

**Трёхгранная игралья кость**  
Научно-исследовательская работа

*Секция фундаментальной и  
теоретической физики*

***Автор:***

Наркевич Григорий Эдуардович,  
лицей БНТУ, 11"А" класс,  
ул. Жудро, д.21, кв.25,  
+375-29-614-38-93

***Научные руководители:***

Очеретняя Ольга Павловна,  
лицей БНТУ,  
учитель математики,  
тел. моб. +375-29-620-82-58

Соколова Светлана Николаевна,  
лицей БНТУ,  
учитель физики высшей  
квалификационной категории,  
тел. моб. +375-29-392-64-66

# Содержание

<b>Аннотация .....</b>	<b>3</b>
<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Цель работы .....</b>	<b>3</b>
<b>Задачи работы.....</b>	<b>3</b>
<b>Актуальность .....</b>	<b>3</b>
<b>Основные методы исследования .....</b>	<b>4</b>
<b>Постановка исследования .....</b>	<b>4</b>
<b>Основная часть .....</b>	<b>5</b>
I. Качественное описание .....	5
II. Теоретическое описание .....	5
III. Экспериментальная часть .....	14
IV. Закон больших чисел для эксперимента .....	15
<b>Основные результаты .....</b>	<b>16</b>
<b>Заключение .....</b>	<b>16</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>17</b>

## **Аннотация:**

Классической задачей теории вероятности является задача подбрасывания монеты. Подбрасывание монеты – действие, часто используемое в повседневной жизни и теории вероятностей как «генератор случайности», выдающее два возможных результата: «орёл» или «решка». При этом реальная монета представляет собой цилиндр и отличной от нуля высотой, поэтому в редких случаях в результате броска монета может встать на ребро. В данной работе приводятся формулы определения вероятности выпадения цилиндрической монеты с произвольным положением центра масс на одну из своих граней (орел, ребро, решка) в зависимости от ее параметров, а также определяются параметры цилиндрической монеты, вероятность выпадения которой на каждую из своих граней составляет  $\frac{1}{3}$ .

## **Введение.**

### **Цель работы:**

Получить закон распределения случайной величины выпадения трехгранной игральной кости на одну из граней, определить параметры равновероятностной трехгранной игральной кости.

### **Задачи работы:**

1. Описать поведение трехгранной игральной кости на качественном уровне.
2. Построить полноценную теоретическую модель, описывающую вероятность выпадения цилиндрической монеты на некоторую из своих граней в зависимости от параметров игральной кости. Определить влияющие и не влияющие параметры на вероятность выпадения цилиндра на свои грани.
3. Определить параметры равновероятностной игральной кости, вероятности выпадения которой на каждую из своих граней попарно равны.
4. Построить экспериментальную часть, в ходе которой проводятся бросания равновероятностной трехгранной игральной кости.
5. Сопоставление результатов, полученных эмпирическим путем, с теоретическими результатами.
6. Доказательство выполнимости Закона больших чисел для случайного события выпадения цилиндра на одну из граней.

### **Актуальность работы:**

В проектно-исследовательской работе была рассмотрена теоретическая модель определения вероятности выпадения цилиндрической монеты на ту или иную грань в зависимости от ее физических и геометрических параметров. Предлагаем рассмотреть следующий пример приложения нашего исследования:

В соответствии с полученными результатами, пользуясь известными физическими и геометрическими параметрами цилиндрического тела, а также статистическими данными, полученными

в ходе проведения серии случайных испытаний, можно определять положение центра масс цилиндрического тела. Это полезно для проверки качества цилиндрических деталей. А именно, если непосредственно при их производстве производить описанные испытания большого количества цилиндров, а после сравнивать их практически полученные параметры с необходимыми, можно получить содержательные выводы о свойствах рассматриваемой детали. Аналогичным образом можно также определять равномерность полученных в промышленности сплавов металлов с различными плотностями.

### **Основные методы исследования:**

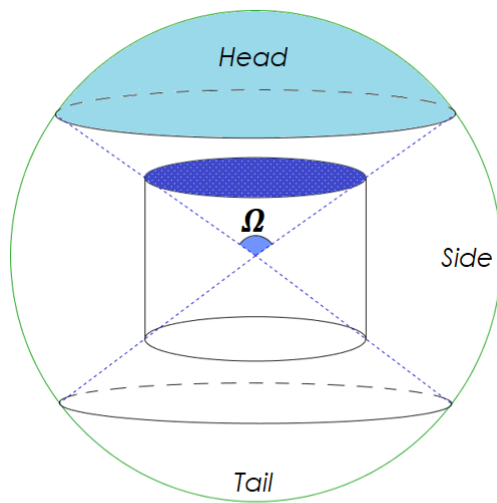
В исследовании использованы основные методы математического анализа и теории вероятностей.

### **Постановка исследования:**

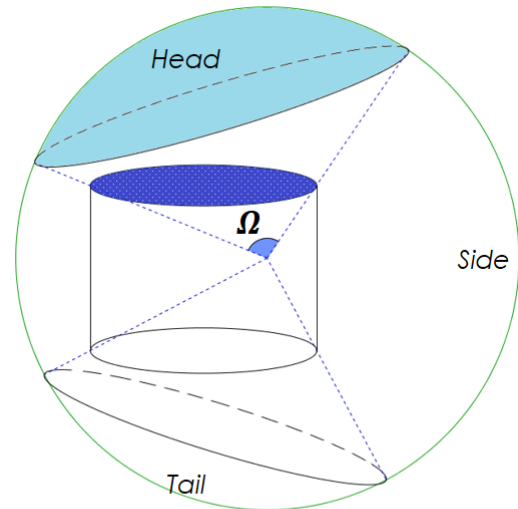
Подбросить монетку так, чтобы она встала на ребро, очень сложно. Каковы должны быть физические и геометрические параметры цилиндрической игровой кости, чтобы она с одинаковой вероятностью падала на боковую и торцевую поверхности?

# Основная часть:

## I. Качественное описание.



Геометрический центр цилиндра совпадает с его центром масс



Геометрический центр цилиндра не совпадает с его центром масс

Для построения качественной и теоретической модели перейдем в систему отсчёта, связанную с цилиндрической монетой. Вектор силы тяжести перед падением будет направлен произвольно, так как вращение монеты случайно.

Рассмотрим, грань цилиндра, через которую будет проходить вектор силы тяжести перед падением, на противоположную грань и выпадет цилиндр. После опишем сферу, центр которой совпадает с центром масс цилиндра, внутри которой находится цилиндр. Вероятность того, что вектор силы тяжести будет направлен в какие-либо точки сферы равна. Значит, вероятность того, что вектор будет направлен на участки с равной площадью, также равна.

Далее, рассмотрим проекции граней цилиндра на сферу. Если вектор силы тяжести перед падением проходит через них, то цилиндрическая монета выпадет на противоположную грань, а, значит, вероятность выпадения на некоторую грань прямо пропорциональна площади проекции противоположной грани монеты на описанную сферу. Таким образом, определим вероятности через стерadiany: вероятность того, что цилиндрическая монета выпадет на данную грань равна  $\frac{\Omega}{4\pi}$ , где  $\Omega$  - стерadian под которым видна противоположная часть из центра масс.

Также отметим, что противоположной гранью для некоторой грани основания является грань второго основания цилиндра, а противоположной гранью боковой грани – она сама.

Следовательно, можно сделать заключение: чтобы вероятности выпадения на каждую из граней цилиндра были равны, должны быть и равны стерadiany, под которыми видна каждая из граней монеты.

## II. Теоретическое описание.

### 1. Вычисление величины телесного угла.

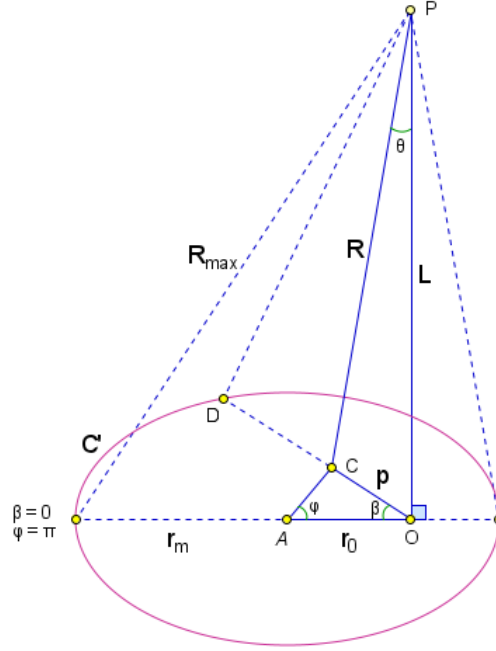
Величина телесного угла вычисляется по формуле (1):

$$\Omega = 2 \iint_{\Omega_C'} \sin \theta \, d\theta \, d\beta \quad (1)$$

Стягивающая поверхность, являющаяся кругом радиуса  $r_m$ , разбивается его диаметром, содержащим проекцию вершины телесного угла на данную поверхность, на два полукруга. При этом

величины телесных углов, стягиваемых данными полукругами, равны, поэтому удобно вычислить половину рассматриваемого телесного угла и после удвоить результат.

$$\frac{\Omega}{2} = \int_0^{\beta_{max}} \int_0^{\theta_s} \sin \theta d\theta d\beta = \int_0^{\beta_{max}} (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_s} d\beta = \beta_{max} - \int_0^{\beta_{max}} \cos \theta_s d\beta \quad (2)$$



Выразим величину угла  $\theta_s$ , исходя из построения:

$$\cos \theta_s = \frac{L}{PD} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + p_s^2}}, \quad p_s^2 = r_0^2 + r_m^2 - 2r_0r_m \cos \varphi_s \quad (3)$$

Далее, найдем величину дифференциала угла  $\beta$ , продифференцировав его тангенс по углу  $\varphi_s$ :

$$\tan \beta = \frac{r_m \sin \varphi_s}{r_0 - r_m \cos \varphi_s} \implies \frac{d \tan \beta}{d \varphi_s} = \frac{d\beta}{d \varphi_s} \frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{r_0 r_m \cos \varphi_s - r_m^2}{(r_0 - r_m \cos \varphi_s)^2} \quad (4)$$

$$d\beta = \frac{d\varphi_s}{p_s^2} \frac{r_0^2 - r_m^2}{2} - \frac{d\varphi_s}{2} \quad (5)$$

Преобразовав выражение (2) с учетом соотношений (3) и (5), получаем:

$$\frac{\Omega}{2} = \beta_{max} - \frac{L(r_0^2 - r_m^2)}{2} \int_{\pi}^0 \frac{d\varphi_s}{p_s^2 \sqrt{L^2 + p_s^2}} + \frac{L}{2} \int_{\pi}^0 \frac{d\varphi_s}{\sqrt{L^2 + p_s^2}} \quad (6)$$

Отметим, что в (6) интегрирование проводится от  $\pi$  до 0, то есть в обратном направлении. Далее, дабы привести интегралы к стандартному и более удобному для преобразований виду, введем новые обозначения:

$$\gamma = \frac{\pi - \varphi_s}{2} \quad (7)$$

$$\alpha^2 = \frac{4r_0r_m}{(r_0 + r_m)^2} \quad (8)$$

$$k^2 = \frac{4r_0r_m}{L^2 + (r_0 + r_m)^2} \quad (9)$$

$$R_{max}^2 = L^2 + (r_0 + r_m)^2 \quad (10)$$

В соответствии с новыми обозначениями из (3) получаем:

$$\cos \varphi_s = 2 \sin^2 \gamma - 1 \implies \begin{cases} p_s^2 = (r_0 + r_m)^2 (1 - \alpha^2 \sin^2 \gamma) \\ L^2 + p_s^2 = R_{max}^2 (1 - k^2 \sin^2 \gamma) \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, выражение (6) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\Omega}{2} = \beta_{max} - \frac{L}{R_{max}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} + \frac{L}{R_{max}} \frac{r_0 - r_m}{r_0 + r_m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \gamma) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} \quad (12)$$

$$\frac{\Omega}{2} = \beta_{max} - \frac{L}{R_{max}} K(k) + \frac{L}{R_{max}} \frac{r_0 - r_m}{r_0 + r_m} \Pi(\alpha^2, k) \quad (13)$$

где  $K(k)$  и  $\Pi(\alpha^2, k)$  – полные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода соответственно.

Таким образом, результирующая формула для определения телесного угла принимает вид:

$$\Omega = 2\pi - \frac{2L}{R_{max}} K(k) + \frac{2L}{R_{max}} \frac{r_0 - r_m}{r_0 + r_m} \Pi(\alpha^2, k) \quad (14)$$

## 2. Закон распределения случайной величины выпадения цилиндра на одну из граней.

$$\mathbb{P}_i = \frac{\Omega_i}{4\pi}, i \in \{heads, sides, tails\} \quad (15)$$

Из (14), получаем, что вероятность выпадения цилиндра на одно из своих оснований определяется следующим образом:

$$\mathbb{P}_{heads, tails} = \frac{\Omega_{heads, tails}}{4\pi} = \frac{1}{2} + \frac{L}{2\pi R_{max}} \left( \frac{r_0 - r_m}{r_0 + r_m} \Pi(\alpha^2, k) - K(k) \right) \quad (16)$$

Тогда вероятность выпадения цилиндра на боковую поверхность определяется следующим образом:

$$\mathbb{P}_{sides} = 1 - \mathbb{P}_{heads} - \mathbb{P}_{tails} \quad (17)$$

Таким образом, заключаем, что вероятность выпадения цилиндра на некоторую из своих граней зависит от таких параметров цилиндра, расстояние от центра масс до граней основания цилиндра, радиус цилиндра и расстояние от центра масс до его оси. В свою очередь отметим, что вероятность выпадения цилиндра на некоторую из своих граней не зависит от его массы.

## 3. Разложение в ряд полных нормальных эллиптических интегралов Лежандра.

Ввиду того, что полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра не представимы в элементарных функциях, разложим данные интегралы в степенные ряды, чтобы определить параметры равновероятностного цилиндра.

### 1. Полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

Рассмотрим функцию  $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ . Производная  $n$ -го порядка функции  $\lambda$  равна:

$$\lambda^{(n)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad (18)$$

Рассмотрим разложение функции  $\lambda$  в ряд Маклорена, пользуясь выражением (18):

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (19)$$

Найдем пределы сходимости ряда по признаку Д'Аламбера:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} |x| = |x| \quad (20)$$

Таким образом, ряд (19) абсолютно сходится при  $|x| < 1$ . Пусть  $x = k^2 \sin^2 \gamma < 1$ . Тогда полный нормальный интеграл Лежандра 1-го рода преобразуется следующим образом:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k \sin \gamma)^{2n} d\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma)^{2n} d\gamma \quad (21)$$

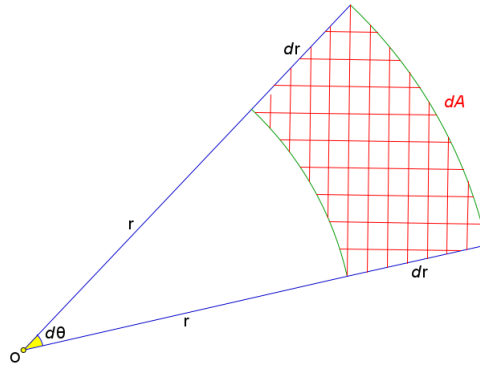
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \gamma)^{2n} d\gamma = \frac{1}{2} \mathfrak{B}\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)} \Rightarrow K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{2n!} \quad (22)$$

где  $\mathfrak{B}(x, y)$  – бета-функция. Далее, вычислим значение гамма-функции в точке  $\frac{1}{2}$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \left| u = x^{\frac{1}{2}}, dx = 2u du \right| = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \quad (23)$$

$$\left( \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA \quad (24)$$

Переходя к полярным координатам, выразим элементарную площадь  $dA$ :



$$dA = \frac{1}{2}(r + dr)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}(dr)^2 d\theta + r dr d\theta = r dr d\theta \quad (25)$$

В выражении (25) членом большего порядка малости пренебрегаем. Теперь преобразуем выражение (24):

$$dA = dx dy = r dr d\theta \Rightarrow \left( \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \quad (26)$$



Таким образом, имеем:

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \left|s = -r^2, dr = \frac{ds}{-2r}\right| = \pi \int_{-\infty}^0 e^s ds = \pi \implies \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (27)$$

Далее, преобразуем выражение (22):

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, n \in \mathbb{N}_0 \implies K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \quad (28)$$

Выражение для  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$  доказывается по индукции по числу  $n$ . Отметим также, что ввиду выражения (20), построенный ряд в рассматриваемом случае абсолютно сходится.

## 2. Полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 3-го рода.

Рассмотрим функцию  $\psi(x) = \frac{1}{(1+cx^2)\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}$ . Далее, рассмотрим разложение функции  $\psi$  в ряд Маклорена:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n x^{2n}}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} \quad (29)$$

Найдем пределы сходимости ряда по признаку Д'Аламбера:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |cx^2| = |cx^2| \quad (30)$$

Таким образом, ряд (19) абсолютно сходится при  $|c| < \frac{1}{x^2}$ . Пусть  $x = \sin \gamma, |c| < \frac{1}{\sin^2 \gamma}$ . При этом  $\frac{1}{\sin^2 \gamma} \geq 1, |c| < 1$ . Тогда полный нормальный интеграл Лежандра 3-го рода преобразуется следующим образом:

$$\Pi(c, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{(1-c \sin^2 \gamma) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \gamma}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+cx^2) \sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} \quad (31)$$

$$\Pi(c, k) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n x^{2n}}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} dx \quad (32)$$

$$\Pi(c, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n}{2n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, n + 1, k^2\right) \quad (33)$$

где  ${}_2F_1$  – гипергеометрическая функция. С учетом (27), имеем:

$$\Pi(c, k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n (2n-1)!!}{(2n)!!} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, n + 1, k^2\right) \quad (34)$$

Отметим также, что, аналогично предыдущему случаю, построенный ряд абсолютно сходится ввиду выражения (31) в рамках данной задачи.

Теперь рассмотрим последовательно два случая, когда центр масс совпадает с геометрическим центром и не совпадает.

#### 4. Параметры равновероятностного цилиндра в случае, когда центр масс совпадает с геометрическим центром.

В случае, если геометрический центр цилиндра совпадает с центром масс, имеем:

$$r_0 = 0 \implies \begin{cases} K(k) = \frac{\pi}{2} \\ \Pi(\alpha^2, k) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (35)$$

Тогда, выражение уравнение (14) принимает вид:

$$\Omega_1 = 2\pi - \frac{2\pi L}{R_{max}} \quad (36)$$

$$\mathbb{P} = \frac{\Omega_1}{4\pi} = \frac{1}{2} - \frac{L}{2R_{max}} = \frac{1}{3} \implies \frac{L}{\sqrt{L^2 + r_m^2}} = \frac{1}{3} \implies \xi = \frac{h}{r_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

#### 4. Параметры равновероятностного цилиндра в случае, когда центр масс не совпадает с геометрическим центром.

В случае, если центр масс цилиндра удален от геометрического центра на расстояние  $r_0 = \frac{r_m}{2}$  и находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра, формула (13) принимает вид:

$$\Omega_2 = 2\pi - \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \left( \frac{1}{3} \Pi \left( \frac{8}{9}, \frac{2\sqrt{2}r_m}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \right) + K \left( \frac{2\sqrt{2}r_m}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \right) \right) \quad (38)$$

Рассмотрим функцию  $f(r_m)$ :

$$f(r_m) = \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \left( \frac{1}{3} \Pi \left( \frac{8}{9}, \frac{2\sqrt{2}r_m}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \right) + K \left( \frac{2\sqrt{2}r_m}{\sqrt{h^2 + 9r_m^2}} \right) \right) \quad (39)$$

Ряд Маклорена данной функции представляет собой сумму:

$$f(r_m) = 2\pi + \frac{5\pi r_m}{2\sqrt{2}h} - \frac{189\pi r_m^2}{32h^2} - \frac{1715\pi r_m^3}{128\sqrt{2}h^3} + \frac{137155\pi r_m^4}{4096h^4} + \frac{1426455\pi r_m^5}{16384\sqrt{2}h^5} + O(r_m^6) \quad (40)$$

$$f(r_m) = 2\pi + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}\xi} - \frac{189\pi}{32\xi^2} - \frac{1715\pi}{128\sqrt{2}\xi^3} + \frac{137155\pi}{4096\xi^4} + \frac{1426455\pi}{16384\sqrt{2}\xi^5} + O\left(\frac{1}{\xi^6}\right) \quad (41)$$

Определим функцию  $g(\xi)$ , аппроксимирующую функцию  $f(r_m)$  в окрестности нуля:

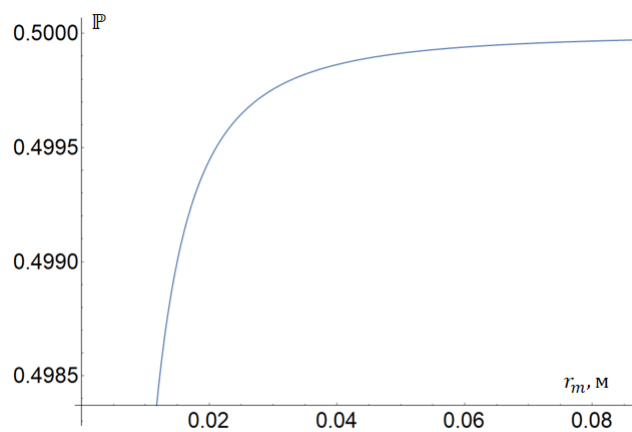
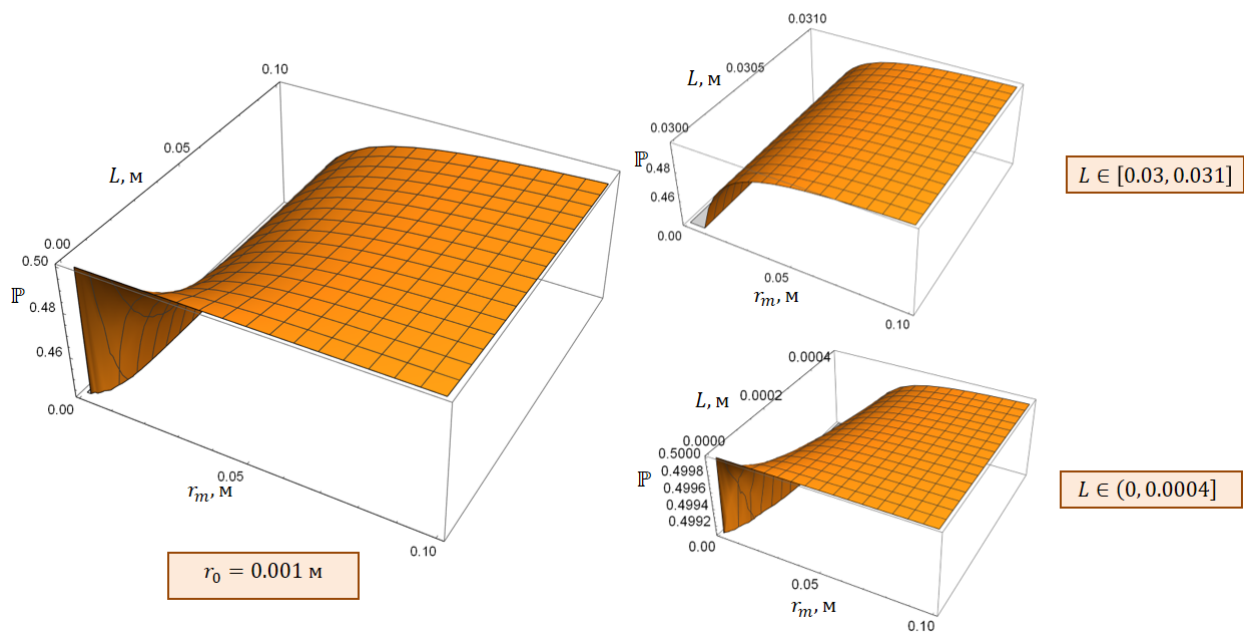
$$g(\xi) = 2\pi + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}\xi} - \frac{189\pi}{32\xi^2} - \frac{1715\pi}{128\sqrt{2}\xi^3} + \frac{137155\pi}{4096\xi^4} + \frac{1426455\pi}{16384\sqrt{2}\xi^5} \cdots = \sum_{n=0}^{47} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r_m^n \approx f(r_m) \quad (42)$$

Тогда:

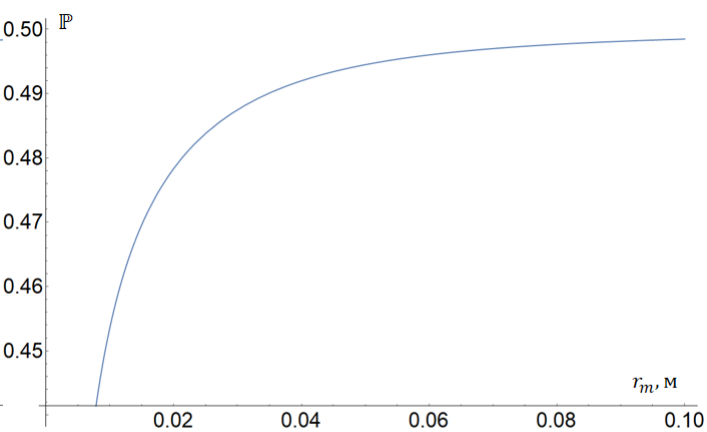
$$\mathbb{P} = \frac{\Omega_2}{4\pi} \approx \frac{2\pi - g(\xi)}{4\pi} \quad (43)$$

$$\frac{2\pi - g(\xi)}{4\pi} = \frac{1}{3} \implies g(\xi) = \frac{2\pi}{3} \implies \xi \approx 2.802384 \quad (44)$$

## 5. Зависимость вероятности выпадения основания цилиндра от $L, r_m$ при $r_0 = 0.001$ .

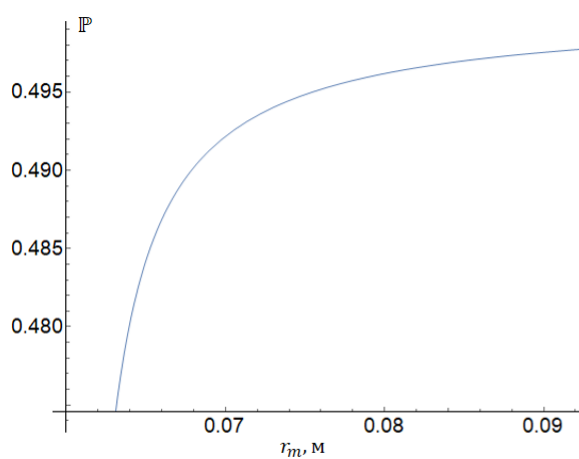
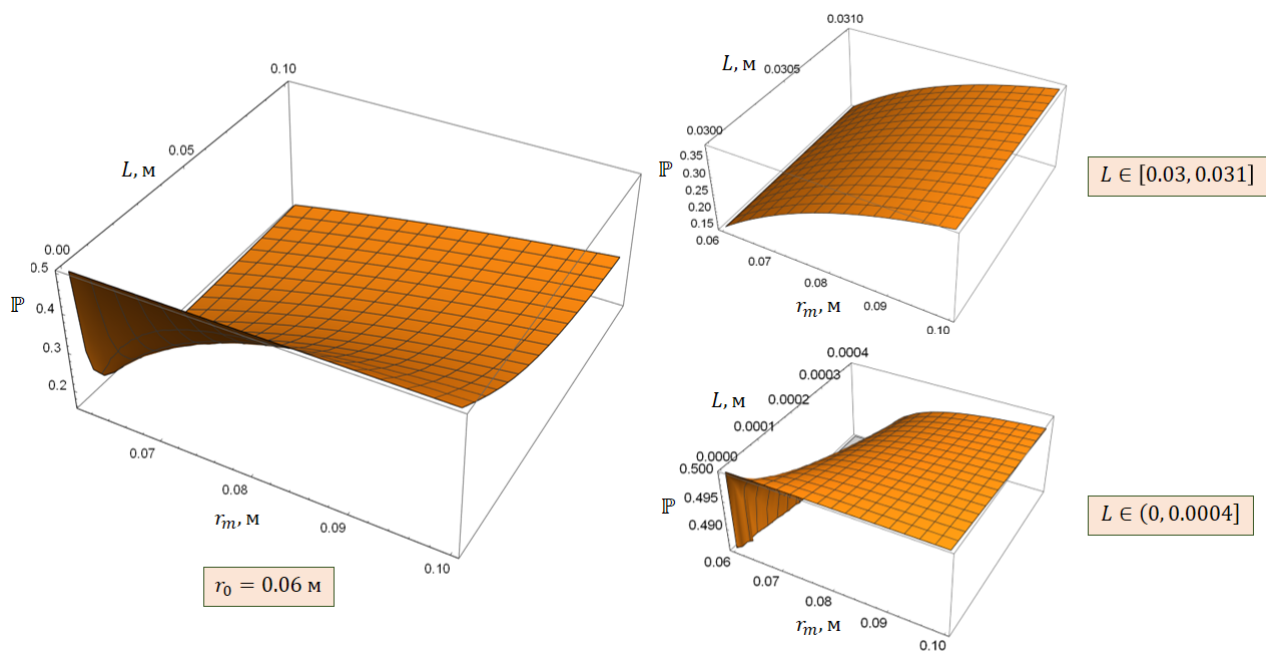


$r_0 = 0.001$  м,  $L = 0.0004$  м

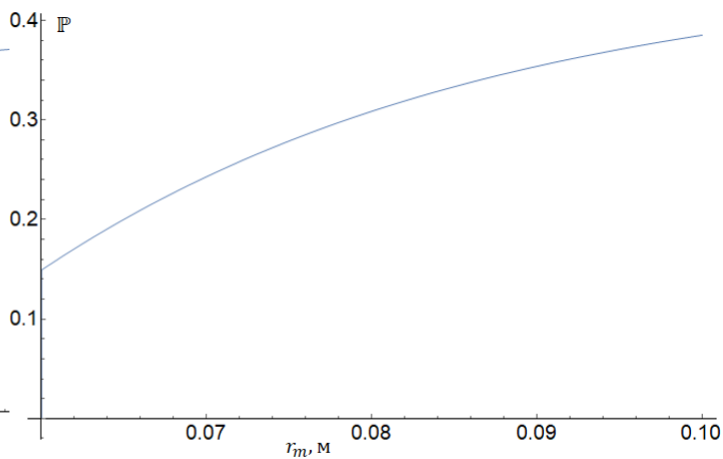


$r_0 = 0.001$  м,  $L = 0.03$  м

6. Зависимость вероятности выпадения основания цилиндра от  $L, r_m$  при  $r_0 = 0.06$ .

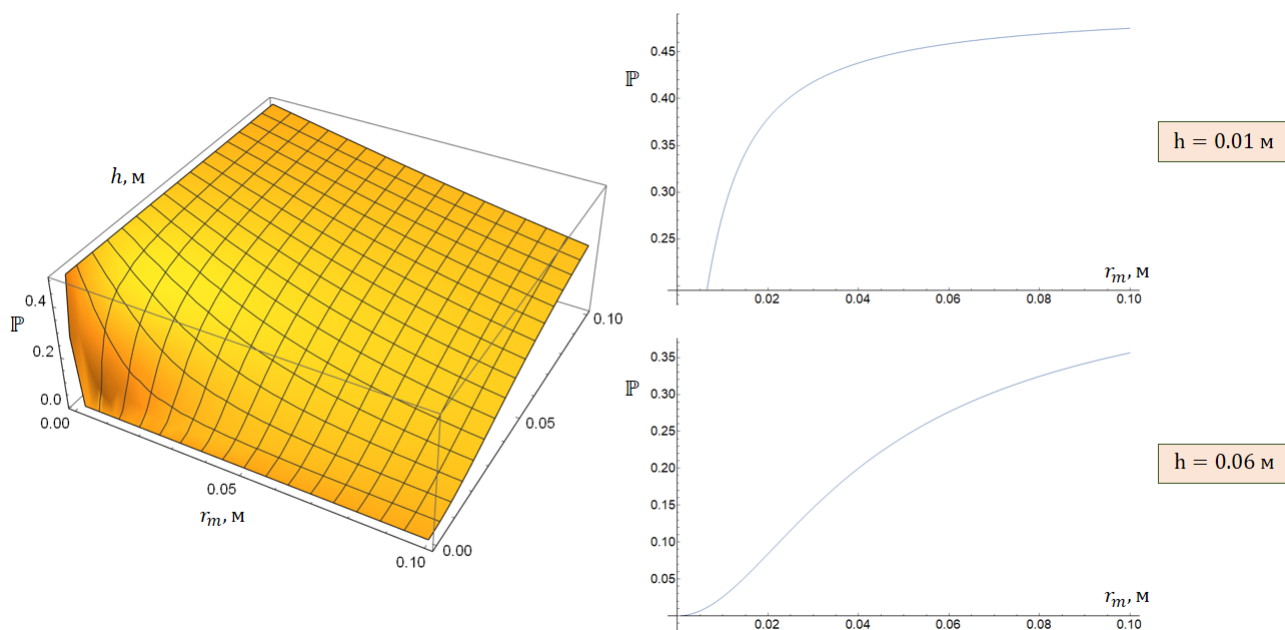


$r_0 = 0.06$  м,  $L = 0.0004$  м

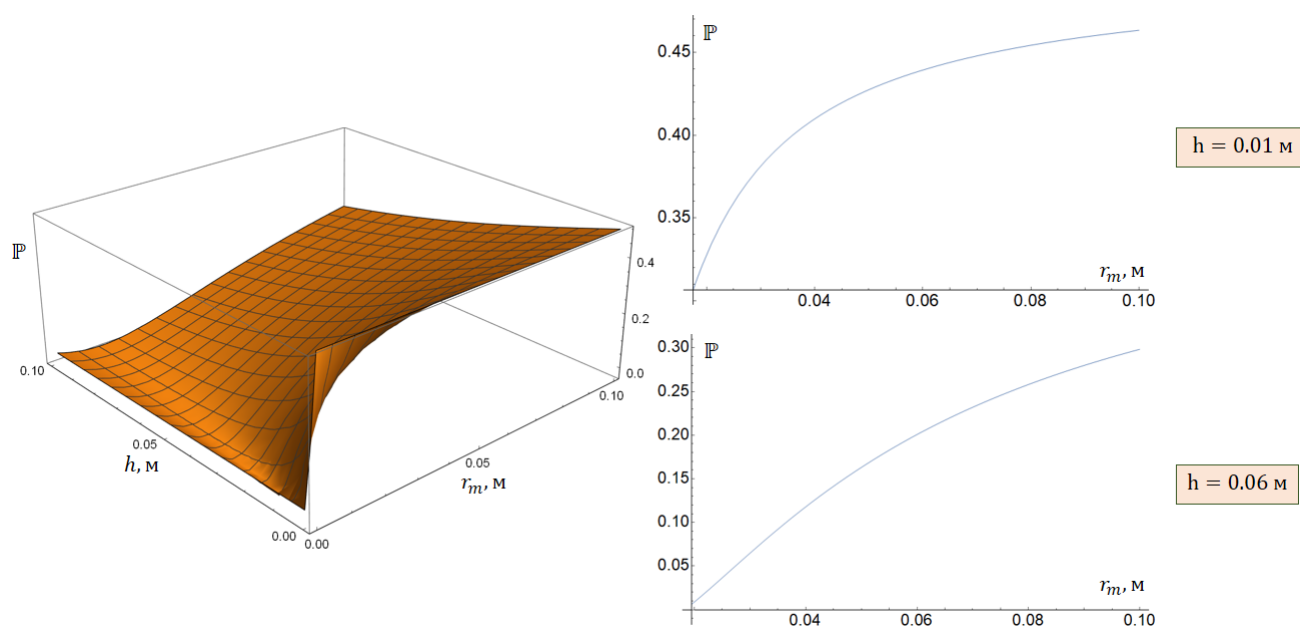


$r_0 = 0.06$  м,  $L = 0.03$  м

**7. Зависимость вероятности выпадения основания цилиндра от  $h, r_m$  в случае совпадения геометрического центра и центра масс.**



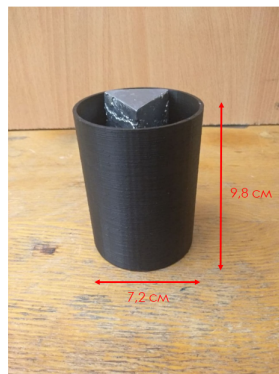
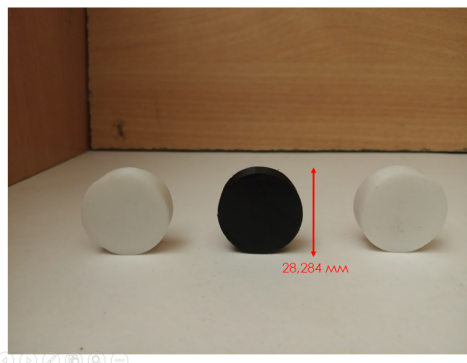
**8. Зависимость вероятности выпадения основания цилиндра от  $h, r_m$  в случае, когда центр масс цилиндра находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра.**



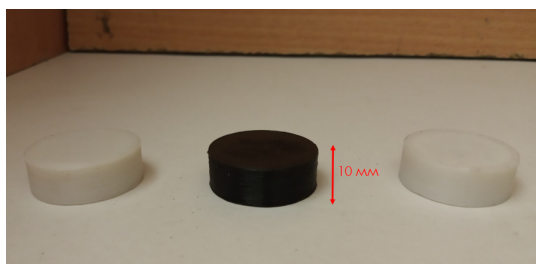
Таким образом, графики зависимостей иллюстрируют, что с увеличением радиуса цилиндра вероятность его выпадения на основание растет. При уменьшении расстояния от центра масс цилиндра до плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра, вероятность выпадения на ребро стремится к 0, а вероятность выпадения на основание – к  $\frac{1}{2}$ . Таким образом, при  $L \rightarrow 0$  теоретическая модель описывает бросание классической двугранной игральной кости.

### III. Экспериментальная часть.

В ходе исследования на 3D-принтере модели Flyingbear-Ghost 5 были изготовлены модели равновероятностных цилиндров двух типов: для цилиндров первого типа центры масс совпадали с геометрическими центрами, а для цилиндров второго типа центр масс находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра.



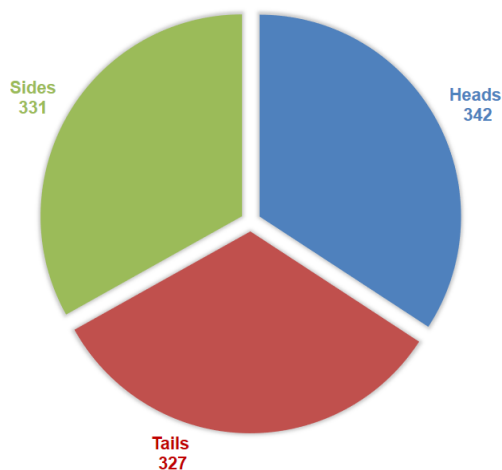
Модели равновероятностных цилиндров



Модели равновероятностных цилиндров

Далее, проведем сравнение теоретических результатов и экспериментальными, которые были получены при помощи изготовленных равновероятностных игровых монет.

**Диаграммы исходов испытаний и относительные частоты событий в случае совпадения геометрического центра и центра масс.**

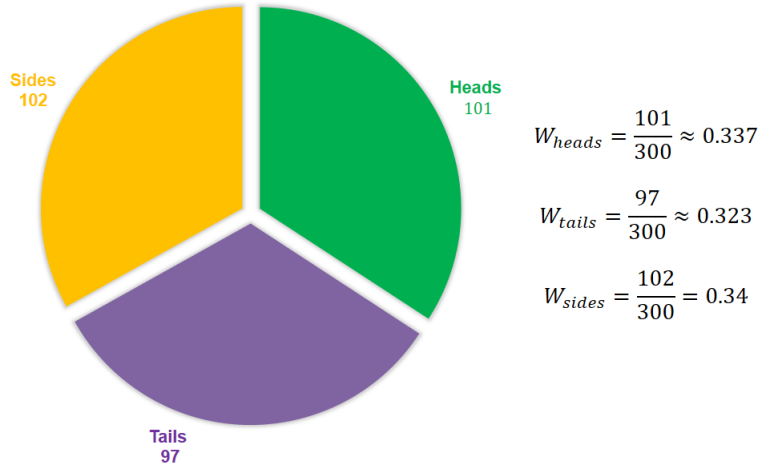


$$W_{heads} = \frac{342}{1000} = 0.342$$

$$W_{tails} = \frac{327}{1000} = 0.327$$

$$W_{sides} = \frac{331}{1000} = 0.331$$

Диаграммы исходов испытаний и относительные частоты событий в случае, когда центр масс цилиндра находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра.



Таким образом, получаем, что число благоприятных исходов испытаний близко к  $\frac{1}{3}$ , что подтверждает теоретические результаты.

#### IV. Закон больших чисел для эксперимента.

Пусть  $(\Phi, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство, где  $\Phi = \{heads, sides, tails\}$ ,  $\mathcal{F}$  – семейство подмножеств  $\Phi$ . Определим случайную величину  $\xi(w)$ ,  $w \in \Phi$ :

$$\xi(w) = \begin{cases} 1, w = heads \\ 2, w = sides \\ 3, w = tails \end{cases} \quad (45)$$

Рассмотрим дисперсию случайной величины  $\xi$ :

$$D[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 = \frac{1}{3} < +\infty \quad (46)$$

Таким образом, случайное событие выпадение цилиндра на одну из граней по теореме Чебышева подчиняется Закону больших чисел. Следовательно, при достаточно большом числе испытаний среднее значение выборки из рассматриваемого распределения близко к математическому ожиданию этого распределения.

## Основные результаты:

При исследовании данной задачи получены следующие основные результаты:

1. Проведено качественное объяснение поведения трехгранной игральной кости.
2. Введено определение вероятности выпадения кости на одну из своих граней.
3. Построена теоретическую модель, описывающую вероятность выпадения цилиндрической монеты на некоторую из своих граней в зависимости от параметров игральной кости.
4. Определены влияющие и не влияющие параметры на вероятность выпадения цилиндра на свои грани.
5. Определить параметры равновероятностной игральной кости, вероятности выпадения которой на каждую из своих граней попарно равны.
6. Проведение экспериментальную часть, которая заключается в бросания равновероятностной трехгранной игральной кости.
7. Сравнение теории и практики.
8. Доказательство выполнимости Закона больших чисел для случайного события выпадения цилиндра на одну из граней.

## Заключение:

В нашем исследовании была построена теоретическая модель, основанная на определении вероятности выпадения трехгранной игральной кости на одну из своих граней через телесный угол вершиной в центре масс, стягиваемый противоположной гранью. В исследовании была получена формула определения искомой вероятности, зависящая от таких параметров цилиндрической монеты, как расстояние от центра масс цилиндра до граней основания, радиус и расстояние от центра масс до оси цилиндра. Также были представлены графики зависимостей вероятности выпадения цилиндра на грани оснований от его параметров, с помощью которых можно судить о характере закона распределения вероятностей.

В ходе исследования на 3D-принтере модели Flyingbear-Ghost 5 были изготовлены модели равновероятностных цилиндров двух типов: для цилиндров первого типа центры масс совпадали с геометрическими центрами, а для цилиндров второго типа центр масс находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра. Расстояние от геометрического центра до центра масс было выбрано равным половине радиуса цилиндра.

Также в исследовании было проведено сравнение теоретических результатов и экспериментальными, которые были получены при помощи изготовленных равновероятностных игровых монет. В работе представлены диаграммы исходов испытаний и относительные частоты событий в случае совпадения геометрического центра и центра масс, а также в случае, когда центр масс цилиндра находится в плоскости, содержащей геометрический центр и параллельной основаниям цилиндра. В итоге было получено экспериментальное подтверждение представленного теоретического описания. При этом выполняется Закон больших чисел для случайного события выпадения цилиндра на одну из граней, что гарантирует устойчивость для средних значений рассматриваемого случайного события при достаточно длинной серии экспериментов.



## **Библиографический список.**

- [1] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019.
- [2] Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — Изд. 9-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019.
- [3] Харин Ю. С., Орлова Е. Н., Сталевская С. Н. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
- [4] А. А. Гусак, Е. А. Бричикова Теория вероятностей - 8-е изд. - Минск: ТетраСистемс, 2013.
- [5] Solid Angle Calculation for a Circular Disk F, PAXTON Nuclear Power Department, Research Division, Curtiss-Wright Corporation, Quehanna, Pennsylvania (Received April 14, 1958; and in final form, December 31, 1958).