Лицей БНТУ
220012, г. Минск, ул. Кедышко, 4, 8(017) 280-03-05, email: liceum_bntu@tut.by

Нечто средненькое

Секция:
«Математика»

Автор:
Наркевич Григорий Эдуардович,
лицей БНТУ, 10 «А» класс,
ул. Жудро, д. 21, кв. 25.
+375-29-614-38-93

Научный руководитель:
Очеретняя Ольга Павловна,
лицей БНТУ,
учитель математики,
+375-29-620-82-58

Минск, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Цель работы:

Исследование заданных функциональных неравенств вида

$$L_{\lambda,h}(x,y) \vee H_{\lambda,p}(x,y)$$

где

$$H_{\lambda,p}(x,y) = \begin{cases} \left((1-\lambda)x^p + \lambda y^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \neq 0 \\ x^{1-\lambda}y^{\lambda}, p = 0 \end{cases}$$

$$L_{\lambda,h}(x,y) = h(1-\lambda)x + h(\lambda)y$$

для заданной функции $h(\lambda)$ с целью нахождения границ их выполнимости при данных значениях параметров, а также поиск такой функции h: (0; 1) → [0; +∞), ограничивающей границы выполнимости исследуемых неравенств для определенных значений параметра p, зависящего от искомой функции.

Задачи работы:

1.
   (a) Доказать, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0, 1) верно неравенство
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)$$
   (b) Найти наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верны неравенства
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$$
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{4},p}(x,y)$$
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{3}{4},p}(x,y)$$
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$$
   $$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{1-\lambda,p}(x,y)$$
2. Для заданного значения p_0 предложить способ нахождения функции h: (0; 1) → [0; +∞), чтобы для любого λ ∈ (0; 1), любых положительных x и y и для всех $p \leq p_0$ неравенство, приведенное ниже, было верным, но при $p > p_0$ становилось неверным.

(a) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$

(b) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$

3. Определить, существует ли такая функция h: (0; 1) → [0; +∞) и такие p_1 и p_2, что для любого λ ∈ (0; 1) и положительных x и y выполняется неравенство
   (a) $H_{\frac{1}{2},p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p_2}(x,y)$
   (b) $H_{\lambda,p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p_2}(x,y)$

Актуальность работы:

Исследование целевых функций, ограниченных определенным набором лимитирующих неравенств и параметров со своими диапазонами значений, на предмет нахождения экстремумов является целью задач оптимизации и математического программирования, которые находят свои приложения в экономике, логистике, области финансов, где требуется определение наивыгодных исходов среди всех возможных. В свою очередь, задачами минимизации и максимизации выпуклых функций занимается выпуклое программирование, которое применяется в целом ряде дисциплин, таких как автоматические системы управления, оценка и обработка сигналов, коммуникации и сети, схемотехника, анализ данных и моделирование, финансы, статистика и структурная оптимизация. Таким образом, результаты исследований, представленные в данной работе, могут найти свое приложение в этих отраслях.

Основная часть.

Постановка задачи:

Введем обозначения:

$$H_{\lambda,p}(x,y) = \begin{cases} (1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}}, p \neq 0 \\ x^{1-\lambda}y^{\lambda}, p = 0 \end{cases}$$

$$L_{\lambda,h}(x,y) = h(1-\lambda)x + h(\lambda)y$$

1. Пусть $h(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda}}$.

(a) Докажите, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0, 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)$$

(b) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$$

(c) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{4},p}(x,y)$$

(d) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{3}{4},p}(x,y)$$

(e) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$$

(f) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство
$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{1-\lambda,p}(x,y)$$

2. Для заданного значения p0 предложите способ нахождения функции h: (0; 1) → [0; +∞), чтобы для любого λ ∈ (0; 1), любых положительных x и y и для всех $p \leq p_0$ неравенство, приведенное ниже, было верным, но при $p > p_0$ становилось неверным.

(a) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$

(b) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$

3. Существует ли такая функция h: (0; 1) → [0; +∞) и такие p_1 и p_2, что для любого λ ∈ (0; 1) и положительных x и y выполняется неравенство

(a) $H_{\frac{1}{2},p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p_2}(x,y)$

(b) $H_{\lambda,p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p_2}(x,y)$

<u>Решение.</u>

<u>Пункт 1</u>. Пусть $\boldsymbol{h(\lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda}}$.

(a) Докажите, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0, 1) верно неравенство

$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)\ (1)$$

Лемма 1. $\boldsymbol{L_{\lambda,h}(x,y) \geq \sqrt{xy}}$

Докажем эту лемму.

$$L_{\lambda,h}(x,y) = h(1-\lambda)x + h(\lambda)y = \frac{x}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{y}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}\ (2)$$

Применим для положительных чисел $\frac{x}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ и $\frac{y}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}$ неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{y}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}} \geq 2\sqrt{\frac{x\sqrt{1-\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\frac{y\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda}}} \Leftrightarrow \frac{x}{2}\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{y}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}} \geq \sqrt{xy}$$

Лемма 1 доказана.

Ввиду Леммы 1 достаточно доказать, что

$$H_{\frac{1}{2},-1}(x,y) \leq \sqrt{xy}$$

$$H_{\frac{1}{2},-1}(x,y) = \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{x^{-1}+y^{-1}} = \frac{2xy}{x+y}$$

Преобразуем доказываемое неравенство

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}\ (3)$$

Так как обе части неравенства (3) положительны в силу положительности x и y, можем преобразовать данное неравенство:

$$\forall\, x > 0\ \forall\, y > 0\ \ \frac{2xy}{x+y} > 0,\ \ \sqrt{xy} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$2xy \leq (x+y)\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq (x+y)\ \ (4)$$

Неравенство (4) представляет собой неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим для положительный чисел x и y. Значит, неравенство (1) верно $\forall\, x > 0, y > 0, \lambda \in (0,1)$

Примечание 1. Так как подпункты (b)-(d) являются частными случаями подпункта (e), в первую очередь решим данный подпункт.

(e) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого $\lambda \in (0; 1)$ верно неравенство

$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y) \quad (5)$$

В соответствии с Леммой 1 преобразуем неравенство (5), предполагая, что $p_{max} \neq 0$:

$$((1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{xy}$$

В зависимости от значения p можно записать следующее неравенство

$$((1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}} \cup (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y$$

Далее рассмотрим функцию $v(x) = (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y$.

Лемма 2. **Функция $\boldsymbol{v(p) = (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y}$ монотонно возрастающая $\forall p \neq 0$.**

Докажем эту лемму.

Вычислим первую производную функции $v(p)$**:**

$$v'(p) = \left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y\right)' =$$

$$= x(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}\ln(1-\lambda) + y\lambda^{\frac{1}{p}}\ln\lambda > 0 \ \forall x,y,\lambda : x > 0, \ y > 0, \lambda \in (0,1)$$

Из строгой положительности производной функции $v'(p)$ следует, что функция $v(p)$ строго возрастает для всех значений p. Лемма 2 доказана.

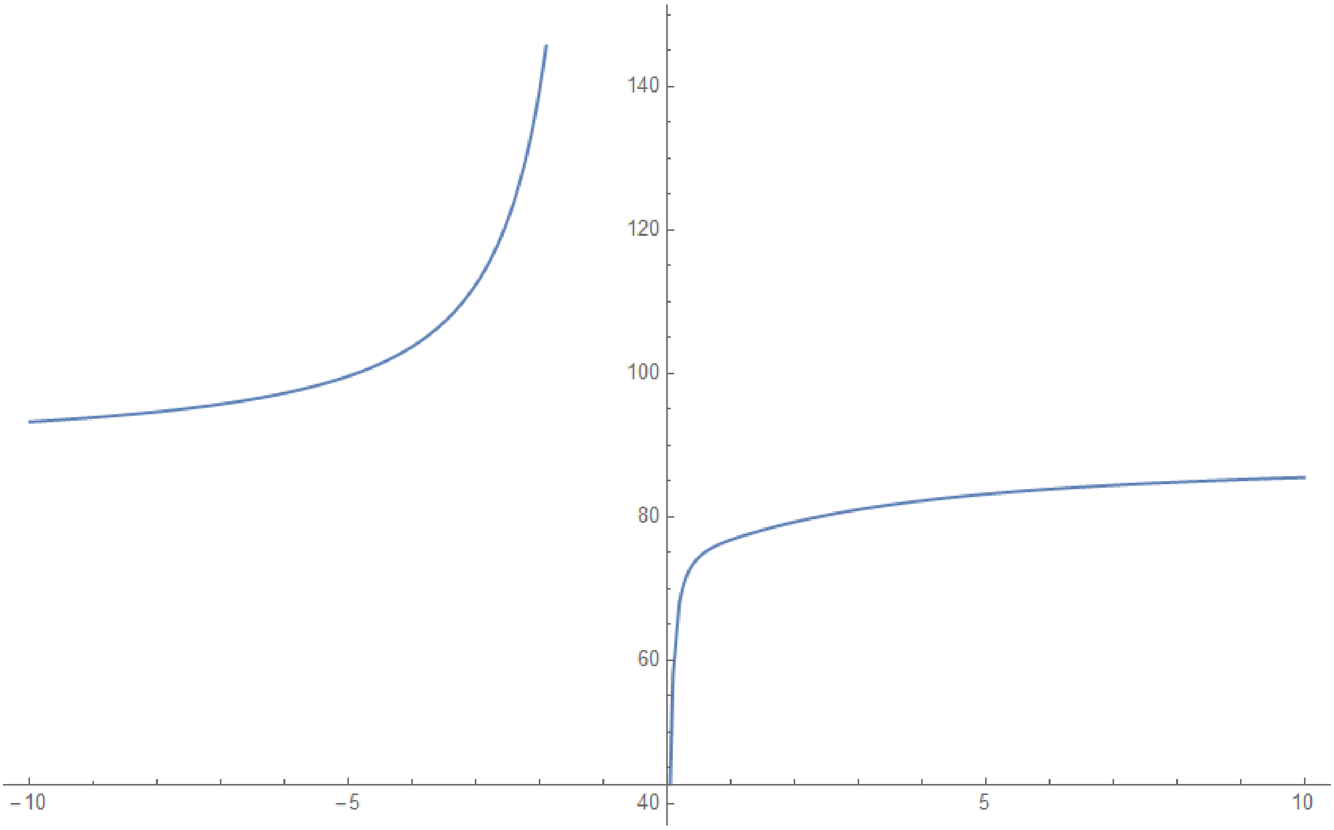

График функции $v(p) = (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y$ *при* $x = 78.8, y = 10, \lambda = 0.028$

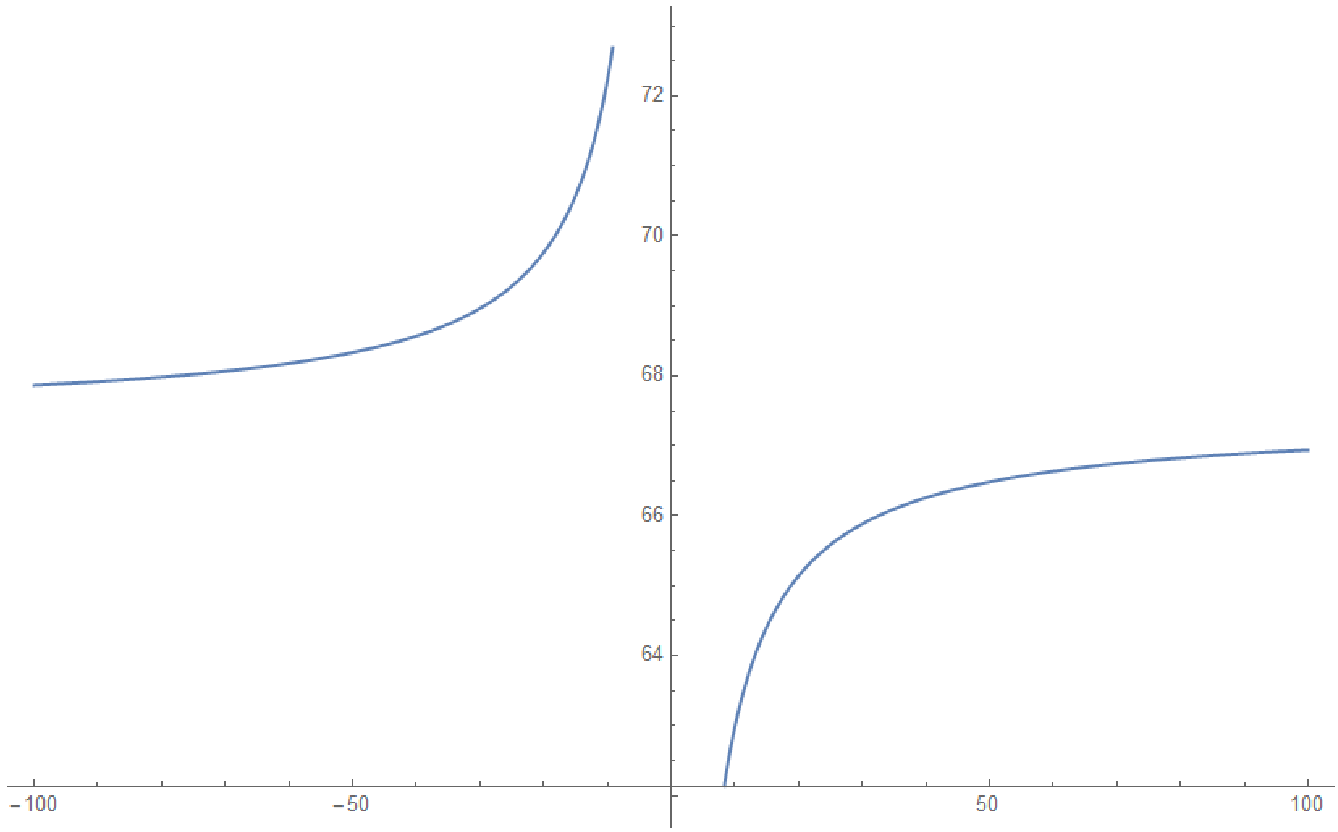

График функции $v(p) = (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y$ *при* $x = 26.9,\ y = 40.5,\ \lambda = 0.678$

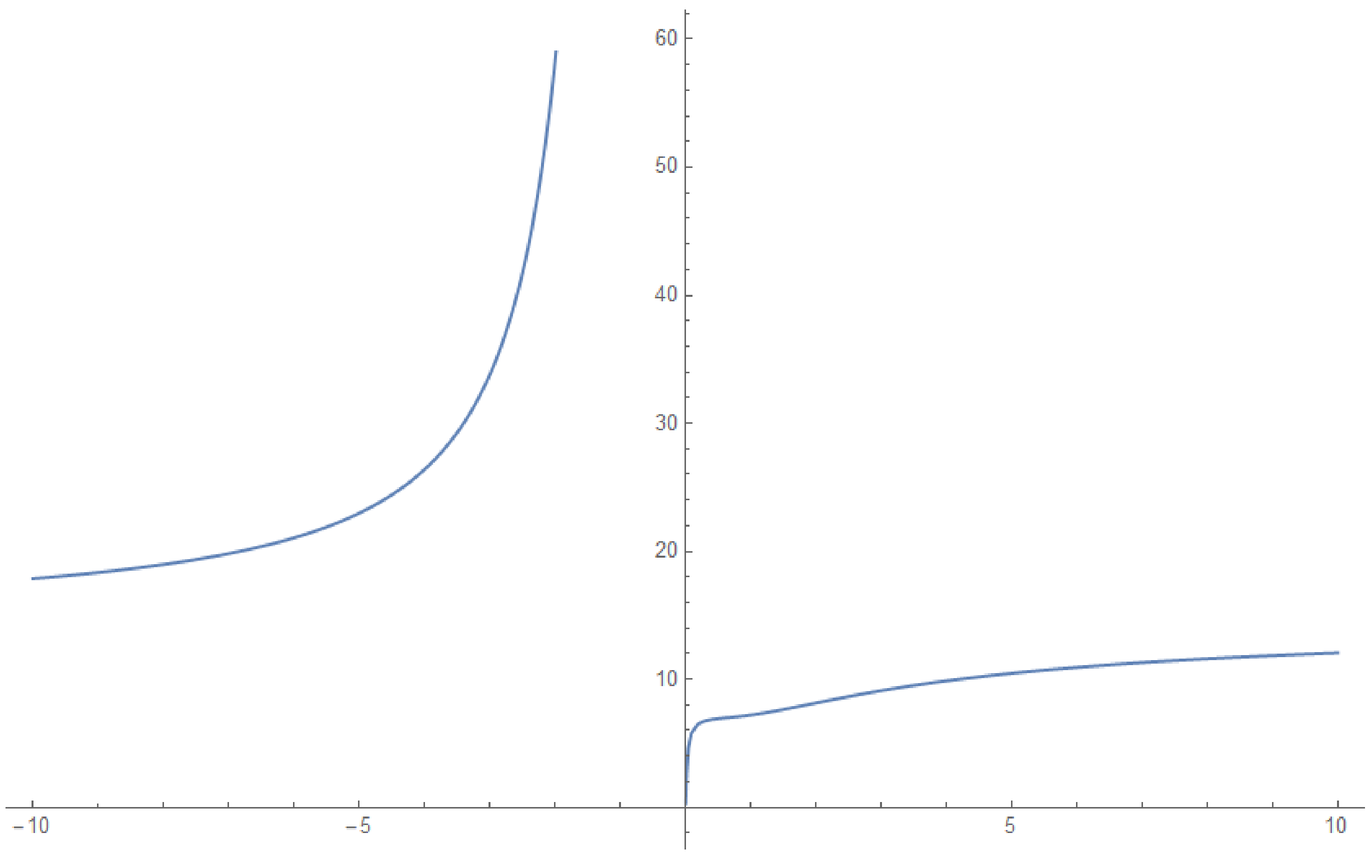

График функции $v(p) = (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y$ *при* $x = 7.2,\ y = 7.2,\ \lambda = 0.98$

Предположим, что $p_{max} > 0$. Тогда имеем:

$$p > 0,\ ((1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}} \geq (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y.$$ В свою очередь

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y \leq \left((1-\lambda)x^p + \lambda y^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{xy}$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y \leq \sqrt{xy}$$

В соответствии с Леммой 2 выполняется равенство

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y = \sqrt{xy}$$

В соответствии с неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим имеем:

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y \leq \frac{x+y}{2}$$

Ввиду Леммы 2 выполняется равенство

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y = \frac{x+y}{2}$$

Имеем $(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}x + \lambda^{\frac{1}{p}}y = \sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$. Равенство $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ выполняется только при $x = y$, значит

$$x\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} + \lambda^{\frac{1}{p}}\right) = x$$

Так как $x \neq 0$, получаем

$$\boldsymbol{(1-\lambda)^{\frac{1}{p}} + \lambda^{\frac{1}{p}} = 1}$$

Далее рассмотрим два случая:

1) $\boldsymbol{p > 1}$**.** Тогда выполняется система

$$\begin{cases} \sqrt[p]{1-\lambda} > 1-\lambda \\ \sqrt[p]{\lambda} > \lambda \end{cases}$$

Тогда

$$\sqrt[p]{1-\lambda} + \sqrt[p]{\lambda} > 1$$

Противоречие.

2) $\boldsymbol{p = 1}$**.** Тогда

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{p}} + \lambda^{\frac{1}{p}} = 1 - \lambda + \lambda = 1$$

Таким образом, наибольшее значение $\boldsymbol{p = 1}$**.**

Ответ: наибольшее значение $\boldsymbol{p = 1}$.

(f) Найдите наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство

$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{1-\lambda,p}(x,y)$$

В соответствии с Леммой 1 преобразуем предыдущее неравенство:

$$(\lambda x^p + (1-\lambda)y^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{xy}$$

Так как x и y – произвольные положительные числа, то в соответствии с Леммой 2 функция функция $V(x) = \lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y$ монотонно возрастающая $\forall p \neq 0$.

Снова предположим, что $p_{max} > 0$. Тогда

$p > 0$, $(\lambda x^p + (1-\lambda)y^p)^{\frac{1}{p}} \geq \lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y$. Тогда имеем

$$\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y \leq (\lambda x^p + (1-\lambda)y^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{xy}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y \leq \sqrt{xy}$$

В соответствии с Леммой 2 выполняется равенство

$$\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y = \sqrt{xy}$$

В соответствии с неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим имеем:

$$\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y \leq \frac{x+y}{2}$$

Ввиду Леммы 2 выполняется равенство

$$\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y = \frac{x+y}{2}$$

Имеем $\lambda^{\frac{1}{p}}x + (1-\lambda)^{\frac{1}{p}}y = \sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$. Равенство $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ выполняется только при $x = y$, значит

$$x\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} + \lambda^{\frac{1}{p}}\right) = x$$

Так как $x \neq 0$, получаем

$$\boldsymbol{(1-\lambda)^{\frac{1}{p}} + \lambda^{\frac{1}{p}} = 1}$$

Это же равенство было получено в пункте (e). Повторив аналогичные рассуждения, получим, что наибольшее значение $\boldsymbol{p = 1}$.

Ответ: наибольшее значение $\boldsymbol{p = 1}$.

<u>Пункт 2.</u> Для заданного значения $\boldsymbol{p_0}$ предложите способ нахождения функции h: (0; 1) → [0; +∞), чтобы для любого λ ∈ (0; 1), любых положительных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и для всех $\boldsymbol{p \leq p_0}$ неравенство, приведенное ниже, было верным, но при $\boldsymbol{p > p_0}$ становилось неверным.

(a) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p}(x,y)$

(b) $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$

Так как пункт (a) является частным случаем пункта (б), приведем исследование общего случая:

$$L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}(1-\lambda)x^p+\lambda y^p)^{\frac{1}{p}}, p\neq 0 \leq h(1\ -\ \lambda)x\ +\ h(\lambda)y\\ x^{1-\lambda}y^{\lambda}, p=0\end{cases}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(a)=a^{\frac{1}{p}}$$

Найдем производную второго порядка данной функции

$$f''(a)=\left(\frac{1-p}{p^2}\right)a^{\frac{1}{p}-2}$$

Рассмотрим теперь эту же функцию $f(a)=a^{\frac{1}{p}}$ при $a=(1-\lambda)x^p+\lambda y^p$:

$$f(a)=f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)=(1-\lambda)x^p+\lambda y^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$f''(a)=f''\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)=\left(\frac{1-p}{p^2}\right)(1-\lambda)x^p+\lambda y^p)^{\frac{1}{p}-2}$$

Определим знак второй производной функции $f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)$:

$$(1-\lambda)x^p+\lambda y^p)^{\frac{1}{p}-2}>0\ \ \forall x,y>0;\ |\lambda|<1$$

$$\begin{cases}\dfrac{1-p}{p^2}\geq 0, p\leq 1\\ \dfrac{1-p}{p^2}\leq 0, p\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}p\leq 1\Leftrightarrow f''\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)\geq 0\Rightarrow f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)-\text{выпуклая вниз функция}\\ p\geq 1\Leftrightarrow f''\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)\leq 0\Rightarrow f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)-\text{выпуклая вверх функция}\end{cases}$$

- Рассмотрим случай, при котором функция $f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)$ выпукла вниз, $p\leq 1$:

$$f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)-\text{выпуклая вниз функция}$$

Для данной функции выполняется неравенство Йенсена:

$$f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)\leq(1-\lambda)f(x^p)+\lambda f(y^p)$$

$$\Updownarrow$$

$$f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)\leq(1-\lambda)x+\lambda y$$

- Рассмотрим случай при котором функция $f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)$ выпукла вверх, $p\geq 1$:

$$f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)-\text{выпуклая вверх функция}$$

Аналогично с первым случаем, для данной функции выполняется неравенство Йенсена с противоположным знаком:

$$f\big((1-\lambda)x^p+\lambda y^p\big)\geq(1-\lambda)x+\lambda y$$

В соответствии с условием пункта

$$(1-\lambda)x^p+\lambda y^p)^{\frac{1}{p}}\cup h(1\ -\ \lambda)x\ +\ h(\lambda)y$$

Ввиду рассмотренных случаев для различных значений p

$$h(\lambda) = \lambda$$

Таким образом, $(1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}} \leq h(1-\lambda)x + h(\lambda)y$ верно $\forall p \leq p_0 = 1$, однако неверно $\forall p > p_0 = 1$.

При этом заметим, что в случае, когда $p = 0 \leq 1$, по условию пункта должно выполняться неравенство

$$H_{\lambda,p}(x,y) = x^{1-\lambda}y^{\lambda} \leq (1-\lambda)x + \lambda y$$

Докажем это:

Без ограничения общности будем считать, что $y \geq x$.

$$x^{1-\lambda}y^{\lambda} \leq (1-\lambda)x + \lambda y = \lambda(y-x) + x$$
$$x(x^{-\lambda}y^{\lambda} - 1) \leq \lambda(y-x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} \geq 1, \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\lambda} - 1 \leq 0, x\left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\lambda} - 1\right) \leq 0 \\ \lambda(y-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda} - 1\right) \leq \lambda(y-x)$$

Таким образом, все условия пункта выполнены.

<u>Пункт 3.</u> Существует ли такая функция h: (0; 1) → [0; +∞) и такие p_1 и p_2, что для любого λ ∈ (0; 1) и положительных x и y выполняется неравенство

(a) $H_{\frac{1}{2},p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},p_2}(x,y)$

(b) $H_{\lambda,p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p_2}(x,y)$

Так как пункт (а) является частным случаем пункта (б), приведем исследование задачи, представленной в общем виде:

$$H_{\lambda,p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p_2}(x,y) \ (14)$$

Рассмотрим предложенную в пункте 2 функцию $h(\lambda) = \lambda$:

При $p = p_0 = 1$ имеем:

$$f''\big((1-\lambda)x^p + \lambda y^p\big) = 0$$
$$H_{\lambda,p}(x,y) = L_{\lambda,h}(x,y)$$

Функция $H_{\lambda,p}(x,y)$ является монотонно неубывающей (в связи с Леммой 2), поэтому для выполнения неравенства (14) необходимо, чтобы

$$p_1 \leq p_0 \leq p_2 \Leftrightarrow p_1 \leq 1 \leq p_2$$

Таким образом, неравенство (14) выполняется при $h(\lambda) = \lambda$. Значит, существует такая функция h: (0; 1) → [0; +∞) и такие p_1 и p_2, что для любого λ ∈ (0; 1) и положительных x и y выполняется неравенство (14).

Результаты исследования:

При исследовании данной задачи получены следующие основные результаты:

Доказано, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0, 1) верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)$; найдено наибольшее значение p такое, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0; 1) верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$; для заданного значения p_0 предложен способ нахождения функции h: (0; 1) → [0; +∞), чтобы для любого λ ∈ (0; 1), любых положительных x и y и для всех $p \leq p_0$ неравенство $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p}(x,y)$ было верным, но при $p > p_0$ становилось неверным; показано, что существует такая функция h: (0; 1) → [0; +∞) и такие p_1 и p_2, что для любого λ ∈ (0; 1) и положительных x и y выполняется неравенство $H_{\lambda,p_1}(x,y) \geq L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\lambda,p_2}(x,y)$; введены и доказаны 2 леммы.

Заключение:

В данной работе представлены результаты исследований заданных функциональных неравенств вида

$$L_{\lambda,h}(x,y) \cup H_{\lambda,p}(x,y)$$

где

$$H_{\lambda,p}(x,y) = \begin{cases} (1-\lambda)x^p + \lambda y^p)^{\frac{1}{p}}, p \neq 0 \\ x^{1-\lambda}y^{\lambda}, p = 0 \end{cases}$$

$$L_{\lambda,h}(x,y) = h(1-\lambda)x + h(\lambda)y$$

для заданной функции $h(\lambda)$; доказано, что для любых положительных x и y и любого λ ∈ (0, 1) верно неравенство $L_{\lambda,h}(x,y) \geq H_{\frac{1}{2},-1}(x,y)$; найдено наибольшее значение параметра p, при котором выполняются исследуемые неравенства; найдена и изучена такая функции h: (0; 1) → [0; +∞), чтобы для определенных в ходе исследования значений параметра p выполнялись приведенные выше неравенства, а при иных значениях параметра – нарушались.

Таким образом, полностью рассмотрены и решены следующие пункты исходной постановки задачи: 1 (стр. 6), 2 (стр. 10), 3 (стр. 12).