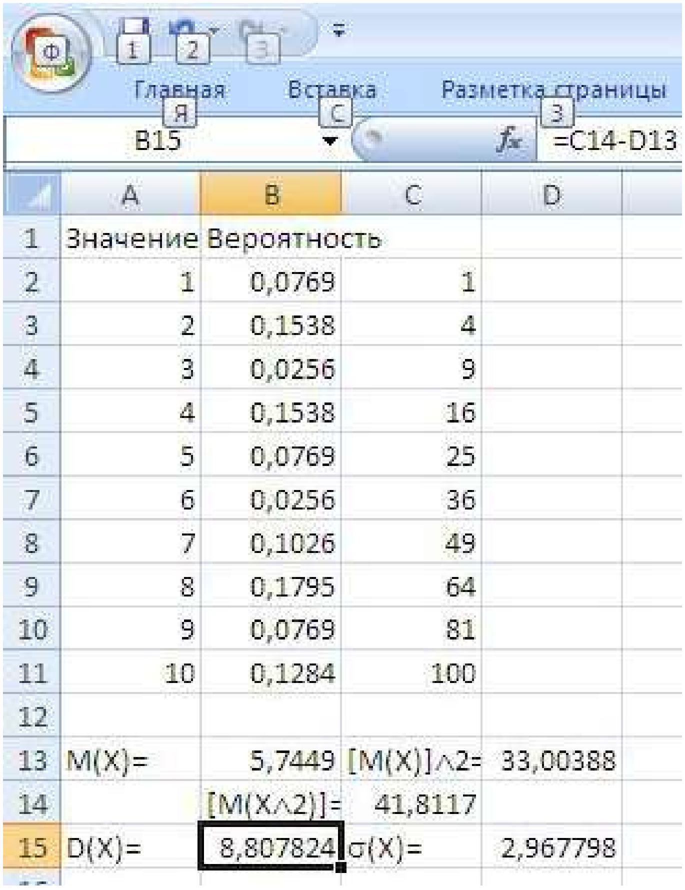
=СУММПРОИЗВ(A2:A11;B2:B11).

Результат содержится в ячейке B13.

Для подсчёта дисперсии случайной величины X можно воспользоваться формулой:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Сначала проще найти вычитаемое: квадрат математического ожидания. Результат записан в ячейке D14. Затем нужно отыскать математическое ожидание величины X^2. Для этого значения величины X возводятся в квадраты, и результаты записываются в столбец С. После этого вычисляется $M(X^2)$.



	A	B	C	D
1	Значение	Вероятность		
2	1	0,0769	1	
3	2	0,1538	4	
4	3	0,0256	9	
5	4	0,1538	16	
6	5	0,0769	25	
7	6	0,0256	36	
8	7	0,1026	49	
9	8	0,1795	64	
10	9	0,0769	81	
11	10	0,1284	100	
12				
13	M(X)=	5,7449	[M(X)]^2=	33,00388
14		[M(X^2)]=	41,8117	
15	D(X)=	8,807824	σ(X)=	2,967798

Результат находится в ячейке C14.

Наконец по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ достаточно вычислить разность между значениями ячеек C13 и B13, что видно на рисунке.

В данном случае дисперсия равна 8,8078, что записано в ячейке B15.

Среднее квадратичное отклонение легко подсчитать как корень квадратный из дисперсии.

Результат находится в ячейке D15. ■

Ниже даны определения пяти теоретических распределений случайной величины X (двух дискретных и трёх непрерывных распределений).

I. *<u>Биномиальное распределение</u>* задаётся формулой Бернулли:

$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ $(m = 0,1, \dots n)$ (1), где $P(X = m)$ – вероятность появлений события A ровно m раз в серии из n испытаний.

Вычисления вероятностей по формуле Бернулли рассматривались на предыдущем занятии.

II. <u>*Распределение Пуассона*</u> (закон редких явлений) – это предельный случай биномиального распределения при $p \to 0$ и $n \to \infty$ так, что $np \to M(X) = a > 0$.

Плотность распределения Пуассона

$$P_n(m) = f(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (2).$$

Плотность распределения Пуассона вычисляется с помощью статистической функции ПУАССОН(m; a; ЛОЖЬ).

Значение функции распределения $P(X < m) = F(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e^{-a} a^k}{k!}$ вычисляется как ПУАССОН(m–1; a; ИСТИНА).

<u>*Интенсивность*</u> – среднее число событий λ, происходящих за единицу времени t. Вероятность появления m событий за время t равна:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}.$$ Отсюда $a = \lambda t$.

III. <u>*Нормальное распределение*</u> – распределение, функция которого имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3).$$

Это непрерывное распределение задаётся математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.

Значение функции нормального распределения для значения x вычисляется по формуле:

НОРМРАСП(x; μ; σ; ИСТИНА) = $F(x)$.

Если нужно найти значение плотности нормального распределения, то последний аргумент следует взять "ЛОЖЬ".

IV. <u>*Показательное распределение*</u> – распределение с плотностью:

$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x > 0$ (4), где λ – параметр распределения.

Значение плотности показательного распределения $\lambda e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции ЭКСПРАСП(x; λ; ЛОЖЬ).

Функция показательного распределения имеет вид:

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (5), где $\lambda > 0$, $0 \le x < \infty$.

Значение функции показательного распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ вычисляется с помощью функции ЭКСПРАСП(x; λ; ИСТИНА).

V. <u>*Равномерное распределение*</u> на отрезке $[a, b]$ – на этом отрезке плотность распределения постоянна, а вне отрезка – равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ï ðè } a < x < b \\ 0 \quad\;\; , \text{ï ðè } x \ge b; x \le a \end{cases} \quad (6).$$

Функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad\;\; , \text{ï ðè } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ï ðè } a < x \le b \\ 1 \quad\;\; , \text{ï ðè } x \ge b \end{cases} \quad (7).$$

Вероятность попадания равномерно распределённой случайной величины X на отрезок $[\alpha, \beta]$ выражается формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

В таблице 5.1 приводятся числовые характеристики рассмотренных теоретических распределений.

Таблица 5.1.

Дискретные распределения

Распределение	Область значений	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	0, 1, 2,.... n	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	$np(1-p)$
Пуассона	0, 1, 2, ...	$P_n(m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}$	a	a

Непрерывные распределения

Распределение	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	(a, b)	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{b-a}{12}$
Нормальное	$(-\infty,\infty)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Показательное	$(0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

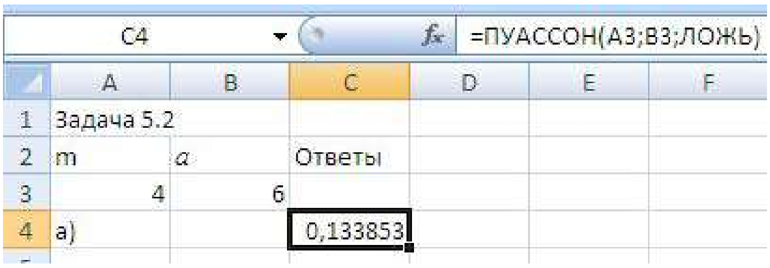
Ниже рассматриваются задачи на вычисление различных параметров этих теоретических распределений.

З а д а ч а 5.2. Среднее число заказов билетов, поступающих кассиру в одну минуту, равно трём. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) четыре заказа; б) менее четырёх заказов; в) не менее четырёх заказов.

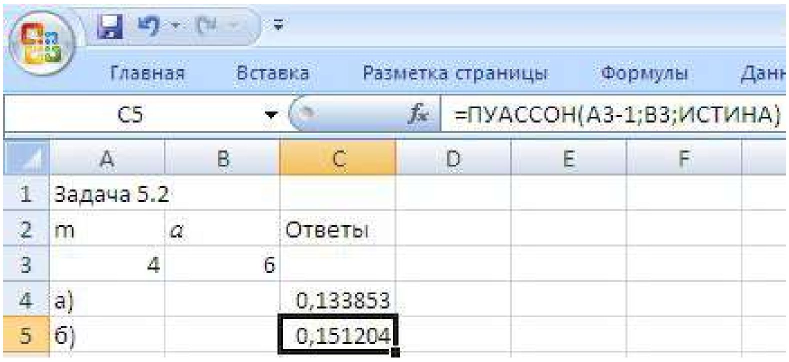
Р е ш е н и е. Поступление заказа можно считать «редким» явлением, подчиняющимся распределению Пуассона. Тогда из условия легко найти $\lambda = 3$, $t = 2$, $m = 4$ и $a = \lambda t = 6$.

а) Искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит четыре заказа по формуле (2) равна:



$$P_2(4) = \frac{6^4\cdot e^{-6}}{4!} \approx 0{,}1339.$$

В Excel нужно подсчитать плотность вероятности ПУАССОН(4; 6; ЛОЖЬ).



б) Событие "поступило менее четырёх заказов" можно разложить на случаи поступления заказов: 3, 2, 1 и 0 заказа. Они несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$P_2(k < 4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) =$

$$\frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6 \cdot e^{-6}}{1!}+$$

$$+\, e^{-6} = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = e^{-6}\cdot 61 \approx 0{,}1512.$$

В Excel проще найти значение функции ПУАССОН(3; 6; ИСТИНА).

в) События "поступило менее четырёх заказов" и "поступило не менее четырёх заказов" противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее четырёх заказов, равна:

$P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k < 4) \approx 1 - 0{,}1512 = 0{,}8488.$ ■

Задача 5.3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $\mu = 32$ и дисперсией $\sigma^2 = 16$. Найти:

а) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (28, 38).

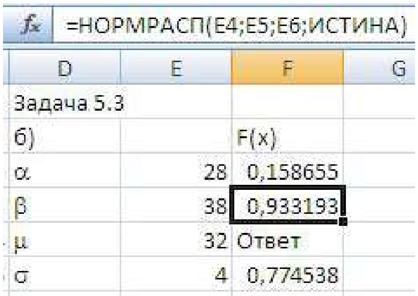
Решение. По условию $\mu = 32$, $\sigma^2 = 16$, отсюда $\sigma = 4$. Поэтому:

а) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-32)^2}{32}}$ (по таблице 5.1);

б) Подставив $\alpha = 28$, $\beta = 38$, $\mu = 32$, $\sigma = 4$ в формулу:

$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\dfrac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, легко получить:

$$P(28 < X < 38) = \Phi\left(\frac{38-32}{4}\right) - \Phi\left(\frac{28-32}{4}\right) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1).$$



D	E	F	G
Задача 5.3			
б)		F(x)	
α	28	0,158655	
β	38	0,933193	
μ	32	Ответ	
σ	4	0,774538	

По таблице значений функции $\Phi(x)$ из приложения 2 можно найти значения:

$\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$, $\Phi(1) = 0{,}3413$.

Таким образом, искомая вероятность равна:

$P(28 < X < 38) = 0{,}4332 + 0{,}3413 = 0{,}7745.$

В Excel можно использовать функцию НОРМРАСП, как это видно из рисунка. Сначала подсчитывается $F(\alpha)$ в ячейке F3, затем $F(\beta)$ – в F4 и, наконец, их разность – в F6. ■

Задача 5.4. Пусть X – случайная величина, подчинённая нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 1{,}6$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что при четырёх испытаниях эта случайная величина хотя бы один раз попадёт в интервал (1, 2).

Решение. Сначала нужно найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1, 2) при одном испытании:

$$P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}6) =$$

$$= 0{,}1554 + 0{,}2258 = 0{,}3812.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина X <u>не попадёт</u> в интервал (1, 2) при одном испытании равна:

$1 - 0{,}3812 = 0{,}6188.$

Следовательно, для четырёх испытаний вероятность непопадания получится $0{,}6188^4 \approx 0{,}1466$.

Значит, искомая вероятность $P = 1 - 0{,}1466 = 0{,}8534$. ■

Задача 5.5. Время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения. Среднее время безотказной работы прибора равно 100 ч. Найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) функцию распределения;

в) вероятность того, что время безотказной работы прибора превысит 120 ч.

Решение. Из условия задачи по математическому ожиданию случайной величины X легко найти параметр λ:

$M(X) = 1/\lambda = 100$, откуда $\lambda = 1/100 = 0{,}01$. Следовательно,

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}01e^{-0{,}01x}, & x \ge 0 \end{cases}$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}01x}, & x \ge 0 \end{cases}$;

в) нужную вероятность можно вычислить, используя функцию распределения $F(x)$ =ЭКСПРАСП(x; λ; ИСТИНА):

$P(X > 120)$ = 1 – ЭКСПРАСП(120; 0,01; ИСТИНА) ≈ 0,3012. ■

Задача 5.6. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ (t – время в часах). Найти вероятность безотказной работы элемента в течение 100 часов.

Р е ш е н и е. Из формулы плотности (4) видно, что интенсивность отказов λ = 0,02. Тогда можно вычислить вероятность безотказной работы (*надёжности R*) элемента в течение 100 часов:

$R(100) = 1 - F(100) = e^{-0{,}02\cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}1353.$

Значение надёжности $R(100) = e^{-0{,}02\cdot 100}$ можно найти следующим способом:

R(100) = 1 – ЭКСПРАСП(100; 0,02; ИСТИНА). ■

З а д а ч а 5.7. Поезда метро идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Найти вероятность того, что ждать пассажиру придётся не больше полуминуты. Определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Р е ш е н и е. Случайная величина X – время ожидания поезда – на временном отрезке [0, 2] имеет равномерный закон распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 2 \\ 1/2, x \in [0,2] \end{cases}.$$

Тогда вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты:

$$P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

По таблице 5.1 легко найти:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ (мин.)}, \; D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/3} \approx 0{,}5774 \text{ (мин)}. \blacksquare$$