Лицей БНТУ
220012, г.Минск, ул. Кедышко, 4, 8(017)280-03-05, email: *liceum@bntu.by*

«МОНСТРЫ СРЕДИ ГРАФОВ»

Секция: "Математика"

Автор:
Наркевич Григорий Эдуардович,
лицей БНТУ, 11”А” класс,
ул. Жудро, д.21, кв.25,
+375-29-614-38-93

Научный руководитель:
Очеретняя Ольга Павловна, лицей БНТУ,
учитель математики,
тел. моб. +375-29-620-82-58

Минск, 2022

Содержание

Аннотация:

В классической теории графов степень вершины определяется как число инцидентных ей ребер, а рассмотрение проблем изоморфизма графов заключается в выяснении, является ли пара обособленных графов. В данном исследовании приводится обобщенное определение Н-степени вершины, рассматривается класс локально искаженных графов, а также изучаются свойства таких графов и графов с заданными Н-структурами. Целью исследования является доказательства ряда тождеств и соотношений, справедливых для данных графов особого вида, а также создание алгоритмов построения бесконечных серий таких графов. Результаты, полученные в данной работе, имеют свои приложения в областях химии, биологии, интеллектуального анализа данных, моделирования социальных сетей, автоматизированного проектирования электронных схем, а также сфере искусственного интеллекта.

Введение.

Цель работы:

Исследование графов с различными H-структурами, а именно H-степеней вершин графов и взаимосвязей между ними, H-стабильных графов, графов с попарно различными H-степенями, а также локально искаженных графов; определение некоторых особых H-степеней вершин графа в зависимости от его параметров; изучение бесконечных серий локально искаженных графов и графов с заданными H-структурами.

Задачи работы:

I. Доказать ряд тождеств об H-степенях вершин графа.

II. Привести рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серий локально искаженных, P_3-стабильных, K_3-стабильных графов, а также P_3-монстров; примеры таких серий.

III. Доказать тривиальность группы автоморфизмов локально искаженного графа и графа-монстра. Привести примеры графов, опровергающих обратные утверждения.

IV. Найти ограничение на порядок K_2-стабильного степени d локально искажённого графа.

V. Определить P_3-степени, K_n-степени, $K_{1,n-1}$-степени вершин произвольного графа, P_n-степени вершин графа-дерева. Охарактеризовать P_3-стабильные и K_3-стабильные графы степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин.

VI. Исследовать проблему существования K_2-монстров, локальную искаженность K_3-монстров, привести пример супермонстра, не являющегося K_3-монстром.

VII. Рассмотреть бесконечные графы, являющиеся K_n-монстрами, $K_{1,n-1}$-монстрами, C_n-монстрами, а также счетные свойства этих графов и число вершин порядка k бесконечного $K_{1,n-1}$-монстра относительно вершины u_0.

VIII. Исследовать различные оценки на суммы H-степеней вершин графа.

Актуальность работы:

Математическими моделями многих задач являются графы. Важной проблемой современной теории графов является задача об определении, являются ли два заданных графа изоморфными. Тесно связанной, однако по сути более сложной и содержательной является задача поиска изоморфного подграфа, которая заключается в выяснении, является ли некоторой граф G_1 изоморфным самому некоторому графу G_2 или его подграфу. Данные проблемы возникают в таких областях, как химия, поиск информации, лингвистика, логистика, теория коммутации и теория сетей. В данной работе мы исследовали свойства графов, обладающих заданными H-степенями и структурами, а также графы, окружения каждой из вершин которых порождают попарно неизоморфные подграфы, что может найти применение в данных областях. Предложим несколько приложений данного исследования:

Корнейл и Готлиб [8] показывают применения отмеченных задач в области химической информатики. Как известно, расположение и порядок связи атомов в некотором химическом соединении можно графически описывать с помощью структурных формул, которые представляют собой неориентированные графы. Проблемы изоморфизма используются для поиска сходства между химическими соединениями по их структурной формуле. С этой целью граф, отвечающий некоторому структурному соединению, сопоставляется с графами, содержащимися в библиотеке графов химических веществ. Изоморфизм данного графа подграфу некоторого известного графа-соединения указывает на то, что исследуемое соединение является подсоединением определенного библиотечного вещества. В свою очередь, нахождение изоморфного данному графа означает, что исследуемое соединение уже находится в библиотеке.

Не менее важной задачей теории графов является сходная проблема подсчета количества подграфов графа G, изоморфных некоторому графу H. Как пишут Курамочи и Карыпис [9], методы интеллектуального анализа данных все чаще применяются в нетрадиционных областях, таких как научные, пространственные и реляционные наборы данных, требующие использования альтернативных алгоритмов обнаружения наборов элементов. Таким алгоритмом является использование неориентированных графов для моделирования каждой из структурных единиц объекта и взаимосвязи между ними. Используя такое графическое представление, проблема поиска частых шаблонов в базах данных становится проблемой обнаружения подграфов, которые встречаются достаточно часто по некоторому набору графов.

Достижения в области алгоритмики и моделирования процессов сетевого анализа белок–белковых взаимодействий (ББВ) могут способствовать пониманию биологических процессов. Как пишут Пржуль, Корнейл и Юрисика [10], локальную структуру сетей можно измерить по частотному распределению графлетов – небольших связанных неизоморфных порожденных подграфов. Эта мера локальной структуры была использована, чтобы показать, что сети ББВ с высокой степенью достоверности имеют локальную структуру геометрических случайных графов.

Среди перспективных областей применения проблемы изоморфизма подграфов выступают также математическое моделирование социальных сетей [11], автоматизированное проектирование электронных схем [12], а также сфера искусственного интеллекта в контексте интеллектуального анализа графов [13].

Основные методы исследования:

В исследовании использованы основные методы комбинаторики и теории графов, элементы теории множеств.

Обзор литературы:

Швейцарский, прусский и российский математик Леонард Эйлер в статье о решении знаменитой задачи о кёнигсбергских мостах на латинском языке, изданной Петербургской академией наук и датированной 1736 годом, первым применил идеи теории графов при доказательстве некоторых утверждений. Именно он в своей работе доказал Лемму о рукопожатиях, в соответствии с которой сумма степеней вершин графа равняется удвоенному числу ребер. Также Эйлер сформулировал знаменитое следствие из этой классической Леммы о том, что число вершин графа нечетной степени четно. Данные результаты стали фундаментальными для дальнейшего развития теории графов, в частности соотношений между множествами вершин и ребер графа.

Значительную часть в современной теории графов также играют проблема изоморфизма графов и более общая проблема изоморфизма подграфов, которая заключается в определении, содержит ли некоторый граф G подграф, изоморфный другому графу H, а также выяснении количества таких подграфов, если они имеются.

Однако, исторически степень вершины определялась как число инцидентных ей ребер, а проблемы изоморфизма часто рассматривались для обособленных графов. В проекте списка заданий, предлагаемых на XXIII Белорусский Республиканский турнир юных математиков, были сформулированы определения H-степени вершины графа и локальной искаженности графа. Данные обобщенные определения были использованны в данной работе для получения некоторых обобщений классических результатов теории графов и проведения дальнейшего исследования.

Постановка исследования:

Определим H-степень вершины u в графе G как число подграфов графа G, изоморфных графу H и содержащих вершину u. Обозначим H-степень вершины u в графе G через $Hdeg_G u$. Множество всех подграфов графа G, изоморфных графу H, обозначается через H_G.

Для графа H граф G назовём H-стабильным, если H-степени всех его вершин равны. Степенью H-стабильного графа назовём H-степень его вершин. Граф G назовём H-монстром, если H-степени всех его вершин попарно различны. Граф называется просто монстром, если он является H-монстром для некоторого графа H. Граф назовём локально искажённым, если среди подграфов, порождаемых окружениями его вершин, нет изоморфных. Граф называется супермонстром, если он одновременно является монстром и локально искажённым. При исследовании будем рассматривать нетривиальные монстры порядка $n \geq 2$.

В ходе исследования будут изучены следующие вопросы:

1. Доказательства тождеств (1), (2), (3) для графов G, F и H и формулировка следствий из них, Характеристика графов G, для которых неравенства (3) выполняются как равенства.

$$\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u = |H| \cdot |H_G| \tag{1}$$

$$\sum_{F \in F_G} \sum_{u \in V(F)} Hdeg_G u = \sum_{v \in V(G)} (Fdeg_G v \cdot Hdeg_G v) \tag{2}$$

$$\frac{1}{|G|}(|H| \cdot |H_G|)^2 \leq \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \leq |H| \cdot |H_G|^2 \tag{3}$$

2. Создание рекурсивных алгоритмов построения бесконечных серий локально искаженных, P_3-стабильных, K_3-стабильных графов, а также P_3-монстров. Примеры таких бесконечных серий.

3. Тривиальность группы автоморфизмов локально искаженного графа и графа-монстра. Примеры не локально искаженных графов с тривиальной группой автоморфизмов и графов с тривиальной группой автоморфизмов, не являющихся монстрами.

4. Ограничение на порядок K_2-стабильного степени d локально искажённого графа.

5. Определение P_3-степеней, K_n-степеней, $K_{1,n-1}$-степеней вершин произвольного графа, а также P_n-степеней вершин графа-дерева. Характеристика P_3-стабильных и K_3-стабильных графов степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин.

6. Опровержение существования K_2-монстров. Локальная искаженность K_3-монстров. Пример супермонстра, не являющегося K_3-монстром.

7. Примеры бесконечных графов, являющихся K_n-монстрами, $K_{1,n-1}$-монстрами, C_n-монстрами.

8. Счетные свойства рассматриваемых бесконечных графов, число вершин порядка k бесконечного $K_{1,n-1}$-монстра относительно вершины u_0.

9. Дополнительные оценки на суммы H-степеней вершин графа.

Основные определения и обозначения, используемые в исследовании:

$$\binom{n}{k} \text{ или } {}_nC_k \text{ – число сочетаний из } n \text{ по } k.$$

$${}_{odd}V_H(G) := \{u \in V(G) \mid Hdeg_G u \not\vdots\, 2\}$$

$H(N_G u)$ – подграф, порожденный окружением вершины u в графе G.

$H(V')$ – подграф, порожденный подмножеством вершин $V'(G) \subseteq V(G)$ в графе G.

$$G_1 + G_2 := G : \begin{cases} V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \\ E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u,v)\} \; \forall u \in V(G_1), \forall v \in V(G_2) \end{cases} \quad [3]$$

$$\forall G_1 : \exists! a \in V(G_1) \; deg_{G_1} a = |G_1| - 1 \; G_1 * K_2 := G : \begin{cases} V(K_2) = \{b, c\} \\ V(G) = V(G_1) \cup V(K_2) \\ E(G) = E(G_1) \cup \{(a,b),(b,c)\} \end{cases}$$

$$G_1 - v := G : \begin{cases} V(G) = V(G_1) \setminus \{v\} \\ E(G) = E(G_1) \setminus \{(v,w) \mid (v,w) \in E(G_1) \; \forall w \in N_G v\} \end{cases} \quad [3]$$

$G_1 \times G_2$ – прямое (декартово) произведение графов [3].

$N_d(G)$ - число попарно неизоморфных графов на d вершинах.

${}_1P_3 deg_G u$ – число P_3-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_3} u = 1$.

${}_2P_3 deg_G u$ – число P_3-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_3} u = 2$.

$H_G(u)$ – множество всех подграфов графа G, изоморфных H и содержащих вершину u.

Расстоянием $d(u,v)$ между двумя вершинами u и v графа G назовем число ребер в кратчайшей простой цепи, соединяющей их [3].

Порядком i вершины α в графе G относительно вершины u будем называть число ребер в кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины α и u.

Если вершина u имеет порядок i, будем записывать $\mathcal{P}(u) = i$.

Порядком j ребра графа назовем наибольший из порядков вершин, инцидентных данному ребру.

Если ребро e имеет порядок j, будем записывать $\mathcal{P}(e) = j$.

При исследовании порядок вершины в графе будем указывать нижним индексом.

$$e_j(u) \implies j = max(d(u,v), d(u,w)), w, v \in V(e)$$

${}_1K_{1,t-1} deg_G u$ – $K_{1,t-1}$-степень вершины u в графе G при условии $deg_{K_{1,t-1}} u = 1$.

${}_2K_{1,t-1} deg_G u$ – $K_{1,t-1}$-степень вершины u в графе G при условии $deg_{K_{1,t-1}} u = t - 1$.

Граф будем называть ***счетным***, если $|V(G) \cup E(G)| = \aleph_0$ [5].

Граф будем называть ***локально счетным***, если каждая его вершина инцидентна конечному или счетному числу ребер [5].

$$\Delta_H(G) := max(Hdeg_G u)$$

$$\delta_H(G) := min(Hdeg_G u)$$

$$\overline{H}_{harmon} := \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{|G|} \frac{1}{Hdeg_G u_i}}$$

Далее в исследовании, если иное не прописано, графом будем называть упорядоченную пару множеств V и E таких, что V - некоторое непустое конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из E.

Основная часть:

1. Тождество о сумме H-степеней вершин графа G для графов G и H.

Теорема 1. *Пусть G и H – графы. Тогда выполняется соотношение:*

$$\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u = |H| \cdot |H_G|$$

Доказательство.
◄ Рассмотрим произвольный подграф H_i графа G такой, что:

$$H_i(V_i, E_i) : V_i \subseteq V, E_i \subseteq E, H_i \cong H$$

Так как каждая вершина $v \in V(H_i)$ содержится как минимум в одном подграфе графа G, изоморфном H, имеем:

$$\forall v \in V(H_i)\ Hdeg_{H_i} v = 1 \implies \sum_{v \in V(H_i)} Hdeg_{H_i} v = |H_i| = |H|$$

В таком случае, сумма H-степеней вершин графа G примет вид:

$$\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u = |H_1| + |H_2| + \cdots + |H_{|H_G|}| = |H| \cdot |H_G| \ ►$$

Рассматриваемое равенство в случае, когда $H = K_2$, представляет собой Лемму о рукопожатиях.

$$\sum_{u \in V(G)} K_2 deg_G u = \sum_{u \in V(G)} deg_G u = |K_2| \cdot |K_{2_G}| = 2 \cdot |E(G)|$$

2. Следствия из тождества о сумме H-степеней вершин графа.

1. **Граф H имеет чётный порядок.**

$$|H| \vdots 2 \implies \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u \vdots 2 \implies |_{odd} V_H(G)| \vdots 2$$

2. **$|H_G|$ чётно.**

$$|H_G| \vdots 2 \implies \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u \vdots 2 \implies |_{odd} V_H(G)| \vdots 2$$

3. **Оба числа $|H|$ и $|H_G|$ нечётные.**

$$\begin{cases} |H| \ \not\vdots\ 2 \\ |H_G| \ \not\vdots\ 2 \end{cases} \implies \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u \ \not\vdots\ 2 \implies |_{odd_H} V_H(G)| \ \not\vdots\ 2$$

3. Тождество о связи H-степеней и F-степеней вершин графа.

Теорема 2. *Пусть G, F и H – графы. Тогда выполняется соотношение:*

$$\sum_{F \in F_G} \sum_{u \in V(F)} Hdeg_G u = \sum_{v \in V(G)} (Fdeg_G v \cdot Hdeg_G v)$$

Доказательство.

$$◄ \sum_{F \in F_G} \sum_{u \in V(F)} Hdeg_G u = \sum_{u_1 \in V(F_1)} Hdeg_G u_1 + \sum_{u_2 \in V(F_2)} Hdeg_G u_2 + \ \cdots\ + \sum_{u_{|F_G|} \in V(F_{|F_G|})} Hdeg_G u_{|F_G|}$$

$$S_i = \sum_{u_i \in V(F_i)} Hdeg_G u_i, \sum_{1 \leq i \leq |F_G|} S_i = S$$

В сумме S вершина v встречается ровно $Fdeg_G v$ раз. Произвольная вершина $v \in V(G)$ либо встречается единожды, либо не встречается вовсе в каждой из сумм S_i. Тогда рассматриваемое соотношение примет вид:

$$S = Fdeg_G v_1 \cdot Hdeg_G v_1 + Fdeg_G v_2 \cdot Hdeg_G v_2 + \cdots + Fdeg_G v_{|G|} \cdot Hdeg_G v_{|G|} = \sum_{v \in V(G)} (Fdeg_G v \cdot Hdeg_G v) \blacktriangleright$$

В случае $F = H = K_2$, соотношение имеет вид:

$$\sum_{K_2 \in K_{2_G}} \sum_{u \in V(K_2)} K_2 deg_G u = \sum_{e \in E(G)} \sum_{u \in V(e)} deg_G u = \sum_{v \in V(G)} (deg_G u)^2$$

4. Оценки на сумму квадратов H-степеней вершин графа.

Теорема 3. *Пусть G и H – графы. Тогда выполняется соотношения:*

$$\frac{1}{|G|}(|H| \cdot |H_G|)^2 \overset{(4)}{\leq} \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \overset{(5)}{\leq} |H| \cdot |H_G|^2$$

Доказательство.

◀ В первую очередь преобразуем неравенства при условии (1):

$$\frac{1}{|G|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 \leq \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \leq \frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2$$

$$\frac{1}{|G|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \leq 0 \leq \frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$$

Теперь рассмотрим каждое из неравенств и докажем их в отдельности.

1.
$$\frac{1}{|G|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \leq 0$$

◀ Воспользуемся неравенством Коши-Буняковкого [7]:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \ \forall a_i, b_i \in \mathbb{R} \ (*)$$

Пусть $a_i = Hdeg_G u_i, b_i = 1$. Тогда имеем:

$$(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 \leq |G| \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \blacktriangleright$$

2.
$$0 \leq \frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$$

Заметим, что данное неравенство выпоняется тогда, когда все H-степени вершин графа равны нулю. Тогда докажем неравенство тогда, когда существуют вершины ненулевой H-степени:

$$\blacktriangleleft \ \forall u \in V(G) \ |H_G| \geq \max(Hdeg_G u) \implies |H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u \geq \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$$

$$|H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \geq 0$$

Разделим обе части неравенства на положительное $|H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$:

$$\frac{|H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2}{|H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} \geq 0$$

$$\frac{\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u}{\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} - \frac{1}{|H_G|} \geq 0 \implies \frac{\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u}{\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} \geq \frac{1}{|H_G|}$$

$$\frac{(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2}{\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} \geq \frac{\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u}{|H_G|}$$

$$\frac{(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2}{\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} \geq \frac{\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u}{|H_G|} \iff \frac{(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2}{\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2} \geq |H|$$

$$(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 \geq |H| \cdot \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$$

$$\frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 \geq \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2$$

$$\frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \geq 0 \blacktriangleright$$

Замечание 1. Неравенство (4) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда граф G является H-стабильным.

Доказательство.
◀ Известно, что неравенство (*) Коши-Буняковского выполняется как равенство тогда и только тогда, когда числовые последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ пропорциональны. Иными словами, $a_i = \lambda b_i \; \forall i \in [1, n]$ [7]. В нашем случае $a_i = \lambda b_i = \lambda = const \; \forall i \in [1, n]$. Таким образом, для выполнения неравенства (4) как равенства необходимо и достаточно, чтобы граф был H-стабильным. ▶

Замечание 2. Неравенство (5) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда H-степени всех его вершин либо равны нулю, либо числу подграфов графа, изоморфных H.

Доказательство.
◀ 1. Необходимость.

$$\sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 = |H| \cdot |H_G|^2 \implies \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u \cdot (|H_G| - Hdeg_G u) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u \in V(G) \; (Hdeg_G u = max(Hdeg_G u) = |H_G|) \vee (Hdeg_G u = 0)$$

2. Достаточность.

$$\forall u \in V(G) \; (Hdeg_G u = max(Hdeg_G u) = |H_G|) \vee (Hdeg_G u = 0)$$

$$\Downarrow$$

$$|H_G| \cdot \sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u = \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \implies 0 = \frac{1}{|H|}(\sum_{u \in V(G)} Hdeg_G u)^2 - \sum_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \blacktriangleright$$

Замечание 3. Неравенства (4) и (5) одновременно выполняются как равенства тогда и только тогда, H-степени всех вершин графа либо попарно равны нулю, либо попарно равны числу подграфов графа, изоморфных H.

$$\begin{cases} \frac{1}{|G|}(|H| \cdot |H_G|)^2 = \sum\limits_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 \\ \sum\limits_{u \in V(G)} (Hdeg_G u)^2 = |H| \cdot |H_G|^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall u \in V(G)\ Hdeg_G u = max(Hdeg_G u) = |H_G|) \vee (\forall u \in V(G)\ Hdeg_G u = 0)$$

5. Рекурсивный алгоритм построения бесконечных серий локально искаженных графов.

Лемма 1. *Пусть $G(V, E)$ - локально искаженный граф такой, что $\forall u \in V(G)\ deg_G u \leq |G| - 2$. Тогда:*

$$\forall u, v \in V(G) : u \neq v\ H(N_{G+K_1} u) \ncong H(N_{G+K_1} v)$$

Доказательство.
◀ Рассмотим пару вершин $u, v \in V(G)$. По определению:

$$\forall u, v \in V(G) : u \neq v\ H(N_G u) \ncong H(N_G v)$$

Если $deg_G u \neq deg_G v$, то утверждение Леммы, очевидно, выполняется. Пусть тогда $deg_G u = deg_G v$.

Предположим, что для данной пары вершин $H(N_{G+K_1} u) \cong H(N_{G+K_1} v)$. Рассмотрим биективное отображение $f : N_{G+K_1} u \longrightarrow N_{G+K_1} v$ - некоторый изоморфизм данных подграфов. Вершину a будем обозначать как a_u или a_v, тогда, когда подразумевается, что $a \in N_{G+K_1} u$ или $a \in N_{G+K_1} v$ соответственно.

1. Пусть

   $$\begin{cases} \exists ! a_u \in N_{G+K_1} u : deg_{H(N_{G+K_1} u)} a_u = deg_G u \\ \exists ! a_v \in N_{G+K_1} v : deg_{H(N_{G+K_1} v)} a_v = deg_G v \end{cases} \implies f(a_u) = a_v$$

   В соответствии с определением изоморфизма, имеем:

   $$(u_i, u_j) \in E(G) \iff (f(u_i), f(u_j)) \in E(f(G))$$

   Следовательно, $H(N_G u) \cong H(N_G v)$ – противоречие.

2. Без ограничения общности положим, что:

   $$\exists b_v \in N_{G+K_1} v : deg_{H(N_{G+K_1} v)} b_v = deg_G v, b_v \neq a_v$$

   Пусть для некоторого изоморфизма f выполняется, что $f(a_u) = b_v$. Тогда:

   $$\begin{cases} H(N_G u) \cong H(N_G v \setminus \{b_v\} \cup \{a_v\}) \\ N_{G+K_1} a_v = N_{G+K_1} b_v \end{cases} \implies H(N_G v \setminus \{b_v\} \cup \{a_v\}) \cong H(N_G v)$$

   Таким образом, получаем противоречие. ▶

Теорема 4. *Пусть $G(V, E)$ - локально искаженный граф такой, что:*

$$\forall u \in V(G)\ deg_G u \leq |G| - 2$$

Тогда $G + K_1$ – также локально искаженный граф.

Доказательство.
◀ Отметим, что $H(N_{G+K_1} a) \cong G$, и тогда, действительно, по Лемме 1 имеем:

$$\begin{cases} \forall u, v \in V(G) : u \neq v\ H(N_{G+K_1} u) \ncong H(N_{G+K_1} v) \\ \forall w \in V(G)\ H(N_{G+K_1} w) \ncong H(N_{G+K_1} a) \end{cases} \quad ▶$$

Заметим при этом, что:

$$deg_{G+K_1} a = |G + K_1| - 1 = |G|$$

Теорема 5. *Пусть $G(V,E)$ - локально искаженный граф такой, что:*

$$\begin{cases} \exists ! a \in V(G) : deg_G a = |G| - 1 \\ \forall u \in V(G) \; deg_G u > 1 \end{cases}$$

Тогда $G * K_2$ - также локально искаженный граф.

Доказательство.
◀ Пусть $V(K_2) = \{c, b\}, (b, a) \in E(G)$. Так как граф $G(V,E)$ - локально искаженный, справедливо соотношение:

$$\forall u_j, u_k \in V(G) \setminus \{a\} : j < k \leq |G| - 1 \; H(N_G u_j) \ncong H(N_G u_k) \implies (N_{G*K_2} u_j) \ncong H(N_{G*K_2} u_k)$$

$$\begin{cases} \exists ! a \in V(G) : deg_G a = |G| - 1 \\ \forall u \in V(G) \; deg_G u > 1 \end{cases} \implies \forall u \in V(G) \; H(N_G u) \supseteq K_2$$

При этом, так как $deg_G a = |G| - 1$, имеем:

$$\begin{cases} H(N_{G*K_2} a) \cong G - a \cup \{b\} \\ |N_{G*K_2} a| = |G| \\ \forall w \in V(G) \setminus \{a\} \; |N_{G*K_2} w| \leq |G| - 2 \end{cases} \implies \forall w \in V(G) \setminus \{a\} \; H(N_{G*K_2} a) \ncong H(N_{G*K_2} w)$$

$$\begin{cases} H(N_{G*K_2} b) \cong \overline{K_2} \\ H(N_{G*K_2} c) \cong K_1 \end{cases} \implies \forall u \in V(G) \begin{cases} H(N_{G*K_2} u) \ncong H(N_{G*K_2} b) \\ H(N_{G*K_2} u) \ncong H(N_{G*K_2} c) \end{cases}$$

Таким образом, выполняется условие:

$$\forall j, k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G| + 2 \; H(N_{G*K_2} u_j) \ncong H(N_{G*K_2} u_k) \; ►$$

Отметим при этом, что:

$$\forall u \in V(G * K_2) \; deg_{G*K_2} u \leq |G * K_2| - 2$$

Таким образом, бесконечные серии локально искаженных графов можно задавать рекурсивно.

Пусть граф $G_1(V,E)$ такой, что:

$$\begin{cases} \forall j, k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G_1| \; H(N_{G_1} u_j) \ncong H(N_{G_1} u_k) \\ \forall u \in V(G_1) \; deg_{G_1} u \leq |G_1| - 2 \end{cases}$$

Тогда:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \,\vdots\, 2 \\ G_{i-1} * K_2, i \not\vdots\, 2, i \neq 1 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

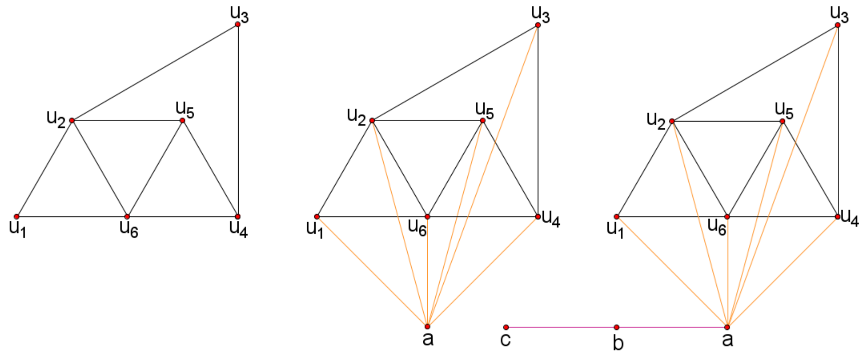
Пусть граф $G_1(V,E)$ такой, что:

$$\begin{cases} \forall j, k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G_1| \; H(N_{G_1} u_j) \ncong H(N_{G_1} u_k) \\ \exists ! a \in V(G_1) \; deg_{G_1} a = |G_1| - 1 \\ \forall u \in V(G_1) \; deg_{G_1} u > 1 \end{cases}$$

Тогда:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \not\vdots\, 2, i \neq 1 \\ G_{i-1} * K_2, i \,\vdots\, 2 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

Приведем пример такой бесконечной серии локально искаженных графов.



Слева направо представлены графы $G_1,\ G_1+K_1,\ (G_1+K_1)*K_2$

6. Тривиальность группы автоморфизмов локально искаженного графа.

Теорема 6. *Группа автоморфизмов любого локально искаженного графа состоит из одного единственного тождественного автоморфизма. Однако обратное неверно.*

Доказательство.

◀ Предположим, что существует локально искаженный граф, группа автоморфизмов которого соедржит нетривиальные автоморфизмы, то есть:

$$\exists\, G(V,E) : \begin{cases} \forall j,k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G|\ H(N_G u_j) \ncong H(N_G u_k) \\ |Aut(G)| > 1 \end{cases}.$$

Пусть биективное отображение $f : V(G) \longrightarrow V(G')$ - нетривиальный автоморфизм графа G. Рассмотрим пару вершин в графе G таких, что $u \sim v$, то есть $f(u) = v$. В соответствии с определением автоморфизма:

$$(u_i, u_j) \in E(G) \iff (f(u_i), f(u_j)) \in E(f(G))$$

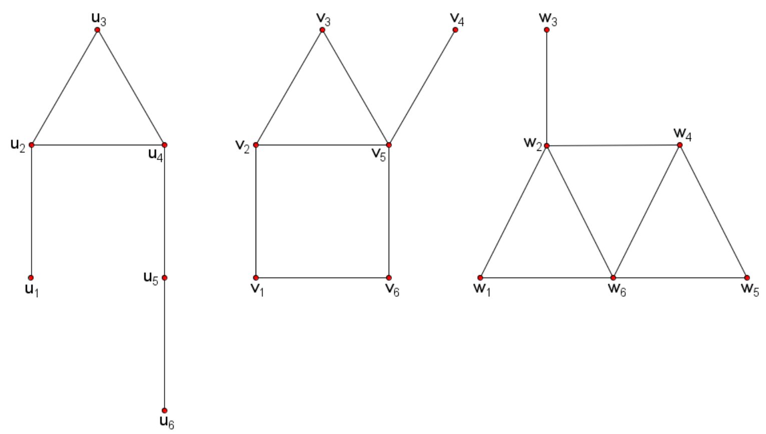
Следовательно, имеем:

$$H(N_G u) \cong H(N_G v).$$

Таким образом, получено противоречие с исходным условием локальной искаженности графа G.

Приведем примеры графов G_1, G_2, G_3 таких, что:

$$\begin{cases} |Aut(G)| = 1 \\ \exists j,k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G|,\ H(N_G u_j) \cong H(N_G u_k) \end{cases}$$



Слева направо представлены графы G_1, G_2, G_3

$$\begin{cases} H(N_{G_1} u_1) \cong H(N_{G_1} u_6) \cong K_1 \\ H(N_{G_1} u_2) \cong H(N_{G_1} u_4) \cong \overline{P_3} \end{cases}$$

$$H(N_{G_2} v_1) \cong H(N_{G_2} v_6) \cong \overline{K_2}$$

$$H(N_{G_3} w_1) \cong H(N_{G_3} w_5) \cong K_2$$

Таким образом, утверждение доказано. ▶

7. Ограничение на порядок K_2-стабильного степени d локально искажённого графа.

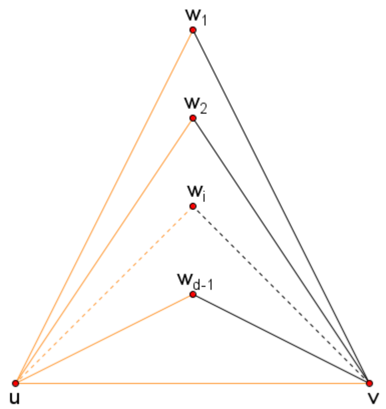
Теорема 7. *Пусть дан локально искаженый граф G. Тогда:*

$$\begin{cases} \forall j,k \in \mathbb{N} : j < k \le |G| \; H(N_G u_j) \ncong H(N_G u_k) \\ \forall u \in V(G) \; K_2 deg_G u = d \end{cases} \implies |G| \le N_d(G) - N_{d-1}(G) - 1$$

Доказательство.
◀ Пусть дан граф G такой, что

$$\begin{cases} \forall j,k \in \mathbb{N} : j < k \le |G| \; H(N_G u_j) \ncong H(N_G u_k) \\ \forall u \in V(G) \; K_2 deg_G u = d \\ \exists u \in V(G) : \exists v \in N_G u : deg_{H(N_G u)} = d - 1 \end{cases}$$

Тогда рассмотрим подграф $H(N_G u)$ исходного графа G.



$$H(N_G u), \; deg_G u = d, deg_{H(N_G u)} v = d - 1$$

$$\begin{cases} deg_G u = d \\ deg_{H(N_G u)} v = d - 1 \\ v \in N_G u \end{cases} \implies \begin{cases} H(N_G u) = H(\{w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_{d-1}\}) + v \\ H(N_G v) = H(\{w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_{d-1}\}) + u \end{cases}$$

$$H(N_G u) \cong H(N_G v)$$

Таким образом, если в d-регулярном графе G существует какой-либо из подграфов на d вершинах, имеющих хотя бы одну вершину степени $deg_{H(N_G u)} = d - 1$, то граф не будет локально искаженным.
В каждом d-регулярном графе на не более чем $N_d(G)$ и не менее чем $N_{d-1}(G)$ вершинах, по предположению являющимся локально скаженным, по принципу Дирихле найдется хотя бы одна вершина, окружение которой порождает описанный выше подграф. Тогда в рассматриваемом графе найдется хотя бы 2 вершины, окружения которых порождают изоморфные подграфы. Следовательно, приходим к противоречию, и тогда такие d-регулярные графы не являются локально искаженными.
Таким образом, не существует K_2-стабильных степени d локально искажённых граф G таких, что $|G| \ge N_d(G) - N_{d-1}(G)$. ▶

8. Определение $P_3 deg_G u$ в зависимости от K_2-степеней вершин графа.

1. Число P_3-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_3} u = 1$.

$$_1P_3 deg_G u = (deg_G v_1 - 1) + (deg_G v_2 - 1) + \cdots + (deg_G v_{|N_G u|} - 1) = \sum_{v \in N_G u} deg_G v - deg_G u$$

2. Число P_3-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_3} u = 2$.

$$_2P_3 deg_G u = {}_{|N_G u|}C_2 = {}_{deg_G u}C_2$$

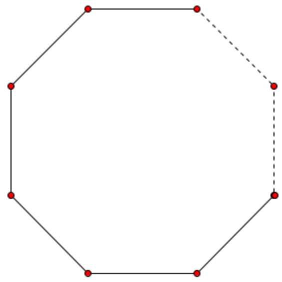
3. Таким образом, получаем число P_3-цепей, содержащих вершину u:

$$P_3deg_Gu = {}_1P_3deg_Gu + {}_2P_3deg_Gu = \sum_{v \in N_Gu} deg_Gv - deg_Gu + {}_{deg_Gu}C_2$$

С помощью данной формулы приведем примеры бесконечных серий P_3-стабильных графов.

9. Рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серий P_3-стабильных графов.

1. Простой цикл C_i является P_3-стабильным $\forall i \geq 3$.



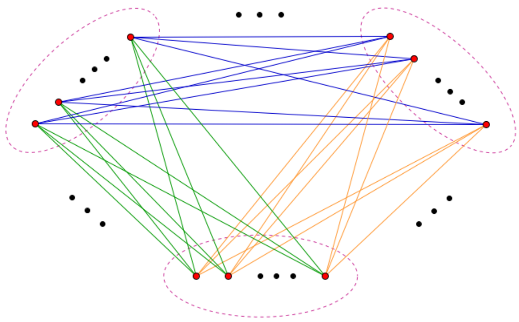
$$\forall i \geq 3 \; \forall u \in V(C_i) \; P_3deg_{C_i}u = 3$$

Бесконечную серию P_3-стабильных простых циклов можно задать следующим образом:

Пусть G_i - P_3-стабильный простой цикл на i вершинах. Тогда:

$$G_{i+1} = \begin{cases} C_{i+1}, i \geq 3 \\ C_3, i = 2 \end{cases}$$

2. Полный k-дольный граф $K_{n,n,\dots,n}$ является P_3-стабильным $\forall n \geq 1, k \geq 1$.



$$\forall n \geq 1 \; \forall u \in V(K_{n,n,\dots,n}) \; P_3deg_{K_{n,n,\dots,n}}u = \frac{3}{2}((k-1)n-1)(k-1)n$$

$$P_3deg_Gu = ((k-1)n)^2 - (k-1)n + {}_{(k-1)n}C_2 = \frac{3}{2}((k-1)n-1)(k-1)n$$

Предложим несколько способов построения бесконечных серий P_3-стабильных полных k-дольных графов:

Пусть G_n - P_3-стабильный полный k-дольных граф на kn вершинах. Тогда:

$$G_{n+1} = \begin{cases} K_{n+1,n+1,\dots,n+1}, n \geq 1 \\ K_k \cong K_{1,1,\dots,1}, n = 0 \end{cases}$$

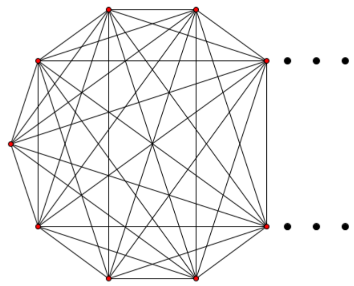
Пусть G_k - P_3-стабильный полный k-дольных граф на kn вершинах. Тогда:

$$G_{k+1} = \begin{cases} K_{n_1,n_2,\dots,n_{k+1}}, \forall i,j \in [1,k+1] \; n_i = n_j = n, k \geq 1 \\ G_1 \cong \overline{K_n}, k = 0 \end{cases}$$

Пусть $G_{n,k}$ - P_3-стабильный полный k-дольных граф на kn вершинах. Тогда:

$$G_{n+1,k+1} = \begin{cases} K_{n_1+1,n_2+1,\dots,n_{k+1}+1}, \forall i,j \in [1,k+1]\ n_i = n_j = n, k \geq 1, n \geq 1 \\ G_{n+1,1} \cong \overline{K_{n+1}}, k = 0, n \neq 0 \\ G_{1,k+1} \cong K_{k+1} \cong K_{1,1,\dots,1}, n = 0, k \neq 0 \end{cases}$$

3. Полный граф K_n является P_3-стабильным $\forall n \geq 1$.



$$\forall n \geq 1\ \forall u \in V(K_n)\ P_3deg_{K_n}u = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

$$P_3deg_G u = \sum_{v \in N_G u} deg_G v - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2 = (n-1)^2 - (n-1) + {}_{n-1}C_2 = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)$$

Бесконечную серию P_3-стабильных полных графов можно задать следующим образом:

Пусть G_n - P_3-стабильный полный граф на n вершинах. Тогда:

$$G_{n+1} = \begin{cases} K_{n+1}, n \geq 1 \\ K_2, n = 0 \end{cases}$$

10. Характеристика P_3-стабильных графов степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин.

$$\begin{cases} \forall u \in V(G) P_3deg_G = const \\ \sum\limits_{u \in V(G)} \sum\limits_{v \in N_G u} deg_G v = \sum\limits_{u \in V(G)} (deg_G u)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \forall u \in V(G)\ P_3deg_G u = \sum\limits_{v \in N_G u} deg_G v - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2 = const \\ \sum\limits_{u \in V(G)} P_3deg_G u = \sum\limits_{u \in V(G)} (deg_G u)^2 - 2|E(G)| + \sum\limits_{u \in V(G)} {}_{deg_G u}C_2 = \frac{3}{2} \sum\limits_{u \in V(G)} (deg_G u)^2 - 3|E(G)| \end{cases}$$

11. Определение $K_n deg_G u$ в зависимости от K_{n-1}-степеней вершин графа.

Лемма 2. *K_n-степень вершины u в графе G равна числу подграфов K_{n-1} на вершинах, смежных с u.*

$$K_n deg_G u = |K_{n-1_{H(N_G u)}}|$$

Доказательство.
◀ Рассмотрим произвольную вершину u графа G и множество смежных с ней вершин.

$$\forall K_{n-1_i} \in K_{n-1_{H(N_G u)}}\ \exists!\ H(V', E') \cong K_n : V(K_{n-1_i}) \cup \{u\} = V'(H)\ \blacktriangleright$$

Теперь рассмотрим граф G, произвольную вершину $u \in V(G)$ и подграф, порожденный окружением данной вершины в графе.

По Лемме 2, справедливо соотношение:

$$K_n deg_G u = |K_{n-1_{H(N_G u)}}|$$

Исходя из соотношения (1), имеем:

$$\sum_{v \in V(G)} K_n deg_G v = n \cdot |K_{n_G}| \implies \sum_{w \in N_G u} K_{(n-1)} deg_{H(N_G u)} w = (n-1) \cdot |K_{n-1_{H(N_G u)}}|$$

Таким образом, получаем, что:

$$K_n deg_G u = |K_{n-1_{H(N_G u)}}| = \frac{1}{n-1} \sum_{w \in N_G u} K_{(n-1)} deg_{H(N_G u)} w$$

В частности, при $n = 3$ имеем:

$$K_3 deg_G u = |E(H(N_G u))| = \frac{1}{2} \sum_{w \in N_G u} deg_{H(N_G u)} w$$

12. Рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серий K_3-стабильных графов.

1. Полный граф K_n является K_3-стабильным $\forall n \geq 1$.

   $$\forall n \geq 1 \; \forall u \in V(K_n) \; K_3 deg_{K_n} u = |E(K_{n-1})| = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

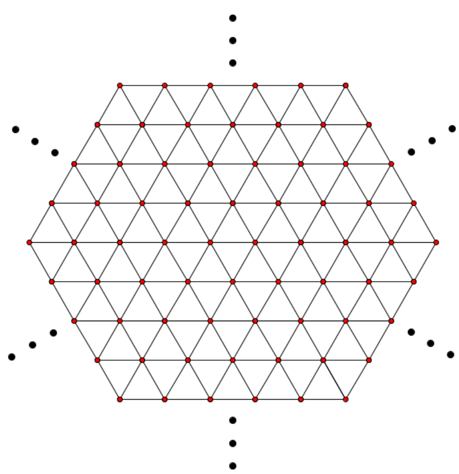
   Будем задавать бесконечную серию K_3-стабильных полных графов так же, как и в случае задания бесконечной серии P_3-стабильных полных графов.

   Более того, бесконечную терию K_3-стабильных графов, образованных из K_n, можно задать следующим образом:

   Пусть G_k – K_3-стабильный граф на n вершинах. Тогда:

   $$G_{k+1} = \begin{cases} K_2 \times G_k, k \geq 1 \\ G_1 \cong K_n, k = 0 \end{cases}$$

2. Бесконечный граф T^∞ треугольной решетки является K_3-стабильным.

   $$\forall u \in V(T^\infty) \; K_3 deg_{T^\infty} u = 6$$

   Бесконечную серию таких K_3-стабильных графов можно задать следующим образом:

   Пусть G_n - K_3-стабильный граф. Тогда:

   $$G_{n+1} = \begin{cases} K_2 \times G_n, n \geq 1 \\ T^\infty, n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

13. Характеристика K_3-стабильных графов степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин.

$$\forall u \in V(G)\ K_3deg_G = const$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \forall u \in V(G)\ K_3deg_G u = \frac{1}{2} \sum\limits_{w \in N_G u} deg_{H(N_G u)} w = const \\ \sum\limits_{u \in V(G)} K_3deg_G u = \frac{1}{2} \sum\limits_{u \in V(G)} \sum\limits_{v \in N_G u} deg_{H(N_G u)} v \end{cases}$$

14. Опровержение существования K_2-монстров.

Теорема 8. *K_2-монстров не существует.*

Доказательство.
◀ Предположим обратное, то есть

$$\exists G(V,E) : \forall i,j : i < j \leq |G|\ deg_G u_i \neq deg_G u_j$$

$$\begin{cases} \min(deg_G u) = 0 \\ \max(deg_G u) = |G| - 1 \\ \forall\ k \in [0, |G|-1]\ \exists! v \in V(G) : deg_G v = k \end{cases} \implies \exists i,j : \begin{cases} deg_G u_i = 0 \\ deg_G u_j = |G| - 1 \end{cases}$$

Таким образом, в графе G найдутся две вершины u_i и u_j такие, что u_i является изолированной вершиной, а u_j смежна со всеми оставшимся вершинам графа G. Следовательно, имеем противоречие, а значит K_2-монстров действительно не существует. ►

15. Рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серий P_3-монстров.

Теорема 9. *Пусть $G(V,E)$ - P_3-монстр такой, что:*

$$\forall u \in V(G)\ deg_G u \leq |G| - 2$$

Тогда для графа $G + K_1$, $V(K_1) = \{a\}$ справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \forall \phi, \lambda \in V(G) : deg_G \phi = deg_G \lambda\ P_3deg_{G+K_1} \phi \neq P_3deg_{G+K_1} \lambda \\ \forall u \in V(G)\ P_3deg_{G+K_1} u \neq P_3deg_{G+K_1} a \end{cases}$$

Доказательство.
◀ Рассмотрим граф $G(V,E)$, являющийся P_3-монстром, то есть:

$$\forall i,j : i < j \leq |G|\ P_3deg_G u_i \neq P_3deg_G u_j$$

При этом

$$P_3deg_G u = \sum_{v \in N_G u} deg_G v - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2$$

Далее рассмотрим граф $G + K_1$, где $V(K_1) = \{a\}$. Имеет место соотношение:

$$\begin{cases} P_3deg_{G+K_1} u = \sum\limits_{w \in N_{G+K_1} u} deg_{G+K_1} w - deg_{G+K_1} u + {}_{(deg_{G+K_1} u)}C_2\ \forall u \in V(G) \\ P_3deg_{G+K_1} a = \sum\limits_{\beta \in N_{G+K_1} a} deg_{G+K_1} \beta - deg_{G+K_1} a + {}_{(deg_{G+K_1} a)}C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_3deg_{G+K_1} u = \sum\limits_{v \in N_G u} deg_G v + |G| + deg_G u - deg_G u - 1 + {}_{(deg_G u + 1)}C_2 \\ P_3deg_{G+K_1} a = \sum\limits_{\gamma \in V(G)} deg_G \gamma + |G| - |G| + {}_{(deg_{G+K_1} a)}C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_3deg_{G+K_1}u = \sum\limits_{v\in N_Gu} deg_Gv + |G| - 1 + {}_{(deg_Gu+1)}C_2 \\ P_3deg_{G+K_1}a = \sum\limits_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + {}_{(deg_{G+K_1}a)}C_2 \end{cases}$$

Сравним P_3-степени вершины a и некоторой вершины $u \in V(G)$ в графе $G + K_1$.

$$P_3deg_{G+K_1}u \vee P_3deg_{G+K_1}a$$

$$\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + |G| - 1 + {}_{(deg_Gu+1)}C_2 \vee \sum_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + {}_{(deg_{G+K_1}a)}C_2$$

$$2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + deg_Gu(deg_Gu + 1) \vee 2\sum_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + |G|(|G| - 1)$$

При этом для графа G выполняется соотношение:

$$\forall u \in V(G)\ deg_Gu \leq |G| - 2$$

Учитывая это соотношение, оценим левую часть сравнения:

$$2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + deg_Gu(deg_Gu + 1) \leq 2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + (|G| - 2)(|G| - 1)$$

Преобразовав, получим:

$$2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + deg_Gu(deg_Gu + 1) \leq 2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv - |G| + |G|^2$$

Теперь вернемся к исходному сравнению:

$$2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv - |G| + |G|^2 \vee 2\sum_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + |G|(|G| - 1)$$

Преобразовав, получим:

$$\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv < \sum_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + deg_Gu(deg_Gu + 1) \leq 2\sum\limits_{v\in N_Gu} deg_Gv - |G| + |G|^2 \\ 2\sum\limits_{v\in N_Gu} deg_Gv - |G| + |G|^2 < 2\sum\limits_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + |G|(|G| - 1) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2\sum_{v\in N_Gu} deg_Gv + 2|G| - 2 + deg_Gu(deg_Gu + 1) < 2\sum_{\gamma\in V(G)} deg_G\gamma + |G|(|G| - 1)$$

Таким образом, имеем:

$$\forall u \in V(G)\ P_3deg_{G+K_1}u \neq P_3deg_{G+K_1}a$$

Сравним P_3-степени произвольных вершин $\phi, \lambda \in V(G)$ в графе $G + K_1$ таких, что $deg_G\phi = deg_G\lambda$:

$$P_3deg_{G+K_1}\phi \vee P_3deg_{G+K_1}\lambda$$

$$\sum_{x\in N_G\phi} deg_Gx + |G| - 1 + {}_{(deg_G\phi+1)}C_2 \vee \sum_{y\in N_G\lambda} deg_Gy + |G| - 1 + {}_{(deg_G\lambda+1)}C_2$$

$$\sum_{x\in N_G\phi} deg_Gx + \frac{deg_G\phi(deg_G\phi + 1)}{2} \vee \sum_{y\in N_G\lambda} deg_Gy + \frac{deg_G\lambda(deg_G\lambda + 1)}{2}$$

$$\sum_{x\in N_G\phi} deg_Gx + \frac{deg_G\phi(deg_G\phi - 1)}{2} + deg_G\phi \vee \sum_{y\in N_G\lambda} deg_Gy + \frac{deg_G\lambda(deg_G\lambda - 1)}{2} + deg_G\lambda$$

$$P_3deg_G\phi + 2deg_G\phi \vee P_3deg_G\lambda + 2deg_G\lambda$$

$$\begin{cases} deg_G\phi = deg_G\lambda \\ \forall \phi, \lambda \in V(G)\ P_3deg_G\phi \neq P_3deg_G\lambda \end{cases} \implies P_3deg_{G+K_1}\phi \neq P_3deg_{G+K_1}\lambda$$

Таким образом, справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \forall \phi, \lambda \in V(G) : deg_G u_i = deg_G\phi\ P_3deg_{G+K_1}\lambda \neq P_3deg_{G+K_1}u_j \\ \forall u \in V(G)\ P_3deg_{G+K_1}u \neq P_3deg_{G+K_1}a \end{cases} \blacktriangleright$$

Теорема 10. *Пусть $G(V,E)$ - P_3-монстр такой, что:*

$$\begin{cases} \exists! a \in V(G)\ deg_G a = |G| - 1 \\ \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_{G-a}u \geq 1 \end{cases}$$

Тогда $G * K_2$ - также P_3-монстр.

Доказательство.
◀ Рассмотрим граф $G(V,E)$, являющийся P_3-монстром, то есть:

$$\forall i, j : i < j \leq |G|\ P_3deg_G u_i \neq P_3deg_G u_j$$

При этом:

$$P_3deg_G u = \sum_{v \in N_G u} deg_G v - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2$$

Пусть $V(K_2) = \{c, b\}, (b, a) \in E(G)$. Так как граф $G(V,E)$ - P_3-монстр, справедливо соотношение:

$$\forall u_j, u_k \in V(G) \setminus \{a\} : j < k \leq (|G| - 1)\ P_3deg_{G*K_2}u_j \neq P_3deg_{G*K_2}u_k$$

$$\forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ P_3deg_{G*K_2}u = \sum_{w \in N_G u} deg_G w + 1 - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2 = \sum_{w \in N_G u} deg_G w + \frac{deg_G u(deg_G u - 3)}{2} + 1$$

При этом, так как $deg_G a = |G| - 1$, имеем:

$$P_3deg_{G*K_2}a = \sum_{\beta \in N_{G*K_2}a} deg_{G*K_2}\beta - deg_{G*K_2}a + {}_{(deg_{G*K_2}a)}C_2$$

$$P_3deg_{G*K_2}a = \sum_{\beta \in V(G*K_2)\setminus\{a,c\}} deg_{G*K_2}\beta - |G| + {}_{|G|}C_2 = \sum_{\beta \in V(G*K_2)\setminus\{a,c\}} deg_{G*K_2}\beta + \frac{|G|(|G| - 3)}{2}$$

$$\begin{cases} \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ \sum_{w \in N_G u} deg_G w + 1 < \sum_{\beta \in V(G*K_2)\setminus\{a,c\}} deg_{G*K_2}\beta \\ \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_G u < |G| \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{w \in N_G u} deg_G w + 1 + \frac{deg_G u(deg_G u - 3)}{2} < \sum_{\beta \in V(G*K_2)\setminus\{a\}} deg_{G*K_2}\beta + \frac{|G|(|G| - 3)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ P_3deg_{G*K_2}u < P_3deg_{G*K_2}a$$

При этом имеем:

$$\begin{cases} P_3deg_{G*K_2}b = deg_{G*K_2}a + 1 - deg_{G*K_2}b + {}_{deg_{G*K_2}b}C_2 = deg_{G*K_2}a = |G| \\ P_3deg_{G*K_2}c = 1 \end{cases}$$

Заметим также, обратившись к начальному условию, что:

$$\begin{cases} \exists! a \in V(G)\ deg_G a = |G| - 1 \\ \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_{G-a}u \geq 1 \end{cases} \implies \forall u \in V(G)\ P_3deg_G u > 1$$

В таком случае имеет место соотношение:

$$\forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ P_3deg_{G*K_2}u = \sum_{w \in N_G u} deg_G w + 1 - deg_G u + {}_{deg_G u}C_2 > |G| - 1 + 1 = |G|$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ P_3deg_{G*K_2}u > P_3deg_{G*K_2}b$$

Таким образом, имеет место соотношение:

$$\forall i, j : i < j \leq |G * K_2|\ P_3deg_{G*K_2}u_i \neq P_3deg_{G*K_2}u_j$$

Иными словами, граф $G * K_2$ является P_3-монстром. ►

Определим теперь граф G_i следующим образом:

1. Пусть:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \vdots 2 \\ G_{i-1} * K_2, i \not\vdots 2, i \neq 1 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

   в том случае, если граф $G_1(V, E)$ такой, что:

$$\forall u \in V(G_1)\ deg_{G_1}u \leq |G_1| - 2$$

2. Пусть:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \not\vdots 2, i \neq 1 \\ G_{i-1} * K_2, i \vdots 2 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

   в том случае, если граф $G_1(V, E)$ такой, что:

$$\begin{cases} \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_{G-a}u \geq 1 \\ \exists!\ a \in V(G)\ deg_G a = |G| - 1 \end{cases}$$

Теорема 11. *Пусть $G_i(V, E)$ - P_3-монстр такой, что:*

$$\begin{cases} \exists! a \in V(G_i)\ deg_{G_i}a = |G_i| - 1 \\ \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_{G-a}u \geq 1 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}\ deg_{G_i}w_k > deg_{G_i}w_j \implies P_3deg_{G_i}w_k > P_3deg_{G_i}w_j \end{cases}$$

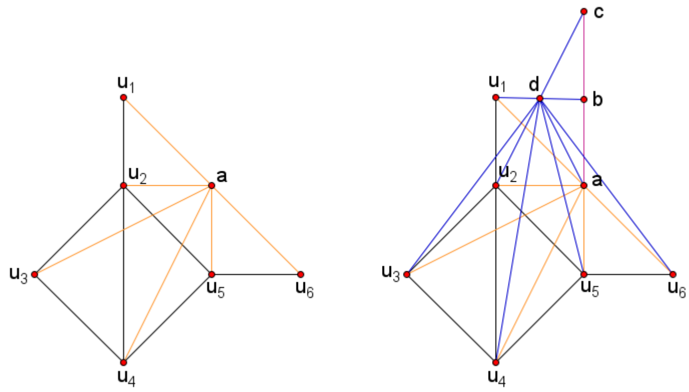
Тогда для графа $G_{i+2} = (G * K_2) + K_1$ справедливо соотношение:

$$\forall w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}\ P_3deg_{G_{i+2}}w_k > P_3deg_{G_{i+2}}w_j$$

Доказательство.

◄ Произведем доказательство по индукции.

1. **База индукции.** В качестве примера рассмотрим один из минимальных P_3-монстров, удовлетворяющих описанному условию. Заметим при этом, что, $(G_1 * K_2) + K_1$ - P_3-монстр, так же удовлетворяющий условию Теоремы.

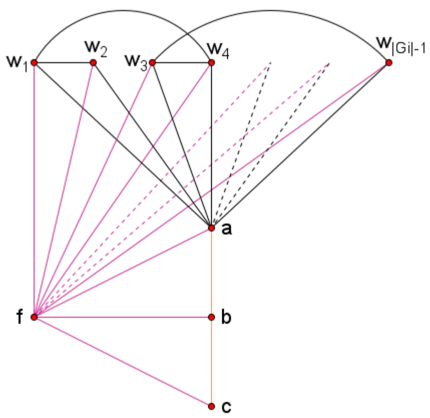


Слева направо представлены графы $G_1, (G_1 * K_2) + K_1$

2. **Шаг индукции.** Предположим, что условие Теоремы выполнено для графа G_i такого, что:

$$\begin{cases} \exists! a \in V(G_i)\ deg_{G_i} a = |G_i| - 1 \\ \forall u \in V(G) \setminus \{a\}\ deg_{G-a} u \geq 1 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}\ deg_{G_i} w_k > deg_{G_i} w_j \implies P_3 deg_{G_i} w_k > P_3 deg_{G_i} w_j \end{cases}$$

Докажем утверждение Теоремы для графа $G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$.



$G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$

Определим степени произвольной пары вершин $w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}$ в графе $G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$.

$$\begin{cases} deg_{G_{i+2}} w_k = deg_{G_i} w_k + 1 \\ deg_{G_{i+2}} w_j = deg_{G_i} w_j + 1 \end{cases}$$

Далее определим P_3-степени произвольной пары вершин $w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}$ в графе $G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$.

$$\begin{cases} P_3 deg_{G_{i+2}} w_k = P_3 deg_{G_i} w_k + {}_{(|G_i|+1)}C_2 + deg_{G_i} w_k + 1 \\ P_3 deg_{G_{i+2}} w_j = P_3 deg_{G_i} w_j + {}_{(|G_i|+1)}C_2 + deg_{G_i} w_j + 1 \end{cases}$$

Найдем разность P_3-степеней вершин $w_k, w_j \in V(G_i) \setminus \{a\}$ в графе $G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$:

$$P_3 deg_{G_{i+2}} w_k - P_3 deg_{G_{i+2}} w_j = P_3 deg_{G_i} w_k - P_3 deg_{G_i} w_j + deg_{G_i} w_k - deg_{G_i} w_j$$

$$\begin{cases} deg_{G_i} w_k > deg_{G_i} w_j \\ P_3 deg_{G_i} w_k > P_3 deg_{G_i} w_j \end{cases} \implies P_3 deg_{G_{i+2}} w_k - P_3 deg_{G_{i+2}} w_j > 0$$

Таким образом, утверждение Теоремы выполняется для графа $G_{i+2} = (G_i * K_2) + K_1$. ▶

Теорема 12. *Пусть $G_i(V, E)$ - P_3-монстр такой, что:*

$$\begin{cases} \forall u \in V(G_i)\ deg_{G_i} u \leq |G_i| - 2 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_i)\ deg_{G_i} w_k > deg_{G_i} w_j \implies P_3 deg_{G_i} w_k > P_3 deg_{G_i} w_j \end{cases}$$

Тогда для графа $G_{i+2} = (G_i + K_1) * K_2$ справедливо соотношение:

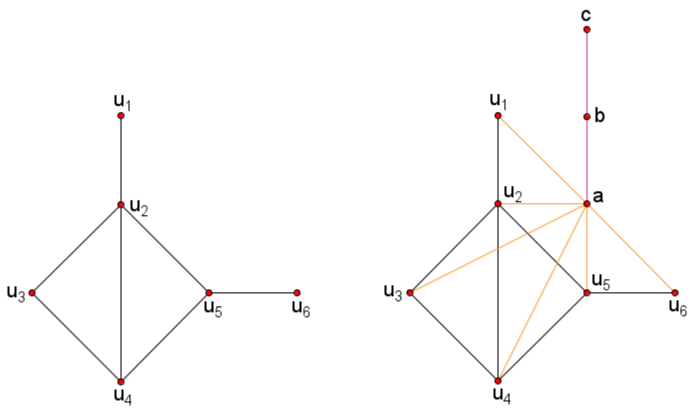
$$\forall w_k, w_j \in V(G_i)\ P_3 deg_{G_{i+2}} w_k > P_3 deg_{G_{i+2}} w_j$$

Доказательство.

◀ Произведем доказательство по индукции.

1. **База индукции.** В качестве примера рассмотрим один из минимальных P_3-монстров, удовлетворяющих описанному условию. Заметим при этом, что, $(G_1 + K_1) * K_2$ -

   P_3-монстр, так же удовлетворяющий условию Теоремы.

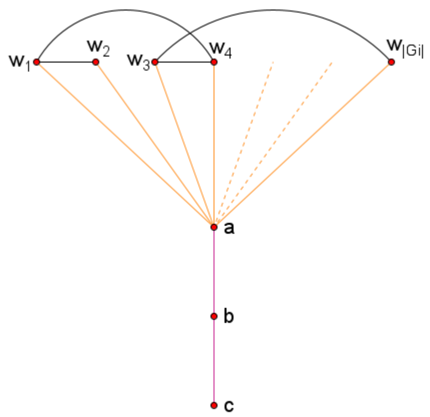


Слева направо представлены графы $G_1, (G_1 + K_1) * K_2$

2. **Шаг индукции.** Предположим, что условие Теоремы выполено для графа G_i такого, что:

$$\begin{cases} \forall u \in V(G_i)\ deg_{G_i} u \leq |G_i| - 2 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_i)\ deg_{G_i} w_k > deg_{G_i} w_j \implies P_3 deg_{G_i} w_k > P_3 deg_{G_i} w_j \end{cases}$$

   Докажем утверждение Теоремы для графа $G_{i+2} = (G_i + K_1) * K_2$.



$G_{i+2} = (G_i + K_1) * K_2$

   Определим степени произвольной пары вершин $w_k, w_j \in V(G_i)$ в графе $G_{i+2} = (G_i + K_1) * K_2$:

$$\begin{cases} deg_{G_{i+2}} w_k = deg_{G_i} w_k + 1 \\ deg_{G_{i+2}} w_j = deg_{G_i} w_j + 1 \end{cases}$$

Далее, определим P_3-степени произвольной пары вершин $w_k, w_j \in V(G_i)$ в графе $G_{i+2} = G_i + K_1 * K_2$:

$$\begin{cases} P_3deg_{G_{i+2}}w_k = P_3deg_{G_i}w_k + {}_{(|G_i|-1)}C_2 + deg_{G_i}w_k + 1 \\ P_3deg_{G_{i+2}}w_j = P_3deg_{G_i}w_j + {}_{(|G_i|-1)}C_2 + deg_{G_i}w_j + 1 \end{cases}$$

$$P_3deg_{G_{i+2}}w_k - P_3deg_{G_{i+2}}w_j = P_3deg_{G_i}w_k - P_3deg_{G_i}w_j + deg_{G_i}w_k - deg_{G_i}w_j$$

$$\begin{cases} deg_{G_i}w_k > deg_{G_i}w_j \\ P_3deg_{G_i}w_k > P_3deg_{G_i}w_j \end{cases} \implies P_3deg_{G_{i+2}}w_k - P_3deg_{G_{i+2}}w_j > 0$$

Таким образом, утверждение Теоремы выполняется для графа G_{i+2}. ►

Бесконечные серии P_3-монстров можно задавать рекурсивно следующим образом:
Пусть граф $G_1(V, E)$ такой, что:

$$\begin{cases} \forall i, j : i < j \leq |G_1| \; P_3deg_{G_1}u_i \neq P_3deg_{G_1}u_j \\ \forall u \in V(G_1) \; deg_{G_1}u \leq |G_1| - 2 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_i) \; deg_{G_i}w_k > deg_{G_i}w_j \implies P_3deg_{G_i}w_k > P_3deg_{G_i}w_j \end{cases}$$

Тогда:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \,\vdots\, 2 \\ G_{i-1} * K_2, i \not\vdots\, 2, i \neq 1 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

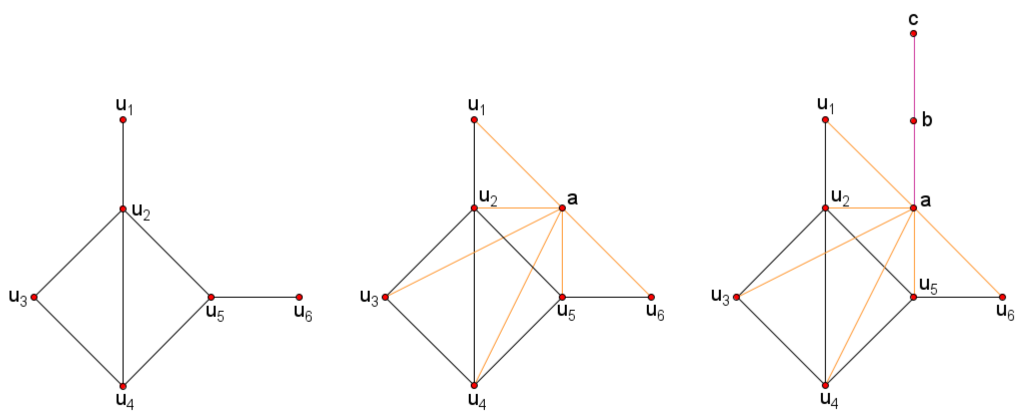
Пусть граф $G_1(V, E)$ такой, что:

$$\begin{cases} \forall i, j : i < j \leq |G_1| \; P_3deg_{G_1}u_i \neq P_3deg_{G_1}u_j \\ \exists! a \in V(G_1) \; deg_{G_1}a = |G_1| - 1 \\ \forall u \in V(G_1) \setminus \{a\} \; deg_{G_1 - a}u \geq 1 \\ \forall w_k, w_j \in V(G_1) \; deg_{G_1}w_k > deg_{G_1}w_j \implies P_3deg_{G_1}w_k > P_3deg_{G_1}w_j \end{cases}$$

Тогда:

$$G_i = \begin{cases} G_{i-1} + K_1, i \not\vdots\, 2, i \neq 1 \\ G_{i-1} * K_2, i \,\vdots\, 2 \\ G_1, i = 1 \end{cases}$$

Приведем пример бесконечной серии P_3-монстров:



Слева направо представлены графы $G_1, G_1 + K_1, (G_1 + K_1) * K_2$

16. Локальная искаженность K_3-монстров.

Теорема 13. *Каждый K_3-монстр является локально искаженным и, следовательно, супермонстром.*

Доказательство.
◀ Предположим, что существует K_3-монстр, не являющийся локально искаженным, то есть:

$$\exists G(V,E) : \begin{cases} \forall i,j : i < j \leq |G| \; K_3 deg_G u_i \neq K_3 deg_G u_j \\ \exists \phi, \lambda \in V(G) : H(N_G \phi) \cong H(N_G \lambda) \end{cases}$$

Тогда рассмотрим пару вершин $\phi, \lambda \in V(G)$ таких, что:

$$H(N_G \phi) \cong H(N_G \lambda)$$

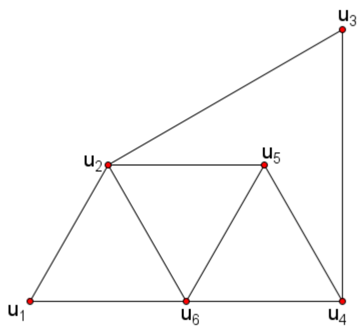
В таком случае, имеем:

$$H(N_G \phi) \cong H(N_G \lambda) \implies |E(H(N_G \phi))| = |E(H(N_G \lambda))| \implies K_3 deg_G \phi = K_3 deg_G \lambda$$

Таким образом, получено противоречие. Следовательно, каждый K_3-монстр является локально искаженным и, следовательно, супермонстром. ▶

Утверждение 1. *Существует супермонстр, не являющийся K_3-монстром.*

В качестве примера приведем следующий граф:



Теперь рассмотрим вершины u_2 и u_5:

$$|E(N_G u_2)| = |E(N_G u_5)| = 2 \implies K_3 deg_G u_2 = K_3 deg_G u_5$$

Таким образом, данный граф не является K_3-монстром.

17. Тривиальность группы автоморфизмов графа-монстра.

Теорема 14. *Группа автоморфизмов любого монстра является тривиальной.*

Доказательство.
◀ Предположим, что существуют графы-монстры, группа автоморфизмов которых не является тривиальной, то есть:

$$\exists \, G(V,E) : \begin{cases} \forall j,k \in \mathbb{N} : j < k \leq |G| \; Hdeg_G u_j \neq Hdeg_G u_k \\ |Aut(G)| > 1 \end{cases} .$$

Пусть биективное отображение $f : V(G) \longrightarrow V(G')$ - нетривиальный автоморфизм графа G. При этом $f(G) = G'$. Рассмотрим пару вершин в графе G таких, что $u \sim v$, то есть:

$$f(u) = v$$

Без ограничения общности предположим, что:

$$Hdeg_G u > Hdeg_G v$$

Так как отображение f - нетривиальный автоморфизм графа G, имеет место соотношение:

$$f(u) = v \implies f(H_G u) = H_{G'} v$$

С другой стороны, имеем:

$$H_{G'} v = H_G v$$

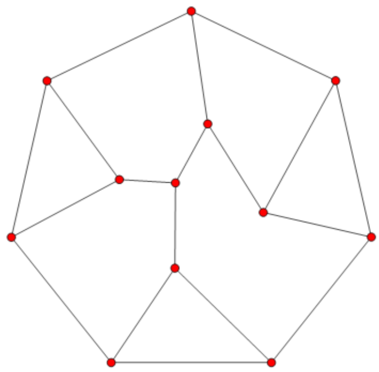
В таком случае, так как f является биективным отображением, выполняется:

$$\begin{cases} f(H_G u) = H_{G'} v \\ H_{G'} v = H_G v \end{cases} \implies f(H_G u) = H_G v \implies |H_G u| = |H_G v|$$

Иными словами, среди $H_G(u)$ подграфов графа G', которые отвечают содержащим u подграфам графа G, хотя бы один подграф не будет содержать вершину v. В таком случае отображение f не будет являться автоморфизмом графа G.

Таким образом, получено противоречие. Следовательно, группа автоморфизмов любого монстра является тривиальной. ►

Примером графа с только лишь тривиальной группой автоморфизмов, который не является монстром, служит граф Фрухта.



$$\begin{cases} \forall u \in V(G) deg_G u = 3 \implies \forall u \in V(G) P_3 deg_G u = 9 \\ |Aut(G)| = 1 \end{cases}$$

18. Примеры бесконечных K_n-, $K_{1,n-1}$-, C_n-монстров.

В данном пункте будем, если иное не прописано, подразумевать порядок определенным относительно вершины u_0.

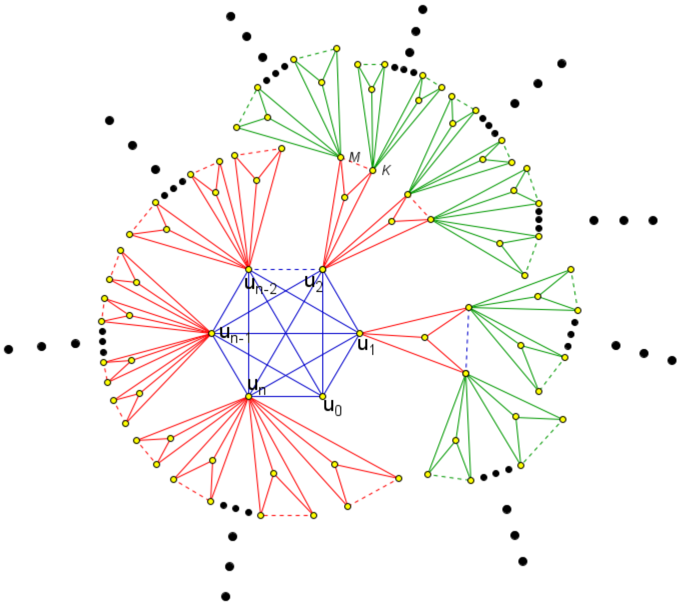
При исследовании данного пункта графом будем называть упорядоченную пару множеств V и E таких, что V - некоторое непустое не обязательно конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из E.

(a) K_n-монстр. Будем строить бесконечный граф $G^{\infty}_{K_n}$ следующим образом:

Рассмотрим граф K_n и будем добавлять к его вершинам такие же полные графы так, что надстраиваемые графы не имеют общих ребрер с графом, на вершине которого строится новый K_n. Пусть дополнительно на вершине u_1 надстраивается 1 граф, на вершине u_2 - 2 графа и так далее. При этом образуются новые вершины, имеющие K_n-степени, равные 1. На них аналогично надстраиваем полные графы порядка n, увеличивая их количество на 1. Так как надстраиваемые графы не пересекаются по ребрам, граф $G^{\infty}_{K_n}$ по определению будет являться K_n-монстром. При этом вершина u_0 имеет K_n-степень, равную 1.

Отметим, что число n - конечное.

Построенный граф выглядит следующим образом:



Таким образом, имеем:

$$\forall n \geq 4\ \exists G^{\infty}_{K_n} : \forall u, w \in V(G^{\infty}_{K_n})\ K_n deg_G u \neq K_n deg_G w$$

(b) $K_{1,n-1}$**-монстр.** Будем строить граф $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ следующим образом: рассмотрим граф $K_{1,n-1}$ и будем добавлять к его висячим вершинам ребра. Пусть дополнительно из вершины u_1 исходит $n-2$ ребра, из вершины u_2 - $n-1$ ребро и так далее. При этом образуеются новые висячие вершины в графе, к которым мы также добавляем ребра, увеличивая их количество на 1. При этом вершина u_0 имеет единичную $K_{1,n-1}$-степень.

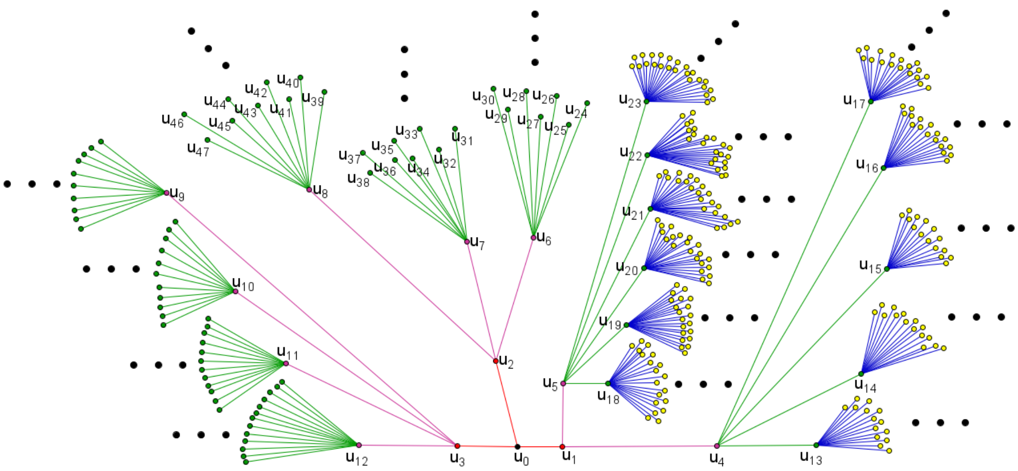
Отметим, что число n - конечное.

При исследовании графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ будем по умолчанию подразумевать порядок вершины определенным относительно вершины u_0.

В таком случае, имеем соотношение:

$$\forall u_j \in V(G^{\infty}_{K_{1,n-1}}) \setminus u_0\ deg_G u_j = j + (n-2)$$

Построенный граф при $n = 4$ выглядит следующим образом:



Теорема 15. *Граф* $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ *является* $K_{1,n-1}$*-монстром.*

Доказательство.
◄ Произведем доказательство по индукции. При этом для определения $K_{1,n-1}$-степеней вершин графа будем пользоваться формулой (6), полученной в пункте 20.

1. **База индукции.** Для всех вершин порядка меньшего 2 графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ их $K_{1,n-1}$-степени попарно различны, так как для каждой вершины порядка 1 с ростом номера возрастает ее степень и степени вершин

в ее окружении. При этом отметим, что:

$$K_{1,n-1}deg_G u_0 = 1 + \sum_{w \in N_G u_0} \binom{deg_G w - 1}{2} = 1 + \sum_{q \in N_G u_0 \setminus \{u_1\}} \binom{deg_G q - 1}{2} + \binom{deg_G u_1 - 1}{2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_1 = 1 + \sum_{r \in N_G u_1} \binom{deg_G r - 1}{2} = 1 + \sum_{y \in N_G u_1 \setminus \{u_0\}} \binom{deg_G y - 1}{2} + \binom{deg_G u_0 - 1}{2}$$

$$\begin{cases} deg_G u_0 = deg_G u_1 \\ \forall q \in N_G u_0 \setminus \{u_1\}\ \forall y \in N_G u_1 \setminus \{u_0\}\ deg_G y > deg_G q \end{cases} \implies K_{1,n-1}deg_G u_1 > K_{1,n-1}deg_G u_0$$

2. **Шаг индукции.** Пусть для всех вершин порядка меньшего k графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ их $K_{1,n-1}$-степени попарно различны. Докажем для вершин степени k.

Для всех вершин порядка k графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ их $K_{1,n-1}$-степени попарно различны, так как для каждой вершины порядка k с ростом номера возрастает ее степень и степени вершин в ее окружении.

Далее, рассмотрим в данном графе вершину u_t порядка k такую что:

$$\begin{cases} d(u_t, u_0) = k \\ d(u_{t-1}, u_0) = k - 1 \end{cases}$$

Иными словами, вершина u_t имеет минимальную степень среди всех вершин порядка k. Пусть A_k - число вершин в графе порядка k.

Тогда, так как номер t вершине u_t присваивается в зависимости от числа вершин порядка меньше или равного $k-1$ и построение графа начинается с вершины u_0, номер вершины определим следующим образом:

$$t = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} A_i$$

Тогда определим степерь вершины:

$$deg_G u_t = t + (n-2) = \sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 1$$

$$deg_G u_{t-1} = \sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 2$$

Рассмотрим множество вершин, смежных с u_t и имеющих порядок $k+1$. Будем присваивать данным вершинам нижний индекс $s \in [1, deg_G u_t - 1]$ по мере возрастания их степени.

$$\forall v_s \in N_G u_t : d(v_s, u_0) = k + 1\ deg_G v_s = (s-1) + \sum_{i=1}^{k} A_i + n - 1 = s - 2 + n + \sum_{i=1}^{k} A_i$$

Рассмотрим множество вершин, смежных с u_{t-1} и имеющих порядок k. Будем присваивать данным вершинам нижний индекс $p \in [1, deg_G u_{t-1} - 1]$ по мере возрастания их степени.

$$\forall v_p \in N_G u_{t-1} : d(v_p, u_0) = k\ deg_G v_p = \sum_{i=1}^{k} A_i + n - 2 - (p - (deg_G u_{t-1} - 1))$$

Далее, определим $K_{1,n-1}$-степень вершины u_t:

$$K_{1,n-1}deg_G u_t = \binom{deg_G u_t}{n-1} + \sum_{v_s \in N_G u_t : d(v_s, u_0) = k+1} \binom{deg_G v_s - 1}{n-2} + \binom{deg_G u_{t-A_{k-1}} - 1}{n-2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_t = \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 1}{n-1} + \sum_{s=1}^{deg_G u_t - 1} \binom{s - 2 + n + \sum_{i=1}^{k} A_i - 1}{n-2} + \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 1 - 1}{n-2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_t = \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 1}{n-1} + \sum_{s=1}^{deg_G u_t - 1} \binom{s + n + \sum_{i=1}^{k} A_i - 3}{n-2} + \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 2}{n-2}$$

Определим $K_{1,n-1}$-степень вершины u_{t-1}:

$$K_{1,n-1}deg_G u_{t-1} = \binom{deg_G u_{t-1}}{n-1} + \sum_{v_p \in N_G u_{t-1}: d(v_p, u_0) = k} \binom{deg_G v_p - 1}{n-2} + \binom{deg_G u_{t-1-A_{k-1}} - 1}{n-2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_{t-1} = +\binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 2}{n-1} + \sum_{p=1}^{deg_G u_{t-1}-1} \binom{\sum_{i=1}^{k} A_i + n - 2 - (p - (deg_G u_{t-1} - 1)) - 1}{n-2} + \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 2 - 1}{n-2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_{t-1} = \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 2}{n-1} + \sum_{p=1}^{deg_G u_{t-1}-1} \binom{\sum_{i=1}^{k} A_i + n - 2 - p - deg_G u_{t-1}}{n-2} + \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 3}{n-2}$$

$$K_{1,n-1}deg_G u_{t-1} = \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 2}{n-1} + \sum_{p=1}^{deg_G u_{t-1}-1} \binom{2\sum_{i=1}^{k-1} A_i + A_k + 2n - 4 - p}{n-2} + \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 3}{n-2}$$

Заметим при этом, что:

$$\begin{cases} \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 1}{n-1} > \binom{\sum_{i=1}^{k-1} A_i + n - 2}{n-1} \\ \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 2}{n-2} > \binom{\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 3}{n-2} \end{cases}$$

В таком случае имеем:

$$\begin{cases} max(deg_G v_p) = \sum_{i=1}^{k} A_i + n - 2 \\ min(deg_G v_s) = \sum_{i=1}^{k} A_i + n - 1 \end{cases}$$

$$min(deg_G v_s) > max(deg_G v_p) \implies K_{1,n-1}deg_G u_t > K_{1,n-1}deg_G u_{t-1} \blacktriangleright$$

Таким образом, имеем:

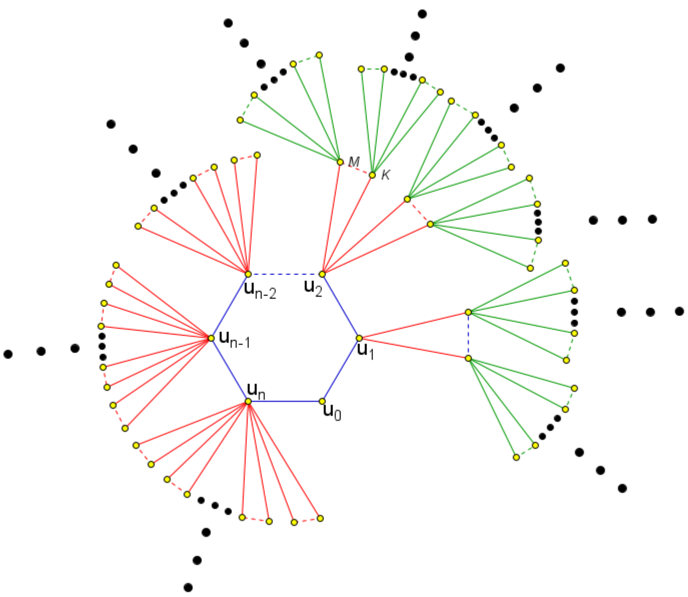
$$\forall n \geq 4 \; \exists G^{\infty}_{K_{1,n-1}} : \forall u, w \in V(G^{\infty}_{K_{1,n-1}}) \; K_{1,n-1}deg_G u \neq K_{1,n-1}deg_G w$$

(c) C_n-монстр. Будем строить бесконечный граф $G^{\infty}_{C_n}$ следующим образом:

Рассмотрим граф C_n и будем добавлять к его вершинам такие же циклы так, что надстраиваемые циклы не имеют общих ребрер с графом, на вершине которого строится новый C_n. Пусть дополнительно на вершине u_1 надстраивается 1 цикл, на вершине u_2 - 2 цикла и так далее. При этом образуются новые вершины, имеющие C_n-степени, равные 1. На них аналогично надстраиваем циклы, увеличивая их количество на 1. Так как надстраиваемые циклы не пересекаются по ребрам, граф $G^{\infty}_{C_n}$ по определению будет являться C_n-монстром. При этом вершина u_0 имеет C_n-степень, равную 1.

Отметим, что число n - конечное.

Построенный граф выглядит следующим образом:



Таким образом, имеем:

$$\forall n \geq 4\ \exists G^{\infty}_{C_n} : \forall u, w \in V(G^{\infty}_{C_n})\ C_n deg_G u \neq C_n deg_G w$$

19. Определение P_n-степеней вершин графа-дерева в зависимости от K_2-степеней его вершин.

При исследовании порядок вершины в графе будем указывать нижним индексом.

$$\alpha_i(u) \implies d(\alpha, u) = i.$$

По умолчанию под α_i будем подразумевать $\alpha_i(u)$. Рассмотрим произвольный граф-дерево и произвольную вершину $u \in V(G)$.

Определим P_n-степень произвольной вершины u графа-дерева в зависимости от K_2-степеней вершин графа.

1. **Число P_n-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_n} u = 1$.**

   Рассмотрим множество вершин порядка $n-2$. Число способов построить P_n-цепь, содержащую описанным образом вершину u и α_{n-2}, равно $deg_G \alpha_{n-2} - 1$, так как при прохождении по единственной P_{n-1}-цепи, соединяющей вершины α_{n-2} и u, нельзя пройти по уже пройденному ребру. Иными словами, продолжить P_{n-1}-цепь, соединяющую вершины α_{n-2} и u, равно числу соседей вершины α_{n-2} за неимением вершины, содержащейся в P_{n-1}-цепи и смежной с вершиной α_{n-2}. В таком случае, искомая степень вершины u вычисляется следующим образом:

$$_1P_n deg_G u = \sum_{\beta_1 \in N_G u} \ \sum_{\beta_2 \in N_G \beta_1 \setminus \{u\}} \ \sum_{\beta_3 \in N_G \beta_2 \setminus \{\beta_1\}} \dots \sum_{\beta_{n-2} \in N_G \beta_{n-3} \setminus \{\beta_{n-4}\}} (deg_G \beta_{n-2} - 1)$$

$$_1P_n deg_G u = \sum_{\alpha_{n-2}} (deg_G \alpha_{n-2} - 1)$$

2. **Число P_n-цепей, содержащих вершину u таким образом, что $deg_{P_n} u = 2$.**

   (a) Число данных P_n-цепей, содержащих вершину u, при $n \not\vdots 2$.

   В первую очередь посчитаем число описанных P_n-цепей таких, что:

$$\exists v, w \in V(G) : d(v, u) = d(w, u) = \frac{n-1}{2}$$

$$^1_2P_n deg_G u = \binom{_1P_{\frac{n-1}{2}} deg_G u}{2}$$

   Отметим при этом, что $d(v, w) = n - 1$, и тогда простая цепь, соединяющая данные вершины, имеет порядок n.

Вычислим число описанных P_n-цепей в случае:

$$\nexists v, w \in V(G) : d(v,u) = d(w,u) = \frac{n-1}{2}$$

Для того, чтобы построить P_n-цепь, в которой число вершин в простой цепи, соединяющей вершины u и ближайшую висячую вершину P_n-цепи равно i, необходимо построить цепи порядков i и $n-i-1$, в которых степень вершины u равна 1 (вершина u является висячей в каждой из таких цепей). Число способов построить такие цепи составляет:

$$\sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} {}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u$$

Однако, для каждого значения i конструируемые цепи могут содержать общие ребра. Чтобы этого избежать, необходимо вычесть из всеобщего количества построенных цепей число таких цепей с общими ребрами, равное:

$$\sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\alpha_{n-i-1}} (deg_G \alpha_{n-i-1} - 1) = \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} {}_1P_{n-i+1} deg_G u$$

Таким образом, искомое число P_n-цепей вычисляется следующим образом:

$$\nexists v, w \in V(G) : d(v,v) = d(w,v) = \frac{n-1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$${}_2^2P_n deg_G u = \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} ({}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u - P_{n-i+1} deg_G u)$$

Таким образом, Число описанных P_n-цепей, содержащих вершину u, при $n \not\vdots 2$, вычисляется следующим образом:

$$n \not\vdots 2 \implies {}_2P_n deg_G u = \binom{{}^1P_{\frac{n-1}{2}} deg_G u}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} ({}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u \ - P_{n-i+1} deg_G u))$$

(b) Число описанных P_n-цепей, содержащих вершину u, при $n \vdots 2$. Аналогично (a), искомое число P_n-цепей вычисляется следующим образом:

$${}_2P_n deg_G u = \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} ({}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u \ - P_{n-i+1} deg_G u)$$

Таким образом, P_n-степень произвольной вершины u графа-дерева в зависимости от K_2-степеней вершин графа определяется следующим образом:

$$n \vdots 2 \implies P_n deg_G u = {}_1P_n deg_G u + \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} ({}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u \ - {}_1P_{n-i+1} deg_G u)$$

$$n \not\vdots 2 \implies P_n deg_G u = {}_1P_n deg_G u + \binom{{}^1P_{\frac{n-1}{2}} deg_G u}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} ({}_1P_i deg_G u \cdot {}_1P_{n-i-1} deg_G u \ - {}_1P_{n-i+1} deg_G u)$$

20. Определение $K_{1,t-1}deg_G u$ в зависимости от K_2-степеней вершин графа.

При решении данного пункта обозначим через $H(V', E')$ необязательно порожденный подграф графа G.

Определим число подграфов, изоморфных $K_{1,t-1}$ и содержащих вершину u таким образом, что $deg_{K_{1,t-1}} u = t-1$.

Лемма 3. *При условии, что $deg_{K_{1,t-1}} u = t-1$, выполняется соотношение:*

$$_2K_{1,t-1}deg_G u = {}_{deg_G u}C_{(t-1)}$$

Доказательство.

$$◀\ \exists! H(V', E') \cong K_{1,deg_G u} : V'(H) = N_G u \cup \{u\}$$

Рассмотрев множество всех подграфов графа $H(V', E')$, изоморфных $K_{1,t-1}$, получаем:

$$|K_{1,t-1_{H(N_G u)\cup\{u\})}}| = {}_2K_{1,t-1}deg_G u = {}_{deg_G u}C_{(t-1)}\ ▶$$

Определим число подграфов, изоморфных $K_{1,n-1}$ и содержащих вершину u таким образом, что $deg_{K_{1,n-1}} u = 1$.

Лемма 4. *При условии, что $deg_{K_{1,t-1}} u = 1$, выполняется соотношение:*

$$_1K_{1,t-1}deg_G u = \sum_{w \in N_G u} {}_{(deg_G w-1)}C_{(t-2)}$$

Доказательство.
◀ Рассмотрим граф G, произвольную вершину $u \in V(G)$ и некоторую вершину w, смежную с u.

Обозначим $K_{1,t-2_{N_G w\setminus\{u\}}}$ как множество подграфов, изоморфных $K_{1,t-2}$, не содержащих вершину u и содержащих вершину w таким образом, что $deg_{K_{1,t-2}} u = t-2$.

По Лемме 3, имеем:

$$\forall w \in N_G u\ |K_{1,t-2_{N_G w\setminus\{u\}}}| = {}_{(deg_G w-1)}C_{(t-2)}$$

При этом заметим, что:

$$\forall H_i \in K_{1,t-2_{N_G w\setminus\{u\}}}\ \exists! H(V', E') \cong K_{1,t-1} : V'(H) = V(H_i) \cup \{u\}$$

$$\Downarrow$$

$$_1K_{1,t-1}deg_G u = \sum_{w \in N_G u} |K_{1,t-2_{N_G w\setminus\{u\}}}| = \sum_{w \in N_G u} {}_{(deg_G w-1)}C_{(t-2)}\ ▶$$

Таким образом, $K_{1,t-1}deg_G u$ в зависимости от K_2-степеней вершин графа определяется следующим образом:

$$K_{1,t-1}deg_G u = {}_1K_{1,t-1}deg_G u + {}_2K_{1,t-1}deg_G u = \sum_{w \in N_G u} {}_{(deg_G w-1)}C_{(t-2)} + {}_{deg_G u}C_{(t-1)}$$

$$K_{1,t-1}deg_G u = \sum_{w \in N_G u} {}_{(deg_G w-1)}C_{(t-2)} + {}_{deg_G u}C_{(t-1)}\ (6)$$

21. Счетные свойства рассматриваемых бесконечных графов.

В данном пункте будем, если иное не прописано, подразумевать порядок ребра определенным относительно вершины u_0.

Лемма 5. *Бесконечное подмножество счетного множества счетно [4].*

Лемма 6. *Объединение множеств конечной или счетной системы счетных множеств есть множество счетное [4].*

1. **Счетность и локальная счетность графа $G^{\infty}_{K_n}$.**

   Существует биективное отображение такое, что:

   $$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow V(G^{\infty}_{K_n}), f(i) = K_n deg_G u_i$$

   Таким образом, мощность множества вершин графа равна счетной мощности натурального ряда. В таком случае, можем утверждать, что:
   $$|V(G^{\infty}_{K_n})| = \aleph_0$$
   При этом, так как степень каждой вершины графа - конечное число, граф $G^{\infty}_{K_n}$ является локально счетным и, следовательно, по Лемме 6 получаем, что множество ребер счетное. В таком случае:

   $$|E(G^{\infty}_{K_n})| = \aleph_0$$

   Таким образом, имеем:

   $$\begin{cases} |V(G^{\infty}_{K_n})| = \aleph_0 \\ |E(G^{\infty}_{K_n})| = \aleph_0 \end{cases} \implies |V(G^{\infty}_{K_n}) \cup E(G^{\infty}_{K_n})| = \aleph_0$$

   Значит, граф $G^{\infty}_{K_n}$ является счетным.

2. **Счетность и локальная счетность графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$.**

   Существует биективное отображение такое, что:

   $$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow V(G^{\infty}_{K_{1,n-1}}), f(i) = K_{1,n-1} deg_G u_i$$

   Далее, пусть β_j - вершина, инцидентная ребру e_j и имеющая порядок, равный j. При этом существует биективное отображение такое, что:

   $$\exists g : \mathbb{N} \longrightarrow E(G^{\infty}_{K_{1,n-1}}), g(j) = K_{1,n-1} deg_G \beta_j, \beta_j \in V(e_j), \mathcal{P}(e_j) = \mathcal{P}(\beta_j) = j$$

   Таким образом, мощность множества вершин графа, а также мощность мнножества ребер равны счетной мощности натурального ряда. В таком случае:

   $$\begin{cases} |V(G^{\infty}_{K_{1,n-1}})| = \aleph_0 \\ |E(G^{\infty}_{K_{1,n-1}})| = \aleph_0 \end{cases} \implies |V(G^{\infty}_{K_{1,n-1}}) \cup E(G^{\infty}_{K_{1,n-1}})| = \aleph_0$$

   Значит, граф $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ является счетным. При этом, так как степень каждой вершины графа - конечное число, граф $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ является локально счетным.

3. **Счетность и локальная счетность графа $G^{\infty}_{C_n}$.**

   Существует биективное отображение такое, что:

   $$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow V(G^{\infty}_{C_n}), f(i) = C_n deg_G u_i$$

   Таким образом, мощность множества вершин графа равна счетной мощности натурального ряда. В таком случае:
   $$|V(G^{\infty}_{C_n})| = \aleph_0$$
   При этом, так как степень каждой вершины графа - конечное число, граф $G^{\infty}_{C_n}$ является локально счетным и, следовательно, по Лемме 6 получаем, что множество ребер счетное. В таком случае:

   $$|E(G^{\infty}_{C_n})| = \aleph_0$$

   Таким образом, имеем:

   $$\begin{cases} |V(G^{\infty}_{C_n})| = \aleph_0 \\ |E(G^{\infty}_{C_n})| = \aleph_0 \end{cases} \implies |V(G^{\infty}_{C_n}) \cup E(G^{\infty}_{C_n})| = \aleph_0$$

   Значит, граф $G^{\infty}_{C_n}$ является счетным.

4. **Счетность и локальная счетность графа T^{∞}.**

   Граф треугольной решетки T^{∞} изоморфен треугольной решетке, формируемой целыми Эйзенштейна на комплексной плоскости. Следовательно, $|V(T^{\infty})| = \aleph_0$. Более того, так как каждая вершина смежна ровно с 6 вершинами, граф является локально счетным. Аналогично, свойства счетности и локальной счетности сохраняются для графа G_n, задаваемого рекуррентной формулой $(**)$.

22.Число вершин порядка k графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ относительно вершины u_0.

Все условные обозначения и термины, используемые в данном пункте, введены при исследовании пункта 11. Рассмотрим множество вершин порядка $k-1$ и, в частности, вершину u_t порядка $k-1$ такую что:

$$\begin{cases} d(u_t, u_0) = k-1 \\ d(u_{t-1}, u_0) = k-2 \end{cases}$$

Исходя из пункта 11, имеем:

$$deg_G u_t = t + (n-2) = \sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 1$$

Далее, определим число A_k в зависимости от числа A_{k-1} вершин порядка $k-1$:

$$A_k = \sum_{j=0}^{A_{k-1}-1} (\sum_{i=1}^{k-2} A_i + n - 2 + j)$$

Таким образом, число вершин порядка k графа $G^{\infty}_{K_{1,n-1}}$ относительно вершины u_0 можно определить рекурсивно следующим образом:

$$A_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{A_{k-1}-1} (\sum\limits_{i=1}^{k-2} A_i + n - 2 + j), k > 1 \\ n-1, k = 1 \end{cases}$$

23. Дополнительные оценки на суммы H-степеней вершин графа.

В соответствии с неравенством Канторовича [6], имеем:

$$(\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i}{x_i}) \le \frac{(m+M)^2}{4mM} (\sum_{i=1}^{n} \rho_i)^2 \ \forall i \in [1,n], \forall \rho_i \in \mathbb{R}^+_0, 0 < m \le x_i \le M$$

1. При $x_i = Hdeg_G u_i$ имеем:

$$(\sum_{i=1}^{|G|} \rho_i Hdeg_G u_i)(\sum_{i=1}^{|G|} \frac{\rho_i}{Hdeg_G u_i}) \le \frac{(\delta_H(G) + \Delta_H(G))^2}{4\delta_H(G)\Delta_H(G)} (\sum_{i=1}^{|G|} \rho_i)^2$$

2. При $\rho_i = (Hdeg_G u_i)^{k-1}, k \ge 1$ имеем:

$$(\sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^k)(\sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^{k-2}) \le \frac{(\delta_H(G) + \Delta_H(G))^2}{4\delta_H(G)\Delta_H(G)} (\sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^{k-1})^2$$

   В частности, при $k = 2$ получаем оценку на сумму квадратов H-степеней вершин графа:

$$\sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^2 \le \frac{(\delta_H(G) + \Delta_H(G))^2}{4\delta_H(G) \cdot \Delta_H(G) \cdot |G|} (\sum_{i=1}^{|G|} Hdeg_G u_i)$$

3. Рассмотрим частный случай неравенства Канторовича при $\rho_i = 1$ – неравенство Швейцера:

$$|G| \sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{|G|} Hdeg_G u_i)^2 \le [|G| \frac{(\delta_H(G) + \Delta_H(G))^2}{4\delta_H(G) \cdot \Delta_H(G)} \overline{H}_{harmon}]^2$$

$$\sum_{i=1}^{|G|} (Hdeg_G u_i)^2 \le |G| [\frac{(\delta_H(G) + \Delta_H(G))^2}{4\delta_H(G) \cdot \Delta_H(G)} \overline{H}_{harmon}]^2$$

Основные результаты:

При исследовании данной задачи получены следующие основные результаты:

1. Доказаны алгебраические тождества о суммах H-степеней вершин графа, а также рассмотрены различные следствия из них.

2. Приведен ряд рекурсивных алгоритмов построения бесконечных серий локально искаженных, P_3-стабильных, K_3-стабильных графов, а также P_3-монстров; примеры для каждого вида графов.

3. Доказано, что группы автоморфизмов локально искаженного графа и графа-монстра являются тривиальными, однако обратное в общем случае не верно. Приведены контрпримеры для обратного утверждения.

4. Доказано, что порядок K_2-стабильного степени d локально искажённого графа не превосходит $N_d(G) - N_{d-1}(G) - 1$.

5. Определены P_3-степены, K_n-степены, $K_{1,n-1}$-степены вершин произвольного графа, а также P_n-степени вершин графа-дерева. Охарактеризованы P_3-стабильные и K_3-стабильные графы степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин.

6. Доказано, что K_2-монстров не существует и каждый K_3-монстр является локально искаженным. Приведен пример супермонстра, не являющегося K_3-монстром.

7. Рассмотрены примеры бесконечных графов, являющихся K_n-монстрами, $K_{1,n-1}$-монстрами, C_n-монстрами, а также их счетные свойста и число вершин порядка k бесконечного $K_{1,n-1}$-монстра относительно вершины u_0.

8. Рассмотрены дополнительные оценки на суммы H-степеней вершин графа.

Заключение:

В нашем исследовании мы доказали ряд тождеств об H-степенях вершин графа, а также, что: группы автоморфизмов локально искаженного графа и графа-монстра являются тривиальными, однако обратное в общем случае не верно; что порядок K_2-стабильного степени d локально искажённого графа не превосходит $N_d(G) - N_{d-1}(G) - 1$; что K_2-монстров не существует; что каждый K_3-монстр является супермонстром, однако обратное неверно; что группа автоморфизмов любого монстра является тривиальной, однако обратное неверно. Мы привели рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серии локально искаженных графов, P_3-стабильных и K_3-стабильных графов, а также бесконечные серии P_3-монстров и примеры серий для каждого вида графов; P_3-степены, K_n-степены, $K_{1,n-1}$-степены вершин произвольного графа, а также P_n-степени вершин графа-дерева. Охарактеризованы P_3-стабильные и K_3-стабильные графы степени $k \geq 1$ в терминах K_2-степеней их вершин. Также были рассмотрены примеры бесконечных графов, являющихся K_n-монстрами, $K_{1,n-1}$-монстрами, C_n-монстрами, а также их счетные свойста и число вершин порядка k бесконечного $K_{1,n-1}$-монстра относительно вершины u_0. Приведены дополнительные оценки на суммы H-степеней вершин графа.

Библиографический список.

[1] Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями. Изд. 7-е. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 240 с.

[2] Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А.Зыков. – М.: Наука, 1987. – 384 с.

[3] Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Ленанд, 2018. – 304 с.

[4] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019.

[5] Nash-Williams C St. J. A. Infinite graphs — a survey, J. Combinatorial Theory, 3 A967, 286—301.

[6] Watson, G. S., Alpargu, G., Styan, G. P. H. (1997). Some comments on six inequalities associated with the inefficiency of ordinary least squares with one regressor. Linear Algebra and Its Applications, 264, 13–53.

[7] Hui-Hua Wu, Shanhe Wu. Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality // Octogon mathematical magazine. — 2009. — Vol. 17, iss. 1.

[8] CORNEIL, D. G, AND GOTLIEB, C C. An efficient algomthm for graph isomorphism J. ACM 17, 1 (Jan 1970), 51-64.

[9] Kuramochi, Michihiro; Karypis, George (2001), "Frequent subgraph discovery 1st IEEE International Conference on Data Mining, p. 313.

[10] Pržulj, N.; Corneil, D. G.; Jurisica, I. (2006), "Efficient estimation of graphlet frequency distributions in protein–protein interaction networks Bioinformatics, 22 (8): 974–980

[11] Snijders, T. A. B.; Pattison, P. E.; Robins, G.; Handcock, M. S. (2006), "New specifications for exponential random graph models Sociological Methodology, 36 (1): 99–153.

[12] Ohlrich, Miles; Ebeling, Carl; Ginting, Eka; Sather, Lisa (1993), "SubGemini: identifying subcircuits using a fast subgraph isomorphism algorithm Proceedings of the 30th international Design Automation Conference, pp. 31–37.

[13] Gallagher, B.: Matching structure and semantics: A survey on graph-based pattern matching. In: AAAI FS-06-02, pp 45–53 (2006).