# 有限差分

归根结底就是网格宽度不是常数时的差分格式。

考虑方程：

在点附近对做泰勒展开得：

设，则有：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1-1) |
|  | (1-2) |

(1-1)、(1-2)两式加权相加消去一阶导数项得二阶导数项的差分格式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1-3) |

(1-1)、(1-2)两式加权相减消去二阶导数项得一阶导数项的**中心差分**格式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1-4) |

直接将(1-1)式变形得一阶导数项的**向后差分**格式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1-5) |

直接将(1-2)式变形得一阶导数项的**向前差分**格式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1-6) |

在时，(1-3)是一阶精度的，否则是二阶精度的。

# 有限元

取一维网格。在此网格上取分段线性函数：

设方程的解具有以下形式

则可以将原方程写为弱形式

🡪

Find s.t.、

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2-4) |

🡪

其中

# 谱方法(勒让德多项式)

## Legendre多项式 & Lobatto多项式

Legendre多项式：

性质：

1. 递推公式：
2. 正交性：
3. 归一化：
4. 完备性：
5. 微分关系：

Lobatto多项式：

1. ，这是由Legendre多项式的正交性得到的；
2. 由Legendre多项式的微分关系得：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-3) |

1. 导数的正交归一关系：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-4) |

1. 重叠积分：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-5) |
|  | (3-6) |

## 画网格、展开

取一维网格。在此网格上取分段线性函数：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-7) |

此外，在每一段网格上，我们有一组Lobatto多项式：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-8) |

这里的是截断阶数。显然有。

我们可以将待求函数在上述个基函数上展开（注意：它们并不是互相正交的）：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-9) |

我们可以将(2-4)式改写为：

Find s.t.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-10a) |
|  | (3-10b) |

代入(3-9)式得：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3-11a) |
|  | (3-11b) |

(3-11)两式共条方程可以写成 的形式，其中：

上述矩阵中的零是因为两段不同网格上的Lobatto多项式在空间上没有任何重合。

求解出系数后代入(3-9)式即可得到解。

## 系数矩阵的性质

由于所有基函数在边界上都是零，所以，所以有：

也就是说矩阵时对称的，矩阵是反对称的。此外，矩阵是正定的，因为它们都可以写成以下形式：

对于，

对于，

矩阵正定的要求是，对于任意非零向量均有。然而在这里：

这里选取的基是线性独立的，所以对于，，一定是正定的。如果基函数的一阶导数也是线性独立的，那么也是正定的，否则是半正定的。

## 计算系数矩阵

的计算见第二节末尾：

由(3-4)~(3-6)式以及(3-8)式给出：

的计算结果如下：

其中：。